

## EL PÉNDULO INVERTIDO: UN DESAFÍO PARA EL CONTROL NO LINEAL

J. Aracil \* F. Gordillo \*

\* *Escuela Superior de Ingenieros, Universidad de Sevilla.  
Camino de los Descubrimientos s/n. Sevilla-41092. Spain  
E-mail: {aracil,gordillo}@esi.us.es*

Resumen: En este artículo se presenta una revisión de algunos métodos de diseño y análisis de sistemas de control no lineales, empleando el péndulo invertido como sistema de referencia. En este ingenio se conjugan una sencilla estructura muy fácil de modelar matemáticamente, con una notable complejidad a la hora de diseñar su control. Además constituye un ejemplo notable de la doble problemática local y global en su comportamiento. Se revisan algunos controladores empleados convencionalmente y se propone una solución al problema del *swing up* con estabilización, para la que se emplean diferentes métodos, como el moldeo de energía y el *forwarding*. Copyright ©2005 CEA-IFAC.

Palabras clave: Control de péndulos, moldeo de energía, inyección y amortiguamiento de energía, *forwarding*.

### 1. INTRODUCCIÓN

Los péndulos invertidos son una familia de artefactos que constituyen un banco de pruebas muy completo e interesante para la ingeniería de control no lineal. El más estudiado de los miembros de esta familia es el denominado control invertido sobre un vehículo, al que corrientemente se denomina como carro. Consiste en un péndulo o varilla que gira libremente por uno de sus extremos mediante una articulación situada sobre un carro que se mueve sobre una guía rectilínea horizontal bajo la acción de una fuerza  $F$ , que es la acción de control con la que se pretende actuar sobre la posición de la varilla (figura 1). Inicialmente, en los años 60 del siglo pasado, se podía ver este sistema en los laboratorios de control de las universidades más prestigiosas. La demostración consistía en situar inicialmente de forma manual el péndulo en la posición vertical invertida, soltarlo luego y que de forma autónoma, realimentando su posición, el péndulo continuase

en la posición invertida mediante la adecuada actuación sobre el carro. El problema de control, así considerado, es local y su interés residía en que se trataba de estabilizar una posición inestable en bucle abierto lo que, como se sabe, constituye un problema de control muy notable. Este problema, por su carácter local, puede resolverse con métodos lineales y así se ha hecho desde los años 60. Es importante destacar que en sistemas lineales, la estabilización en bucle cerrado de un punto inestable en bucle abierto, no ofrece particulares problemas; éstos aparecen cuando el sistema es no lineal. El inconveniente con esta versión del péndulo, a la hora de plantear problemas globales, reside en que el recorrido del carro está acotado, por lo que si se alcanza uno de los extremos del soporte horizontal el sistema deja de funcionar.

Para evitar esta limitación Katsuhisa Furuta, del Instituto de Robótica de Tokio, propuso en los años 70 el péndulo rotatorio (figura 2) conocido desde entonces como *péndulo de Furuta*.

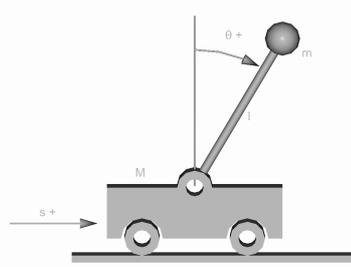


Figura 1. Péndulo en un carro.

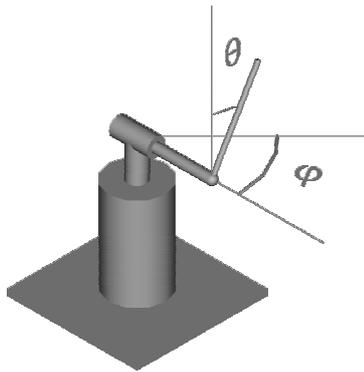


Figura 2. Péndulo rotatorio de Furuta.

Consiste en un motor de eje vertical al que es solidario un brazo de cuyo extremo cuelga la varilla del péndulo. Es decir, el extremo del brazo juega el mismo papel que el carro en el péndulo descrito en el párrafo anterior. Con este artificio se evitan los problemas de final de carrera, aunque aparecen otros nuevos debido a que la dinámica del sistema se complica considerablemente al hacer su aparición fuerzas centrífugas y de Coriolis.

Existen otros tipos de péndulo invertido como el péndulo con rueda inercia, el acrobot, el pendubot, el doble péndulo invertido, etc. (Angeli, 2001; Bloch *et al.*, 1999; Furuta, 2003; Lozano *et al.*, 2000; Utkin *et al.*, 2000; Srinivasan *et al.*, 2002; Wiklund *et al.*, 1993; Åström y Furuta, 2000; Gordillo *et al.*, 2003; Lozano *et al.*, 2000; Shiriaev *et al.*, 2001; Spong, 1995; Spong, 1996; Zhao y Spong, 2001). Sin embargo en este artículo nos ocuparemos fundamentalmente del péndulo invertido sobre un carro y, en algún caso, haremos comentarios sobre el péndulo rotatorio de Furuta.

Este último suscitó un problema mucho más general y complejo que el del simple mantenimiento de la varilla del péndulo en la posición invertida: el problema de llevar el péndulo desde cualquier posición, y en particular desde la posición colgante “natural”, hasta la posición invertida. Este problema se conoce como el del *swing up*<sup>1</sup>.

Por tanto, en el problema del control del péndulo invertido aparecen dos subproblemas: el de llevar el péndulo desde la posición colgante inicial, u otra posición inicial cualquiera, a las proximidades de la posición deseada; y el de estabilizar al péndulo en la posición invertida. El primero consiste esencialmente en inyectar al péndulo energía para llevar el centro de gravedad desde la posición inicial a la deseada invertida final. El segundo consiste en estabilizar el péndulo en esa posición invertida y es el mismo que el descrito en el primer párrafo de esta introducción. Tradicionalmente estos dos subproblemas se han resuelto de forma independiente.

Conviene observar que el problema del *swing up* adquiere radicales diferencias con respecto al de estabilización local, puesto que se trata de un problema global y no lineal. Se trata, por tanto, de un ejemplo relativamente simple de problema no lineal donde el tratamiento lineal es insuficiente y que sirve como banco de pruebas para las diversas teorías de control no lineal. La adopción de controladores diseñados con técnicas lineales, en el caso de un equilibrio inestable en bucle abierto, puede ser el origen de importantes problemas como puso de manifiesto Gunter Stein en su famosa *Bode lecture* del CDC de Tampa, en 1989 (Stein, 1989) y publicada recientemente en (Stein, 2003).

Mediante control híbrido se pueden coordinar los dos subproblemas: el *swing up* para llevar el péndulo a la cercanía de la posición deseada; y la estabilización en ese punto. Un reto para la comunidad de control ha sido encontrar una ley única que resuelva los dos problemas. Se encuentran en la literatura soluciones que emplean conmutaciones, bien entre distintas leyes de control o bien conmutando valores de parámetros en una misma ley (Åström y Furuta, 2000; Shiriaev *et al.*, 2001; Srinivasan *et al.*, 2002; Utkin *et al.*, 2000; Wiklund *et al.*, 1993). El reto es encontrar una ley suave (continua) que lo haga. En (Rantzer y Ceragioli, 2001) se presenta un enfoque interesante en el que se combinan las leyes global y local de forma suave garantizando la estabilidad del sistema.

En este artículo se presenta una estrategia de control que tiene presente los factores inherentes al carácter no lineal del sistema, en paralelo con su comportamiento global. Se aporta una solución al problema del ajuste (*matching* en la denominación convencional en inglés) a un modelo de referencia obtenido mediante moldeo de energía. Sucede que para que sea posible el ajuste del sistema en bucle abierto con el modelo deseado (*target system*), este último debe ser tal que presente múltiples equilibrios a los que se asocian las correspondientes cuencas de atracción. La estrategia

<sup>1</sup> Hoy en día ya existen versiones del péndulo sobre un carro en los que sí es posible plantear el problema del *swing up*.

adoptada consiste en inyectar energía al sistema cuando se encuentra en la cuenca de atracción de un equilibrio no deseado y amortiguar el sistema cuando está en la cuenca del equilibrio deseado. Esta estrategia combinando inyección de energía y amortiguamiento (*pumping-damping*) es innovadora y es distinta de la usual de moldeo de energía seguido exclusivamente por inyección de amortiguamiento (Ortega *et al.*, 2001). En el presente artículo la estrategia conduce a una ley de control en la que aparece una conmutación. Trabajos más recientes permiten obtener una estrategia similar mediante un controlador suave sin necesidad de conmutación (Åström *et al.*, 2005).

La utilización del péndulo invertido como banco de pruebas de control no lineal no se agota con el problema antes mencionado. Se pueden considerar otros objetivos de control entre los que se encuentra la estabilización de movimientos oscilatorios alrededor de la posición superior. Este problema es de naturaleza distinta a los tradicionales de ingeniería de control: estabilización de un punto de trabajo o seguimiento de una trayectoria. Aquí lo que se pretende es estabilizar una curva en el espacio de estados (la curva no está parametrizada en función del tiempo). Este problema tiene aplicaciones en seguimiento de caminos en robótica y en convertidores electrónicos de potencia cuando se desea generar corriente alterna (Aracil y Gordillo, 2002; Gordillo *et al.*, 2004a; Pagano *et al.*, 2005).

El artículo se organiza como sigue. En el apartado siguiente se repasa el control híbrido convencional para resolver el problema del *swing up* mediante la aplicación sucesiva de dos leyes de control diferentes. En el apartado 3 se aplica el moldeo de energía potencial para resolver el problema del *swing up* en dimensión 2. La solución de este problema conduce a una estrategia basada en la inyección y amortiguamiento de energía en las regiones adecuadas, que es el objeto de el apartado 4. En el apartado 5 se aborda el problema de parar el soporte (carro o brazo) de modo que se tiene un problema de dimensión 3. El apartado 6 se dedica a la estabilización de oscilaciones en un péndulo invertido. El artículo se cierra con un apartado de conclusiones.

## 2. INYECCIÓN DE ENERGÍA EN EL PÉNDULO

Consideremos, en primer lugar, el modelo del péndulo en dimensión 2, prescindiendo de la dinámica del soporte (sea un carro o el brazo del péndulo rotatorio). Estas ecuaciones son:

$$J\ddot{x}_1 = mgl \sin x_1 - u \cos x_1, \quad (1)$$

en donde  $J$  es la inercia de la varilla del péndulo girando sobre un extremo,  $m$  y  $l$  son la masa y la longitud de la varilla respectivamente,  $x_1$  es el ángulo que forma el péndulo con la vertical superior y  $u$  es la señal de control (fuerza sobre el carro). La energía del péndulo viene dada por

$$E = \frac{1}{2}J x_2^2 + mgl(\cos x_1 - 1),$$

donde  $x_2$  representa la velocidad angular del péndulo. La forma geométrica de esta función de energía se tiene en la figura 3. Además se tiene que

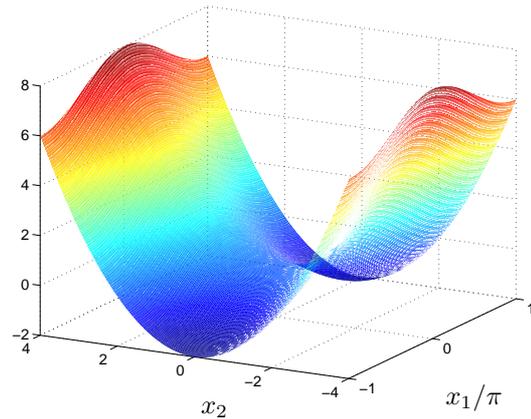


Figura 3. Función de energía  $E$  del sistema en bucle abierto.

$$\dot{E} = -ux_2 \cos x_1, \quad (2)$$

y si se pretende llevar el sistema desde una energía inicial  $E_0$  a una energía deseada  $E_{ref}$  una ley de control que cumple este cometido es (Åström y Furuta, 2000)

$$u = -k(E_{ref} - E)x_2 \cos x_1, \quad (3)$$

con  $k > 0$ . En efecto, con la ley de control (3), la expresión de la variación de la energía dada por (2) resulta

$$\dot{E} = k(E_{ref} - E)x_2^2 \cos^2 x_1,$$

con lo que si la energía en un instante dado es mayor que la energía deseada ( $E_{ref} - E < 0$ ) la variación instantánea de la energía será negativa, mientras que si  $E_{ref} > E$ , entonces la energía aumentará.

En el problema del *swing up* lo que se pretende es llevar la energía del péndulo desde el valor que tiene en la posición colgante (o en cualquiera inicial) hasta la correspondiente a la posición invertida. Por tanto, la anterior ley de control es especialmente adecuada para este propósito. Aparentemente esta ley debiera ser suficiente para llevar y mantener el péndulo en la posición deseada. Sin embargo, esto no es así, ya que, como es fácil comprobar, cuando el sistema tiene la

energía correspondiente a la del punto superior, el péndulo no tiene necesariamente que permanecer en esta posición sino que puede evolucionar por una curva de energía constante (que es, en realidad, una órbita homoclina<sup>2</sup>). Para estabilizar el sistema en esa posición se requiere conmutar a una ley de control local que determine que el péndulo se estabiliza en la posición deseada. De este modo mediante una combinación de inyección de energía, mediante el controlador (3), y una ley de control local en torno a la posición de equilibrio se consigue el objetivo propuesto. Esta ley de control es enormemente eficiente y se debe a Åström y Furuta y sus respectivos grupos de investigación (Åström y Furuta, 2000; Wiklund *et al.*, 1993).

La ley de control, como se recordaba más arriba, está basada en considerar únicamente el modelo (1) de dimensión 2 despreciando el comportamiento dinámico del soporte en el que va montado (carro o brazo del péndulo). Ello equivale a despreciar los pares de reacción del péndulo al soporte, lo que es razonable bajo ciertas hipótesis. A ello se debe, en gran medida, la eficiencia del controlador formado por la ley de control (3) y una ley lineal en torno al equilibrio. Es notable que esta ley de control es válida tanto para el péndulo en un carro como para el de Furuta.

Sin embargo, el modelo completo del sistema, sin despreciar la dinámica del soporte, es considerablemente más complejo que el (3). Para el sistema de Furuta, o su versión más simplificada en el caso del péndulo en un carro, se pueden obtener leyes de control semejantes a las obtenidas para el sistema de dimensión 2 (Acosta, 2004; Gordillo *et al.*, 2003; Lozano *et al.*, 2000; Pagano, 1999). Para la determinación de la ley de control en caso de dimensión 3 se emplea una generalización del procedimiento obtenido para determinar la ley (3), debida a Fradkov. Se puede demostrar que las leyes de control obtenidas para el modelo completo tienden a las del correspondiente sistema de dimensión 2 bajo ciertas circunstancias (Gordillo *et al.*, 2003), por ejemplo que el radio del brazo en el péndulo de Furuta tienda a infinito.

### 3. MOLDEO DE ENERGÍA POTENCIAL

Vamos a ver en este apartado una solución alternativa a la presentada anteriormente para el problema de levantar y estabilizar el péndulo de dimensión 2. Por simplicidad, en el resto del artículo, se van a tomar todos los parámetros iguales a la unidad en el modelo (1) con lo

que las ecuaciones normalizadas del péndulo (despreciando la dinámica del soporte) vienen dadas por

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= \sin x_1 - \cos x_1 u.\end{aligned}\quad (4)$$

El objetivo de los métodos de moldeo de energía es cambiar, mediante la introducción de una ley de control  $u$ , la forma de la energía del sistema de manera que el mínimo de la misma se encuentre en el punto que se desea estabilizar. Con tal fin, se puede moldear la energía potencial del sistema (4) proponiendo como energía deseada la función hamiltoniana

$$H_d(x_1, x_2) = V_d(x_1) + \frac{x_2^2}{2}.\quad (5)$$

Es decir, en bucle cerrado se pretende tener un sistema cuya forma hamiltoniana generalizada (van der Schaft, 2000) sea

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -\sigma \end{bmatrix} \begin{bmatrix} D_{x_1} H_d \\ D_{x_2} H_d \end{bmatrix},\quad (6)$$

donde  $\sigma$ , que puede ser una función, define el amortiguamiento. De (5) y (6) se obtiene fácilmente que el sistema deseado viene dado por

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= -V'_d(x_1) - \sigma x_2.\end{aligned}\quad (7)$$

que para  $\sigma = 0$  es un sistema conservativo.

La energía potencial deseada  $V_d$  más simple que podemos concebir es

$$V_d = -\cos x_1.\quad (8)$$

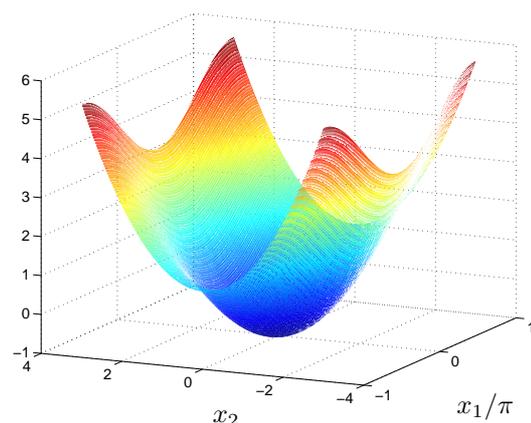


Figura 4. Función de energía (5)–(8).

En la figura 4 se tiene la representación gráfica de la energía total (5) correspondiente a la energía potencial (8). Esta forma es muy conveniente para nuestros propósitos, puesto que la energía tiene un único mínimo en la posición deseada. Sin embargo la ley de control a la que se

<sup>2</sup> De forma simplificada se puede definir una órbita homoclina como aquella que nace y muere en un mismo punto de equilibrio. Para una definición más rigurosa se puede consultar (Hale y Koçak, 1991).

llega igualando (4) y (7)-(8) (sin incluir, por simplicidad, amortiguamiento) es

$$u = 2 \tan x_1, \quad (9)$$

que no está acotada para  $x_1 = \pi/2$ . En consecuencia esa ley de control es únicamente válida para posiciones iniciales del péndulo por encima de la horizontal y ha sido estudiada en (Gordillo *et al.*, 2004b; Marichal *et al.*, 2004). Conviene destacar que las leyes únicas (que no combinan una ley del *swing up* con una de estabilización) publicadas hasta la fecha consideran únicamente la región definida por la varilla sobre la horizontal (Bloch *et al.*, 1999; Mazenc y Praly, 1996). Todas estas leyes son considerablemente más complicadas que la (9).

También resulta didáctico el comparar las figuras 3 y 4. En esta comparación se pone claramente de manifiesto el significado del moldeo de energía.

Para evitar el problema con el término  $\cos x_1$  en la segunda ecuación de (4) que conduce a la ley de control (9) en la que aparece este término en el denominador, se procede como sigue. Comparando la segunda ecuación de (4) con la correspondiente (7), en este último caso con  $\sigma = 0$ , se llega a la conclusión evidente de que  $V_d$  debe ser tal que

$$V_d' = -\sin x_1 + \cos x_1 \beta(x_1), \quad (10)$$

con lo que en el caso conservativo se tendrá  $u = \beta(x_1)$ .

Una buena opción es hacer  $\beta(x_1) = \sin x_1 \bar{\beta}(\cos x_1)$  ya que eso, como veremos más abajo, nos facilitará la integración de  $V_d'$  para obtener  $V_d$ . Además, por razones de simetría se debe cumplir  $V_d(x_1) = V_d(-x_1)$  y por tanto  $V_d'(x_1) = -V_d'(-x_1)$ .

Haciendo

$$V_d = a_0 + \cos x_1 - a_2 \cos^2 x_1 - a_3 \cos^3 x_1 - \dots, \quad (11)$$

se tiene

$$\begin{aligned} V_d' &= -\sin x_1 + 2a_2 \sin x_1 \cos x_1 \\ &\quad + 3a_3 \sin x_1 \cos^2 x_1 + \dots \\ &= -\sin x_1 + \sin x_1 \cos x_1 (2a_2 \cos x_1 \\ &\quad + 3a_3 \cos^2 x_1 + \dots), \end{aligned}$$

que tiene la forma deseada en (10) siendo

$$\beta(x_1) = \sin x_1 (2a_2 \cos x_1 + 3a_3 \cos^2 x_1 + \dots).$$

El caso posiblemente más simple de expresión (11) viene dada para los valores de los parámetros  $a_2 = a > 0.5$ ,  $a_0 = 0$  y  $a_i = 0, \forall i > 2$ . En este caso se tiene que (11) se convierte en

$$V_d(x_1) = \cos x_1 - a \cos^2 x_1, \quad (12)$$

por tanto,

$$V_d' = -\sin x_1 + 2a \cos x_1 \sin x_1,$$

de la que se obtiene a su vez

$$u = 2a \sin x_1. \quad (13)$$

que es la ley de control que permite tener un sistema en bucle cerrado con una energía potencial como la dada por (12). En la figura 5 se muestra

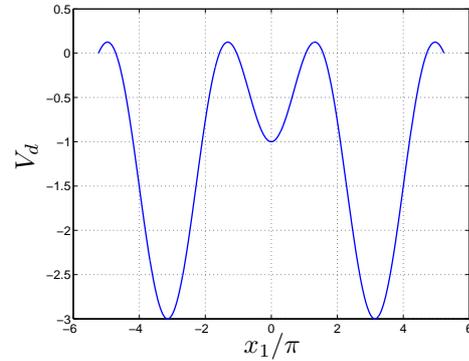


Figura 5. Forma de  $V_d$  para  $a = 5$ .

la forma de  $V_d$  para  $a = 5$  y en la figura 6 la forma de la correspondiente función hamiltoniana. Es notable que la ley de control (13), con  $a = 1$ , es la misma que se propone en (Furuta, 2003) aunque, en este último caso en otro contexto y sin la adecuada justificación.

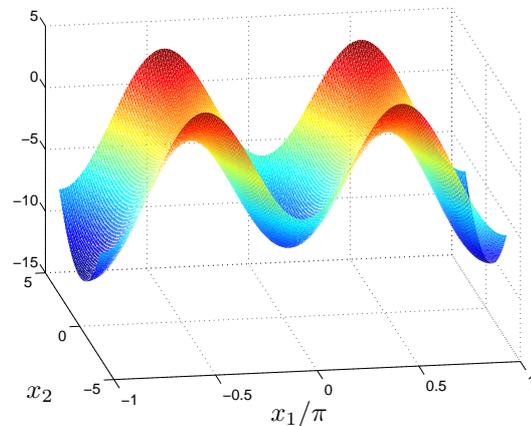


Figura 6. Función de energía (5)-(12).

En las figuras 5 y 6 se ponen de manifiesto las propiedades de la energía potencial en bucle cerrado  $V_d$  y la correspondiente función hamiltoniana  $H_d$ . Para cualquier  $a > 0.5$  se tiene un mínimo de la energía en la posición deseada, pero sin embargo la cuenca de este mínimo no es global. En la figura 6 se puede ilustrar este hecho diciendo que se tiene un pozo deseado para la energía en torno a la posición objetivo (el péndulo erguido) pero sin embargo la energía presenta un pozo indeseado en torno a la posición colgante. Asimismo en la figura 7 se tiene la curva de  $H_d$  constante e igual a  $1/(4a)$ . En esta

última figura se ven los límites de los pozos a los que se acaba de aludir. Los pozos grandes son indeseados mientras que el pequeño es deseado. Estas consideraciones sugieren intuitivamente que la solución del problema va a consistir en inyectar energía al péndulo cuando se encuentre en un pozo indeseado y amortiguarlo cuando esté fuera de ellos. Vamos a ver a continuación como se sustancia esta propuesta.

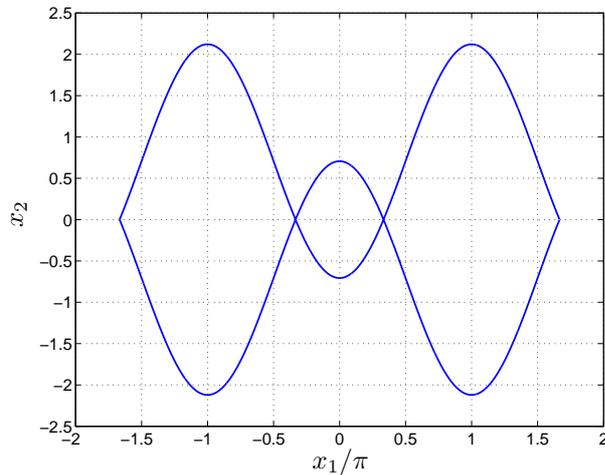


Figura 7. Curvas de nivel  $H_d = \frac{1}{4a}$ .

Supongamos ahora que consideramos el amortiguamiento, es decir  $\sigma \neq 0$ . Una posible elección del amortiguamiento sería la expresión  $k \cos x_1$  (siendo  $k$  una constante positiva) que significa que cuando el péndulo está por debajo de la horizontal ( $\cos x_1 < 0$ ) entonces se inyecta energía y consecuentemente por encima de la horizontal se atenúa. En tal caso el comportamiento deseado viene dado por el sistema hamiltoniano

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -k \cos x_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} D_{x_1} H_d \\ D_{x_2} H_d \end{bmatrix}, \quad (14)$$

es decir

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= -V'_d(x_1) - kx_2 \cos x_1. \end{aligned} \quad (15)$$

de modo que el sistema deseado es

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= \sin x_1 - 2a \cos x_1 \sin x_1 - kx_2 \cos x_1, \end{aligned} \quad (16)$$

con lo que la ley de control es

$$u = 2a \sin x_1 + kx_2. \quad (17)$$

Esta ley de control es muy sugestiva por su simplicidad. Funciona razonablemente bien cuando se parte de la posición colgante en reposo. Sin embargo presenta un gran problema de eficiencia en la inyección de energía, ya que si inicialmente el péndulo posee una energía de rotación adecuada (rota en torno al eje que lo

sustenta) esta ley seguirá inyectándole energía por debajo de la horizontal aunque atenúe por encima de ella. Ello da lugar a problemas oscilatorios innecesarios y de muy difícil solución. Además  $H_d$  no es función de Liapunov lo que dificulta la demostración de estabilidad (de hecho, para ciertas condiciones iniciales el sistema no se comporta adecuadamente). Parece más razonable inyectar energía sólo cuando sea estrictamente necesario, que es lo que se va a hacer en la estrategia que se propone en el apartado siguiente.

#### 4. UNA ESTRATEGIA BASADA EN EL AMORTIGUAMIENTO Y LA INYECCIÓN DE ENERGÍA

La idea básica de esta estrategia ya ha sido esbozada más arriba y consiste en inyectar energía al péndulo solamente cuando su estado se encuentra en el interior de un pozo indeseado. Recordemos el hamiltoniano deseado

$$H_d(x_1, x_2) = \cos x_1 - a \cos^2 x_1 + \frac{1}{2} x_2^2. \quad (18)$$

que se ha representado en la figura 6.

En la figura 7 se representa la curva de nivel correspondiente a  $H_d = 1/(4a)$ . Las curvas cerradas de esta figura engloban tres regiones. La del centro corresponde a la región donde se encuentra el estado deseado y por tanto define los bordes del pozo deseado, mientras que las otras, que en realidad por la periodicidad de  $x_1$  son la misma, definen el pozo indeseado. Se define

$$\varphi(x_1, x_2) \triangleq \begin{cases} -k & \text{si } \left( H_d(x_1, x_2) \leq \frac{1}{4a} \right. \\ & \left. \text{y } \cos x_1 < \frac{1}{2a} \right) \\ k & \text{en otro caso,} \end{cases} \quad (19)$$

en donde  $k > 0$  es un parámetro de ajuste.

Es claro que, por su definición,  $\varphi(x_1, x_2)$  es negativa en los pozos indeseados y positiva en el resto del plano. En consecuencia  $\varphi(x_1, x_2)$  define la estrategia de inyección de energía o amortiguamiento a seguir. Sustituyendo la constante  $k$  por la función  $\varphi$  en (17) y multiplicando por  $\cos x_1$  para evitar los cambios de signo del amortiguamiento al pasar por la horizontal, el sistema deseado (16) se convierte en

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= \sin x_1 - 2a \cos x_1 \sin x_1 - \varphi(x_1, x_2) x_2 \cos^2 x_1. \end{aligned} \quad (20)$$

y la ley de control con conmutación correspondiente es

$$u = \underbrace{2a \sin x_1}_{u_c} + \underbrace{\varphi(x_1, x_2) x_2 \cos x_1}_{u_d}, \quad (21)$$

en donde el primer término  $u_c$  convierte el sistema en conservativo y el segundo  $u_d$  asigna inyección de energía o amortiguamiento según convenga, es decir, según sea el signo de  $\varphi$ .

Es fácil ver que

$$\dot{H}_d = -\varphi(x_1, x_2)x_2^2 \cos^2 x_1,$$

y, al no tener  $\varphi$  un signo constante,  $H_d$  no es función de Liapunov. Considérese la siguiente candidata a función de Liapunov

$$V = \varphi(x_1, x_2) \left( \cos x_1 - a \cos^2 x_1 + \frac{1}{2}x_2^2 - \frac{1}{4a} \right). \quad (22)$$

En primer lugar, hay que hacer notar que esta función no es diferenciable en la curva de conmutación (donde  $V = 0$ ). Sin embargo, fuera de esta curva se tiene

$$\dot{V} = -\varphi^2 x_2^2 \cos^2 x_1 \leq 0$$

por lo tanto:

- $V$  es una función de Liapunov excepto en la curva de nivel cerrada  $V = 0$ .
- La curva de conmutación es atractiva.

De hecho el problema con la ley de control (20) es que se produce un modo deslizante a lo largo de la curva de conmutación. Este modo deslizante estabiliza los equilibrios  $x_1 = \pm \arccos(1/2a)$ ,  $x_2 = 0$  lo que provoca que esta ley no funcione satisfactoriamente. Estos equilibrios se pueden eliminar modificando ligeramente la curva de conmutación de  $H_d = 1/(4a)$  a  $H_d = 1/(4a) + \varepsilon$  siendo  $0 < \varepsilon \ll 1$  (figura 8). Este cambio conduce, a su vez, a modificar la función de conmutación  $\varphi$  por

$$\varphi_\varepsilon(x_1, x_2) \triangleq \begin{cases} -k & \text{si } \left( H_d \leq \left( \frac{1}{4a} + \varepsilon \right) \right. \\ & \left. \text{y } \cos x_1 < \frac{1}{2a} \right) \\ k & \text{en otro caso,} \end{cases}$$

con lo que la nueva ley de control es

$$u = \underbrace{2a \sin x_1}_{u_c} + \underbrace{\varphi_\varepsilon(x_1, x_2)x_2 \cos x_1}_{u_d}, \quad (23)$$

y la función de Liapunov

$$V = \varphi_\varepsilon(x_1, x_2) \left( H_d - \frac{1}{4a} - \varepsilon \right).$$

En (Gordillo *et al.*, 2004c) se demuestra la estabilidad del sistema resultante. Sin embargo se siguen produciendo modos deslizantes debido a la discontinuidad a lo largo de la curva de nivel  $H_d = \frac{1}{4a} + \varepsilon$ . Si se desea evitar la existencia de modos deslizantes se puede modificar la función de conmutación  $\varphi_\varepsilon$  de modo que sea igual a cero en los dos lados de la curva de conmutación. Multiplicando la función  $\varphi_\varepsilon$  por

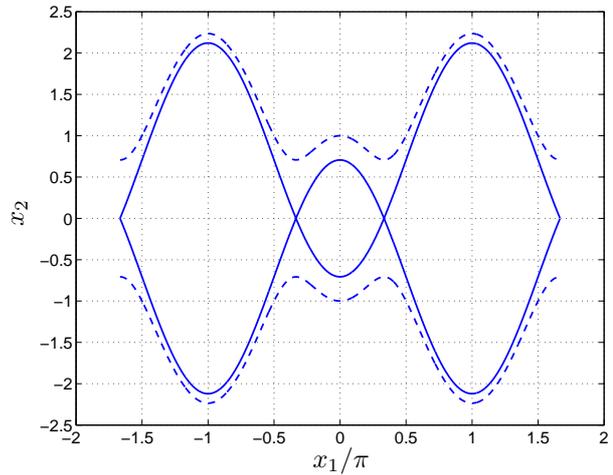


Figura 8. Curvas de nivel  $H_d = \frac{1}{4a}$  (continua) y  $H_d = \frac{1}{4a} + \varepsilon$  (discontinua).

$|H_d(x_1, x_2) - \frac{1}{4a} - \varepsilon|$  en los casos en los que  $\cos x_1 < 1/(2a)$ ,  $u_d$  será igual a cero en la curva de nivel  $H_d = \frac{1}{4a} + \varepsilon$  con lo que se evitan las trayectorias deslizantes. En consecuencia la nueva función de conmutación es:

$$\tilde{\varphi}_\varepsilon(x_1, x_2) \triangleq \begin{cases} k \left( H_d(x_1, x_2) - \frac{1}{4a} - \varepsilon \right) & \text{si } \cos x_1 < \frac{1}{2a} \\ k & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

La ley de control correspondiente es

$$u = \underbrace{2a \sin x_1}_{u_c} + \underbrace{\tilde{\varphi}_\varepsilon(x_1, x_2)x_2 \cos x_1}_{u_d}. \quad (24)$$

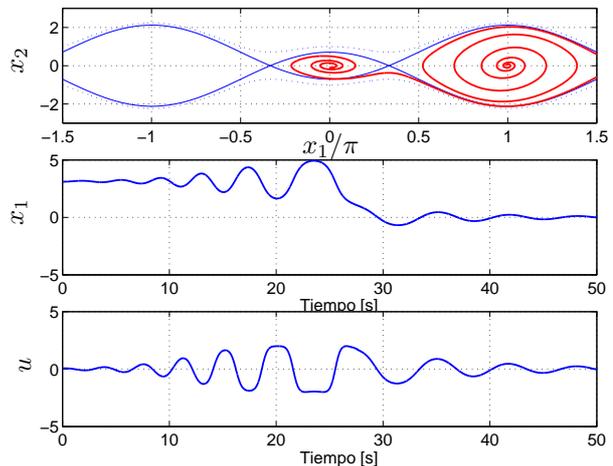


Figura 9. Resultados de una simulación con  $a = 1$ ,  $\varepsilon = 0.25$  y  $k = 0.2$ . Condiciones iniciales: posición colgante en reposo.

En las figuras 9, 10 y 11 se muestran los resultados de la aplicación de la ley para distintos valores del parámetro  $k$ . En estas figuras se pone de manifiesto como la trayectoria abandona el pozo indeseado, debido a la inyección de energía, y entra en el deseado de manera que finalmente alcanza el origen.

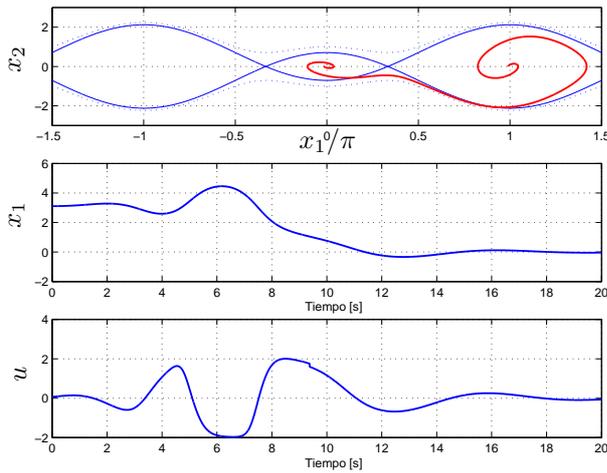


Figura 10. Resultados de una simulación con  $a = 1$ ,  $\varepsilon = 0.25$  y  $k = 0.6$ . Condiciones iniciales: posición colgante en reposo.

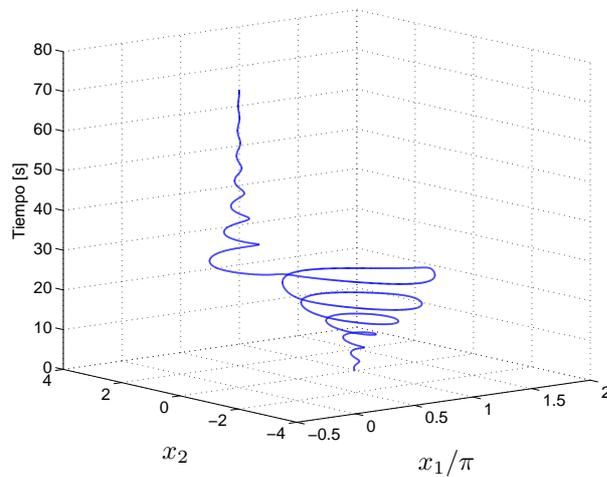


Figura 11. Una trayectoria que sale del pozo indeseado (posición colgante) y alcanza la posición deseada, para  $k = 0.2$ . El eje vertical es el tiempo.

## 5. PÉNDULO CON SOPORTE

En este apartado vamos a considerar el comportamiento del sistema completo incluyendo el soporte del péndulo (carro o brazo), que se pretende que se pare cuando aquél alcanza la posición invertida deseada. Para ello tomaremos como modelo del sistema en bucle abierto el que resulta de la linealización parcial del modelo completo del péndulo sobre el carro (Spong, 1996)

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= \sin x_1 - \cos x_1 u \\ \dot{x}_3 &= u,\end{aligned}\quad (25)$$

donde la nueva variable introducida,  $x_3$ , corresponde a la velocidad del carro. Ya se ha visto en las dos secciones anteriores como controlar las dos primeras ecuaciones de (25). Se trata ahora de modificar esa ley de control para además de llevar el péndulo a la posición deseada, parar el

carro. No se va a tratar de llevar el carro a una posición deseada por lo que el problema se puede considerar de dimensión 3.

Vamos a considerar, en primer lugar, la ley de control (9) que es válida únicamente, como se ha indicado anteriormente, para trayectorias de la varilla del péndulo sobre la horizontal. Para controlar el carro se suma una nueva variable de control  $v$  a la ya obtenida, de modo que se postula una ley de control de la forma

$$u = 2 \tan x_1 + v \quad (26)$$

que aplicada a (25) conduce a

$$\dot{x}_1 = x_2 \quad (27)$$

$$\dot{x}_2 = -\sin x_1 - \cos x_1 v \quad (28)$$

$$\dot{x}_3 = 2 \tan x_1 + v \quad (29)$$

y haciendo  $[x_1 \ x_2]^T = \xi$  y  $x_3 = z$  las anteriores ecuaciones del sistema pueden escribirse en la forma

$$\begin{aligned}\dot{z} &= h(\xi) + g_1(\xi)v \\ \dot{\xi} &= f(\xi) + g_2(\xi)v,\end{aligned}\quad (30)$$

que posee una estructura triangular que permite aplicar el método *forwarding*<sup>3</sup> para la determinación de la señal de control  $v$  (Sepulchre *et al.*, 1997). En efecto adoptando como candidata a la función de Liapunov

$$V = \frac{x_2^2}{2} + 1 - \cos x_1 + \frac{\alpha}{2} \nu^2(x_1, x_2, x_3),$$

en donde el último término se ha incluido para dar cuenta de la interacción entre el péndulo y el soporte. La variable  $\nu$  representa un invariante del sistema para  $v = 0$ , como se pondrá de manifiesto más abajo. Se trata de que la derivada con respecto al tiempo de la función de Liapunov sea definida negativa. Esta derivada es

$$\dot{V} = x_2 \dot{x}_2 + \sin x_1 \dot{x}_1 + \alpha \nu \nabla \nu \dot{x},$$

<sup>3</sup> En estos últimos años se han desarrollado métodos para determinar leyes de control en sistemas no lineales que poseen una estructura escalonada, de modo que es posible encontrar la solución para un subsistema, y a partir de ella ir escalonando progresivamente los subsistemas considerados hasta abordar el sistema completo. Se procede, por tanto, por pasos o escalones sucesivos. Se han propuesto dos estructuras de esta naturaleza que se han denominado *backstepping* y *forwarding*, respectivamente. La estructura escalonada en ambos casos es semejante, pero mientras que en el primero la señal de control afecta únicamente al último de los subsistemas considerados, en el segundo afecta a todos los subsistemas. Esto hace que este último sea considerablemente más difícil de resolver. En la actualidad se carece de una traducción aceptada al español de estos métodos que, por otra parte, no pueden tampoco denominarse con el nombre de su autor, ya que son muchos los que han contribuido a ellos.

desarrollando esta expresión y sustituyendo los valores correspondientes de (25) se tiene

$$\dot{V} = \alpha\nu \left( \frac{\partial\nu}{\partial x_1} x_2 - \sin x_1 \frac{\partial\nu}{\partial x_2} + 2 \frac{\partial\nu}{\partial x_3} \tan x_1 \right) + v \left( -x_2 \cos x_1 + \alpha\nu \left( \cos x_1 \frac{\partial\nu}{\partial x_2} + \frac{\partial\nu}{\partial x_3} \right) \right).$$

El primer sumando se puede anular haciendo que  $\nu$  satisfaga la ecuación en derivadas parciales

$$\frac{\partial\nu}{\partial x_1} x_2 - \sin x_1 \frac{\partial\nu}{\partial x_2} + 2 \frac{\partial\nu}{\partial x_3} \tan x_1 = 0, \quad (31)$$

es decir,  $\nu$  debe ser invariante para  $v = 0$ . Resolviendo esta ecuación en derivadas parciales se tiene

$$\nu_1 = x_3 + M(x_1, x_2) \text{ si } E < 0 \quad (32)$$

$$\nu_2 = x_3 - 2\sqrt{\frac{2}{E}} \operatorname{arctanh} \left( \frac{x_2}{\sqrt{2E}} \right) \text{ si } E > 0 \quad (33)$$

con

$$M(x_1, x_2) = \frac{4 \arctan \left( \frac{x_2}{\sqrt{-2E}} \right)}{\sqrt{-2E}}, \quad (34)$$

y donde  $E = \frac{x_2^2}{2} - \cos x_1$  es la energía del subsistema formado por el péndulo. La primera de estas soluciones,  $\nu_1$ , es la que está bien definida en el entorno del origen.

Para que se cumpla  $\dot{V} \leq 0$  se hace

$$v = - \left( -x_2 \cos x_1 + \alpha\nu \left( \cos x_1 \frac{\partial\nu}{\partial x_2} + \frac{\partial\nu}{\partial x_3} \right) \right)$$

en donde sustituyendo la expresión de  $\nu_1$  obtenida en (32) se tiene la ley de control

$$v = x_2 \cos x_1 - \alpha (x_3 + M(x_1, x_2)) \left( 1 - \cos x_1 \left( -\frac{4 + M(x_1, x_2)x_2}{2E} \right) \right). \quad (35)$$

Un estudio más detallado de lo anterior puede verse en (Gordillo *et al.*, 2004b; Marichal *et al.*, 2004). Interesa resaltar que para la resolución del problema de control teniendo en cuenta el movimiento del carro, se ha tenido que recurrir a otro de los métodos de control no lineal que tiene una gran actualidad, el *forwarding* (Sepulchre *et al.*, 1997).

Sin embargo la aplicación de este método implica la resolución de la ecuación en derivadas parciales

(31) que no en todos los casos es posible. Es lo que sucede cuando se aplica la ley de control (24) determinada en el apartado anterior. En efecto, si se aplica esta ley de control, a la que se suma una señal adicional  $v$  se tiene

$$u = 2a \sin x_1 + \tilde{\varphi}_\varepsilon x_2 \cos x_1 + v, \quad (36)$$

que aplicada a (25) da

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= \sin x_1 - 2a \sin x_1 \cos x_1 \\ &\quad - \tilde{\varphi}_\varepsilon x_2 \cos^2 x_1 - \cos x_1 v \\ \dot{x}_3 &= 2a \sin x_1 + \tilde{\varphi}_\varepsilon x_2 \cos x_1 + v. \end{aligned} \quad (37)$$

En este caso la aplicación del método convencional de *forwarding* conduce a una ecuación en derivadas parciales que aparentemente no tiene solución. Afortunadamente para casos como este se dispone del control con señales acotadas propuesto originalmente por Teel (Teel, 1992a; Teel, 1992b; Teel, 1996). Este método ha sido modificado recientemente por Kaliora y Astolfi (Kaliora y Astolfi, 2001; Kaliora, 2002; Kaliora y Astolfi, 2004). De esta propuesta se sugiere, para el caso que nos ocupa, una ley de control de la forma

$$v = -\varepsilon_2 \operatorname{sat} \left( \frac{\lambda x_3}{\varepsilon_2} \right), \quad (38)$$

en donde la función de saturación está definida por  $\operatorname{sat}(y) = \operatorname{sgn}(y) \min\{|y|, 1\}$  y  $0 < \varepsilon_2 \ll 1$ . De este modo la ley de control a aplicar es

$$u = 2a \sin x_1 + \tilde{\varphi}_\varepsilon x_2 \cos x_1 - \varepsilon_2 \sigma \left( \frac{\lambda x_3}{\varepsilon_2} \right). \quad (39)$$

El funcionamiento de esta ley de control es intuitivo. Para valores de  $x_1$  y  $x_2$  separados de la posición deseada el último término de (39) es despreciable frente a los dos primeros y el controlador se ocupa únicamente de llevar el péndulo a la posición invertida, desocupándose del movimiento del soporte, es decir de  $x_3$ . Sin embargo, tan pronto como el péndulo alcanza la posición vertical se hace  $x_1 = x_2 = 0$  y se anulan los dos primeros términos de (39), mientras que el tercero sigue actuando determinando que  $x_3$  lentamente se haga igual a cero, es decir, que el carro se pare. En la figura 12 se muestra el comportamiento de esta ley de control. El fundamento riguroso del método puede verse en (Kaliora y Astolfi, 2001; Kaliora, 2002; Kaliora y Astolfi, 2004).

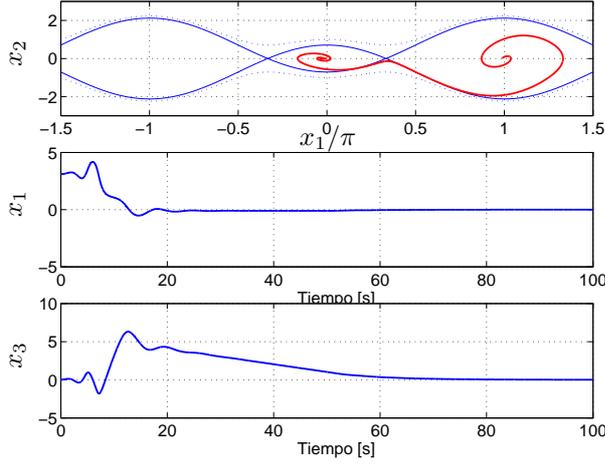


Figura 12. Resultados de una simulación con  $a = 1$ ,  $k = 0.5$ ,  $\lambda = 0.1$ ,  $\varepsilon = 0.25$  y  $\varepsilon_2 = 0.1$ . Condiciones iniciales: posición colgante en reposo.

## 6. GENERACIÓN AUTÓNOMA DE OSCILACIONES EN EL PÉNDULO INVERTIDO

En este apartado se plantea otro de los problemas que se pueden considerar en el péndulo invertido y se esboza una solución del mismo (Gómez-Estern, 2003). En los apartados anteriores el objetivo era estabilizar el péndulo en la posición superior. Ahora este objetivo se sustituye por el de conseguir que el péndulo oscile alrededor de la posición superior con una determinada amplitud deseada. En otras palabras, se pretende generar un ciclo límite estable alrededor del origen. Para resolver este problema se puede emplear un método semejante al propuesto en (Aracil *et al.*, 2002). Se propone como sistema deseado

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{\Gamma} \\ -\frac{1}{\Gamma} & -k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Gamma \frac{\partial \Gamma}{\partial x_1} \\ \Gamma \frac{\partial \Gamma}{\partial x_2} \end{bmatrix}, \quad (40)$$

en dónde  $\Gamma = 0$  es una curva cerrada que representa al ciclo límite. En el caso más sencillo se adopta  $\Gamma = (x_1^2 + x_2^2 - \mu)$ , donde  $\mu^2$  es el radio de una circunferencia ciclo límite. En ese caso las ecuaciones (40) se convierten en

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= -x_1 - k\Gamma x_2. \end{aligned} \quad (41)$$

este sistema es un oscilador con amortiguamiento no lineal, y tiene como función de Liapunov  $V = \Gamma^2/4$  (figura 13).

Ajustando (*matching*) los sistemas en bucle abierto y cerrado se obtiene

$$u = \frac{x_1 + k\Gamma x_2 + \sin x_1}{\cos x_1}, \quad (42)$$

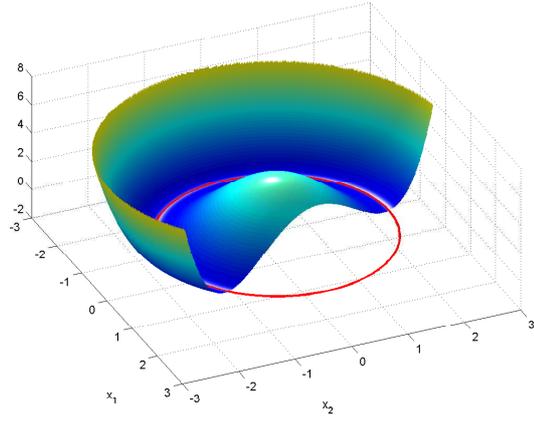


Figura 13. Función de energía deseada para la generación de oscilaciones.

que aplicada al péndulo (4) lo hace oscilar periódicamente en un ciclo límite dado por  $x_1^2 + x_2^2 = \mu$ . Debido al término  $\cos x_1$  en el denominador la ley de control (42) está restringida al dominio  $|x_1| < \pi/2$ . En la figura 14 se muestra una simulación del sistema.

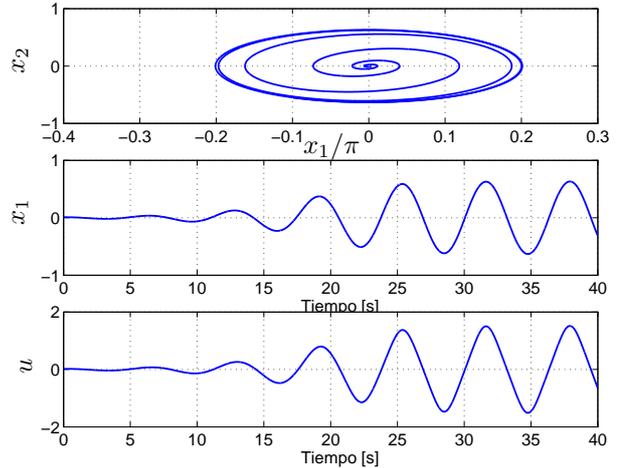


Figura 14. Resultados de simulación en el problema de generación de oscilaciones.

Hasta aquí se ha considerado únicamente la actuación sobre el péndulo. Si se pretende actuar también sobre el soporte entonces el problema es sensiblemente más complicado. Como sucedía anteriormente en el apartado 5, con relación a los anteriores. El espacio concedido en este artículo no permite tratarlo. Una solución a este problema puede verse en (Aracil *et al.*, 2005) en donde se ha aplicado el método de Fradkov.

## 7. CONCLUSIONES

En este artículo se ha presentado una revisión de distintos problemas de control no lineal tomando como referencia el péndulo invertido. En particular se ha empleado el formalismo asociado a los sistemas Hamiltonianos generalizados y el

moldeo de energía para el diseño de controladores. También se ha recurrido al *forwarding* para determinar el controlador del sistema formado por el péndulo invertido y el soporte que lo arrastra, sistema que presenta la estructura en cascada o triangular a la que se puede aplicar ese método. Asimismo se ha empleado, aunque en el artículo sólo se ha aludido someramente a ello, el método de Fradkov para resolver problemas relacionados con el péndulo invertido.

Por otra parte, se ha puesto de manifiesto cómo en el péndulo invertido aparecen los problemas más notables que justifican lo específico del estudio de los sistemas no lineales. Las dos características radicales de los sistemas no lineales, con relación a los lineales, son la presencia de múltiples equilibrios y los comportamientos oscilatorios. Ambos han aparecido en el estudio que se ha hecho del péndulo invertido. Además, y aunque no se haya podido tratar aquí en detalle por razones de espacio, se ha puesto de manifiesto la dificultad del control de un sistema inestable (trivial en el caso lineal) no lineal. En el caso del péndulo de Furuta pueden aparecer incluso problemas de tiempo de escape finito que, como se sabe, son de extrema complejidad.

#### Agradecimientos

Los autores desean expresar su agradecimiento al profesor Sebastián Dormido por sus valiosos comentarios y sugerencias y al doctor José Ángel Acosta por la preparación de las Figuras 1 y 2. Este trabajo ha sido financiado por el proyecto MCYT-FEDER DPI2003-00429.

#### REFERENCIAS

- Acosta, José Ángel (2004). Control no lineal de sistemas subactuados. Tesis doctoral. Universidad de Sevilla.
- Angeli, D. (2001). Almost global stabilization of the inverted pendulum via continuous state feedback. *Automatica* **37**, 1103–1108.
- Aracil, J., A. Fradkov y F. Gordillo (2005). Speed-gradient algorithms for underactuated nonlinear systems. En: *2005 IFAC World Congress*.
- Aracil, J., F. Gordillo y J.A. Acosta (2002). Stabilization of oscillations in the inverted pendulum. En: *XV IFAC World Congress*.
- Aracil, J. y F. Gordillo (2002). On the control of oscillations in DC-AC converters. En: *Proc. IECON'02*. Sevilla, Spain.
- Åström, K.J., J. Aracil y F. Gordillo (2005). A new family of smooth strategies for swinging up a pendulum. En: *16<sup>th</sup> IFAC World Congress*. Prague.
- Åström, K.J. y K. Furuta (2000). Swinging up a pendulum by energy control. *Automatica* **36**, 287–295.
- Bloch, A. M., N. E. Leonard y J. E. Marsden (1999). Stabilization of the pendulum on a rotor arm by the method of controlled Lagrangians. En: *Proc. of the 1999 IEEE ICRA*. pp. 500–505.
- Furuta, K. (2003). Control of pendulum: From super mechano-system to human adaptive mechatronics. En: *Proceedings of the 42nd IEEE CDC*. pp. 1498–1507.
- Gómez-Estern, Fabio (2003). Control de sistemas no lineales basado en la estructura Hamiltoniana. Tesis doctoral. Universidad de Sevilla.
- Gordillo, F., D. Pagano y J. Aracil (2004a). Autonomous oscillation generation in electronic converters. En: *Proceedings of the 2004 International Workshop on Electronics and System Analysis, IWESA'04*. pp. 57–65.
- Gordillo, F., F. Salas y J. Aracil (2004b). A forwarding controller for the pendulum on a cart. En: *Proceedings of CONTROL'04*. pp. 79–84.
- Gordillo, F., J. Aracil y J.A. Acosta (2004c). A control strategy for the cart-pendulum system. En: *Proceedings of the Sixth CONTROL'04*. pp. 214–219.
- Gordillo, F., J.A. Acosta y J. Aracil (2003). A new swing-up law for the Furuta pendulum. *International Journal of Control* **76**(8), 836–844.
- Hale, J. K. y H. Koçak (1991). *Dynamics and Bifurcations*. Springer-Verlag.
- Kaliora, G. y A. Astolfi (2001). A simple design for the stabilization of a class of cascaded nonlinear systems with bounded control. En: *Proceedings of the 40th IEEE Conference on Decision and Control*. pp. 3784–3789.
- Kaliora, G. y A. Astolfi (2004). Nonlinear control of feedforward systems with bounded control. *IEEE Trans. on Automatic Control* **49**(11), 1975–1990.
- Kaliora, Georgia (2002). Control of nonlinear systems with bounded signals. Tesis doctoral. Imperial College of Science, Technology and Medicine. London.
- Lozano, R., I. Fantoni y D.J. Block (2000). Stabilization of the inverted pendulum around its homoclinic orbit. *Systems and Control Letters* **40**(3), 197–204.
- Marichal, R., J. Aracil y F. Gordillo. (2004). Estudio de la técnica forwarding mod $\{L_g V\}$  en los sistemas mecánicos. En: *XXV Jornadas de Automática*. Ciudad Real, España.
- Mazenc, F. y L. Praly (1996). Adding integrations, saturated controls, and stabilization for feedforward systems. *IEEE Trans. on Autom. Control* **41**(11), 1559 – 1578.

- Ortega, R., A. J. Van Der Schaft, I. Mareels y B. Maschke (2001). Putting energy back in control. *IEEE Control Systems Magazine* **21**(1), 18–33.
- Pagano, D. J., J. Aracil y F. Gordillo (2005). Autonomous oscillation generation in the boost converter. En: *16<sup>th</sup> IFAC World Congress*.
- Pagano, Daniel J. (1999). Bifurcaciones en sistemas de control no lineales. Tesis doctoral. Universidad de Sevilla.
- Rantzer, Anders y Francesca Ceragioli (2001). Smooth blending of nonlinear controllers using density functions. En: *Proceedings of European Control Conference*.
- Sepulchre, R., M. Jankovic y P. Kokotovic (1997). *Constructive Nonlinear Control*. Springer-Verlag.
- Shiriaev, A.S., O. Egeland, H. Ludvigsen y A.L. Fradkov (2001). VSS-version of energy based control for swinging up a pendulum. *Syst. & Contr. Lett.* **44**(1), 41–56.
- Spong, M.W. (1995). The swing up control problem for the acrobat. *IEEE Control Systems Magazine* **15**(1), 49–55.
- Spong, M.W. (1996). Energy based control of a class of underactuated mechanical systems. En: *13<sup>th</sup> IFAC World Congress*. pp. 431–435.
- Srinivasan, B., P. Huguenin, K. Guemghar y D. Bonvin (2002). A global stabilization strategy for an inverted pendulum. En: *15<sup>th</sup> IFAC World Congress*.
- Stein, G. (1989). Respect the unstable. En: *28th Conf. Decision and Control*. Bode Lecture.
- Stein, G. (2003). Respect the unstable. *IEEE Control Systems Magazine* **23**(4), 12–25.
- Teel, A. R. (1992a). Feedback stabilization: Nonlinear solutions to inherently nonlinear problems. Tesis doctoral. University of California at Berkeley.
- Teel, A. R. (1992b). Global stabilization and restricted tracking for multiple integrators with bounded control. *Systems and Control Letters* **18**(3), 165–171.
- Teel, A. R. (1996). A nonlinear small gain theorem for the analysis of control systems with saturation. *IEEE Transactions on Automatic Control* **41**(9), 1256–1270.
- Utkin, V.I., D.S. Chen y H.C. Chang (2000). Block control principle for mechanical systems. *Journal of Dynamic Systems, Measurement and Control* **122**, 1–10.
- van der Schaft, A. (2000). *L<sub>2</sub>-Gain and Passivity Techniques in Nonlinear Control*. Second revised and enlarged edition. Communications and Control Engineering Series. Springer-Verlag.
- Wiklund, M., A. Kristenson y K. J. Åström (1993). A new strategy for swinging up an inverted pendulum. En: *Proc. IFAC 12th World Congress*. Vol. 9. pp. 151–154.
- Zhao, J. y M. W. Spong (2001). Hybrid control for global stabilization of the cart-pendulum system. *Automatica* **37**, 1941–1951.