

UNIVERSIDAD POLITÉCNICA DE VALENCIA

Departamento de Matemática Aplicada



Aplicaciones Arquitectónicas de la Teoría de Grafos

PROYECTO DE MASTER

Ingrid Noguera Cuenca

Dirigido por: Ana Martínez Pastor

Valencia, Diciembre de 2009

“Graph drawing is the best possible field I can think of: it merges aesthetics, mathematical beauty and wonderful algorithms. It therefore provides a harmonic balance between the left and right brain parts.”

Donald Knuth, Simposio Graph Drawing '96

Resumen

En numerosas aplicaciones se utilizan representaciones gráficas para esquematizar información. El objetivo de estas representaciones es simplificar la estructura de los datos en un espacio relativamente pequeño. Por lo general un dibujo vale más que mil palabras, siempre que el dibujo sea claro y legible. El dibujo de grafos es una joven área de investigación que plantea justamente ese problema: construir representaciones geométricas de grafos esquematizando la información de la manera más sencilla posible.

En este trabajo se estudian las representaciones de grafos que constituyen particiones ortogonales del plano y tienen aplicación práctica en diversos problemas de diseño arquitectónico. La teoría de grafos es una herramienta importante para analizar la conectividad de locales en un diseño, puesto que permite visualizar explícitamente las conexiones espaciales, las cuales pueden ser tanto de comunicación física como visual, acústica o de adyacencias.

Los problemas que se plantean consisten en determinar qué grafos admiten una representación en la que sus vértices están asociados a objetos geométricos (segmentos o rectángulos) y sus aristas son relaciones entre esos objetos (de visibilidad o de adyacencia).

El problema de determinar qué grafos admiten este tipo de representación y, en caso de que la admitan encontrarla, se resuelve en este trabajo para grafos en el plano, con el objetivo de enumerar y clasificar las posibles disposiciones de modelos de planta.

Abstract

Graphic representations to schematize information are used in numerous applications. The objective of these representations is to simplify the structure of the data in a relatively small space. In general a drawing be of value more than thousand words, as long as the drawing it is clear and readable. The drawing of graphs is a young area of investigation that outlines justly that problem: building geometric representations of graphs by schematizing the information of the more simple possible way.

The representations of graphs that constitutes orthogonal divisions of the plane and have practical application in diverse problems of architectural design are studied in this dissertation. The graph theory is an important tool to analyze the connectivity of rooms in a design, because it permits explicitly visualize the space connections, those which can be so much of physical communication as visual, acoustic or of adjacencies.

The problems that are outlined consist in deciding what graphs allow a representation in which your vertexes are associated to geometric objects (segments or rectangles) and your edges are relations between those objects (of visibility or of adjacency).

The problem to decide what graphs allow this type of representation and, in case of they allow it find it, is resolved for graphs in the plane in this dissertation, with the aim to enumerate and classify the possible floor plan arrangements.

Indice General

1. Introducción
2. Disposiciones de Modelos de Planta
3. La Enumeración de Disposiciones de Modelos de Planta Trivalentes
4. Modelos Arquitectónicos Fundamentales y Proceso de Ornamentación
5. La Forma de las Regiones en las Disposiciones de Modelos de Planta
6. Las Dimensiones de las Regiones en las Disposiciones de Modelos de Planta
7. Algunas Otras Aplicaciones de la Teoría de Grafos en Arquitectura
8. La Enumeración de Problemas de Diseño a Partir de Grafos Bicoloreados
9. Referencias

1. Introducción

Cualquier problema de diseño puede ser planteado como un problema de construcción de un mecanismo el cual tiene un conjunto de propiedades funcionales específicas. Dichas propiedades funcionales se pueden utilizar para determinar un conjunto de variables el cual define una solución espacial. Este espacio se busca para un diseño adecuado.

Es importante conocer las posibles formas o estructuras que pueden tomar los diseños. Si estas posibles estructuras se pueden generar, entonces pueden estar sujetas al análisis para determinar sus propiedades funcionales.

En el diseño arquitectónico, el problema central concierne a la síntesis de los modelos de planta. Una vez el diseñador tiene un conjunto de posibles modelos de planta que responden a las exigencias del cliente, puede someterlos a pruebas analíticas como parte de un proceso de selección. De esta manera, puede evaluarse un número más pequeño de posibles diseños antes de adoptarse el diseño definitivo. En la práctica, este procedimiento tiende a ser iterativo y cíclico.

En las primeras fases del diseño, el diseñador escoge un conjunto de posibilidades adecuadas, basándose en la experiencia y la intuición. Sin embargo, usándose métodos combinatorios, se pueden encontrar reglas de producción para generar todos los diseños posibles (de cierto tipo), y poder enumerar y clasificar estos diseños de tal forma que ayude en la selección de los diseños deseados.

En las fases iniciales, los diseños son objetos combinatorios o puras estructuras. Los diseños potenciales en estas fases iniciales pueden a menudo enumerarse detalladamente en un sentido práctico. Tales diseños maduran durante el proceso de diseño adquiriendo mayor carácter mediante la transformación espacial, física y material. El efecto múltiple de estas transformaciones lleva a que el diseñador posea posibilidades infinitas.

El estudio de las transformaciones se centra en arquitectura en la información morfológica, descansando en una investigación de la premorfología o en el estudio de las formas fundamentales arquitectónicas.

En este trabajo se investiga la premorfología de los modelos de planta, y se demuestran ciertos tipos de transformaciones relacionadas con la forma y el tamaño. Se trata de un ejercicio de la teoría de grafos.

La teoría de grafos ha sido usada en aproximaciones previas a la síntesis de modelos de planta, aunque no se ha dado ninguna presentación sistemática que defina un conjunto fundamental de modelos y sus transformaciones siguientes.

Levin [08] introduce un grafo cuyos vértices representan áreas de actividad o espacios en el modelo de planta y cuyas aristas representan adyacencia o contigüidad de dichos espacios, y demuestra que este grafo es una representación útil en los problemas de asignación espacial actuales.

Cousin [04] desarrolla la representación de adyacencia del grafo, pero al igual que Levin, no resuelve claramente ni la posible integración de los modelos de planta en la adyacencia de los grafos, ni el problema de realizar esta estructura de adyacencia como un modelo en planta.

Grason [07] también usa una adyacencia de grafos, restringiendo las realizaciones de estructuras de adyacencia a disecciones rectangulares, es decir, modelos de planta en los cuales cada espacio es rectangular, al igual que el límite del modelo.

Teague [15] restringe el tipo de modelo de planta de forma similar, pero representa los espacios rectangulares por arcos en una red.

Mitchell [10] genera conjuntos de disecciones rectangulares para números pequeños de espacios, y de esta manera estos conjuntos permiten escoger diseños para pequeños proyectos de casa, tomando las disecciones rectangulares como su conjunto de formas inicial o básico.

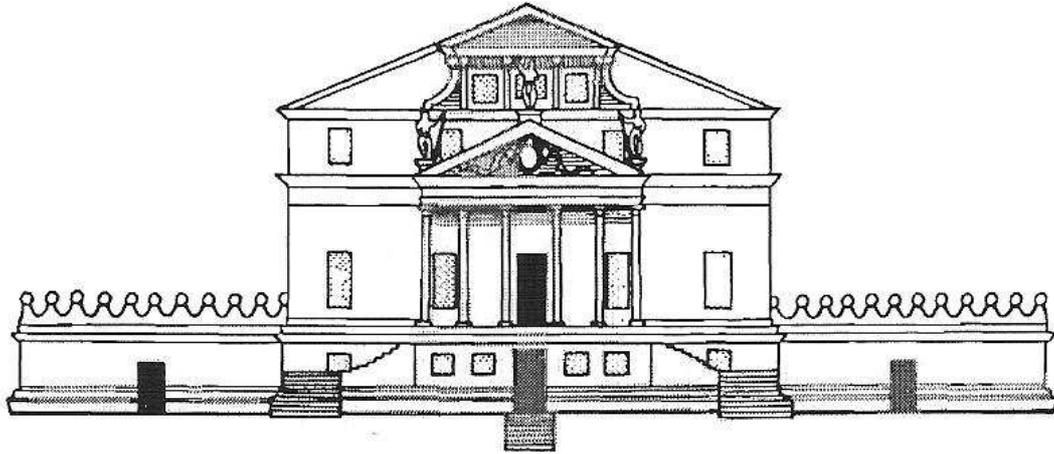
En este trabajo, sin embargo, se consideran las disecciones rectangulares como un conjunto obtenido por la transformación de un conjunto más general de las formas fundamentales arquitectónicas.

2. Disposiciones de Modelos de Planta

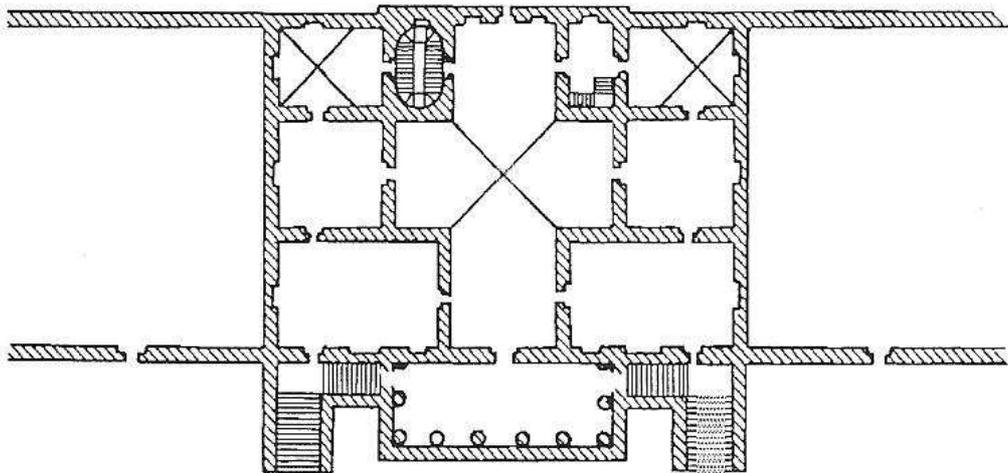
Un modelo de planta es un conjunto finito de paredes en el plano. Estas paredes son de muchos tipos según sus propiedades arquitectónicas detalladas, entre las cuales normalmente se incluyen la presencia de puertas y ventanas, las propiedades térmicas y de carga, y una variedad de otras características dependiendo del contexto.

Un proyecto se construye para permitir un conjunto de actividades dentro de un área dada. En los modelos de planta, particularmente en viviendas domésticas, es a menudo necesario que las áreas de actividad individual se cierren con paredes. En los esquemas de planta abierta, sin embargo, las paredes o particiones definen las áreas de actividad, pero no definen necesariamente regiones cerradas. Estos esquemas de planta abierta se obtienen a partir de proyectos con paredes que cierran áreas de actividad, retirando algunas de dichas paredes.

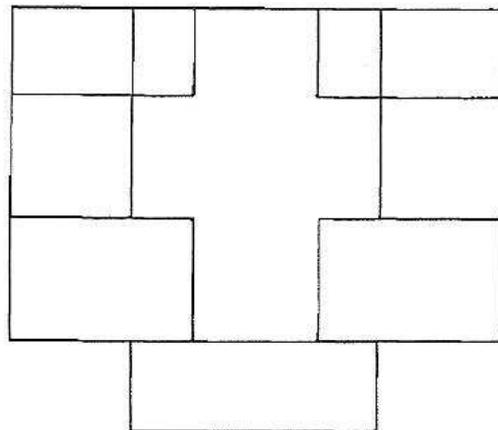
La siguiente figura muestra la Villa Malcontenta de Palladio, en la cual las paredes definen claramente regiones cerradas:



(a)

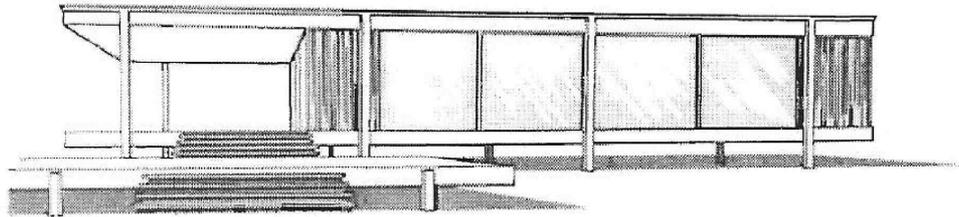


(b)

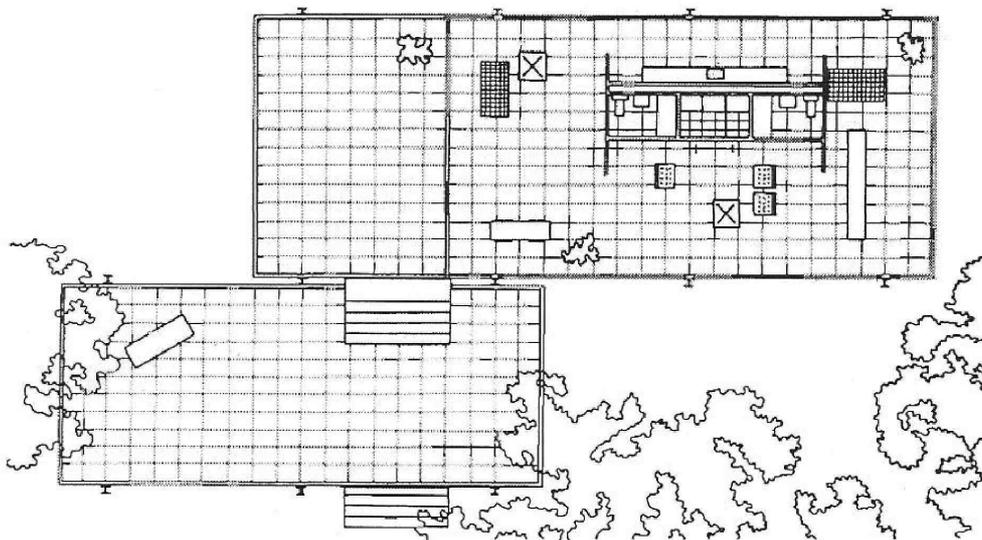


(c)

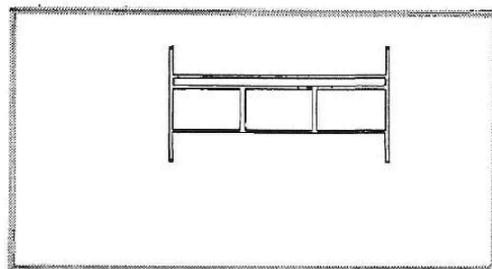
Esta figura en cambio, muestra la Casa Farnsworth de Mies Van Der Rohe, la cual es un tipo de planta abierta:



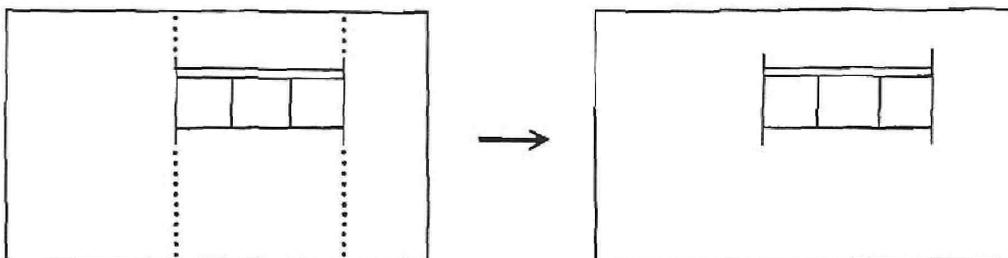
(a)



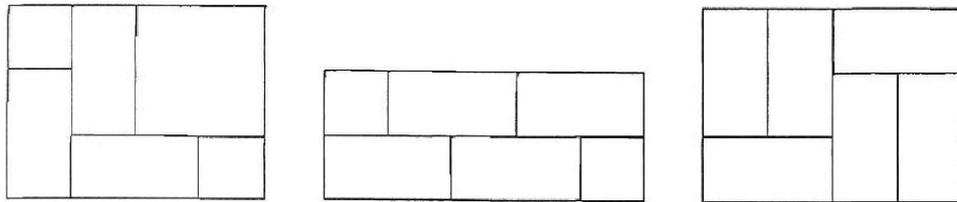
(b)



(c)



Aunque el tipo, forma, longitud y orientación de las paredes están exactamente especificadas en el proyecto, es propósito de este trabajo examinar las posibles disposiciones de las paredes sólo en cuanto a su incidencia y disposición relativa en el plano. Por ejemplo, aunque las paredes de los proyectos mostrados en las siguientes figuras tienen longitudes y orientaciones diferentes, se considera que tienen las mismas disposiciones:



El objetivo es investigar las estructuras subyacentes de los modelos de planta, y las nociones de grafo planar y grafo plano son particularmente relevantes para este propósito, por lo que es necesario definir primeramente ciertos conceptos:

Un **grafo planar** es un grafo que puede ser dibujado en el plano sin que ninguna arista se interseque. Para precisar el significado de grafo planar se define qué se entiende por "dibujar" un grafo sobre S:

Definición:

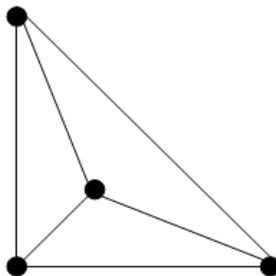
Sea $G = (V, E)$ un grafo y sea S una superficie en \mathbb{R}^3 .

A cada vértice $u \in V$ se le hace corresponder un punto distinto de S y a cada arista $(u, v) \in E$ se le hace corresponder una curva simple sobre S tal que los puntos extremos de la curva son los puntos correspondientes a los vértices u y v. De forma que las curvas mencionadas no se cortan excepto en los extremos que puedan tener en común y si el grafo es conexo la superficie queda dividida en un número finito de regiones simples conexas.

Este sistema de puntos y curvas sobre S se denomina inmersión de $G = (V, E)$ en S.

Si un grafo tiene inmersión en el plano se dice que es planar y a la inmersión misma se le llama **grafo plano**.

Por ejemplo, el grafo K_4 es plano, pues admite representación gráfica plana (ningún par de aristas se intersecan, excepto en los vértices):



Corolario:

Un grafo es planar sobre el plano si y solo si es planar sobre la esfera.

Distintos grafos planares con una región etiquetada representan distintas disposiciones de paredes en modelos de planta, correspondiendo las aristas a las paredes, y la región etiquetada al exterior.

Sólo se consideran los modelos de planta con tales disposiciones, asumiéndose además que las paredes forman un grafo conexo, ya que por lo general, los componentes individuales de un modelo de planta desconexo se pueden tratar como entidades separadas, cuya disposición presenta un problema de replanteo del lugar, más que un problema de modelo de planta.

Cabe resaltar que la diferencia entre tales problemas yace no tanto en el tipo de estructura subyacente, como en la interpretación de dicha estructura. En realidad, el análisis presentado puede ser usado (con la interpretación adecuada) para dirigir desde problemas de disposición del mobiliario en una oficina hasta el replanteo de una ciudad.

Un grafo planar es **enraizado** si se distingue un vértice en particular designándose como raíz, dirigiéndose una arista R hacia o desde la raíz y distinguiéndose un lado de R .

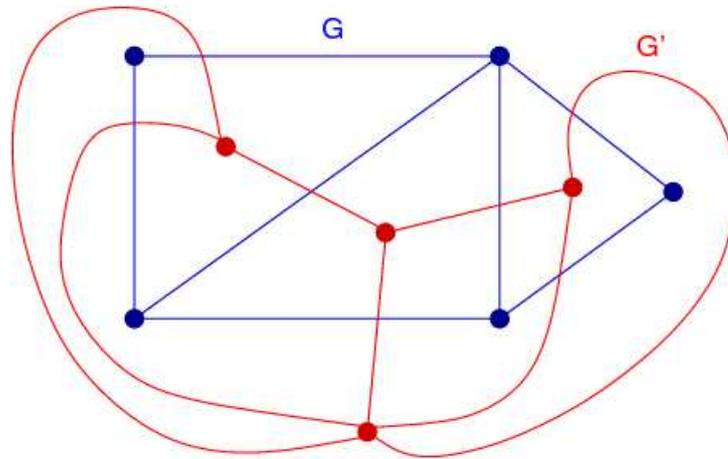
R es la arista raíz y la región que queda en el lado distinguido de R es la región raíz.

Tutte [17] indicó que enraizar un grafo destruye su simetría, y en vista de esto, es mucho más fácil enumerar grafos planares enraizados que no enraizados.

Un grafo planar enraizado representa una disposición de modelo de planta con la región raíz como la región exterior, la arista raíz como la fachada, y un sentido preferente dado por la dirección de la arista raíz.

Si un grafo planar con una región etiquetada está inmerso en el plano con todas sus regiones finitas excepto la región etiquetada, el grafo plano que se obtiene proporciona una representación natural de disposiciones de modelos de planta.

Un grafo **dual** G' de un grafo plano G es un grafo que tiene un vértice por cada región de G , incluyendo la región infinita, y una arista por cada arista en G uniendo a dos regiones vecinas:



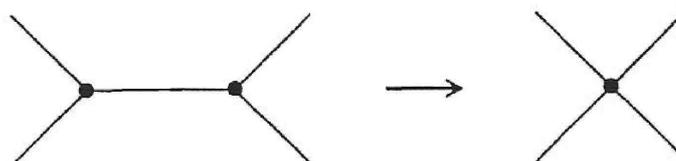
Cualquier dual geométrico de un grafo plano es otro grafo plano que representa una disposición de modelo de planta, pero ahora desde el punto de vista de las adyacencias entre regiones. Cabe resaltar que una región puede ser adyacente consigo misma, y que las regiones pueden tener múltiples adyacencias. Para cada grafo plano hay, en general, muchos grafos planos duales, pero a cada grafo plano enraizado le corresponde un único grafo plano dual enraizado de forma obvia.

Los grafos planos se entienden como una descripción o representación de los modelos de planta, considerados como disposiciones de paredes. Sin embargo, la síntesis del problema de diseño arquitectónico de modelos de planta a menudo empieza con un conjunto de necesidades de adyacencia o proximidad entre varias actividades, y el primer objetivo es construir una disposición de regiones adecuada.

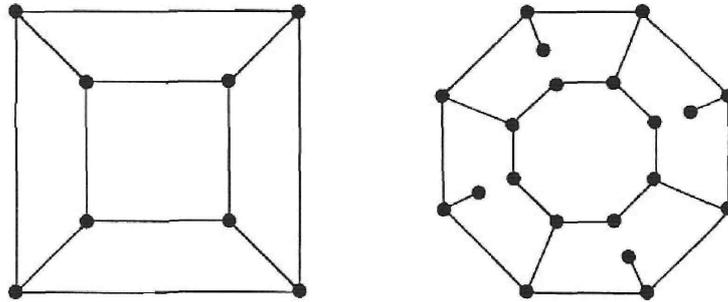
Es decir, en esta fase no interesa la disposición de paredes sino la disposición de las regiones que definen dichas paredes. En otras palabras, es el amplio contorno del modelo el que es importante, más que los detalles.

Ya que ahora solo se requieren las paredes para definir las regiones, los grafos planos correspondientes que representan las disposiciones de las regiones no contienen vértices de grado 1 ó 2, sino que todos tienen vértices de grado al menos 3.

En realidad, son normalmente **trivalentes**, de modo que sus vértices son todos incidentes a exactamente tres aristas, ya que las paredes generalmente forman ángulos no menores que un ángulo recto y aunque cuatro paredes a menudo forman ángulos rectos, se considera éste como el caso límite de un par de vértices trivalentes:

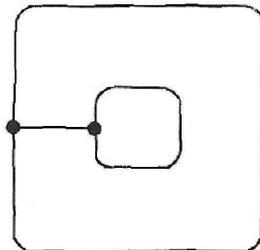


Las siguientes figuras muestran un grafo plano representando una disposición de regiones y un grafo plano con la misma disposición de regiones pero con paredes extra:

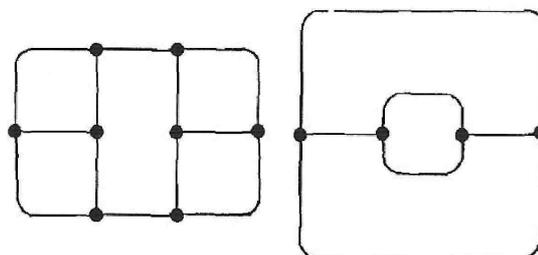


Las disposiciones de modelos de planta representadas por grafos planos trivalentes se pueden clasificar según la presencia de **puentes** y **cortes de 2 aristas** en dichos grafos, donde un puente es una arista cuya eliminación desconecta el grafo y un corte de 2 aristas es un par de aristas cuya eliminación desconecta el grafo.

Un puente en el grafo representa una sola pared cualquiera que conecta dos partes del modelo, o un solo espacio el cual forma un anillo:



Un corte de 2 aristas representa cualquier espacio de paso en el modelo, o un par de espacios formando un anillo:



Cabe destacar que la existencia de un espacio de paso o pasillo es una característica arquitectónica conveniente.

Los grafos trivalentes sin ningún puente ni corte de 2 aristas se llaman **triconexos**.

El conjunto de grafos planos trivalentes triconexos es particularmente útil para acercarse al problema de síntesis de modelos de planta, ya que representa un conjunto básico de disposiciones de modelos de planta a partir del cual pueden obtenerse todos los otros por operaciones sucesivas.

Estas operaciones forman las primeras fases del proceso de ornamentación a partir del cual se construyen los modelos de planta detallados.

3. La Enumeración de Disposiciones de Modelos de Planta Trivalentes

Antes de considerar el proceso de ornamentación se examinan las disposiciones de modelo de planta representadas por grafos planos trivalentes sin puentes y se dan algunos resultados numéricos relevantes:

Sea A_r el número de disposiciones de modelos de planta con r espacios, representadas por grafos planos trivalentes enraizados sin puentes, con $r + 1$ regiones. El valor de A_r fue determinado por Tutte [16] y es el siguiente:

$$A_r = \frac{2^{r-1} 3! (3r - 4)!}{(r - 2)! 2r!}$$

Los grafos planos duales de los grafos trivalentes son los **grafos triangulares**. Si un grafo plano trivalente es triconexo, entonces su dual no tiene aristas múltiples, es decir, no tiene varias aristas entre dos vértices, y se llama **triangulación**.

Sea B_r el número de disposiciones de modelos de planta con r espacios, representadas por grafos planos trivalentes triconexos enraizados, con $r + 1$ regiones. Entonces B_r es el número de triangulaciones enraizadas con $r + 1$ vértices, dado por:

$$B_r = \frac{2(4r - 7)!}{(r - 1)! (3r - 4)!}$$

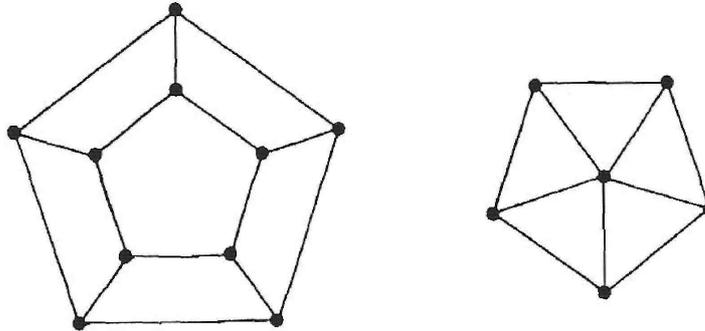
Se consideran ahora los grafos planos trivalentes triconexos, en los que la región infinita se considera una región conexa simple, lo cual es similar a considerar los grafos planos como grafos planares con una región etiquetada.

Este grupo S de grafos planos trivalentes triconexos, en los cuales tres regiones y sus aristas mutuas no están multiconectadas, es particularmente importante desde un punto de vista arquitectónico, ya que en las realizaciones de estos grafos todas las regiones poseen un límite rectangular.

Los grafos planos duales de los miembros de S son **triangulaciones simples**, es decir, triangulaciones en las cuales cada circuito de longitud 3 limita una región (un circuito de longitud 3 que no limita una región se denomina **triángulo de separación**). De forma inversa, cualquier triangulación simple es el dual de un grafo en S .

Una región delimitada cerrada en un plano, dividida en regiones triangulares con $s + 3$ vértices en el límite y r vértices internos es un **grafo triangular de tipo $[r, s]$** . Si no existen aristas múltiples, es una **triangulación $[r, s]$** , es decir, una triangulación con $(s + 3)$ lados y r vértices internos. Si ninguna arista interior incide en dos vértices externos, entonces se tiene una **triangulación fuerte**, y si no contiene tampoco ningún triángulo de separación, entonces es una **triangulación simple**.

Si G^* es el dual de un grafo trivalente G , en el cual el vértice v^* corresponde a la región infinita de G , entonces $G^* - v^*$ es el grafo plano **dual débil**. La siguiente figura ilustra un grafo trivalente y su dual débil:



Una **componente conexa** de un grafo G es un subgrafo maximal conexo, es decir, un subgrafo conexo que no es subgrafo de ningún otro subgrafo conexo de G .

Un **bloque** de un grafo G es un subgrafo conexo maximal de G sin **vértices de corte**, es decir, sin vértices cuya eliminación desconecta el grafo.

Cada grafo plano trivalente tiene un dual débil cuyos bloques son aristas simples o grafos triangulares $[r, s]$, y de forma inversa, cada uno de tales grafos es el dual débil de un grafo trivalente único.

Cabe resaltar que los vértices de corte en el dual débil representan espacios de paso en la disposición de modelos de planta.

Sea $C_{r,s}$ el número de disposiciones de modelos de planta enraizadas sin espacios de paso, en las cuales hay r espacios internos y $s + 3$ espacios adyacentes al exterior. Entonces $C_{r,s}$ es el número de grafos triangulares $[r, s]$ enraizados, dado por:

$$C_{r,s} = \frac{2^{r+1} (2s + 3)! (3r + 2s + 2)!}{(s + 1)!^2 r! (2r + 2s + 4)!}$$

Los duales débiles de los grafos trivalentes triconexos son triangulaciones $[r, s]$. El número $R_{r,s}$ de tales triangulaciones puede obtenerse a partir de los resultados de Brown [03]. Entonces $R_{r,s}$ es el número de disposiciones de modelos de planta representadas por grafos trivalentes triconexos, con r espacios internos y $s + 3$ espacios adyacentes al exterior, dado en la siguiente tabla:

Valores de $R_{r,s}$

s	r							
	0	1	2	3	4	5	6	7
0	1	1	1	4	16	78	457	2938
1	1	2	5	18	88	489	3071	
2	1	4	14	69	396	2503		
3	3	11	53	295	1867			
4	4	28	178	1196				
5	12	91	685					
6	27	311						
7	82							

También se puede obtener el número R_n de tales disposiciones con n espacios en total:

Valores de R_n

n	3	4	5	6	7	8	9	10
R_n	1	2	4	16	63	328	1933	12653

El número $J_{r,s}$ de triangulaciones $[r, s]$ con simetría de reflexión puede también obtenerse a partir de los resultados de Brown. Entonces $J_{r,s}$ es el número de disposiciones de modelos de planta, representadas por grafos trivalentes triconexos los cuales tienen simetría de reflexión, con r espacios internos y $s + 3$ espacios adyacentes al exterior:

Valores de $J_{r,s}$

s	r							
	0	1	2	3	4	5	6	7
0	1	1	1	3	8	23	68	215
1	1	2	4	10	29	86	266	
2	1	3	7	19	57	176		
3	2	6	18	52	166			
4	2	8	26	82				
5	5	18	68					
6	5	23						
7	14							

Se puede también obtener el número J_n de tales disposiciones con un total de n espacios:

Valores de J_n

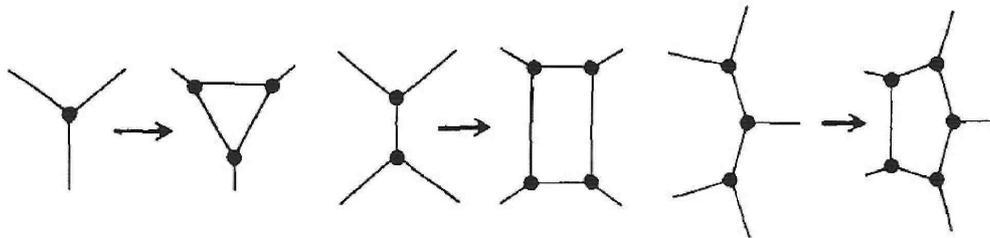
n	3	4	5	6	7	8	9	10
J_n	1	2	4	12	33	102	312	1006

Cabe resaltar que para números relativamente grandes de espacios, sólo una pequeña proporción de las disposiciones de modelos de planta, representadas por grafos trivalentes triconexos, tiene simetría de reflexión. Esto da alguna indicación de la restricción en las posibles disposiciones, la cual se impone si se exige un eje de simetría.

4. Modelos Arquitectónicos Fundamentales y Proceso de Ornamentación

Los grafos planos trivalentes triconexos representan un conjunto básico de disposiciones de modelos de planta. Sin embargo, ya que son el resultado de etiquetar una región en los grafos planares correspondientes, se puede tomar el conjunto de grafos planos trivalentes triconexos como representación de los modelos arquitectónicos fundamentales, y el etiquetado de una región como el primer paso en el proceso de ornamentación.

El uso de operaciones de ornamentación enfatiza el lado constructivo del problema de síntesis de modelos de planta, y evidencia de forma importante que los modelos fundamentales tienen reglas simples para su construcción. De hecho, cualquier grafo trivalente triconexo con $n + 1$ regiones puede ser generado a partir de uno con n regiones aplicando una de las tres reglas mostradas en la siguiente figura:



El número F_n de modelos arquitectónicos fundamentales con $n \leq 12$ regiones fue determinado por Grace [06]:

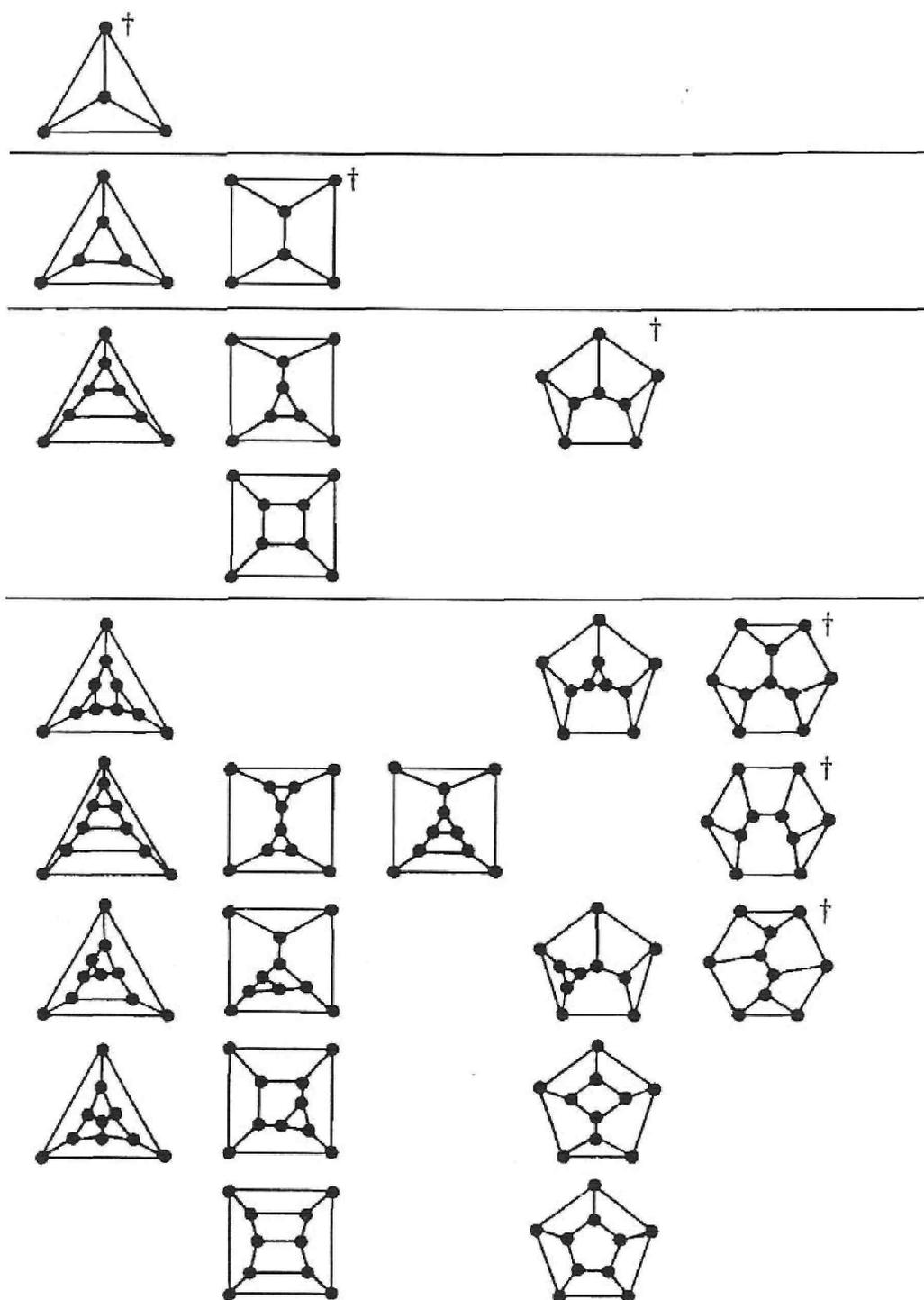
Valores de F_n

n	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
F_n	1	1	1	2	5	14	50	233	1249	7595

Bowen y Fisk equivalentemente enumeraron sus duales, es decir, las triangulaciones de la superficie de una esfera.

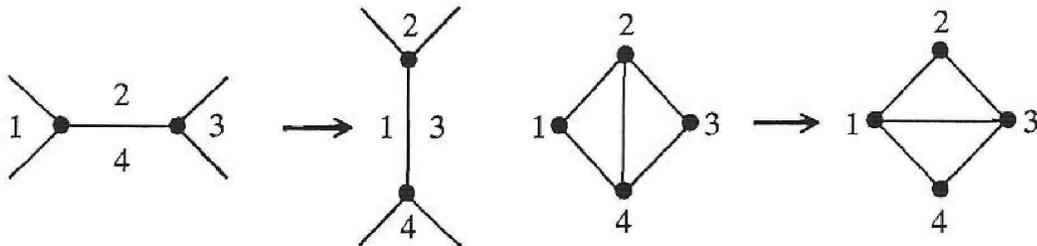
Los modelos fundamentales con una región etiquetada (o equivalentemente, sus proyecciones como grafos planos trivalentes triconexos) se denominan **modelos primarios**. Sus duales débiles son triangulaciones $[r, s]$ y se denominan **disposiciones primarias**.

La siguiente figura muestra los modelos primarios que tienen hasta seis espacios. Aquellos con la marca † tienen todos los espacios adyacentes al exterior:



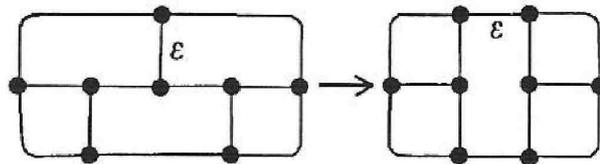
El objetivo principal de este trabajo es presentar un conjunto de operaciones que ornamenten las disposiciones de paredes en los modelos primarios de forma que puedan obtenerse todas las disposiciones de modelos de planta. Estas operaciones de ornamentación modifican las características arquitectónicas del modelo de planta y son las siguientes:

(i) Un **cambio** es la operación en un grafo plano trivalente mostrada en la siguiente figura, donde también se muestra la operación equivalente en el dual:

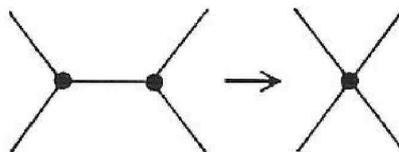


Una operación de cambio en un grafo trivalente triconexo se usa para crear cortes de 2 aristas.

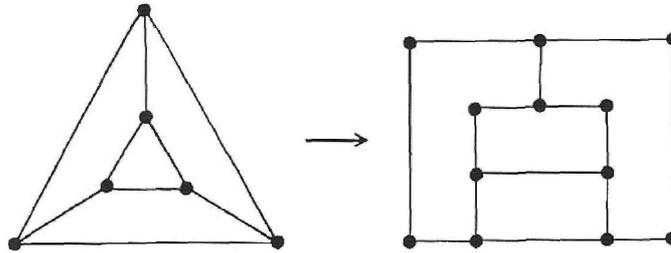
En un contexto arquitectónico, su uso principal es crear espacios de paso o pasillos, como se ve en la siguiente figura, donde la arista implicada en el cambio está etiquetada ϵ :



(ii) Una **contracción de arista** elimina una adyacencia entre regiones, pero une regiones en un vértice, una característica posiblemente conveniente para la provisión de servicios:



(iii) Una **expansión de vértice** es el contrario de una contracción de arista. Puede usarse para insertar vértices de grado 2 o para construir puentes en el grafo:

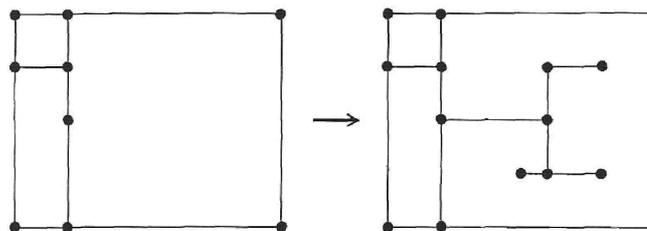


Cabe resaltar que un cambio es una combinación de una contracción de arista y una expansión de vértice, pero ya que un cambio preserva la trivalencia, se considera como una sola operación.

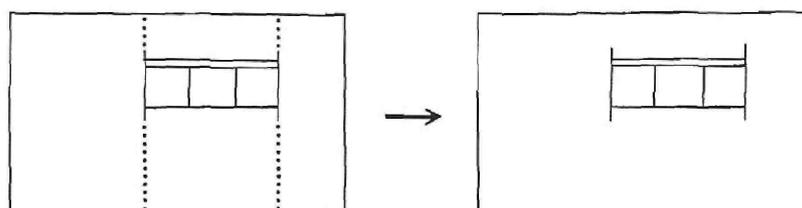
(iv) La **adición de aristas**, la cual subdivide una región específica, es necesaria cuando la correspondiente actividad para la cual está prevista dicha región está compuesta por subactividades individuales. De esta forma, es posible considerar grupos de actividades en una sola unidad, en las fases iniciales del diseño de modelo de planta, para posteriormente, diferenciar las actividades individuales en esta fase de ornamentación.

Sin embargo, la disposición de paredes adicionales es realmente un problema propio del modelo de planta, y se considera como tal.

Una forma particular de esta operación de ornamentación, la cual merece ser mencionada, es la adición de árboles colocados en un vértice sobre el límite de una región:



(v) La **eliminación de aristas** puede ser considerado como un medio para producir esquemas de planta abierta, donde las regiones originales representan áreas de actividad distintas. La siguiente figura muestra cómo la casa Farnsworth puede considerarse una disposición de modelo de planta obtenido por dicha operación de ornamentación:



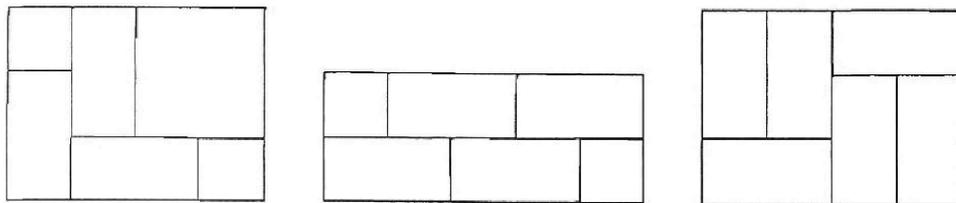
5. La Forma de las Regiones en las Disposiciones de Modelos de Planta

Llegados a este punto, nos alejamos de las estructuras subyacentes de las disposiciones de modelos de planta, y se dirige el problema hacia su realización bajo limitaciones geométricas, considerando esta realización como una fase adicional en el proceso de ornamentación.

Se estudian ahora las posibles disposiciones de modelos de planta representadas por grafos planos trivalentes **no separables**, es decir, sin vértices de corte.

En estas disposiciones se requiere que todas las regiones estén limitadas por un rectángulo, al igual que el modelo entero. Son las llamadas **disecciones rectangulares**, y muchos modelos arquitectónicos tienen esta forma.

Los modelos de la siguiente figura son todos disecciones rectangulares:



Se observa que los vértices de las esquinas de los modelos son de grado 2.

El siguiente teorema de Ungar [18] es importante en este contexto:

Teorema:

Sea G un grafo plano trivalente triconexo, en el que tres regiones y sus aristas mutuas no están multiconectadas. Entonces G se puede realizar como una disección rectangular.

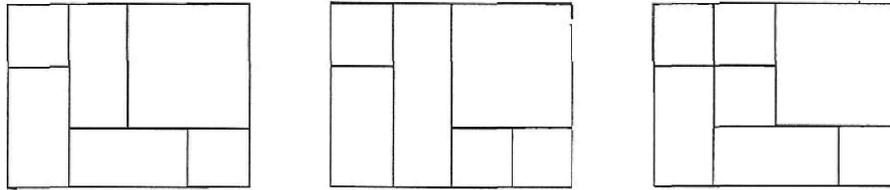
Una formulación equivalente del teorema de Ungar es el siguiente corolario:

Corolario:

(i) Cada triangulación simple es el grafo plano dual de una disección rectangular.

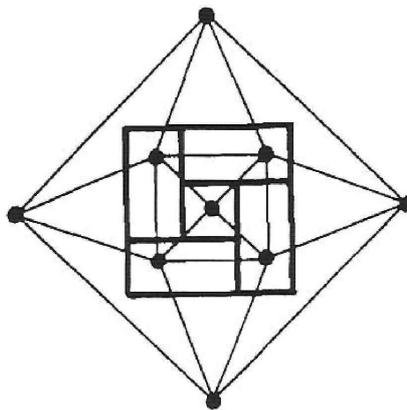
(ii) Cada triangulación simple de un polígono es el dual débil de una disección rectangular.

Cabe resaltar que algunas disecciones tienen dos rectángulos y la región exterior multiconectados, algunos tienen cortes de 2 aristas correspondientes a los pasillos o espacios de paso, y otros no corresponden a grafos trivalentes debido a la presencia de vértices de grado cuatro:



En lo que sigue, a menos que existan otras indicaciones, se asume que una disección rectangular no tiene vértices de grado cuatro.

A fin de obtener el conjunto de todos los grafos planos correspondientes a las disecciones rectangulares se define un grafo plano dual especial, el **dual aumentado**, en el que la región exterior está dividida en cuatro partes:



Los duales aumentados son triangulaciones simples $[r, 1]$, ya que ninguno de los tres rectángulos forman un anillo, así se excluye un triángulo de separación en el dual.

Se puede ahora formular un teorema que especifica aquellos grafos trivalentes que son realizables como disecciones rectangulares:

Teorema:

Un grafo plano es el dual aumentado de una disección rectangular si y sólo si es una triangulación simple $[r, 1]$.

Demostración:

⇒ El dual aumentado de cualquier disección rectangular es una triangulación simple $[r, 1]$.

⇐ La demostración es por inducción en r :

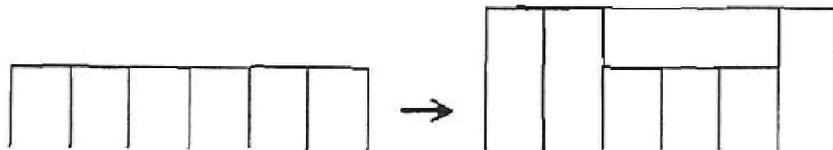
Se supone que cada triangulación simple $[r, 1]$ es el dual aumentado de una disección rectangular para $r \leq n$.

Sea T_{n+1} una triangulación simple $[n+1, 1]$ y v un vértice externo en T_{n+1} .

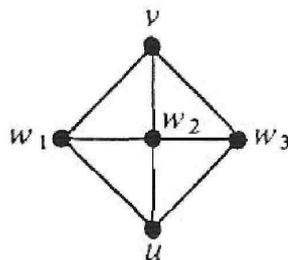
Todo circuito de longitud 4 que tiene al menos un vértice interno se denomina no trivial.

Entonces hay dos casos a considerar:

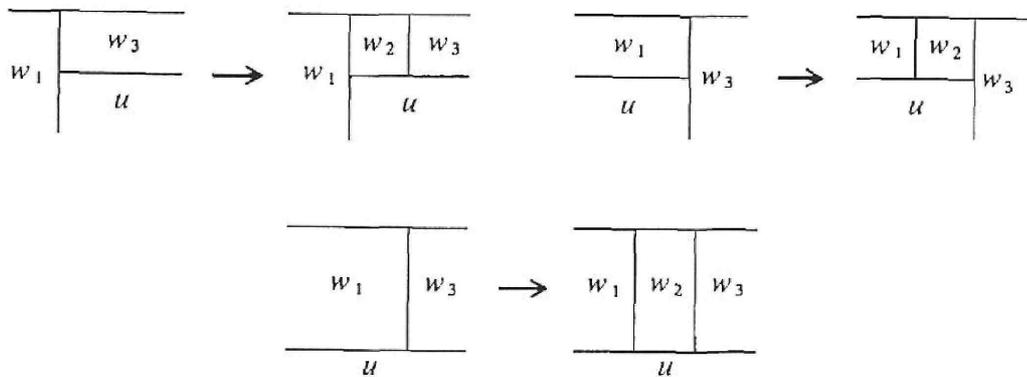
Caso 1. Existe una arista vw la cual no pertenece a un circuito de longitud 4 no trivial. La contracción de la arista vw da una triangulación simple $[n, 1]$, la cual, por hipótesis, es el dual aumentado de una disección. De forma que una disección con dual aumentado T_{n+1} puede obtenerse por una operación del tipo mostrado en la siguiente figura:



Caso 2. Si cada arista incidente en v pertenece a un circuito de longitud 4 no trivial, entonces se puede fácilmente mostrar que ocurre la configuración mostrada en la siguiente figura:



Como T_{n+1} es planar y simple, la arista w_1w_2 no pertenece a un circuito de longitud 4 no trivial. Por lo que la contracción de esta arista da una triangulación simple $[n, 1]$, la cual, por hipótesis, es el dual aumentado de una disección. De forma que una disección con dual aumentado T_{n+1} puede obtenerse por una de las operaciones mostradas en la siguiente figura:

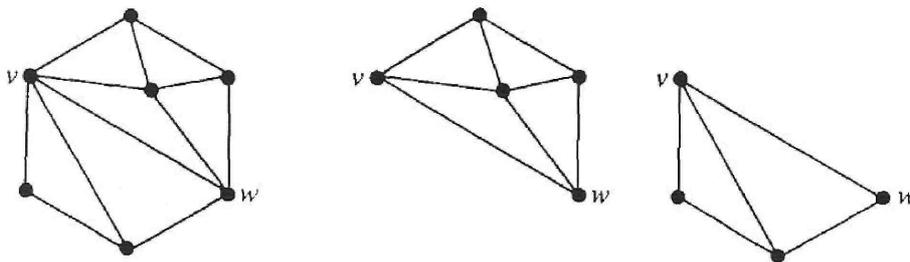


Finalmente, la triangulación simple $[1, 1]$ es el dual aumentado de un solo rectángulo, por lo que la inducción se mantiene y la demostración es completa.

Los corolarios formulados seguidamente hacen más explícito este teorema.

Una **diagonal** de una triangulación de un polígono es una arista interna que conecta dos vértices externos en el límite del polígono. A cada diagonal le corresponden un par de vértices componentes, los cuales se denominan **componentes diagonales**. Un componente diagonal es simple si la triangulación del polígono es simple.

La siguiente figura muestra una triangulación de un polígono con diagonal vw , y sus correspondientes componentes diagonales:



Corolario:

Un grafo plano es un dual débil de una disección rectangular con más de tres componentes rectángulos y sin espacios de paso, si y solo si es una triangulación $[r, s]$ ($s \geq 1$) sin triángulos de separación y como mucho cuatro componentes diagonales simples.

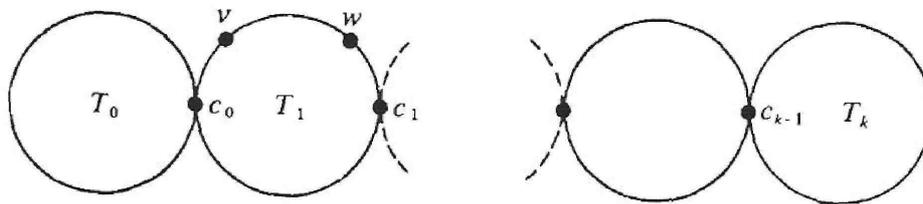
Se considera ahora la generalización a disecciones que contienen espacios de paso:

Sea \mathcal{G} la clase de grafos planos que satisfacen las siguientes condiciones:

(i) Cada bloque es o una arista sencilla, o un triángulo, o una triangulación $[r, s]$ ($s \geq 1$) sin triángulos de separación.

(ii) Cada vértice de corte está contenido exactamente en dos bloques, y ningún bloque contiene más de dos vértices de corte.

La siguiente figura muestra un elemento típico de \mathcal{G} , con bloques T_0, \dots, T_k y vértices de corte c_0, c_1, \dots, c_{k-1} :



Los vértices v y w de esta figura son cerrados.

En T_i ($i = 1, 2, \dots, k-1$), dos vértices externos v y w se dice que son **cerrados** si al menos uno de ellos es un vértice de corte, o si existe un camino que une v y w que consta totalmente de aristas externas de T_i y no pasa por un vértice de corte.

El siguiente corolario completa la caracterización de estos grafos planos los cuales pueden ser realizados como disecciones rectangulares:

Corolario:

Un grafo plano G es el dual débil de una disección rectangular si y sólo si se dan las condiciones siguientes:

(i) $G \in \mathcal{G}$.

(ii) Ningún par de vértices externos cerrados están unidos por una arista interna.

(iii) c_{i-1} no está unido a c_i (para $i = 1, 2, \dots, k - 1$) a menos que T_i sea una arista sencilla.

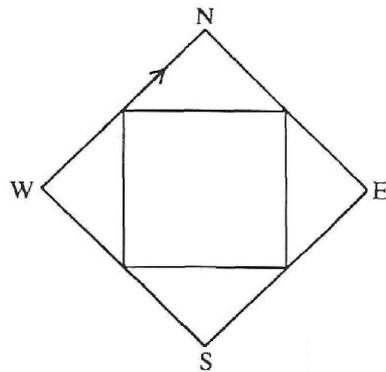
(iv) En T_0 y T_k o hay tres componentes diagonales simples uno de los cuales contiene c_0 o c_{k-1} respectivamente, o hay como mucho dos componentes diagonales simples.

Si una disposición rectangular se define como un paquete cerrado de rectángulos, entonces se obtiene el siguiente resultado a partir del teorema siguiente:

Teorema:

Un grafo plano es el dual débil de una disposición rectangular sin vértices de grado cuatro si y sólo si sus bloques son aristas simples, triángulos, o triangulaciones $[r, s]$ ($s \geq 1$) sin triángulos de separación.

Si una disección rectangular está orientada por el etiquetado de los cuatro lados del límite del rectángulo N, S, E y W, entonces el dual aumentado tiene sus correspondientes vértices externos etiquetados. Esto es equivalente a enraizar la triangulación con el vértice raíz W y el borde raíz WN, como se puede observar en la siguiente figura:



Un grafo se denomina **k-arista coloreado** si puede colorearse con k colores distintos. Es decir, si existe una asignación de k colores diferentes que permite un coloreado de aristas válido, el cual cumple la propiedad de no asignar el mismo color a un par de aristas adyacentes (dos aristas de un grafo son llamadas adyacentes si tienen un vértice en común).

Un coloreado de las aristas de una triangulación $[r, 1]$ simple enraizada con dos colores (x e y , dados) se llama **coloreado válido** si satisface las tres condiciones siguientes:

(i) Las aristas internas incidentes en N y S están coloreadas con el color x , y aquellas incidentes en E y W están coloreadas con el color y .

(ii) Ningún circuito de longitud 3 tiene aristas de un solo color.

(iii) En cada vértice, las aristas forman cuatro grupos, dos de cada color, con cada par separado por un grupo del otro color.

Si las aristas del dual aumentado de una disección orientada están coloreadas con x o y dependiendo si representan una pared horizontal (E/W) o vertical (N/S), entonces el coloreado resultante es válido. En realidad, el inverso es también verdad:

Teorema:

Cada coloreado válido de una triangulación simple $[r, 1]$ enraizada es el dual aumentado de una disección rectangular orientada en la cual los colores distinguen entre las aristas alineadas N/S y E/W.

Las disecciones rectangulares orientadas son equivalentes si sus correspondientes duales aumentados coloreados son equivalentes.

Se ha definido la clase de disposiciones de modelos de planta trivalentes las cuales pueden realizarse como disecciones rectangulares. Sin embargo, cabe resaltar que a cada disposición de esta clase generalmente le corresponden muchas disecciones rectangulares, debido a los coloreados válidos diferentes del dual aumentado correspondiente y a que a cada disposición se le asigna una alineación N, S, E y W.

Estas disecciones se consideran versiones ornamentadas de las disposiciones de modelos de planta convenientes bajo la limitación de la rectangularidad.

6. Las Dimensiones de las Regiones en las Disposiciones de Modelos de Planta

Hasta ahora se han examinado las posibles disposiciones de modelos de planta, y las clases de dichas disposiciones que se pueden realizar bajo la limitación geométrica de que todas las regiones tengan un límite rectangular.

Además de esta limitación, pueden considerarse otras limitaciones geométricas adicionales concernientes a las dimensiones de las regiones, ya que en el contexto de la síntesis de modelos de planta, se necesita una disposición que no solo satisfaga ciertas limitaciones de adyacencia sino que también sea realizable de forma que las regiones satisfagan ciertas limitaciones dimensionales.

Es por ello que se considera una ornamentación adicional de estas disecciones rectangulares, refiriéndose con ornamentación a las posibles dimensiones que pueden asumir las regiones en el modelo.

Dada una triangulación simple $[r, 1]$ enraizada la cual representa una disposición adecuada, cada coloreado válido da una disección rectangular orientada y se examina este conjunto de disecciones para hallar cual puede acomodar un conjunto dado de limitaciones dimensionales.

Para cada disección rectangular orientada, se puede definir una **red**, es decir, un dígrafo o grafo dirigido, de la siguiente manera:

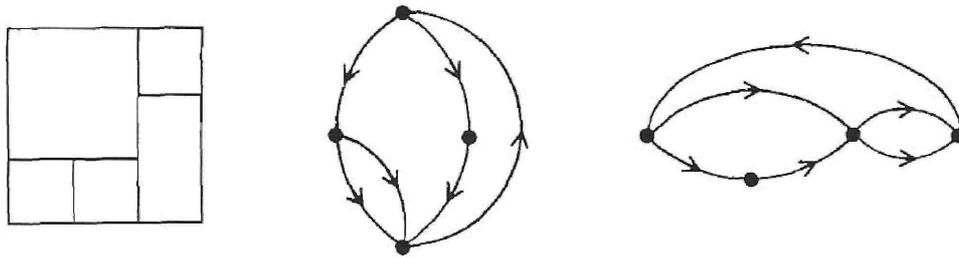
Los lados horizontales de los rectángulos son segmentos de líneas horizontales, y cada segmento de línea horizontal se representa por un vértice.

Cada rectángulo tiene los lados superior e inferior en distintos segmentos de líneas horizontales, y está representado por un arco que une los correspondientes vértices en la dirección del lado superior al lado inferior.

Los vértices correspondientes a los lados horizontales del límite del modelo están unidos por un arco en la dirección del lado inferior al lado superior (en el sentido contrario a las agujas del reloj), el cual representa el espacio exterior.

Para cada disección, esta red vertical es un grafo plano dirigido no separable, que puede obtenerse directamente de la triangulación válidamente coloreada. La red horizontal se obtiene de forma similar.

En la siguiente figura se muestra una disección con las correspondientes redes vertical y horizontal:



Cabe resaltar que las redes vertical y horizontal de una disección rectangular orientada son los grafos planos duales.

Se introduce ahora algo de teoría elemental de redes, debida a Branin [02], y en lo que sigue, solo se considerarán las redes verticales, aunque la formulación de la red horizontal es equivalente:

Se considera un grafo plano dirigido no separable con un conjunto de vértices $\{v_1, \dots, v_n\}$ y un conjunto de arcos $\{e_1, \dots, e_m\}$, y se supone que e_m depende del límite de la región infinita, y está orientado de v_n a v_1 , en el sentido contrario a las agujas del reloj. Se define la **matriz de incidencia** $n \times m$, $B = (b_{ij})$, donde:

$$b_{ij} = \begin{cases} +1, & \text{si } e_i \text{ es incidente en } v_j \text{ y está orientado hacia } v_j \\ -1, & \text{si } e_i \text{ es incidente en } v_j \text{ y está orientado alejándose de } v_j \\ 0, & \text{si } e_i \text{ no es incidente en } v_j \end{cases}$$

Dado un árbol generador del grafo, se obtiene un **circuito fundamental**, añadiendo un arco del grafo, no perteneciente al árbol generador, a dicho árbol generador. De este modo pueden obtenerse $m - (n - 1)$ circuitos distintos.

Dado un conjunto fundamental de circuitos, se puede definir la **matriz de circulación** $(m - n + 1) \times m$, $C = (c_{ij})$, donde:

$$c_{ij} = \begin{cases} +1, & \text{si } e_i \text{ está en el circuito fundamental } j\text{-ésimo, y las orientaciones coinciden.} \\ -1, & \text{si } e_i \text{ está en el circuito fundamental } j\text{-ésimo, y las orientaciones no coinciden.} \\ 0, & \text{si } e_i \text{ no está en el circuito fundamental } j\text{-ésimo.} \end{cases}$$

Por otro lado, un **corte fundamental** está formado por el conjunto de arcos que unen pares de vértices situados en las dos componentes conexas que resultan de suprimir en el árbol generador uno de sus arcos. Así, en total, hay $n - 1$ conjuntos de corte fundamentales.

Por tanto, se puede definir de forma similar:

La **matriz de conjunto de corte** $(n - 1) \times m$, D y la **matriz de región** $(2 - n + m) \times m$, R , la cual relaciona las aristas y las regiones.

Entendiendo el grafo dirigido como una red de flujo y dadas las variables x_i y y_i , en e_i , se pueden formular las leyes de Kirchhoff como el siguiente conjunto de ecuaciones linealmente independientes:

$$\begin{aligned} Dx &= 0 \\ Cy &= 0 \end{aligned} \quad (1)$$

Donde $x = (x_1, \dots, x_m)^T$ y $y = (y_1, \dots, y_m)^T$

Si se exige también que:

$$x_i \geq 0 \text{ y } y_i \geq 0, \text{ para } i = 1, 2, \dots, m - 1, \text{ y } x_m \geq 0, y_m \geq 0 \quad (2)$$

entonces las soluciones de (1) y (2) especifican las disecciones rectangulares orientadas, con x_i y y_i (para $i = 1, 2, \dots, m - 1$) como las dimensiones horizontal y vertical de los rectángulos componentes, y x_m y y_m como las dimensiones del rectángulo límite.

Sin embargo, dada una disección y su correspondiente red, una solución de (1) y (2) no proporciona necesariamente una disección equivalente a la original, ya que la estructura de adyacencia impone ciertas condiciones en las dimensiones.

A fin de examinar las posibles dimensiones que los rectángulos pueden asumir en una disección dada, es necesario resolver (1) y (2) bajo condiciones extras:

Si se imponen condiciones del tipo $a_i \leq x_i \leq b_i$ y $c_i \leq y_i \leq d_i$ (para $i = 1, 2, \dots, m$), entonces las correspondientes soluciones de (1) y (2) dan disecciones en las cuales las dimensiones de los rectángulos son, en consecuencia, limitadas.

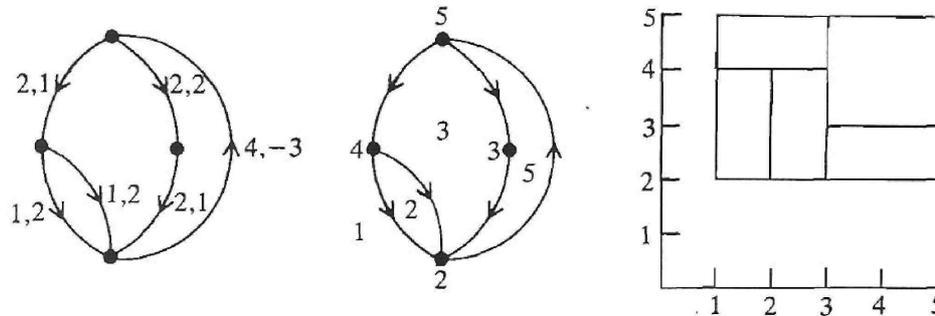
Condiciones de la forma $A_i \leq x_i y_i \leq B_i$ corresponden a limitaciones del área de los rectángulos, y se pueden considerar tales limitaciones definiendo una nueva variable $a_i = x_i y_i$ y expresando las ecuaciones de Kirchhoff desde el punto de vista de a_i y x_i , o a_i y y_i .

Una vez se encuentra una solución adecuada de (1) y (2) la cual satisface todos los requisitos, es de importancia práctica utilizar un método para reconstruir la correspondiente disección rectangular.

Esta reconstrucción se puede llevar a cabo obteniendo conjuntos de cantidades de vértices B_y y cantidades de regiones R_x .

Como cada región de la red corresponde a un segmento de línea vertical, y cada vértice corresponde a un segmento de línea horizontal, estas cantidades pueden usarse para definir los segmentos de líneas que especifican la disección.

La siguiente figura muestra una red con un conjunto de flujos que satisface (1) y (2), y la misma red con las cantidades de vértices y regiones obtenidas. Los valores en los vértices y regiones representan las distancias desde las líneas de referencia horizontales y verticales respectivamente:



Si se eliminan las orientaciones de todos los arcos de una red correspondiente a una disección rectangular, se obtiene un grafo plano no separable enraizado. De forma inversa, se puede mostrar que cada grafo plano no separable enraizado puede ser orientado de la misma manera que la red de una disección rectangular orientada.

Mullin [12] señala que el número de grafos planos no separables con $r + 1$ aristas es igual al número de triangulaciones simples $[r, 1]$ enraizadas, por lo que es ahora posible formular un procedimiento mediante el cual, dado un conjunto de necesidades de adyacencia y dimensión, se obtengan soluciones de disecciones rectangulares para el problema de modelos de planta (si existen).

Este procedimiento puede dividirse en los siguientes pasos:

- (i) Encontrar las disposiciones que son realizables como disecciones rectangulares y que satisfacen las necesidades de adyacencia.
- (ii) Expresar estas disposiciones como triangulaciones simples $[r, 1]$ enraizadas.
- (iii) Construir coloraciones válidas para estas triangulaciones.
- (iv) Obtener las redes correspondientes.
- (v) Resolver las ecuaciones de red con las limitaciones impuestas por las necesidades de adyacencia y dimensión.
- (vi) Construir las disecciones rectangulares.

Este procedimiento se puede comparar con los presentados por Grason, Teague y Mitchell, Steadman y Liggett, los cuales ya se han mencionado en la introducción del trabajo:

Grason usa el dual aumentado y asigna pesos a las aristas representando las longitudes de las correspondientes paredes.

Teague, por otra parte, usa sólo la representación de red, con lo que parece claro desde el análisis previo que las representaciones adecuadas para tratar con las adyacencias y dimensiones son las representaciones de dual aumentado y red, respectivamente.

Mitchell, Steadman y Liggett reconocen esta división del problema, pero lo aproximan de forma diferente mediante un catálogo de disecciones rectangulares.

7. Algunas Otras Aplicaciones de la Teoría de Grafos en Arquitectura

El **sistema de carreteras** de un pueblo o ciudad se puede representar por una red en la cual se puede aplicar el análisis usual de red de flujos y capacidades.

Sin embargo, en las fases iniciales del diseño de tales sistemas de carreteras, es a menudo importante considerar la disposición espacial de las carreteras y el esquema espacial que definen.

Los conjuntos de posibilidades para redes de carreteras pueden ser considerados del mismo modo que para modelos de planta, pero ahora las aristas de los grafos planos representan carreteras.

Se pueden dar interpretaciones diferentes a las diferentes características del grafo, y las operaciones de ornamentación pueden ser modificadas para incorporar los detalles de las uniones de carreteras.

Las disecciones rectangulares, en particular, pueden considerarse como sistemas de carreteras exhibidos en una cuadrícula, en la cual las carreteras definen los límites de los bloques rectangulares.

Solo después de que tales posibilidades hayan sido investigadas para las estructuras subyacentes, puede aplicarse el análisis de red.

El diseño de un **sistema de circulación** en un edificio es un problema similar para el cual es deseable un acercamiento estructural en las fases iniciales.

En los edificios grandes o edificaciones complejas, el sistema de circulación consiste en una serie de pasillos y vestíbulos que pueden ser representados por las aristas de un grafo plano. En la mayor parte de los casos estos grafos planos son árboles, o tienen sólo uno o dos circuitos.

Los espacios individuales tienen acceso a esta estructura de base, y la adición de tales unidades individuales es una de las operaciones de ornamentación enfatizadas en este caso.

Un objetivo de diseño puede ser minimizar los costes de circulación dentro del edificio, ya que los problemas de teoría de grafos típicos en este contexto son el problema de ruta más corta y los problemas relacionados con la asignación de tráfico.

March y Steadman [09] y Tabor [14] también han discutido el significado de distancia en el grafo de circulación como una medida de la solidez del modelo arquitectónico y recientemente, Doyle y Graver [05], han establecido algunos resultados teóricos en este campo.

8. La Enumeración de Problemas de Diseño a Partir de Grafos Bicoloreados

En los problemas de diseño en general, en términos de teoría de grafos, el diseñador necesita hacer uso de métodos de búsqueda de un **árbol**, es decir, búsqueda de un grafo simple que no contiene ciclos. Un problema arquitectónico se considera entonces como una ramificación de un árbol en subproblemas, subsubproblemas, etc...

Alexander [01] sugirió un método para la descomposición en árboles del problema de diseño arquitectónico, e ilustró el acercamiento mediante un grafo que representa las interacciones entre los elementos identificables del problema. Este grafo fue descompuesto en subgrafos, cada uno de los cuales podía ser reconocido como un subproblema.

Estos métodos de descomposición en el diseño arquitectónico fueron discutidos por varios autores como Moore [11] y Harary, en un estudio de los usos de los grafos k -vértice coloreados en el diseño.

Sin embargo, esto se basa en la suposición de que el problema total se puede partir en conjuntos de subproblemas, y no todos los diseñadores coinciden en que esto se puede hacer sin pérdida de la integridad.

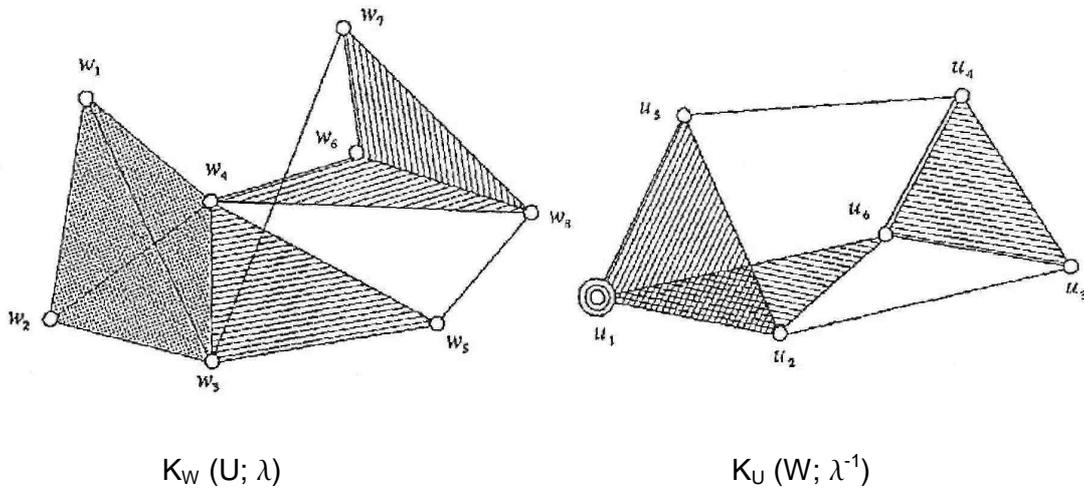
Un grafo se denomina **k -vértice coloreado** si puede colorearse con k colores distintos. Es decir, si existe una asignación de k colores diferentes que permite un coloreado de vértices válido, el cual cumple la propiedad de no asignar el mismo color a un par de vértices adyacentes.

Una vértice-coloración de un grafo efectúa una partición del grafo en conjuntos independientes de vértices.

El **número cromático** de un grafo es el menor entero k para el cual existe una vértice coloración de G . Cuando $k = 2$ se obtiene un **grafo bicolorado**, siendo posible asignar un color a cada uno de sus vértices, elegido de un conjunto de dos colores, de forma que vértices adyacentes tienen asignados colores distintos.

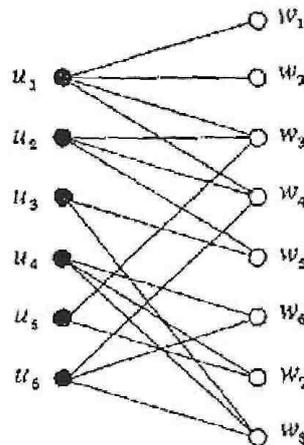
Un grafo bicolorado, también denominado **grafo bipartido** es cualquier grafo cuyos vértices pueden ser divididos en dos conjuntos, tales que no haya aristas entre los vértices del mismo conjunto.

Al representar esta relación desde el punto de vista de un complejo simplicial $K_W(U; \lambda)$, y su conjugado $K_U(W; \lambda^{-1})$ se obtiene:



Lo que evidencia que las representaciones que implican objetos n-dimensionales son difíciles de ilustrar para $n > 3$.

Si se comparan los dos diagramas complejos simpliciales de la matriz con la representación simple del grafo bicolorado:



Se observa que no hay coacciones dimensionales en el dibujo de grafos bicolorados en el plano, a diferencia de lo que ocurre con los complejos simpliciales multidimensionales, y la dualidad de $\lambda \subseteq U \times W$ y $\lambda^{-1} \subseteq W \times U$ se conserva en la representación del grafo, todo ello depende de si se mira del conjunto U hacia W, o de W hacia U.

Además, otras características estructurales descritas desde el punto de vista de complejos simpliciales tienen su paralelo en la terminología de grafos bicolorados. Por todo ello, para muchos profesionales, el lenguaje de la teoría de grafos es menos prohibitivo que la topología combinatoria.

Ejemplo 2:

Se propone el uso de una representación mínima para los modelos arquitectónicos, basada en una cuadrícula rectangular.

En la representación de tales diseños en cuadrícula pueden utilizarse los grafos bicolorados, de forma que las filas de la cuadrícula forman el conjunto U , y las columnas de la cuadrícula constituyen el conjunto W .

En la mayoría de los casos el mínimo criterio que se necesita para dicha representación es que el grafo bicolorado tenga vértices no aislados, es decir, que en todos los vértices incida una arista.

Se pueden distinguir tres tipos de modelos en cuadrícula:

- Modelos de dimensión 2, en los cuales las caras del cuadrado de la cuadrícula forman los elementos del diseño (por ejemplo, un conjunto de bloques de edificios en la ciudad de Nueva York).

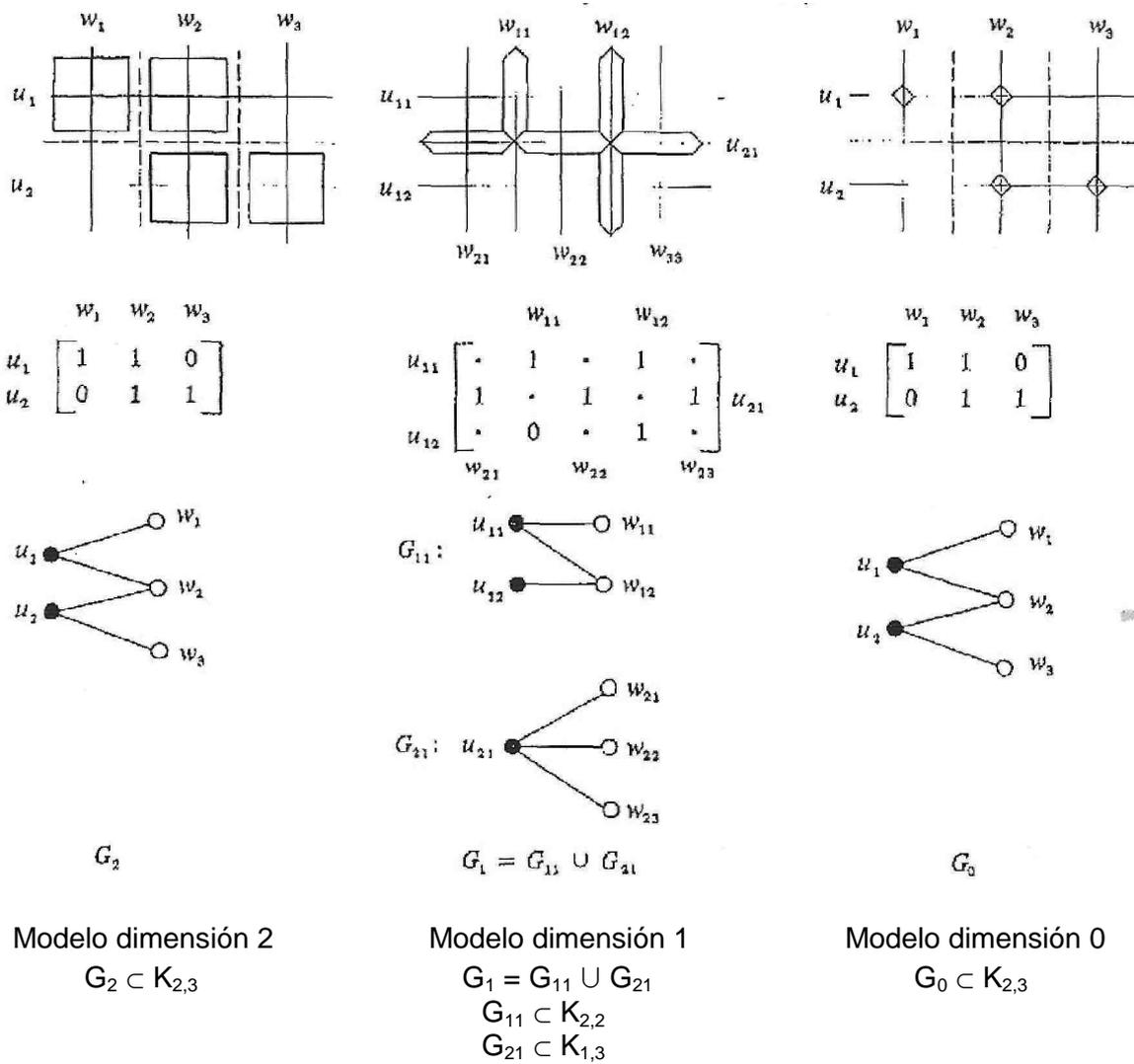
- Modelos de dimensión 1, en los cuales las líneas de la cuadrícula constituyen los elementos del diseño (por ejemplo, un conjunto de calles y avenidas entre bloques de edificios en Nueva York ó una disección rectangular).

- Modelos de dimensión 0, en los cuales los puntos de la cuadrícula constituyen los elementos del diseño (por ejemplo, un conjunto de intersecciones de calles en Nueva York).

Los modelos de dimensión 2 y los modelos de dimensión 0 son, en sentido matemático, conceptos duales, pero los modelos de dimensión 1 son diferentes, lo que puede observarse en la estructura de la representación de los grafos bicolorados.

Para una cuadrícula (m, n) , los modelos de dimensión 2 y dimensión 0 se representan como subgrafos de $K_{m,n}$ el grafo bicolorado completo (m, n) , mientras que los modelos de dimensión 1 se representan por subgrafos de $K_{m,n-1} \cup K_{m-1,n}$.

Para poder ilustrar el ejemplo se toma una cuadrícula (2, 3), con lo que la representación de los diferentes modelos tanto matricialmente como en forma de grafo bicolorado es la siguiente:



Ejemplo 3:

En los estudios de adaptabilidad de los edificios escolares, se toma un conjunto U de actividades $\{u_1, u_2, \dots, u_n\}$:

- u_1 demostraciones/practicar
- u_2 lectura/escritura
- \cdot
- \cdot
- \cdot
- u_n experimentos físicos

Esta es una situación diferente si se enfrenta a ella el administrador de la escuela, quien puede asignar actividades de tal manera que algunas habitaciones pueden quedar vacías, ya que es muy improbable que todas las actividades posibles ocurran simultáneamente en el mismo horario.

La tarea del administrador es encontrar un emparejamiento en el grafo bicolorado del diseñador, es decir, un conjunto de aristas independientes, sin vértices en común, una posible pareja actividad/espacio.

El diseñador que proyecta el estudio de adaptabilidad se interesa por el conjunto de todos los emparejamientos posibles, de los cuales el administrador escogerá aquellos que le interesen. Sin embargo, esta no es la cuestión de estudio en este trabajo.

En el caso del arriostamiento de una estructura de entramado rectangular, parece obvio que cada vano debe contener por lo menos una riostra si la estructura es rígida y que el conjunto de grafos bicolorados que representan esquemas de arriostamiento se restringe a aquellos grafos bicolorados con vértices no aislados. De ahí el interés de los grafos bicolorados con vértices no aislados.

Analizando ahora el tema del etiquetado, se observa que los tres primeros ejemplos hacen uso claramente de grafos etiquetados, pero en el ejemplo concerniente a la adaptabilidad de los edificios escolares, se puede tener en cuenta o ignorar la distinción de los elementos de cuatro formas diferentes:

		espacios	
		no distinto	distinto
Actividades	no distinta distinta	I	II
		III	IV

La medida de adaptabilidad que se obtiene al organizar las actividades y los espacios varía dependiendo del camino que se decida tomar.

De forma que el asunto de etiquetar o no etiquetar tiene consecuencias en los problemas de diseño.

En el caso del estudio de adaptabilidad de los edificios escolares el grafo bicolorado no tiene porque estar etiquetado, pero en la representación de modelos en cuadrícula es claramente importante que el grafo bicolorado esté etiquetado ya que las entradas se corresponden con las coordenadas geométricas de la cuadrícula.

La obtención del número de grafos bicolorados etiquetados con vértices no aislados se lleva a cabo teniendo en cuenta la función generadora.

De manera análoga a como se usan los grafos bicolorados para representar cuadrículas bidimensionales pueden usarse los grafos tricolorados para describir estructuras de entramado rectangular tridimensionales. Los usos de tales representaciones en el contexto arquitectónico requieren también el etiquetado.

El número de grafos k -colorados con vértices etiquetados está determinado por Read [13].

9. Referencias

Bibliografía Básica

1. • Bondy J A, Murty U S R, 1995 *"Graph Theory"*, Ed. Springer.
2. • Earl C F, March L, 1979 *"Architectural applications of graph theory" in R J Wilson and L W Beineke Applications of Graph Theory*, Academic Press, London, UK
3. • Foulds L R, 1994 *"Graph Theory Applications"*, Springer-Verlang.
4. • Harary F, March L, Robinson R, 1978 *"On enumerating certain design problems in terms of bicoloured graphs with no isolates"*, Environment and Planning B 5.
5. • P. Steadman P, 1976 *"Graph-theoretic representation of architectural arrangement" in The Architecture of Form*, L. March, Ed. London: Cambridge Univ. Press.

Bibliografía Complementaria

01. • Alexander C, 1964 *"Notes on the Synthesis of Form"*, Harvard University Press, Cambridge, Mass.
02. • Branin F, 1967 *"Computer methods of network analysis"*, Proc. IEEE 55.
03. • Brown W G, 1964 *"Enumeration of triangulations of the disk"*, Proc. London Math. Soc.14.
04. • Cousin J, 1970 *"Topological organization of architectural space"*, Architectural Design 40.
05. • Doyle J K, Graver J E, 1978 *"Mean distance in a directed graph"*, Environment and Planning B 5.
06. • Grace D W, 1965 *"Computer search for non-isomorphic convex polyhedra"*, Report CS15, Computer Science Dept, Stanford University.
07. • Grason J, 1970 *"Emerging Methods in Environmental Design and Planning"*, Ed, G. T. Moore, M.I.T. Press, Cambridge, Mass.
08. • Levin P H, 1964 *"The use of graphs to decide the optimum layout of buildings"*, Arch. J. 140.
09. • March L, Steadman J P, 1971 *"The Geometry of Environment"*, RIBA publications, London.
10. • Mitchell W J, Steadman J P, Liggett R S, 1976 *"Synthesis and optimization of small rectangular floor plans"*, Environment and Planning B 3.
11. • Moore G T, 1970 *"Emerging Methods in Environmental Design and Planning"*, M.I.T. Press, Cambridge, Mass.
12. • Mullin R C, 1965 *"On counting rooted triangular maps"*, Canad. J. Math.17.
13. • Read R C, 1960 *"The number of k-coloured graphs on labelled nodes"*, Canadian Journal of Mathematics 12.

14.• Tabor P, 1976 *"Analysing communication patterns" in The Architecture of Form*, Ed. L. March, Cambridge Univ, Press, London.

15.• Teague T, 1970 *"Network models of configurations of rectangular parallelepipeds"*, Ed. G. T. Moore, M.I.T. Press, Cambridge, Mass.

16.• Tutte W T, 1963 *"A census of planar maps"*, Canad. J. Math. 15.

17.• Tutte W T, 1967 *"Graph Theory and Theoretical Physics"*, Ed. F. Harary, Academic Press, London and New York.

18.• Ungar P, 1953 *"On diagrams representing maps"*, J. London Math. Soc. 28.