

ANÁLISIS DE ESTABILIDAD DE SISTEMAS BORROSOS

Basil M. Al-Hadithi ^{*,1}
Fernando Matía y Agustín Jiménez ^{**}

** Escuela Politécnica Superior
Universidad Alfonso X El Sabio
Villanueva de la Cañada, Av/de la Universidad, 1.
28691-Madrid, Spain
bmal@uax.es*

*** Departamento de Automática, Ingeniería Electrónica e
Informática Industrial
Universidad Politécnica de Madrid
J.Gutierrez Abascal, 2. 28006-Madrid, Spain
matia@etsii.upm.es; ajimenez@etsii.upm.es*

Resumen: En este trabajo se revisa el estado del arte sobre estabilidad de sistemas borrosos, poniéndose de manifiesto las dificultades para su análisis, debido a la característica falta de linealidad de los mismos. Se revisan los estudios basados en el criterio del círculo, las técnicas para calcular índices de estabilidad, así como técnicas basadas en aplicación del teorema de estabilidad de Lyapunov, que permite utilizar métodos numéricos de búsqueda de soluciones. Además, se revisan los trabajos de estabilidad mediante el uso del modelo borroso de Takagi-Sugeno (T-S), el enfoque de las Desigualdades Matriciales Lineales (LMI), que ha tenido un interés creciente en los últimos años, así como otra línea de investigación basada en estabilidad energética.
Copyright ©2007 CEA-IFAC

Palabras Clave: Sistemas borrosos, Estabilidad global y asintótica, Modelo borroso afín de Takagi-Sugeno.

1. INTRODUCCIÓN

El análisis de estabilidad es uno de los conceptos más importantes en el análisis de sistemas de control borroso. El éxito del Controlador de Lógica Borrosa (FLC) no implica que no sea necesaria una teoría de estabilidad. Debe decirse que, a pesar de todo el éxito del control borroso en

aplicaciones industriales, la estabilidad no está totalmente garantizada. Tal vez uno de los inconvenientes que habría si no existiera un método de análisis de estabilidad, sería que no se podría aplicar un enfoque basado exclusivamente en modelos para el diseño de controladores borrosos.

El diseño de un controlador borroso basado en reglas implica la necesidad de una técnica de estabilidad. La carencia de herramientas para el análisis dinámico de este tipo de sistemas supuso durante años una dura crítica. Como hemos dicho,

¹ Este trabajo está financiado por el Ministerio Español de Ciencia y Tecnología (proyecto ROBINT DPI-2004-07907-C02).

la eficiencia del FLC no implica que la estabilidad del sistema esté totalmente asegurada.

Entre las muchas dificultades que presenta el análisis de estabilidad global y asintótica de sistemas de control borroso, está el caso en el que dicho sistema es localmente estable en un determinado punto de trabajo. Pero para sistemas no lineales esta estabilidad sólo está garantizada alrededor de dicho punto. En estos casos, el sistema puede ser localmente estable alrededor del punto activo de trabajo pero no globalmente estable.

A lo largo de este trabajo se hacen, en primer lugar, varias consideraciones sobre la estabilidad y su importancia en el diseño de sistemas de control borroso. Se explican también las dificultades que conlleva dicho análisis de estabilidad, debidas fundamentalmente a su falta de linealidad. En una segunda parte, se revisan aquellas técnicas que tratan de encontrar una solución global al problema, con el fin de desarrollar una metodología de diseño de controladores borrosos. Se revisa primero el análisis geométrico estabilidad y la detección de ciclos límites. A continuación se resume el método que utiliza el criterio del círculo y el criterio de conicidad, haciéndose mención a las técnicas para calcular índices de estabilidad. Se revisan también los trabajos de estabilidad global y asintótica mediante el uso del modelo de T-S, debido al gran uso que se viene haciendo de este modelo. Finalmente, se comentan los enfoques basados en LMI y en estabilidad energética.

2. CONSIDERACIONES ACERCA DE LA ESTABILIDAD DE SISTEMAS BORROSOS

El concepto de estabilidad es básico en todos los sistemas de control, siendo los sistemas de control borroso un caso especial de sistemas de control no lineal. Esto significa que los métodos de análisis de estabilidad y los resultados de la teoría de sistemas no lineales, como el método de Lyapunov, se pueden aplicar también a los sistemas borrosos. A la estabilidad de Lyapunov se ha prestado mucha atención en los últimos años, lo que posiblemente haya sido fomentado por la existencia de métodos de optimización numérica convexa para la búsqueda de funciones de Lyapunov.

La mayoría de los trabajos publicados sobre análisis de estabilidad de sistemas de control borroso, parten del conocimiento previo del modelo matemático de la planta, expresándolo como un sistema dinámico, bien en tiempo continuo, o bien

en tiempo discreto. En muchos trabajos se supone que el modelo del controlador es borroso, pero el de la planta no. De hecho, la mayoría de los sistemas experimentales usados para el diseño de sistemas de control borroso, como el péndulo invertido, un sistema de pelota y balancín, son de esta naturaleza.

3. TIPOS DE SISTEMAS BORROSOS

Generalmente se consideran tres tipos de sistemas de control borroso. El tipo I es el clásico que se usó por primera vez en el control de una máquina de vapor por Mamdani (Mamdani and Assilian, 1975). En este tipo de sistemas se usan conjuntos borrosos en la premisa y en la consecuencia de cada regla.

$$R^{i_1 \dots i_n} : \text{Si } (x \text{ es } M_1^{i_1}) \text{ y } \dots \text{ y } (x^{(n-1)} \text{ es } M_n^{i_n}) \\ \text{entonces } (x^{(n)} \text{ es } X^{i_1 \dots i_n}) \quad (1)$$

donde $x^{(l-1)} = \frac{d^{l-1}x}{dt^{l-1}}$, $M_1^{i_1}$ ($i_1 = 1, 2, \dots, r_1$) son conjuntos borrosos para x , $M_2^{i_2}$ ($i_2 = 1, 2, \dots, r_2$) los conjuntos borrosos para \dot{x} y $M_n^{i_n}$ ($i_n = 1, 2, \dots, r_n$) son los conjuntos borrosos para $x^{(n-1)}$, con sus funciones de pertenencia $\mu_{M_1^{i_1}}(x)$, $\mu_{M_2^{i_2}}(\dot{x})$ y $\mu_{M_n^{i_n}}(x^{(n-1)})$, respectivamente. $X^{i_1 \dots i_n}$ son los conjuntos borrosos para $x^{(n)}$.

Existen varios métodos para implementar la inferencia borrosa con este tipo de reglas, y de obtener el valor numérico de la conclusión final (desborrosificación).

El segundo tipo de sistemas de control borroso es aquél con consecuente de tipo *singleton*, es decir, un número real. Estos sistemas de tipo II son realmente un caso especial de los de tipo I.

$$R^{i_1 \dots i_n} : \text{Si } (x \text{ es } M_1^{i_1}) \text{ y } \dots \text{ y } (x^{(n-1)} \text{ es } M_n^{i_n}) \\ \text{entonces } (x^{(n)} = x^{i_1 \dots i_n}) \quad (2)$$

siendo $x^{i_1 \dots i_n}$ un número real. Los sistemas de tipo II se utilizaron primero como controladores borrosos, para el control de seguimiento de automóviles, y posteriormente en el control de un brazo robot (Ishikawa, 1988). Un sistema de control borroso de tipo I es lingüísticamente aceptable, ya que utiliza variables borrosas en ambas partes, premisa y consecuencia. Por el contrario, los sistemas de tipo II tienen la ventaja de que se puede reducir el número de parámetros en el consecuente de cada regla, gracias a que la consecuencia es un número real.

Los sistemas de tipo III consisten en un conjunto de reglas, cada una de las cuáles definen un sistema dinámico de orden n localmente válido. Se expresan de la siguiente forma:

$$R^{i_1 \dots i_n} : \text{Si } (x \text{ es } M_1^{i_1}) \text{ y } \dots \text{ y } (x^{(n-1)} \text{ es } M_n^{i_n}) \\ \text{entonces } x^{(n)} = a_0^{i_1 \dots i_n} + \sum_{l=1}^n a_l^{i_1 \dots i_n} x^{(l-1)} \quad (3)$$

Este tipo de sistemas (Sugeno, 1985) y (Takagi and Sugeno, 1985) se utilizó como controlador por primera vez en el control de un modelo de coche (Sugeno and Murakami, 1984).

Como se puede observar, los sistemas de tipo II, de nuevo, son un caso especial de sistemas de tipo III.

La necesidad de disponer de métodos de análisis de estabilidad para el diseño de controladores borroso basados en modelos se discute en (Sugeno, 1985). En lo que concierne al sistema del tipo I, en (Braae and Rutherford, 1979) se suministra un modelo borroso de un sistema no lineal y se diseña un controlador borroso para que el sistema en cadena cerrada, descrito por reglas borrosas, sea estable. Su método es heurístico, pero muestra el objetivo del control borroso.

Existen muchos trabajos sobre la estabilidad de sistemas de control borroso de tipo I. La mayoría de esos trabajos se centran en el estudio de las características de los controladores borrosos, sin tener en cuenta las propiedades de los modelos borrosos de los sistemas a controlar. En esos trabajos se lleva a cabo un análisis de estabilidad del conjunto sistema no borroso con controlador borroso, y tratan el segundo como un controlador no lineal. Como tal, reducen el problema de análisis de estabilidad a la teoría clásica de estabilidad no lineal, como por ejemplo, el análisis en el plano de fases para sistemas no lineales de bajo orden. En (Hojo *et al.*, 1992) y (Kickert and Mamdani, 1978) se presenta una aplicación de la función descriptiva al análisis de la estabilidad de un sistema lineal con un controlador borroso.

Otro enfoque muy estudiado ha sido el uso del criterio del círculo (Opitz, Sept. 1993), (Ray and Majumder, 1984) y su versión extendida: el criterio de conicidad (Aracil *et al.*, 1993) y (Kitamura, 1991).

En otra línea, hay muchos estudios de estabilidad en el ajuste del control de modo deslizante (SM) o sistemas de estructura variable (Chen, 2001), (Huang and Lin, 2003), (Hwang, 2004), (Hwang and Lin, 2004), (Meda-Campana and Castillo-Toledo, 2005), (Palm, 1994), (Su *et al.*, 2001),

(Tao *et al.*, 2004) y (Tong and Li, 2003). La idea está en lograr un control robusto con el diseño de un controlador borroso de modo deslizante, que cambie su estrategia de control con una superficie de conmutación.

Con relación a la robustez de la estabilidad, existen índices de estabilidad (Ollero *et al.*, 1995), basados en la teoría cualitativa.

Finalmente, existen muchos estudios sobre la estabilidad de los sistemas de control descritos mediante relaciones borrosas (Gang and Laijiu, 1996) y (Langari and Tomizuka, 1990) que, sin embargo, no parecen prometedoras. Aunque incluyen teóricamente las expresiones de reglas del tipo si - entonces, las expresiones borrosas relacionales llegan a ser muy complicadas en el caso multivariable.

Todavía no está madura una teoría general para el análisis de estabilidad de sistemas borrosos de tipo I. Lo habitual es que el análisis de estabilidad sea heurístico, y que el sistema a controlar no sea un sistema borroso sino un sistema lineal.

En la teoría clásica de control, el análisis de estabilidad de un sistema de control está basado en el análisis de sistemas dinámicos no forzados, es decir, un sistema sin entrada de control. Por lo tanto, lo que se necesita en primer lugar es un método de análisis de estabilidad para sistemas dinámicos borrosos no forzados. Siempre que se considere un sistema de tipo III, el análisis de estabilidad está siendo planteado según esta idea.

La estabilidad de un sistema no forzado de tipo III fue en primer lugar analizada para el caso discreto en (Tanaka and Sugeno, 1990), donde se aplicó el enfoque de la función de Lyapunov. Otros trabajos relacionados con la estabilidad, (Kawamoto *et al.*, 1993) y (Tanaka and Sugeno, 1992), tratan tanto los sistemas de tiempo discreto como los de tiempo continuo.

A partir de ellos, muchos han sido los trabajos llevados a cabo sobre sistemas de control de tipo III. Basado en las condiciones de estabilidad, el control basado en modelos de sistemas de tipo III se ha desarrollado para el caso discreto (Akar and Özgüner, 2000), (Cao *et al.*, 1996b), (Tanaka and Sugeno, 1992) y (Zhao *et al.*, 1997), y también para el caso continuo en (Feng *et al.*, 1997) y (Zak, 1999). En estos estudios se usan los modelos del espacio de estado. También en (Cao *et al.*, 1999) se han estudiado los modelos de entrada/salida de tipo III.

4. ESTADO DEL ARTE DE LA ESTABILIDAD DE SISTEMAS BORROSOS

En este apartado se recogen las principales líneas de investigación que tratan de dar una solución global al análisis de estabilidad de sistemas borrosos.

4.1 El Plano de Fases o Análisis Geométrico

Inicialmente, el controlador borroso se analizó mediante métodos tradicionales algebraicos, los cuales tienen éxito particularmente en el análisis de la estabilidad, siempre que el proceso sea modelado también algebraicamente. Estos métodos tienen la limitación de que el modelo algebraico puede ser utilizado también para modelar el controlador borroso. Mediante esta técnica, se obtienen controladores borrosos eficientes, especialmente para controlar sistemas no lineales de bajo orden.

En (Braae and Rutherford, 1979) se propuso una trayectoria lingüística del plano de fases para analizar y mejorar la estabilidad, modificando las reglas de control. El sistema será estable si la trayectoria lingüística converge al punto de equilibrio.

Como ejemplo, se considera el sistema lingüístico representado mediante las siguientes ecuaciones:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u}) \quad (4)$$

$$\mathbf{u} = \Phi(\mathbf{x}) \quad (5)$$

que representan las reglas mostradas en el cuadro 1 de forma matricial.

		x						
		NG	NM	NP	CE	PP	PM	PG
u	NG	CE	NP	NP	NM	NG	NM	NP
	NM	PG	CE	NG	NG	NG	NM	NG
	NP	NP	NP	CE	NM	NM	NG	NG
	CE	PG	PG	PG	CE	PP	PP	PP
	PP	NM	CE	PP	NG	PG	PM	PG
	PM	NM	NP	CE	PP	CE	NP	NG
	PG	NG	NG	NG	CE	PG	PG	PG
Tabla de $\dot{\mathbf{x}}$								

		x						
		NG	NM	NP	CE	PP	PM	PG
		NG	NM	NP	CE	PP	PM	PG
		NG	NM	NP	CE	PP	PM	PG
Tabla de y								

Cuadro 1. Reglas borrosas mediante el plano de fases

Por ejemplo, el elemento NM en la matriz representa la regla:

$R_i : Si u es PP y x es NG entonces \dot{x} es NM$
y el elemento NG , la siguiente regla

$$R_i : Si x es NG entonces y es NG$$

siendo y la salida del sistema.

Cuando u es PP y x es NG , entonces el cambio del estado \dot{x} es NM . Esto quiere decir que el estado del sistema x se hace más negativo. Dado que el sistema alcanza su máximo valor lingüístico negativo, esta situación revela su inestabilidad lingüística.

En (Aracil *et al.*, 1988) se propone la aplicación de los enfoques del espacio de estado geométrico al análisis de estabilidad de los sistemas de control borroso. Este método abarca los conceptos incluidos en el enfoque de trayectorias lingüísticas (Braae and Rutherford, 1979), y puede usarse para analizar la estabilidad del estado, así como para detectar ciclos límites, oscilaciones y otros comportamientos dinámicos.

4.2 Criterio del Círculo

La aplicación del criterio del círculo a sistemas borrosos se propuso en (Kickert and Mamdani, 1978). En (Ray *et al.*, 1984), se utiliza el criterio del círculo para el análisis de la estabilidad de los sistemas de control borroso.

El problema es estudiar la estabilidad en el origen para una clase de no linealidades que satisfacen la condición de sector dada. Si el origen es global y asintóticamente estable para todas las no linealidades en el sector, el sistema se denomina absolutamente estable. Este problema se denomina también *problema de Lur*.

Debido a que un sistema con FLC es un sistema no lineal, hay que llevar a cabo dos análisis diferentes de estabilidad: un análisis local alrededor del punto de trabajo y otro global, para comprobar si existen otros puntos de equilibrio o ciclos límites. Para analizar el problema de estabilidad local en sistemas de control borroso, se han aplicado algunos de los métodos tradicionales para análisis de estabilidad de sistemas no lineales de control (Wang, 1997) y (Yager and Filev, 1994). El criterio del círculo y el criterio relacionado de Popov, han sugerido también ideas para analizar la estabilidad de sistemas borrosos del tipo de Mamdani sobre una planta lineal (Aracil *et al.*, 1993).

Estos métodos se pueden aplicar a sistemas no lineales que puedan representarse mediante un

sistema lineal realimentado con un elemento no lineal. En el caso del control borroso, como elemento no lineal se tienen las reglas borrosas de tipo I, como se ve en la figura 1.

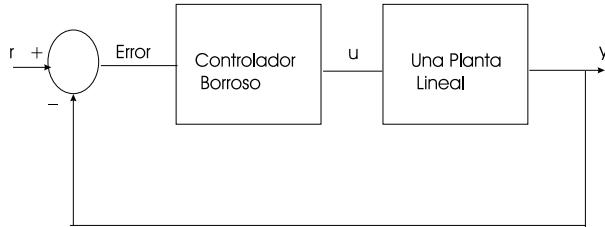


Figura 1. Sistema en lazo cerrado con un controlador borroso

La aplicación del criterio del círculo al análisis de estabilidad absoluta de un sistema realimentado con una no linealidad ϕ , y con límites en un sector, se muestra en la figura 2.

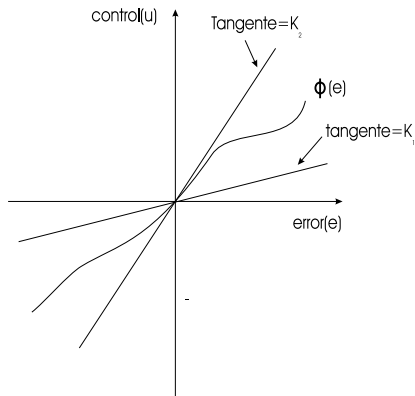


Figura 2. No linealidad limitada por un sector

En el caso de sistemas MIMO (ver figura 3), se supone que $\mathbf{G}(s)$ es una matriz de función de transferencias cuadrada $m \times m$ racional para un sistema lineal, y asintóticamente estable. El elemento no lineal $\Phi(e, t)$ es una matriz diagonal.

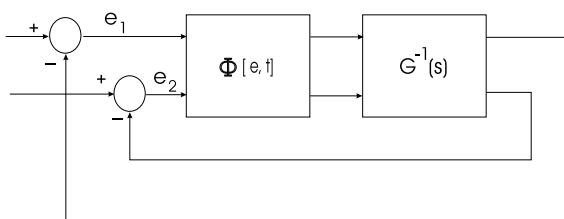


Figura 3. Un sistema MIMO realimentado con un controlador no lineal

$$\Phi(e, t) = \text{diag } \phi_i(e, t), \quad i = 1, 2, \dots, m$$

m es el número de entradas y salidas en el caso de que el sistema sea una matriz cuadrada, y las funciones $\phi_i(e, t)$ cumplen la restricción:

$$K_1 \leq \phi_i(e, t) \leq K_2$$

El sistema MIMO se descompone en un conjunto de subsistemas. La forma inversa del criterio de estabilidad del sistema $\mathbf{G}^{-1}(s)$ y el radio del círculo $\hat{r}_i(jw)$, se representan como sigue.

Si el sistema es diagonal-fila dominante,

$$|\hat{g}_{ii}(jw)| > \hat{r}_i(jw) = \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^m [|\hat{g}_{ik}(jw)|] \quad (6)$$

Mientras que si el sistema es diagonal-columna dominante,

$$|\hat{g}_{ii}(jw)| > \hat{r}_i(jw) = \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^m [|\hat{g}_{ki}(jw)|] \quad (7)$$

siendo $\hat{g}_{ki}(jw)$ el elemento ki de $G^{-1}(jw)$.

Así pues, el sistema MIMO es global y asintóticamente estable, si la banda de Nyquist del modelo de la planta inversa evita el origen y el círculo de diámetro $[-K_1, -K_2]$, y rodea a ambos el mismo número de veces en sentido horario, tal y como se refleja en la figura 4.

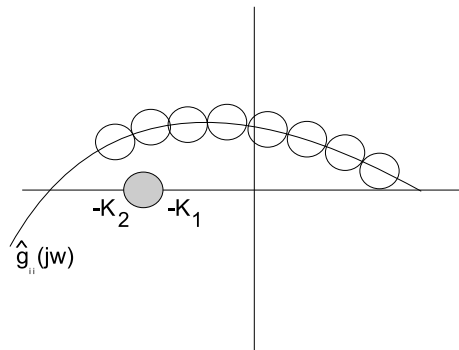


Figura 4. La banda de Nyquist inversa de un sistema no lineal MIMO realimentado

La aplicación del enfoque de tipo Lur a la estabilidad de sistemas de control del tipo I, produce sólo resultados conservadores, ya que considera el control basado en reglas como un controlador no lineal. Y cuando se adapta o se introduce un controlador borroso en un controlador no lineal, se pierden algunas características del controlador borroso, debido al uso de un sólo límite de sector.

4.3 Criterio de conicidad

La generalización del criterio del círculo a sistemas multivariables conduce al criterio de conicidad. El

criterio se replantea y aplica al análisis y diseño de sistemas de control borroso en (French and Rogers, 1998), (Kang *et al.*, 1998) y (Ray *et al.*, 1984).

La restricción de que el sistema lineal de la figura 5 debe ser Hurwitz, se puede evitar usando la transformación de lazo mostrada en la figura 6. Un sistema que no es Hurwitz con una no linealidad que cumple la condición del sector con $K \neq 0$, se puede expresar de la forma anterior, utilizando la realimentación mostrada en la figura 6. El nuevo sistema lineal queda expresado de la forma:

$$G_T(s) = G(s)[I + KG(s)]^{-1}$$

y la nueva no linealidad pertenece al sector $[0, K]$, con $K = K_2 - K_1$. Esto conduce al criterio del círculo multivariable (Criterio de conicidad).

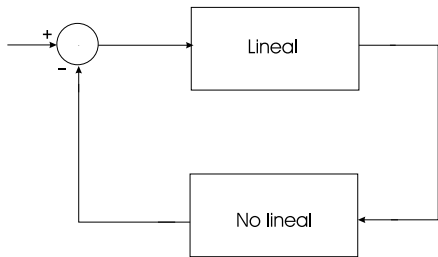


Figura 5. Decomposición del sistema

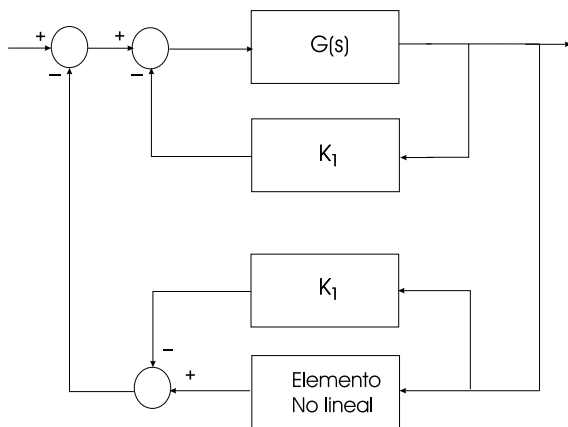


Figura 6. Transformación de la realimentación

Según el teorema de pequeña ganancia, un sistema realimentado compuesto de dos sistemas estables es estable, si el producto de las ganancias es menor que uno, es decir, si

$$\text{Ganancia}(\phi - K) \times \text{Ganancia}\left(\frac{G}{1 + KG}\right) < 1$$

En (Cuesta *et al.*, 1999) se muestra la aplicación de los métodos en el dominio de la frecuencia a sistemas MIMO. El método propuesto está basado en la formulación del problema de Lur, tal y como se muestra en la figura 5, donde el sistema

borroso T-S se puede descomponer en una parte lineal y en otra no lineal. Además, esta técnica lleva directamente a la aplicación de técnicas de estabilidad de entrada/salida, tales como el criterio de conicidad.

El sistema borroso representado mediante el modelo T-S es:

$$\begin{aligned} R^{i_1 \dots i_n} : \text{Si } (\mathbf{x} \text{ es } \mathbf{M}^{i_1 \dots i_n}) \text{ entonces} \\ \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{a}_0^{i_1 \dots i_n} + \mathbf{A}^{i_1 \dots i_n} \mathbf{x} \end{aligned} \quad (8)$$

siendo el peso de cada regla

$$w^{i_1 \dots i_n}(\mathbf{x}) = \mu_{M_1^{i_1}}(x) \dots \mu_{M_n^{i_n}}(x^{(n-1)}) \quad (9)$$

La ecuación (8) se puede escribir como

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}} = \sum_{i_1=1}^{r_1} \dots \sum_{i_n=1}^{r_n} \{ \mathbf{A}^{i_1 \dots i_n} \mathbf{x} - [(1 - w^{i_1 \dots i_n}(\mathbf{x})) \\ \mathbf{A}^{i_1 \dots i_n} \mathbf{x} - w^{i_1 \dots i_n}(\mathbf{x}) \mathbf{a}_0^{i_1 \dots i_n}] \} \end{aligned} \quad (10)$$

es decir, que las partes lineal y no lineal se pueden separar, y el modelo T-S resultante se muestra en la figura 7.

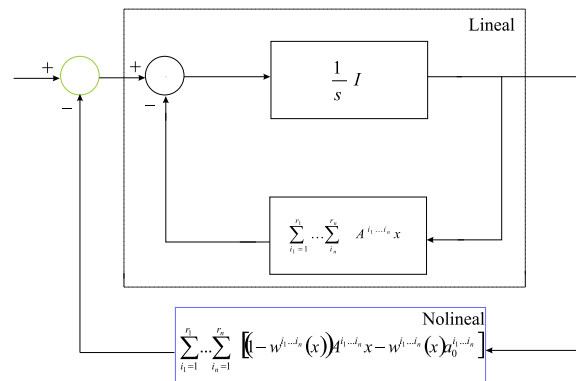


Figura 7. Decomposición del modelo T-S

4.4 Criterio de Popov

Este criterio se aplica solamente a no linealidades invariantes con el tiempo (Chung *et al.*, 1992). Considérese el sistema de la figura 1, siendo ϕ la no linealidad invariante en el tiempo, que satisface el sector $[0, K]$, con K diagonal positiva. Si la parte lineal $G(s)$ es asintóticamente estable, el sistema realimentado es estable siempre que exista un $\eta \geq 0$ tal que

$$\frac{1}{K} + \text{Re}[G(jw)] - \eta w \text{Im}[G(jw)] > 0$$

Si $Re[G(jw)]$ se dibuja frente a $wIm[G(jw)]$, tomando w como parámetro, entonces la condición se cumple si el diagrama resultante está a la derecha de la línea que intercepta $-1/K$ con la tangente $-1/\eta$. Este diagrama se denomina diagrama de Popov.

4.5 Índices de Estabilidad

En (Aracil *et al.*, 1993), aparecen nuevos métodos para analizar la estabilidad de sistemas de control borroso, basados en la teoría cualitativa de sistemas no lineales, que incluyen índices de estabilidad.

En (Ollero *et al.*, 1995), se trata el diseño de los sistemas basados en reglas de control borroso estables y se determinan nuevas expresiones para calcular los índices anteriores. Su utilidad radica en proporcionar una medida de estabilidad relativa.

El trabajo presenta procedimientos que hacen uso de estos índices, con el fin de mejorar el diseño de los sistemas de control borroso mediante la modificación de las reglas, y conseguir alcanzar la estabilidad global y mejorar el comportamiento dinámico de una planta no lineal.

El sistema de control basado en reglas con una acción de control $\mathbf{u} = \Phi(\mathbf{x})$, aparece reflejado en la figura 8.

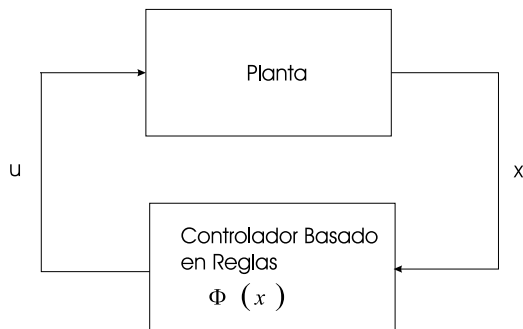


Figura 8. Sistema de control basado en reglas

Para el caso bidimensional, la ecuación del sistema se representa como sigue:

$$\dot{x}_1 = f_1(x_1, x_2) + b_1\phi(x_1, x_2) \quad (11)$$

$$\dot{x}_2 = f_2(x_1, x_2) + b_2\phi(x_1, x_2) \quad (12)$$

Se supone que el origen es el punto de equilibrio y que es estable. El sistema será inestable si un autovalor real cruza el eje imaginario y se convierte en positivo (bifurcación estática) o los autovalores complejos conjugados cruzan el eje

imaginario y tienen valores positivos (bifurcación Hopf).

Sea J la matriz Jacobiana del sistema en el punto de equilibrio, y sea

$$\varphi(s) = \det(sI - J) = s^2 + a_1s + a_2 \quad (13)$$

la ecuación característica de J , siendo $a_2 = \det J$ y $a_1 = -\text{tr } J$

La medida de la estabilidad relativa del punto de equilibrio en el origen, viene dada por los dos índices. Uno de ellos indica la pérdida de estabilidad cuando un autovalor cruza el eje imaginario. Por lo tanto, su valor ofrece una medida de cómo de lejos está el sistema de la situación donde la estabilidad se pierde.

$$I_1 = \det J \quad (14)$$

El otro índice está relacionado a la pérdida de estabilidad cuando dos autovalores complejos conjugados cruzan el eje imaginario (ciclo límite).

$$I'_1 = -(\text{tr } J) \quad (15)$$

Cuanto más grande sea el valor positivo de los dos índices, más grande será el grado de estabilidad relativa. La anulación de cualquiera de ellos conduce a la pérdida de estabilidad. Los dos índices dependen de la matriz J en el punto de equilibrio y se usan para estudiar la estabilidad relativa del punto de equilibrio situado en el origen.

4.6 Estabilidad de Lyapunov

La estabilidad de Lyapunov ha tenido históricamente mucho interés en el análisis de sistemas borrosos y en el diseño de controladores borrosos (Castillo-Toledo and Meda-Campana, 2004), (Chang and Chen, 2005), (Chen *et al.*, 2005c), (Tian and Peng, 2006), (Hsiao *et al.*, 2005), (Kim and Lee, 2005), (Leung *et al.*, 2003), (Li and Lin, 2004), (Liu *et al.*, 2005), (Park *et al.*, 2004), (Tao and Taur, 2005), (Tuan *et al.*, 2004), (Wang and Lin, 2005), (Wang and Luoh, 2004), (Xu and Lam, 2005) y (Xiu and Ren, 2005).

Sea un sistema de la forma

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x})$$

con $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ un punto de equilibrio.

Sea

$$V(\mathbf{0}) = 0, \quad V(\mathbf{x}) > 0 \quad \forall \mathbf{x} \neq \mathbf{0} \quad \text{y} \quad \dot{V}(\mathbf{x}) \leq 0$$

entonces $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ es estable. Además, si $\dot{V}(\mathbf{x}) < 0 \quad \forall \mathbf{x} \neq \mathbf{0}$, entonces $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ es asintóticamente

estable. Si además de las condiciones mencionadas anteriormente, la condición:

$$V(\mathbf{x}) \rightarrow \infty \text{ cuando } \|\mathbf{x}\| \rightarrow \infty$$

se cumple, entonces $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ es global y asintóticamente estable. Las condiciones del teorema de estabilidad de Lyapunov son sólo suficientes. El que no se cumplan no significa que el sistema no sea estable, ni global y asintóticamente estable.

Sea la función cuadrática de Lyapunov

$$V(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T \mathbf{P} \mathbf{x}$$

con \mathbf{P} una matriz simétrica real. En este caso, $V(\mathbf{x})$ es definida positiva sí y sólo sí todos los autovalores de \mathbf{P} son positivos. Si $V(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T \mathbf{P} \mathbf{x}$ es definida positiva, se puede decir que \mathbf{P} es definida positiva. Para un sistema lineal $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A} \mathbf{x}$, la derivada de V es

$$\begin{aligned} \dot{V}(\mathbf{x}) &= \mathbf{x}^T (\mathbf{P} \mathbf{A} + \mathbf{A}^T \mathbf{P}) \mathbf{x} \\ \dot{V}(\mathbf{x}) &= -\mathbf{x}^T \mathbf{Q} \mathbf{x} \end{aligned}$$

En el caso lineal, la estabilidad cuadrática de Lyapunov implica encontrar una matriz \mathbf{P} que cumpla las dos condiciones siguientes:

$$\begin{aligned} \mathbf{P} &> \mathbf{0} \\ \mathbf{P} \mathbf{A} + \mathbf{A}^T \mathbf{P} &< \mathbf{0} \end{aligned} \quad (16)$$

La solución se puede obtener analíticamente resolviendo la ecuación $\mathbf{P} \mathbf{A} + \mathbf{A}^T \mathbf{P} = -\mathbf{Q}$. La solución existe si \mathbf{A} es una matriz Hurwitz, esto es, si $Re \lambda_i < 0$ para todos los autovalores de \mathbf{A} . Las funciones cuadráticas de Lyapunov se pueden utilizar para estudiar la estabilidad de sistemas del tipo

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}(\mathbf{x}) \mathbf{x} \quad (17)$$

cundo $\mathbf{A}(\mathbf{x})$ está dentro de un convexo de matrices $\{\mathbf{A}^{1\dots 1}, \mathbf{A}^{2\dots 2}, \dots, \mathbf{A}^{r_1\dots r_n}\}$. Esto es equivalente a

$$\dot{\mathbf{x}} = \frac{\sum_{i_1=1}^{r_1} \dots \sum_{i_n=1}^{r_n} w^{i_1\dots i_n}(\mathbf{x}) [\mathbf{A}^{i_1\dots i_n} \mathbf{x}]}{\sum_{i_1=1}^{r_1} \dots \sum_{i_n=1}^{r_n} w^{i_1\dots i_n}(\mathbf{x})} \quad (18)$$

donde $w^{i_1\dots i_n}(\mathbf{x})$ toma valores en $[0, 1]$ y $\sum_{i_1=1}^{r_1} \dots \sum_{i_n=1}^{r_n} w^{i_1\dots i_n}(\mathbf{x}) = 1$. En este caso, el sistema (18) es global y asintóticamente estable, si existe una matriz común \mathbf{P} tal que

$$\begin{aligned} \mathbf{P} &> \mathbf{0} \\ \mathbf{P} \mathbf{A}^{i_1\dots i_n} + (\mathbf{A}^{i_1\dots i_n})^T \mathbf{P} &< \mathbf{0} \end{aligned} \quad (19)$$

Esto equivale a decir que se debe hallar una función de Lyapunov común a todos los subsistemas lineales $\mathbf{A}^{i_1\dots i_n}$. El problema de la estabilidad

cuadrática de (19) no tiene solución analítica. Sin embargo, se puede solucionar mediante optimización convexa (Boyd *et al.*, 1994), siempre que la condición de la ecuación (19) sea LMI en \mathbf{P} (se mencionará en 27). La estabilidad cuadrática se puede aplicar a examinar la estabilidad del modelo de T-S, tal y como se verá más adelante, ya que éste se puede describir según (17).

4.7 Estabilidad del Modelo de Takagi-Sugeno

Para cubrir todos los aspectos relativos a la estabilidad global y asintótica, y al diseño de sistemas de control borroso, se analiza a continuación el modelo T-S, ampliamente extendido en la literatura de lógica borrosa, y caracterizado por ser un modelo más analítico y dinámico que el resto. El objetivo es la obtención, de manera analítica y generalizada, de una solución global a la estabilidad de los sistemas borrosos.

A raíz de la aparición del modelo T-S, se abrió una importante línea de investigación relacionada con la teoría de análisis dinámico y de estabilidad, aplicable a los sistemas borrosos. Debido a que las conclusiones de las reglas que usa este modelo suelen ser sistemas lineales, los investigadores se aprovechan de la existente teoría de control lineal para su análisis. La solución aquí presentada corresponde a un modelo borroso con consecuentes afines.

Existen numerosos trabajos en la literatura centrados en el análisis de estabilidad del modelo borroso T-S. La existencia de un modelo T-S apropiado se asume previamente. En (Tanaka and Sugeno, 1992), se deriva una condición suficiente para la estabilidad global y asintótica de un sistema borroso en el sentido de Lyapunov: debe existir una función (una matriz común definida positiva simétrica \mathbf{P}) para todos los subsistemas, tal y como se vió en (19). Esto constituye un resultado muy importante, y se ha profundizado en él con el fin de afinar los resultados. Sin embargo, el problema de la estabilidad cuadrática de la ecuación (19) no tiene solución analítica, ya que su método es únicamente aplicable a sistemas discretos invariantes con el tiempo.

En (Lo and Chen, 1999) se analizó la estabilidad del modelo de T-S aplicando los resultados de Khartimov (Khartimov, 1979), que demuestran que una familia de polinomios es Hurwitz, si y sólo si sus polinomios extremos son Hurwitz. En el caso de tener que resolver un conjunto de desigualdades de Lyapunov, se añade la dificultad de tener que construir una función de Lyapunov, para lo

cual no existe una manera efectiva analítica. Sin embargo, existen varios trabajos que tratan de resolver este problema numéricamente mediante algoritmos de programación convexos muy eficientes, incluyendo las LMI (Boyd *et al.*, 1994), (Johansson *et al.*, 1999).

(Tanaka and Sano, 1994) introdujeron el concepto de estabilidad robusta para sistemas de control borroso de tipo T-S, con la incertidumbre en los parámetros de las premisas, utilizando condiciones de robustez débiles. Para introducir el criterio de estabilidad robusta, se definen la región admisible y la región de variación, equivalentes al margen de estabilidad conocido de la teoría de control clásica.

En (Feng *et al.*, 1997) los sistemas borrosos están representados mediante una familia de modelos locales en el espacio de estado. El controlador se obtiene diseñando cada controlador local por realimentación del estado e introduciendo un controlador compensatorio. El controlador compensatorio está basado en la conocida teoría de control de estructura variable. Se demuestra que este controlador garantiza la estabilidad global y asintótica del sistema borroso en cadena cerrada.

En (Kosko, 1997), (Tanaka and Sano, 1994) y (Tanaka and Sugeno, 1992), se obtienen algunos de los resultados más importantes en el análisis de sistemas borrosos. El objetivo se centra en la búsqueda de una condición de estabilidad global y asintótica para sistemas borrosos. Los teoremas presentados se han aplicado a casos particulares del modelo borroso T-S, donde se supone que el término independiente es cero, lo cual significa que el sistema se linealiza en torno al origen. Esto condiciona su generalización. Como se sabe, el término independiente en un sistema lineal no afecta a la estabilidad, sino a la entrada. En los sistemas borrosos no ocurre así, debido a que estos son el resultado de la inferencia de todos sus subsistemas. Esto provoca que el término independiente deje de ser constante, pasando a ser una función dependiente de las variables del sistema, de manera que influye en la dinámica resultante del mismo.

En (Al-Hadithi, 2002), (Matía *et al.*, 2000b), (Matía *et al.*, 2002), (Matía *et al.*, 1999b) y (Al-Hadithi *et al.*, 2002) se desarrolla un teorema que trata de encontrar una solución global a la estabilidad del modelo borroso general T-S (ver figura 9), utilizando el método directo de Lyapunov para encontrar una matriz definida positiva \mathbf{P} . El sistema borroso representado por

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{a}_0(\mathbf{x}) + \mathbf{A}(\mathbf{x})\mathbf{x} \quad (20)$$

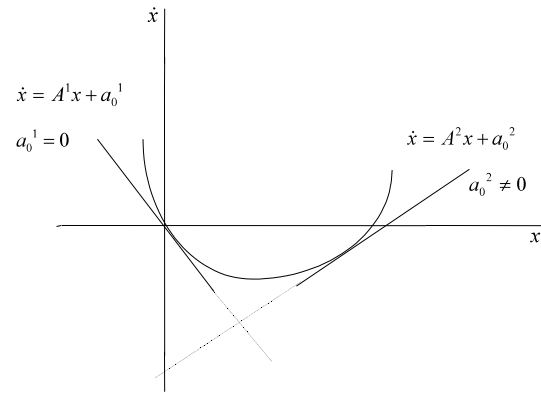


Figura 9. El modelo general afín T-S

que también es posible representarlo como sigue,

$$\mathbf{H}(\mathbf{x})\dot{\mathbf{x}} + \mathbf{x} = \mathbf{h}_0(\mathbf{x}) \quad (21)$$

es global y asintóticamente estable, si existe una matriz \mathbf{P} definida positiva, tal que, $\forall \mathbf{x} \neq \mathbf{0}$:

$$\begin{aligned} & [\mathbf{H}^{-1}(\mathbf{x})]^T \left[\mathbf{I} - \frac{d\mathbf{h}_0(\mathbf{x})}{d\mathbf{x}} \right]^T \mathbf{P} \\ & + \mathbf{P} \left[\mathbf{I} - \frac{d\mathbf{h}_0(\mathbf{x})}{d\mathbf{x}} \right] \mathbf{H}^{-1}(\mathbf{x}) > 0 \end{aligned} \quad (22)$$

En (Matía *et al.*, 1999a) se presenta otro teorema similar que persigue la estabilidad global y asintótica. El sistema borroso definido por la forma general del modelo de T-S de la ecuación (21) es global y asintóticamente estable si:

- 1- $\frac{\partial h_0(\mathbf{x})}{\partial x} < 1$ para un sistema de 1^{er} orden
- 2- $\begin{cases} \frac{\partial h_0(\mathbf{x})}{\partial x} < 1 \\ \frac{\partial x}{\partial h_0(\mathbf{x})} < h_1(\mathbf{x}) \end{cases}$ para un sistema de 2^o orden

La aplicación de estos teoremas es extensible también al análisis de la estabilidad global y asintótica de los sistemas no lineales.

En (Matía *et al.*, 2000a) se analiza la estabilidad global y asintótica de sistemas borrosos discretos basados en el modelo general discreto de T-S (Takagi and Sugeno, 1985). El modelo discreto propuesto por Takagi-Sugeno, se describe mediante reglas del tipo si-entonces, que localmente representan la relación lineal entrada/salida del sistema. Cada regla del sistema libre es de la forma:

$$\begin{aligned} R^{i_1 \dots i_n} : & \text{Si } x(k) \text{ es } X_1^{i_1} \text{ y } \dots \text{ y } x(k-n+1) \text{ es } X_n^{i_n} \\ & \text{entonces } x^{i_1 \dots i_n}(k+1) = a_0^{i_1 \dots i_n} + a_1^{i_1 \dots i_n} x(k) \\ & + \dots + a_n^{i_1 \dots i_n} x(k-n+1) \end{aligned} \quad (23)$$

(Tanaka and Sugeno, 1992) presentaron las condiciones suficientes de estabilidad para el sistema borroso discreto representado por la ecuación (23), haciendo la simplificación (poco realista) $\mathbf{a}_0(\mathbf{x}(k)) = \mathbf{0} \forall \mathbf{x}(k)$, es decir $\mathbf{a}_0^{i_1 \dots i_n} = \mathbf{0}, \forall i_l = \{1, \dots, r_l\}, \forall l = \{1, \dots, n\}$. Según esto, el sistema borroso definido por las reglas mostradas en (23), con $\mathbf{a}_0^{i_1 \dots i_n} = \mathbf{0}, \forall i_1 \dots, i_n$, que se puede representar de otra forma como $\mathbf{x}(k+1) = \mathbf{A}(\mathbf{x}(k))\mathbf{x}(k)$, es global y asintóticamente estable si existe una matriz \mathbf{P} definida positiva, tal que

$$(\mathbf{A}^{i_1 \dots i_n})^T \mathbf{P} \mathbf{A}^{i_1 \dots i_n} - \mathbf{P} < \mathbf{0} \quad (24)$$

$$\forall i_l = \{1, \dots, r_l\}, \forall l = \{1, \dots, n\}.$$

Existen también planteamientos para el modelo borroso afín. La figura 10 muestra un sistema borroso discreto linealizado en varios puntos de trabajo pasando por el origen. El área sombreada representa la región inestable. En esta figura se aprecia que el sistema $\mathbf{x}(k+1) = \mathbf{A}(\mathbf{x}(k))\mathbf{x}(k)$, se encuentra acotado por los subsistemas $x^{i_1}(k+1) = a_1^{i_1}x(k)$, por lo que sería estable si estos lo fueran (sólo para $n = 1$). Sin embargo, los sistemas de la forma $\mathbf{x}(k+1) = \mathbf{A}(\mathbf{x}(k))\mathbf{x}(k)$ no existen en la práctica, pues no parece lógico ni real que un sistema se linealice en varios puntos de trabajo y que todas estas linealizaciones pasen por el origen.

Por otro lado, en el análisis de sistemas de este tipo, no se ha tomado en consideración el efecto de las funciones de pertenencia. Es evidente que la condición de estabilidad mencionada en el teorema anterior, y desarrollada en (Tanaka and Sugeno, 1992) y (Kosko, 1997), es sólo suficiente para asegurar la estabilidad del sistema borroso linealizado por varios subsistemas de la forma $x^{i_1}(k+1) = a_1^{i_1}x(k)$.

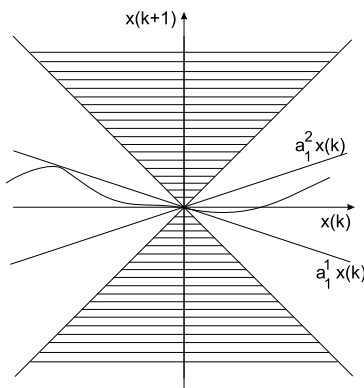


Figura 10. Un sistema borroso linealizado en varios puntos de trabajo pasando por el origen

El caso general con $a_0^{i_1 \dots i_n} \neq 0$ ya no es tan sencillo, tal y como se muestra a continuación. El modelo T-S de primer orden será

$$R^{i_1} : \text{Si } x(k) \text{ es } X_1^{i_1} \text{ entonces} \\ x^{i_1}(k+1) = a_0^{i_1} + a_1^{i_1}x(k) \quad (25)$$

Aplicando la condición de estabilidad de Lyapunov a este sistema, se obtiene:

$$|x(k+1)| = |a_1(x(k))x(k) + a_0(x(k))| < |x(k)|$$

La figura 11 muestra el comportamiento de este sistema borroso. Como se puede observar, el sistema está linealizado en varios puntos de trabajo y no todas las líneas pasan por el origen, como en el caso en el que $a_0^{i_1} = 0$. Por lo tanto, no es posible determinar si $x(k+1)$ caerá o no en la región inestable, sin tener en consideración las funciones de pertenencia (su forma y el universo de discurso).

Se ha de mencionar también que las condiciones de estabilidad propuestas en (Tanaka and Sugeno, 1992) dependen de $\mathbf{A}^{i_1 \dots i_n}$, es decir, de los autovalores de los subsistemas (si están dentro o fuera del círculo unitario), mientras que no dependen de las funciones de pertenencia.

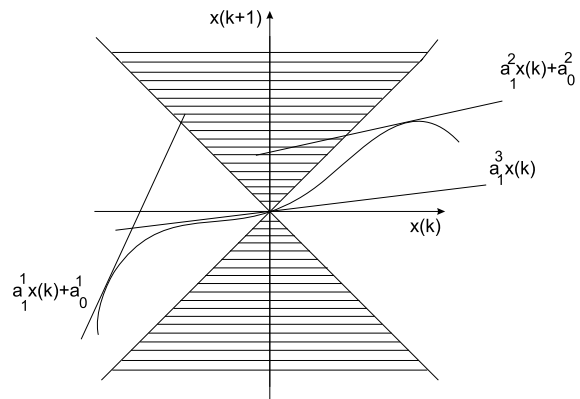


Figura 11. Ejemplo de la estabilidad del modelo general de T-S

Otra línea de investigación (Matía *et al.*, 2000a), (Al-Hadithi, 2002), consiste en elegir funciones de pertenencia rectangulares y analizar el efecto que éstas tienen (esto significa, conjuntos *crisp*) como se ve en la figura 12. En dicha figura, el límite de cada conjunto borroso se ha puesto en el punto de intersección de ambos subsistemas, para garantizar que se obtiene una función continua. Es siempre posible, en este caso, determinar la estabilidad del sistema borroso discreto. Lo que se consigue con este tipo de funciones de pertenencia, es que el sistema borroso (ahora lineal por tramos) no entre en la zona de inestabilidad, gracias a la

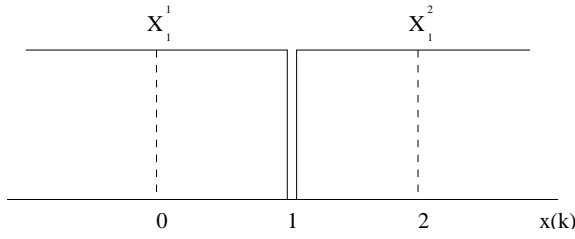


Figura 12. Funciones de pertenencia rectangulares característica de este tipo de funciones de pertenencia. Con su uso, no existe la interpolación entre reglas, con lo cual ello no afecta a la estabilidad y se elimina la posibilidad de que el sistema entre en la zona inestable, tal y como se ve en la figura 13.

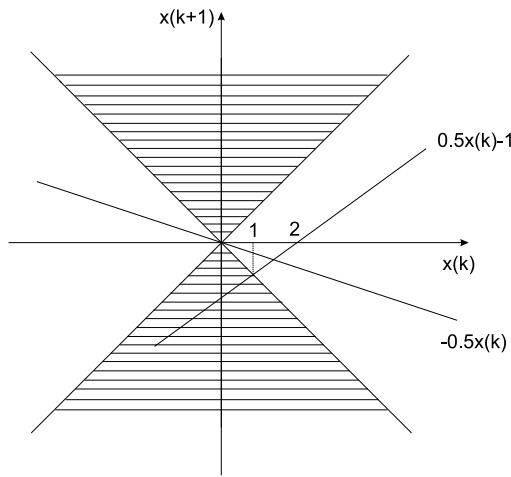


Figura 13. Función lineal por tramos

En (Tanaka and Sano, 1994) y (Tanaka and Sugeno, 1992), se analiza la estabilidad de un sistema, en el cual todos sus subsistemas son estables. Sin embargo, el sistema borroso resultante no lo es. Obviamente, no existe una matriz común definida positiva y, según las condiciones de estabilidad vistas, no se puede confirmar la estabilidad del sistema borroso. El modelo borroso de este ejemplo se puede representar mediante las siguientes reglas:

$$R^1 : \text{Si } x(k) \text{ es cualquiera y } x(k-1) \text{ es } X_2^1 \text{ entonces } x^1(k+1) = x(k) - 0,5x(k-1)$$

$$R^2 : \text{Si } x(k) \text{ es cualquiera y } x(k-1) \text{ es } X_2^2 \text{ entonces } x^2(k+1) = -x(k) - 0,5x(k-1)$$

Las condiciones iniciales son $x(0) = -0,7$ and $x(1) = 0,9$. Se puede plantear la siguiente pregunta: ¿Para que condiciones iniciales el sistema borroso es estable o no? La pregunta se puede responder estudiando el dominio de atracción del origen. El sistema borroso es:

$$x(k+1) = a_0(\mathbf{x}(k)) + a_1(\mathbf{x}(k))x(k) + a_2(\mathbf{x}(k))x(k-1)$$

$$x(k+1) = -x(k-1)x(k) - 0,5x(k-1) \quad (26)$$

Como se ha mencionado anteriormente, el sistema es inestable para las condiciones iniciales dadas (Tanaka and Sugeno, 1992). Para encontrar el rango de las condiciones iniciales para el cual el sistema es estable, se supone que existe una función de Lyapunov como:

$$V(\mathbf{x}(k)) = \mathbf{x}^T(k)\mathbf{x}(k) = x^2(k) + x^2(k-1) > 0$$

$$\Delta V(\mathbf{x}(k)) = x^2(k+1) - x^2(k-1) < 0$$

tal que,

$$|x(k+1)| < |x(k-1)|, \quad \forall \mathbf{x}(k) \neq 0, \text{ esto es, } \forall x(k-1) \neq 0$$

Sustituyendo $x(k+1)$ desde (26), se obtiene

$$|-x(k)x(k+1) - 0,5x(k-1)| < |x(k-1)|, \quad \forall \mathbf{x}(k) \neq 0, \text{ esto es, } \forall x(k-1) \neq 0$$

lo cual implica que,

$$-1,5 < x(k) < 0,5$$

y $x(k-1)$ cualquiera dentro del universo de discurso. Por lo tanto, dado que esto es válido $\forall k$, se tiene que las condiciones iniciales deben estar en el intervalo $[-1, 0,5]$. La figura 14 muestra el dominio de atracción de estabilidad (Wang *et al.*, 1996), donde las áreas negras representan las regiones de inestabilidad. Si se compara este rango

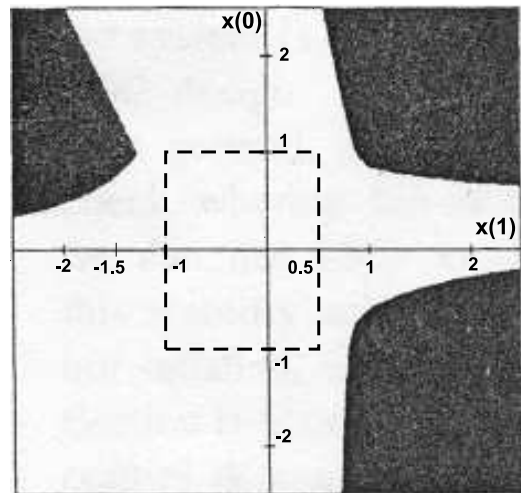


Figura 14. Dominio de atracción calculado por Wang

de valores iniciales del sistema, que aseguran la estabilidad global y asintótica, con el dominio de atracción demostrado en (Wang *et al.*, 1996), se

puede concluir que el método propuesto en (Al-Hadithi, 2002) incluye al otro.

Finalmente, los límites obtenidos de las condiciones iniciales que aseguran la estabilidad del sistema borroso, indican que cualquier condición inicial seleccionada entre estos límites conduce a un sistema borroso estable. Por otra parte, esto no significa que el sistema sea inestable fuera de esta región (la zona enmarcada por la línea discontinua) tal y como se ve en la figura 14.

La idea de examinar la estabilidad mediante los rangos de condiciones iniciales, permite obtener resultados altamente positivos y parece una técnica prometedora. La única limitación es que sólo se puede aplicar a sistemas de bajo orden porque en sistemas de orden elevado hay que suponer algunas condiciones iniciales para poder hallar las demás, lo que no siempre puede llevarse a cabo con sistemas reales.

4.8 Desigualdades Matriciales Lineales (LMI)

Como se ha explicado anteriormente, el problema de la estabilidad cuadrática basado en el método directo de Lyapunov de la ecuación (19) no tiene solución analítica. Cuando no se puede encontrar una función global cuadrática de Lyapunov, una manera potente es de atacar el problema es considerar funciones que sean cuadráticas por tramos. La búsqueda de funciones cuadráticas por tramos de Lyapunov se puede hacer mediante la optimización convexa como en los métodos de las LMI (Boyd *et al.*, 1994), (Park and Kang, 2005), (Chen *et al.*, 2000), (Chen *et al.*, 2005a), (Chen *et al.*, 2005b), (Feng, 2001), (Feng, 2003), (Feng, 2004b), (Feng, 2004a), (Feng, 2005), (Feng and Ma, 2001), (Feng and Sun, 2002), (Feng and Harris, 2001b), (Feng and Harris, 2001a), (Hong and Langari, 2000), (Johansson *et al.*, 1999), (Kim and Kim, 2001), (Kim and Kim, 2002), (Lian *et al.*, 2001), (Kung *et al.*, May 2005), (Ohtake *et al.*, Dec. 2003), (Tanaka and H. O. Wang, 2001), (Taniguchi and Sugeno, Jul. 2004), (Teixeira *et al.*, 2003), (Wang and Feng, 2004), (Wang *et al.*, 2004a), (Wang *et al.*, 2003) y (Wang and Sun, 2005).

Sea el modelo de T-S de la forma:

$$\begin{aligned} R^l : & Si \ (z_1 \text{ es } M_1^l) \ Y \dots \ (z_v \text{ es } M_v^l) \\ & \text{entonces } x(t+1) = A_l x(t) + B_l u(t) + a_l \\ & y(t) = C_l x(t) \\ & l \in L := 1, 2, \dots, m \end{aligned} \quad (27)$$

donde R^l denota la l -ésima regla borrosa, m el número de reglas, M_j^l ($j = 1, 2, \dots, v$) son los conjuntos borrosos, $x(t) \in \mathbb{R}^n$ representa el vector de estado, $u(t) \in \mathbb{R}^p$ representa el vector de entrada, $y(t) \in \mathbb{R}^q$ representa el vector de salida y $(A_l, B_l, a_l, y C_l)$ son las matrices del l -ésimo modelo local y $z(t) := [z_1, z_2, \dots, z_v]$ son algunas variables medibles.

Se supone que $a_l = 0$ y $u = 0$. El modelo T-S se puede describir como:

$$\begin{aligned} R^l : & Si \ (z_1 \text{ es } M_1^l) \ y \dots \ (z_v \text{ es } M_v^l) \\ & \text{entonces } x(t+1) = A_l x(t) \\ & l \in L := 1, 2, \dots, m \end{aligned} \quad (28)$$

También se puede escribir como:

$$x(t+1) = \sum_{l=1}^m \mu_l(z) A_l x(t) \quad (29)$$

Existen varias técnicas basadas en funciones cuadráticas por tramos. Se necesita llevar a cabo una partición del espacio de la premisa, o la partición del espacio de estado en el caso de $z(t) = x(t)$ (Cao *et al.*, 1996a), (Cao *et al.*, 1997). Este enfoque se denomina el primer tipo de partición. Se definen m regiones en el espacio de la variable de premisa como sigue:

$$S_l = \{z | \mu_l(z) > \mu_i, i = 1, 2, \dots, m, i \neq l\} \quad l \in L \quad (30)$$

Con ello, el modelo global T-S (29) se puede expresar en cada región local como:

$$x(t+1) = (A_l + \Delta A_l(\mu))x(t) \quad (31)$$

donde,

$$\Delta A_l(\mu) = \sum_{i=1, i \neq l}^m \mu_i \Delta A_{li} \quad \Delta A_{li} = A_i - A_l$$

Para analizar la estabilidad, se introducen los límites superiores del término de incertidumbre ΔA_l en (31).

$$[\Delta A_l(\mu)]^T [\Delta A_l(\mu)] \leq E_{lA}^T E_{lA} \quad l \in L \quad (32)$$

Además, se define un conjunto Ω que representa todas las posibles transiciones entre regiones.

$$\Omega := \{(l, j) | z(t) \in S_l, z(t+1) \in S_j, \forall l, j \in L, l \neq j\} \quad (33)$$

Sea entonces la función cuadrática por tramos de Lyapunov:

$$V(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T \mathbf{P}_l \mathbf{x} \quad z \in S_l, \quad l \in L$$

El sistema borroso representado en (28), o su equivalente (31), es global y asintóticamente estable, si existe un conjunto de matrices definidas positivas $P_l, l \in L$ tal que se satisfagan las siguientes LMI (Feng, 2004b):

$$\begin{bmatrix} A_l^T P_l A_l - P_l + E_{lA}^T E_{lA} & A_l^T P_l \\ P_l A_l & -(I - P_l) \end{bmatrix} < 0, \quad l \in L, \quad (34)$$

$$\begin{bmatrix} A_l^T P_j A_l - P_l + E_{lA}^T E_{lA} & A_l^T P_j \\ P_j A_l & -(I - P_j) \end{bmatrix} < 0, \quad l, j \in \Omega, \quad (35)$$

En (Johansson *et al.*, 1999) se presenta un enfoque computacional para el análisis de estabilidad de sistemas no lineales y sistemas híbridos. Este enfoque se denomina el segundo tipo de partición. El objetivo es desarrollar un enfoque de análisis de estabilidad para una clase de sistemas no lineales por tramos. Estos sistemas aparecen en sistemas híbridos de control, sistemas de planificación de ganancias, o aproximaciones de otros sistemas no lineales.

La búsqueda de una función cuadrática por tramos de Lyapunov se formula como un problema convexo de optimización en términos de desigualdades matriciales lineales. Se estudia también la relación con los métodos basados en el dominio de la frecuencia, tales como el criterio del círculo y el criterio de Popov. Esta técnica se ha extendido con el fin de tratar los problemas de análisis de comportamientos y de control óptimo en (Rantzer and Johansson, 1997).

El enfoque se basa en la partición del espacio de la variable premisa en dos tipos de regiones. Algunas de estas regiones son *crisp* y otras borrosas. La región *crisp* es aquella en la cual $\mu_l(z) = 1$ para $l \in \bar{L}$. La dinámica del sistema en esta región se representa mediante uno de los modelos locales del sistema borroso descrito en ecu. (28).

La región borrosa se define como la región donde $0 < \mu_l(z) < 1$, mientras que la dinámica del sistema en esta región se representa mediante la combinación convexa de varios modelos locales lineales. En un caso extremo, cuando todas las regiones del modelo T-S son de tipo *crisp*, es decir, $\mu_l(z) = 1$ para algunos valores de l , y todas las otras funciones de pertenencia son iguales a cero, el sistema dado en (29) se convierte en un sistema lineal por tramos.

$$x(t+1) = A_l x(t), \quad z(t) \in S_l, \quad l \in L \quad (36)$$

Con esta partición, el sistema borroso (29) queda descrito como una combinación convexa de modelos lineales:

$$x(t+1) = \sum_{k \in K(l)} \mu_k(z) \{A_k x(t)\}, \quad z(t) \in S_l, \quad l \in \bar{L} \quad (37)$$

con $0 \leq \mu_k(z) \leq 1, \sum_{k \in K(l)} \mu_k(z) = 1$

De forma similar a como se hizo en la ecuación (33), se define un conjunto $\bar{\Omega}$ que representa todas las posibles transiciones entre regiones del sistema (35):

$$\bar{\Omega} := \{(l, j) | z(t) \in S_l, z(t+1) \in S_j, \forall l, j \in \bar{L}, l \neq j\} \quad (38)$$

Según (Wang and Feng, 2004), el sistema borroso representado en (28) o en (37) es global y asintóticamente estable, si existe un conjunto de matrices definidas positivas $P_l, l \in \bar{L}$ tal que se satisfaga las siguientes LMI:

$$A_k^T P_l A_k - P_l < 0, \quad l \in \bar{L}, k \in K(l) \quad (39)$$

$$A_k^T P_j A_k - P_l < 0, \quad (l, j) \in \bar{\Omega}, k \in K(l) \quad (40)$$

4.9 Funciones Borrosas de Lyapunov

Los autores en (Choi and Park, 2003), (Guerra and Vermeiren, 2004), (Tanaka *et al.*, 2003), (Wang *et al.*, 2004b) y (Zhou *et al.*, 2005), presentaron resultados sobre estabilidad basados en funciones no cuadráticas, o lo que se denomina funciones borrosas de Lyapunov, que pueden ser representadas como:

$$V(\mathbf{x}) = \sum_{l=1}^m \mu_l(x) \mathbf{x}^T \mathbf{P}_l \mathbf{x} \quad (41)$$

(Zhou *et al.*, 2005) demuestra que el sistema borroso (28) o (29) es global y asintóticamente estable, si existe un conjunto de matrices definidas positivas $P_l, l \in L$ tal que se satisfagan las siguientes LMI:

$$A_l^T P_j A_l - P_l < 0, \quad j, l \in L \quad (42)$$

En (Kim and Kim, 2001) y (Kim and Kim, 2002), se analiza la estabilidad del modelo afín T-S, utilizando funciones cuadráticas de Lyapunov. En (Feng, 2004b), (Johansson *et al.*, 1999) y (Wang and Feng, 2004), se desarrollan métodos de análisis de estabilidad basados en funciones cuadráticas por tramos de Lyapunov.

En (Feng, 2006) se presenta un análisis basado en el segundo tipo de partición de espacio y en las funciones cuadráticas por tramos de Lyapunov. Se define $L_0 \subseteq \bar{L}$ como el conjunto de índices para las regiones que no contienen al origen. También se define:

$$\bar{A}_k = \begin{bmatrix} A_k & a_k \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \bar{x} = \begin{bmatrix} x \\ 1 \end{bmatrix} \quad (43)$$

siendo $a_k = 0 \forall k \in K(l)$ y $l \in L_0$. De forma similar a (37) con $u \equiv 0$, el sistema borroso en (28) se puede escribir como sigue:

$$\bar{x}(t+1) = \sum_{k \in K(l)} \mu_k(z) \bar{A}_k \bar{x}(t) \quad z(t) \in S_l, \quad l \in \bar{L} \quad (44)$$

Se utiliza la siguiente función de Lyapunov:

$$V(x) = \begin{cases} x^T P_l x, & z \in S_l, \quad l \in L_0 \\ \bar{x}^T \bar{P}_l \bar{x}, & z \in S_l, \quad l \in L_1 \end{cases} \quad (45)$$

Esta función combina la capacidad de la función cuadrática de Lyapunov cerca del punto de equilibrio, con la flexibilidad de la función por tramos en otros puntos del espacio.

Se aplica el procedimiento S (Boyd *et al.*, 1994) para reducir el conservadurismo de los resultados de la estabilidad. Se utiliza este procedimiento (Johansson *et al.*, 1999) para construir unas matrices \bar{E}_l , $l \in \bar{L}$ para cada región, tal que

$$\bar{E}_l \bar{x} \geq 0, \quad z \in S_l, \quad l \in \bar{L} \quad (46)$$

(Feng, 2004b) y (Wang *et al.*, 2004a) demuestran que el sistema borroso descrito en (28) con $u \equiv 0$, o su equivalente (44), es global y asintóticamente estable, si existen matrices simétricas $P_l, l \in L_0, \bar{P}_l, l \in L_1$ y matrices simétricas U_l, Q_{lk}, Q_{ljk} tal que U_l, Q_{lk}, Q_{ljk} tengan valores no negativos y que se satisfagan las siguientes LMI:

$$0 < P_l - E_l^T U_l E_l, \quad l \in L_0 \quad (47)$$

$$A_k^T P_l A_k - P_l + E_l^T Q_{lk} E_l < 0, \quad l \in L_0, \\ k \in K(l) \quad (48)$$

$$0 < \bar{P}_l - \bar{E}_l^T U_l \bar{E}_l, \quad l \in L_1 \quad (49)$$

$$\bar{A}_k^T \bar{P}_l \bar{A}_k - \bar{P}_l + \bar{E}_l^T Q_{lk} \bar{E}_l < 0, \quad l \in L_1, \\ k \in K(l) \quad (50)$$

$$A_k^T P_j A_k - P_l + E_l^T Q_{ljk} E_l < 0, \quad (l, j) \in \bar{\Omega}, \\ (l, j) \in L_0, \quad k \in K(l) \quad (51)$$

$$\bar{A}_k^T \bar{P}_j \bar{A}_k - \bar{P}_l + \bar{E}_l^T Q_{ljk} \bar{E}_l < 0, \quad (l, j) \in \bar{\Omega}, \\ (l, j) \in L_1, \quad k \in K(l) \quad (52)$$

$$\bar{A}_k^T \bar{P}_j \bar{A}_k - \bar{P}_l + \bar{E}_l^T Q_{ljk} \bar{E}_l < 0, \quad (l, j) \in \bar{\Omega},$$

$$l \in L_1, \quad j \in L_0 \quad k \in K(l) \quad (53)$$

$$A_k^T \bar{P}_j A_k - P_l + E_l^T Q_{ljk} E_l < 0, \quad (l, j) \in \bar{\Omega},$$

$$l \in L_0, \quad j \in L_1 \quad k \in K(l) \quad (54)$$

4.10 Estabilidad Energética de Sistemas Borrosos

(Kiszka *et al.*, 1985) propusieron criterios para el análisis de estabilidad de sistemas borrosos, mediante la definición de funciones de energía. El análisis de estabilidad incluye la consideración de la dinámica borrosa definida por relaciones borrosas. La evaluación del comportamiento se basa en la estructura de estas relaciones borrosas.

Este enfoque ha sido adoptado por varios autores como (Glas, 1984) y (Tong *et al.*, 1980). Sin embargo, estas técnicas estructurales tienen dificultades a la hora de predecir analíticamente la evolución dinámica del sistema (Chen and Tsao, 1989), y requieren condiciones conservadoras para asegurar la estabilidad (Langari and Tomizuka, 1990).

Un sistema dinámico es estable si su energía total disminuye monótonamente hasta que alcanza un estado de equilibrio, lo que encaja con el concepto de estabilidad de Lyapunov. La estabilidad de un sistema dinámico borroso está basada en la generalización de esta noción. Si un sistema borroso dinámico libre tiene un estado de equilibrio asintóticamente estable, la energía almacenada por el sistema decae con el tiempo, alcanzando su valor mínimo en el punto de equilibrio.

5. CONCLUSIÓN

En este trabajo se han realizado numerosas consideraciones relativas a la estabilidad de sistemas borrosos. También se ha resaltado la dificultad del análisis, debido a la no linealidad de este tipo de sistemas.

Se han revisado los trabajos llevados a cabo en este área, observándose que, a pesar de los numerosos esfuerzos realizados, gran parte de los trabajos tratan de analizar casos particulares de sistemas borrosos, como por ejemplo, los resultados de linealizar con respecto al origen el sistema borroso en varios puntos de trabajo.

Algunos de los métodos de análisis de estabilidad se han desarrollado basándose en el análisis cualitativo de la partición del espacio del controlador, con las trayectorias del sistema en lazo cerrado. Éste es el concepto utilizado al utilizar trayectorias lingüísticas.

Por otro lado, se han llevado a cabo muchos trabajos sobre estabilidad, basados en el criterio del círculo. Este método es aplicable a los casos en los que el sistema es lineal y controlado por un controlador borroso no lineal. En ocasiones es posible aplicarlo a sistemas no lineales, incluyendo la no linealidad del sistema en el controlador. También se han comentado las técnicas para obtener índices de estabilidad relativa.

Como se ha visto, la estabilidad de Lyapunov ha recibido mucha atención debido a la posibilidad de utilizar métodos numéricos (optimización convexa) en la búsqueda de la matriz \mathbf{P} . También existe la posibilidad de utilizar estos métodos en la síntesis de controladores.

Además, se han revisado los trabajos llevados a cabo sobre la estabilidad del modelo de T-S. Se ha comentado también el enfoque de las LMI, que ha tenido un interés creciente en los últimos años. En las LMI, se estudia la estabilidad utilizando funciones de Lyapunov cuadráticas por tramos sobre el modelo afín de T-S. Se ha comentado también la línea de investigación basada en estabilidad energética.

REFERENCIAS

- Akar, M. and Ü. Özgüner (2000). Decentralized techniques for the analysis and control of Takagi-sugeno fuzzy systems. *IEEE Trans. Fuzzy Syst.* **8**(6), 691–704.
- Al-Hadithi, B. M. (2002). *Global Stability Analysis and Design of Fuzzy Control Systems*. Universidad Politécnica de Madrid, Doctorate thesis (in spanish).
- Al-Hadithi, B. M., F. Matía and A. Jiménez (2002). Global stability of fuzzy systems based variable structure control. In: *NAFIPS-FLINT 2002, the North American Fuzzy Information Processing Society, New Orleans, Louisiana*.
- Aracil, J., A. Garcia-Cerezo, A. Barreiro and A. Ollero (1993). *Stability analysis of fuzzy control systems based on the conicity criterion*. in: R. Lowen Ed., *Fuzzy Logic: State of the Art. Series System Theory, Knowledge Engineering and Problem Solving* (Norwell, MA: Kluwer Academic Publisher, Dordrecht), No.1, pages 487-496.
- Aracil, J., A. Garcia-Cerezo and A. Ollero (1988). *Stability analysis of fuzzy control systems-A geometric approach*. in *Artificial Intelligence, Expert Systems and languages in Modeling and Simulation*, C. A. Kulikowski, R. M. Huber, and G. A. Ferraté, Eds. Amsterdam, The Netherlands: North-Holland, pages 323-330.
- Boyd, S., L. El Ghaoui, E. Feron and V. Balakrishnan (1994). *Linear matrix inequalities in systems and control theory*. Philadelphia, PA: Studies in Applied Mathematics. SIAM.
- Braae, M. and D. A. Rutherford (1979). Theoretical and linguistic aspects of the fuzzy logic controller. *Automatica* **15**, 553–577.
- Cao, S. G., N. W. Rees and G. Feng (1996a). Analysis and design for a class of continuous-time fuzzy control systems. *Int. J. Contr.* **64**, 1069–1089.
- Cao, S. G., N. W. Rees and G. Feng (1996b). Stability analysis of fuzzy control systems. *IEEE Transactions on Systems, Man and Cybernetics* **26-part B**(1), 201–204.
- Cao, S. G., N. W. Rees and G. Feng (1997). Analysis and design for a class of complex control systems-part II: Fuzzy controller design. *Automatica* **33**, 1029–1039.
- Cao, S. G., N. W. Rees and G. Feng (1999). Analysis and design of fuzzy control systems using dynamic fuzzy-state space models. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems* **7**(2), 192–200.
- Castillo-Toledo, B. and J. A. Meda-Campana (2004). The fuzzy discrete-time robust regulation problem: An LMI approach. *IEEE Trans. Fuzzy Syst* **12**(3), 360–367.
- Chang, Y. C. and B. S. Chen (2005). Intelligent robust tracking controls for holonomic and nonholonomic mechanical systems using only position measurements. *IEEE Trans. Fuzzy Syst* **13**(4), 491–507.
- Chen, B. S., C. S. Tseng and H. J. Uang (2000). Mixed H_2 / H_∞ fuzzy output feedback control design for non-linear dynamic systems: An LMI approach. *IEEE Trans. Fuzzy Syst* **8**(3), 249–265.
- Chen, C. L., G. Feng and X. P. Guan (2005a). Delay-dependent stability analysis and controller synthesis for discrete time TS fuzzy systems with time delays. *IEEE Trans. Fuzzy Syst* **13**(5), 630–643.
- Chen, C. L., G. Feng, D. Sun and Y. Zhu (2005b). H-infinity output feedback control of discrete-time fuzzy systems with application to chaos control. *IEEE Trans. Fuzzy Syst* **13**(4), 531–543.
- Chen, J. Y. (2001). Rule regulation of fuzzy sliding mode controller design: Direct adaptive approach. *Fuzzy Sets Syst* **120**, 159–168.
- Chen, S. S., Y. C. Chang, S. F. Su, S. L. Chung and T. T. Lee (2005c). Robust static output-feedback stabilization for nonlinear discrete-time systems with time delay via

- fuzzy control approach. *IEEE Trans. Fuzzy Syst* **13**(2), 263–272.
- Chen, Y. Y. and T. C. Tsao (1989). A description of the dynamical behaviour of fuzzy systems. *IEEE Transactions on Systems, Man and Cybernetics* **19**, 745–755.
- Choi, D. J. and P. G. Park (2003). H-infinity state-feedback controller design for discrete-time fuzzy systems using fuzzy weighting-dependent lyapunov functions. *IEEE Trans. Fuzzy Syst* **11**(2), 271–278.
- Chung, S. K., J. Ryu and C. K. Park (1992). Stability analysis of fuzzy control system. In: *Proc. Korea-Japan Joint Conf. Fuzzy Syst. Eng., Seoul, Korea*. pp. 29–32.
- Cuesta, F., F. Gordillo, J. Aracil and A. Ollero (1999). Stability analysis of nonlinear multivariable Takagi-sugeno fuzzy control systems. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems* **7**(5), 508–520.
- Feng, G. (2001). Approaches to quadratic stabilization of uncertain fuzzy dynamic systems. *IEEE Trans. Circuits Syst. I* **48**(6), 760–769.
- Feng, G. (2003). Controller synthesis of fuzzy dynamic systems based on piecewise lyapunov functions. *IEEE Trans. Fuzzy Syst.* **11**(10), 605–612.
- Feng, G. (2004a). H-infinity controller design of fuzzy dynamic systems based on piecewise lyapunov functions. *IEEE Trans. Syst., Man, Cybern., B., Cybern.* **34**(1), 283–292.
- Feng, G. (2004b). Stability analysis of discrete time fuzzy dynamic systems based on piecewise lyapunov functions. *IEEE Trans. Fuzzy Syst.* **12**(1), 22–28.
- Feng, G. (2005). Robust h-infinity filtering of fuzzy dynamic systems. *IEEE Trans. Aerospace Electron. Syst.* **41**(2), 658–670.
- Feng, G. (2006). A survey on analysis and design of model-based fuzzy control systems. *IEEE Trans. Fuzzy Syst.* **14**(5), 676–697.
- Feng, G. and D. Sun (2002). Generalized h_2 controller synthesis of fuzzy dynamic systems based on piecewise lyapunov functions. *IEEE Trans. Circuits Syst. I.* **49**(12), 1843–1850.
- Feng, G. and J. Ma (2001). Quadratic stabilization of uncertain discrete-time fuzzy dynamic systems. *IEEE Trans. Circuits Syst. I.* **48**(11), 1337–1343.
- Feng, G., S. G. Cao, N. W. Rees and C. K. Chak (1997). Design of fuzzy control systems with guaranteed stability. *Fuzzy Sets and Systems* **85**(1), 1–10.
- Feng, M. and C. J. Harris (2001a). Feedback stabilization of fuzzy systems via linear matrix inequalities. *Int. J. Syst. Sci.* **32**, 221–231.
- Feng, M. and C. J. Harris (2001b). Piecewise lyapunov stability conditions of fuzzy systems. *IEEE Trans. Syst., Man, Cybern., B, Cybern.* **31**, 259–262.
- French, M. and E. Rogers (1998). Input/output stability theory for direct neuro-fuzzy controllers. *IEEE Trans. Fuzzy Syst.* **6**(3), 331–345.
- Gang, J. and C. Laijiu (1996). Linguistic stability analysis of fuzzy closed loop control systems. *Fuzzy Sets and Systems* **82**, 27–34.
- Glas, M. De (1984). Invariance and stability of fuzzy systems. *J. Mathematical Analysis and Applications* **199**, 299–319.
- Guerra, T. M. and L. Vermeiren (2004). LMI-based relaxed nonquadratic stabilization conditions for nonlinear systems in the Takagi-sugeno form. *Automatica* **40**(5), 823–829.
- Hojo, T., T. Terano and S. Masui (1992). Stability analysis of fuzzy control systems based on phase plane analysis. *J. Japan Soc. Fuzzy Theory Syst.* **4**(6), 1133–1146.
- Hong, S. K. and R. Langari (2000). An LMI-based h-infinity fuzzy control system design with its framework. *Inform. Sci.* **123**(3-4), 163–179.
- Hsiao, F. H., C. W. Chen, Y. W. Liang, S. D. Xu and W. L. Chiang (2005). TS fuzzy controllers for nonlinear interconnected systems with multiple time delays. *IEEE Trans. Circuits Syst. I.* **52**(9), 1883–1893.
- Huang, S. J. and W. C. Lin (2003). Adaptive fuzzy controller with sliding surface for vehicle suspension control. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems* **11**(4), 550–559.
- Hwang, C.-L. (2004). A novel Takagi-Sugeno-based robust adaptive fuzzy sliding-mode controller. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems* **12**(5), 676–687.
- Hwang, C.-L. and H.-Y. Lin (2004). A fuzzy decentralized variable structure tracking control with optimal and improved robustness designs: theory and applications. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems* **12**(5), 615–630.
- Ishikawa, T. (1988). *A study on fuzzy control of an arm robot*. B. E. thesis, Dept. Contr. Eng., Tokyo Inst. Technol.
- Johansson, M., A. Rantzer and K.-E. Årzen (1999). Piecewise quadratic stability for fuzzy systems. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems* **7**(6), 713–722.
- Kang, H.-J., C. Kwon, H. Lee and M. Park (1998). Robust stability analysis and design method for the feedback linearization regulator. *IEEE Trans. Fuzzy Syst.* **6**(4), 464–472.
- Kawamoto, S., K. Tada, A. Ishigame and T. Taniguchi (1993). An extension of Tanaka-sugeno's stability theorem for fuzzy systems.

- J. Japan Soc. Fuzzy Theory Syst.* **5**(5), 1190–1199.
- Khartinov, V. L. (1979). Asymptotic stability of an equilibrium position of a family of systems of linear differential equations. *Differential Equations* **14**, 1483–1485.
- Kickert, W. J. M. and E. H. Mamdani (1978). Analysis of a fuzzy logic controller. *Int. J. Fuzzy Sets and Systems* **1**, 29–44.
- Kim, E. and D. Kim (2001). Stability analysis and synthesis for an affine fuzzy system via LMI and ILMI: Discrete case. *IEEE Trans. Syst., Man, Cybern., B, Cybern.* **31**(1), 132–140.
- Kim, E. and S. Kim (2002). Stability analysis and synthesis for an affine fuzzy control system via LMI and ILMI: Continuous case. *IEEE Trans. Fuzzy Syst.* **10**(3), 391–400.
- Kim, E. and S. Lee (2005). Output feedback tracking control of mimo systems using a fuzzy disturbance observer and its application to the speed control of a pm synchronous motor. *IEEE Trans. Fuzzy Syst.* **13**(6), 725–741.
- Kiszka, J. B., M. M. Gupta and P.Ñ. Nikiforuk (1985). Energetic stability of fuzzy dynamic systems. *IEEE Transactions on Systems, Man and Cybernetics* **SMC-15**(6), 783–792.
- Kitamura, S. (1991). A stability condition for fuzzy ruled control systems—an extension of circle criterion. *Trans. Soc. Instrum. Contr. Eng.* **27**, 532–537.
- Kosko, B. (1997). *Fuzzy Engineering*. Prentice Hall.
- Kung, C. C., T. H. Chen and C. H. Chen (May 2005). H-infinity state feedback controller design for TS fuzzy systems based on piecewise lyapunov function. In: *in Proc. 14th IEEE Int. Conf. Fuzzy Systems, Reno, NV*. pp. 708–713.
- Langari, G. and M. Tomizuka (1990). Stability of fuzzy linguistic control systems. In: *Proc. 29th IEEE Conference on Decision and Control, Honolulu, HI*. pp. 2185–2190.
- Leung, F. H. F., P. K. S. Tam H. K. Lam and Y. S. Lee (2003). Stable fuzzy controller design for uncertain nonlinear systems: Genetic algorithm approach. In: *in Proc. 12th IEEE Int. Conf. Fuzzy Systems, St Louis, MO*. pp. 500–505.
- Li, T. H. S. and K. J. Lin (2004). Stabilization of singularly perturbed fuzzy systems. *IEEE Trans. Fuzzy Syst* **12**(5), 579–595.
- Lian, K. Y., C. S. Chiu, T. S. Chiang and P. Liu (2001). LMI-based fuzzy chaotic synchronization and communications. *IEEE Trans. Fuzzy Syst* **9**(4), 539–553.
- Liu, H. P., F. C. Sun and Z. Q. Sun (2005). Stability analysis and synthesis of fuzzy singularly perturbed systems. *IEEE Trans. Fuzzy Syst* **13**(2), 273–284.
- Lo, J.-C. and Y.-M. Chen (1999). Stability issues on Takagi-sugeno fuzzy model-parametric approach. *IEEE Trans. Fuzzy Syst.* **7**(5), 597–607.
- Mamdani, E. and S. Assilian (1975). An experiment in linguistic synthesis with a fuzzy logic controller. *Int. J. Man-Machine Studies* **7**(1), 1–13.
- Matía, F., B. M. Al-Hadithi and A. Jiménez (1999a). *Necessary and Sufficient Conditions for Stability of Dynamic Fuzzy Systems*. Computational Intelligence in Systems and Control Design and Applications, Spyros G. Tzafestas, Kluwer Academic Publications, Chapter 8, pp 81–91.
- Matía, F., B. M. Al-Hadithi and A. Jiménez (1999b). On global stability of T-S general model. *Mathware and Soft Computing* **VI**(2-3), 293–304.
- Matía, F., B. M. Al-Hadithi and A. Jiménez (2000a). Stability analysis of discrete fuzzy systems. In: *FUZZ-IEEE 2000, The 9th International Conference on Fuzzy System, San Antonio, Texas, USA*. pp. 961–964.
- Matía, F., B. M. Al-Hadithi and A. Jiménez (2002). Generalization of stability criterion for Tanaka -sugeno continuous fuzzy model. *Fuzzy Sets and System* **129**(3), 295–309.
- Matía, F., B. M. Al-Hadithi and A. Jiménez (2000b). Global stability of affine Takagi-sugeno fuzzy mode. In: *X Congreso Español sobre Tecnologías y Lógica Fuzzy, ESTYLF 2000, Sevilla, España*. pp. 31–36.
- Meda-Campana, J. A. and B. Castillo-Toledo (2005). On the output regulation for Takagi-sugeno fuzzy models using sliding modes. In: *in Proc. Amer. Control Conf., Portland, OR*. pp. 4062–4067.
- Ohtake, H., K. Tanaka and H. O. Wang (Dec. 2003). Piecewise nonlinear control. In: *in Proc. 42nd IEEE Conf. Decision and Control, Maui, HI*. pp. 4735–4740.
- Ollero, A., J. Aracil and A. Garcia-Cerezo (1995). Robust design of rule-based fuzzy controllers. *Fuzzy Sets and Systems* **70**(1), 249–273.
- Opitz, H.-P. (Sept. 1993). Fuzzy control and stability criteria. In: *Proc. EUFIT'93, Aachen, Germany*. pp. 130–136.
- Palm, R. (1994). Robust control by fuzzy sliding mode. *Automatica* **30**(9), 1429–1437.
- Park, C.-W. and H.-J. Kang (2005). Graphical and numerical approach to robust stability analysis of fuzzy modeled systems with para-

- metric uncertainty and disturbance. *Fuzzy Sets Systems* **151**, 99–117.
- Park, Y. M., M. J. Tahk and H. C. Bang (2004). Design and analysis of optimal controller for fuzzy systems with input constraint. *IEEE Trans. Fuzzy Syst* **12**(6), 766–779.
- Rantzer, A. and M. Johansson (1997). Piecewise linear quadratic optimal control. In: *Proc. American Control Conf., Albuquerque, NM*.
- Ray, K. S., A. M. Ghosh and D. D. Majumder (1984). L_2 -stability and the related design concept for SISO linear system associated with fuzzy logic controllers. *IEEE Transactions on Systems, Man and Cybernetics* **14**(6), 932–939.
- Ray, K. S. and D. D. Majumder (1984). Application of circle criterion for stability analysis of linear SISO and MIMO systems associated with fuzzy logic controller. *IEEE Transactions on Systems, Man and Cybernetics SMC-14*(2), 345–349.
- Su, J. P., T. M. Chen and C. C. Wang (2001). Adaptive fuzzy sliding mode control with ga-based reaching laws. *Fuzzy Sets Syst.* **120**, 145–158.
- Sugeno, M. (1985). An introductory survey of fuzzy control. *Inform. Sci.* **36**(1), 59–83.
- Sugeno, M. and K. Murakami (1984). Fuzzy parking control of model car. In: *Proc. 23rd IEEE Conf. Decision Contr. (CDC), Las Vegas, NY*. pp. 902–903.
- Takagi, T. and M. Sugeno (1985). Fuzzy identification of systems and its applications to modeling and control. *IEEE Transactions on Systems, Man and Cybernetics SMC-15*(1), 116–132.
- Tanaka, K. and H. O. Wang (2001). *Fuzzy Control Systems Design and Analysis: A LMI Approach*. New York: Wiley.
- Tanaka, K. and M. Sano (1994). A robust stabilization problem of fuzzy control systems and its application to backing up control of a truck-trailer. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems* **2**(2), 119–134.
- Tanaka, K. and M. Sugeno (1990). Stability analysis of fuzzy systems using Lyapunov's direct method. In: *Proc. North Amer. Fuzzy Inform. Processing Soc. (NAFIPS), New York, NY*. pp. 133–136.
- Tanaka, K. and M. Sugeno (1992). Stability analysis and design of fuzzy control systems. *Fuzzy Sets and Systems* **12**, 135–156.
- Tanaka, K., T. Hori and H. O. Wang (2003). A multiple lyapunov function approach to stabilization of fuzzy control systems. *IEEE Trans. Fuzzy Syst* **11**(4), 582–589.
- Taniguchi, T. and M. Sugeno (Jul. 2004). Stabilization of nonlinear systems based on piecewise lyapunov functions. In: *in Proc. 13th IEEE Int. Conf. on Fuzzy Systems, Budapest, Hungary*. pp. 1607–1612.
- Tao, C. W. and J. S. Taur (2005). Robust fuzzy control for a plant with fuzzy linear model. *IEEE Trans. Fuzzy Syst.* **13**(1), 30–41.
- Tao, C. W., J. S. Taur and M. L. Chan (2004). Adaptive fuzzy terminal sliding mode controller for linear systems with mismatched time-varying uncertainties. *IEEE Trans. Syst., Man, Cybern., B, Cybern.* **34**(1), 255–262.
- Teixeira, M. C. M., E. Assuncao and R. G. Avellar (2003). On relaxed LMIBased designs for fuzzy regulators and fuzzy observers. *IEEE Trans. Fuzzy Syst.* **11**(5), 613–623.
- Tian, E. and C. Peng (2006). Delay-dependent stability analysis and synthesis of uncertain T-S fuzzy systems with time-varying delay. *Fuzzy Sets Systems* **157**, 544–559.
- Tong, R. M., M. B. Beck and A. Latten (1980). Fuzzy control of the activated sludge wasteater treatment process. *Automatica* **16**(6), 695–701.
- Tong, S. C. and H. X. Li (2003). Fuzzy adaptive sliding-mode control for mimo nonlinear systems. *IEEE Trans. Fuzzy Syst.* **11**(3), 354–360.
- Tuan, H. D., P. Apkarian, T. Ñarikiyo and M. Kanota (2004). New fuzzy control model and dynamic output feed back parallel distributed compensation. *IEEE Trans. Fuzzy Syst.* **12**(1), 13–21.
- Wang, H. O., K. Tanaka and M. F. Griffin (1996). An approach to fuzzy control of nonlinear systems: Stability and design issues. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems* **4**(1), 14–23.
- Wang, L. and G. Feng (2004). Piecewise h-infinity controller design of discrete time fuzzy systems. *IEEE Trans. Syst., Man, Cybern., B, Cybern.* **34**(1), 682–686.
- Wang, L., G. Feng and T. Hesketh (2003). Piecewise output feedback controller synthesis of discrete time fuzzy systems. In: *in Proc. IEEE Conf. Decision and Control, Maui, HI*. pp. 4741–4746.
- Wang, L., G. Feng and T. Hesketh (2004a). Piecewise generalized H_2 controller synthesis of discrete time fuzzy systems. In: *in Proc. Inst. Elect. Eng. Control Theory Applications, no. 5, Part D*. Vol. 151. pp. 554–560.
- Wang, L.-X. (1997). *A course in fuzzy systems and control*. Englewood Cliffs, NJ: Prentice Hall.
- Wang, W. J. and C. H. Sun (2005). Relaxed stability and stabilization conditions for a

- TS fuzzy discrete system. *Fuzzy Sets Syst.* **156**(2), 208–225.
- Wang, W. J. and L. Luoh (2004). Stability and stabilization of fuzzy large scale systems. *IEEE Trans. Fuzzy Syst.* **12**(3), 309–315.
- Wang, W. J. and W. W. Lin (2005). Decentralized pdc for large-scale TS fuzzy systems. *IEEE Trans. Fuzzy Syst.* **13**(6), 779–786.
- Wang, Y., Z. Q. Sun and F. C. Sun (2004b). Stability analysis and control of discrete-time fuzzy systems: A fuzzy Lyapunov function approach. In: *in Proc. 5th Asian Control Conf., Melbourne, Australia*. pp. 1855–1860.
- Xiu, Zhi-Hong and Guang Ren (2005). Stability analysis and systematic design of Takagi-Sugeno fuzzy control systems. *Fuzzy Sets Systems* **151**, 119–138.
- Xu, S. Y. and J. Lam (2005). Robust h-infinity control for uncertain discrete-time-delay fuzzy systems via output feedback controllers. *IEEE Trans. Fuzzy Syst.* **13**(1), 82–93.
- Yager, R. R. and D. P. Filev (1994). *Essentials of Fuzzy Modeling and Control*. New York: John Wiley.
- Zak, S. H. (1999). Stabilizing fuzzy systems models using linear controllers. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems* **7**(2), 236–249.
- Zhao, J., R. Gorez and V. Wertz (1997). *Synthesis of fuzzy control systems based on linear Takagi-Sugeno fuzzy models*. Multiple Model Approaches to Nonlinear Modeling and Control, R. Murray-Smith and T. A. Johansen, Eds. London, U.K.: Taylor Francis.
- Zhou, S. S., G. Feng, J. Lam and S. Y. Xu (2005). Robust h-infinity control for discrete fuzzy systems via basis-dependent lyapunov functions. *Inform. Sci.* **174**(3-4), 197–217.