

CONTROL MULTIFRECUENCIA EN TIEMPO REAL UTILIZANDO HERRAMIENTAS CACSD

Vélez C.M.¹, Salt J.²

¹Universidad EAFIT, Colombia, cmvelez@eafit.edu.co

²Universidad Politécnica de Valencia, España, julian@isa.upv.es

Resumen: Ante la ausencia de una plataforma de simulación específica para sistemas con muestreo no-convencional, los autores desarrollaron durante varios años una aplicación validada en forma de una caja de herramientas en el entorno Simulink de Matlab – el “Multirate Control Toolbox”. La herramienta permite el modelado, simulación y control multifrecuencia en tiempo real. Se presenta una aplicación de la herramienta en un entorno físico real y se muestra la potencialidad de un método de control multifrecuencia en el cual la selección de un esquema de muestreo permite la consecución de unos resultados inalcanzables en un ámbito convencional. Copyright © 2004 CEA-IFAC

Palabras Clave: control multifrecuencia, tiempo real, Diseño de Sistemas de Control Asistido por Computador, simulación, diseño por igualación al modelo

1. INTRODUCCIÓN

Un sistema de control multifrecuencia es un sistema digital en el cual dos o más variables son actualizadas a frecuencias distintas. Las variables pueden pertenecer a un mismo lazo de control (Fig. 1) o a diferentes lazos, como en el caso de sistemas multivariables (Fig. 2).

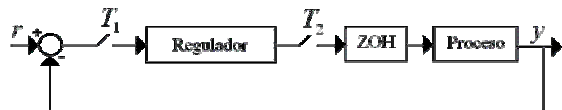


Fig. 1. Sistema multifrecuencia SISO

Algunas aplicaciones del control multifrecuencia comprenden: (1) Modelado más realista del muestreo, como sucede en sistemas con varios multiprocesadores. (2) En sistemas multivariables, donde es conveniente disponer de diferentes frecuencias de muestreo en diferentes lazos (el ancho de banda de sensores y actuadores puede ser muy diferente). (3) En sistemas donde se desee mejorar las especificaciones temporales o frecuenciales de un proceso. Varios autores han demostrado que la introducción intencionada de esquemas multifrecuencia puede mejorar el comportamiento de

un sistema, en comparación con la aplicación de esquemas monofrecuencia. (4) En el diseño, ya que se tiene mayor libertad para la implementación de reguladores.

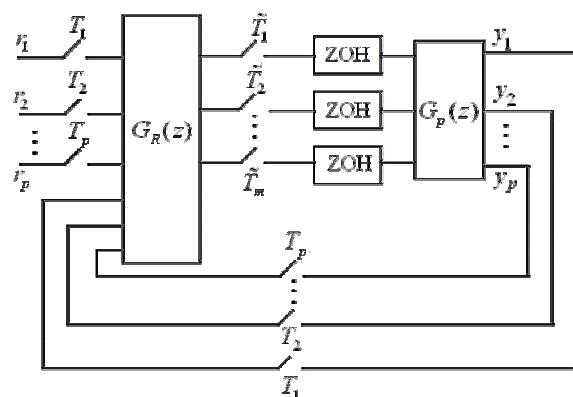


Fig. 2. Sistema multifrecuencia MIMO

En (Glasson, 1983; Araki, 1993) se muestra el estado del arte hasta la época y puede ser un punto de inicio en el estudio de sistemas de control multifrecuencia. Los artículos (Sklansky y Ragazzini, 1955; Kranc, 1957; Kalman y Bertran, 1959; Jury, 1967; Barry, 1975; Meyer y Burrus, 1975; Whitbeck y Didaleusky, 1980; Araki y Yamamoto, 1986;

Thompson, 1986; Godbout, et al, 1990; Meyer, 1990; Albertos, 1990; Longhi, 1994; Tangirala, et al, 1999) son textos clásicos de lectura debido a que presentan modelos que sirvieron de base a desarrollos teóricos posteriores. En (Vélez, 2001) se actualiza el estado del arte en aspectos de modelado, simulación, control y aplicaciones.

Para el modelado y simulación de sistemas multifrecuencia se desarrolló (Vélez, 2003b) el Multirate Control Toolbox (MCT). El MCT es una herramienta CACSD (“Computer Aided Control Systems Design”) para Matlab/Simulink (Matlab, 1997; Simulink, 1997) que simplifica y clarifica el modelado, simulación, diseño e implementación en tiempo real de los sistemas de control multifrecuencia. La simulación es sencilla y los diagramas se construyen de acuerdo a las reglas para sistemas monofrecuencia (control convencional).

La base matemática de la herramienta es el modelo obtenido por los autores (Vélez 2001; Vélez, 2002), el cual sintetiza en gran parte el estado actual de los sistemas multifrecuencia. El modelo presenta las características comunes de los métodos de modelado multifrecuencia, además de una presentación compacta fácil de implementar en un algoritmo (incluyendo retardos) y la posibilidad de modelado de la desincronización (“offset”) en entradas y salidas (útil para algunos casos especiales de muestreo). El método de modelado se resume en la sección 2 y un posible método de control se explica en la sección 3.

En la sección 4 se hace una breve descripción del toolbox. En la sección 5 se aplica el toolbox y el método de control expuesto a un motor sencillo de corriente directa.

2. MÉTODO DE MODELADO DE SISTEMAS DE CONTROL MULTIFRECUENCIA

Se considera un sistema multifrecuencia de orden n con m entradas y p salidas. El sistema y el esquema de muestreo se muestran en las Fig. 3 y 4 respectivamente.

T es el período base (m.c.d.) y T_o es el período global (m.c.m.).

$$T_o = NT \quad (1)$$

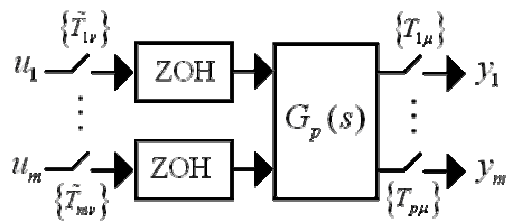


Fig. 3. Sistema multifrecuencia irregular

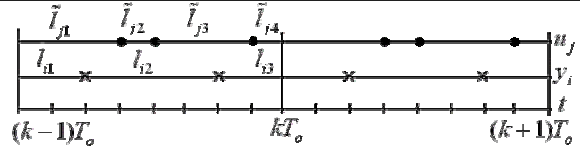


Fig. 4. Esquema de muestreo considerado

El modelo del sistema continuo se da en la ecuación (2).

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}_p \mathbf{x} + \mathbf{B}_p \mathbf{u} \\ \mathbf{y} = \mathbf{C}_p \mathbf{x} + \mathbf{D}_p \mathbf{u} \end{cases} \quad (2)$$

donde,

$$\mathbf{u} = [u_1 \quad \dots \quad u_m]^T, \mathbf{y} = [y_1 \quad \dots \quad y_p]^T$$

$$\mathbf{x} = [x_1 \quad \dots \quad x_n]^T$$

La obtención del modelo discreto a período base T se explica en (Aström y Wittenmark, 1997) y se da en la ecuación (3).

$$\begin{cases} \mathbf{x}((k+1)T) = \mathbf{A}\mathbf{x}(kT) + \mathbf{B}\mathbf{u}(kT) \\ \mathbf{y}(kT) = \mathbf{C}\mathbf{x}(kT) + \mathbf{D}\mathbf{u}(kT) \end{cases} \quad (3)$$

$$\mathbf{A} = \mathbf{A}(T) = e^{\mathbf{A}_p T},$$

$$\mathbf{B} = \mathbf{B}(T) = \int_0^T e^{\mathbf{A}_p \tau} \mathbf{B}_p d\tau, \mathbf{B} = [\mathbf{B}_1 \quad \dots \quad \mathbf{B}_m]$$

Por medio de sustituciones progresivas se llega al modelo multifrecuencia dado en la ecuación (4). La deducción detallada y la definición de las variables y parámetros se da con detalle en (Vélez, 2001) y brevemente a continuación.

$$\begin{cases} \mathbf{x}((k+1)T_o) = \tilde{\mathbf{A}}\mathbf{x}(kT_o) + \tilde{\mathbf{B}}\mathbf{u}^D(kT_o) \\ \mathbf{y}^D(kT_o) = \tilde{\mathbf{C}}\mathbf{x}(kT_o) + \tilde{\mathbf{D}}\mathbf{u}^D(kT_o) \end{cases} \quad (4)$$

Los vectores “estirados” de entrada, salida y estado son:

$$\mathbf{u}^D(kT_o) = [\dots | u_j(kT_o + \tilde{T}_{j1}) \quad \dots \quad u_j(kT_o + \tilde{T}_{j,\tilde{N}_j}) | \dots]^T$$

$$\mathbf{y}^D(kT_o) = [\dots | y_i(kT_o + T_{i1}) \quad \dots \quad y_i(kT_o + T_{iN_i}) | \dots]^T$$

$$\mathbf{x}^D(kT_o) = [x_1(kT_o) \quad \dots \quad u_1((k-1)T_o + \tilde{T}_{1,\tilde{N}_1}) \quad \dots]^T$$

Las matrices del sistema son:

$$\tilde{\mathbf{A}} = \begin{bmatrix} {}^1\tilde{\mathbf{A}} & {}^2\tilde{\mathbf{A}} \\ \mathbf{0}_{m \times n} & \mathbf{0}_{m \times m} \end{bmatrix}, \quad {}^1\tilde{\mathbf{A}} = \mathbf{A}^N$$

$${}^2\tilde{\mathbf{A}} = [{}^2\tilde{\mathbf{A}}_j], \quad {}^2\tilde{\mathbf{A}}_j = {}^1\mathbf{b}_{j0}^D$$

$$\tilde{\mathbf{B}} = \begin{bmatrix} {}^1\tilde{\mathbf{B}} \\ {}^2\tilde{\mathbf{B}} \end{bmatrix}, \quad {}^1\tilde{\mathbf{B}} = [{}^1\mathbf{B}_j^D], \quad {}^1\mathbf{B}_j^D = [{}^1\mathbf{b}_{jv}^D]$$

$${}^2\tilde{\mathbf{B}} = [{}^2\mathbf{B}_j^D], \quad {}^2\mathbf{B}_j^D = [{}^2\mathbf{b}_{jk}^D]$$

$${}^1\mathbf{b}_{jv}^D = \mathbf{A} \sum_{\beta=1}^{v+1} \tilde{l}_{j\beta} \mathbf{X}_{\tilde{l}_{j,v+1}} \mathbf{B}_j =$$

$$= \mathbf{A}(T_o - \tilde{T}_{j,v+1}) \mathbf{B}_j (\tilde{T}_{j,v+1} - \tilde{T}_{j,v}) = \Delta \mathbf{B}_{jv}$$

$${}^2\mathbf{b}_{jk}^D = \begin{cases} 1, & \text{si } k = \sum_{\alpha=1}^j \tilde{N}_\alpha, \quad k=1, 2, \dots, \bar{N} \\ 0, & \text{en otro caso} \end{cases}$$

$$\tilde{\mathbf{C}} = \begin{bmatrix} {}^1\tilde{\mathbf{C}} & {}^2\tilde{\mathbf{C}} \end{bmatrix}, \quad {}^1\tilde{\mathbf{C}} = \begin{bmatrix} {}^1\mathbf{C}_i^D \end{bmatrix}$$

$${}^2\tilde{\mathbf{C}} = \begin{bmatrix} {}^2\mathbf{C}_i^D \end{bmatrix}, \quad {}^1\mathbf{C}_i^D = \begin{bmatrix} {}^1\mathbf{c}_{i\mu}^D \end{bmatrix}$$

$${}^1\mathbf{c}_{i\mu}^D = \mathbf{C}_i \mathbf{A} \sum_{\alpha=1}^{\mu} l_{i\alpha} \quad {}^2\mathbf{C}_i^D = d_{ij,\mu 0}^D$$

$$\tilde{\mathbf{D}} = \begin{bmatrix} \mathbf{D}_{ij}^D \end{bmatrix}, \quad \mathbf{D}_{ij}^D = \begin{bmatrix} d_{ij,\mu\nu}^D \end{bmatrix}$$

$$d_{ij,\mu\nu}^D = \mathbf{C}_i \left[\sum_{q=0}^{\tilde{l}_{j,v+1}-1} \Psi_{ij,\mu\nu}(q) \right] \mathbf{B}_j + \Omega_{ij,\mu\nu}$$

$$\Psi_{ij,\mu\nu}(q) = \begin{cases} \mathbf{A}^r, & \text{si } r = q + \sum_{\alpha=1}^{\mu} l_{i\alpha} - \sum_{\beta=1}^{v+1} \tilde{l}_{j\beta} \geq 0 \\ 0, & \text{en otro caso} \end{cases}$$

$$\Omega_{ij,\mu\nu} = \begin{cases} d_{ij}^D, & \text{si } 0 \leq \sum_{\alpha=1}^{\mu} l_{i\alpha} - \sum_{\beta=1}^v \tilde{l}_{j\beta} < \tilde{l}_{j,v+1} \\ 0, & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Las dimensiones de las matrices y vectores son:

$$\tilde{\mathbf{A}} \in \mathbb{R}^{(n+m) \times (n+m)} \quad \tilde{\mathbf{B}} \in \mathbb{R}^{(n+m) \times \bar{N}}$$

$$\tilde{\mathbf{C}} \in \mathbb{R}^{\bar{N} \times (n+m)} \quad \tilde{\mathbf{D}} \in \mathbb{R}^{\bar{N} \times \bar{N}}$$

$$\mathbf{x} \in \mathbb{R}^{(n+m) \times 1} \quad \mathbf{u}^D \in \mathbb{R}^{\bar{N} \times 1} \quad \mathbf{y}^D \in \mathbb{R}^{\bar{N} \times 1}$$

Los parámetros se definen a continuación:

$\tilde{T}_j = [\tilde{T}_{jv}]$ - Conjunto de los instantes de muestreo de la entrada u_j .

$T_i = [T_{i\mu}]$ - Conjunto de los instantes de muestreo de la salida y_i .

\tilde{N}_j - Número de muestras de la entrada u_j en el período global T_o .

N_i - Número de muestras de la salida y_i en el período global T_o .

$$i = 1, 2, 3, \dots, p \quad j = 1, 2, 3, \dots, m \quad \mu = 1, 2, \dots, N_i$$

$$v = 1, 2, \dots, \tilde{N}_j \quad \bar{N} = N_1 + \dots + N_p \quad \bar{N} = \tilde{N}_1 + \dots + \tilde{N}_m$$

$$\tilde{l}_{j\beta} = \frac{\tilde{T}_{j\beta} - \tilde{T}_{j,\beta-1}}{T} \quad l_{i\alpha} = \frac{T_{i\alpha} - T_{i,\alpha-1}}{T}$$

Las características del modelo multifrecuencia obtenido son:

- Modelo multifrecuencia lineal invariable en el tiempo de dimensión mínima. Las matrices $\tilde{\mathbf{A}}, \tilde{\mathbf{B}}, \tilde{\mathbf{C}}, \tilde{\mathbf{D}}$ corresponden al modelo estirado

(“lifting”) LTI del sistema multifrecuencia a período T_o . El método del “lifting” tiene su origen en el trabajo de (Kargonekar, et al, 1957)

- Posibilidad de modelar un sistema multifrecuencia con esquemas de muestreo regular o irregular
- Modelado de offset en entradas y salidas. No es necesario que éstas se sincronicen cada período global. Ver Fig. 4
- Aplicabilidad a sistemas SISO y MIMO con un número arbitrario de entradas y salidas, con o sin retardo
- Representación invariable en el tiempo y causal
- Sistema de dimensión mínima (no a máximo común divisor)
- Fácil derivación de casos particulares.
- Fácil implementación con herramientas CACSD

3. MÉTODO DE CONTROL POR IGUALACIÓN AL MODELO

El control multifrecuencia permite una mayor libertad en el diseño de reguladores debido a la selección de diversos esquemas de muestreo. Es así como un sistema SISO puede convertirse en un sistema MIMO y las dimensiones del modelo pueden llevarse a una forma deseada (matrices cuadradas, por ejemplo), con lo que el diseño puede simplificarse. Esta idea se menciona en (Vélez, 2001), pero sólo ahora se aplica a un sistema real. Los detalles se mencionan a continuación.

Para el diseño se tiene en cuenta que el modelo es una representación invariable en el tiempo del sistema multifrecuencia y que el modelo conserva todas las características del sistema multifrecuencia original (Meyer, 1990). De esta manera, se pueden aplicar métodos de control clásico y moderno para sistemas discretos monofrecuencia, bajo ciertas condiciones. La principal condición es la restricción de causalidad: el regulador multifrecuencia $[\tilde{\mathbf{A}}_R, \tilde{\mathbf{B}}_R, \tilde{\mathbf{C}}_R, \tilde{\mathbf{D}}_R]$ satisface la restricción de causalidad si para $\tilde{\mathbf{D}}_R = [\mathbf{D}_{ij}^D]$ y $\mathbf{D}_{ij}^D = [d_{ij,\mu\nu}^D]$, se tiene que $d_{ij,\mu\nu}^D = 0$ siempre que $T_{i\mu} < \tilde{T}_{jv}$ (las salidas actuales no dependen de las entradas futuras). En otras palabras, se cumple la restricción de causalidad si $\tilde{\mathbf{D}}_R$ tiene una estructura triangular inferior por bloques.

En control existe un enfoque de diseño que propone métodos para el rediseño de reguladores continuos con base en las características en lazo cerrado (problema de rediseño digital). Es decir, métodos en los cuales se pretende diseñar un regulador discreto (realimentación del estado o de la salida) que permita obtener una respuesta en lazo cerrado con un comportamiento coincidente en los instantes de muestreo con la respuesta con el regulador continuo. En particular, que permita que todos los estados del sistema muestreado en lazo cerrado coincidan con los estados del sistema original continuo en todo instante

de muestreo (Tornero y Tomizuka, 1999; Aström y Wittenmark, 1997; Kuo y Peterson, 1973; Yuping, et al., 1999; Yuping y Tomizuka, 2000; Er y Anderson, 1991; Rafee, et al, 1996; Yackel, et al, 1974; Colaneri y Kucera, 1997; In y Zhang, 1994; Fujimoto, et al, 1997).

En estos métodos el regulador continuo original es del tipo de realimentación del estado. Sin embargo, los distintos métodos propuestos no aseguran, en general, el comportamiento deseado (estabilidad en lazo cerrado y respuesta temporal), debido a que son métodos aproximados. La aproximación surge debido a que no siempre es posible despejar directamente las matrices de diseño (generalmente la dimensión del vector de entradas es menor que la del estado) y es necesario recurrir a algoritmos aproximados para el cálculo de dichos reguladores (Misra y Patel, 1989).

El enfoque de rediseño digital puede ser tratado como un problema de igualación a un modelo ("model matching"), donde el modelo deseado (modelo de referencia) puede ser el modelo en lazo cerrado obtenido con un regulador continuo (Ogata, 1996). La idea principal del método de igualación al modelo consiste en especificar un modelo deseado en lazo cerrado (continuo o discreto), el cual puede obtenerse a partir de:

- Ciertas especificaciones de diseño
- Reducción de un diagrama en lazo cerrado con un regulador continuo (discretización en lazo cerrado)

En resumen, el método de igualación a un modelo consiste en "obtener un controlador para una planta dada de manera que el sistema en lazo cerrado esté caracterizado por un modelo de referencia deseado".

El diseño de un controlador convencional por igualación a un modelo requiere de una cancelación de los ceros de la planta, por lo que no es aplicable a plantas de fase no mínima. Sin embargo, en el caso de reguladores multifrecuencia se puede llegar a un diseño semejante sin una cancelación directa de los ceros, pudiéndose aplicar a plantas de fase no mínima. Además, como es posible aumentar el número de entradas del modelo multifrecuencia ("lifting"), se puede siempre seleccionar un esquema de muestreo de manera que las matrices necesarias sean cuadradas.

La aplicación del método de igualación al modelo que se expone a continuación tiene la mayoría de características de los métodos encontrados en la bibliografía, pero es más fácil de entender e implementar utilizando el modelo expuesto en la sección 2 y el MCT. Se utiliza un esquema de muestreo que se ha dado en llamar FOLI ("First Outputs Last Inputs") introducido por los autores y el cual se muestra en la Fig. 5. La ventaja del esquema de muestreo FOLI radica en que siempre se garantiza la restricción de causalidad ($\mathbf{D} = \mathbf{0}$) y todas las matrices son cuadradas y de rango completo, con lo

que es posible la implementación del regulador y la operación de inversión de dichas matrices.

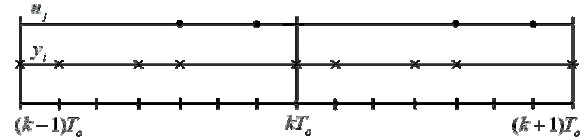


Fig. 5. Esquema de muestreo FOLI

El modelo en lazo cerrado de un sistema con un regulador multifrecuencia FOLI estático de realimentación de la salida y con un esquema de control con dos grados de libertad se da en la ecuación (5). Las matrices ($\tilde{\mathbf{A}}, \tilde{\mathbf{B}}, \tilde{\mathbf{C}}, \tilde{\mathbf{D}}$) corresponden al modelo multifrecuencia de la planta y ($\mathbf{K}_y, \mathbf{K}_r$) son las matrices del regulador (ver Fig. 6).

$$\begin{cases} \mathbf{x}^D((k+1)T_o) = (\tilde{\mathbf{A}} - \tilde{\mathbf{B}}\mathbf{K}_y\tilde{\mathbf{C}}) \mathbf{x}^D(kT_o) + \tilde{\mathbf{B}}\mathbf{K}_r \mathbf{r}^D(kT_o) \\ \mathbf{y}^D(kT_o) = \tilde{\mathbf{C}} \mathbf{x}^D(kT_o) \end{cases} \quad (5)$$

$$\mathbf{K}_r \in \mathbb{R}^{\bar{N} \times \bar{N}} \quad \mathbf{K}_y \in \mathbb{R}^{\bar{N} \times \bar{N}}$$

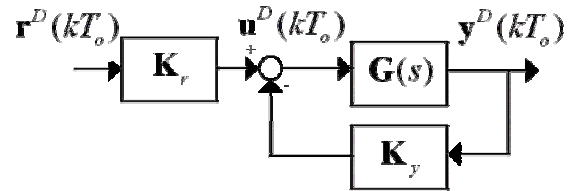


Fig. 6. Esquema de control con dos grados de libertad

Se desea obtener un comportamiento en lazo cerrado descrito por el modelo multifrecuencia de referencia dado en la ecuación (6).

$$\begin{cases} \mathbf{x}^D((k+1)T_o) = \tilde{\mathbf{A}}_d \mathbf{x}^D(kT_o) + \tilde{\mathbf{B}}_d \mathbf{r}^D(kT_o) \\ \mathbf{y}^D(kT_o) = \tilde{\mathbf{C}}_d \mathbf{x}^D(kT_o) \end{cases} \quad (6)$$

El modelo propuesto corresponde a un modelo multifrecuencia a período global. Existen varias posibilidades de obtener el modelo deseado ($\tilde{\mathbf{A}}_d, \tilde{\mathbf{B}}_d, \tilde{\mathbf{C}}_d$):

- Ubicando los polos y ceros en continuo y discretizando en un esquema multifrecuencia (semejante al de la planta) el modelo a período global. Este es el método más claro y directo para plantas SISO.
- Discretizando en un esquema multifrecuencia el sistema en lazo cerrado con un regulador satisfactorio, continuo o discreto a período base. Este es el método más claro y directo para plantas MIMO.
- Especificando directamente el modelo multifrecuencia deseado a período global (poco claro, ya que para un sistema SISO el respectivo modelo sería uno MIMO).

Se considera aquí que los modelos están en una forma tal que:

$$\tilde{\mathbf{C}}_d = \tilde{\mathbf{C}} \quad (7)$$

Esta última condición es fácil de cumplir si se utiliza la transformación lineal (8) de las variables de estado en el modelo deseado (la deducción es directa si se compara el modelo deseado transformado con el modelo multifrecuencia de la planta).

$$\begin{aligned} \mathbf{x}^* &= \mathbf{T}\mathbf{x} \\ \mathbf{T} &= \tilde{\mathbf{C}}^{-1}\tilde{\mathbf{C}}_d \end{aligned} \quad (8)$$

Comparando las ecuaciones (5) y (6) se llega a las igualdades (9).

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{A}} - \tilde{\mathbf{B}}\mathbf{K}_y\tilde{\mathbf{C}} &= \tilde{\mathbf{A}}_d \\ \tilde{\mathbf{B}}\mathbf{K}_r &= \tilde{\mathbf{B}}_d \end{aligned} \quad (9)$$

Teniendo en cuenta que el modelo multifrecuencia con offset de las entradas es de orden $(n + m)$, se selecciona el muestreo de manera que en el modelo multifrecuencia las matrices son cuadradas (lo que siempre se puede lograr) y de rango completo. De esta manera, es fácil de despejar de la ecuación anterior las matrices del regulador multifrecuencia de dos grados de libertad:

$$\begin{aligned} \mathbf{K}_y &= \tilde{\mathbf{B}}^{-1}(\tilde{\mathbf{A}} - \tilde{\mathbf{A}}_d)\tilde{\mathbf{C}}^{-1} \\ \mathbf{K}_r &= \tilde{\mathbf{B}}^{-1}\tilde{\mathbf{B}}_d \end{aligned} \quad (10)$$

El cálculo de las matrices del regulador es muy sencillo y no considera ninguna aproximación. Es un cálculo exacto en el sentido de no utilizar métodos numéricos para su obtención (obviamente existe una aproximación en el proceso de modelado matemático de la planta y en el muestreo). El condicionamiento aceptable de las matrices se puede lograr con una adecuada selección del esquema de muestreo (Vélez, 2001), aunque éste es un tema aún por investigar. Un inconveniente del esquema FOLI es la necesidad de tomar varias muestras en grupo de cada variable.

Características generales del método:

- El método es aplicable a plantas MIMO estables e inestables
- El cálculo de las matrices del regulador es sencillo y directo (multiplicación e inversión de matrices) ya que las matrices son cuadradas
- El regulador diseñado es completamente causal, debido al esquema de muestreo seleccionado (FOLI), en el cual toda acción de control se basa en muestras de las salidas en instantes anteriores
- No se presentan problemas de oscilaciones ocultas
- Aunque el diseño es sencillo existe una pequeña diferencia entre el modelo deseado y el obtenido, ya que el regulador multifrecuencia contiene un retardo debido al offset de las entradas. Este retardo se puede disminuir si se reduce el tiempo en el cual se aplica la primera señal de control

El esquema de muestreo MRIC (Multirate Input Control – las acciones de control se aplican con un muestreo rápido, mientras las variables de medida se miden a período global) es un caso particular del esquema FOLI, pero con menos libertad en el diseño. En este caso el diseño es semejante al expuesto aquí si se considera una realimentación del estado y no de la salida. En este caso particular no hay offset de las entradas del modelo multifrecuencia y, debido a que se utiliza un regulador estático, el modelo de referencia es del mismo orden de la planta y contiene un número de entradas y salidas igual a p , número de salidas de la planta. Es decir, el modelo de referencia es de fácil interpretación desde el punto de vista del control convencional.

4. DESCRIPCIÓN DEL MULTIRATE CONTROL TOOLBOX

El MCT se desarrolló para facilitar el estudio de los métodos de control multifrecuencia. La simulación es sencilla y los diagramas se construyen de acuerdo a las reglas para sistemas monofrecuencia. La presente herramienta representa un excelente recurso para el estudio e investigación de sistemas de control multifrecuencia.

La utilización del Matlab y Simulink puede verse en (Sanz y Arzén, 2003), donde se presentan algunas tendencias en el software para control, las cuales incluyen algunas herramientas basadas en Matlab y Simulink. En (Cervin, et al, 2003) se describen dos herramientas basadas en Matlab y Simulink que permiten analizar el efecto del muestreo y retardos en el control, con una posible extensión a controladores multifrecuencia.

No obstante la amplia utilización del Matlab y Simulink en control, no existen para esta plataforma herramientas de modelado, simulación e implementación en tiempo real de sistemas multifrecuencia con el alcance planteado a continuación (características y casos de muestreo). El programa CC (Thompson, 1988) permite la simulación de sistemas multifrecuencia SISO y MIMO utilizando el método de Kranc (sólo para un esquema de muestreo regular). Allí los cálculos y simulaciones se realizan utilizando la línea de comandos directamente o a través de macros. En (Qiu, et al, 1996) la herramienta está limitada a un esquema de control fijo, con muestreo regular y con sincronización de entradas y salidas. En ninguno de los casos anteriores se considera la etapa de control en tiempo real.

El MCT es una caja de herramientas, con funciones y bloques de simulación, que permite el cálculo y análisis de sistemas multifrecuencia y su simulación, de tal manera que se trabaja de la forma habitual como se hace con los sistemas convencionales, requiriendo la especificación sólo del modelo continuo, o discreto a período base, de la planta (representación externa o interna). La idea básica de simulación con el MCT es la de muestrear cada señal

de entrada según su respectivo esquema y formar el vector estirado (Vectorización), calcular la salida estirada (Modelo Multifrecuencia) y aplicar la salida correspondiente al instante de muestreo actual (Reducción). El proceso es transparente y claro. Las "máscaras" facilitan la parametrización de los bloques. Esta idea es equivalente a la que se utilizaría si se implementara un regulador multifrecuencia en un ordenador, para lo cual se definen tareas que respondan en determinados instantes de muestreo.

La simulación de sistemas multifrecuencia con el MCT se realiza utilizando las "C-code S-functions" de Simulink, las cuales admiten las posibilidades del lenguaje C. Sin embargo, la utilización de estas funciones sería poco práctica si no se tuviera la posibilidad de esconder (enmascarar) los detalles de programación a un usuario normal. Una máscara es una caja de diálogo que solicita la información requerida para los cálculos; detrás de la máscara se realizan los cálculos intermedios y se llaman las funciones necesarias. En la máscara se pueden realizar muchos de los cálculos, simplificando notoriamente una función. La combinación de las "S-functions" con la opción de enmascaramiento hace del MCT una herramienta potente y de fácil uso.

Sin el MCT sería difícil estudiar el comportamiento del sistema con cada uno de los reguladores diseñados, hasta el punto de ver el comportamiento intermuestreo y el efecto directo de cada uno de los parámetros. Las ventajas son evidentes: diseño, prueba y ajuste. Esta etapa es tan sencilla que no parece que se está trabajando con un sistema multifrecuencia.

El MCT propuesto es el resultado de más de seis años de revisión (1997-2004) y refinamiento de las funciones y los bloques, buscando siempre generalidad y simplicidad en la manera de utilizarlos (Vélez y Salt, 1999; Vélez y Salt, 2000). Por supuesto, se sigue trabajando en nuevas características y extensiones. Los bloques del Toolbox para Simulink se muestran en la Fig. 7.

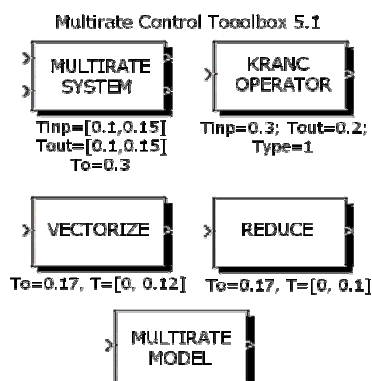


Fig. 7. Bloques del Multirate Control Toolbox

El MCT permite, utilizando el Real-Time Workshop (RTW, 2004), la implementación de esquemas de control en sistemas operativos de tiempo real como xPC, QNX o VxWorks, y en Windows con el Real-Time Windows Target (RTWT, 2004). El RTW y

RTWT son herramientas (toolboxes) del Matlab/Simulink para la generación de código y desarrollo rápido de prototipos de software.

Estas herramientas permiten la implementación en tiempo real a partir de los bloques de Simulink y C-code S-functions. Una vez hecha la simulación puede implementarse rápidamente el regulador multifrecuencia (prototipado rápido), con lo que se acorta considerablemente el desarrollo de este tipo de sistemas de control. Se necesita realizar algunos cambios sólo en los bloques de interacción con el hardware para cada sistema operativo particular. La implementación trabaja utilizando la opción de multitarea, por eso la ventaja de implementar separadamente los bloques de vectorización y reducción.

En (Vélez, 2003a) y las ayudas del toolbox (formato HTML) en (Vélez, 2003b) se pueden encontrar los detalles de implementación, una gran cantidad de ejemplos y aspectos matemáticos. La última versión del toolbox (5.1) puede descargarse en (Vélez, 2003b).

En resumen, la herramienta es una propuesta entre otras posibles, pero que presenta algunas características que la hacen original y que están ligadas estrechamente con el método de modelado propuesto. Algunas de estas características son:

- Posibilidad de modelado y simulación de sistemas con muestreo regular o irregular arbitrario, SISO o MIMO, con o sin offset de entradas y salidas, con o sin retardo en las entradas. Fácil implementación del modelo (4)
- Diagramas de simulación semejantes a los correspondientes a sistemas monofrecuencia, con todas las ventajas intuitivas que esto conlleva. Los bloques de simulación realizan internamente operaciones de vectorización, reducción y simplificación, siendo necesario ingresar la información mínima necesaria
- Posibilidad de análisis directo del comportamiento intermuestreo de las diferentes señales, ya que la simulación se hace de manera híbrida y desde el punto de vista de un observador externo. Es decir, las señales que fluyen por el sistema son señales "correctas" y no son señales "estiradas"
- Simulación multifrecuencia con reguladores continuos o discretos a máximo común divisor, sin necesidad de realizar el paso previo de discretización, y reguladores discretos multifrecuencia, calculados de manera directa por algún método de diseño
- Implementación de diferentes esquemas de muestreo encontrados en la bibliografía: regular o irregular, MRIC o MROC, en serie, etc. En el muestreo MROC (Multirate Output Control) las acciones de control se aplican a período global, mientras las variables de medida se muestrean a un período menor. En el muestreo en serie varias variables se miden (aplican) de forma secuencial con un mismo sensor (actuador)

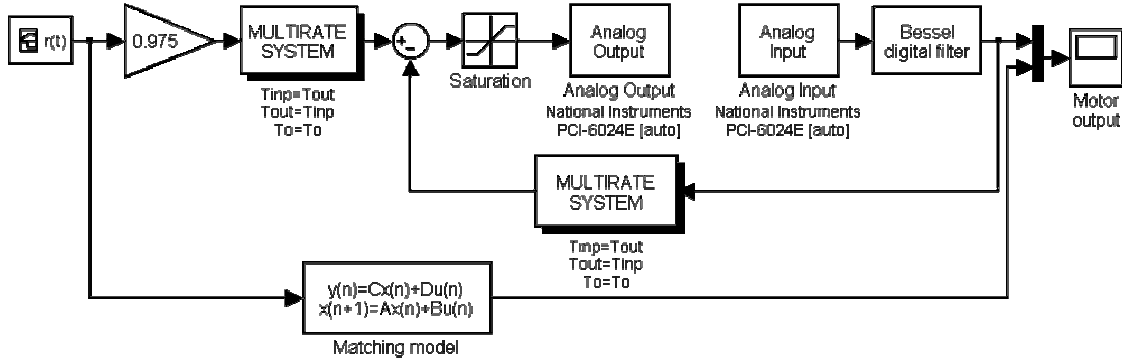


Fig. 8. Diagrama de control multifrecuencia del motor con el método de igualación al modelo

- Extensión a la simulación de sistemas periódicos en los cuales se tienen distintos reguladores en diferentes intervalos de muestreo
- Además de los ejemplos aquí propuestos, el MCT se probó y comparó con diferentes ejemplos encontrados en otros trabajos y, en especial, con problemas con operadores de Kranc. Por esta razón se introdujo en el Toolbox este popular operador
- Implementación en tiempo real con diferentes sistemas operativos de tiempo real

5. EJEMPLO DE IMPLEMENTACIÓN EN TIEMPO REAL

A continuación se aplica el método de control descrito en la sección 3 al control de velocidad de un motor real de corriente continua (Toshiba, DGM-3491-2A, con motor reductor, con convertidor de frecuencia a voltaje con dos capacitores, amplificador de corriente controlado por voltaje). La variable de control corresponde al voltaje aplicado y la variable medida corresponde a un voltaje proporcional a la velocidad angular del motor. El modelo matemático del motor (muestreo a 0.01 seg), incluyendo un filtro de Bessel para reducción del ruido, se obtuvo por identificación utilizando el método no paramétrico de respuesta temporal. Los detalles se dan en (Vélez, 2003a).

$$G(s) = \frac{85.13}{s^2 + 17.41s + 99.11}$$

$$G(z) = \frac{0.004017z + 0.00379}{z^2 - 1.831z + 0.8402} \quad (11)$$

Polos continuos: $-8.7033 \pm 4.8332i$
 Polos discretos: $0.9156 \pm 0.0443i$

La aplicación del método al control del motor se realiza teniendo en cuenta los siguientes pasos (se muestran las operaciones realizadas con el Matlab y el Multirate Control Toolbox):

1. Especificar los modelos internos de la planta y de referencia, en tiempo continuo o discreto a período base:

$$G_p = \text{tf}(85.13, [1 \ 17.41 \ 99.11]);$$

$$G_{pd} = \text{c2d}(G_p, 0.01); \text{Spd} = \text{ss}(G_{pd});$$

$$G_d = \text{tf}(144, [1 \ 24 \ 144]);$$

$$G_{dd} = \text{c2d}(G_d, 0.01); \text{Sdd} = \text{ss}(G_{dd});$$

2. Seleccionar el esquema de muestreo FOLI de manera que las matrices sean cuadradas (primero se toman todas las muestras de las salidas y luego de las entradas de la planta):

$$\text{Tout} = \{[0, 0.01, 0.02]\};$$

$$\text{Tinp} = \{[0.02, 0.03, 0.04]\};$$

$$\text{To} = 0.05;$$

3. Calcular los modelos multifrecuencia de la planta y de referencia aplicando el método desarrollado por los autores (Vélez, 2001; Vélez, 2002b):

$$\text{SMp} = \text{multirate}(\text{Spd}, \text{Tinp}, \text{Tout}, \text{To});$$

$$\text{SMd} = \text{multirate}(\text{Sdd}, \text{Tinp}, \text{Tout}, \text{To});$$

$$\text{Tipo_Sistema_multifrecuencia} = \text{co}(\text{SMp});$$

4. Transformar el modelo de referencia multifrecuencia de acuerdo con (8):

$$\text{T} = \text{inv}(\text{SMd.C}) * \text{SMp.C};$$

$$\text{A} = \text{inv}(\text{T}) * \text{SMd.A} * \text{T}; \text{B} = \text{inv}(\text{T}) * \text{SMd.B};$$

$$\text{C} = \text{SMd.C} * \text{T}; \text{D} = \text{SMd.D};$$

$$\text{SMd} = \text{ss}(\text{A}, \text{B}, \text{C}, \text{D}, \text{Ts}', 0.01);$$

5. Calcular el regulador de acuerdo con (10):

$$\text{Ky} = \text{inv}(\text{SMp.B}) * (\text{SMp.A} - \text{SMd.A}) * \text{inv}(\text{SMp.C});$$

$$\text{Kr} = \text{inv}(\text{SMp.B}) * \text{SMd.B};$$

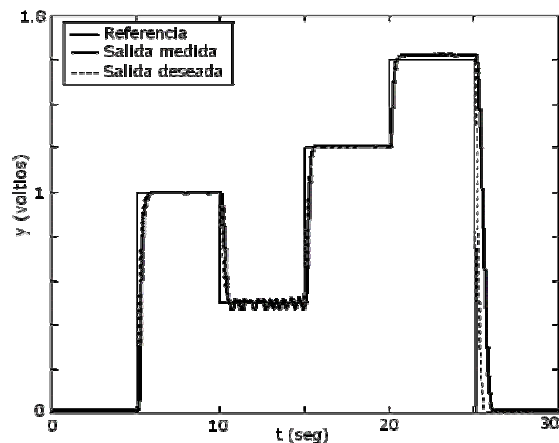


Fig. 9. Respuesta temporal del motor con un control multifrecuencia por igualación al modelo

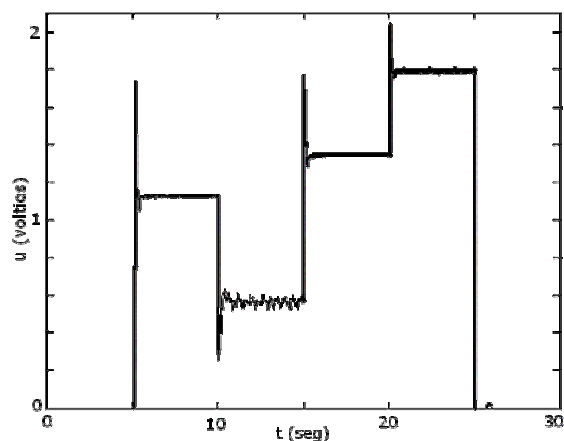


Fig. 10. Acción de control aplicada al motor con un control multifrecuencia por igualación al modelo

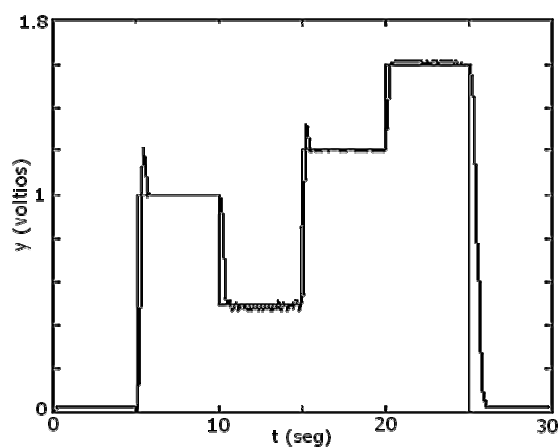


Fig. 11. Respuesta del motor con un control por asignación de polos convencional

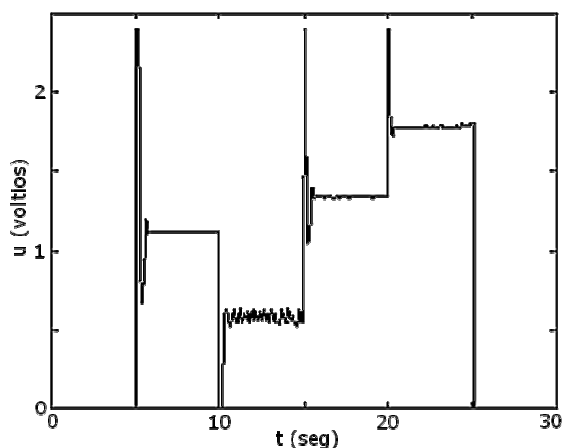


Fig. 12. Acción de control aplicada al motor con un control de asignación de polos convencional

El diagrama de control multifrecuencia del motor con el método de igualación modelo se muestra en la Fig. 8 y los resultados en las Fig. 9 y 10. En las Fig. 11 y 12 se muestran los resultados con un regulador convencional. Los resultados (sobre un motor real, no simulado) muestran un buen ajuste al modelo deseado, no hay sobreimpulsos en la respuesta temporal y la amplitud de la acción de control es menor que la de un control convencional (Fig. 12),

mejorando índices cuadráticos de comportamiento. En la Fig. 9 se muestra la salida medida y la salida deseada, obtenida por simulación. De esta manera se muestra una manera de aprovechar la libertad que ofrece el muestreo multifrecuencia en el diseño y las ventajas del método expuesto de control por igualación del modelo y el esquema FOLI.

6. CONCLUSIONES

En este artículo se presentó una aplicación directa del control multifrecuencia a un motor de corriente continua utilizando el Multirate Control Toolbox, el cual ha sido desarrollado por los autores del presente trabajo durante varios años.

La aplicación del control multifrecuencia se realizó por diseño directo de un regulador multifrecuencia con dos grados de libertad y un diseño propio de los autores de este artículo, el cual se basa en un control por igualación al modelo en un esquema de muestreo no convencional llamado FOLI. Este esquema es posible con el método de modelado multifrecuencia introducido, ya que considera explícitamente un "offset" (desincronización) en entradas y salidas. El método de modelado tiene un carácter bastante genérico y puede ser implementado fácilmente en herramientas CACSD como Matlab/Simulink

El diseño del control multifrecuencia por igualación del modelo es simple y utiliza los grados de libertad del control multifrecuencia al permitir ampliar el orden de las matrices del modelo matemático ("juego" matemático con el muestreo con fines de diseño). Los resultados son buenos en aspectos como: diseño sencillo, excelente ajuste a los requerimientos de diseño expresados en el modelo deseado en lazo cerrado, acciones de control aceptables e incluso menores que con métodos de control monofrecuencia, ausencia de rizado intermuestreo gracias a que en el diseño se busca el ajuste a un modelo en lazo cerrado. El rizado intermuestreo es típico en esquemas multifrecuencia debido a que en el diseño se incrementa el número de entradas y salidas y se olvida que varias de ellas corresponden a una misma señal, por lo que se debería restringir sus cambios; en el ajuste a un modelo en lazo cerrado esa restricción se da.

Las diferencias existentes con diferentes referencias se deben a errores de modelado (los cuales pueden ajustarse con una prealimentación constante, la cual en el trabajo es muy cercana a uno y muestra la excelente aproximación del modelo) y a efectos no lineales debidos a la presencia de una fricción interna en el motor.

En relación a la herramienta de cómputo desarrollada, cabe resaltar los siguientes aspectos:

- La herramienta se basa completamente en el método de modelado matemático obtenido en (Vélez, 2001) y que tiene un alto grado de generalización para todos los esquemas de

muestreo vistos en la bibliografía científica sobre el tema

- La herramienta implementa de manera separada un bloque de vectorización para cada señal de entrada y un bloque de reducción para cada señal de salida, con lo que se puede definir una tarea para cada operación de lectura y escritura de datos
- Aunque la implementación del ejemplo se realizó en el entorno Windows, es posible realizar control en otros entornos, incluyendo aquéllos en los cuales el diagrama de simulación se encuentra en un computador (host) y el programa de control en otro (target), posiblemente utilizando entornos de tiempo real más elaborados tipo QNX, VxWorks o xPC
- La herramienta tiene grandes ventajas para el estudio sistémico de los diferentes métodos de control multifrecuencia y su comparación con métodos convencionales
- La herramienta se irá mejorando para incluir o mejorar aspectos como: diseño (comparación e inclusión de manera sistémica de métodos diseñados por otros autores), interfaces gráficas de usuario, manejo más directo de sistemas periódicos, inclusión de más ejemplos de aplicación sobre procesos reales utilizando diferentes métodos de control multifrecuencia y diferentes sistemas operativos de tiempo real. Un aspecto importante a tratar será la comparación más detallada con otros métodos de control multifrecuencia

Por supuesto, es necesario realizar muchas otras pruebas y comparar los resultados con otros reguladores multifrecuencia y monofrecuencia. En el trabajo se mostró un enfoque general de diseño que incluye: (i) un modelo con posibilidades muy amplias de aplicación; (ii) una herramienta de modelado y simulación; (iii) un método de diseño directo basado en el modelo lineal invariable en el tiempo del sistema multifrecuencia, el cual aprovecha un grado adicional en el diseño dado por el esquema de muestreo.

RECONOCIMIENTOS

Este trabajo fue posible debido al apoyo de la Universidad EAFIT, la cual de una manera clara y contundente apoya los proyectos de investigación realizados en los diferentes programas de la institución. Los aportes económicos y los recursos físicos fueron suficientes y su disponibilidad muy oportuna.

REFERENCIAS

- Albertos P. (1990). Block Multirate Input-Output Model for Sampled-Data Control Systems. *IEEE Transactions on Control*, **35**, 1085-1088
- Araki M, Yamamoto K. (1986). Multivariable multirate sampled-data systems: state-space description, transfer characteristics, and Nyquist criterion. *IEEE Transactions on Automatic Control*, **31**, 145-154
- Araki, M. (1993). Recent development in digital control theory. *Proc. 12th IFAC World Congress*, Sydney, **9**, 951-960
- Aström K. J., Wittenmark B. (1997). *Computer-Controlled Systems: Theory and Design*. Prentice-Hall, Upper Saddle River
- Barry P.E. (1975). *Optimal control of multirate systems. Report RN-361*. Research Department, Grumman Aerospace Corporation, USA
- Cervin A., Henriksson D., Lincoln B., Eker J., Arzén K-E. (2003). How does control timing affect performance? *IEEE Control System Magazine*, **23**, 16-30
- Colaneri P., Kucera V. (1997). The Model matching problem for periodic discrete-time systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, **42**, 1472-1476
- Er M.J., Anderson B.D. (1991). Practical Issues in Multirate Output Controllers. *International Journal of Control*, **53**, 1005-1020
- Fujimoto H., Kawamura A., Tomizuka M. (1997). Proposal of Generalized Digital Redesign Method in use of N-Delay Control. *Proceedings of American Control Conference*, Albuquerque, **1**, 3290-3294
- Glasson, D.P. (1983). Development and Applications of Multirate Digital Control. *Control System Magazine*, **3**, 2-8
- Godbout L.F., Jordan D., Apostolakis I.S. (1990). Closed-loop model for general multirate digital control systems. *IEE Proceedings*, **137**, 326-336
- In H., Zhang C. (1994). A Multirate Digital Controller for Model Matching. *Automatica*, **30**, 1043-1050
- Jury E.I. (1967). A note on multirate sampled-data systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, **2**, 319-320
- Kalman R.E., Bertram J.E. (1959). A unified approach to the theory of sampling systems. *Journal of Franklin Institute*, **267**, 405-436
- Khargonekar P.P., Poolla K., Tannenbaum A. (1957). Robust control of linear time-invariant plants using periodic compensation. *IEEE Transactions on Automatic Control*, **30**, 21-28
- Kranc G.M. (1957). Input-Output Analysis of multirate feedback systems. *IRE Transactions on Automatic Control. PGAC-3*, **3**, 21-28
- Kuo B.C., Peterson D.W. (1973). Optimal discretization of continuous-data control systems. *Automatica*, **9**, 125-129
- Longhi S. (1994). Structural Properties of Multirate Sampled-Data Systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, **39**, 692-696
- Matlab version 6 (1997)*. MathWorks Inc, Natick
- Meyer R.A., Burrus C.S. (1975). A unified analysis of multirate and periodically time-invariant digital filters. *IEEE Transactions on Circuits Systems*, **22**, 162-168
- Meyer, D.G. (1990). A new class of shift-varying operators, the shift-invariant equivalents and multirate digital systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, **35**, 429-433

- Misra P., Patel R.V. (1989). Numerical Algorithms for Eigenvalue Assignment by Constant and Dynamic Output Feedback. *IEEE Transactions on Automatic Control*, **34**, 579-588
- Ogata K. (1996). *Sistemas de control en tiempo discreto*. Prentice-Hall, México
- Qiu L., et al (1996). Development of Matlab tools and case study for multirate control design. *Proceedings of the 35th IEEE on Decision and Control*, Kobe, **2**, 1278-1283
- Rafee N., Chen T., Malik O.P. (1996). Multirate discretization of analog controllers. *Canadian Conference on Electrical and Computer Engineering*, Calgary, **2**, 554-557
- RTW - *Real-Time Workshop. User's guide. Version 6*. (2004). Mathworks Inc, Natick
- RTWT - *Real-Time Windows Target. User's guide versión 2* (2004). Mathworks Inc, Natick
- Sanz R., Arzén K-E. (2003). Trends in Software and Control. *IEEE Control System Magazine*, **23**, 12-15
- Simulink version 4. Dynamic System Simulation Software. User's Guide* (1997). Mathworks Inc, Natick
- Sklansky J., Ragazzini J.R. (1955). Analysis of errors in sampled-data feedback systems. *AIEE Transactions*, **74**, 65-71
- Tangirala A.K., Li D., Patwardhan R., Shah S.L., Chen T. (1999). Issues in multirate process control. *Proceedings of American Control Conference*, San Diego, **4**, 2771-2775
- Thompson P.M. (1986). Gain and phase margin of multirate sampled-data feedback systems. *International Journal of Control*, **44**, 833-846
- Thompson P.M. (1988). Program CC Version 4: Reference Manual. *Hawthorne, Systems Technology, Inc*, **2**, 566-585.
- Tornero J., Gu Y., Tomizuka M. (1999). Analysis of multi-rate discrete equivalent of continuous controller. *Proceedings of American Control Conference*, **4**, 2759-2763
- Vélez C.M., Salt J. (1999). Simulation of multirate control systems in Matlab/Simulink. *Second World Manufacturing Congress*, Durham, **1**, 84-90.
- Vélez C. M., Salt J. (2000). Simulation of irregular multirate systems. *8th IFAC Symposium on Computer Aided Control System Design*. Salford
- Vélez C.M. (2001). *Modelado y simulación de sistemas con muestreo no convencional*. Tesis doctoral. Departamento de Ingeniería de Sistemas y Automática (DISA), Universidad Politécnica de Valencia, Valencia
- Vélez C.M. (2002). Modelado, simulación y control de sistemas con muestreo no convencional. *Revista EAFIT*, **39**, 9-20
- Vélez C.M. (2003a). *Diseño e implementación de sistemas de control con muestreo no convencional*. Informe de investigación 2002. Universidad EAFIT, Medellín
- Vélez, C.M. (2003b). Multirate Control Toolbox para Matlab/Simulink.
<http://www.mathworks.com/matlabcentral/fileexchange/>
- Whitbeck R.F., Didaleusky D.C.J. (1980). *Multirate digital control systems in simulation applications - Report AFWAL-TR-80-3101*. Flight Dynamics Laboratory, Air Force Wright Aeronautical Laboratory, Wright Patterson Air Force Base, Ohio
- Yackel R.A., Kuo B.C., Singh G. (1974). Digital redesign of continuous systems by matching of states at multiple sampling periods. *Automatica*, **10**, 105-111
- Yuping G., Tomizuka M., Tornero J. (1999). Digital redesign of continuous time controller by multirate sampling and high order holds. *Proceedings of the 38th IEEE Conference on Decision and Control*, Phoenix, **4**, 3422-3427
- Yuping Gu, Tomizuka, M. (2000). Multirate digital redesign of continuous time controllers based on closed-loop performance. *Proceedings of American Control Conference*, Chicago, **1**, 1149-1153