

UNIVERSIDAD POLITECNICA DE VALENCIA

ESCUELA POLITECNICA SUPERIOR DE GANDIA

I. T. Telecomunicación (Sonido e Imagen)



UNIVERSIDAD
POLITECNICA
DE VALENCIA



ESCUELA POLITECNICA
SUPERIOR DE GANDIA

“PROPAGACIÓN DE ONDAS TRANSVERSALES GENERADAS CON FUERZA DE RADIACIÓN”

POYECTO FIN DE CARRERA

Autor:

Luis J. Salmerón Contreras

Director/es:

D. Rubén Picó Vila

D. Noé Jiménez González

GANDIA, 2011

PROPAGACIÓN DE ONDAS TRANSVERSALES GENERADAS CON FUERZA DE RADIACIÓN

Autor: Luis J. Salmerón Contreras

Tutor: Rubén Picó Vila

Cotutor: Noé Jiménez González

Resumen

El estudio de la propagación de ondas transversales en el interior de un tejido aporta información acerca de la elasticidad de éste que puede emplearse para diseñar nuevas técnicas de diagnóstico médico. Sin embargo, la alta atenuación de estas ondas dificulta extraer información de capas profundas. En este trabajo se emplea un haz focalizado de ultrasonidos para inducir Fuerza de Radiación en el interior del tejido, generando así un foco de ondas transversales secundarias. El objetivo del presente trabajo es estudiar la propagación de dichas ondas transversales mediante predicción numérica basada en diferencias finitas en dominio temporal (FDTD), introduciendo excitaciones acústicas móviles bajo un sistema de referencia euleriano. Los resultados muestran cómo mediante la adecuada excitación en profundidad del tejido es posible generar ondas transversales supersónicas que aportan nuevas posibilidades a la hora de caracterizar el tejido mejorando así las capacidades de diagnóstico.

Índice

I. OBJETIVOS	4
II. INTRODUCCIÓN TEÓRICA	5
II. 1. Elastografía.....	5
II. 2. Modelo físico.....	7
II. 2. a. <i>Mecánica de Sólidos. Fórmula de Cauchy</i>	8
II. 2. b. <i>Elasticidad</i>	12
a) Deformación Axial (Ley de Hooke):.....	13
b) Deformación lateral:.....	15
c) Deformación angular.	15
II. 2. c. <i>Leyes de Hooke Generalizadas</i>	16
II. 2. d. <i>IIª Ley de Newton, ecuación de la Dinámica</i>	18
II. 2. e. <i>Ecuaciones constitutivas del modelo</i>	19
II. 3. Modelo Numérico.....	20
II. 3. a. <i>FDTD (Finite Difference Time Domain)</i>	20
II. 3. b. <i>Series de Taylor</i>	20
II. 3. c. <i>Simplificación del modelo, simetría axial</i>	21
II. 3. d. <i>Absorción y PML</i>	22
II. 3. e. <i>Discretización y tresbolillado del modelo</i>	24
II. 3. f. <i>Consideraciones del modelo</i>	25
III. CONDICIONES DE SIMULACIÓN.....	26
IV. RESULTADOS	28
IV. 1. Foco estático, transmisión OL	28
IV. 2. Foco estático, transmisión OS	29
IV. 3. Foco estático, transmisión OL+OS.....	31
IV. 4. Foco dinámico, transmisión OL+OS	32
V. REFERENCIAS	35
Anexo I. Ecuaciones del modelo numérico	36

I. OBJETIVOS

Este proyecto tiene como objetivo principal el estudio de la propagación de éstas ondas transversales generadas mediante fuerza de radiación. La metodología empleada principalmente es la predicción numérica basada en diferencias finitas en dominio temporal.

A partir de las deformaciones producidas mediante fuerza de radiación generada por un haz de ultrasonidos focalizados en el interior de un tejido biológico blando se induce en dicho tejido un foco secundario de ondas transversales. El presente trabajo aporta un método de análisis para la propagación de las ondas transversales mediante la introducción de una fuente acústica acorde con las deformaciones producidas por el haz principal de ultrasonidos focalizados.

En un segundo paso, variando la posición del foco del haz de ultrasonidos en función del tiempo a una velocidad superior a la velocidad de propagación de las ondas transversales se logra una fuente acústica móvil capaz de producir un frente de ondas transversales supersónicas. A través de las características de propagación de este frente de ondas se extrae información muy precisa acerca de la elasticidad del tejido por el que se propagan las ondas transversales, permitiendo obtener una imagen de diagnóstico médico de la elasticidad del tejido biológico.

II. INTRODUCCIÓN TEÓRICA

II. 1. *Elastografía*

La elastografía es un método de imagen médica no invasivo en el cual se caracteriza la rigidez o la deformación de los tejidos blandos utilizando un sistema basado en ultrasonidos. En los últimos años esta técnica de imagen se está investigando y utilizando para la detección y clasificación de tumores. Un tumor o un cáncer sospechoso normalmente es de 5 a 28 veces más rígido que el fondo de tejido blando normal. Cuando se aplica una compresión mecánica o vibración, el tumor se deforma menos que el tejido circundante. Por lo tanto, una imagen de la deformación puede, bajo determinadas hipótesis simplificadoras, interpretarse como representación de la distribución subyacente del módulo de Young (o módulo de elasticidad). Se ha demostrado que los elastogramas (imágenes de la deformación del tejido) se ven afectados por el grado de adherencia del tumor a su entorno, lo que indica una gran oportunidad para extender la elastografía a la caracterización de la movilidad del tumor para mejorar la precisión diagnóstica y orientación quirúrgica.

TECNICAS DE ELASTOGRAFIA

ARFI (Acoustic Radiation force impulse)

En este método un haz de ultrasonidos focalizados (FUS, focused ultrasound) se utiliza para aplicar una fuerza de radiación localizada en pequeños volúmenes durante poco tiempo y se miden los desplazamientos de tejido resultantes. Los desplazamientos de los tejidos son inversamente proporcionales a la rigidez de los tejidos y, por tanto, una zona de tejido más rígido presenta desplazamientos más pequeños que una zona menos rígida. Debido a la corta duración de la aplicación de la fuerza, este método proporciona información sobre la respuesta mecánica al impulso del tejido, lo que refleja las variaciones en las características viscoelásticas del tejido.

HMI (Harmonic Motion Imaging)

Esta técnica basada también en la fuerza de radiación, induce desplazamientos oscilatorios (harmónicos) en la zona focal del transductor FUS (focalizado) para la detección de cambios en la rigidez de zonas localizadas.

SWEI (Shear wave elasticity imaging)

Esta técnica es un nuevo enfoque de la imagen y la caracterización de las estructuras de tejido basado en la utilización de ondas acústicas transversales inducidas a distancia por la fuerza de radiación de un haz de ultrasonido enfocado. SWEI proporciona al médico un "dedo"

virtual para probar la elasticidad de las regiones internas del cuerpo. En SWEI, en comparación con otros métodos de elastografía, la tensión inducida en el tejido puede ser muy localizada, ya que las ondas transversales inducidas de forma remota se atenúan por completo dentro de un área muy limitada de tejido en las proximidades del punto focal del haz focalizado. SWEI puede añadir una nueva calidad a los métodos convencionales de ultrasonido o resonancia magnética. La adición de datos de corte elasticidad ("información palpación") mediante la superposición de código de color de datos sobre la elasticidad de las imágenes de resonancia magnética o ultrasonido puede permitir una mejor diferenciación de los tejidos y aumentar aún más el diagnóstico. Se demuestra que la exposición típica de ultrasonidos de SWEI está significativamente por debajo del umbral de los efectos dañinos de ultrasonidos.

SSI (Supersonic Shear Imaging).

Es una técnica de imagen de elasticidad de tejidos basada en la estimación de la velocidad de una onda transversal generada con fuerza de radiación. Se genera una fuerza de radiación a distancia (o "pushing beam", haz de empuje) mediante un transductor focalizado utilizando una sonda ultrasónica convencional. Esta fuerza de radiación da lugar a un desplazamiento de unos pocos micrómetros de tejido que hace que se propague una onda transversal en el medio. Si sucesivamente focalizamos varios haces en profundidades crecientes obtenemos un frente de ondas transversales cuasi plano.

Después de la generación de la onda transversal, el dispositivo de medida cambia al modo de adquisición de datos a una frecuencia de imagen muy elevada (más de 5000 imágenes/seg.) utilizando la misma sonda ultrasónica. Cada ecografía ultrarrápida se consigue transmitiendo una única onda plana ultrasónica formada durante el proceso de recepción en el postprocesado. Luego utilizando un algoritmo de correlación cruzada en una dimensión, las consecutivas imágenes ultrasónicas se comparan para determinar el desplazamiento axial inducido por la propagación la onda transversal dentro del tejido.

II. 2. Modelo físico

Con el objetivo de caracterizar como interacciona una onda a lo largo de un medio, en este apartado se estudiará las propiedades elásticas del medio (Ley de Hooke) y como éste interactúa cuando está sometido a la acción del movimiento (Ley de Newton), ésta parte de la Física se conoce como Mecánica Racional. Éste estudio de los estados de equilibrio y movimiento de los cuerpos, se subdivide a su vez en las siguientes ramas:

Mecánica del Punto Material: en esta rama se asume que toda la masa de un cuerpo está concentrada en un punto llamado centro de masas o de gravedad. Con esta teoría se puede explicar, entre otros, el movimiento de los planetas

Mecánica del Sólido Rígido: ésta teoría se basa en que las dimensiones del material del cuerpo no se ven alteradas ante la acción de una fuerza, es decir, su forma no varía y el cuerpo es indeformable. Con ella se explica satisfactoriamente los movimientos que puede sufrir un móvil y caracterizarlos matemáticamente.

Mecánica de los Medios Continuos (MMC): en este caso el cuerpo sí puede deformarse ante la acción de una fuerza (incluso llegando al límite de romperse). Dependiendo del estado de la materia que lo compone, esta teoría se subdivide en Mecánica de Fluidos y Mecánica de Sólidos. Esta última, a su vez, se subdivide dependiendo del comportamiento que se asuma para el cuerpo (Elasticidad, Plasticidad, Viscoelasticidad y Viscoplasticidad).

Para este estudio es interesante por tanto, definir que propiedades presentará el sólido elástico:

- Deformable elástico, puede variar su forma ante la acción de una fuerza y volver a su estado inicial cuando ésta deja de aplicarse.
- Continuo, no existen saltos (vacío) entre una porción de material y el inmediatamente siguiente. Esta implicación nos permite tomar elementos infinitesimales del material y que estos están completamente unidos a los circundantes.
- Homogéneo, el medio presenta la misma composición y propiedades en cualquier parte del mismo.
- Isótropo, las propiedades del material son las mismas en cualquier dirección del espacio, es decir una rotación del cuerpo no implica que los fenómenos que vayan a ocurrir sean diferentes.

II. 2. a. Mecánica de Sólidos. Fórmula de Cauchy

Supongamos un sólido elástico que se encuentre en equilibrio estático (o en movimiento de traslación y rotación uniformes, es decir la fuerza y momento torsor resultante es nulo: $\sum_i \vec{F}_i = \vec{0}$ y $\sum_i \vec{M}_p = \vec{0}$), pero que sí esté sujeto a fuerzas (que opuestas vectorialmente se anulan, pero no en módulo, $\sum_i |\vec{F}_i| > 0$), éstas tienden a deformar el objeto. La deformación que presenta el cuerpo no sólo depende de la fuerza, también depende inversamente de la superficie donde se aplique la fuerza, es decir la misma fuerza actuando sobre una superficie más grande obtendrá una menor deformación. Por lo tanto, si tomamos un área muy pequeña (pero finita) ΔS se define vector **tensión mecánica o esfuerzo** ($\vec{\tau}$), como el vector resultante de calcular la relación entre la fuerza aplicada y la superficie dónde se aplica cuando ésta tienda a cero:

$$\vec{\sigma} = \lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{F}}{\Delta S} \left[Pa = \frac{N}{m^2} \right]$$

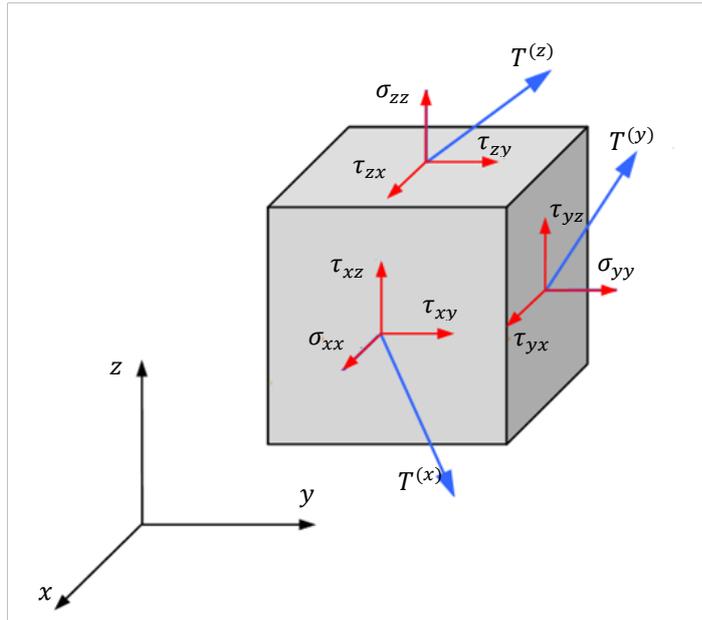
A efectos prácticos, suponiendo que la distribución de fuerzas es constante para toda la superficie S_n :

$$\vec{\sigma} = \begin{pmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \end{pmatrix} = \frac{\vec{F}}{S_n}$$

El vector esfuerzo dependerá de la superficie S_n caracterizada por el vector normal $\vec{n} = (n_x, n_y, n_z)$, perpendicular a ésta y de módulo la unidad. Por lo tanto podemos definir las componentes normal y tangencial del vector esfuerzo:

- Esfuerzo normal: $\sigma = \vec{\tau} \cdot \vec{n} = \tau_x n_x + \tau_y n_y + \tau_z n_z$
- Esfuerzo tangencial: $\tau = \sqrt{\vec{\tau} \cdot \vec{\tau} - \sigma^2}$

A pesar de la sencillez de trabajar con un vector, el cálculo se vuelve complejo si suponemos que por un punto pueden pasar infinitos planos y por consecuente infinitos vectores de tensión referidos a cada superficie. Por tanto otra forma conveniente de trabajar el estado tensional de un cuerpo es tomar un paralelepípedo, de aristas diferenciales y caras paralelas a los planos coordenados, correspondiente a la zona infinitesimal en torno al punto de aplicación. Al ser tan pequeño el cubo, se puede suponer que no existen variaciones de tensión entre caras paralelas, por tanto con 3 vectores tensión aplicados en cada una de las 3 caras independientes, podemos caracterizar su estado tensional.



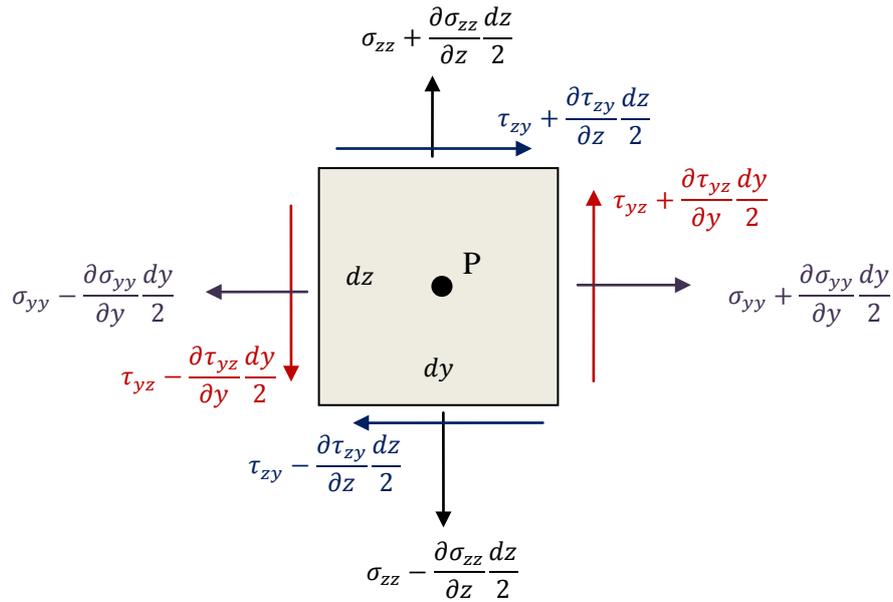
Reescribiendo cada vector por sus componentes y agrupándolos en una matriz obtenemos lo que se conoce como **Matriz ó Tensor de Tensiones ó de Esfuerzos**:

$$[\tau] = \begin{pmatrix} \sigma_{xx} & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_{yy} & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_{zz} \end{pmatrix}$$

Llegados a este punto es conveniente remarcar que esta matriz posee simetría. Para demostrarlo se aplicará la condición de equilibrio del momento torsor $\sum_i \overline{M}_p = \vec{r} \times \vec{F} = \vec{0}$ y se obtendrá que las componentes tangenciales no son independientes si no que son iguales en parejas $\tau_{ij} = \tau_{ji}$.

Fijándonos en una cara del paralelepípedo, se pueden expresar las componentes de esfuerzo en torno al punto de aplicación como, la magnitud de dicho esfuerzo más un pequeño incremento producido por no estar aplicado directamente sobre el punto (serie de Taylor). Éste incremento dependerá de cómo varía esa función con respecto a la dimensión escogida por la distancia recorrida:

$$\sigma\left(x + \frac{dx}{2}\right) \approx \sigma(x) + \frac{\partial \sigma}{\partial x} \frac{dx}{2}$$



Aplicando el equilibrio del momento torsor

$$\sum M_p = \sum F^{(\tau)} = 0 \rightarrow F_y^{(\tau)} = F_z^{(\tau)} \rightarrow \tau_y \cdot S_y = \tau_z \cdot S_z$$

$$\left(\tau_{yz} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} \frac{dy}{2} + \tau_{yz} - \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} \frac{dy}{2} \right) (dx \cdot dz) = \left(\tau_{zy} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z} \frac{dz}{2} + \tau_{zy} - \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z} \frac{dz}{2} \right) (dx \cdot dy)$$

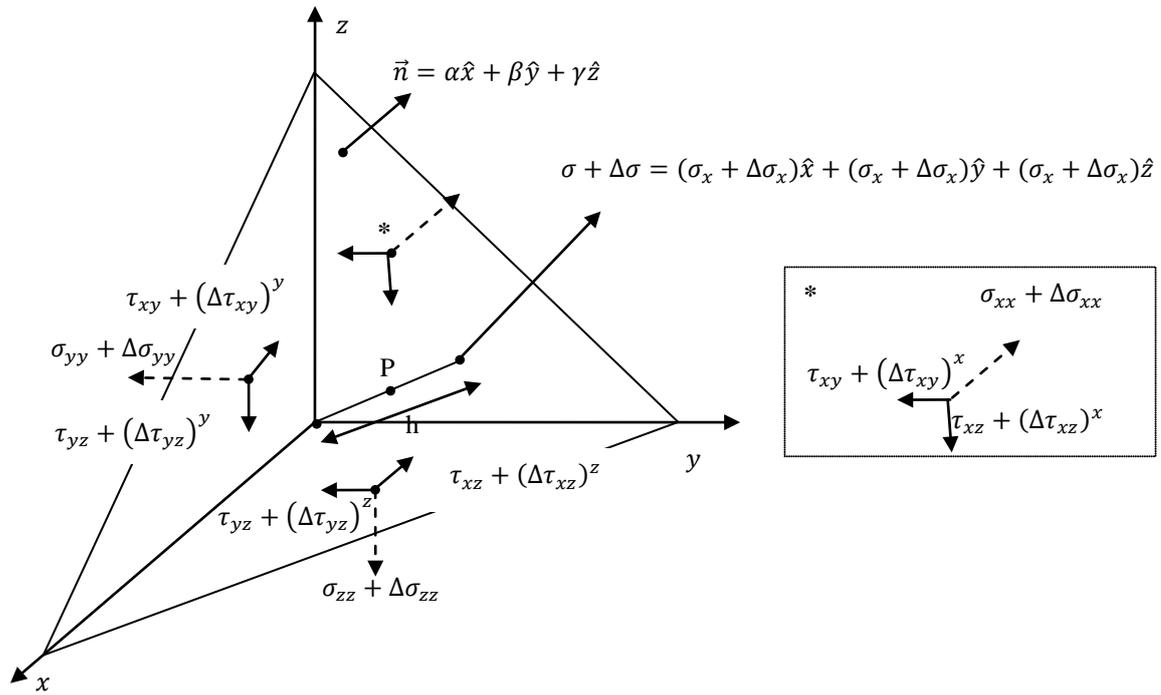
$$\tau_{yz} = \tau_{zy}$$

Por lo tanto la matriz de esfuerzos:

$$[\tau] = \begin{pmatrix} \sigma_{xx} & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ & \sigma_{yy} & \tau_{yz} \\ Sim & & \sigma_{zz} \end{pmatrix}$$

Este resultado se conoce como “Teorema de Reciprocidad de las tensiones tangenciales”. De él se deduce que de las 18 componentes de tensión asociados a las caras que rodean al paralelepípedo asociado a un punto, solo 6 son realmente independientes: $(\sigma_{xx}, \sigma_{yy}, \sigma_{zz}, \tau_{xy}, \tau_{xz}, \tau_{yz})$.

Hasta ahora se conoce de un punto el vector esfuerzo y la matriz esfuerzo, por lo tanto el último paso necesario sería conocer la relación entre uno y otro. Para ello se secciona el paralelepípedo anterior con un plano cuyo vector normal sea $\vec{n} = \alpha \hat{x} + \beta \hat{y} + \gamma \hat{z}$, de este modo se crea la superficie Ω y tres superficies proyectadas sobre las caras del paralelepípedo $\Omega_x, \Omega_y, \Omega_z$. Ya que el punto de aplicación de los esfuerzos no se encuentra sobre una superficie, los esfuerzos sobre éstas variarán ligeramente añadiéndose un pequeño incremento.



Si se impone el equilibrio estático en el tetraedro:

$$\sum F_x = 0$$

$$-(\sigma_{xx} + \Delta\sigma_{xx})\Omega_x - (\tau_{xy} + \Delta\tau_{xy})\Omega_y - (\tau_{xz} + \Delta\tau_{xz})\Omega_z + (\sigma_x + \Delta\sigma_x)\Omega + F_x \frac{1}{3}h\Omega = 0$$

$$\sum F_y = 0$$

$$-(\tau_{xy} + \Delta\tau_{xy})\Omega_x - (\sigma_{yy} + \Delta\sigma_{yy})\Omega_y - (\tau_{yz} + \Delta\tau_{yz})\Omega_z + (\sigma_y + \Delta\sigma_y)\Omega + F_y \frac{1}{3}h\Omega = 0$$

$$\sum F_z = 0$$

$$-(\tau_{xz} + \Delta\tau_{xz})\Omega_x - (\tau_{yz} + \Delta\tau_{yz})\Omega_y - (\sigma_{zz} + \Delta\sigma_{zz})\Omega_z + (\sigma_z + \Delta\sigma_z)\Omega + F_z \frac{1}{3}h\Omega = 0$$

Si ahora se considera que la altura (h) es tan pequeña que tiende a cero y se sustituye el valor de las áreas proyectadas por el correspondiente referido al área de la sección ($\Omega_x = \Omega \cos \alpha \simeq \Omega \alpha$, $\Omega_y = \Omega \cos \beta \simeq \Omega \beta$, $\Omega_z = \Omega \cos \gamma \simeq \Omega \gamma$), obtenemos:

$$\sigma_x = \sigma_{xx}\alpha + \tau_{xy}\beta + \tau_{xz}\gamma$$

$$\sigma_y = \tau_{xy}\alpha + \sigma_{yy}\beta + \tau_{yz}\gamma$$

$$\sigma_z = \tau_{xz}\alpha + \tau_{yz}\beta + \sigma_{zz}\gamma$$

Que expresado matricialmente:

$$\begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{xy} & \sigma_{yy} & \tau_{yz} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_{zz} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{bmatrix}$$

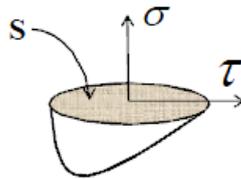
Esta relación se conoce como **Fórmula de Cauchy**:

$$\vec{\sigma} = [\tau] \cdot \vec{n}$$

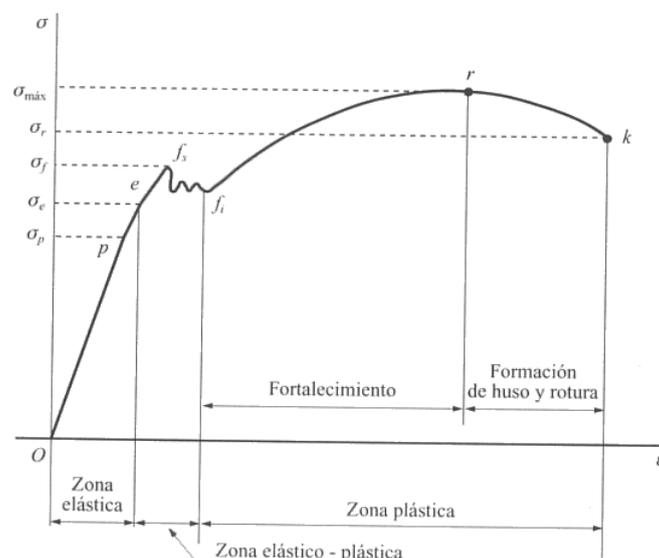
II. 2. b. Elasticidad

La **elasticidad** es la propiedad mecánica que poseen todos los cuerpos en mayor o menor grado, de recobrar su forma primitiva cuando la fuerza que los había deformado deja de actuar. Esta propiedad depende directamente del esfuerzo aplicado al cuerpo.

Como se ha visto anteriormente el vector tensión se puede descomponer en dos componentes normales entre si, que físicamente producen efectos diferentes. Esas dos componentes son el esfuerzo normal (perpendicular al plano sobre el que actúa) y el esfuerzo cortante (paralelo al plano)



Cuando un material está sometido a esfuerzos tiende a deformarse de la siguiente manera genérica:



Zona elástica: (entre 0 y σ_e), en una primera parte el material se deforma proporcionalmente al esfuerzo producido sobre éste. La gráfica es completamente recta hasta el punto p (*límite de proporcionalidad*), donde entra en una zona no proporcional (curva), pero que el material aun así sigue volviendo a su estado inicial hasta e (*límite elástico*).

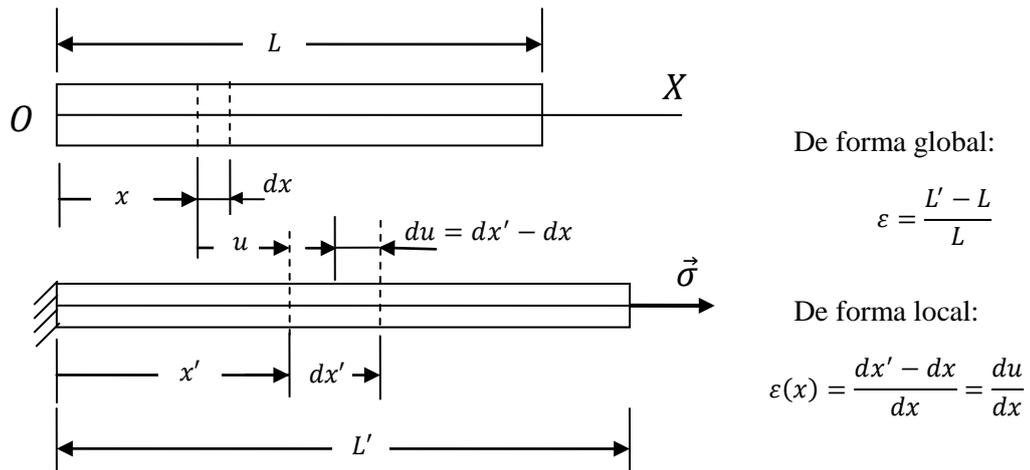
Zona elástico-plástica: En esta zona, en caso de cesar la fuerza se observarían deformaciones permanentes. En ella se encuentra el límite de fluencia (f_s), hasta este punto los alargamientos son pequeños, pero llegados a él aumentan incluso sin necesidad de aumentar la fuerza. En algunos tipos de materiales existe incluso un límite inferior de fluencia (f_i), para el cual la fuerza necesaria para seguir alargando el material incluso disminuye.

Zona plástica: Llegados a este punto el material tampoco recupera por completo su estado inicial y la relación entre la deformación y el esfuerzo toma una curva hasta un límite máximo llamado límite de resistencia a la tracción o tensión de rotura, a partir del cual el material se rompe. Esta rotura no se produce de manera inmediata, sino que ocurre instantes después. Mientras el material forma una pequeña garganta o huso, reduciéndose rápidamente la sección transversal para finalmente romperse (punto k).

En resumen, a bajas amplitudes de esfuerzo podemos considerar que el material se comporta como un *sólido elástico*: vuelve a su posición de equilibrio y la deformación es directamente proporcional al esfuerzo. Anteriormente, ya se ha estado trabajando con el esfuerzo separando su parte normal de su parte ortogonal, esta distinción tiene sentido físico dado que cada componente ocasiona una deformación diferente que se pasa a estudiar.

a) *Deformación Axial (Ley de Hooke):*

Si se somete a un material a una fuerza perpendicular a una de sus superficies se estará sometiendo al material a un esfuerzo normal (σ). Si la fuerza va en sentido hacia dentro del material estaremos provocando una compresión, si por el contrario, va en sentido hacia fuera del material estaremos provocando una tracción. Ambos esfuerzos provocarán una deformación del material a lo largo del eje. Esta deformación, no sólo depende del esfuerzo producido, sino que también depende de la longitud del material. Por ejemplo, supongamos dos gomas elásticas de diferentes tamaños, si estiramos la más grande hasta alcanzar una longitud y después la más corta hasta alcanzar la misma longitud, el en segundo caso la fuerza de tracción ejercida es mucho mayor que la ejercida en el primer caso aunque ambas hayan alcanzado una longitud final idéntica. Por lo tanto es conveniente relacionar el esfuerzo, no con la deformación resultante, si no con la deformación axial con respecto a la longitud del material. Consecuentemente, se define **deformación unitaria longitudinal (ϵ)**, como la deformación producida por unidad de longitud:

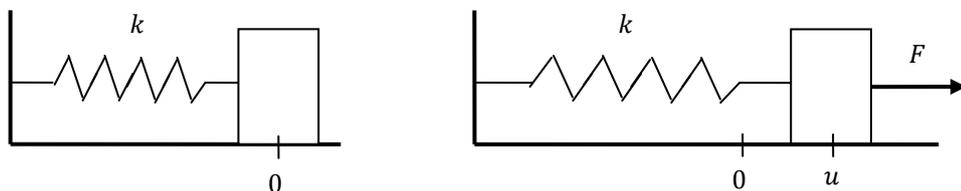


Siendo u el desplazamiento que sufre un punto respecto a su posición de equilibrio.

Fue Robert Hooke (1635-1703) quien presentó por primera vez la ley de la elasticidad en forma de anagrama latino “CEIINOSSITTUV” que quiere decir “UT TENSIO, SIC VIS”, que en latín quiere decir “como es la extensión, así es la fuerza” o en lenguaje contemporáneo que la extensión es directamente proporcional a la fuerza. A lo largo de su vida trabajó en óptica, movimientos armónicos simples, tensión en muelles estirados, inventó el péndulo cónico y fue la primera persona en construir un telescopio Gregoriano, con el cual descubrió interesantes hallazgos astronómicos. A causa de no poder sustentar sus logros en una base matemática firme, consiguió una enemistad manifiesta con Newton. Paradójicamente el modelo al que se desea llegar sería imposible sin la aportación que ambos científicos aportaron sus campos.

Ley de Hooke:

En una dimensión la ley de Hooke describe el comportamiento de un resorte elástico sometido a una fuerza:



$$F = k \cdot u \quad \text{o} \quad \sigma = E \cdot \varepsilon$$

Donde:

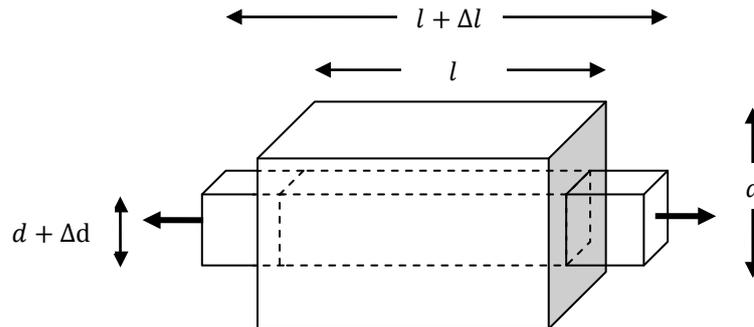
F es la **fuerza** actuando en resorte, mientras que σ es la **tensión**

k es la **constante elástica del muelle**, mientras que E es el **Módulo de Young**

u es el desplazamiento del muelle desde el origen y ε la elongación.

b) *Deformación lateral:*

Ante una deformación axial, un cuerpo no sólo responde modificando su longitud, sino que también responde modificando el tamaño de su sección. Frente a un alargamiento, el cuerpo responde acortando su sección transversal y así estrechándose, por el contrario, cuando está sometido a una compresión, además de acortarse, se ensancha su sección. Poisson demostró que la relación entre el alargamiento axial y la disminución lateral unitaria es constante y recibe el nombre de **Módulo de Poisson** (ν).



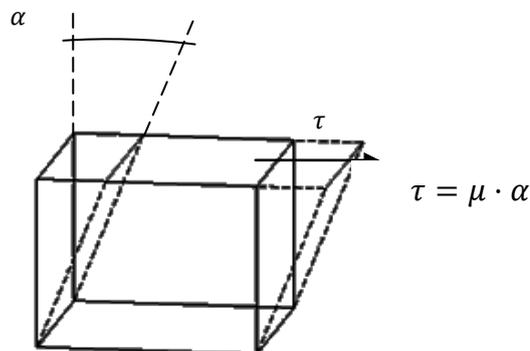
$$\nu = -\frac{\Delta d/d}{\Delta l/l} \Rightarrow \epsilon_\tau = -\nu \cdot \epsilon_\sigma$$

c) *Deformación angular.*

Por lo general, cualquier deformación unitaria se puede expresar de la siguiente manera:

$$\epsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right)$$

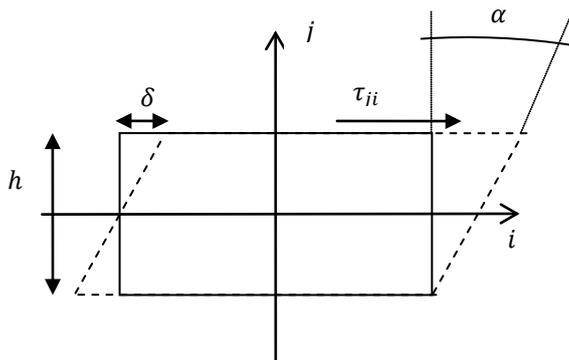
Esta notación cobra sentido cuando son dos dimensiones las que se ven afectadas para producir una deformación, como es el caso de las angulares. En este tipo de deformaciones, producidas por esfuerzos tangenciales, el sólido sufre el esfuerzo en una de sus superficies siendo otra la que se ve afectada por ese esfuerzo. El ángulo de deformación es directamente proporcional al esfuerzo tangencial producido, siendo μ el módulo de rigidez:



El módulo de rigidez o **segundo coeficiente de Lamé** se relaciona con los módulos de Young y de Poisson mediante la expresión:

$$\mu = \frac{E}{2(1 + \nu)}$$

Por último, para tener una relación con la deformación producida supongamos un sólido elástico al que se le aplica un esfuerzo tangencial en una de sus caras, y para que no obtenga momento torsor, otro de igual magnitud pero de signo contrario. Esto provocará una deformación angular en otra de sus caras que se relaciona con la deformación.

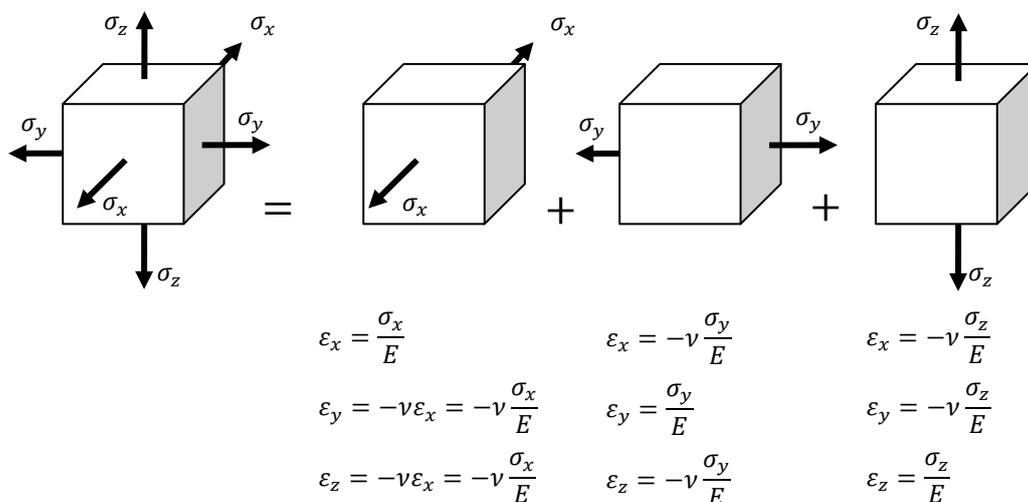


$$\varepsilon_{ji} = \frac{\delta}{h} = \frac{\frac{h}{2} \tan \alpha}{h} \approx \frac{\alpha}{2}$$

$$\tau_{ji} = \mu \cdot \alpha = \frac{E}{(1 + \nu)} \varepsilon_{ji}$$

II. 2. c. Leyes de Hooke Generalizadas

Según el principio de superposición se puede descomponer los esfuerzos que actúan sobre un sólido para analizar sus efectos y luego sumar la aportación de cada análisis al conjunto total. Para ello, se tiene un sólido sometido a esfuerzos en cada una de sus caras, siendo los esfuerzos de caras paralelas iguales en magnitud y opuestos en sentido:



Sumando la aportación de cada contribución y añadiendo las posibles contribuciones de esfuerzos tangenciales se obtienen las **leyes de Hooke generalizadas**:

$$\varepsilon_x = \frac{\sigma_x}{E} - \frac{\nu}{E}(\sigma_y + \sigma_z)$$

$$\varepsilon_y = \frac{\sigma_y}{E} - \frac{\nu}{E}(\sigma_x + \sigma_z)$$

$$\varepsilon_z = \frac{\sigma_z}{E} - \frac{\nu}{E}(\sigma_x + \sigma_y)$$

$$\varepsilon_{xy} = \frac{(1 + \nu)}{E} \tau_{xy}$$

$$\varepsilon_{xz} = \frac{(1 + \nu)}{E} \tau_{xz}$$

$$\varepsilon_{yz} = \frac{(1 + \nu)}{E} \tau_{yz}$$

Estas ecuaciones se pueden resumir de forma matricial, siendo $S[m^2/N]$ el **tensor compliancias** del material, que en el caso de ser isótropo sólo tiene dos constantes independientes inherentes del material:

$$\varepsilon = S : \tau \quad (\varepsilon_{ij} = S_{ijkl} \cdot \tau_{kl})$$

$$S = \begin{bmatrix} E & -\frac{\nu}{E} & -\frac{\nu}{E} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\nu}{E} & E & -\frac{\nu}{E} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\nu}{E} & -\frac{\nu}{E} & E & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1+\nu}{E} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1+\nu}{E} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1+\nu}{E} \end{bmatrix}$$

En ocasiones es necesario conocer la relación inversa, es decir, a partir de la deformación generada conocer la tensión que la ha producido. Las ecuaciones resultantes se conocen como **Ecuaciones de Lamé**:

$$\tau = C : \varepsilon \quad (\tau_{ij} = C_{ijkl} \cdot \varepsilon_{kl})$$

Siendo $C [N/m^2] = S^{-1}$, **tensor de elasticidad**:

$$C = \begin{bmatrix} \lambda + 2\mu & \lambda & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ \lambda & \lambda + 2\mu & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ \lambda & \lambda & \lambda + 2\mu & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2\mu & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2\mu & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2\mu \end{bmatrix}$$

Donde:

$$\text{Primer coeficiente de Lamé o constante de dilatación, } \lambda = \frac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)}$$

$$\text{Segundo coeficiente de Lamé o módulo de rigidez, } \mu = \frac{E}{2(1+\nu)}$$

Las ecuaciones desarrolladas serían: ($\varepsilon_T = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z$)

$$\sigma_x = \lambda \varepsilon_T + 2\mu \varepsilon_x$$

$$\sigma_y = \lambda \varepsilon_T + 2\mu \varepsilon_y$$

$$\sigma_z = \lambda \varepsilon_T + 2\mu \varepsilon_z$$

$$\tau_{xy} = 2\mu \varepsilon_{xy}$$

$$\tau_{xz} = 2\mu \varepsilon_{xz}$$

$$\tau_{yz} = 2\mu \varepsilon_{yz}$$

II. 2. d. IIª Ley de Newton, ecuación de la Dinámica

La segunda ley de Newton explica la relación existente entre la fuerza que se le aplica a un cuerpo y el cambio en la cantidad de movimiento (p) que éste sufre en el tiempo.

$$F = \frac{d\vec{p}}{dt}$$

En la mecánica clásica, la cantidad de movimiento (momento lineal o momentum) se define como el producto de la masa (m) por su velocidad en un instante determinado (v). Si queremos conocer el momento lineal para todo un cuerpo continuo, es suficiente integrar para todo el volumen (V) el producto de la velocidad para cada porción infinitesimal de masa (dm).

$$p = \int v \cdot dm = \int_V v \rho \cdot dV$$

Si suponemos que la masa es constante, el diferencial de masa es el producto entre la densidad (ρ [Kg/m^3]) y un diferencial de volumen.

Por lo tanto, podemos reescribir la ley de Newton como:

$$F = \int_V \rho \frac{\partial v}{\partial t} dV$$

En la otra parte de la igualdad podemos reescribir la fuerza como el conjunto de todos los esfuerzos que actúan por diferencial de superficie.

$$F = \int_S \sigma \cdot dS$$

Mediante la fórmula de Cauchy y a posterior aplicando el teorema de la divergencia obtenemos:

$$\int_S \sigma \cdot dS = \int_S \tau \cdot \vec{n} dS = \int_V \nabla \cdot \tau dV$$

Igualando obtenemos

$$\int_V \rho \frac{\partial v}{\partial t} dV = \int_V \nabla \cdot \tau dV$$

$$\rho \frac{\partial v}{\partial t} = \nabla \cdot \tau$$

II. 2. e. Ecuaciones constitutivas del modelo

El modelo propuesto para la propagación de ondas elásticas en sólidos viene dado por las ecuaciones de Lamé extraídas de la Ley de Hooke en el apartado III. 3 y de la ecuación de la dinámica (segunda ley de Newton) en el apartado III. 4. Para poder formar el modelo es necesario relacionar las dos ecuaciones, la estática y la dinámica entre ellas. Para ello, se persigue que ambas expresiones estén en función de las mismas variables, en este caso serán la velocidad de partícula (v) y la matriz de esfuerzos (τ).

$$\begin{cases} \tau = C : \varepsilon \\ \rho \frac{\partial v}{\partial t} = \nabla \cdot \tau \end{cases}$$

La relación entre la deformación unitaria y la velocidad es la derivada temporal de la primera variable:

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial t} = \frac{1}{2} (\nabla v + v \nabla)$$

Derivando con respecto del tiempo y sustituyendo en la primera ecuación constitutiva se obtiene:

$$\frac{\partial \tau}{\partial t} = \frac{C}{2} (\nabla v + v \nabla)$$

Siendo $v \nabla$ la matriz traspuesta de ∇v . Si ahora se reordenan los términos el modelo resultante para la propagación de ondas en un medio elástico resulta:

$$\begin{cases} \frac{\partial \tau}{\partial t} = \lambda \bar{I} (\nabla v) + \mu (\nabla v + v \nabla) \\ \rho \frac{\partial v}{\partial t} = \nabla \cdot \tau \end{cases}$$

\bar{I} , matriz identidad.

II. 3. Modelo Numérico

II. 3. a. *FDTD (Finite Difference Time Domain)*

El modelo que se ha obtenido resulta ser un sistema de ecuaciones diferenciales acopladas. Un estudio analítico de estas ecuaciones resultaría complejo y no en todos los casos sería posible una solución, sólo se podrían obtener una colección de soluciones analíticas para casos muy particulares. Para resolver el problema es recomendable, por lo tanto, realizar un estudio numérico del mismo. El método escogido es el de diferencias finitas en el dominio del tiempo (FDTD, Finite Difference Time Domain), este algoritmo se basa en discretizar el sistema de ecuaciones tanto en espacio como en tiempo e ir resolviéndolas explícitamente en dichos pasos temporales en un dominio finito y discreto. Las ventajas de éste método numérico frente a otros es que el hecho de utilizar una diferencia finita como aproximación a una derivada lo hace sencillo y el hecho de trabajar en el dominio del tiempo lo hace muy práctico frente a otros métodos que trabajan en el dominio de la frecuencia y por tanto sería imposible medir cambios en frecuencias que no sean la de estudio, como se desea realizar en este caso.

II. 3. b. *Series de Taylor*

Según el Teorema de Taylor una función en un punto se puede aproximar mediante la evaluación de las derivadas de dicha función como:

$$f(x_i) = f|_{x_i} + (x - x_i) \frac{\partial f}{\partial x} \Big|_{x_i} + \frac{(x - x_i)^2}{2!} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \Big|_{x_i} + \frac{(x - x_i)^3}{3!} \frac{\partial^3 f}{\partial x^3} \Big|_{x_i} + \dots$$

Para obtener una diferencia finita centrada, nos conviene aproximar la función en un par de puntos $x_0 \pm \frac{\Delta x}{2}$:

$$f\left(x_0 + \frac{\Delta x}{2}\right) = f|_{x_0} + \frac{\Delta x}{2} \frac{\partial f}{\partial x} \Big|_{x_0} + \frac{1}{2!} \left(\frac{\Delta x}{2}\right)^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \Big|_{x_0} + \frac{1}{3!} \left(\frac{\Delta x}{2}\right)^3 \frac{\partial^3 f}{\partial x^3} \Big|_{x_0} + \dots$$

$$f\left(x_0 - \frac{\Delta x}{2}\right) = f|_{x_0} - \frac{\Delta x}{2} \frac{\partial f}{\partial x} \Big|_{x_0} + \frac{1}{2!} \left(\frac{\Delta x}{2}\right)^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \Big|_{x_0} - \frac{1}{3!} \left(\frac{\Delta x}{2}\right)^3 \frac{\partial^3 f}{\partial x^3} \Big|_{x_0} + \dots$$

Ahora obtenemos la diferencia de ambas aproximaciones, y como puede observarse los términos impares se anulan:

$$f\left(x_0 + \frac{\Delta x}{2}\right) - f\left(x_0 - \frac{\Delta x}{2}\right) = \Delta x \frac{\partial f}{\partial x} \Big|_{x_0} + \frac{\Delta x^3}{6} \frac{\partial^3 f}{\partial x^3} \Big|_{x_0} + \dots$$

El siguiente paso sería dividir la expresión por Δx :

$$\frac{f\left(x_0 + \frac{\Delta x}{2}\right) - f\left(x_0 - \frac{\Delta x}{2}\right)}{\Delta x} = \frac{\partial f}{\partial x} \Big|_{x_0} + \frac{\Delta x^2}{6} \frac{\partial^3 f}{\partial x^3} \Big|_{x_0} + \dots$$

Despreciando los términos de orden superior podemos aproximar la primera derivada de una función en un punto dado, cometiendo un error de orden $(\Delta x)^2$, mediante:

$$\left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{x_0} \approx \frac{f\left(x_0 + \frac{\Delta x}{2}\right) - f\left(x_0 - \frac{\Delta x}{2}\right)}{\Delta x}$$

En esta aproximación se basará todo el modelo numérico expuesto a continuación.

II. 3. c. Simplificación del modelo, simetría axial

Para este estudio se ha desarrollado un modelo en coordenadas cilíndricas (r, z, θ) y simplificado suponiendo simetría de revolución, por lo que se obtiene un modelo en coordenadas axisimétricas (r, z) . Esta particularidad nos permitirá estudiar un dominio tridimensional sin necesidad de calcular 3 dimensiones exactamente, dado que al suponer simetría de revolución el cálculo es mucho menos costoso y más real que utilizando un modelo basado en coordenadas cartesianas y dos dimensiones.

Particularizar el modelo para un sistema de coordenadas dado es peculiarmente sencillo, sólo hace falta utilizar los operadores diferenciales de nuestro sistema de coordenadas, en nuestro caso: $\left(\partial_x = \frac{\partial}{\partial x}\right)$

$$\begin{aligned} \nabla\phi &= \partial_r\phi \hat{r} + \frac{\partial_\theta\phi}{r} \hat{\theta} + \partial_z\phi \hat{z} \\ \text{div } \vec{F} &= \nabla \cdot \vec{F} = \partial_r \frac{\partial F_r}{\partial r} + \frac{1}{r} (F_r + \partial_\theta F_\theta) + \partial_z F_z \end{aligned}$$

El sistema de ecuaciones resultante sería:

Esfuerzos normales:

$$\begin{aligned} \partial_t \tau_{rr} &= (\lambda + 2\mu) \partial_r v_r + \lambda \left(\partial_z v_z + \frac{\partial_\theta v_\theta}{r} + \frac{v_r}{r} \right) \\ \partial_t \tau_{zz} &= (\lambda + 2\mu) \partial_z v_z + \lambda \left(\partial_r v_r + \frac{v_r}{r} + \frac{\partial_\theta v_\theta}{r} \right) \\ \partial_t \tau_{\theta\theta} &= (\lambda + 2\mu) \left(\frac{v_r}{r} + \frac{\partial_\theta v_\theta}{r} \right) + \lambda (\partial_r v_r + \partial_z v_z) \end{aligned}$$

Esfuerzos de cizalla:

$$\begin{aligned} \partial_t \tau_{rz} &= \mu (\partial_r v_z + \partial_z v_r) \\ \partial_t \tau_{r\theta} &= \mu \left(\partial_r v_\theta + \frac{\partial_\theta v_r}{r} - \frac{v_\theta}{r} \right) \\ \partial_t \tau_{\theta z} &= \mu \left(\frac{\partial_\theta v_z}{r} + \partial_z v_\theta \right) \end{aligned}$$

Velocidad de partícula:

$$\partial_t v_r = \frac{1}{\rho} \left(\partial_r \tau_{rr} + \frac{\partial_\theta \tau_{r\theta}}{r} + \partial_z \tau_{rz} + \frac{\tau_{rr} - \tau_{\theta\theta}}{r} \right)$$

$$\partial_t v_z = \frac{1}{\rho} \left(\partial_r \tau_{rz} + \frac{\partial_\theta \tau_{z\theta}}{r} + \partial_z \tau_{zz} + \frac{\tau_{rz}}{r} \right)$$

$$\partial_t v_\theta = \frac{1}{\rho} \left(\partial_r \tau_{r\theta} + \frac{\partial_\theta \tau_{\theta\theta}}{r} + \partial_z \tau_{\theta z} + \frac{2\tau_{r\theta}}{r} \right)$$

Para introducir simetría de revolución se impondrá:

$$\partial_\theta = 0$$

$$v_\theta = 0$$

$$\tau_{r\theta} = 0$$

$$\tau_{z\theta} = 0$$

Esfuerzos normales:

$$\partial_t \tau_{rr} = (\lambda + 2\mu) \partial_r v_r + \lambda \left(\partial_z v_z + \frac{v_r}{r} \right)$$

$$\partial_t \tau_{zz} = (\lambda + 2\mu) \partial_z v_z + \lambda \left(\partial_r v_r + \frac{v_r}{r} \right)$$

$$\partial_t \tau_{\theta\theta} = (\lambda + 2\mu) \frac{v_r}{r} + \lambda (\partial_r v_r + \partial_z v_z)$$

Esfuerzo de cizalla:

$$\partial_t \tau_{rz} = \mu (\partial_r v_z + \partial_z v_r)$$

Velocidad de partícula:

$$\partial_t v_r = \frac{1}{\rho} \left(\partial_r \tau_{rr} + \partial_z \tau_{rz} + \frac{\tau_{rr} - \tau_{\theta\theta}}{r} \right)$$

$$\partial_t v_z = \frac{1}{\rho} \left(\partial_r \tau_{rz} + \partial_z \tau_{zz} + \frac{\tau_{rz}}{r} \right)$$

II. 3. d. Absorción y PML

Debido a que el dominio es finito y por economía de cálculo no puede ser suficientemente grande para no obtener reflexiones dentro de la zona de estudio y poder considerarlo como infinito, se implementa lo que se conoce como PML (Perfect Mach Layer). Esta técnica consiste en crear alrededor del dominio una zona donde se introduce absorción artificial anisótropa y el valor de ésta aumenta cuadráticamente. De esta manera se provoca que la onda se atenúe exponencialmente y por tanto no se produzcan reflexiones en los límites del dominio.

Como ya se ha observado anteriormente cada nueva variable que se calcula depende a su vez de otras variables calculadas anteriormente con sus direcciones de propagación. Para añadir absorción en cada dirección será necesario atenuar cada término en función de si éste presenta gradiente en esa dirección. Por lo tanto será necesario descomponer las diferentes componentes de velocidad y esfuerzo en subcomponentes en función de la dirección de gradiente que presenten. El modelo resultante es:

$$\left. \begin{aligned} \rho(\alpha_r \partial_t + \omega_r) v_r^{(r)} &= \partial_r \tau_{rr} \\ \rho(\alpha_z \partial_t + \omega_z) v_r^{(z)} &= \partial_z \tau_{rz} \\ \rho(A_r \partial_t + \Omega_r) v_r^{(\theta)} &= \tau_{rr} - \tau_{\theta\theta} \end{aligned} \right\} v_r = v_r^{(r)} + v_r^{(z)} + v_r^{(\theta)}$$

$$\left. \begin{aligned} \rho(\alpha_r \partial_t + \omega_r) v_z^{(r)} &= \partial_r \tau_{rz} \\ \rho(\alpha_z \partial_t + \omega_z) v_z^{(z)} &= \partial_z \tau_{zz} \\ \rho(A_r \partial_t + \Omega_r) v_z^{(\theta)} &= \tau_{rz} \end{aligned} \right\} v_z = v_z^{(r)} + v_z^{(z)} + v_z^{(\theta)}$$

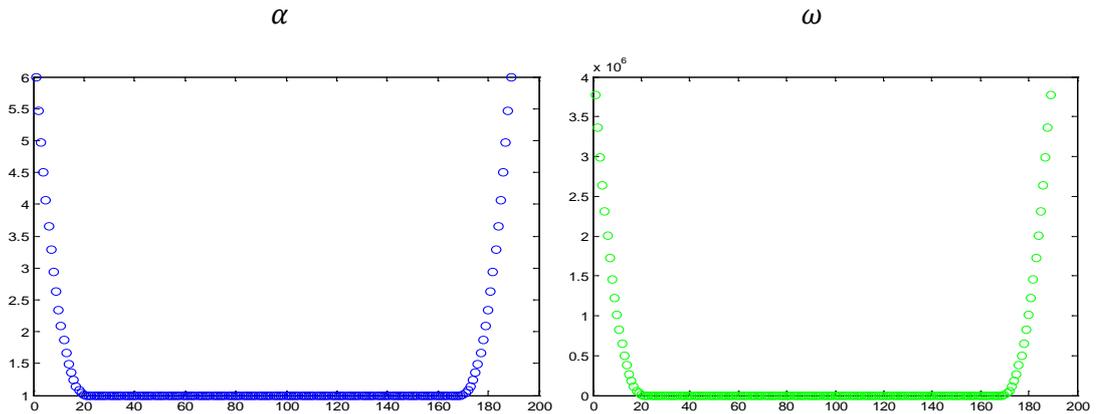
$$\left. \begin{aligned} (\alpha_r \partial_t + \omega_r) \tau_{rr}^{(r)} &= (\lambda + 2\mu) \partial_r v_r \\ (\alpha_z \partial_t + \omega_z) \tau_{rr}^{(z)} &= \lambda \partial_z v_z \\ (A_r \partial_t + \Omega_r) \tau_{rr}^{(\theta)} &= \lambda v_r \end{aligned} \right\} \tau_{rr} = \tau_{rr}^{(r)} + \tau_{rr}^{(z)} + \tau_{rr}^{(\theta)}$$

$$\left. \begin{aligned} (\alpha_r \partial_t + \omega_r) \tau_{zz}^{(r)} &= \lambda \partial_r v_r \\ (\alpha_z \partial_t + \omega_z) \tau_{zz}^{(z)} &= (\lambda + 2\mu) \partial_z v_z \\ (A_r \partial_t + \Omega_r) \tau_{zz}^{(\theta)} &= \lambda v_r \end{aligned} \right\} \tau_{zz} = \tau_{zz}^{(r)} + \tau_{zz}^{(z)} + \tau_{zz}^{(\theta)}$$

$$\left. \begin{aligned} (\alpha_r \partial_t + \omega_r) \tau_{\theta\theta}^{(r)} &= \lambda \partial_r v_r \\ (\alpha_z \partial_t + \omega_z) \tau_{\theta\theta}^{(z)} &= \lambda \partial_z v_z \\ (A_r \partial_t + \Omega_r) \tau_{\theta\theta}^{(\theta)} &= (\lambda + 2\mu) v_r \end{aligned} \right\} \tau_{\theta\theta} = \tau_{\theta\theta}^{(r)} + \tau_{\theta\theta}^{(z)} + \tau_{\theta\theta}^{(\theta)}$$

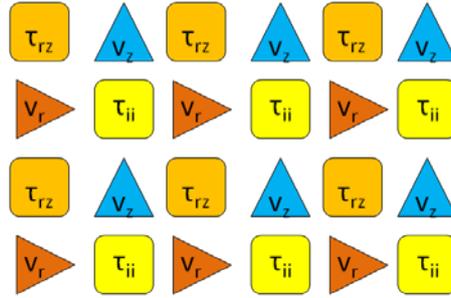
$$\left. \begin{aligned} (\alpha_r \partial_t + \omega_r) \tau_{rz}^{(r)} &= \mu \partial_r v_z \\ (\alpha_z \partial_t + \omega_z) \tau_{rz}^{(z)} &= \mu \partial_z v_r \end{aligned} \right\} \tau_{rz} = \tau_{rz}^{(r)} + \tau_{rz}^{(z)}$$

De esta manera cuando estemos en la zona del dominio donde no queramos atenuar $\alpha = 1$ y $\omega = 0$, mientras que en las zonas donde queramos conseguir atenuación iremos aumentando esos valores de forma exponencial como se muestra en la siguiente figura:



II. 3. e. Discretización y tresbolillado del modelo

El último paso es discretizar nuestro modelo, para ello escogeremos en qué puntos tanto espaciales como temporales deseamos evaluar nuestro modelo. Según el desarrollo de Taylor para evaluar la derivada parcial, con respecto una variable, de una función en un punto de la variable se necesita conocer el valor de dicha función para esa variable en los puntos contiguos. Esto temporalmente implica que para calcular el instante actual se necesita el instante anterior y el instante siguiente, el instante futuro servirá para calcular el nuevo valor que toma la función y el instante pasado será conocido (ya sea una condición inicial, por ejemplo reposo, o el valor de la función calculada en el paso anterior). Esto implica que necesitaremos conocer el instante actual del resto de funciones que necesitamos para el cálculo. Debido a esta peculiaridad se necesita desplazar temporalmente unas funciones de otras, esto se conoce como tresbolillado. Espacialmente sucede el mismo caso, quedando así el mallado de la simulación:



En esta representación espacial del mallado cabe imaginar que las variables de esfuerzo están desplazadas también temporalmente.

Con estas consideraciones, así quedarían evaluadas las derivadas del modelo:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \tau_{rr}}{\partial t} \Big|_{(i,j)}^{n+\frac{1}{2}} &= (\lambda + 2\mu) \frac{\partial v_r}{\partial r} \Big|_{(i,j)}^{n+\frac{1}{2}} + \lambda \left(\frac{\partial v_z}{\partial z} \Big|_{(i,j)}^{n+\frac{1}{2}} + \frac{v_r|_{(i,j)}^{n+\frac{1}{2}}}{r} \right) \\ \frac{\partial \tau_{zz}}{\partial t} \Big|_{(i,j)}^{n+\frac{1}{2}} &= (\lambda + 2\mu) \frac{\partial v_z}{\partial z} \Big|_{(i,j)}^{n+\frac{1}{2}} + \lambda \left(\frac{\partial v_r}{\partial r} \Big|_{(i,j)}^{n+\frac{1}{2}} + \frac{v_r|_{(i,j)}^{n+\frac{1}{2}}}{r} \right) \\ \frac{\partial \tau_{\theta\theta}}{\partial t} \Big|_{(i,j)}^{n+\frac{1}{2}} &= (\lambda + 2\mu) \frac{v_r|_{(i,j)}^{n+\frac{1}{2}}}{r} + \lambda \left(\frac{\partial v_r}{\partial r} \Big|_{(i,j)}^{n+\frac{1}{2}} + \frac{\partial v_z}{\partial z} \Big|_{(i,j)}^{n+\frac{1}{2}} \right) \\ \frac{\partial \tau_{rz}}{\partial t} \Big|_{(i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2})}^{n+\frac{1}{2}} &= \mu \left(\frac{\partial v_z}{\partial r} \Big|_{(i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2})}^{n+\frac{1}{2}} + \frac{\partial v_r}{\partial z} \Big|_{(i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2})}^{n+\frac{1}{2}} \right) \\ \frac{\partial v_r}{\partial t} \Big|_{(i+\frac{1}{2},j)}^n &= \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial \tau_{rr}}{\partial r} \Big|_{(i+\frac{1}{2},j)}^n + \frac{\partial \tau_{rz}}{\partial z} \Big|_{(i+\frac{1}{2},j)}^n + \frac{\tau_{rr}|_{(i+\frac{1}{2},j)}^n - \tau_{\theta\theta}|_{(i+\frac{1}{2},j)}^n}{r} \right) \\ \frac{\partial v_z}{\partial t} \Big|_{(i,j+\frac{1}{2})}^n &= \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial \tau_{zz}}{\partial z} \Big|_{(i,j+\frac{1}{2})}^n + \frac{\partial \tau_{rz}}{\partial r} \Big|_{(i,j+\frac{1}{2})}^n + \frac{\tau_{rz}|_{(i,j+\frac{1}{2})}^n}{r} \right) \end{aligned}$$

II. 3. f. Consideraciones del modelo

El modelo de FDTD es condicionalmente estable, por lo que se deben cumplir ciertas condiciones para la solución no diverja:

$$S \equiv \frac{c_{max} \cdot \Delta t}{\sqrt{(\Delta r)^2 + (\Delta z)^2}} \leq 1$$

Donde c_{max} es la velocidad máxima de propagación dentro del dominio. Como en él se van a propagar tanto ondas longitudinales como trasversales, al ser las primeras las que más velocidad de propagación tienen:

$$c_L = \sqrt{\frac{\lambda + 2\mu}{\rho}}$$

Por otro lado, para reducir la dispersión numérica es necesario que en el espacio estén bien representadas las ondas que en él se propagan, para ello necesitaremos un buen muestreo espacial (N_λ), este dato vendrá dado por las veces que podemos muestrear la longitud de onda más pequeña:

$$N_\lambda = \frac{\lambda_{min}}{\Delta_{max}} = \frac{c_{min}}{f_{max} \sqrt{(\Delta r)^2 + (\Delta z)^2}} \geq 10$$

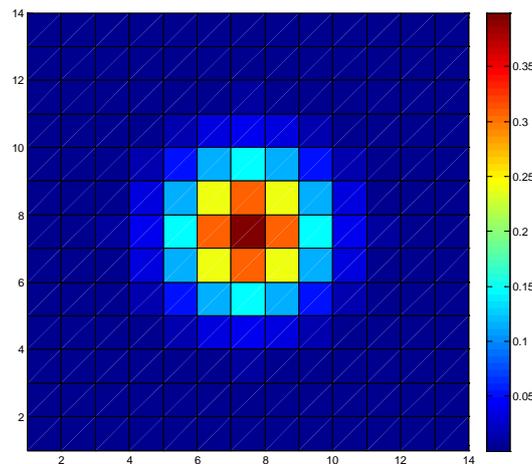
Este valor se recomienda que sea de 10 muestras por longitud de onda. Para este caso la velocidad mínima la marcarán las ondas trasversales que son las que se propagan con mayor lentitud:

$$c_s = \sqrt{\frac{\mu}{\rho}}$$

III. CONDICIONES DE SIMULACIÓN

El objetivo que se persigue en la simulación es conseguir generar un frente de ondas transversales emulando así el efecto producido por un haz ultrasónico que va focalizando en diferentes puntos consecutivos a lo largo de un eje. Para ello se ha implementado en el modelo una fuente móvil que va recorriendo el eje a una velocidad muy superior que la velocidad de propagación de las ondas transversales. Con esto se consigue generar un frente de ondas transversales cuasi-plano perseguido en algunas técnicas de elastografía para monitorizarlo y descubrir así las propiedades elásticas del medio en que se propaga.

Para simular una fuente acorde al modelo numérico, ésta debe presentar variaciones espaciales suaves, implementar una fuente completamente puntual podría provocar errores en la simulación. Además esta fuente debe de ser lo suficientemente pequeña con respecto a la longitud de onda de la señal que se desee emitir. Con todas estas consideraciones, se ha optado por una fuente con perfil gaussiano para evitar espacialmente cambios abruptos en la excitación del medio y suficientemente pequeña para no ser del orden de magnitud de la onda emitida. El perfil de la fuente en función de los elementos del mallado es la siguiente:



Este perfil se ha generado mediante la siguiente función:

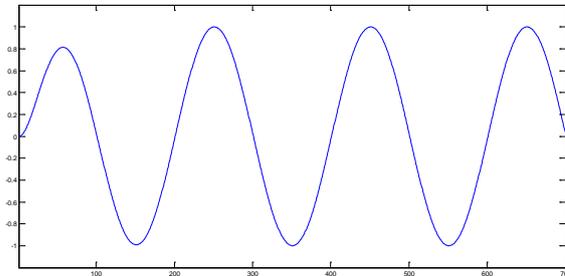
$$f[i, j] = \frac{1}{\sigma \sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{1}{4} \left[\left(\frac{i-\mu_i}{\sigma} \right)^2 + \left(\frac{j-\mu_j}{\sigma} \right)^2 \right]}$$

Siendo σ el ancho de la fuente, en este caso tres unidades del mallado del x y $\mu_{i,j}$ la posición que ocupa el centro de la fuente. Para que la fuente se desplace a lo largo del dominio sólo será necesario ir variando su centro.

La fuente además excitará el medio con estos dos tipos de señales dependiendo del caso:

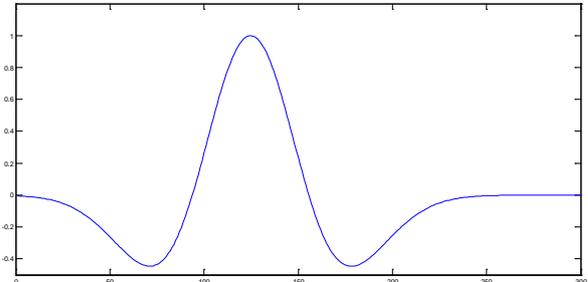
Señal sinusoidal:

$$x_1(t) = \sin(2\pi ft) \cdot (1 - e^{-2\pi ft})$$



Impulso amortiguado:

$$x_2[n] = e^{-\frac{a^2}{2}\left(t-\frac{4}{a}\right)^2} \cdot \left(1 - a^2\left(t-\frac{4}{a}\right)^2\right), \quad a = \frac{8f}{\sqrt{\pi}}$$



Estas señales son particularmente útiles dado que su variación temporal es poco abrupta, lo cual minimiza los errores numéricos.

Una vez caracterizada la fuente se irá introduciendo en varios dominios donde se impondrá que tipo de ondas se pueden propagar para ver el efecto que producen. Por lo tanto las simulaciones que se realizarán son:

Simulación	Propagación de ondas (velocidad de propagación)		Frecuencia	Velocidad de la fuente	Tipo de señal
	Longitudinales	Transversales			
Foco estático, transmisión OL	1500 m/s	-	0,6 MHz	0 m/s	Impulso
Foco estático, transmisión OS	-	400 m/s	0,6 MHz	0 m/s	Impulso
Foco estático, transmisión OL+OS	1500 m/s	400 m/s	0,6 MHz	0 m/s	Impulso
Foco dinámico, transmisión OL+OS	1500 m/s	400 m/s	0,6 MHz	2400 m/s	Senoidal

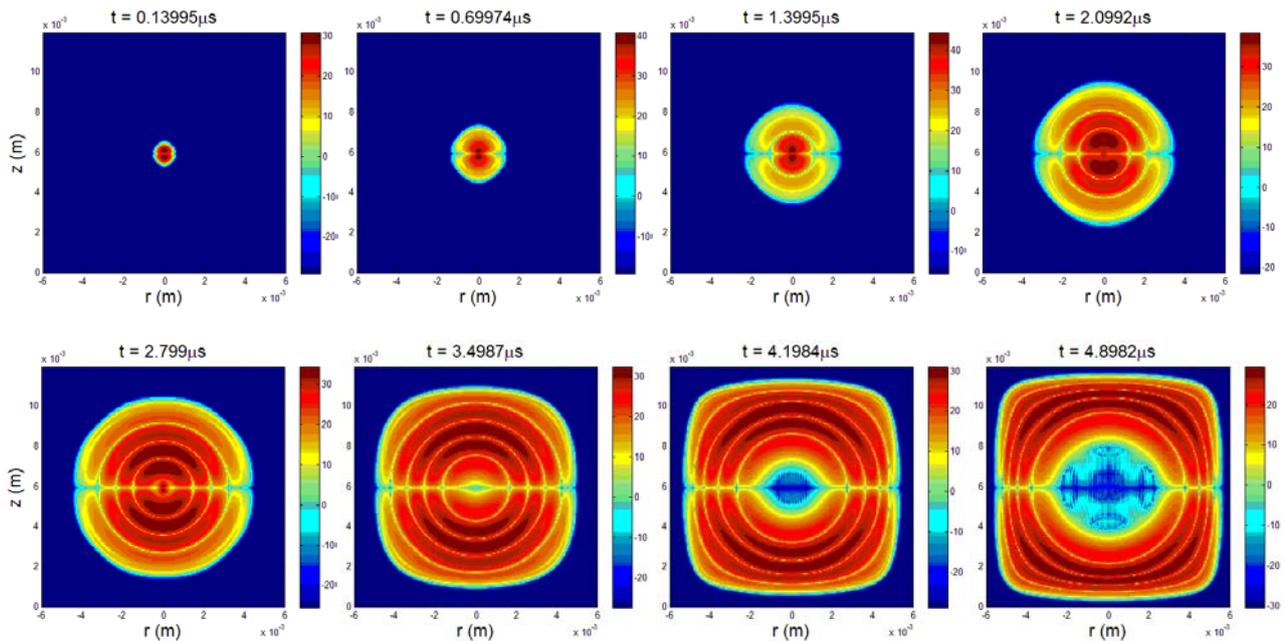
Las características de estos dominios son:

- Densidad, $\rho = 1000 \frac{Kg}{m^3}$,
- Dimensiones, $r = 6mm$ y $z = 12mm$

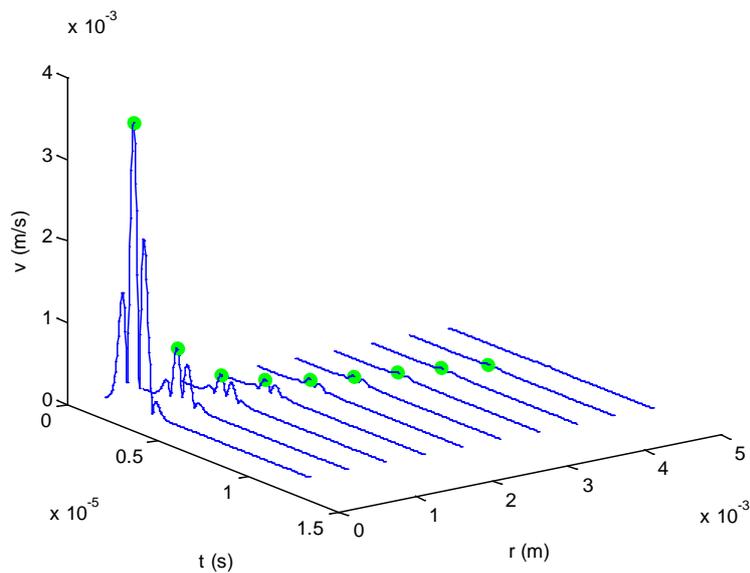
IV. RESULTADOS

IV. 1. FOCO ESTÁTICO, TRANSMISIÓN OL

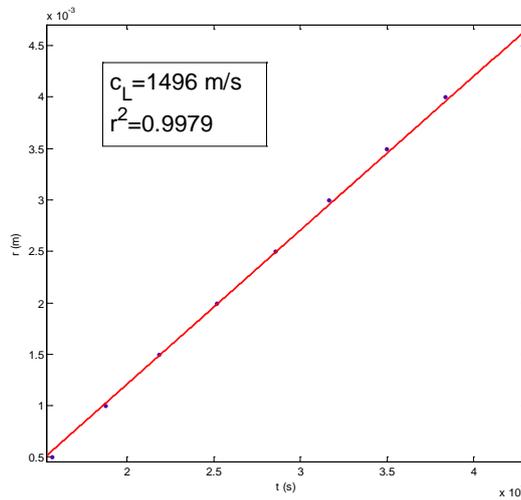
En la siguiente representación se muestra como varía el campo de tensión ($\sqrt{\tau_{rr}^2 + \tau_{zz}^2 + \tau_{\theta\theta}^2}$) en función de su variación temporal:



Si situamos receptores a lo largo de la perpendicular del eje, podemos ver como se propaga la señal en función del tiempo. En la siguiente figura se representa la magnitud del vector velocidad para puntos alejados del eje en paso de $0,5 \text{ mm}$:

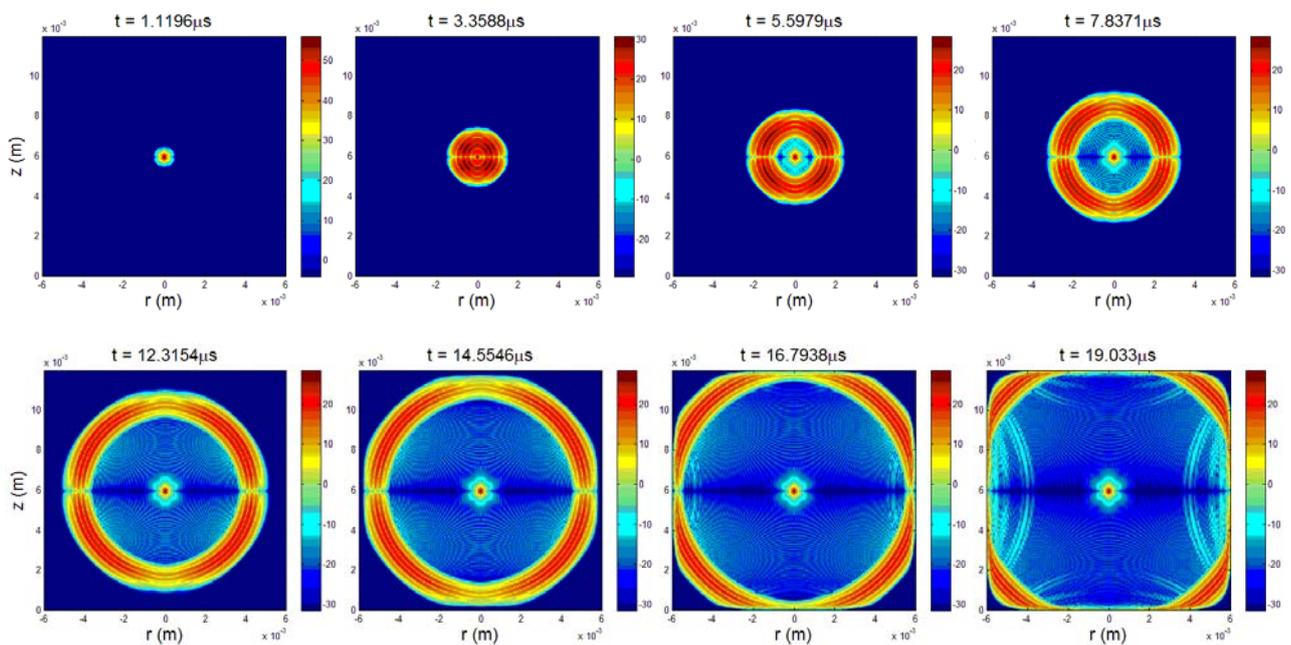


En la figura anterior se observa como la onda a medida que se aleja del eje, mantiene su forma pero se va atenuando. Como cabe esperar, cada señal esta retardada en el tiempo debido a la propagación del haz. A partir de los máximos de las señales tomadas a lo largo de la perpendicular al eje podemos apreciar el efecto de la propagación y, realizando un ajuste por mínimos cuadrados, evaluar la velocidad de la onda.

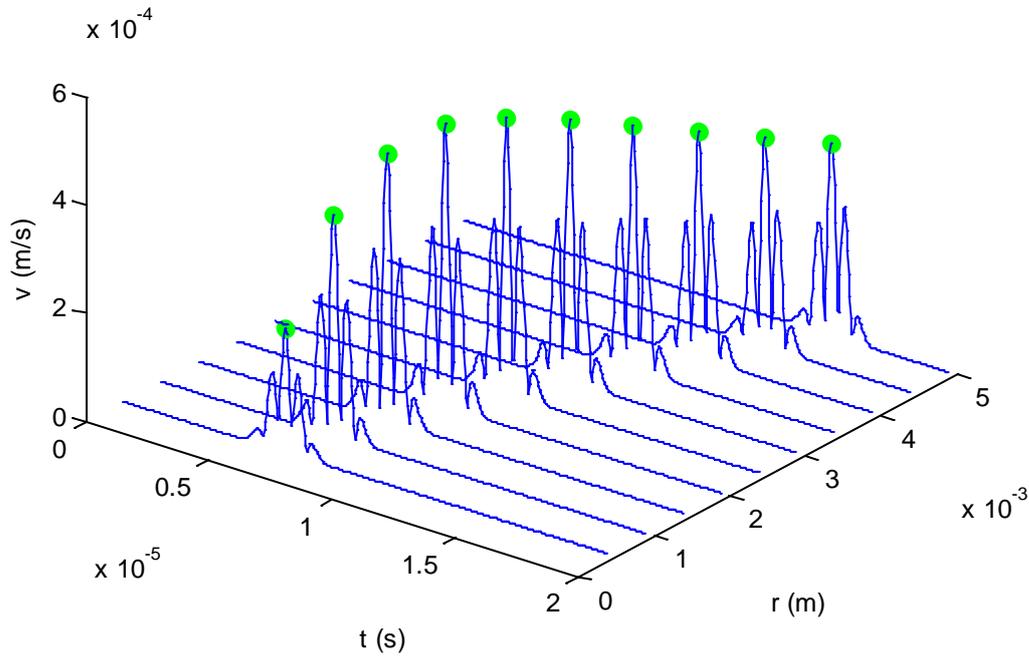


IV. 2. FOCO ESTÁTICO, TRANSMISIÓN OS

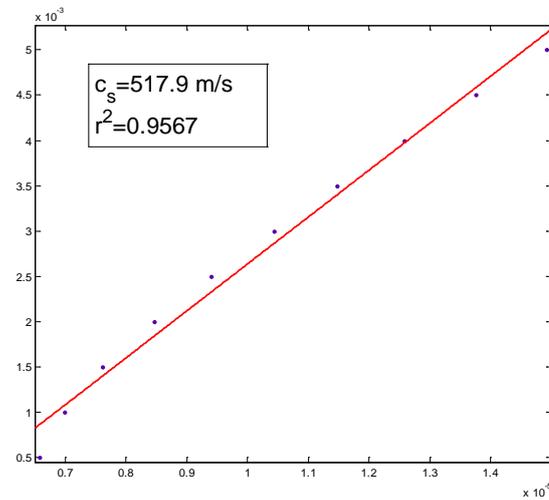
En este caso se impone que sólo las ondas transversales puedan propagarse, y análogamente al caso anterior evaluar las mismas propiedades:



Análogamente al caso anterior, se representa la forma de onda en varios puntos formando una línea perpendicular al eje:



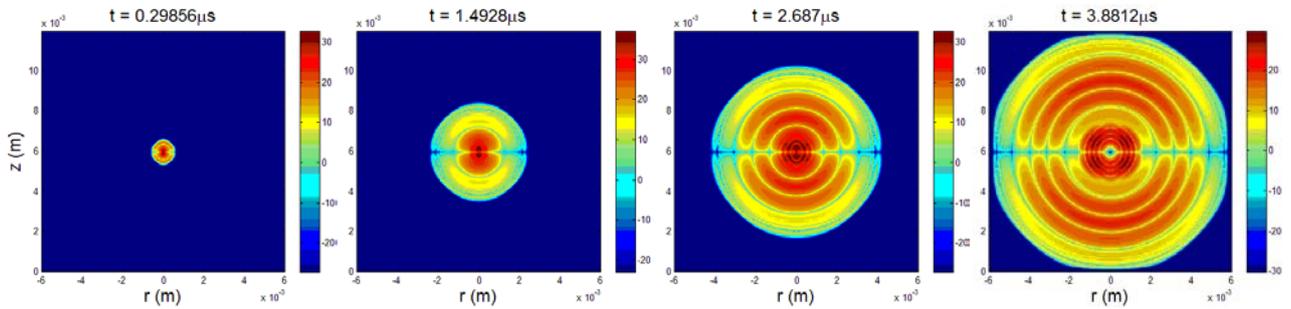
Del mismo modo se realiza un ajuste para comprobar la velocidad de propagación de las ondas transversales.



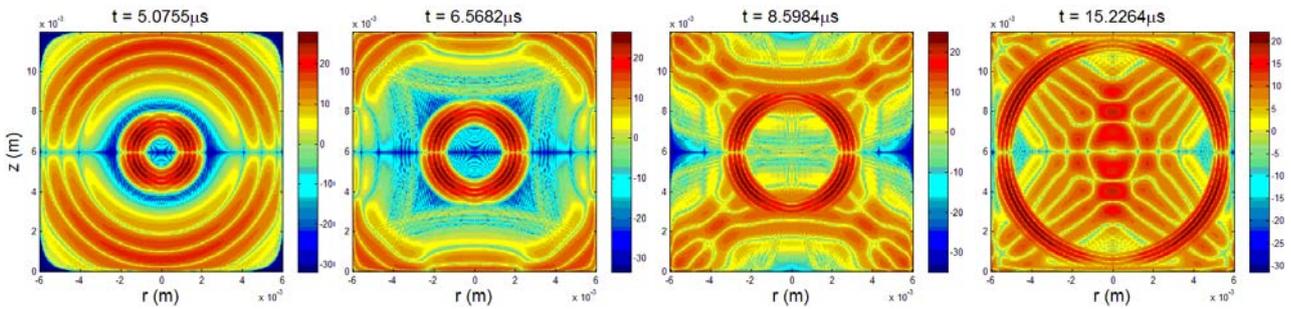
IV. 3. *FOCO ESTÁTICO, TRANSMISIÓN OL+OS*

En este caso los dos tipos de ondas se propagarán en el dominio, dado que ambas ondas tienen velocidades diferentes en la sucesión temporal pueden observarse dos frentes de onda

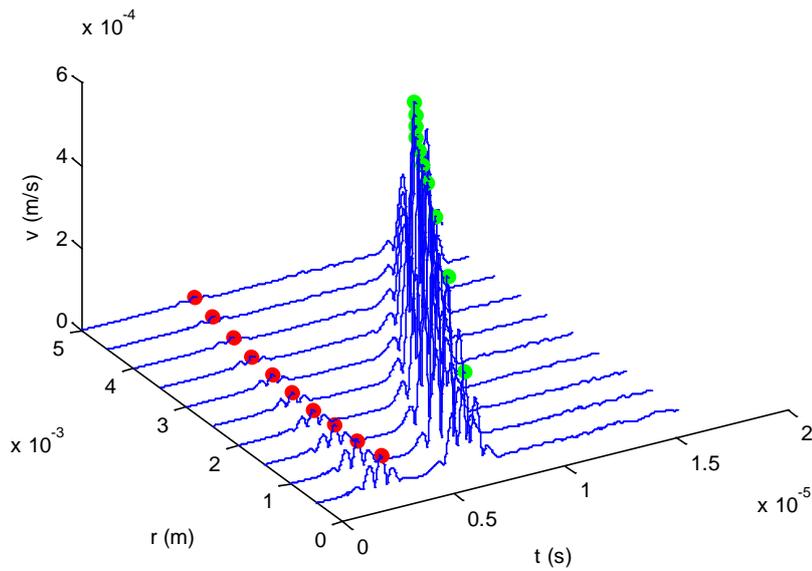
Propagación de la onda longitudinal:



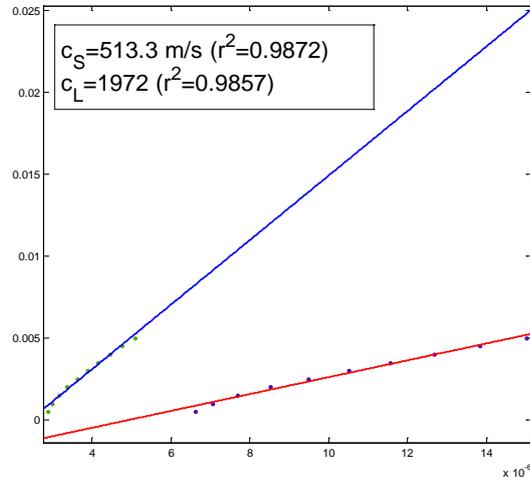
Propagación de la onda transversal:



Si mostramos las señales que captan los receptores transversales al eje se puede apreciar también los dos frentes de onda propagándose:

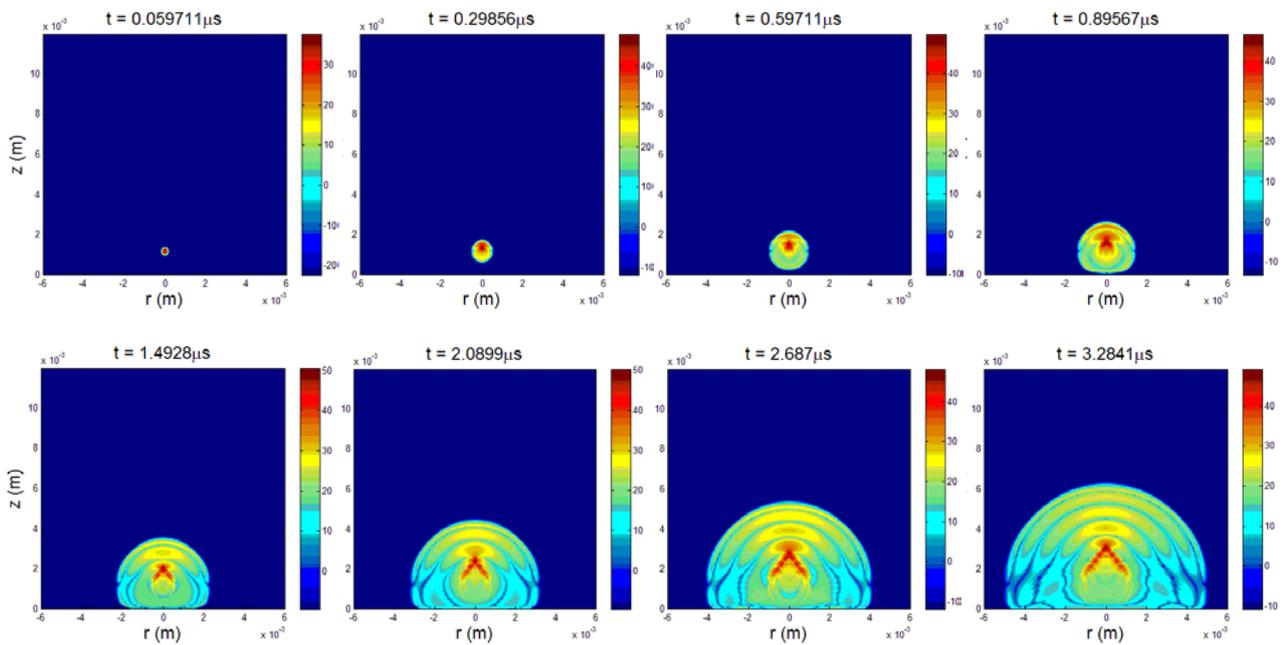


Realizando el mismo procedimiento, pero ahora teniendo en cuenta que la ventana temporal tiene que estar correctamente escogida para escoger en cada caso el frente de ondas, obtenemos una estimación de la velocidad de propagación:

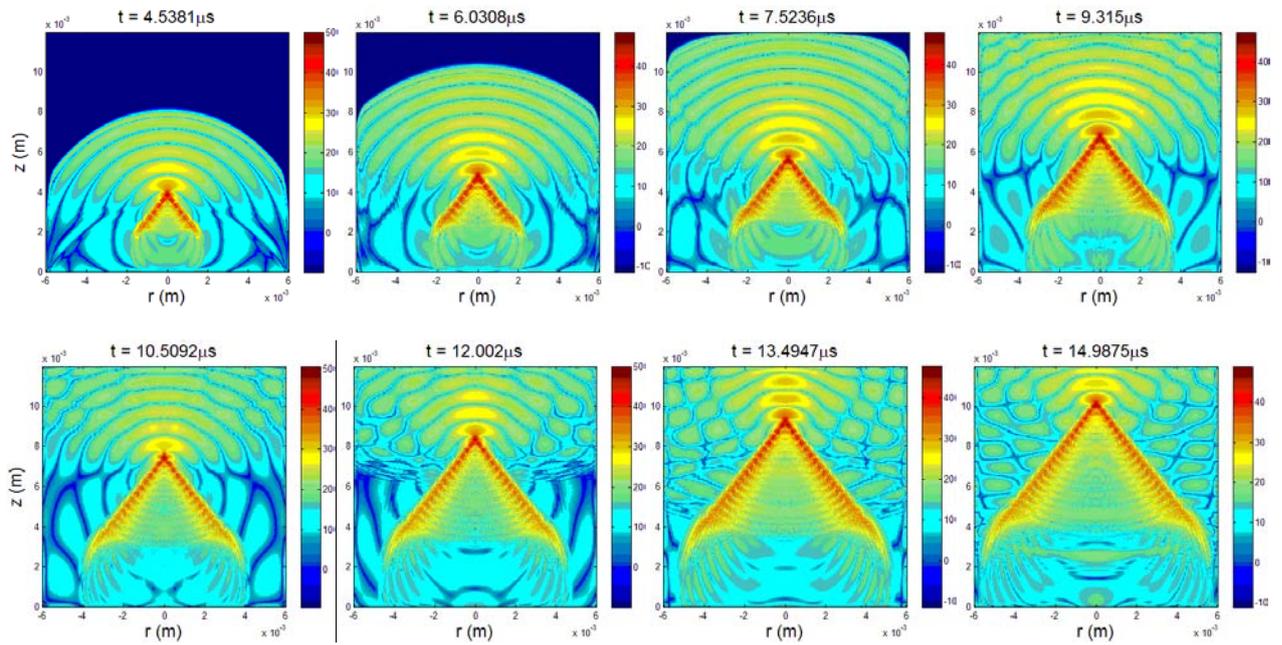


IV. 4. FOCO DINÁMICO, TRANSMISIÓN OL+OS

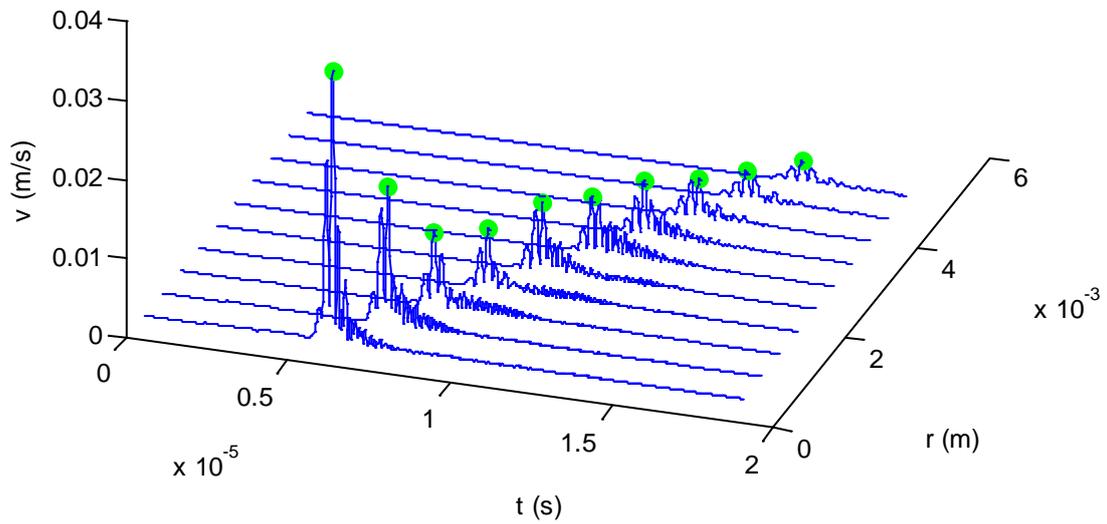
En los primeros instantes de propagación la fuente empieza a desplazarse en sentido del eje y comienza a perturbar el medio:



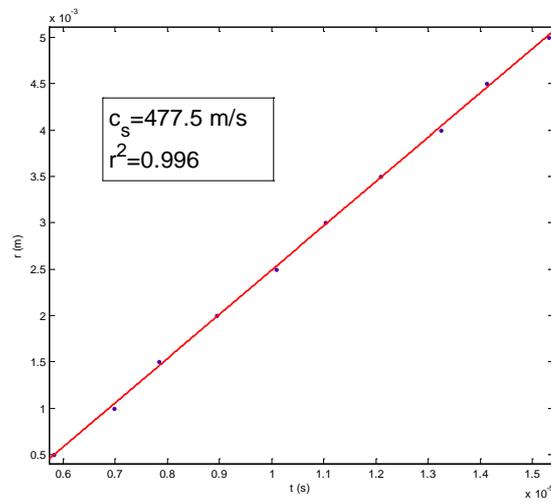
A medida que se propaga se empieza a discernir el cono de ondas transversales supersónicas causado por el movimiento de la fuente.



En este caso el análisis de los receptores muestra la magnitud del frente de ondas supersónico, este frente de ondas aparece distorsionado debido a que la fuente está viajando mucho más rápido que la velocidad con la que el frente avanza.



En este caso aún distorsionado el frente de ondas respecto a la señal original, todavía se puede asegurar cierta correlación entra las señales que captan los receptores. Pudiendo así realizar el ajuste lineal y estimar la velocidad de propagación del frente supersónico.



Con estos datos se puede afirmar que el frente de ondas generado es de ondas transversales, dado que se propaga a la velocidad dichas ondas.

V. REFERENCIAS

- Auld B.A.** Acoustic Fields and Elastic Waves in Solids. New York. Wiley, 1973. Vol. vols. I and II.
- Bastard Cécile, Remeniéras Jean-Pierre y Callé Samuel** Simulation of shear wave propagation in a soft medium using a pseudospectral time domain method. *J. Acoust. Soc. Am.* 2009. 126:4 .
- Bayliss A., Gunzburger M. y Turkel E.** Boundary conditions for the numerical solution of elliptic equations in exterior regions. *J. Appl. Math.* 1982. 42:430-451.
- Berenger J.-P.** A perfectly matched layer for the absorption of electromagnetics waves. *J. Comput. Phys.* 1994. 114:185–200.
- Jiménez González, N.** Simulación de tejidos vegetales mediante diferencias finitas. Tesis de Máster, Universidad Politècnica de València.
- Maleke C., Konofagou E E.** Harmonic motion imaging for focused ultrasound (HMIFU): a fully integrated technique for sonication and monitoring of thermal ablation in tissues.. *Phys. Med. Biol.* **53** (2008) 1773–1793
- Salido González, N.** Análisis Numérico de parámetros de calidad en haces focalizados. Trabajo final de Carrera, Universidad Politècnica de València.

ANEXO I. ECUACIONES DEL MODELO NUMÉRICO

Considerando todas las aportaciones discutidas en el modelo teórico, las ecuaciones resultantes listas para implementar son las siguientes:

$$\begin{aligned} v_{r,r}^{n+1}\left(i+\frac{1}{2},j\right) &= \left[\left(1-\frac{\omega_r dt}{2\alpha_r}\right)v_{r,r}^n\left(i+\frac{1}{2},j\right)+\frac{1}{\rho}\left(\frac{dt}{\alpha_r}\right)\partial_r\tau_{rr}\Big|_{i+\frac{1}{2},j}\right]/\left(1+\frac{\omega_r dt}{2\alpha_r}\right) \\ v_{r,z}^{n+1}\left(i+\frac{1}{2},j\right) &= \left[\left(1-\frac{\omega_z dt}{2\alpha_z}\right)v_{r,z}^n\left(i+\frac{1}{2},j\right)+\frac{1}{\rho}\left(\frac{dt}{\alpha_z}\right)\partial_z\tau_{rz}\Big|_{i+\frac{1}{2},j}\right]/\left(1+\frac{\omega_z dt}{2\alpha_z}\right) \\ v_{r,\theta}^{n+1}\left(i+\frac{1}{2},j\right) &= \left[\left(1-\frac{\Omega_r dt}{2A_r}\right)v_{r,\theta}^n\left(i+\frac{1}{2},j\right)+\frac{1}{\rho}\left(\frac{dt}{A_r}\right)(\tau_{rr}-\tau_{\theta\theta})\Big|_{i+\frac{1}{2},j}\right]/\left(1+\frac{\Omega_r dt}{2A_r}\right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} v_{z,r}^{n+1}\left(i,j+\frac{1}{2}\right) &= \left[\left(1-\frac{\omega_r dt}{2\alpha_r}\right)v_{z,r}^n\left(i,j+\frac{1}{2}\right)+\frac{1}{\rho}\left(\frac{dt}{\alpha_r}\right)\partial_r\tau_{rz}\Big|_{i,j+\frac{1}{2}}\right]/\left(1+\frac{\omega_r dt}{2\alpha_r}\right) \\ v_{z,z}^{n+1}\left(i,j+\frac{1}{2}\right) &= \left[\left(1-\frac{\omega_z dt}{2\alpha_z}\right)v_{z,z}^n\left(i,j+\frac{1}{2}\right)+\frac{1}{\rho}\left(\frac{dt}{\alpha_z}\right)\partial_z\tau_{zz}\Big|_{i,j+\frac{1}{2}}\right]/\left(1+\frac{\omega_z dt}{2\alpha_z}\right) \\ v_{z,\theta}^{n+1}\left(i,j+\frac{1}{2}\right) &= \left[\left(1-\frac{\Omega_r dt}{2A_r}\right)v_{z,\theta}^n\left(i,j+\frac{1}{2}\right)+\frac{1}{\rho}\left(\frac{dt}{A_r}\right)(\tau_{rz})\Big|_{i,j+\frac{1}{2}}\right]/\left(1+\frac{\Omega_r dt}{2A_r}\right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \tau_{r,r}^{n+1}(i,j) &= \left[\left(1-\frac{\omega_r dt}{2\alpha_r}\right)\tau_{r,r}^n(i,j)+(\lambda+2\mu)\left(\frac{dt}{\alpha_r}\right)\partial_r v_r\Big|_{i,j}\right]/\left(1+\frac{\omega_r dt}{2\alpha_r}\right) \\ \tau_{r,z}^{n+1}(i,j) &= \left[\left(1-\frac{\omega_z dt}{2\alpha_z}\right)\tau_{r,z}^n(i,j)+\lambda\left(\frac{dt}{\alpha_z}\right)\partial_z v_z\Big|_{i,j}\right]/\left(1+\frac{\omega_z dt}{2\alpha_z}\right) \\ \tau_{r,\theta}^{n+1}(i,j) &= \left[\left(1-\frac{\Omega_r dt}{2A_r}\right)\tau_{r,\theta}^n(i,j)+\lambda\left(\frac{dt}{A_r}\right)(v_r)\Big|_{i,j}\right]/\left(1+\frac{\Omega_r dt}{2A_r}\right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \tau_{z,r}^{n+1}(i,j) &= \left[\left(1-\frac{\omega_r dt}{2\alpha_r}\right)\tau_{z,r}^n(i,j)+\lambda\left(\frac{dt}{\alpha_r}\right)\partial_r v_r\Big|_{i,j}\right]/\left(1+\frac{\omega_r dt}{2\alpha_r}\right) \\ \tau_{z,z}^{n+1}(i,j) &= \left[\left(1-\frac{\omega_z dt}{2\alpha_z}\right)\tau_{z,z}^n(i,j)+(\lambda+2\mu)\left(\frac{dt}{\alpha_z}\right)\partial_z v_z\Big|_{i,j}\right]/\left(1+\frac{\omega_z dt}{2\alpha_z}\right) \\ \tau_{z,\theta}^{n+1}(i,j) &= \left[\left(1-\frac{\Omega_r dt}{2A_r}\right)\tau_{z,\theta}^n(i,j)+\lambda\left(\frac{dt}{A_r}\right)(v_r)\Big|_{i,j}\right]/\left(1+\frac{\Omega_r dt}{2A_r}\right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \tau_{\theta,r}^{n+1}(i,j) &= \left[\left(1-\frac{\omega_r dt}{2\alpha_r}\right)\tau_{\theta,r}^n(i,j)+\lambda\left(\frac{dt}{\alpha_r}\right)\partial_r v_r\Big|_{i,j}\right]/\left(1+\frac{\omega_r dt}{2\alpha_r}\right) \\ \tau_{\theta,z}^{n+1}(i,j) &= \left[\left(1-\frac{\omega_z dt}{2\alpha_z}\right)\tau_{\theta,z}^n(i,j)+\lambda\left(\frac{dt}{\alpha_z}\right)\partial_z v_z\Big|_{i,j}\right]/\left(1+\frac{\omega_z dt}{2\alpha_z}\right) \\ \tau_{\theta,\theta}^{n+1}(i,j) &= \left[\left(1-\frac{\Omega_r dt}{2A_r}\right)\tau_{\theta,\theta}^n(i,j)+(\lambda+2\mu)\left(\frac{dt}{A_r}\right)(v_r)\Big|_{i,j}\right]/\left(1+\frac{\Omega_r dt}{2A_r}\right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \tau_{r,z,r}^{n+1}\left(i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}\right) &= \left[\left(1-\frac{\omega_r dt}{2\alpha_r}\right)\tau_{r,z,r}^n\left(i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}\right)+\mu\left(\frac{dt}{\alpha_r}\right)\partial_r v_z\Big|_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}\right]/\left(1+\frac{\omega_r dt}{2\alpha_r}\right) \\ \tau_{r,z,z}^{n+1}\left(i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}\right) &= \left[\left(1-\frac{\omega_z dt}{2\alpha_z}\right)\tau_{r,z,z}^n\left(i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}\right)+\mu\left(\frac{dt}{\alpha_z}\right)\partial_z v_r\Big|_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}\right]/\left(1+\frac{\omega_z dt}{2\alpha_z}\right) \end{aligned}$$

