

ROBOTS FLEXIBLES: HACIA UNA GENERACIÓN DE ROBOTS CON NUEVAS PRESTACIONES

Vicente Feliu Batlle

*Escuela Técnica Superior de Ingenieros Industriales
Universidad de Castilla-La Mancha, Ciudad Real, España
e-mail: Vicente.Feliu@uclm.es*

Resumen: Este artículo presenta una panorámica de la investigación realizada hasta la fecha en el campo de la robótica flexible, es decir, en la categoría de los robots que presentan un grado de elasticidad apreciable en sus eslabones. Estos robots poseen interesantes propiedades mecánicas como su alta relación carga útil/peso del robot pero a cambio presentan importantes problemas desde los puntos de vista de modelado dinámico y control que suponen – aún hoy en día – retos importantes para los investigadores en robótica. El autor además aprovecha este artículo para verter sus propios puntos de vista sobre este tema y avanzar la evolución futura del mismo.
Copyright © 2006 CEA-IFAC

Palabras Clave: robots flexibles, dinámica de mecanismos, servosistemas, control de esfuerzos.

1. INTRODUCCIÓN

Los robots flexibles constituyen un campo de investigación que ha despertado un gran interés en los últimos 25 años entre la comunidad científica dedicada a la robótica. Esto ha sido motivado por la necesidad – impuesta por el desarrollo de la industria aeroespacial – de construir robots más grandes y ligeros. Por otro lado, la dinámica de estos robots es muy compleja (sistemas multivariables, no lineales,

de parámetros distribuidos y algunos de ellos variantes en el tiempo) lo cual ha atraído, además, el interés de muchos investigadores de los campos de la mecánica (diseño de robots con nuevas propiedades dinámicas) y del control automático (desarrollo de nuevos sistemas de control de altas prestaciones).

En un sentido muy amplio puede decirse que un robot flexible es aquél que incluye algún elemento con un cierto grado de flexibilidad, entendiéndose por flexibilidad la propiedad mecánica de una pieza de deformarse de forma elástica ante la solicitación de una fuerza o par. Se consideran dos tipos de flexibilidad en robótica: en las articulaciones y en los eslabones. La primera de ellas aparece como consecuencia de la torsión en los elementos que conectan los actuadores (motores) con los eslabones y siempre es de tipo rotacional. Se traduce en una variación de ángulo y, por ejemplo, las reductoras de los robots suelen experimentarla cuando están sometidas a movimientos rápidos. La Figura 1 ilustra este fenómeno. La flexibilidad en los eslabones aparece también como consecuencia de movimientos

¹Este artículo recoge los conocimientos adquiridos a través de los proyectos TAP92-0927, ESP93-0815-CO2-02, TAP96-1028-CO2-01 y DPI2003-03326 del Ministerio Español de Educación y Ciencia y del PBI-05-057 de la Junta de Comunidades de Castilla-La Mancha. Deseo reconocer el trabajo de los numerosos investigadores de la Universidad de Castilla-La Mancha y de la Universidad Nacional de Educación a Distancia que han colaborado en estos proyectos. También agradezco a los ingenieros Ismael Payo, Francisco Ramos y Emiliano Pereira, la ayuda que me han prestado en la elaboración de este escrito.

rápidos, del transporte de grandes cargas o de la generación de grandes fuerzas o momentos en el extremo del robot resultado de la realización de tareas que impliquen contacto con el entorno. En este caso se produce una deflexión en cada eslabón que se traduce en una variación de la posición de su extremo respecto a la posición calculada geoméricamente (como si fuera rígido). El fenómeno anterior combinado con la torsión que se produce en el eslabón, también genera una variación de la orientación del extremo. Sin embargo, se suponen despreciables las deformaciones producidas por los fenómenos de tracción o compresión. La Figura 2

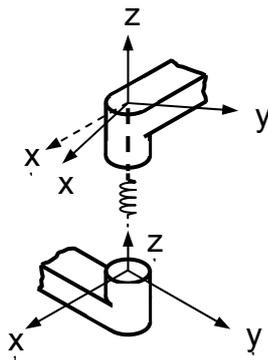


Figura 1. Flexibilidad en las articulaciones

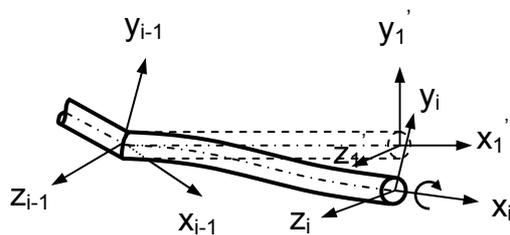


Figura 2. Flexibilidad en los eslabones

ilustra este tipo de flexibilidad. La flexibilidad en los eslabones es un problema sustancialmente más complejo que el de la flexibilidad en las articulaciones: por cada elemento flexible, en el primer caso aparecen deflexiones en dos direcciones espaciales además de la torsión de la barra mientras que en el segundo caso sólo aparece el fenómeno de torsión. En este artículo se utilizará el término de robot flexible referido sólo al caso de robots con flexibilidad en los eslabones, en concordancia con la acepción internacionalmente utilizada.

Hay un número significativo de grupos de investigación trabajando en este tema, localizados básicamente en los países más desarrollados en el campo de la robótica: Japón, Estados Unidos, Canadá, Alemania, Italia, etc. En las últimas dos décadas se han generado numerosos trabajos de investigación que cubren distintos aspectos de la robótica flexible. Este artículo no pretende realizar una revisión exhaustiva de los trabajos más

significativos en ese campo. Para esto se citan dos tutoriales de reciente aparición, que realizan un estudio exhaustivo y completo de la bibliografía existente: el trabajo de Kumar y Eberhard (2006) centrado fundamentalmente en la dinámica de estos robots – aunque también recopila trabajos en control – y el de Benosman y Le Vey (2004a) centrado en técnicas de control. También se referencia un libro reciente dedicado a robots flexibles, editado por Wang y Gao (2003), y se indica que con relativa frecuencia aparecen capítulos dedicados a este tema en libros de contenido más amplio como puedan ser la mecatrónica o el control de vibraciones y acústica (por ejemplo el editado por Tokhi y Veres (2002)).

Un objetivo de este artículo es complementar la información dada por los libros y tutoriales anteriormente mencionados. Éstos se centran fundamentalmente en el modelado dinámico y el control de posición de robots flexibles bajo la hipótesis de deflexiones geoméricamente lineales (habitualmente correcta en robots flexibles construidos con piezas metálicas). Este tutorial también describirá los aspectos más significativos del modelado dinámico y el control de posición pero con menos profundidad que los trabajos mencionados. Sin embargo, este artículo desarrollará algunos aspectos poco tratados en dichos tutoriales: 1) las nuevas aplicaciones emergentes de los robots flexibles, 2) diversas cuestiones tecnológicas vinculadas a los sensores y actuadores empleados, 3) se estudiarán los robots flexibles sometidos a grandes deflexiones, donde ya no se puede mantener la hipótesis habitual de deflexión geoméricamente lineal, 4) se tratará la evolución desde robots construidos con materiales metálicos a los construidos con materiales compuestos y 5) se discutirán las mejoras que introducen los robots flexibles en el control combinado de posición y fuerza así como en la detección de colisiones y su control bajo esta circunstancia.

La organización de este tutorial es la siguiente. La Sección 2 justifica el interés de la robótica flexible y describe sus campos de aplicación. La Sección 3 analiza los aspectos tecnológicos que diferencian a estos robots de los convencionales. La Sección 4 presenta las configuraciones mecánicas más habitualmente utilizadas en los prototipos para investigación. La Sección 5 describe el comportamiento estático (cinemática) de estos robots y la Sección 6 el comportamiento dinámico. La Sección 7 presenta las técnicas de control de posición y la Sección 8 del control de fuerza. Finalmente la Sección 9 apunta algunas conclusiones.

2. MOTIVACIÓN

Como ya se ha mencionado, la robótica flexible surge de la necesidad de construir robots de grandes dimensiones y de poco peso, con objeto de poder ser transportados, para aplicaciones aeroespaciales (ver Figura 3). Una forma de conseguir esto – además de

la solución obvia de utilizar materiales más ligeros, que a menudo no es factible – consiste en reducir la sección transversal de los eslabones del robot. Con ello se consiguen robots más “esbeltos”, pero que plantean dos problemas importantes: 1) en situaciones estáticas aparecen deflexiones que hacen que la posición final del útil instalado en el extremo del robot no sea la deseada, 2) durante el movimiento aparecen oscilaciones en el extremo del robot muy poco amortiguadas, lo cual obliga a esperar un tiempo considerable, entre la finalización de la trayectoria ordenada y la desaparición de estas

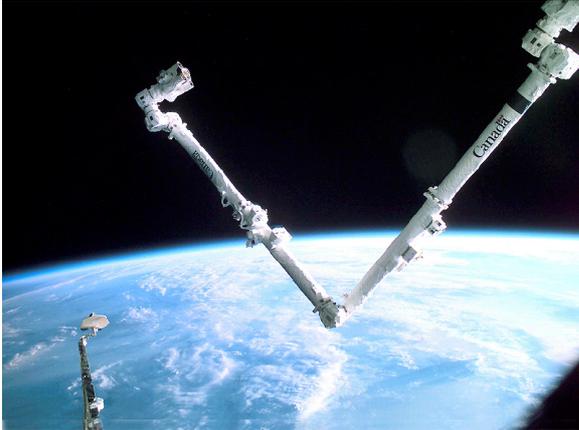


Figura 3. Manipulador remoto de la estación espacial (SSRMS)

vibraciones, para poder ejecutar una acción con el útil del robot (es como si este robot tuviera “parkinson”). Pronto se extiende este problema a aplicaciones terrestres: la Figura 4 muestra la deflexión permanente que aparece en una grúa de gran dimensión como resultado de la flexibilidad.



Figura 4. Deflexión estática producida en una grúa de grandes dimensiones como consecuencia de la carga transportada

Como consecuencia de lo anterior, la flexibilidad ha sido considerada tradicionalmente como un problema. Sus efectos deben minimizarse de la manera más eficaz posible mediante una ley de control adecuada. En los últimos 10 años se han desarrollado algunos prototipos que exploran las

posibilidades de los robots flexibles de tamaño y especificaciones industriales. La Figura 5 muestra un prototipo de robot flexible con especificaciones similares a un robot industrial Puma 560 pero que pesa la cuarta parte (Feliu y col. (2001)). El objetivo sigue siendo diseñar robots lo más ligeros posibles con objeto de 1) poder montarlos en sistemas que los transporten (carros móviles por ejemplo) y 2) aprovechar las menores inercias de estos robots para aumentar su rapidez de movimiento.



Figura 5. Robot flexible de tres grados de libertad

Sin embargo, recientemente han aparecido algunos enfoques que plantean la flexibilidad como una propiedad mecánica que puede presentar importantes ventajas en la realización de determinadas tareas, y que puede dar lugar a una nueva generación de robots con algunas prestaciones ventajosas respecto a los clásicos robots “rígidos” industriales. Algunas de estas ventajas se mencionan a continuación:

- Facilitar considerablemente las tareas de ensamblado: frente al enfoque “clásico” consistente en controlar activamente las fuerzas de reacción del entorno sobre el útil, ubicado en el extremo del robot, mediante realimentación de la información dada por sensores adicionales (de fuerza, par o visión) con objeto de modificar la posición del extremo del robot, existe la alternativa de añadir al extremo del robot una muñeca flexible (ver Figura 6) y luego acoplar a ésta el útil de trabajo. En este caso las fuerzas de reacción sobre el útil generan una deformación que hace que éste se adapte mecánicamente al entorno facilitando que, por ejemplo, un pasador se introduzca en un agujero a pesar de los pequeños errores que se puedan tener en el modelo geométrico del entorno o de los que puedan producirse en la posición del robot. Esta técnica recibe el nombre de “acomodación pasiva” y permite realizar tareas de ensamblado con un esfuerzo de control mínimo. Estas muñecas flexibles fueron desarrolladas por Whitney (1982) y han adquirido una cierta

difusión industrial. Desde el momento en que constituyen un elemento elástico que se acopla al extremo del robot, generan vibraciones en el útil (herramienta) cuando el robot se mueve, lo cual implica que el robot debe desplazarse muy despacio, o debe incorporar algún tipo de control de vibraciones. Supóngase que se acomodara el robot completo (robot flexible) en vez de la muñeca – que al fin y al cabo es sólo un elemento puntual en el extremo del robot. Entonces se potenciarían las ventajas de este proceso permitiendo rangos mucho mayores de deformación y en muchos más grados de libertad. Trabajos en esta línea son los de Matsuno y col. (1994) y García y Feliu (2000).

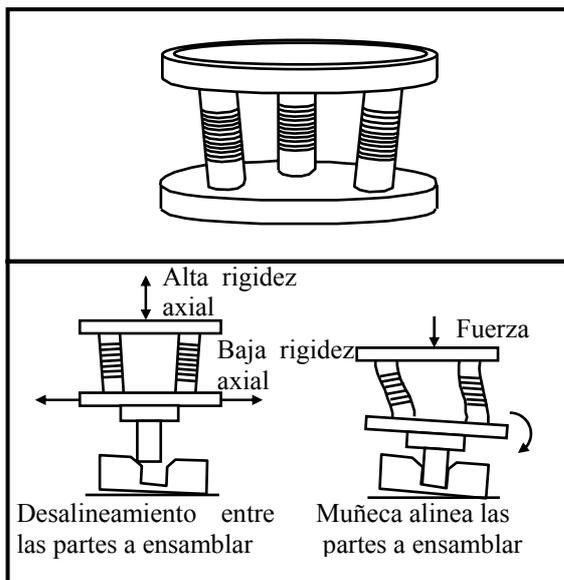


Figura 6. Mecanismo basado en acomodación pasiva para ensamblado automático

- Controlar el robot en situaciones de colisión. Una línea emergente de investigación en robótica es la de los robots que actúan coordinadamente entre sí o con seres humanos. Un problema básico en este segundo caso es garantizar la seguridad física del ser humano ante movimientos inesperados del robot. Es bien sabido que si un robot tradicional “rígido” impacta con una persona le produce daños considerables. Sin embargo, si impacta un robot flexible, los daños se reducen drásticamente ya que: 1) son robots mucho más ligeros por lo que tienen mucha menos energía cinética en el instante del impacto, 2) si un robot flexible impacta con un objeto, su energía cinética se transforma básicamente en energía potencial elástica del brazo y se minimizan los daños de la colisión, a diferencia de lo que ocurre con un robot rígido en el que su energía cinética genera un destrozo y se transforma en la energía cinética de los pedazos del objeto impactado (o del útil del extremo del robot) que salen despedidos, o se transforma en calor, 3) en el caso de impacto en un robot rígido, la fuerza de reacción en su extremo crece abruptamente en microsegundos;

sin embargo en el caso de un robot flexible, dicha fuerza de reacción crece más lentamente que en el caso anterior (debido a ese proceso de conversión de energía cinética en potencial) tomando valores de pico más pequeños y siendo dicho proceso de crecimiento de algunos milisegundos – en vez de microsegundos – lo cual permite desarrollar algoritmos capaces de detectar colisiones en tiempo real y, lo que es más importante, permite el cambio del controlador del robot desde una estrategia de control de posición a otra de control de fuerza tal que anule el efecto nocivo del impacto. Esto podría aplicarse, por ejemplo, a sillas de minusválidos que llevan montadas un robot manipulador de asistencia. Este robot podría sustituirse por un robot flexible mucho más ligero que además podría moverse mucho más deprisa al estar más controlados los efectos de los impactos. Se citan como ejemplos de este enfoque el trabajo de Lim y Tanie (1999) sobre un robot industrial rígido montado sobre una base viscoelástica que absorbe las colisiones, o el trabajo de García y col. (2003) sobre mecanismos de detección de colisiones y posteriores cambios de estrategias de control en tiempo real en robots flexibles.

- Diseñar nuevos sensores. Los insectos tienen antenas y los gatos bigotes que les permiten moverse en la oscuridad e incluso reconocer objetos sin visión. Tanto las antenas como los bigotes son varillas muy flexibles que se deforman cuando entran en contacto con un objeto. El par de deflexión en la base de la antena puede medirse con ciertos sensores y el punto de contacto del extremo de la antena puede calcularse a partir de esa medida. La Figura 7 muestra un insecto robótico que implementa esta técnica para detectar obstáculos. Existen algunos grupos investigando el diseño de este tipo de sensores, que pueden sustituir a los de visión en determinadas aplicaciones de reconocimiento de superficies. Son ejemplos los trabajos de Ueno y col. (1998), Scholz y Rahn (2004) y un proyecto reciente de Fend (2005) donde estos sensores se combinan con robots móviles.

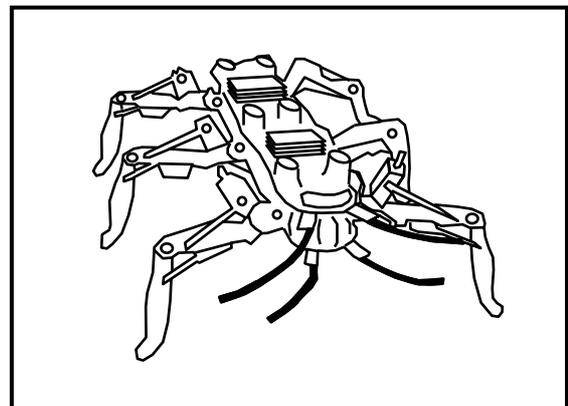


Figura 7. Insecto mecánico dotado de antenas detectoras de obstáculos

- Finalmente se cita otro campo emergente de aplicación de estas técnicas: la robótica móvil. Estos robots se construyen con materiales cada vez más ligeros, y cuando se realizan movimientos rápidos se inducen vibraciones en su estructura que pueden ser perjudiciales para la carga transportada y obligan a implantar reguladores que cancelen activamente las oscilaciones. Por ejemplo Kitagawa y col. (2002) desarrollaron un sistema de control para una silla de minusválido muy ligera donde se pretendían minimizar las vibraciones con objeto de garantizar el confort del pasajero, que a menudo tiene heridas y es muy sensible a movimientos bruscos.

3. ASPECTOS TECNOLÓGICOS

En esta sección se presentarán algunos aspectos tecnológicos que son específicos de los robots flexibles.

3.1 *Materiales utilizados en los eslabones*

Los robots flexibles se suelen construir con materiales metálicos muy ligeros (aluminio por ejemplo). Existe la alternativa de utilizar materiales compuestos, pero esta opción ha sido muy poco explorada hasta la fecha: un trabajo pionero fue el de Choi y col. (1995). Todos estos materiales presentan un amortiguamiento muy bajo para las vibraciones. Se ha investigado la introducción de elementos viscosos en el material para amortiguar pasivamente parte de las vibraciones: por ejemplo, el motor cancela activamente las oscilaciones de baja frecuencia mientras que el material absorbe las de alta frecuencia sin necesidad de realizar un control específico. De este modo también se relajan las especificaciones demandadas a los actuadores como se comentará en la siguiente subsección. Un trabajo en esta línea fue el de Shen (1994). También se está investigando el diseño de nuevos eslabones compuestos por rodajas transversales de materiales distintos de modo que éstos actúen como filtros mecánicos de determinadas frecuencias: las superficies que hacen de interfaz entre las rodajas actúan como elementos que reflejan las ondas mecánicas que se propagan por la barra (un ejemplo aplicado a estructuras tipo placa es el de Sigmund y Jensen (2003)).

3.2 *Actuadores*

Los actuadores habitualmente utilizados en robótica flexible son los motores eléctricos – igual que los empleados en la robótica industrial – o los actuadores hidráulicos para el caso de robots de grandes dimensiones. Sin embargo, estos actuadores, que cumplen adecuadamente los requerimientos de la robótica rígida convencional, algunas veces pueden limitar las posibilidades de los robots flexibles, que a menudo requieren actuadores más rápidos que los convencionales (mayor ancho de banda) para cancelar activamente dinámicas que aparecen a altas

frecuencias (vibraciones). Los robots flexibles también suelen requerir actuadores mucho más ligeros (con mayores relaciones entre la fuerza que el actuador es capaz de desarrollar y su peso). Esto abre la puerta a la utilización de nuevos actuadores en robótica, que a menudo se combinan y complementan con los clásicos. Ejemplos de este tipo son los cristales piezoeléctricos, que suministran poca energía, pero que presentan anchos de banda de kilociclos, lo cual permite cancelar vibraciones de muy altas frecuencias, mientras que el motor se encarga de mover el brazo y cancelar las vibraciones de baja frecuencia. Aplicaciones de esto son: el trabajo de Moallem y col. (2004), que combina estos cristales con motores que realizan movimientos rotacionales, o el de Dadfarnin y col. (2004), que los combinan con actuadores que generan movimientos de traslación. Otro tipo de actuadores son los tendones basados en SMA (aleaciones con memoria de forma), que presentan una relación muy alta fuerza/peso permitiendo el desarrollo de robots muy ligeros aunque de movimientos relativamente lentos (Moallem (2003) por ejemplo).

3.3 *Sistema sensorial*

La dinámica de los robots flexibles es sustancialmente más compleja que la de los robots rígidos: a la dinámica habitual del robot rígido hay que añadirle la de las oscilaciones en los eslabones causadas por la flexibilidad. Los robots convencionales usan un sensor de posición angular para cada articulación o motor. Dado que los robots flexibles suelen ser sistemas observables, podría pensarse utilizar los mismos sensores. Sin embargo, no es práctico usar la medida del ángulo de la articulación para observar las vibraciones del eslabón conectado a la misma (o para cerrar un lazo de control que cancele dichas vibraciones) ya que a menudo las articulaciones tienen reductoras que disminuyen enormemente el par de acoplamiento existente entre el motor y el eslabón, haciendo que el efecto sobre el motor de las vibraciones en el eslabón sea pequeño. Incluso en el caso de robots con motores de accionamiento directo, el efecto de las vibraciones en el ángulo del motor no es alto. Por tanto es aconsejable utilizar – además de las medidas del ángulo del motor – sensores adicionales que midan o permitan estimar las vibraciones de los eslabones más directamente.

En robótica flexible se emplean tres tipos de sensores adicionales: 1) sensores que midan la posición del extremo del robot – típicamente mediante cámaras de visión – lo cual da una medida directa de la deflexión de los eslabones del robot, 2) sensores que midan la aceleración del extremo del robot – acelerómetros – lo cual da medidas más aproximadas de las oscilaciones que los anteriores (son segundas derivadas de la deflexión respecto al tiempo) pero que, por el contrario, no sirven para corregir errores en régimen permanente, debidos por ejemplo a deformaciones plásticas en los eslabones, rozamientos de Coulomb, etc, 3) sensores que midan

los momentos en determinados puntos del eslabón – pueden ser galgas extensométricas o cristales piezoeléctricos – lo cual permite estimar la deflexión completa del eslabón. Lo habitual es que por cada eslabón se combinen las medidas de dos sensores: uno que mida la posición (velocidad) angular del motor o articulación que mueve el eslabón, y otro que mida la deflexión en una dirección, que puede ser de cualquiera de los tipos anteriormente indicados.

Los sensores de visión que miden la posición del extremo del robot son los que suministran la información más cómoda de utilizar para control (miden exactamente las variables que queremos controlar). Sin embargo, son los más caros y los menos fiables en el sentido de que en cuanto un objeto impide la visión del extremo del robot, se pierde la realimentación para el control. Los acelerómetros siempre suministran información al estar ubicados en el extremo del robot pero, como ya se ha indicado anteriormente, no detectan los errores en régimen permanente de la posición. Además están colocados en la parte más expuesta a golpes del robot, lo cual es un grave inconveniente ya que estos sensores son relativamente caros y sensibles. Las galgas extensométricas, a diferencia de los anteriores sensores, permiten determinar tanto transitorios como errores en régimen permanente, son muy baratas, robustas, y se colocan en puntos próximos a la base del robot (que son los que experimentan los máximos momentos y que por tanto dan la máxima precisión en la medida) por lo que están muy poco expuestas a golpes. Sin embargo, la medida de la galga es ruidosa y puede presentar un nivel continuo de tensión (offset) que, además, puede variar ligeramente con el tiempo.

Existe abundante literatura sobre experiencias de control realizadas con los tres tipos de sensores. Es criterio del diseñador elegir en cada caso la combinación de sensores más adecuada a las especificaciones del robot a construir.

4. CONFIGURACIONES MECÁNICAS

En este apartado se describirán las configuraciones mecánicas más utilizadas en robótica flexible. Debe indicarse que a menudo se combinan eslabones rígidos con otros flexibles para construir el robot.

La revisión de la literatura científica sobre este tema indica que más del 85% se centra en robots de un grado de libertad, un 10% en los robots de dos grados de libertad, y hay comparativamente muy pocos trabajos sobre robots con tres grados de libertad y todos sus eslabones flexibles. Los grados de libertad adicionales asociados a la orientación del extremo suelen conseguirse mediante mecanismos rígidos.

4.1 Robots de un grado de libertad

La mayoría de estos prototipos son de tipo rotatorio: se controla el ángulo de la posición del extremo del

robot en un plano mediante una articulación de tipo rotacional. Además, este plano suele ser horizontal. A menudo el robot está flotando sobre una mesa de aire, como se muestra en la Figura 8, que presenta un prototipo desarrollado por Payo y col. (2005). También hay robots con el eslabón en voladizo. En este caso la sección transversal de la barra es rectangular con un lado significativamente mayor que el otro para que la deflexión aparezca sólo en la dirección del movimiento (ver Figura 9).



Figura 8. Robot flexible de un grado de libertad construido con material compuesto y apoyado sobre una mesa de aire

Los tres tipos de sensores de deflexión detallados en la sección anterior han sido utilizados en robots de un grado de libertad. Un ejemplo de robot flotando en una mesa de aire donde se utiliza un sensor óptico para medir vibraciones del extremo y realimentar el sistema de control es el trabajo pionero de Cannon y Schmitz (1984). En el prototipo de la Figura 8 se ha optado por realimentar medidas de deflexión a partir de galgas colocadas en la base del eslabón. En el trabajo de Wang y Vidyasagar (1992) se mide la posición del extremo del robot mediante una cámara de visión colocada en su base apuntando hacia el extremo, que se mueve solidariamente con el eje de giro de la articulación.

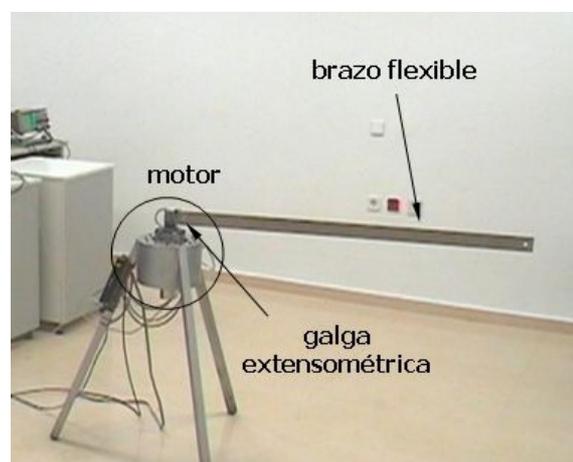


Figura 9. Robot flexible de un grado de libertad construido con aluminio y montado en voladizo

4.2 Robots de dos grados de libertad

Existe mayor variedad de prototipos con esta configuración. Algunos se mueven en el plano vertical (Cheong y col. (2004)) y otros en el plano horizontal. Estos últimos pueden estar completamente apoyados en una mesa de aire como en el trabajo de Carusone y col. (1993) (ver Figura 10), semiapoyados como en el de Yang y col. (1997) (ver Figura 11) o completamente en voladizo como en una configuración SCARA típica (por ej. Nicosia y col (1996)). Al tratarse de eslabones muy ligeros y flexibles, la instalación del motor que mueve el segundo eslabón sobre la articulación correspondiente puede provocar deflexiones indeseadas en el primer eslabón – montado sobre la base del robot – y puede obligar a sobredimensionar el actuador de la base que, además de mover todo el brazo, debe mover dicho segundo actuador. Este sobredimensionamiento afecta poco a un robot

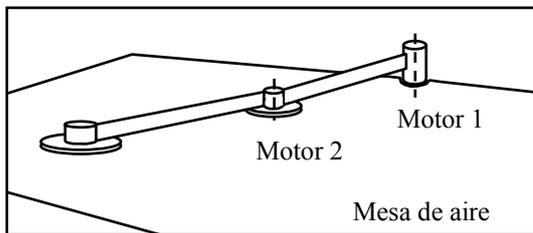


Figura 10. Robot flexible de dos grados de libertad montado sobre una mesa de aire

rígido, pero supone un problema en el diseño de los robots flexibles, donde se pretende reducir el peso a base de aligerar los eslabones, lo cual permite a su vez reducir la potencia y el tamaño de los actuadores. Este problema puede resolverse montando los dos motores en la base del robot y transmitiendo el movimiento del segundo motor a la segunda articulación a través de una cadena cinemática de tipo cuadrilátero articulado. También se indica que existen prototipos

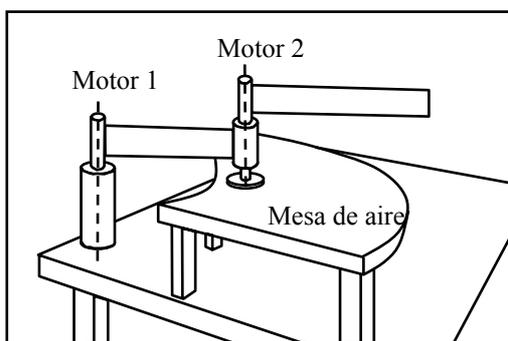


Figura 11. Robot flexible de dos grados de libertad semiapoyado en una mesa de aire y con un eslabón en voladizo

que utilizan diversas combinaciones de los sensores indicados en la sección anterior. Finalmente se menciona la existencia de diseños híbridos donde el primer eslabón es rígido y el segundo flexible: por ejemplo Low y Vidyasagar (1988).

4.3 Robots de tres grados de libertad

Existen muy pocos prototipos de esta clase. Suelen tener dos articulaciones rotacionales que sitúan el extremo del robot en un punto de un plano vertical, además de una tercera también rotacional, situada en la base del robot, que realiza un giro horizontal de dicho plano vertical. Se mencionarán dos configuraciones básicas.

La primera consiste en el robot flexible de dos eslabones con los motores montados en las articulaciones y se muestra en la Figura 12. Esta configuración plantea el problema de que el motor que debe levantar todo el robot, que está situado en la base (motor 2 en la figura), además debe levantar al motor que mueve el segundo eslabón (motor 3 en la figura). Para evitar el sobredimensionamiento del motor 2, se pone un contrapeso en el primer eslabón, que añade un peso innecesario al robot. Un ejemplo de esta configuración es el prototipo de Yoshikawa y Hosoda (1996a).

La segunda configuración consiste en montar todos los motores en la base y transmitir el movimiento a la segunda articulación a través del ya mencionado mecanismo del cuadrilátero articulado. En este tipo de configuración sólo se mueve la masa estrictamente necesaria: la de los eslabones y la carga útil, permitiendo un dimensionado más adecuado de los actuadores. Sin embargo, aparece un problema menor, que es la necesidad de una serie de articulaciones pasivas para el mecanismo de transmisión. Éstas deben comportarse del modo más ideal posible (por ej. que tengan rozamiento casi nulo) y pueden suponer algún peso adicional en la estructura. Esta configuración ha sido estudiada por Feliu y col. (2001) y se muestra en la ya mencionada Figura 5.

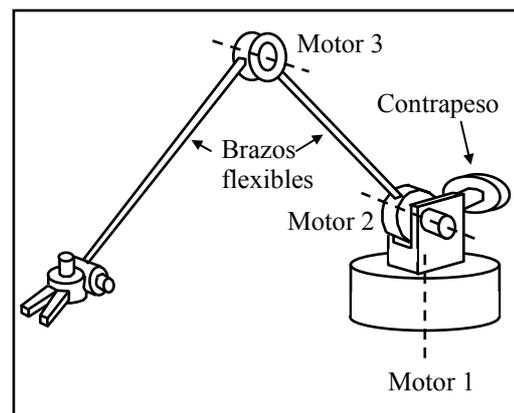


Figura 12. Robot flexible de tres grados de libertad tipo "flexo"

4.4 Macro/mini Robots

También existen robots compuestos de una parte rígida y otra flexible, que intentan combinar las virtudes de ambos tipos de mecanismos. Son robots de grandes dimensiones que requieren realizar manipulaciones de elevada precisión. En este caso se construye un robot flexible de grandes dimensiones y en su

extremo libre se acopla un pequeño manipulador rígido mucho más rápido y preciso que el primero. En el otro extremo de ese manipulador rígido se instala la pinza o el útil. Al ser el manipulador rígido más rápido que la dinámica del brazo flexible, corrige las vibraciones que se producen en el extremo del brazo flexible de modo que su otro extremo donde está instalada la pinza se queda quieto. Un trabajo pionero con un robot de tamaño industrial fue el de Yoshikawa y col. (1996b). Otro posterior con un robot de grandes dimensiones fue la tesis doctoral de Schubert, H. (2000).

5. COMPORTAMIENTO ESTÁTICO

5.1 Deflexión de una barra

La deflexión de una barra elástica viene dada por la conocida ecuación general de la flexión de Euler-Bernouilli:

$$\frac{d\theta}{ds} = -\frac{M(s)}{E \cdot I} \tag{1}$$

donde θ es el ángulo de la recta tangente a la barra en un punto, s es la longitud del arco, M es el momento flector, E es el módulo de Young e I es el momento de inercia de la sección de la barra. El caso más simple es suponer que la barra flexa en el plano horizontal como consecuencia de aplicar una fuerza en el extremo (ver Figura 13), pero pueden considerarse casos más complejos como el de la barra sometida – además de a una fuerza – a un momento de dirección arbitraria en el extremo, o incluso el efecto de la gravedad: la fuerza que genera la flexión se reparte a lo largo de toda la barra ya que es debida a su peso, que se halla distribuido por toda su longitud.

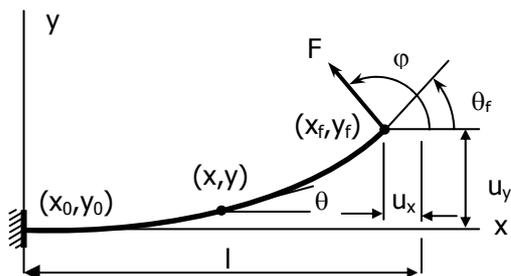


Figura 13. Deflexión estática de una barra empotrada por un extremo y sometida a una fuerza en el otro

Incluso en el caso más simple de los expuestos anteriormente, la ecuación (1) no puede resolverse de forma exacta analíticamente ya que requiere el cálculo de algunas integrales elípticas. Algunos trabajos evalúan la deflexión en las barras (eslabones) mediante métodos de integración numérica. Se citan como ejemplos los trabajos de Wang (1981) y de Beléndez y col. (2002) para barras de sección transversal fija y el trabajo de Lee (1993) para barras con sección transversal variable. Estos

cálculos suelen simplificarse en robótica flexible: se hace la hipótesis de que se producen pequeñas deflexiones lo cual implica que la longitud del arco s se aproxima por la variable de abscisas x , y el ángulo θ por la pendiente de la curva: dy/dx (ver Figura 13). Entonces la ecuación (1) queda de la forma:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{M(x)}{E \cdot I} \tag{2}$$

que da lugar a un modelo geoméricamente lineal el cual, además, proporciona modelos dinámicos también lineales para cada eslabón. Sin embargo, sólo es válida para robots flexibles que presentan pequeñas deformaciones, normalmente contruidos con materiales metálicos. Los robots de materiales compuestos con secciones transversales muy pequeñas pueden experimentar grandes deformaciones, no admiten aproximaciones lineales y requieren el empleo de la ecuación (1) mediante aproximaciones numéricas, por ej. en Payo y col. (2005).

La ecuación de Euler-Bernouilli de la barra de la Figura 13 se normaliza definiendo la fuerza equivalente $F_n = F \cdot l^2 / (E \cdot I)$, que es un indicador directo de la deflexión experimentada. La Figura 14 muestra una clasificación de robots flexibles en función de las fuerzas normalizadas que experimentan éstos en su movimiento habitual, estimadas a partir de los datos aportados en la literatura científica. Se establecen tres categorías de acuerdo con el rango de la deflexión experimentada por los eslabones: 1) valores de $F_n < 0.5$ que corresponden con robots contruidos de materiales metálicos donde la aproximación lineal (2) de la deflexión es válida, 2) valores $0.5 < F_n < 3$ que corresponden a robots contruidos con materiales compuestos (muy escasos) en los que la aproximación (2) ya no es válida, y 3) valores $3 < F_n < 12$ que corresponden con antenas y sensores de proximidad que por diseño deben ser extremadamente flexibles. Los rangos definidos son orientativos y en la izquierda de la figura se mencionan como ejemplos algunos de los prototipos ya citados en este artículo.

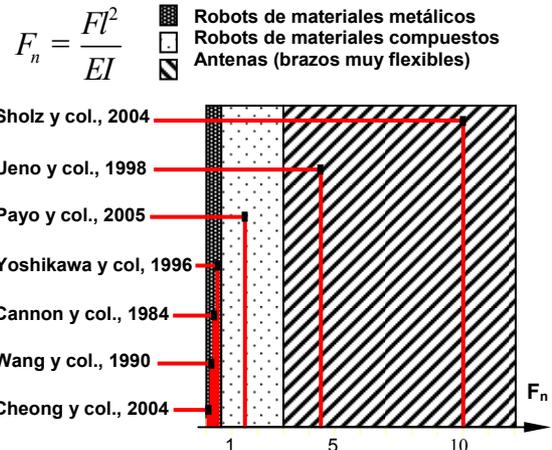


Figura 14. Clasificación de robots flexibles por el grado de deflexión

5.2 Deflexión de una cadena cinemática (brazo)

Se sabe que la transformación cinemática de un robot rígido de n eslabones viene dada por un producto de n matrices homogéneas A_i , que dependen cada una de ellas del valor θ_i del ángulo o traslación de la articulación que representan:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ \underline{\Delta X} \end{pmatrix} = A_1(\theta_1) \cdot A_2(\theta_2) \cdots A_n(\theta_n) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (3)$$

donde $\underline{0}$ es un vector columna de ceros de dimensión 3 y $\underline{\Delta X}$ es el vector de posición del extremo del robot. La generalización de esta expresión incluyendo la flexibilidad es:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ \underline{\Delta X} \end{pmatrix} = A_1(\theta_1) \cdot E_1(\underline{F}_1, \underline{M}_1) \cdots A_i(\theta_i) \cdot E_i(\underline{F}_i, \underline{M}_i) \cdots \\ \cdots A_n(\theta_n) \cdot E_n(\underline{F}_n, \underline{M}_n) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (4)$$

En esta expresión las matrices E_i vienen dadas por:

$$E_i(\underline{F}_i, \underline{M}_i) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \Delta x_i & 1 & -\text{sen}(\theta_i^z) & \text{sen}(\theta_i^y) \\ \Delta y_i & \text{sen}(\theta_i^z) & 1 & -\text{sen}(\theta_i^x) \\ \Delta z_i & -\text{sen}(\theta_i^y) & \text{sen}(\theta_i^x) & 1 \end{pmatrix} \quad (5)$$

donde Δx_i , Δy_i y Δz_i son las desviaciones del extremo del eslabón i respecto a su posición si fuera rígido, en coordenadas relativas a los ejes coordenados (X_i , Y_i , Z_i) asociados al eslabón i , y θ_i^x , θ_i^y y θ_i^z son los ángulos de rotación respecto a dichos ejes respectivamente. Si se hace la hipótesis de que la masa de los eslabones es despreciable y toda la masa del robot se concentra en las articulaciones, entonces todas estas magnitudes son combinación lineal de la fuerza equivalente F_i y del momento equivalente M_i que actúan sobre el extremo del eslabón i (Book (1979)).

Las expresiones anteriores muestran que el modelo cinemático depende de la deflexión del brazo a través de las matrices E_i que son función de la fuerza y el momento aplicados en el extremo de cada eslabón. Dichas fuerzas y momentos dependen a su vez de la deflexión de la cadena (las únicas fuerzas y momentos fijos son los aplicados en la carga del robot cuando generan la deflexión del último eslabón) por lo que es necesario realizar un proceso numérico iterativo para calcular el modelo cinemático directo del robot, a diferencia de lo que sucede en la robótica convencional, donde los modelos cinemáticos directos se calculan de forma simple a partir de la expresión (3). Obviamente, las transformaciones inversas son más complicadas y su cálculo también requiere de procesos iterativos.

6. MODELOS DINÁMICOS

Los robots flexibles cuyos eslabones tienen su masa distribuida a lo largo de su extensión presentan infinitos modos de vibración. Afortunadamente, la amplitud de estos modos va disminuyendo de forma drástica a medida que aumenta su frecuencia. Esto permite aproximar la dinámica total por modelos de orden reducido que sólo recogen los primeros modos de vibración – los de frecuencias más bajas – que además suelen ser los más significativos. Existen tres formas de llegar a modelos reducidos: 1) por métodos numéricos basados en la técnica de los elementos finitos, 2) por la técnica de las masas concentradas, que consiste en aproximar la masa del eslabón, que está distribuida a través de toda su longitud, por un conjunto de masas concentradas en determinadas posiciones del eslabón, y 3) mediante la obtención de los modos de vibración a partir de la solución general de la ecuación diferencial que describe la dinámica del robot y su posterior truncamiento reteniendo los estados que describen los aspectos más significativos de la dinámica del brazo. Los modelos dinámicos también se estudiarán en dos etapas. Primero se considerará la dinámica de un eslabón y luego la del brazo completo, resultado de agregar varios eslabones.

6.1 Eslabón con un actuador rotacional

La dinámica de estos brazos se representa mediante modelos lineales de orden elevado que presentan modos de vibración muy poco amortiguados.

Ejemplos significativos de modelado de estos robots por elementos finitos son: Bayo (1987), Tokhi y col. (2001), y Lee y Wang (1988) (este último modela los movimientos del brazo en el espacio 3D).

En cuanto a la técnica de modelado a partir de la hipótesis de masas concentradas, se citan los trabajos de Simo y Vu-Quoc (1986a y b), Feliu y col. (1992) y Zhu y col. (1999). Como ejemplo de aplicación, supóngase el caso más sencillo: un eslabón que se mueve en un plano horizontal cuya masa es despreciable comparada con la carga que transporta (como en la Figura 8). Se puede realizar la hipótesis de que la masa está concentrada en el extremo, y si además se asume que la masa es puntual (su momento de inercia es despreciable respecto al eje vertical), esta técnica conduce al modelo:

$$\begin{pmatrix} \theta_m(s) \\ \theta_i(s) \\ \Gamma_c(s) \end{pmatrix} = \frac{\begin{pmatrix} n(s^2 + \omega_0^2) \\ n\omega_0^2 \\ cns^2 \end{pmatrix} \cdot \Gamma_m(s)}{s(Jn^2s^3 + \nu n^2s^2 + (Jn^2\omega_0^2 + c)s + \nu n^2\omega_0^2)} \quad (6)$$

donde: Γ_m es el par motor, θ_m y θ_i son respectivamente los ángulos del motor (visto a la salida de la reductora) y del extremo, Γ_c es el par de acoplamiento

entre la barra y el motor (par en la base del eslabón), n es la relación de reducción de la reductora del motor, J es la inercia conjunta del eje del motor y la reductora, v es el rozamiento viscoso del motor, ω_0 es la frecuencia natural de vibración de la barra, supuesta empotrada por el extremo conectado al motor, y c es una constante de elasticidad.

La dinámica recogida en la ecuación (6) se suele representar mediante dos diagramas de bloques. El primero consiste en representar directamente el sistema (6) en un bloque con una entrada Γ_m y las tres salidas θ_m , θ_t y Γ_c . El segundo se muestra en la Figura 15 y divide al sistema total en dos subsistemas: el subsistema motor y el subsistema eslabón. Ambos subsistemas están interconectados tal como se muestra en la figura, y las funciones de transferencia de cada bloque se obtienen de la manipulación de la ecuación (6). Ambos esquemas se pueden generalizar para robots flexibles de un grado de libertad y varios modos de vibración. También se pueden usar para robots flexibles de varios grados de libertad, con la diferencia de que ya no se manejarán funciones de transferencia sino ecuaciones diferenciales al tratarse de sistemas no lineales. Como se verá en la sección siguiente, cada uno de estos esquemas permite desarrollar metodologías distintas para el diseño de los sistemas de control.

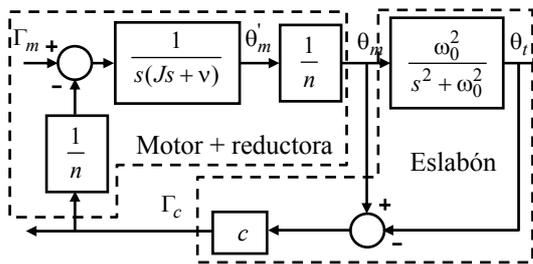


Figura 15. Descomposición en subsistema motor y subsistema eslabón flexible de un robot con una masa concentrada en el extremo

La tercera técnica se basa en resolver la ecuación de Euler-Bernouilli, que tiene la siguiente forma:

$$EI \left(\frac{\partial^4}{\partial x^4} y(x,t) \right) - C_a \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} V_a(x,t) \right) + \rho A \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} y(x,t) \right) = 0 \quad (7)$$

para la barra mostrada en la Figura 16. La barra de esta figura tiene dos actuadores: un motor que genera los movimientos y un cristal piezoeléctrico que se utiliza para cancelar vibraciones. En la ecuación (7), $V_a(x,t)$ es el voltaje aplicado al piezoeléctrico, C_a es la constante que relaciona el voltaje con el par generado por el piezoeléctrico, ρ es la densidad de la barra y A es el área de la sección transversal.

Resolviendo esta ecuación se obtiene la deformación elástica total $w(x,t)$ como la suma de los productos

de las funciones de forma $\Phi_i(x)$ por las variables dinámicas $\delta_i(t)$ asociadas a cada modo de vibración:

$$w(x,t) = \sum_{i=1}^{\infty} \Phi_i(x) \cdot \delta_i(t) \quad (8)$$

Entre los numerosos trabajos basados en esta técnica, se citan dos en particular. El primero es el de Bellezza y col. (1990) aplicado a una barra con un motor como único actuador. Se obtiene un modelo dinámico lineal (ecuaciones de estado lineales invariantes) mediante la determinación de los modos de vibración y posterior truncamiento que retiene los modos más significativos. El segundo trabajo es el de Pota y Alberts (1995) donde se establece un modelo exacto de orden finito de una lámina flexible, que también es lineal pero donde las funciones de transferencia son irracionales en s . Este último trabajo se realiza sobre la barra mostrada en la Figura 16 con los dos actuadores, y con un acelerómetro en el extremo como sensor. Para poder manejar estas expresiones se realiza un desarrollo en serie de Laurent de los términos irracionales en s seguido de un truncamiento de los mismos. Como resultado se llega también a un modelo dinámico aproximado racional pero diferente al de Bellezza y col.

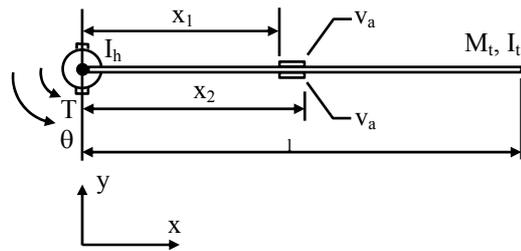


Figura 16. Barra con dos actuadores: motor y cristal piezoeléctrico

A continuación se desarrolla un ejemplo que ilustra la dinámica de estos robots. Sea un brazo con las características descritas en la Tabla 1 (que corresponden al robot de la Figura 9), al que se implanta un control de posición del ángulo del motor mediante un regulador PD con realimentación de dicho ángulo (control típico en robots industriales). La Figura 17 muestra la respuesta en frecuencia existente entre el ángulo del motor θ_m y el extremo θ_t . Se aprecian tres picos de resonancia correspondientes a los tres modos de vibración significativos en este brazo. Obsérvese que esta función de transferencia valdría 1 (y no habría resonancias) en el caso de un robot rígido, y su respuesta en frecuencia coincidiría con la de la figura a muy bajas frecuencias. La Figura 18 muestra la respuesta del brazo controlado por el PD ante una consigna tipo escalón. Obsérvese la vibración que aparece en el extremo del robot: la medida del ángulo del extremo permite caracterizar bien el primer modo de vibración, mientras que los otros dos modos de orden superior apenas se aprecian. La Figura 19 muestra una medida de la aceleración en el extremo: se observan de forma más nítida los modos superiores de vibración. Esto sugiere que es conveniente utilizar sensores que midan la segunda derivada de la

deflexión (como son los acelerómetros o las galgas extensométricas) para poder apreciar y realimentar los modos superiores de la dinámica del brazo.

Tabla 1. Características geométricas y mecánicas del robot flexible de la Figura 9

Módulo de elasticidad (N/m ²)	E	0.72×10^{11}
Momento de inercia de la sección (m ⁴)	I	3.33×10^{-11}
Área de la sección (m ²)	A	1×10^{-4}
Ancho (m)	H	0.05
Espesor (m)	B	0.002
Longitud (m)	L	1.30
Densidad de masa (kg/m ³)	ρ	2590
Inercia motor + reductora (kg·m ²)	J₀	0.63
Masa del extremo (kg)	M_P	0.6734
Constante electromecánica (N/A)	K	0.158

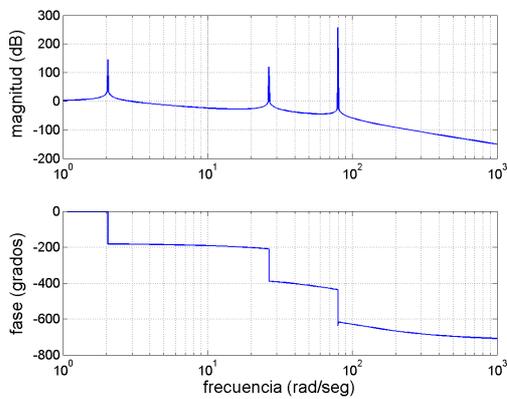


Figura 17. Respuesta en frecuencia del brazo entre el ángulo del extremo y el ángulo del motor

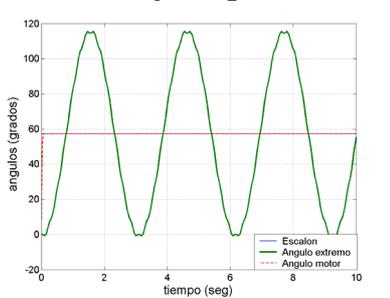


Figura 18. Respuesta del extremo del brazo ante un escalón en la consigna para el ángulo del motor

6.2 Robots de varios eslabones

En estos casos también se realizan expansiones modales seguidas de truncamientos. Algunos trabajos son: el de DeLuca y Siciliano (1991) para robots planos, el de Pedersen y Pedersen (1998) que establece un modelo para robots flexibles 3D, y el de Schwertassek y col. (1999) que discute la elección de las funciones de forma.

Las deflexiones se calculan a partir de la expresión:

$$w_i(x, t) = \underline{\Phi}_i^T(x) \cdot \underline{\Delta}_i(t), \quad 1 \leq i \leq n \quad (9)$$

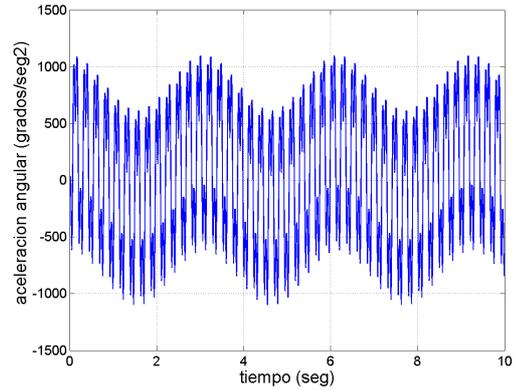


Figura 19. Aceleración del extremo del brazo ante un escalón en la consigna para el ángulo del motor

(ver por ejemplo Benosman y Le Vey (2004a)) donde ahora i indica el número de eslabón, n el número total de eslabones, $\underline{\Phi}_i(x)$ es un vector columna con las funciones de forma del eslabón (una asociada a cada modo considerado), $\underline{\Delta}_i(t) = (\delta_{1i}(t) \delta_{2i}(t) \dots \delta_{mi}(t))^T$ es otro vector columna que representa la dinámica de cada modo y T denota transpuesta. Se han supuesto m modos de vibración en cada eslabón, aunque podrían haberse considerado diferentes números de modos en los distintos eslabones.

Las ecuaciones dinámicas totales del brazo se calculan utilizando el conocido método de Lagrange:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} - \frac{\partial L}{\partial q_k} + \frac{\partial D_R}{\partial \dot{q}_k} = u_k \quad (10)$$

donde L es el lagrangiano definido como $L = E - P$, siendo E la energía cinética total del robot y P la energía potencial total. Esta expresión es similar a la que se utiliza para robots rígidos, pero en este caso la energía potencial es la suma de los términos debidos a la gravedad y a la deformación elástica del robot. El término D_R es la función de disipación de Rayleigh, que permite incluir en la expresión general efectos disipativos tales como rozamientos, y u_k es la fuerza generalizada que actúa sobre la variable generalizada q_k . Operando la fórmula (10), utilizando como variables generalizadas q_k los modos $\delta_{ji}(t)$, $1 \leq j \leq m$, $1 \leq i \leq n$ considerados en cada eslabón – además de las variables habituales en robots rígidos, que son las correspondientes a las articulaciones del robot –, observando que las fuerzas generalizadas u_k vale cero cuando se aplican a una variable generalizada tipo modo de deflexión, y teniendo en cuenta que las expresiones tanto de la energía cinética total como la potencial debida a la gravedad se ven modificadas por las deflexiones que aparecen, resulta la siguiente expresión (ver por ejemplo el capítulo 1 de Wang y Gao (2003), desarrollado por Arteaga y Siciliano) que describe la dinámica de estos robots:

$$\begin{aligned} I(\underline{Q}) \cdot \ddot{\underline{Q}} + b(\underline{Q}, \dot{\underline{Q}}) + K(\underline{Q}) \cdot \underline{Q} + D \cdot \dot{\underline{Q}} + g(\underline{Q}) = \\ = F \cdot \underline{\Gamma} \end{aligned} \quad (11)$$

donde $\underline{Q} = (\theta_1 \dots \theta_n | \underline{\Delta}_1^T \dots \underline{\Delta}_n^T)^T$ es el vector de coordenadas generalizadas que incluye un primer bloque con los ángulos θ_i de las articulaciones (parte rígida del modelo) y los valores de las deflexiones $\underline{\Delta}_i$ de todos los eslabones; \underline{I} es un vector de pares motores en las articulaciones, I es la matriz de inercias de los eslabones y la carga del robot, que es simétrica definida positiva, b es el vector que representa las fuerzas centrífugas y de Coriolis ($b = \beta(\underline{Q}, \underline{\dot{Q}})$), K es la matriz de rigidez, D es la matriz de rozamientos, g es el vector de la gravedad y F es la matriz de conexión de las articulaciones con el mecanismo.

La ecuación (11) presenta una estructura similar a la de la dinámica de un robot rígido salvo que aparece un término de elasticidad ($K(\underline{Q})\underline{Q}$) y que el vector de variables de las articulaciones se ve ampliado por los vectores indicadores de la deflexión de cada eslabón. Esta ecuación dinámica presenta además la peculiaridad de que, por lo general, una parte de su dinámica inversa es inestable (o que la ecuación (11) es de fase no mínima en el caso de modelos linealizados). La única excepción a esto último sucede cuando se supone que toda la masa del robot está concentrada en un punto en el extremo. Esto constituye un problema importante a la hora de diseñar leyes de control porque la dinámica no es exactamente invertible, lo cual dificulta: 1) el diseño de prealimentaciones que permitan el seguimiento exacto de trayectorias, 2) el desarrollo de algoritmos de control basados en la cancelación de las componentes no lineales por inversión del modelo dinámico, 3) el empleo de ganancias altas en los reguladores para aumentar la precisión (ganancias altas inestabilizan el sistema).

Finalmente se menciona el fenómeno del “spillover” (por ejemplo Balas (1982)), causado por los modos de vibración de alta frecuencia truncados al obtener el modelo (11). Si no se tienen en cuenta al diseñar los reguladores, existe la posibilidad de que se realimenten al cerrar el lazo de control y se amplifiquen en los controladores pudiendo producir inestabilidades.

7. CONTROL DE POSICIÓN

Se analizan dos enfoques: el control en cadena abierta y el control en cadena cerrada. Ambos son complementarios ya que a menudo se combinan para conseguir el control eficiente de la posición del extremo de los robots flexibles: el primero permite realizar trayectorias rápidas y precisas mientras que el segundo corrige en tiempo real los errores de seguimiento causados por perturbaciones no consideradas o imprecisiones en el modelado de la dinámica del robot.

7.1 Control en cadena abierta (prealimentación)

Dada una trayectoria deseada para el extremo del brazo, la idea básica que se desarrolla en este

apartado consiste en pasar dicha trayectoria por un filtro que “elimine” las componentes armónicas que excitan los modos de vibración de los eslabones. La salida de dicho filtro se utiliza como señal de mando para el robot. Sobre esta idea se han desarrollado tres grupos de técnicas que se mencionan a continuación.

El primer grupo de técnicas calcula fuera de línea la señal de mando que se aplica al robot, a partir de la trayectoria deseada. Se basa en la inversión del modelo dinámico del robot, lo cual suele dar lugar a un nuevo modelo dinámico con una parte no causal o inestable. Esto último impide que estos métodos se puedan utilizar para generar trayectorias en tiempo real. Trabajos desarrollados en esta línea son los de Bayo (1987), Kwon y Book (1994) y Aoustin y Formalsky (1997) para robots de un grado de libertad, y Benosman y col. (2004b) para robots planos de varios grados de libertad.

La segunda técnica consiste en realizar una convolución de la trayectoria con ciertos impulsos generados en instantes calculados, de modo que la vibración se anule una vez terminada la trayectoria. El desarrollo básico se describe en Singer y Seering (1990), y su principio se ilustra en la Figura 20 para el caso de un robot de un grado de libertad y con un modo de vibración. La señal de mando es un escalón en el ángulo del motor y la figura muestra cómo evoluciona el ángulo del extremo sin ninguna prealimentación y aplicando este método. En este ejemplo esta técnica convierte el escalón inicial en dos escalones superpuestos, cada uno con amplitud mitad de la del original, estando el segundo retardado respecto al primero. Obsérvese como con esta simple modificación de la referencia se cancela la vibración residual. En los últimos 15 años esta técnica ha experimentado diversas variaciones que la han generalizado a varios modos de vibración y la han hecho más robusta. Se citan como ejemplos los trabajos de Mohamed y col. (2005) y Shan y col. (2005). También esta técnica se ha aplicado con éxito a otras máquinas que presentan vibraciones (Peláez y col. (2005)).

La tercera técnica fue desarrollada por Feliu y Rattan (1999a) y se aplica a robots de un grado de libertad. Consiste en pasar la trayectoria deseada por un filtro que “casi invierte” el modelo dinámico discretizado del robot: su numerador es el denominador de la función de transferencia discreta.

Así como la primera técnica calcula las trayectorias con antelación a la ejecución del movimiento, la segunda y la tercera pueden generar trayectorias en tiempo real. Sin embargo, la primera técnica da lugar a seguimientos casi exactos de trayectorias mientras que las otras dos sólo garantizan la cancelación de vibraciones una vez alcanzada la posición final.

7.2 Control en cadena cerrada (realimentación)

Se contemplan tres enfoques en función de la utiliza-

ción del modelo dinámico (11) en el diseño de los reguladores.

El primero – y más habitual – maneja directamente la ecuación (11), diseñando reguladores multivariables para el sistema completo. Un esquema general se muestra en la Figura 21.

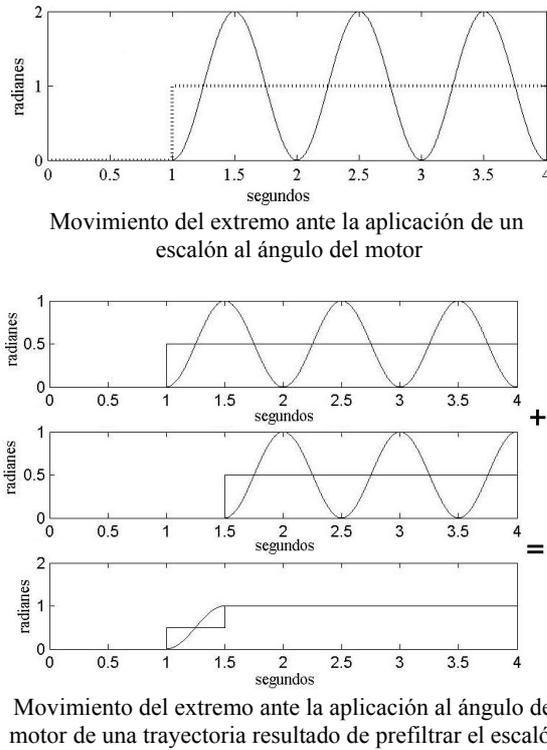


Figura 20. Ilustración de la técnica de convolución (input pre-shaping technique)

El segundo enfoque consiste en utilizar la teoría de los sistemas singularmente perturbados (ver Kokotovich (1984) por ejemplo). En este caso se fracciona el modelo (11) en dos modelos correspondientes a un subsistema lento y otro rápido. El control de la dinámica rápida se calcula bajo la hipótesis de una situación cuasiestática de la dinámica lenta (ver por ej. Siciliano y Book (1988)).

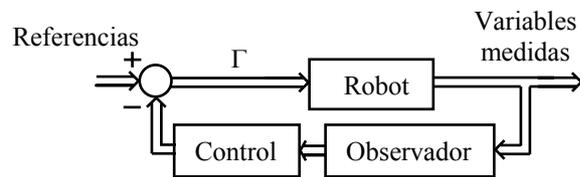


Figura 21. Control por realimentación del estado

El tercer enfoque divide la dinámica del robot en dos subsistemas: uno formado por la dinámica de los n actuadores, y otro por la dinámica del brazo. Las salidas del primer subsistema constituyen las entradas del segundo. A su vez, el segundo subsistema influye sobre el primero a través del par de acoplamiento existente en la base de cada eslabón. Esta división

corresponde a la mostrada en la Figura 15 para un robot de un grado de libertad. Dado que los eslabones se acoplan a los actuadores a través de reductoras, estos pares de acoplamiento suelen tener un efecto pequeño sobre la dinámica de los motores. Esto permite a menudo suponer que el primer subsistema está formado por una serie de n funciones de transferencia de segundo orden (dinámicas lineales) desacopladas entre sí. Un ejemplo de aplicación de este enfoque a un robot de tres grados de libertad se muestra en Feliu y col. (2003), y da lugar a esquemas de control basados en dos bucles anidados. La Figura 22 representa genéricamente estos controles y muestra un esquema multivariable con dos bucles de control anidados: el primero – que suele ser el más rápido – es un servo clásico de posición de los motores; el segundo tiene como función anular las vibraciones. En esta figura se supone que la influencia del brazo sobre la dinámica de los actuadores es nula, ya sea porque las relaciones de reducción de las reductoras son altas o porque dicho efecto se cancela mediante una compensación en el motor del par de acoplamiento motor-eslabón. Esto es fácil de implementar mediante la inyección de señales medidas por galgas extensométricas colocadas en la base de cada eslabón.

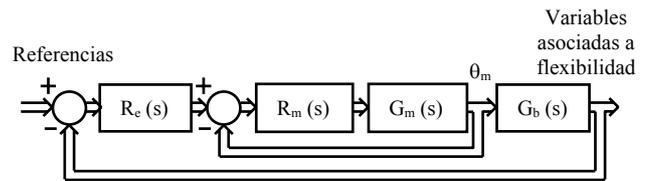


Figura 22. Esquema de control con dos bucles anidados: bucle interno rápido para el motor y bucle externo lento para el eslabón

Este último esquema presenta algunas ventajas metodológicas en el diseño de estos sistemas de control, ya que: 1) el bucle interno es el control típico de los robots industriales por lo que si se detectaran vibraciones en éstos, este enfoque indicaría cómo cerrar un lazo externo para cancelarlas, con sensores adicionales sin necesidad de modificar el control de posición industrial, 2) permite diseñar el sistema de control en dos etapas diferenciadas y con objetivos distintos, primero se diseña el lazo interno para mover el motor corrigiendo los efectos de las fricciones, y luego se diseña el lazo externo – que es más complejo – para cancelar las vibraciones; dado que es fácil diseñar un bucle interno estable y robusto, los riesgos de inestabilización del conjunto se reducen con esta metodología, 3) permite compensar mejor rozamientos y no linealidades de los actuadores, ya que éstos se corrigen a nivel del lazo interno y este problema se desacopla del problema principal de cancelar las vibraciones (Feliu y col. (1992)).

Existen numerosas propuestas para controlar robots flexibles (se referencia de nuevo la recopilación de Benosman y Le Vey (2004a)). Aquí se darán unas pinceladas de las técnicas más utilizadas, que pueden

usarse en combinación con cualquiera de los tres enfoques generales descritos anteriormente:

- *Control clásico con reguladores PID o redes de adelanto-atraso de fase.* Ejemplos son los trabajos de De Luca y Siciliano (1993) y Feliu y col. (2001).
- *Control por realimentación del estado.* El trabajo de Geniele y Patel (1997) es un ejemplo de asignación de polos y el de Cannon y Schmitz (1984) es un clásico de control óptimo.
- *Control robusto.* Se citan como ejemplos los trabajos de Luo (1993) sobre realimentación con galgas extensiométricos, de Banavar y Dominic (1995) sobre reguladores LQG H_∞ y de Kim y col. (2003) sobre una combinación prealimentación-realimentación robusta
- *Control pasivo.* Wang y Vidyasagar (1991, 1992) demostraron dos relaciones pasivas para brazos flexibles de un grado de libertad. La primera se establece entre el par motor y la velocidad del motor y da lugar a movimientos relativamente lentos. La otra se verifica cuando la inercia de la sección de la barra es mucho menor que la inercia de la articulación (motor+reductora) o cuando la inercia de la articulación es mucho menor que la de la barra. Entonces se establece una relación de pasividad entre el par motor y una posición virtual formada por la imagen simétrica del extremo respecto a su posición, si el eslabón fuera rígido. Esta relación conduce a reguladores más eficientes ya que utilizan medidas del extremo, que son más sensibles a las vibraciones. Esta idea se extiende a robots de varios grados de libertad en Damaren (1995). Un trabajo más reciente de Ryu y col. (2004) establece un control pasivo mejorado pero que es más complejo que los anteriores al incluir parte de la dinámica del brazo en el regulador. Cuando se establecen relaciones de pasividad, se pueden diseñar reguladores muy robustos ante cambios variados en la dinámica del robot.
- *Control adaptativo.* Se citan como ejemplos los trabajos de Yang y col. (1997) sobre robots de un grado de libertad, de Bai y col. (1998) sobre robots planos de dos grados de libertad, y de Feliu y col. (1999b) sobre identificación de la carga transportada en robots de un grado de libertad.
- *Control no lineal.* Se citan ejemplos de control por realimentación estática no lineal del estado (Singh y Schy (1986)), (De Luca y Siciliano (1988)) o control por modos deslizantes (Utkin (1998), Lizarraga y col. (2005)).
- *Control por técnicas de inteligencia artificial.* Se citan ejemplos de control fuzzy de un robot flexible de dos grados de libertad: Moudgal y col. (1995), y de redes neuronales aplicadas a un robot flexible de fase no mínima: Talebi y col. (2005).
- *Otras técnicas.* Se citan dos: un control por prealimentación robusto basado en un modelo de reflexión de ondas mecánicas en la barra (O'Connor y Lang (1998)), y un método basado

en control dinámico de las condiciones de contorno de la barra (Morgul, (2001)).

8. CONTROL DE FUERZA

Dos ventajas importantes de los robots flexibles (poco exploradas hasta la fecha) son su adecuación para realizar control de fuerza y que admiten la posibilidad de detectar impactos en tiempo real, lo cual permite cambiar de un control de posición a otro de fuerza, tal como se muestra en la Figura 23.

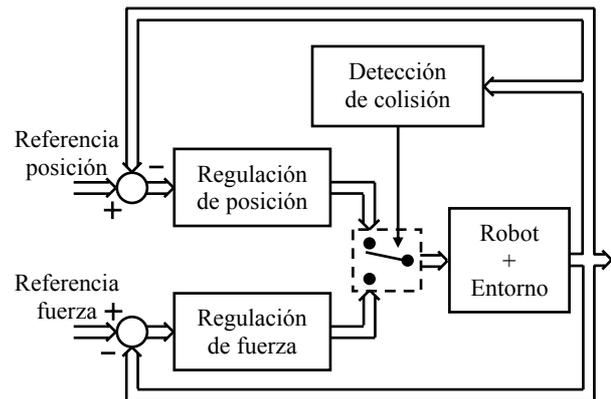


Figura 23. Esquema de control que conmuta entre dos reguladores y dos referencias en función de la existencia de colisión

Se han desarrollado modelos dinámicos del impacto de robots flexibles con obstáculos. Tornambe (1999) propuso un modelo general para impactos en sistemas mecánicos. García y Feliu (2000) aplicaron un modelo simplificado para el caso de un robot flexible de un grado de libertad y un modo de vibración, y Ching y Wang (2003) desarrollaron el modelo completo para un brazo con infinitos modos de vibración (de masa distribuida a lo largo del brazo).

También se han desarrollado esquemas de control de fuerza para robots flexibles. El trabajo de Matsuno y Kasai (1998) es un ejemplo con robots de un grado de libertad; Matsuno y col. (1994) realizaron un control cuasi-estático de un robot de dos grados de libertad y Yoshikawa y col. (1996b) controlaron uno de tres grados de libertad. Estos trabajos parten de una situación inicial donde ya se ha establecido contacto con la superficie.

García y col. (2003) desarrollaron un sistema de control completo para un robot flexible de tres grados de libertad, que controla la posición cuando hay movimiento libre, gestiona el impacto y conmuta a un control de fuerza cuando se establece el contacto. Para ello utiliza un mecanismo de detección de impactos, basado en medidas de galgas extensométricas colocadas en la estructura del brazo, que conmuta la ley de control según la Figura 23. Estos mecanismos de detección de impactos se basan en la hipótesis de que el control de posición es muy eficiente y cancela las vibraciones en el extremo. Si no fuera así, dichas

vibraciones serían apreciables y las galgas darían medidas que podrían confundir al algoritmo detector de colisiones provocando falsas alarmas.

Estas estrategias pueden plantearse en robots flexibles porque la fuerza de contacto en el extremo de éstos no crece tan deprisa en la transición de movimiento libre a movimiento restringido como en los robots rígidos. Esto permite detectar el impacto en tiempo real y controlarlo eficazmente. La Figura 24 muestra la fuerza en el extremo del robot de la Figura 8, registrada por una célula de carga, cuando éste golpea una tabla de madera y se realiza una transición de un regulador PID en movimiento libre a otro PID distinto en situación de contacto. Puede observarse que la transición desde movimiento libre hasta una situación de fuerza controlada (cuando ya se ha de-

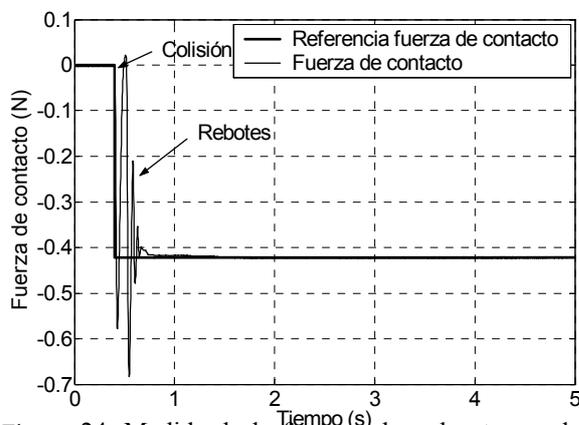


Figura 24. Medida de la fuerza sobre el extremo de un robot flexible en una tarea con conmutación de un movimiento libre a otro restringido en contacto con una superficie

tectado la colisión y está funcionando el regulador de fuerza) tarda unos 50 mseg.. En este tiempo la fuerza sube hasta un pico de unos -0.6 N, valor muy alejado de los umbrales de peligro. En este experimento el algoritmo detector del impacto consiste en la simple condición de que el valor absoluto del par medido en la base del robot (y que es proporcional a la fuerza en el extremo) supere cierto límite. Esta figura muestra además que el problema de los rebotes después del impacto, consecuencia de la interacción entre el sistema de control y la superficie, que es crítico en los robots rígidos, se reduce en el caso de robots flexibles.

9. CONCLUSIONES

Este artículo ha pretendido mostrar una visión general de la robótica flexible, haciendo mención tanto de los aspectos científicos como tecnológicos. Este tema resulta atractivo para numerosos grupos de investigación de todo el mundo por el potencial que encierra de cambiar radicalmente el concepto de lo que es un robot. La robótica flexible es el camino hacia el diseño de: 1) robots más ligeros, 2) robots que presenten una mayor eficacia en tareas que

impliquen coordinación entre movimientos libres y la realización de esfuerzos (mayores destrezas), y 3) robots que supongan menos peligro para los seres humanos cuando deban colaborar con ellos en el mismo entorno.

Sin embargo, todavía queda un largo camino hasta conseguir que estos robots salgan de los laboratorios y tengan presencia en las actividades sociales e industriales. Esto se debe fundamentalmente a la complejidad de su dinámica y, consecuentemente, a la complejidad de sus sistemas de control. Por tanto, la robótica flexible supone un reto no solo para los investigadores en robótica sino también para los investigadores en control y en dinámica y diseño de mecanismos

Se finaliza haciendo referencia al carácter interdisciplinar de este campo de investigación (basta ver la bibliografía citada). A lo largo del artículo se han intentado mostrar las fuertes conexiones de la robótica flexible con otras disciplinas como puedan ser: diseño de materiales, vibraciones y acústica, mecatrónica, instrumentación, inteligencia artificial, ingeniería civil (vibraciones en edificios), ingeniería aeroespacial, etc.

REFERENCIAS

- Aoustin, Y. y A. Formalsky (1997). On the sintesis of a nominal trajectory for control law of a one-link flexible arm. *Int. J. Robotics Research*, **16** (1), 36-46.
- Bai, M., D. Zhou y H. Schwartz (1998). Adaptive augmented state feedback control for an experimental planar two-link flexible manipulator. *IEEE Trans. Robotics and Automation*, **14** (6), 940-950.
- Balas, M.J. (1982). Trends in large space structure control-theory-fondest hopes, wildest dreams. *IEEE Trans. Automatic Control*, **27** (3), 522-535.
- Banavar, R. y P. Dominic (1995). An LQG H_∞ controller for a flexible manipulator. *IEEE Trans. Control Systems Technology*, **3** (4), 409-416.
- Bayo, E. (1987). A finite-element approach to control the end-point motion of a single-link flexible robot. *J. Robotic System*, **4** (1), 63-75.
- Beléndez, T., C. Neipp y A. Beléndez (2002). Large and small deflections of a cantilever beam. *European J. Physics*, **23** (3), 371-379.
- Bellezza, F., L. Lanari y G. Ulivi (1990). Exact modeling of the flexible slewing link. In: *Proc. 1990 IEEE Int. Conf. Robotics and Automations*, Cincinnati (Estados Unidos de América), 734-739.
- Benosman, M. y G. Le Vey (2004a). Control of flexible manipulators : a survey . *Robotica* , **22** (5), 533-545.
- Benosman, M., G. Le Vey, L. Lanari y A. De Luca (2004b). Rest to rest motion for planar multi-link flexible manipulator. *ASME J. Dynamic Systems, Measurement, and Control*, **126** (1), 115-123.

- Book, W.J. (1979). Analysis of massless elastic chains with servo controlled joints. *ASME J. Dynamic Systems, Measurement, and Control*, **101** (3), 187-192.
- Cannon Jr, R.H. y E. Schmitz (1984). Initial experiments on the end-point control of a flexible one-link robot. *Int. J. Robotics Research*, **3** (3), 62-75.
- Carusone, J., K.S. Buchan y G.M.T. D'Eleuterio (1993). Experiments in end-effector tracking control for structurally flexible space manipulators. *IEEE Trans. Robotics and Automation*, **9** (5), 553-560.
- Cheong, J., W.K. Chung y Y. Youm (2004). Inverse kinematics of multilink flexible robots for high-speed applications. *IEEE Trans. Robotics and Automation*, **20** (2), 269-282.
- Ching, F.M.C. y D. Wang (2003). Exact solution and infinite-dimensional stability analysis of a single flexible link in collision. *IEEE Trans. Robotics and Automation*, **19** (6), 1015-1020.
- Choi, S.B., B.S. Thompson y M.V. Gandhi (1995). Control of a single-link flexible manipulator fabricated from composite laminates. *J. Robotic Systems*, **12** (1), 45-54.
- Dadfarnia, M., N. Jalili, B. Xian y D.M. Dawson (2004). A Lyapunov-based piezoelectric controller for flexible Cartesian robot manipulator. *ASME J. Dynamic, Systems, Measurement, and Control*, **126** (2), 347-358.
- Damaren, C. (1995). Passivity analysis for flexible multilink space manipulators. *J. Guidance, Control, and Dynamics*, **18** (2), 272-279.
- De Luca, A. y B. Siciliano (1988). Joint-based control of nonlinear model of a flexible arm. In: *Proc. 1988 American Control Conference*, Atlanta, Georgia, (Estados Unidos de América), 935-940.
- De Luca, A. y B. Siciliano (1991). Closed form dynamic model of planar multilink lightweight robots. *IEEE Trans. Systems, Man and Cybernetics*, **21**(4), 826-839.
- De Luca, A. y B. Siciliano (1993). Regulation of flexible arms under gravity. *IEEE Trans. Robotics and Automation*, **9** (4), 463-467.
- Feliu, V., K.S. Rattan y H.B. Brown (1992). Modeling and control of single-link flexible arms with lumped masses. *ASME J. Dynamic, Systems, Measurement, and Control*, **114** (3), 59-69.
- Feliu, V. y K.S. Rattan (1999a). Feedforward Control of Single-Link Flexible Manipulators by Discrete Model Inversion. *ASME J. Dynamic Systems, Measurement, and Control*, **121** (4), 713-721.
- Feliu, J.J., V. Feliu y C. Cerrada (1999b). Load adaptive control of single-link flexible arms based on a new modeling. *IEEE Trans. Robotics and Automation*, **15** (5), 793-804.
- Feliu, V., A. García y J.A. Somolinos (2001). Gauge based tip position control of a new three-degree-of-freedom flexible robot. *Int. J. Robotics Research*, **20** (8), 660-675.
- Feliu, V., J.A. Somolinos y A. García (2003). Inverse dynamics based control system for a new three degree-of-freedom flexible arm. *IEEE Trans. Robotics and Automation*, **19** (6), 1007-1014.
- Fend, M. (2005). Whisker-based texture discrimination on a mobile robot. In: *Proc. 8th European Conf. Artificial Life (ECAL)*, Kent, (Inglaterra).
- García, A. y V. Feliu (2000). Force control of a single-link flexible robot based on a collision detection mechanism. *IEE Proceeding-D: Control Theory and Applications*, **147** (6), 588-596.
- García, A., V. Feliu y J.A. Somolinos (2003). Experimental testing of a gauge based collision detection mechanism for a new three-degree-of-freedom flexible robot. *J. Robotic Systems*, **20** (6), 271-284.
- Geniele, H. y R. Patel (1997). End point control of a flexible link manipulator theory and experiments. *IEEE Trans. Control Systems Technology*, **5** (6), 556-570.
- Kim, B.K., S. Park, W.K. Chung y Y. Youm (2003). Robust controller design for PTP motion of vertical XY positioning systems with a flexible beam. *IEEE/ASME Trans. on Mechatronics*, **8** (1), 99-110.
- Kitagawa, H., T. Beppu, T. Kobayashi y K. Terashima (2002). Motion control of omnidirectional wheelchair considering patient comfort. In: *Proc. 15 Triennial World Congress of IFAC*, Barcelona, (España).
- Kokotovic, P.V. (1984). Applications of singular perturbation techniques to control-problems. *SIAM Review*, **26** (4), 501-550.
- Kotnick, T., S. Yurkovich y U. Ozguner (1988). Acceleration feedback for control of a flexible manipulator arm. *J. Robotic Systems*, **5** (3), 181-196.
- Kumar Dwivedy, S. y P. Eberhard (2006). Dynamic analysis of flexible manipulators, a literatura review. *Mechanism and Machine Theory*, **en prensa**, disponible en www.sciencedirect.com.
- Kwon, D. y W.J. Book. (1994). A time-domain inverse dynamic tracking control of a single-link flexible manipulator. *ASME J. Dynamic Systems, Measurement, and Control*, **116** (2), 193-200.
- Lee, J.D. y B.L. Wang (1988). Optimal control of a flexible robot arm. *Computers and Structures*, **29** (3), 459-467.
- Lee, K., J.F. Wilson y S.J. Oh (1993). Elastica of cantilever beams with variable cross section. *Int. J. Non-Linear Mechanics*, **28** (5), 579-589.
- Lim, H. y K. Tanie (1999). Collision-tolerant control of human-friendly robot with viscoelastic trunk. *IEEE/ASME Trans. Mechatronics*, **4** (4), 417-427.
- Lizarraga, I., V. Etxebarria y A. Sanz (2005). Sliding-mode adaptive control for flexible-link manipulators using a composite design. *Cybernetics and Systems*, **36** (5), 471-490.
- Low, K.H. y M. Vidyasagar (1988). Lagrangian formulation of the dynamic model for flexible manipulator systems. *ASME J. Dynamic Systems, Measurement, and Control*, **110** (2), 175-181.
- Luo, Z.H. (1993). Direct strain feedback-control of flexible robot arms-new theoretical and experimental results. *IEEE Trans. Automatic Control*, **38** (11), 1610-1622.

- Matsuno, F., S. Fukushima, Y. Ohsawa, M. Kiyohara y Y. Sakawa (1987). Feedback control of a flexible manipulator with parallel drive mechanism. *Int. J. Robotics Research*, **6** (4), 76-84.
- Matsuno, F., T. Asano y Y. Sakawa (1994). Modeling and quasi-static hybrid position/force control of constrained planar two-link flexible manipulators. *IEEE Trans. Robotics and Automations*, **10** (3), 287-297.
- Matsuno, F. y S. Kasai (1988). Modeling and robust force control of constrained one-link flexible arms. *J. Robotic Systems*, **15** (8), 447-464.
- Moallem, M. (2003). Deflection control of a flexible beam using shape memory alloy actuators. *Smart Materials and Structures*, **12** (6), 1023-1027.
- Moallem, M., M.R. Kermani, R.V. Patel y M. Ostojic (2004). Flexure control of a positioning system using piezoelectric transducers. *IEEE Trans. Control Systems Technology*, **12** (5), 757-762.
- Mohamed, Z., J. Martins, M.O. Tokhi, J.S.S. Costa y M.A. Botto (2005). Vibrational control of a very flexible manipulator system. *Control Engineering Practice*, **13** (3), 267-277.
- Morgue, O. (2001). Stabilization and disturbance rejection for the beam equation. *IEEE Trans. Automatic Control*, **46** (12), 1913-1918.
- Mougdal, V.G., W.A. Kwong, K.M. Passino y S. Yurkovich (1995). Fuzzy learning control for a flexible-link robot. *IEEE Trans. Fuzzy Systems*, **3** (2), 199-210.
- Nicosia, S., P. Valigi y L. Zaccarian (1996). Dynamic modelling of a two link flexible robot and experimental validation. In: *Proc. 1996 IEEE Int. Conf. Robotics and Automations*, Minneapolis (Estados Unidos de América), 1953-1958.
- O'Connor, W. y D. Lang (1998). Position control of flexible robot arms using mechanical waves. *ASME J. Dynamic Systems, Measurement, and Control*, **120** (3), 334-339.
- Payo, I., F. Ramos, D.O. Cortázar y V. Feliu (2005). Experimental validation of nonlinear dynamic models for single-link very flexible arms. In: *Proc. 2005 Joint IEEE Conf. Decision and Control, and European Control Conf.*, Sevilla, (España), 5304-5309.
- Pedersen, N.L. y M.L. Pedersen. (1998). A direct derivation of the equations of motion for 3-D flexible mechanical systems. *Int. J. Numerical Methods in Engineering*, **41** (4), 697-719.
- Peláez, G., G. Peláez, J.M. Pérez, A. Vizán y E. Bautista (2005). Input shaping reference commands for trajectory following Cartesian machines. *Control Engineering Practice*, **13** (8), 941-958.
- Pota, H.R. y T.E. Alberts (1995). Multivariable transfer functions for a slewing piezoelectric laminate beam. *ASME J. Dynamic, Systems, Measurement, and Control*, **117** (3), 352-359.
- Ryu, J.H., D.S. Kwon y B. Hannaford (2004). Control of a flexible manipulator with noncollocated feedback: time domain passivity approach. *IEEE Trans. Robotics*, **20** (4), 776-780.
- Scholz, G.R. y C.D. Rahn (2004). Profile sensing with an actuated whisker. *IEEE Trans. Robotics and Automation*, **20** (1), 124-127.
- Schubert, H. (2000). *Impedance Control of Flexible Macro/Mini Manipulators*. Tesis Doctoral. Universidad de Stanford.
- Schwertassek, R., O. Wallrapp y A. Shabana (1999). Flexible multibody simulation and choice of the shape functions. *Nonlinear Dynamics*, **20** (4), 361-380.
- Shan, J., H.T. Liu y D. Sun (2005). Modified input shaping for a rotating single-link flexible manipulator. *J. Sound and Vibration*, **285** (1-2), 187-207.
- Shen, I.Y. (1994). Hybrid damping through intelligent constrained layer treatments. *ASME J. Vibration and Acoustics*, **116** (3), 341-349.
- Siciliano, B. y W. Book (1988). A singular perturbation approach to control of lightweight flexible manipulators. *Int. J. Robotics Research*, **7**(4), 79-90.
- Sigmund, O. y J.S. Jensen (2003). Systematic design of phononic band-gap materials and structures by topology optimization. *Phil. Trans. R. Soc. London A*, 361 (1806), 1001-1019.
- Simo, J.C. y L. Vu-Quoc (1986a y b). On the dynamics of flexible beams under large overall motions – the plane case: Parts I y II. *J. Applied Mechanics*, **53** (4), 849-854, 855-863.
- Singh, S.N., y A.A. Schy (1986). Control of elastic robotic systems by nonlinear inversion and modal damping. *ASME J. Dynamic, Systems, Measurement, and Control*, **108** (3), 180-189.
- Talebi, H.A., R.V. Patel y K. Khorasani (2005). A neural network controller for a class of nonlinear non-minimum phase systems with application to a flexible-link manipulator. *ASME J. Dynamic Systems, Measurement, and Control*, **127** (2), 289-294.
- Tokhi, M.O., Z. Mohamed y M.H. Shaheed (2001). Dynamic characterisation of a flexible manipulator system. *Robotica*, **19** (5), 571-580.
- Tokhi, O. y S. Veres (2002). *Active sound and vibration control. Theory and applications*. (Tokhi y Veres (Ed)), IEE Control Engineering Series 62, The Institution of Electrical Engineers, Londres (Inglaterra).
- Tornambe, A. (1999). Modeling and control of impact in mechanical systems: theory and experimental results. *IEEE Trans. Automatic Control*, **44** (2), 294-309.
- Ueno, N., M.M. Svinin y M. Kaneko (1998). Dynamic contact sensing by flexible beam. *IEEE Trans. Mechatronics*, **3** (4), 254-264.
- Utkin, V.A. (1998). Control of elastic multi-link manipulators based on the dynamic compensation method. In: *Proc. 1998 IEEE Int. Symposium on Circuits and Systems*, 594-597.
- Wang, C Y. (1981). Large deflections of an inclined cantilever with an end load. *Int. J. Non-Linear Mechanics*, **16** (2), 155-164.

- Wang, D. y M. Vidyasagar (1991). Transfer function for a flexible link. *Int. J. Robotics Research*, **10** (5), 540-549.
- Wang, D. y M. Vidyasagar (1992). Passive control of a stiff flexible link. *Int. J. Robotics Research*, **11** (6), 572-578.
- Wang, F.Y. y Y. Gao (2003). *Advanced studies of flexible robotic manipulators. modeling, design, control and applications*. (Wang y Gao (Ed)), World Scientific, New Jersey (EUA).
- Whitney, D.E. (1982). Quasi-static assembly of compliantly supported rigid parts. *ASME J. Dynamic, Systems, Measurement, and Control*, **104** (1), 65-77.
- Yang, J.H., F.L. Lian y L.C. Fu (1997). Nonlinear adaptive control for single-link manipulators. *IEEE Trans. Robotics and Automation*, **13** (1), 140-148.
- Yoshikawa, T. y K. Hosoda (1996a). Modeling of flexible manipulators using virtual rigid links and passive joints. *Int. J. Robotics Research*, **15** (3), 290-299.
- Yoshikawa, T., K. Harada y A. Matsumoto (1996b). Hybrid position/force control of flexible-macro/rigid-micro manipulator system. *IEEE Trans. Robotics and Automation*, **12** (4), 633-640.
- Zhu, G., S.S. Ge y T.H. Lee (1999). Simulation studies of tip tracking control of a single-link flexible robot based on a lumped model. *Robotica*, **17** (1), 71-78.