

## CONTROL BASADO EN IDA-PBC DEL PÉNDULO CON RUEDA INERCIAL: ANÁLISIS EN FORMULACIÓN LAGRANGIANA<sup>1</sup>

Rafael Kelly y Ricardo Campa

*Centro de Investigación Científica y de Educación Superior de  
Ensenada, Apdo. Postal 2615 Adm. 1  
Ensenada, B.C., 22800  
MEXICO  
e-mail: rkelly@cicese.mx*

**Resumen:** El método de diseño *control basado en pasividad con asignación de interconexión y amortiguamiento* mejor conocido por sus siglas en inglés IDA-PBC ha sido recientemente propuesto en Ortega *et al.* (2002). Su potencial de aplicación es particularmente importante para sistema subactuados. Esta filosofía de diseño —originalmente formulada para sistemas hamiltonianos— fue ilustrada mediante la aplicación al control de un mecanismo subactuado conocido como péndulo con rueda inercial. El objetivo del presente trabajo es complementar dicha aplicación a través del análisis completo y en detalle —desde una perspectiva lagrangiana— empleando explícitamente el principio de invariancia de LaSalle y los métodos de Lyapunov.  
*Copyright © 2005 CEA-IFAC*

**Palabras clave:** Péndulo con rueda inercial, LaSalle, Estabilización, Pasividad, Sistemas subactuados.

### 1. INTRODUCCIÓN

El control de sistemas subactuados —aquellos que poseen más grados de libertad que acciones de control— presenta retos importantes en control automático. El *control basado en pasividad con asignación de interconexión y amortiguamiento (IDA-PBC)* propuesto por Ortega *et al.* (2002) es un método de diseño de control para sistemas físicos inspirado en conceptos energéticos. El método fue originalmente planteado para sistemas hamiltonianos y luego adaptado para sistemas lagrangianos en Blankenstein *et al.* (2002). En esencia, el método IDA-PBC se fundamen-

ta en especificar y obtener un sistema en malla cerrada cuya función de energía total —suma de las energías cinética y potencial— convenga a los fines del planteamiento del problema de control. El diseño del sistema de control se facilita cuando el sistema a controlar puede expresarse como un sistema pasivo, siendo éste el caso de una gran variedad de sistema físicos.

El método IDA-PBC presenta enorme potencial sobre todo cuando se trata de controlar sistemas subactuados. El método es descrito con lujo de detalle en Ortega *et al.* (2002) y se ilustra mediante dos ejemplos de mecanismos subactuados. El primero de ellos corresponde al péndulo con rueda inercial mostrado esquemáticamente en la Figura 1.

Éste es un péndulo que puede girar libremente sobre su pivote y dispone de un disco simétrico colocado en el extremo que puede girar gracias

<sup>1</sup> Trabajo financiado parcialmente por CONACyT, México. Una versión preliminar de este trabajo fue presentada en el XI Congreso Latinoamericano de Control Automático, La Habana, Cuba, celebrado del 10 al 15 de mayo de 2004.

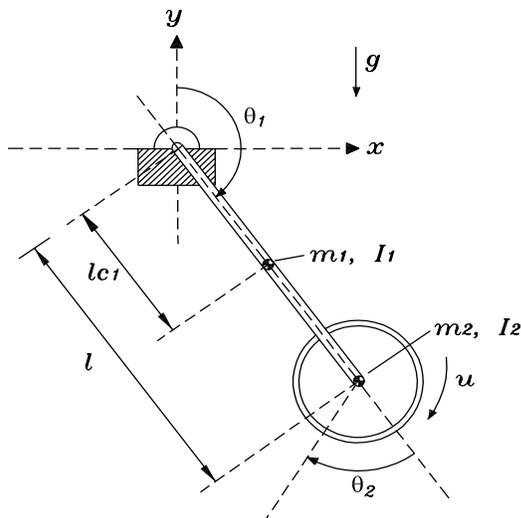


Figura 1. Péndulo con rueda inercial.

a un actuador. Ambos ejes de rotación, el del péndulo y el del disco, son paralelos. El control de este mecanismo ha sido objeto de estudio por parte de varios autores, e.g. Fantoni *et al.* (2001).

En palabras, el problema de control considerado en este trabajo consiste en llevar al péndulo a su configuración vertical hacia arriba mediante el giro adecuado del disco colocado en su extremo. Mediante el método IDA-PBC, Ortega *et al.* (2002) diseñaron un controlador que es capaz de resolver este problema de control de forma “casi” global. Dada la trascendencia que reviste este resultado, en este trabajo se aborda el sistema de control de manera independiente en formulación lagrangiana, ya no desde una óptica de diseño sino de análisis, partiendo del controlador resultante por el método IDA-PBC. Se trata de un estudio complementario completo y en detalle empleando explícitamente el principio de invariancia de LaSalle y los métodos de Lyapunov. Una versión preliminar de este estudio fue reportada en Kelly (2004).

## 2. PÉNDULO CON RUEDA INERCIAL Y OBJETIVO DE CONTROL

Con referencia a la Figura 1 donde  $\theta_1$  y  $\theta_2$  denotan respectivamente las posiciones angulares del péndulo y el disco, el modelo dinámico del péndulo con rueda inercial viene dado por (Ortega *et al.* (2002)):

$$\begin{bmatrix} I_1 + I_2 & I_2 \\ I_2 & I_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{\theta}_1 \\ \ddot{\theta}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -[m_1 l_{c1} + m_2 l] g \sin(\theta_1) \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u \quad (1)$$

donde  $u$  es la entrada del sistema (el par ejercido por el actuador sobre el disco). El significado del resto de los parámetros es indicado en la Tabla

1. La naturaleza “subactuada” del mecanismo proviene del hecho de tratarse de uno de 2 grados de libertad, siendo  $\theta_1$  y  $\theta_2$  las variables articulares y disponiendo únicamente de una sola entrada  $u$ .

Tabla 1. Parámetros

Descripción	Notación
Longitud del péndulo	$l$
Distancia al centro de masa del péndulo	$l_{c1}$
Masa del péndulo	$m_1$
Masa del disco	$m_2$
Inercia de péndulo con disco respecto al pivote	$I_1$
Inercia del disco	$I_2$
Aceleración de la gravedad	$g$

Defínase el cambio global de coordenadas

$$\begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \end{bmatrix}. \quad (2)$$

Multiplicando el modelo de la planta (1) por la izquierda por la matriz  $\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$  y considerando (2) resulta

$$\begin{bmatrix} I_1 & 0 \\ 0 & I_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{q}_1 \\ \ddot{q}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -m_3 \sin(q_1) \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} u \quad (3)$$

donde se ha definido  $m_3 \triangleq m_1 g l_{c1} + m_2 g l > 0$ . Este es el modelo que será considerado para el péndulo con rueda inercial.

El problema de control se establece formalmente como diseñar un controlador capaz de satisfacer el siguiente objetivo de control

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \text{dist}(q_1(t), \Gamma) = 0, \quad (4)$$

donde  $\text{dist}(q_1, \Gamma)$  denota la distancia más pequeña entre  $q_1$  y cualquier elemento del conjunto  $\Gamma$  definido por

$$\Gamma = \{\dots, -4\pi, -2\pi, 0, 2\pi, 4\pi, \dots\}.$$

Esto significa que se trata de colocar al péndulo en configuración vertical con el disco arriba, sin importar la posición angular de este último.

## 3. SISTEMA DE CONTROL

El método IDA-PBC brinda un procedimiento sistemático para el diseño de sistemas de control para sistemas hamiltonianos y lagrangianos que se sustenta en la solución de una ecuación diferencial parcial. Aplicado al ejemplo de péndulo con rueda inercial, el procedimiento inspirado en IDA-PBC

condujo a Ortega *et al* (2002) a proponer el siguiente controlador:

$$u = \gamma_1 \sin(q_1) + k_p [q_2 + \gamma_2 q_1] + k_v k_2 [\dot{q}_2 + \gamma_2 \dot{q}_1] \quad (5)$$

donde  $k_p$  y  $k_v$  son ganancias positivas arbitrarias mientras que  $\gamma_1$ ,  $\gamma_2$ , y  $k_2$  deben seleccionarse adecuadamente de manera que cumplan con

$$\gamma_1 = \frac{a_2}{a_1 + a_2} m_3, \quad (6)$$

$$\gamma_2 = -\frac{I_1 [a_2 + a_3]}{I_2 [a_1 + a_2]}, \quad (7)$$

$$k_2 = -\frac{I_2 [a_1 + a_2]}{\Delta}, \quad (8)$$

donde

$$a_1 > 0, \quad \Delta = a_1 a_3 - a_2^2 > 0, \quad -a_1 > a_2. \quad (9)$$

Es interesante observar que la ley de control (5) tiene la siguiente estructura tipo PD más un término no lineal

$$u = \mathbf{k}_1 \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \end{bmatrix} + \mathbf{k}_2 \begin{bmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \end{bmatrix} + \gamma_1 \sin(q_1)$$

donde  $\mathbf{k}_1^T = k_p [\gamma_2 \quad 1]$  y  $\mathbf{k}_2 = \frac{k_v k_2}{k_p} \mathbf{k}_1$ .

La motivación en el diseño de la ley de control (5) es que, como se verá más adelante, produce junto con el modelo del mecanismo (1) un sistema en malla cerrada que posee una función de energía con puntos críticos en

$$\begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} n\pi \\ -\gamma_2 n\pi \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (11)$$

donde  $n \in \mathbb{N}$ . Por diseño, estos puntos críticos de la función de energía corresponden a los equilibrios del sistema en malla cerrada. Como  $\theta_1 = q_1$ , de la Figura 1 se observa que los equilibrios con  $n$  par están asociados a la configuración vertical del péndulo hacia arriba, mientras que con  $n$  impar se tiene la configuración del péndulo colgando.

#### 4. ANÁLISIS

En esta sección se presentará el análisis del sistema de control empleando el principio de invariancia de LaSalle y la teoría de estabilidad de Lyapunov.

##### 4.1 Sistema en malla cerrada

El sistema en malla cerrada se obtiene sustituyendo la acción de control (5) en el modelo del sistema

(3). Puede escribirse en términos de las coordenadas lagrangianas (posiciones y velocidades articulares) de la manera indicada en la Ecuación (10) en la parte superior de la siguiente página.

Esta es una ecuación diferencial no lineal pero autónoma. Puede verificarse fácilmente que los equilibrios vienen dados por (11). En vista de la existencia de un número infinito de equilibrios—todos aislados—ninguno de ellos podrá ser asintóticamente estable en forma global, pero sí pudieran serlo en forma local.

Con el propósito de demostrar cumplimiento del objetivo de control (4), se podría proceder en tres etapas:

- Primeramente demostrar que, independientemente de la condición inicial, las trayectorias correspondientes tienden asintóticamente a alguno de los equilibrios.
- Después probar que los equilibrios correspondientes a  $n$  par son estables.
- Finalmente establecer que los equilibrios asociados a  $n$  impar son inestables.

De esta forma, iniciando de casi cualquier condición inicial, se garantizará que las trayectorias tienden a los equilibrios estables, es decir,

$$\begin{bmatrix} q_1(t) \\ q_2(t) \\ \dot{q}_1(t) \\ \dot{q}_2(t) \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} n\pi \\ -\gamma_2 n\pi \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{cuando } t \rightarrow \infty,$$

con  $n$  par. Nótese que  $\lim_{t \rightarrow \infty} q_1(t) = n\pi$  para algún  $n$  par. Debido a ello se dice que el cumplimiento del objetivo de control (4) se logra en forma “casi” global, es decir, partiendo de “casi” cualquier condición inicial excepto en un conjunto de condiciones iniciales, que incluyen justamente a los equilibrios inestables y posiblemente otros puntos del espacio de estado si éstos fuesen del tipo “silla de montar”, en cuyo caso esos puntos corresponderían a las variedades estables de esos equilibrios inestables.

##### 4.2 Conjunto límite positivo

La determinación del conjunto límite positivo se hará aprovechando la naturaleza autónoma del sistema en malla cerrada (10) y así poder hacer uso del principio de invariancia de LaSalle. Una descripción detallada de esta herramienta se presenta en el libro de Khalil (1996).

Considérese la siguiente función propuesta por Ortega *et al*. (2002)

$$V(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = \frac{1}{2\Delta} [a_3 I_1^2 \dot{q}_1^2 - 2a_2 I_1 I_2 \dot{q}_1 \dot{q}_2 + a_1 I_2^2 \dot{q}_2^2] + \frac{I_1 m_3}{(a_1 + a_2)} [\cos(q_1) - 1] + \frac{k_1}{2} [q_2 + \gamma_2 q_1]^2$$

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \\ \frac{1}{I_1} [[m_3 - \gamma_1] \text{sen}(q_1) - [k_p [q_2 + \gamma_2 q_1] + k_v k_2 [\dot{q}_2 + \gamma_2 \dot{q}_1]]] \\ \frac{1}{I_2} [\gamma_1 \text{sen}(q_1) + k_p [q_2 + \gamma_2 q_1] + k_v k_2 [\dot{q}_2 + \gamma_2 \dot{q}_1]] \end{bmatrix}. \quad (10)$$

donde

$$k_1 = -k_p \left[ \frac{I_2 [a_1 + a_2]}{\Delta} \right] > 0. \quad (13)$$

La derivada temporal de (12) a lo largo de las trayectorias del sistema en malla cerrada (10) viene dada por

$$\begin{aligned} \dot{V}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) &= \alpha_1 \text{sen}(q_1) + \alpha_2 [q_2 + \gamma_2 q_1] k_p \\ &\quad + \alpha_3 k_v k_2 [\dot{q}_2 + \gamma_2 \dot{q}_1] \end{aligned} \quad (14)$$

donde

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= \left[ \frac{m_3 - \gamma_1}{\Delta} a_3 - \frac{a_2 \gamma_1}{\Delta} - \frac{m_3}{a_1 + a_2} \right] I_1 \dot{q}_1 \\ &\quad + \left[ -\frac{m_3 - \gamma_1}{\Delta} a_2 + \frac{a_1 \gamma_1}{\Delta} \right] I_2 \dot{q}_2, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \alpha_2 &= - \left[ \frac{I_1 [a_2 + a_3]}{\Delta} - \frac{k_1 \gamma_2}{k_p} \right] \dot{q}_1 \\ &\quad + \left[ \frac{I_2 [a_1 + a_2]}{\Delta} + \frac{k_1}{k_p} \right] \dot{q}_2, \end{aligned}$$

$$\alpha_3 = -\frac{I_1 [a_2 + a_3]}{\Delta} \dot{q}_1 + \frac{I_2 [a_1 + a_2]}{\Delta} \dot{q}_2.$$

Gracias a la definición de  $\gamma_1$  en (6), el primer sumando es nulo, i.e.  $\alpha_1 = 0$ . Por otra parte, en virtud de las definiciones de  $\gamma_2$  y  $k_1$  en (7) y (13) respectivamente, el segundo sumando resulta cero, i.e.  $\alpha_2 = 0$ . Finalmente, con respecto al tercer sumando, de las definiciones de  $\gamma_2$  y  $k_2$  en (7) y (8) respectivamente, se tiene que

$$\alpha_3 = -k_2 [\dot{q}_2 + \gamma_2 \dot{q}_1].$$

Estos argumentos permiten simplificar la derivada a

$$\dot{V}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = -k_v k_2^2 [\dot{q}_2 + \gamma_2 \dot{q}_1]^2 \quad (15)$$

que ciertamente es semidefinida negativa en forma global ya que por diseño  $k_v > 0$ . De acuerdo al principio de invariancia de LaSalle, se define el conjunto  $\Omega$  como

$$\begin{aligned} \Omega &= \left\{ \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^4 : \dot{V}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = 0 \right\}, \\ &= \{q_1, q_2 \in \mathbb{R} \ \& \ \dot{q}_2 + \gamma_2 \dot{q}_1 = 0\}. \end{aligned}$$

(12) El principio de invariancia de LaSalle establece que todas las trayectorias tienden asintóticamente al máximo conjunto invariante en  $\Omega$ . Queda por determinar el máximo conjunto invariante. Con este fin, obsérvese que cualquier trayectoria en  $\Omega$  debe cumplir con

$$\dot{q}_2(t) + \gamma_2 \dot{q}_1(t) \equiv 0, \quad (16)$$

y por lo tanto también debe satisfacer

$$\ddot{q}_2(t) + \gamma_2 \ddot{q}_1(t) \equiv 0 \quad (17)$$

y

$$q_2(t) + \gamma_2 q_1(t) \equiv k, \quad (18)$$

para alguna constante  $k$ . Considerando (17) y el sistema en malla cerrada (10) se obtiene, después de tomar en cuenta (16)

$$\begin{aligned} \text{sen}(q_1(t)) \left[ \frac{\gamma_1}{I_2} + \frac{\gamma_2 [m_3 - \gamma_1]}{I_1} \right] \\ + k_p \left[ \frac{1}{I_2} - \frac{\gamma_2}{I_1} \right] [q_2(t) + \gamma_2 q_1(t)] \equiv 0. \end{aligned}$$

Pero de (18) se tiene  $q_2(t) + \gamma_2 q_1(t) \equiv k$ , entonces se desprende que

$$\text{sen}(q_1(t)) \left[ \frac{\gamma_1}{I_2} + \frac{\gamma_2 [m_3 - \gamma_1]}{I_1} \right] + k_p k \left[ \frac{1}{I_2} - \frac{\gamma_2}{I_1} \right] \equiv 0$$

dando como resultado que  $q_1(t)$  debe ser constante y en consecuencia  $\dot{q}_1(t) \equiv 0$ . Entonces de (16) se concluye que  $\dot{q}_2(t) \equiv 0$ . En resumen, para que una trayectoria permanezca en  $\Omega$  debe cumplir

$$\begin{bmatrix} \dot{q}_1(t) \\ \dot{q}_2(t) \end{bmatrix} \equiv \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (19)$$

Por lo tanto se llega a que  $\ddot{q}_1(t) \equiv 0$  y  $\ddot{q}_2(t) \equiv 0$ . Incorporando esta información así como (16) en el sistema de malla cerrada (10) se tiene que

$$\begin{aligned} m_3 \text{sen}(q_1(t)) - \gamma_1 \text{sen}(q_1(t)) - k_p [q_2(t) + \gamma_2 q_1(t)] &\equiv 0, \\ \gamma_1 \text{sen}(q_1(t)) + k_p [q_2(t) + \gamma_2 q_1(t)] &\equiv 0, \end{aligned}$$

cuyas soluciones son

$$\begin{bmatrix} q_1(t) \\ q_2(t) \end{bmatrix} \equiv \begin{bmatrix} n\pi \\ -\gamma_2 n\pi \end{bmatrix} \quad (20)$$

con  $n \in \mathbb{N}$ . Este desarrollo, y en particular las conclusiones (19) y (20), permiten establecer que las únicas trayectorias del sistema en malla cerrada (10) que inician en  $\Omega$  y permanecen ahí,

son aquellas cuyas condiciones iniciales coinciden con los equilibrios definidos en (11). En otras palabras, los equilibrios del sistema en malla cerrada definen el máximo conjunto invariante de (10) en  $\Omega$ ; cualquier otra trayectoria partiendo en  $\Omega$  de un punto diferente a uno de los equilibrios (11), en un tiempo dado abandona  $\Omega$ . Con esto se puede afirmar que el subconjunto del espacio de estado formado por los puntos de equilibrios definen el conjunto límite positivo del sistema en malla cerrada al que tienden las trayectorias, independientemente de las condiciones iniciales.

#### 4.3 Equilibrios estables

Con el propósito de demostrar cumplimiento del objetivo de control (4), el siguiente paso es establecer que todos los equilibrios asociados a  $n$  par son estables.

Para este fin, se empleará la función (12) como función candidata de Lyapunov. Para que ésta califique como tal, es necesario demostrar que sea una función definida positiva con respecto a  $[q_1 - n\pi \quad q_2 + \gamma_2 n\pi \quad \dot{q}_1 \quad \dot{q}_2]^T$  para  $n$  par, al menos en forma local.

Obsérvese que el primer sumando de (12) puede expresarse como

$$\frac{1}{2\Delta} [a_3 I_1^2 \dot{q}_1^2 - 2a_2 I_1 I_2 \dot{q}_1 \dot{q}_2 + a_1 I_2^2 \dot{q}_2^2] = \frac{1}{2\Delta} \dot{\mathbf{q}}^T \begin{bmatrix} I_1 & 0 \\ 0 & I_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_3 & -a_2 \\ -a_2 & a_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1 & 0 \\ 0 & I_2 \end{bmatrix} \dot{\mathbf{q}}$$

por lo que resulta definido positivo con respecto a  $\dot{\mathbf{q}}$  debido a las dos primeras desigualdades en (9). Queda por verificar que los últimos dos sumandos de (12) forman una función definida positiva localmente con respecto a  $[q_1 - n\pi \quad q_2 + \gamma_2 n\pi]^T$ , siendo  $n$  par. Para ello hay que demostrar que estos términos sean nulos ahí —lo cual es inmediato por sustitución directa— y que además poseen mínimos locales aislados. Para lo último, es suficiente con demostrar que su hessiano sea definido positivo al evaluarse en  $[q_1 - n\pi \quad q_2 + \gamma_2 n\pi]^T$  para todo  $n$  par. Cálculos directos permiten obtener el hessiano  $H(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$  siguiente

$$H(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = \begin{bmatrix} -\frac{I_1 m_3}{a_1 + a_2} \cos(q_1) + k_1 \gamma_2^2 & k_1 \gamma_2 \\ k_1 \gamma_2 & k_1 \end{bmatrix}$$

el cual resulta definido positivo al evaluarse en  $q_1 = n\pi$ , con  $n$  par, gracias a la tercera desigualdad en (9). Con esto termina la prueba de que la función candidata de Lyapunov (12) es definida positiva localmente con respecto a  $[q_1 - n\pi \quad q_2 + \gamma_2 n\pi \quad \dot{q}_1 \quad \dot{q}_2]^T$ , para  $n$  par.

Por otra parte, ya se demostró que la derivada temporal  $\dot{V}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$  a lo largo de las trayectorias del sistema en malla cerrada (10) puede expresarse

como (15), la cual es semidefinida negativa en forma global. De acuerdo con el método directo de Lyapunov (véase e.g. Vidyasagar (1993)), esto es suficiente para garantizar que todos los equilibrios asociados a  $n$  par son estables.

#### 4.4 Equilibrios inestables

Los equilibrios (11) asociados a  $n$  impar, son inestables. Un procedimiento para demostrarlo es mediante el primer método de Lyapunov, que permite extrapolar conclusiones sobre propiedades de estabilidad de equilibrios a sistemas no lineales partiendo de las propiedades de dichos equilibrios pero del sistema linealizado. En particular, si el polinomio característico resultante del sistema linealizado alrededor de un equilibrio no tiene raíces nulas y al menos una tiene parte real positiva, entonces dicho equilibrio del sistema no lineal original es inestable.

La matriz jacobiana asociada a la linealización del sistema en malla cerrada (10) alrededor de cualquier equilibrio (11), con  $n$  impar, viene dada por

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{1}{I_1} [\gamma_1 - m_3 - k_p \gamma_2] & -\frac{1}{I_1} k_p & -\frac{1}{I_1} k_v k_2 \gamma_2 & -\frac{1}{I_1} k_v k_2 \\ \frac{1}{I_2} [-\gamma_1 + k_p \gamma_2] & \frac{1}{I_2} k_p & \frac{1}{I_2} k_v k_2 \gamma_2 & \frac{1}{I_2} k_v k_2 \end{bmatrix}.$$

El polinomio característico correspondiente a esta matriz es de cuarto orden con la estructura

$$c_0 \lambda^4 + c_1 \lambda^3 + c_2 \lambda^2 + c_3 \lambda + c_4$$

donde

$$\begin{aligned} c_0 &= 1, \\ c_1 &= -\frac{k_v k_2 [I_1 - I_2 \gamma_2]}{I_1 I_2}, \\ c_2 &= -\frac{k_p [I_1 - I_2 \gamma_2] + I_2 [\gamma_1 - m_3]}{I_1 I_2}, \\ c_3 &= -\frac{m_3 k_v k_2}{I_1 I_2}, \\ c_4 &= -\frac{m_3 k_p}{I_1 I_2}. \end{aligned}$$

Es importante notar que  $c_4 = -\frac{m_3 k_p}{I_1 I_2} < 0$ , por lo que el determinante de la matriz jacobiana es diferente de cero. Esto garantiza que el polinomio característico no tenga raíces con parte real nula. Por otro lado, de acuerdo con el criterio de Routh (véase e.g. Ogata (1980)) para que al menos una raíz del polinomio característico tenga parte real positiva es suficiente con que cualquiera de sus coeficientes sea negativo, en presencia de por lo menos uno positivo. Por lo tanto, debido a que  $c_0 > 0$  y  $c_4 < 0$ , el criterio de Routh garantiza

que al menos una raíz del polinomio característico tiene parte real positiva, concluyéndose que los equilibrios asociados a  $n$  impar son inestables.

## 5. SIMULACIONES

Se realizaron cuatro simulaciones con el fin de verificar la prestación del sistema de control; cada una de ellas corresponde a condiciones iniciales específicas. Los valores numéricos empleados fueron:  $a_1 = 1$ ,  $a_2 = -2$ , y  $a_3 = 5$ , que cumplen con las condiciones en (9). Parámetros relevantes del péndulo son:  $I_1 = 0.1$ ,  $I_2 = 0.2$  y  $m_3 = 10$ . Con ellos se determinaron los parámetros en las fórmulas (6) a (8):

$$\begin{aligned}\gamma_1 &= 20 \\ \gamma_2 &= 1.5 \\ k_2 &= 0.2\end{aligned}$$

Finalmente las ganancias libres se escogieron como:  $k_p = 3.75$  y  $k_v = 10$ .

La primera simulación corresponde a colocar el péndulo en una posición casi vertical siendo el ángulo del disco nulo, i.e.  $[q_1(0) \ q_2(0) \ \dot{q}_1(0) \ \dot{q}_2(0)]^T = [0.1 \ 0 \ 0 \ 0]^T$ . Como se muestra en la Figura 2, la evolución temporal de las posiciones articulares presenta un ligero transitorio para tender ambas hacia cero.

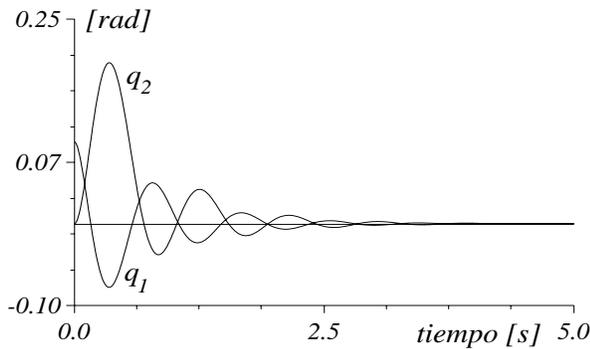


Figura 2. Evolución de  $q_1$  y  $q_2$ .

La segunda simulación considera nuevamente el péndulo en configuración muy cercana a la vertical hacia arriba pero ligeramente mayor que  $2\pi$  [rad]. Específicamente, la condición inicial fue  $[q_1(0) \ q_2(0) \ \dot{q}_1(0) \ \dot{q}_2(0)]^T = [7 \ 0 \ 0 \ 0]^T$ . Los resultados de simulación en la Figura 3 indican que ninguna de las posiciones articulares tiende a cero, sino que la posición del péndulo tiende a  $2\pi$  [rad]. Por lo tanto también satisface el objetivo de control al tender a la vertical hacia arriba, aunque el ángulo asociado al disco no resulte nulo.

Para la tercera simulación se ubicó al péndulo en configuración inicial completamente hacia abajo y

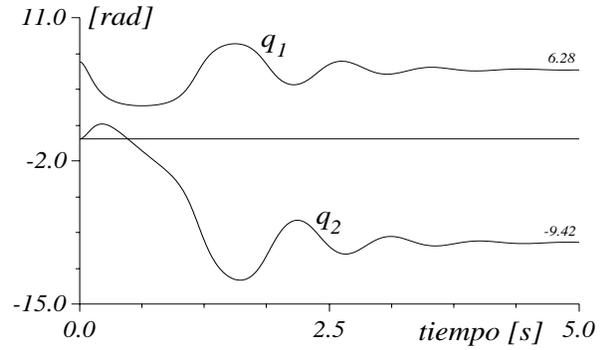


Figura 3. Evolución de  $q_1$  y  $q_2$ .

con la posición del disco nula, i.e.,  $[q_1(0) \ q_2(0) \ \dot{q}_1(0) \ \dot{q}_2(0)]^T = [\pi \ 0 \ 0 \ 0]^T$ . A pesar de encontrarse el péndulo completamente hacia abajo, esta condición inicial no corresponde a un equilibrio. La evolución temporal de las posiciones articulares se muestra en la Figura 4 de donde se desprende que ambas tienden asintóticamente a cero.

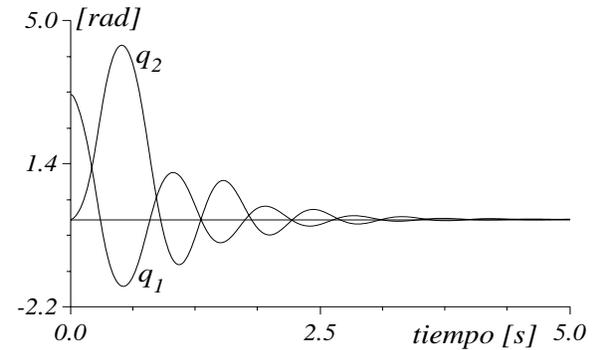


Figura 4. Evolución de  $q_1$  y  $q_2$ .

En la cuarta simulación el péndulo se encuentra inicialmente en configuración vertical hacia arriba, pero la posición del disco es ligeramente diferente de cero. A pesar de encontrarse el péndulo en la configuración deseada, la condición inicial  $[q_1(0) \ q_2(0) \ \dot{q}_1(0) \ \dot{q}_2(0)]^T = [0 \ 0.1 \ 0 \ 0]^T$  no corresponde a equilibrio alguno. Por lo tanto, tal y como se muestra en los resultados de simulación de la Figura 5, el péndulo abandona la posición vertical hacia arriba para tender nuevamente hacia ella al mismo tiempo que la posición del disco se dirige hacia cero.

## 6. CONCLUSIONES

El método IDA-PBC propuesto en Ortega *et al.* (2002) es una herramienta de diseño para control de sistemas físicos motivada por conceptos de energía. En el presente artículo se ha presentado un estudio sobre el control del mecanismo “péndulo con rueda inercial” mediante el control IDA-PBC, desde una formulación lagrangiana pretendiendo complementar el desarrollo expuesto original-

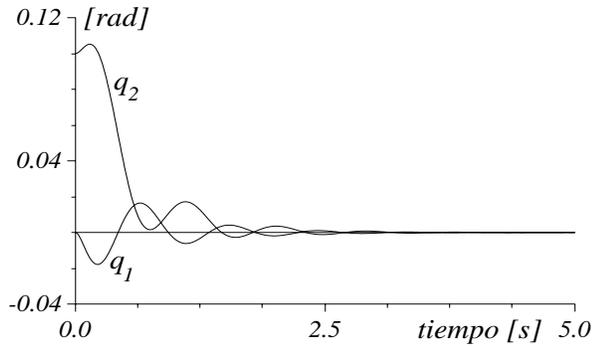


Figura 5. Evolución de  $q_1$  y  $q_2$ .

mente en Ortega *et al.* (2002). Si bien se ha presentado el análisis y no el diseño, el propósito ha sido motivar el uso y valorar el potencial de la metodología de diseño IDA–PBC para el control de sistemas mecánicos y en particular su aplicación a sistemas subactuados.

#### REFERENCIAS

- Blankenstein, G., R. Ortega and A. J. Van der Schaft, (2002). The matching conditions of controlled Lagrangians and IDA–passivity based control, *International Journal of Control*, Vol. 75, No. 9, pp. 645–665.
- Fantoni, I., R. Lozano and M. W. Spong, (2001). Stabilization of the reaction wheel pendulum using an energy approach. *Proc. of the European Control Conference ECC'01*, Porto, Portugal.
- Kelly, R., (2004). Análisis del control basado en IDA–PBC del péndulo con rueda inercial: Formulación lagrangiana. *Proc. XI Congreso Latinoamericano de Control Automático*, La Habana, Cuba.
- Ogata, K., (1980). *Ingeniería de control moderna*, Prentice–Hall Internacional, Madrid.
- Ortega, R., M. W. Spong, F. Gómez-Estern and G. Blankenstein, (2002). Stabilization of a class of underactuated mechanical systems via interconnection and damping assignment, *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 47, No. 8, pp. 1213–1233.
- Khalil, H. K. (1996). *Nonlinear systems*, Prentice–Hall, Upper Saddle River.
- Vidyasagar, M. (1993). *Nonlinear systems analysis*, Prentice–Hall, Englewood Cliffs.