

Diseño y Análisis de Control con Modos Deslizantes para Sistemas con Predictores de Asignación Finita de Polos

Acosta Pedro* y Fridman Leonid**

*División de Posgrado e Investigación, Instituto Tecnológico de Chihuahua, Av. Tecnológico 2909, 31310, Chihuahua, México
(email: pacosta@itchichuhua.edu.mx)

**División de Ingeniería Eléctrica, Facultad de Ingeniería, Universidad Nacional Autónoma de México, Av. Universidad 3000, 04510 Cd. Universitaria, Coyoacán, México D.F., México (email: fridman@verona.fi-p.unam.mx)

Resumen: Se presenta una forma de controlar sistemas con retardo en la entrada o en la salida utilizando modos deslizantes y predictores tipo Smith, conocidos como asignación finita de polos. La utilización de predictores elimina el castañeteo en la superficie deslizante debido al retardo. Se introduce un método de diseño de la superficie deslizante para estos predictores, se analiza el método propuesto y las posibles dificultades a resolver debido a incertidumbres en la estimación de los parámetros. Por último se presentan ejemplos numéricos para ilustrar el método y algunos aspectos del análisis desarrollado. Copyright © 2010 CEA.

Palabras Clave: predictor, modos deslizantes, castañeteo, robustez, asignación finita de polos, incertidumbres, perturbaciones.

1. INTRODUCCIÓN

Una de las primeras ideas que surgen cuando se necesita compensar retardo es la utilización de predictores. Un método muy aceptado es el uso de los predictores, introducidos por (Smith, 1957). Un buen tutorial sobre estos y otros tipos de predictores se encuentra en (Normey y Camacho, 2006). (Manitius y Olbrot, 1979) introdujeron el caso particular conocido como asignación finita de polos y observaron que al utilizar un predictor, sin conocimiento exacto del tiempo de retardo, la estabilidad del sistema depende de su capacidad para manejar la diferencia del retardo. (Fuyikawa y Yamada, 1991) observaron que cuando hay diferencias en los parámetros del predictor, con respecto al sistema, no se puede garantizar la estabilidad de lazo cerrado. (Astrom, 1997) observó una propiedad de adelanto en la frecuencia en los predictores Smith. En realidad, un retardo provoca un atraso en la frecuencia y debe ser compensado para mejorar el margen de estabilidad o para estabilizar el sistema. (Wang et al 1995) introdujeron un método para aprovechar el adelanto provocado por el predictor. Sobreestimando el retardo mejoraron la respuesta del sistema, haciéndolo más rápido. Hay algunos casos con predictores para retardos grandes e incertidumbres en la estructura del sistema (ej. Hong y Kang, 1999). Aún, si no se tiene incertidumbre en los parámetros del sistema, las perturbaciones pueden hacer que el sistema no se comporte correctamente. Desde hace tiempo, (Laughlin et al, 1987) y más recientemente (Furutani y Araki, 1998) modificaron el diseño para lograr comportamiento robusto contra algunas incertidumbres en retardo y mediciones. (Adam et al, 2000), utilizando un análisis de Nyquist, obtuvieron condiciones suficientes para estabilidad en diferentes condiciones de incertidumbre en el retardo. (Milic' et al, 2001, entre otros) han propuesto modificaciones al controlador con predictor para hacerlo robusto a las perturbaciones externas introduciendo otros elementos de realimentación.

Recientemente, también se han propuesto simplificaciones en el diseño y sintonización incluyendo sistemas inestables y de fase no mínima, (García et al., 2006), conjuntamente con un análisis de robustez.

En control con modos deslizantes, el retardo en la entrada o en la salida produce castañeteo en la superficie deslizante, degradando el desempeño del sistema. El trabajo realizado para eliminar este castañeteo es escaso (Richard, 2003). Hace ya tiempo, (Drakunov y Utkin, 1993) formularon la idea de utilizar predictores para compensar el retardo y así eliminar el castañeteo, al utilizar control con modos deslizantes. (Roh y Oh, 1999) utilizaron predictores para compensar el retardo en la entrada para sistemas con modos deslizantes, dejando algunas preguntas abiertas y un análisis incompleto del alcance de la superficie (ver Nguang, 2001 y Richard, 2003). En (Li y Yurkovich, 2001 y Fridman et al., 2001) se obtuvieron teoremas con un análisis completo para el alcance de la superficie en el espacio del predictor, aunque no se analizó el desempeño del sistema. Recientemente, (Camacho et al, 2007) utilizaron predictores Smith, conjuntamente con modos deslizantes, para mejorar el comportamiento de sistemas de primer orden con retardo ante perturbaciones, y lo probaron bajo ciertas condiciones en simulación. Este artículo propone un método de diseño de modos deslizantes, conjuntamente con predictores de asignación finita de polos, para la eliminación del castañeteo. También, se realiza un análisis del desempeño del sistema, contribuyendo al esclarecimiento de algunas de las interrogantes sobre el alcance de la superficie, la influencia de las perturbaciones y la robustez respecto a variaciones en los parámetros. El artículo está estructurado de la siguiente manera: En la sección 2 se presentan los conceptos utilizados de predictores y modos deslizantes. La sección 3, presenta formalmente el problema a resolver. En la sección 4 se introduce el diseño del controlador con modos deslizantes, utilizando predictores para compensar el retardo y evitar el castañeteo. El

análisis del control obtenido se presenta en la sección 5. Algunos ejemplos numéricos ilustrativos se presentan en la sección 6 y por último, en la sección 7 se muestran algunas conclusiones pertinentes.

2. ANTECEDENTES

2.1 Esquema de predictor utilizado

En la figura 1, se muestra el esquema utilizado, r es la señal de referencia, y es la salida del sistema, H_p y e^{-ph} conforman la planta a controlar, w es una perturbación a la entrada de la planta, H_o , H_1 , e^{-pd} compensan por el retardo y H_c ayuda a estabilizar el sistema.

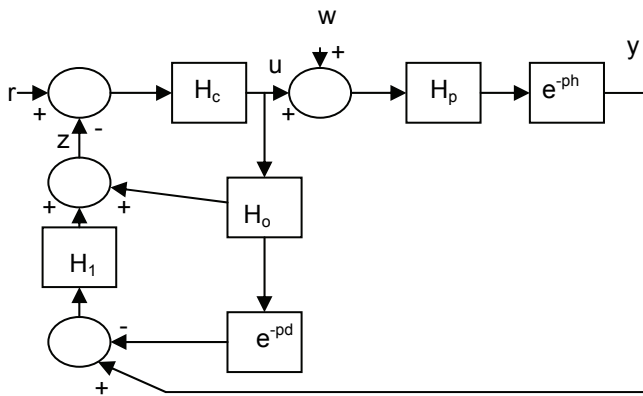


Figura 1. Diagrama esquemático mostrando al predictor de Smith utilizado

Considerando que no hay perturbación, w , o ésta no afecta en la salida, tenemos

$$z = H_o u + H_1 (y - e^{-pd} H_o u) \tag{1}$$

Ahora si $H_o = H_p$ así como $d=h$, es fácil ver que

$$z = H_p u \tag{2}$$

lo cual es precisamente la salida sin retardo ni perturbación. Es importante hacer notar que si los bloques son operadores no lineales, el concepto también es válido. Por otro lado, continuando con los sistemas lineales, podemos considerar al sistema en su forma de variables de estado,

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= Ax(t) + B(u(t) + w(t)) \\ y(t) &= x(t - h) \end{aligned} \tag{3}$$

y por tanto, utilizando transformada de Laplace

$$H_p(p) = (pI - A)^{-1} B \tag{4}$$

Si $H_1 = e^{-Ah}$, se obtiene lo que se conoce como asignación finita de polos. Este esquema es particularmente útil para realimentación de estado y diseño de control con modos deslizantes, entre otros.

Ahora, si se considera el efecto de las perturbaciones, la salida del sistema es

$$y = e^{-ph} H_p [u + w] \tag{5}$$

y la estimación quedaría

$$z = H_p u + e^{-ph} H_1 H_p w \neq H_p [u + w] \tag{6}$$

Una forma de reducir o eliminar este error es lograr que la salida sea insensible a la perturbación. Analizando la salida con respecto a la perturbación, se obtiene que

$$y = e^{-ph} H_p H_c (I + H_p H_c)^{-1} \cdot ((I + H_p H_c) H_c^{-1} - e^{-ph} H_1 H_p) w. \tag{7}$$

Conociendo el espectro de la perturbación, en teoría es factible seleccionar H_1 , de tal forma que la perturbación tenga poco o nulo efecto en la salida

2.2 Modos Deslizantes

En este apartado se expone en forma breve el problema clásico de diseño con modos deslizantes.

Consideremos un sistema de n -ésimo orden en la forma canónica controlable.

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ &\vdots \\ \dot{x}_n &= f(x) + g(x)u \end{aligned} \tag{8}$$

con $g(x) > 0$ y además

$$u = -M \text{sign}(s) \tag{9}$$

con $M > 0$ y

$$\text{sign}(x) = \begin{cases} 1 & x > 0 \\ 0 & x = 0 \\ -1 & x < 0 \end{cases}$$

además

$$s = a_0 x_1 + a_1 x_2 + \dots + a_{n-1} x_n = \sum_{i=1}^n a_{i-1} x_i \tag{10}$$

Analicemos primero la estabilidad del sistema con respecto a s . Para este caso, escojamos como candidato a función de Lyapunov

$$V = \frac{s^2}{2} \tag{11}$$

entonces, considerando $\left\| \sum_{i=2}^n a_{i-2} x_i + f(x) \right\| < K < 0$, obtenemos

$$\begin{aligned} \dot{V} &= \dot{s} \dot{s} = s \left(\sum_{i=2}^n a_{i-2} x_i + f(x) - g(x) M \text{sign}(s) \right) \\ &\leq |s| (K - g(x)M) \end{aligned} \quad (12)$$

si consideramos $(g(x)M - K) \geq N > 0$, podemos expresar (12) como

$$\dot{V} \leq -N\sqrt{2V} \quad (13)$$

Integrando la desigualdad anterior, considerando que en $t=0$ se tiene $V(s(0))=V_0$, el tiempo en que se llega a $V=0$ es

$$t \leq \frac{\sqrt{2V_0}}{N} \quad (14)$$

por lo tanto, en un tiempo finito se llega a $V=0$ y consecuentemente también a $s=0$.

Ahora el sistema está confinado a $s = \sum_{i=1}^n a_{i-1} x_i = 0$ y la dinámica del sistema (8), está determinada por

$$a_{n-1} \dot{x}_{n-1} + \dots + a_1 \dot{x}_1 + a_0 x_1 = 0 \quad (15)$$

donde \dot{x}_1 es la $(n-1)$ -ésima derivada de x_1 . Es bien conocido que si el polinomio característico de (15) tiene raíces con parte real negativa, el sistema es asintóticamente estable.

Un punto interesante en (15) es que la dinámica en la superficie no depende de $f(t)$. Esta es una ventaja del método de modos deslizantes, haciendo al control robusto ante alguna dinámica o perturbación poco conocida o indeseable. Esto sólo se logra si la señal de control entra al sistema en los mismos puntos que la dinámica o perturbación no deseada. A esto se le llama condiciones concordantes, *matching conditions*.

De todo el análisis anterior, se puede concluir que el diseño con modos deslizantes se puede considerar en dos etapas: 1) El diseño de una dinámica estable en la superficie, cuando $s=0$ y 2) Diseño de una ley de alcance de la superficie, para lograr $s=0$ en tiempo finito.

La señal de control correspondiente cuando se llega a la superficie deslizante es útil para analizar la estabilidad del sistema. Para encontrar dicha señal, (Utkin, 1999) propone hacer

$$\begin{aligned} \dot{s} &= \dot{s} = 0. \text{ Entonces, para el sistema (8) se tiene} \\ \dot{s} = 0 &= \sum_{i=2}^n a_{i-2} x_i + f(x) + g(x) u_{eq} \end{aligned} \quad (16)$$

u_{eq} es la señal de control correspondiente cuando se llega a la superficie deslizante. A esta expresión de la señal de control se le llama control equivalente. En este caso, despejando de (16), el control equivalente es

$$u_{eq} = -\frac{1}{g(x)} \sum_{i=2}^n a_{i-2} x_i + f(x) \quad (17)$$

Con esta señal de control, sustituida en el sistema original, se tiene la dinámica del sistema cuando se alcanza la superficie deslizante. Esto es particularmente útil si el sistema no está en la forma canónica controlable o si se tiene alguna perturbación que

no cumple con las condiciones concordantes.

Otra consideración importante es que la señal de control puede ser combinación de una parte continua (accionador proporcional) y otra discontinua (accionador de dos posiciones). Por ejemplo, si en el sistema (8), se utiliza

$$u = -\frac{1}{g(x)} \sum_{i=2}^n a_{i-2} x_i - M \text{sign}(s) \quad (18)$$

Entonces, para la derivada de la función de Lyapunov tenemos

$$\begin{aligned} \dot{V} &= s \dot{s} \\ &= s \left(\sum_{i=2}^n a_{i-2} x_i + f(x) + g(x) \left(-\frac{1}{g(x)} \sum_{i=2}^n a_{i-2} x_i - M \text{sign}(s) \right) \right) \\ &\leq |s| \left(\|f(x)\| - g(x)M \right) \end{aligned} \quad (19)$$

En este caso, el tamaño del control discontinuo, M , puede ser menor debido a que no tiene que sobrepasar a la norma de $\sum_{i=2}^n a_{i-2} x_i$.

3. ENUNCIADO DEL PROBLEMA

Consideremos el sistema incierto con retardo

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t-h) + g_1((x(t),t) + g_2(x(t-h),t)) \quad (20)$$

donde $x \in \mathfrak{R}^{n \times 1}$ es el vector de estados, $u(t) \in \mathfrak{R}^{m \times 1}$ es el control, $h \in \mathfrak{R}^+$ es el retardo en el tiempo, g_1, g_2 son funciones suaves representando perturbaciones e incertidumbres en el sistema (20). Además, el par $\{A, B\}$ es controlable. Un objetivo es obtener una expresión para $u(t)$, con la teoría de modos deslizantes, logrando estabilidad asintótica del origen sin castañeteo. También se desea analizar el desempeño del sistema ante perturbaciones no concordantes y robustez respecto a variaciones en los parámetros. A continuación se mencionan algunas características adicionales pertinentes.

3.1 Estructura de las incertidumbres

En un primer análisis, para cumplir con las condiciones concordantes de las perturbaciones e incertidumbres en el espacio del predictor, supongamos que

$$e^{Ah} g_1(x(t), t) = B \gamma_1(x(t), t) \quad (21)$$

$$e^{Ah} g_2(x(t-h), t) = B \gamma_2(x(t-h), t) \quad (22)$$

$$\| \gamma_1(x(t), t) \| \leq b_1 \| x(t) \| + a_1, \quad b_1, a_1 > 0, \quad (23)$$

$$\| \gamma_2(x(t-h), t) \| \leq a_2, \quad a_2 > 0 \quad (24)$$

3.2 Condiciones iniciales

Los sistemas con retardo no son controlables en el intervalo $[0, h]$, por eso es necesario introducir las condiciones iniciales para el sistema (20) en la forma

$$\begin{aligned} x(\theta) &= \varphi(\theta), & -h \leq \theta \leq 0, & \quad \varphi(\theta) \in L_1[-h, 0], \\ x(0) &= x_0 \\ u(\theta) &= \psi(\theta), & -h \leq \theta \leq 0, & \quad \psi(\theta) \in L_1[-h, 0] \end{aligned} \tag{25}$$

4. DISEÑO DEL CONTROL CON MODOS DESLIZANTES

Para compensar el retardo en el tiempo de la señal de control, se introduce un predictor en el sistema (20). Para garantizar la dinámica deseada del sistema, se propone un control con modos deslizantes, en el espacio de las variables del predictor.

4.1 Predictor

Para el sistema con retardo en la entrada (20), el predictor con asignación finita de polos ($H_1 = e^{Ah}$) es dado por

$$z(t) = e^{Ah}x(t) + \int_{-h}^0 e^{-A\theta} Bu(t+\theta)d\theta \tag{26}$$

y entonces

$$\begin{aligned} \dot{z} &= Ae^{Ah}x(t) + e^{Ah}Bu(t-h) - e^{Ah}Bu(t-h) \\ &\quad + Bu(t) + A \int_{-h}^0 e^{-A\theta} Bu(t+\theta)d\theta \\ &\quad + e^{Ah}(g_1(x(t),t) + g_2(x(t-h),t)) \\ &= Az + Bu(t) + B(\gamma_1(x(t),t) + \gamma_2(x(t-h),t)) \end{aligned} \tag{27}$$

Del desarrollo anterior, queda de manifiesto la conveniencia de la elección de $H_1 = e^{Ah}$, para eliminar el retardo en la señal de control. Si el retardo está en la salida, las incertidumbres y perturbaciones tienen un retardo adicional.

Ahora, es importante señalar que Fiagdezi y Pearson (1986) mostraron que existe el mapeo entrada/salida, que transforma el sistema retardado (20) en la forma (27), tal que el sistema (20) tiene la misma dinámica que el sistema (27). Consecuentemente, para asegurar la dinámica deseada para el sistema (20), es posible tratar con el sistema (27).

4.2 Diseño de Superficie Deslizante

Es bien conocido (Drazenovic, 1969), que cuando se alcanza la superficie, las ecuaciones para sistemas bajo condiciones concordantes no dependen de las perturbaciones. Por eso, para diseñar la superficie en modos deslizantes para el sistema (27), es suficiente considerar el sistema sin incertidumbres ni perturbaciones en la forma

$$\dot{\bar{x}}(t) = A\bar{x}(t) + Bu(t). \tag{28}$$

El diseño se simplifica si se transforma a la forma regular, para lo cual se utilizará el procedimiento propuesto por Loukjanov y Utkin (1981). Se supone que el rango(B) = m y la matriz B tiene la forma $B = \begin{bmatrix} B_1^T & B_2^T \end{bmatrix}^T$, $B = [B_1^T \ B_2^T]^T$, donde $B_1 \in \mathfrak{R}^{(n-m) \times m}$, $B_2 \in \mathfrak{R}^{m \times m}$, $\det B_2 \neq 0$. Entonces, utilizando la siguiente

transformación de coordenadas no singular

$$T\bar{x} = \begin{bmatrix} \tilde{x}_1 \\ \tilde{x}_2 \end{bmatrix}, T = \begin{pmatrix} I_{n-m} & -B_1 B_2^{-1} \\ 0 & B_2^{-1} \end{pmatrix}, \tag{29}$$

reducimos el sistema (28) a la forma regular

$$\begin{aligned} \dot{\tilde{x}}_1 &= A_{11}\tilde{x}_1 + A_{12}\tilde{x}_2 \\ \dot{\tilde{x}}_2 &= A_{21}\tilde{x}_1 + A_{22}\tilde{x}_2 + u \end{aligned} \tag{30}$$

donde $\tilde{x}_1 \in R^{(n-m)}$, $\tilde{x}_2 \in R^m$. Loukjanov y Utkin (1981) mostraron que si el par $\{A, B\}$ es controlable, el par matricial $\{A_{11}, A_{12}\}$ también lo es. Manipulando \tilde{x}_2 , como un control m-dimensional en el primer (n-m) subsistema de (30), todos los (n-m) valores característicos pueden asignarse arbitrariamente con la matriz C, en la forma $\tilde{x}_2 = -C\tilde{x}_1$. Así pues, para dar la dependencia adecuada entre \tilde{x}_2 y \tilde{x}_1 , las superficies deslizantes deben ser diseñadas en la forma

$$\tilde{s} = \tilde{S}\tilde{x} = (C \ I_m) \begin{pmatrix} \tilde{x}_1 \\ \tilde{x}_2 \end{pmatrix} = 0 \tag{31}$$

En ese caso, los movimientos para el sistema (30) están gobernados por el sistema de (n-m) dimensiones

$$\dot{\tilde{x}}_1 = (A_{11} - A_{12}C)\tilde{x}_1. \tag{32}$$

Regresando a las variables del sistema (28), se tienen las superficies deslizantes en la forma:

$$\bar{s} = S\bar{x} = 0, \quad S = \tilde{S}T, \quad \tilde{S} = (C \ I_m). \tag{33}$$

Entonces, suponiendo que las superficies son independientes entre sí y que B es de rango completo (existen m entradas independientes), SB es invertible y la dinámica del sistema (28) cuando $S\bar{x} = 0$, tiene la forma

$$\dot{\bar{x}} = (I_n - B(SB)^{-1}S)A\bar{x} \tag{34}$$

4.3 Diseño de la Ley de Control para Alcance de la Superficie Deslizante.

Para garantizar la existencia de modos deslizantes en la superficie (33), considerando el sistema (27), se propone el control discontinuo en la forma

$$u(x(t),t) = -(SB)^{-1}SAz - U_0(x(t),t)SIGN(\sigma(t)) \tag{35}$$

donde

$$\sigma = [SB]^T Sz,$$

$$SIGN(\sigma(t)) = (sign(\sigma_1(t)), sign(\sigma_2(t)), \dots, sign(\sigma_m(t)))^T$$

Con esta ley de control se alcanza la superficie deslizante en tiempo finito sin castañeteo, tal como se muestra en el siguiente teorema.

Teorema. Para la ley de control en la forma (35), existen constantes $a, b > 0$, tal que para $U_0(x(t),t) = b\|x(t)\| + a$, las superficies deslizantes $s = Sz = 0$ para el sistema (27), se alcanza en tiempo finito y está descrita por la ecuación (33).

Prueba. Considerar como candidato a función de Lyapunov a

$$V(\mathbf{s}) = \frac{1}{2} \mathbf{s}^T \mathbf{s} \quad (36)$$

tomando en cuenta (27) y utilizando el hecho de que $\|\sigma\|_2 \leq \|\sigma\|_1 \leq \sqrt{m} \|\sigma\|_2$ (Khalil, 2002), se tiene

$$\begin{aligned} \dot{V} &= \mathbf{s}^T S [Az + Bu + B(\gamma_1(x(t),t) + \gamma_2(x(t-h),t))] \\ &\leq -\|\sigma\|_2 (U_0(x(t),t) - \|\gamma_1(x(t),t) + \gamma_2(x(t-h),t)\|_2). \end{aligned} \quad (37)$$

De las suposiciones (23) y (24),

$$\|\gamma_1(x(t),t) + \gamma_2(x(t-h),t)\|_2 \leq b_1 \|x(t)\| + a_1 + a_2 \quad (38)$$

Entonces, escogiendo $b > b_1$, $a > a_1 + a_2$ y considerando que la matriz SB es no singular, se tiene

$$\dot{V} \leq -\beta \|\sigma\| \leq -\beta_1 \|\mathbf{s}\| \quad \|SB\| \leq -\beta_2 \sqrt{V} \quad (39)$$

con $\beta_1, \beta_2, \beta > 0$. Esta desigualdad garantiza la convergencia en tiempo finito a $\mathbf{s} = 0$.

Ahora, para encontrar la dinámica en modos deslizantes se tiene

$$S[Az + Bu_{eq} + B(\gamma_1(x(t),t) + \gamma_2(x(t-h),t))] = 0$$

y por tanto

$$u_{eq} = -(SB)^{-1} SAz - \gamma_1(x(t),t) - \gamma_2(x(t-h),t) \quad (40)$$

Sustituyendo (40) en (27), se tiene la dinámica deslizante en la forma (34). ■

5. ANÁLISIS DE PARTICULARIDADES Y SU EFECTO EN EL SISTEMA CONTROLADO

El teorema 1 muestra que con las suposiciones hechas, no hay castañeteo en la superficie deslizante y el sistema es robusto, en el espacio del predictor, ante las incertidumbres consideradas. También, el sistema se comporta de acuerdo a la dinámica deseada, (34), en el espacio del predictor. El análisis, que se presenta a continuación, revisa en detalle algunos aspectos no triviales que inciden en el desempeño del sistema original, (20).

5.1 Estructura de las incertidumbres y perturbaciones

Para cumplir con las condiciones concordantes en el espacio del

predictor, (21) y (22), tendríamos $e^{Ah}g = B\gamma$, donde $e^{Ah} \in \mathfrak{R}^{n \times n}$, $g \in \mathfrak{R}^{n \times 1}$, (algunos elementos en las matrices o vectores pueden ser cero). Además, $B \in \mathfrak{R}^{n \times m}$ y $\gamma \in \mathfrak{R}^{m \times 1}$ (rango igual que el vector de control). Si $m < n$, se tienen menos incógnitas que ecuaciones independientes. Esto hace imposible la solución de la ecuación, a menos que se dé el caso muy particular donde resulten sólo m ecuaciones independientes. Por tanto, en el caso general, para cumplir con la estructura de las condiciones (21) y (22), se requiere $B \in \mathfrak{R}^{n \times n}$, lo cual implica que el vector de control sea de orden n .

Para un sistema, que pueda ser representado como primer orden con retardo más incertidumbres o perturbaciones, no habría problema, si se cuenta con una señal de control. Para sistemas de orden mayor que uno, la estructura de las incertidumbres (21), (22) es muy restrictiva.

Ahora, las condiciones para el sistema original, dadas por Drazenovic (1969) en la forma.

$$g_1(x(t),t) = B\eta_1(x(t),t), \quad (41)$$

$$g_2(x(t-h),t) = B\eta_2(x(t-h),t) \quad (42)$$

no son tan restrictivas, pero no pueden garantizar la robustez en el espacio del predictor. En realidad, supongamos que se puede garantizar la existencia de modos deslizantes para el sistema (27). En este caso, la magnitud del control para alcance de la superficie, se puede deducir de

$$\begin{aligned} \dot{V} &= \mathbf{s}^T S [Az + Bu + e^{Ah}B(\eta_1(x(t),t) + \eta_2(x(t-h),t))] \\ &\leq -\|\sigma\|_2 (U_0(x(t),t) \\ &\quad - \|(SB)^{-1}\|_2 \|Se^{Ah}B\|_2 \|\eta_1(x(t),t) + \eta_2(x(t-h),t)\|_2), \end{aligned} \quad (43)$$

por lo que necesitaríamos que

$$U_0(x(t),t) > \|(SB)^{-1}\|_2 \|Se^{Ah}B\|_2 \|\eta_1(x(t),t) + \eta_2(x(t-h),t)\|_2,$$

para tener modos deslizantes y por tanto eliminar el castañeteo.

Ahora, la dinámica del sistema en modos deslizantes sería

$$\begin{aligned} \dot{z} &= (I_n - B(SB)^{-1}S)Az \\ &\quad + (I_n - B(SB)^{-1}S)e^{Ah}B(\eta_1(x(t),t) + \eta_2(x(t-h),t)) \end{aligned} \quad (44)$$

Entonces, la dinámica en el espacio del predictor no sería robusta con respecto a las perturbaciones en general.

5.2 Desviaciones del Punto de Equilibrio

Lograr el punto de equilibrio en $z=0$, no necesariamente implica lograr $x=0$. Por ejemplo, considerando $z(t)=0$, tenemos de (26)

$$x(t) = -\left(e^{Ah}\right)^{-1} \int_{-h}^0 e^{-A\theta} Bu(t+\theta) d\theta \quad (45)$$

y con el control equivalente, (40),

$$u = -\gamma_1(x(t), t) - \gamma_2(x(t-h), t) . \tag{46}$$

$x(t)$ tenderá a

$$x(t) = \int_{-h}^0 e^{-A\theta} (g_1(x(t+\theta), t+\theta) + g_2(x(t-h+\theta), t+\theta)) d\theta$$

Es claro que en el caso general, si existe el punto de equilibrio de $x(t)$, éste será diferente de cero, aún cuando las perturbaciones cumplan con la condición de concordancia para el espacio del predictor. Por tanto, la esperada robustez del sistema se pierde en el espacio de $x(t)$, aún cuando se garantice en el espacio del predictor.

5.3 Enfoque de Razumikhin y Modos Deslizantes

Roh y Oh (1999) consideraron el sistema (20) y aplicaron el enfoque de Razumikhin (ver Xu y Lu, 1994, Mao y Xu, 1997) para probar la existencia de modos deslizantes. Esto es cuestionable, porque el enfoque de Razumikhin, hasta ahora, sólo garantiza estabilidad asintótica. Para sistemas con modos deslizantes, no es suficiente tener estabilidad asintótica de la superficie, se debe llegar a la superficie en tiempo finito y esto no ha sido probado con sólo cumplir la condición de Razumikhin.

5.4 Efectos de Incertidumbres no Concordantes en la Dinámica y el Retardo.

Hay otro tipo de incertidumbres que comúnmente inciden en el comportamiento de sistemas con predictores. Supongamos que sólo se tiene un valor estimado de A , B y h , de tal forma que $A'=A+\Delta A$, $B'=B+\Delta B$ y $h'=h+\Delta h$, donde A' , B' y h' son los valores estimados. Las desviaciones de los valores reales no son incluidas en (41) y (42). Las condiciones para alcanzar la superficie son más restrictivas y el análisis para el control equivalente se complica, como puede verse a continuación.

Tenemos que

$$z(t) = e^{A'h'} x(t) + \int_{-h'}^0 e^{-A'\theta} B' u(t+\theta) d\theta \tag{47}$$

y por tanto, la dinámica del predictor es

$$\begin{aligned} \dot{z} &= Ae^{A'h'} x(t) + e^{A'h'} Bu(t-h) - e^{A'h'} B'u(t-h') + B'u(t) \\ &+ A' \int_{-h'}^0 e^{-A'\theta} B'u(t+\theta) d\theta \\ &+ e^{A'h'} (g_1(x(t), t) + g_2(x(t-h), t)) \\ &= Az + B'u(t) + e^{A'h'} B(\eta_1(x(t), t) + \eta_2(x(t-h), t)) \\ &+ \Delta A \int_{-h'}^0 e^{-A'\theta} B'u(t+\theta) d\theta + e^{A'h'} Bu(t-h) - e^{A'h'} B'u(t-h') \end{aligned} \tag{48}$$

Ahora, analizando las condiciones para el alcance de la superficie

$$\begin{aligned} \dot{V} &= s^T S[Az(t) + B'u(t) \\ &+ e^{A'h'} B(\eta_1(x(t), t) + \eta_2(x(t-h), t)) \\ &+ \Delta A \int_{-h'}^0 e^{-A'\theta} B'u(t+\theta) d\theta \\ &+ e^{A'h'} Bu(t-h) - e^{A'h'} B'u(t-h')] \\ &\leq -\| \sigma \|_2 (U_0(x(t), t) \\ &- \| (SB')^{-1} \|_2 \| (Se^{A'h'} B[\eta_1(x(t), t) + \eta_2(x(t-h), t)] \\ &- S\Delta A e^{A'h'} x(t) + Se^{A'h'} Bu(t-h) \\ &- Se^{A'h'} B'u(t-h') \|_2)). \end{aligned} \tag{49}$$

Entonces, para lograr los modos deslizantes, es suficiente que

$$\begin{aligned} U_0(x(t), t) &> \| (SB')^{-1} \|_2 \| Se^{A'h'} B[\eta_1(x(t), t) + \eta_2(x(t-h), t)] \\ &+ S\Delta A e^{A'h'} x(t) + Se^{A'h'} (B(SB')^{-1} SA'(z(t-h') - z(t-h)) \\ &+ \Delta B(SB')^{-1} SA' z(t-h') - BU_0(x(t-h), t-h) \text{sign} \sigma(t-h) \\ &+ B'U_0(x(t-h'), t-h') \text{sign} \sigma(t-h')) \|_2 \end{aligned} \tag{50}$$

Los términos más críticos, son los que contienen $U_0(x(t-h), t-h)$ y $U_0(x(t-h'), t-h')$, porque pudieran hacer imposible cumplir con la condición, aún con diferencias pequeñas entre h' y h .

Un caso particular importante es $U_0(x(t), t) = U > 0$, constante.

Para alcanzar la superficie, una condición suficiente es

$$\begin{aligned} U &> \frac{1}{1 - \| (SB')^{-1} \|_2 \| Se^{A'h'} (B+B') \|_2} \| (SB')^{-1} \|_2 \\ &\cdot \| S\Delta A e^{A'h'} x(t) + Se^{A'h'} (B[\eta_1(x(t), t) + \eta_2(x(t-h), t)] \\ &+ Se^{A'h'} B(SB')^{-1} SA'(z(t-h') - z(t-h)) \\ &+ Se^{A'h'} \Delta B(SB')^{-1} SA' z(t-h')) \|_2 \end{aligned} \tag{51}$$

Nuevamente, como se alcanza la superficie, el castañeteo se elimina. Una vez en la superficie, el control equivalente corresponde a la solución de la siguiente expresión

$$\begin{aligned} SB' u_{eq}(t) &+ S\Delta A \int_{-h}^0 e^{-A'\theta} B' u_{eq}(t+\theta) d\theta \\ &+ Se^{A'h'} Bu_{eq}(t-h) - Se^{A'h'} B'u_{eq}(t-h') \\ &= -SAz - Se^{-A'h'} B(\eta_1(x(t), t) - \eta_2(x(t-h), t)) \end{aligned} \tag{52}$$

Entonces, la dinámica en el espacio del predictor es

$$\begin{aligned} Z(p) &= \Theta(p)z(0) \\ &+ \Theta(p)(I_n - \Phi(p)(S\Phi(p))^{-1} S)e^{Ah} B(H_1(p) + H_2(p)), \end{aligned} \tag{53}$$

donde $Z(p)$, $H_1(p)$ y $H_2(p)$ son las transformadas de Laplace de $z(t)$, $\eta_1(x(t), t)$ y $\eta_2(x(t-h), t)$ respectivamente, además

$$\Theta(p) = (pI_n - (I_n - \Phi(p)(S\Phi(p))^{-1}S)A)^{-1}$$

y

$$\begin{aligned} \Phi(p) &= B' + \Delta A(pI - A')^{-1} B'(1 - e^{-h'p}) \\ &+ e^{A'h'} B e^{-hp} - e^{Ah'} B' e^{-h'p} \end{aligned}$$

En este caso, no sólo se pierde la robustez con respecto a las perturbaciones, la estabilidad también puede verse afectada. Por lo tanto, es necesario considerar los polos de $\Theta(p)$, los cuales dependerán de las incertidumbres específicas en los parámetros, además del diseño de S y la matriz de lazo abierto A .

6. EJEMPLOS

Aquí se presentan algunos ejemplos numéricos de control retardado con relé bajo perturbaciones, para poner de manifiesto las posibilidades y limitantes encontradas en la utilización de predictores con asignación finita de polos en conjunto con modos deslizantes.

6.1 Perturbaciones constantes concordantes estándares

Para ilustrar el cambio de punto de equilibrio expuesto en la sección 5.2, aún alcanzando la superficie deslizante, consideremos el sistema siguiente

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} u(t-h) + \\ 7. & \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} (g_0(x(t),t) + g_1(x(t-h),t)) \end{aligned} \tag{54}$$

con un retardo $h=1.2$ y las condiciones iniciales $\varphi(\theta) \equiv [-1.6, 1]^T$, $\theta \in [-1.2, 0]$. Supongamos que la perturbación es constante y está dada en la forma : $g_0(x(t),t)=0.5$, $g_1(x(t-h),t)=0$; y la superficie de conmutación es $s=Sz=[5 \ 1]z$. Consecuentemente, la dinámica en modos deslizantes tiene la forma $z_2 + 5z_1=0$. Las condiciones concordantes estándares se cumplen, pero las condiciones concordantes modificadas no. Para lograr llegar a la superficie deslizante en tiempo finito, se elige $a=3$ y $b=0$, ya que se debe cumplir

$$\begin{aligned} U_0(x(t),t) & - \| (SB)^{-1} \|_2 \| S e^{Ah} B \|_2 \| \gamma_1(x(t),t) + \gamma_2(x(t-h),t) \|_2 \\ & = U_0(x(t),t) - 4.9665(0.5) > 0, \end{aligned} \tag{55}$$

cumpliendo con esta condición, la dinámica del predictor al alcanzar la superficie deslizante es

$$\begin{aligned} \dot{z} &= (I_n - B(SB)^{-1}S)Az \\ &+ (I_n - B(SB)^{-1}S)e^{Ah} B(\gamma_1(x(t),t) + \gamma_2(x(t-h),t)) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \dot{z} &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -5 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} z \\ &+ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -5 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2.49692 & 0.8231983 \\ 2.4695949 & 0.850522 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} 0.5 \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -5 \end{pmatrix} z + \begin{pmatrix} 0.4115991 \\ -2.1263055846 \end{pmatrix} \end{aligned} \tag{55}$$

El punto de equilibrio se obtiene en $z_1=0.08232$ y $z_2=-0.4116$. Así pues, el origen en el espacio del predictor no es el punto de equilibrio. Para obtener el punto de equilibrio en el espacio de estado, se utiliza el control equivalente.

$$\begin{aligned} u_{eq} &= -(SB)^{-1} S(Az + e^{Ah} B(\gamma_1(x(t),t) + \gamma_2(x(t-h),t))) \\ &= - \begin{pmatrix} 5 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0.08232 \\ -0.4116 \end{pmatrix} + \\ & \begin{pmatrix} 2.49692 & 0.8231983 \\ 2.4695949 & 0.850522 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} 0.5 \end{pmatrix} = -1.4954 \end{aligned} \tag{56}$$

Ahora, para obtener el punto de equilibrio en x , sabemos que

$$z(t) = e^{Ah} x(t) + \int_{-h}^0 e^{-A\theta} B u_{eq}(t+\theta) d\theta$$

Con esto, los valores para x_1 y x_2 , cuando se llega al punto de equilibrio, son $x_1=0.34$ y $x_2=-0.04$. En las Figuras 2, 3 y 4 se pueden ver los resultados de la simulación para s , z y x . Es importante notar que la superficie se alcanza sin castañeteo.

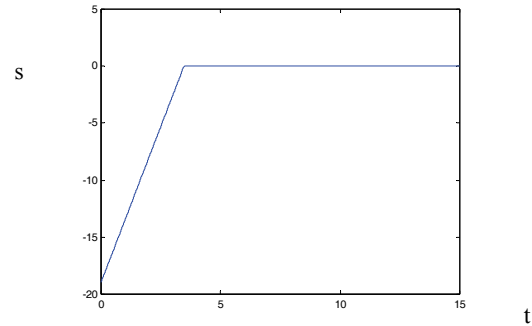


Figura 2. La superficie deslizante en el espacio del predictor se alcanza en tiempo finito sin castañeteo.

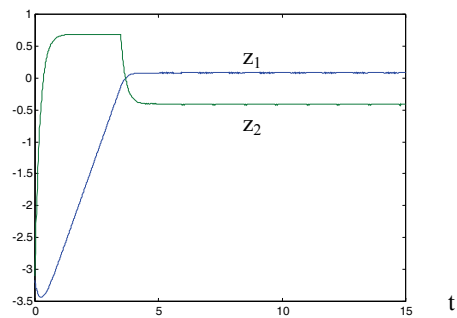


Figura 3. Comportamiento de las variables z_1 y z_2 del espacio del predictor

Así pues, en este ejemplo se puede ver que el control equivalente no logró eliminar el efecto de las perturbaciones. Aunque la superficie se alcanza sin castañeteo, el punto de equilibrio deseado no se alcanza debido a las perturbaciones.

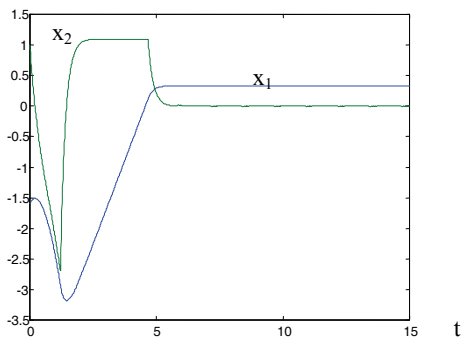


Figura 4. Evolución de x_1 y x_2 con respecto al tiempo

6.2 Perturbaciones concordantes estándares variantes de alta frecuencia

Ahora, consideremos el mismo sistema pero con perturbaciones variantes en el tiempo y no lineales tal como fue utilizado como ilustración por (Roh y Oh, 1999). Tenemos que

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} u(t-h) \\ &+ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} (g_0(x(t),t) + g_1(x(t-h),t)) \end{aligned} \tag{57}$$

con $g_0(x(t),t) = 0.3x_1 \text{sen}(x_1) + 0.2 \text{sen}60\pi t$,

$$g_1(x(t-h),t) = 0.2x_2(t-h) \text{sen}(x_2(t-h))$$

y un retardo $h = 1.2$, las condiciones iniciales $\varphi(\theta) \equiv [-1.6, 1]^T$, $\theta \in [-1.2, 0]$ y la superficie deslizante dada en la forma $S = [5 \ 1]z$. Roh y Oh (1999) concluyen que el sistema es independiente de las perturbaciones una vez alcanzada la superficie deslizante. En realidad, la ganancia del sistema es muy pequeña con respecto a las perturbaciones y no se nota en los resultados, debido a la escala considerada (Figuras 5, 6, 7). Sucede que la dinámica resultante es un filtro pasabajas de primer orden con frecuencia de corte en 5 rad/seg. Si la acción discontinua se hiciera cargo de la perturbación, como es el caso en modos deslizantes con condiciones concordantes, cambiar la frecuencia de la perturbación no debiera afectar la respuesta del sistema.

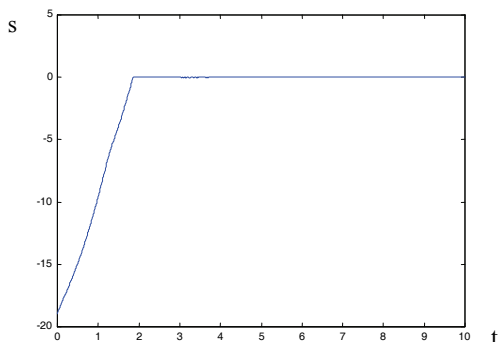


Figura 5. La superficie deslizante se alcanza en tiempo finito sin castañeteo, para el sistema (57)

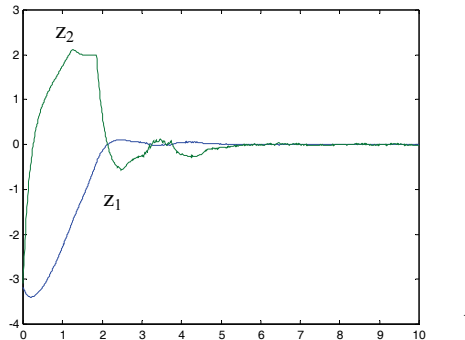


Figura 6. Las variables z_1 y z_2 , en el espacio del predictor, para el sistema (57)

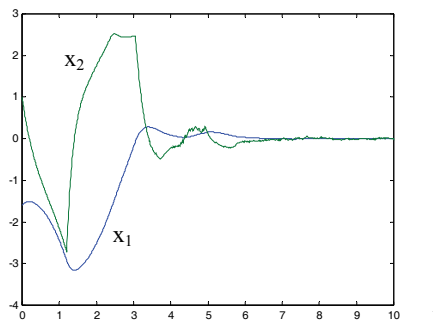


Figura 7. Comportamiento de las variables de estado x_1 y x_2 para el sistema (57)

Para ilustrar el efecto de las perturbaciones, reduzcamos la frecuencia del término independiente de x_1 en la perturbación $g_0(x(t),t)$, por debajo de la frecuencia de corte. Supongamos pues,

$$g_0(x(t),t) = 0.3x_1 \text{sen}(x_1) + 0.2 \text{sen}0.6\pi t.$$

Con esto se incrementa la ganancia de la dinámica, en cuanto a esta perturbación. En la figura 8, se muestra que la superficie deslizante se alcanza en tiempo finito y sin castañeteo en forma muy similar al caso anterior, como era de esperarse del análisis de la sección 5.1. En las figuras 9 y 10, los valores finales de z_1, z_2, x_1, x_2 ya no alcanzan lo que pareciera ser cero en el caso anterior, cuando se utilizaron frecuencias más altas.

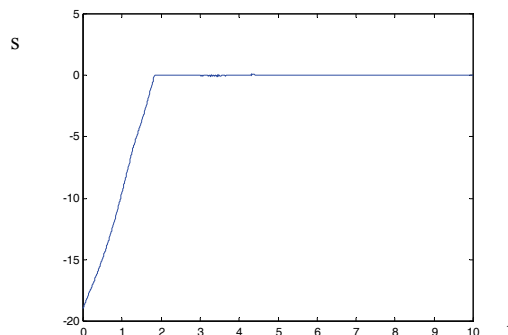


Figura 8. Alcance de la superficie deslizante en tiempo finito para el sistema (57), con la frecuencia de la perturbación reducida a 0.6π

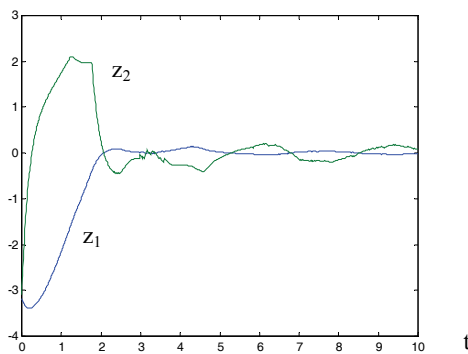


Figura 9. Comportamiento de las variables z_1 y z_2 para el sistema (57) con la frecuencia reducida a 0.6π

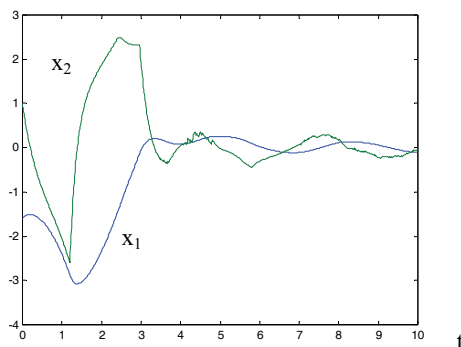


Figura 10. Comportamiento de las variables x_1 y x_2 para el sistema (57) con la frecuencia reducida a 0.6π

Las oscilaciones en estado estacionario tienen una frecuencia de 0.6π , tal como era de esperarse debido a la frecuencia de la perturbación. Esto muestra que dicha perturbación no fue eliminada por el efecto de la acción discontinua, sino debido a la ganancia en la dinámica resultante. Por tanto, es posible diseñar la superficie deslizante, tal que el sistema reducido se haga cargo de la perturbación atenuándola, o eliminándola. Esto no se logra por haber alcanzado la superficie deslizante, como es el caso en modos deslizantes con condiciones concordantes. Por otro lado, estos ejemplos ilustran la efectividad de predictores para eliminar el castañeteo.

8. CONCLUSIONES

En este estudio se analizaron sistemáticamente, por primera vez, los alcances y limitaciones de una forma de compensar el retardo en sistemas con modos deslizantes, por medio de predictores con asignación finita de polos. Se desarrolló un método para diseñar la superficie deslizante y se propuso una ley de control, que garantiza el alcance de la superficie deslizante en tiempo finito en el espacio del predictor. Se mostró que la superficie deslizante se alcanza sin castañeteo, aún con perturbaciones e incertidumbres. Se determinaron condiciones concordantes para las incertidumbres y perturbaciones en el espacio del predictor. Cumplir con las condiciones concordantes en el espacio del predictor es muy restrictivo para sistemas de orden mayor que uno. Aún si se cumplen las condiciones concordantes y el sistema es robusto a las perturbaciones en el espacio del predictor, la estimación no será correcta en el espacio de estado, debido a que en el control equivalente faltará la componente correcta de la perturbación. Se mostró que para reducir el efecto de las perturbaciones, se puede tratar de diseñar la superficie

deslizante tal que la matriz de transferencia se comporte como un filtro, que disminuya la señal para las frecuencias involucradas en la perturbación. Así pues, el uso de predictores con asignación finita de polos es efectivo para eliminar el castañeteo debido al retardo. Aunque la robustez de modos deslizantes con respecto a las perturbaciones no se conserva, existe la posibilidad de reducir su efecto en la salida diseñando apropiadamente la superficie.

9. 8. REFERENCIAS

- Adam, E. J., Latchman, H.A. y Crisalle, O. D. (2000), Robustness of the Smith Predictor with Respect to Uncertainty in the Time Delay Parameter, *Proc. American Control Conf.* Chicago, Ill., p. 1452-1457.
- Astrom, K. J. (1997), Frequency domain properties of Otto Smith regulators, *Int. J. Control*, vol. 26, p. 307-314.
- Camacho, O., Rojas, R. y García-Gabín, W., (2007) Some long time delay sliding mode control approaches, *ISA Transactions*, vol. 46, p. 95-101.
- Drakunov, S.V. y V.I. Utkin (1993). Sliding mode control in dynamic systems. *Int. Journ. of Control*, vol.55, p.1029-1037.
- Drazenovic B. (1969). The time invariant conditions for invariant systems. *Automatica*, vol. 5, p. 287-295.
- Fiagedzi Y.A. y Pearson, A. E., (1986). Feedback stabilization of linear autonomous time Lag systems. *IEEE Trans. on Automatic Control*, vol. 31, p. 847-855.
- Fridman, L., Acosta, P. y Polyakov, A., (2001), Robust eigenvalue assignment for uncertain delay control systems, *Proceedings of the 3rd IFAC International Workshop on Time Delay Systems*, Santa Fe, New Mexico.
- Furutani, E., Araki, M., (1998), Robust Stability of State-Predictive and Smith Control of Plants with a Pure Delay, *Int. J. Robust and Nonlinear Control*, vol. 8, p. 907-919.
- Fuyikawa, H. y Yamada, S. (1991), A Design Method of Self-Tuning Smith predictor for unknown time delay system, *IECON'91*, p. 1801-1806.
- García P., Albertos P., y Häglund T, (2006) Control of Unstable Non Minimum Phase Delayed systems, *Journal of Process Control*, Vol. 16, No. 10, p. 1099-1111.
- Hong, K. y Kang, D., (1999), Reclamer Control: Modelling, Identification, and a Robust Smith Predictor, *Proc. 1999 IEEE/RSJ Int. Conf. On Intelligent Robots and Systems* vol.1, p.344-349.
- Khalil, H, (2002), *Nonlinear Systems*, 3rd ed., Prentice Hall, Upper Saddle River, NJ.
- Laughlin, D.L., Rivera, D. E., y Morari, M., (1987), Smith predictor design for Robust Performance, *Int. J. Control*, vol. 46, no. 2, p. 477-504.
- Li, X. y Yurkovich, S., (2001), Sliding Mode Control of Delayed Systems with Application to Engine Idle Speed Control, *IEEE Transactions on Control Systems Technology*, vol. 9, no. 6, p. 802-810.
- Loukjanov, A. y V. Utkin (1981). Methods of reducing equations for dynamic systems to a regular form, *Automation and Remote Control*, vol. 42, 413-420.
- Manitius, A. Z. y Andrzej W. Olbrot, A. W., (1979), Finite Spectrum Assignment Problem for Systems with Delays, *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 24, no. 4, p. 541- 552.
- Mao, X. y Xu B., (1997), Comments on "An improved

- Razumikhin-type theorem and its applications” [and reply], *IEEE Transactions on Automatic Control*, **vol. 42**, no. 3, p. 429-430.
- Milic´ R. Stojic´, Milan S. Matijevic´, y Ljubijsa S. Draganovic´ (2001), A Robust Smith Predictor Modified by Internal Models for Integrating Process with Dead Time, *IEEE Trans. Automatic Control*, **vol. 46**, no. 8, p.1293-1298
- Nguang, S.K. (2001) Comments on “Robust stabilization of uncertain input delay systems by sliding mode control with delay compensation”, *Automatica*, **vol.37**, p. 1677.
- Normey-Rico, J.E. y Camacho E.F., (2006) Predicción para control: Una panorámica de control de procesos con retardo, *Revista Iberoamericana de Automática e Informática Industrial*, **vol. 3**, no.4, p. 5-25.
- Richard, J.P., (2003), Time-Delay Systems: an overview of some recent advances and open problems, *Automatica*, **vol. 39**, p. 1667-1694.
- Roh, Y.- H. y J.-H. Oh,(1999). Robust stabilization of uncertain input delay systems by sliding mode control with delay compensation, *Automatica*, **vol. 35**, p.1861-1865.
- Smith, O. J.M., (1957), Closer control of loops with dead time, *Chemical Engineering Progress*, **vol. 53**, no. 5, p. 217-219.
- Utkin, V.I., Guldner, J. y Shi J. (1999) *Sliding mode Control in Electromechanical Systems*, Taylor & Francis, Philadelphia.
- Wang, Q.G., Lee, T.H., Tan, K.K. y Bi, Q., (1995), A new approach to analysis and design of Smith Predictor Controllers, *Proc. American Control Conf.* Seattle, Washington, **vol. 6**, p. 4194-4198.
- Xu, B. y Liu, Y., (1994), An Improved Razumikhin-Type Theorem and its applications, *IEEE Trans. On Automat. Contr.*, **vol. 39**, no. 4, p. 839-841.