

## ALGORITMOS DE AGRUPAMIENTO EN LA IDENTIFICACIÓN DE MODELOS BORROSOS

José L. Díez, José L. Navarro y A. Sala

*Departamento de Ingeniería de Sistemas y Automática  
Universidad Politécnica de Valencia*

Resumen: La aplicación de las técnicas de agrupamiento borroso para la identificación de modelos borrosos se está extendiendo cada vez más. Sin embargo, y dado que su origen es bien distinto a la ingeniería de control, aparecen numerosos problemas en su aplicación en la identificación de modelos locales de sistemas no lineales para control. En este trabajo se revisan las principales técnicas de agrupamiento para la identificación de modelos borrosos, incluyendo propuestas propias que permiten desarrollar modelos que mejoran (respecto a algoritmos previamente existentes) la interpretabilidad y el descubrimiento de estructuras afines locales en los modelos borrosos obtenidos.  
*Copyright © 2004 CEA-IFAC*

Palabras Clave: identificación, agrupamiento borroso, sistemas borrosos, sistemas no lineales, técnicas de control inteligente.

### 1. INTRODUCCIÓN<sup>1</sup>

Para modelar sistemas no lineales (Johansson, 1993) se puede recurrir a su descomposición en un conjunto más o menos grande de submodelos con un rango de validez limitado, que denominamos modelos locales. El modelo global del sistema se puede obtener a través de la integración de los modelos locales utilizando, por ejemplo, una base de reglas borrosa que permite la selección de los modelos adecuados a la situación en que se encuentra el sistema (Johansen y Murray-Smith, 1997). Con este enfoque se dispone de una técnica simple e intuitiva para el modelado de procesos complejos, además de una herramienta muy útil para el diseño de sistemas de control aplicando, por ejemplo, planificación de ganancia (Díez *et al.*, 2004).

Los problemas que surgen a la hora de utilizar esta técnica son la selección del número de modelos locales que se deben emplear y la identificación de los distintos modelos locales utilizados. Una de las alternativas es la utilización de datos experimentales

y extraer a partir de éstos la estructura del sistema de reglas borrosas (extracción de reglas) y los parámetros de los modelos locales (identificación paramétrica). Existen diversos métodos (Nelles, 1999) para resolver este problema basados en algoritmos genéticos, redes neuronales, plantillas o técnicas de agrupamiento (Duda *et al.*, 2000). Los algoritmos de agrupamiento borroso son los más adecuados para la identificación borrosa (Sugeno y Yukusawa, 1993), (Emami *et al.*, 1998), (Babuska, 1996). Los más utilizados en este tipo de aplicaciones son el método de *Fuzzy C-Means* (FCM) (Bezdek, 1987) y el método de *Gustafson-Kessel* (GK) (Gustafson and Kessel, 1979).

En este artículo, tras revisar en los apartados 2 y 3 las técnicas más clásicas (FCM y GK), presenta otras más adecuadas para identificación de sistemas no lineales en las secciones 4 (algoritmos lineales) y 5 (algoritmos mixtos). El apartado 6 muestra las ventajas de técnicas originales de los autores: los algoritmos de agrupamiento que favorecen la convexidad e interpretabilidad de los modelos identificados. Adicionalmente, a lo largo de todo el trabajo se muestran diferentes ejemplos de aplicación de todas las técnicas comentadas.

<sup>1</sup> Parcialmente financiado por el proyecto CICYT DPI2002-0525 (Ministerio Ciencia y Tecnología).

## 2. ALGORITMO DE AGRUPAMIENTO FUZZY C-MEANS (FCM)

La mayoría de las técnicas analíticas de agrupamiento (*clustering* en la literatura en lengua inglesa) borroso se basan en la optimización de la función objetivo *c-means* (Bezdek, 1987) o alguna modificación de ésta.

### 2.1 Función objetivo *c-means*

La función objetivo base de una gran familia de algoritmos de agrupamiento borroso es la siguiente:

$$J(Z; U, C) = \sum_{i=1}^c \sum_{k=1}^N (\mu_{ik})^m \|z_k - c_i\|_B^2 \quad (1)$$

donde

$$Z = \{z_1, z_2, \dots, z_N\} \quad (2)$$

son los datos que deben ser clasificados,

$$U = [\mu_{ik}] \in M_{fc} \quad (3)$$

es una matriz partición borrosa de  $Z$ ,

$$C = [c_1, c_2, \dots, c_c], \quad c_i \in \mathbb{R}^n \quad (4)$$

es el vector de centroides (prototipos) a determinar,

$$D_{ikB}^2 = \|z_k - c_i\|_B^2 = (z_k - c_i)^T B (z_k - c_i) \quad (5)$$

es una norma que viene determinada por la elección de la matriz  $B$  (por ejemplo, la identidad hace que la norma sea la distancia euclídea), y

$$m \in (1, \infty) \quad (6)$$

es un exponente que determina la "borrosidad" de las clases resultantes (cuanto mayor es  $m$ , más borrosos son los conjuntos identificados). El valor de la función de coste (1) es una medida ponderada del error cuadrático que se comete al representar las  $c$  clases por los prototipos  $c_i$ .

### 2.2 Algoritmo fuzzy *c-means* (FCM)

La minimización de la función objetivo (1) es un problema de optimización no lineal que puede ser resuelto de muchas formas, pero la más habitual es la conocida como algoritmo FCM.

Los puntos estacionarios de la función objetivo (1) se encuentran añadiendo (al índice  $J$ ) la condición de que la suma de las pertenencias de un punto a todas las clases debe ser igual a uno mediante los multiplicadores de Lagrange:

$$\bar{J}(Z; U, C, \lambda) = \sum_{i=1}^c \sum_{k=1}^N (\mu_{ik})^m D_{ikB}^2 + \sum_{k=1}^N \lambda_k \left( \sum_{i=1}^c \mu_{ik} - 1 \right) \quad (7)$$

Igualando a cero las derivadas parciales de  $\bar{J}$  con respecto a  $U$ ,  $C$  y  $\lambda$ , las condiciones necesarias para que (1) alcance su mínimo son:

$$\mu_{ik} = \frac{1}{\sum_{j=1}^c (D_{ikB} / D_{jkB})^{2/(m-1)}}, \quad \begin{matrix} 1 \leq i \leq c \\ 1 \leq k \leq N \end{matrix} \quad (8)$$

$$c_i = \frac{\sum_{k=1}^N (\mu_{ik})^m z_k}{\sum_{k=1}^N (\mu_{ik})^m}, \quad 1 \leq i \leq c \quad (9)$$

La ecuación (9) da un valor para  $c_i$  como la media ponderada de los datos que pertenecen a una clase, donde los pesos son las funciones de pertenencia.

El problema más importante que se da al emplear el algoritmo FCM para la identificación de modelos borrosos, es que las clases identificadas tienen forma hiper-elipsoidal, cuando lo deseable para una posterior aplicación a control es que dichas clases tengan una estructura afín o lineal.

Existen muchas extensiones y modificaciones al algoritmo básico FCM descrito. Estos métodos pueden ser clasificados en tres grandes grupos:

- Algoritmos que utilizan una medida de la distancia adaptativa (una norma diferente para cada clase). Esto posibilita la detección de clases de datos con estructuras (tamaños y formas) diferentes.
- Algoritmos basados en prototipos lineales (norma constante y prototipos variables). Es una alternativa a la solución anterior de las restricciones de FCM.
- Algoritmos basados en prototipos no lineales (Klawonn et al., 1997). Este tipo de algoritmos no tienen aplicación al caso de identificación de modelos locales lineales a los que fundamentalmente se restringe este trabajo.

## 3. ALGORITMO DE GUSTAFSON-KESSEL (GK)

De entre los algoritmos con distancia adaptativa cabe destacar el de *Gustafson-Kessel* (GK), algoritmo que extiende el algoritmo básico *fuzzy c-means* eligiendo una norma diferente  $B_i$  para cada clase en lugar de la  $B$  constante en (5). Este algoritmo, aunque no tanto como el FCM, se suele usar en la bibliografía para la obtención de modelos borrosos, dado que las clases hiperelipsoidales que busca detectan de forma bastante correcta los comportamientos cuasi-lineales de los diversos regímenes de funcionamiento que pueden existir en un conjunto de datos.

Extiende el algoritmo básico FCM eligiendo una norma diferente  $B_i$  para cada clase, convirtiendo (5) en (Gustafson y Kessel, 1979):

$$D_{ikB_i}^2 = \|z_k - c_i\|_{B_i}^2 = (z_k - c_i)^T B_i (z_k - c_i) \quad (10)$$

Estas matrices son ahora tomadas como posibles variables para la optimización de la función (1), con

lo que se adaptará la norma a cada clase según sus características. Sea  $B = \{B_1, B_2, \dots, B_c\}$  el vector que contiene las  $c$  normas. La nueva función a minimizar será:

$$J(Z; U, C, B) = \sum_{i=1}^c \sum_{k=1}^N (\mu_{ik})^m D_{ik}^2_{B_i} \quad (11)$$

cumpliendo (3), (4) y (6). Para obtener una solución viable,  $B_i$  debe ser limitada de alguna forma. La forma más habitual es fijar el determinante de  $B_i$ , lo que es equivalente a optimizar la forma de la clase manteniendo su volumen constante:

$$|B_i| = \rho_i, \quad \rho > 0 \quad (12)$$

con  $\rho_i$  constante para cada clase. La expresión que se obtiene mediante los multiplicadores de Lagrange es:

$$B_i = [\rho_i \det(F_i)]^{1/n} F_i^{-1} \quad (13)$$

siendo  $F_i$  la matriz de covarianzas de la clase  $i$  definida por:

$$F_i = \frac{\sum_{k=1}^N (\mu_{ik})^m (z_k - c_i)(z_k - c_i)^T}{\sum_{k=1}^N (\mu_{ik})^m} \quad (14)$$

Una vez determinadas las clases hiperelipsoidales, si lo que se desea es conseguir un modelo borroso de Takagi-Sugeno, se deberán ajustar dichas clases a estructuras lineales (Díez y Navarro, 1999) siguiendo la información proporcionada por el eje mayor de dicha clase y mediante el uso de, por ejemplo, el algoritmo de mínimos cuadrados.

El algoritmo GK es bastante adecuado para el propósito de la identificación, ya que tiene las siguientes propiedades:

- La dimensión de las clases viene limitada por la medida de la distancia y por la definición del prototipo de las clases como un punto.
- En comparación con otros algoritmos, GK es relativamente insensible a la inicialización de la matriz de partición.
- Como el algoritmo está basado en una norma adaptativa, no es sensible al escalado de los datos, con lo que se hace innecesaria la normalización previa de los mismos.

Por todas estas características es bastante empleado en la identificación de los sistemas que son de interés en el marco de este trabajo. Sin embargo, también tiene sus desventajas:

- La carga computacional es bastante elevada, sobre todo en el caso de grandes cantidades de datos.
- El algoritmo GK puede detectar clases de diferentes formas, no solo subespacios lineales que son los que en principio interesan (en realidad busca clases hiperelipsoidales).

- Cuando el número de datos disponibles es pequeño, o cuando los datos son linealmente dependientes, pueden aparecer problemas numéricos ya que la matriz de covarianzas se hace casi singular. El algoritmo GK no podrá ser aplicado a problemas puramente lineales en el caso ideal de no existir ruido.
- Si no hay información al respecto, los volúmenes de las clases se inicializan a valores todos iguales. De esta forma, no se podrán detectar clases con grandes diferencias en tamaño.

Por otra parte, es una característica relativamente común de la identificación de modelos borrosos por agrupamiento olvidar el objetivo (el modelo borroso) en la etapa de agrupación de los datos. Suele ser un paso posterior derivar reglas en alguno de los tipos de modelo borroso existentes (Takagi-Sugeno en nuestro caso). Para ello, la solución más sencilla es proyectar la pertenencia a las clases obtenidas en el espacio deseado, obteniendo así funciones de pertenencia que definirán conjuntos borrosos en los espacios que se proyecten. Otra opción en conservar en el espacio  $n$ -dimensional la función de pertenencia obtenida. Si no se realiza la proyección en el espacio de salida (modelo Mandami), se emplea un método alternativo de ajuste apropiado para la determinación del consecuente (mínimos cuadrados, algoritmos genéticos, ...). Además, se suele perder la interpretabilidad de las reglas a cambio de un bajo error de modelado.

El objetivo primordial de este trabajo es buscar técnicas de agrupamiento que desarrollen clases lineales o hiperplanos (consecuente deseado), manteniendo la interpretabilidad de las reglas (antecedente deseado) y todo ello con resultados de error de modelado al menos tan buenos como el algoritmo GK, de forma que se pueda facilitar el uso posterior de dichos modelos para el control del sistema que está siendo modelado. Como se verá, esto se consigue por medio de la implementación de lo que se ha llamado función de coste mixta.

#### 4. ALGORITMOS CON PROTOTIPOS LINEALES

Existen diferentes algoritmos que eliminan el problema de la limitación de forma y tamaño de las clases impuesta por FCM manteniendo la norma constante pero definiendo prototipos  $r$ -dimensionales ( $0 \leq r \leq n-1$ ), lineales o no lineales, en subespacios del espacio de datos. Esta opción es opuesta a la idea de GK de emplear normas variables, pero también obtiene buenos resultados.

Los algoritmos de este tipo que pueden ser de interés con las premisas de identificación establecidas, es decir, referentes a espacios o subespacios lineales, son el algoritmo *fuzzy c-varieties* (FCV) (Bezdek, 1987) y el algoritmo *fuzzy c-regression models* (FCRM) (Hathaway y Bezdek, 1993).

De entre todos estos algoritmos, el que en un principio parece más interesante es el FCRM, ya que

ajusta los parámetros de la clasificación a un modelo de regresión genérico:

$$y_k = f_i(z_k; \beta_i) \quad (15)$$

con las funciones  $f_i$  parametrizadas por  $\beta_i \in \mathbb{R}^{p_i}$ . El grado de pertenencia  $\mu_{ik} \in U$  se interpreta en este caso como la cercanía existente entre el valor predicho por el modelo (15) e  $y_k$ . El error de predicción suele calcularse como:

$$E_{ik}(\beta_i) = (y_k - f_i(z_k; \beta_i))^2 \quad (16)$$

Las funciones objetivo a minimizar con el método que se presenta, son definidas por  $U \in M_{fc}$  y  $(\beta_1, \dots, \beta_c) \in \mathbb{R}^{p_1} \times \mathbb{R}^{p_2} \times \dots \times \mathbb{R}^{p_c}$  para

$$E_m(U, \{\beta_i\}) = \sum_{i=1}^c \sum_{k=1}^N (\mu_{ik})^m E_{ik}(\beta_i) \quad (17)$$

Una posibilidad para minimizar (17) se presenta en (Hathaway y Bezdek, 1991).

A pesar de lo interesante que en un principio parece el algoritmo, tan solo Kim (1997) sugiere emplearlo para el modelado borroso. Además, los resultados que obtiene no son muy prometedores, y se considera que solo debe ser empleado como una primera aproximación y el ajuste fino del modelo final se hará posteriormente, por ejemplo, con el método del gradiente. En cuanto al antecedente de las reglas lo obtiene en un paso también posterior al agrupamiento, mediante un ajuste de  $U$  a funciones exponenciales.

El comportamiento de FCRM cuando en los datos no hay estrictamente clases lineales, sino que lo que se pretende es obtener modelos lineales que aproximen a un sistema que no es lineal (ni siquiera a tramos) se puede comprobar buscando modelos lineales con alguna curva, por ejemplo, una parábola. Dos de las soluciones que obtiene FCRM para este caso se muestran en la figura 1.

El problema del que adolece el algoritmo es que aunque el error entre los datos de salida y los del modelo se minimiza, los modelos lineales obtenidos no son nada parecidos a lo esperado (aproximar la función a modelar con modelos lineales en el entorno de un punto de funcionamiento), tal y como se muestra especialmente en la parte inferior figura 1. Posiblemente existan múltiples mínimos locales en el problema de optimización.

Una inicialización de la matriz de partición  $U$  más cercana al resultado deseado lleva a resultados como los mostrados en la figura 2, pero nunca comparables a los que se obtienen con el algoritmo GK (figura 4).

En definitiva, este algoritmo no consigue los objetivos deseados aunque su filosofía no sea deseable. Una familia de algoritmos que combina ventajas de uno y otro enfoque se presenta en el apartado siguiente.

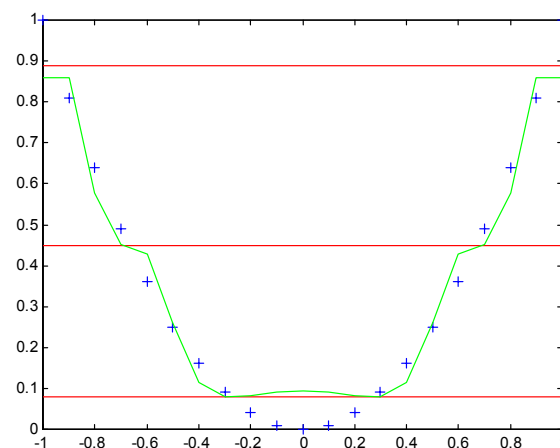
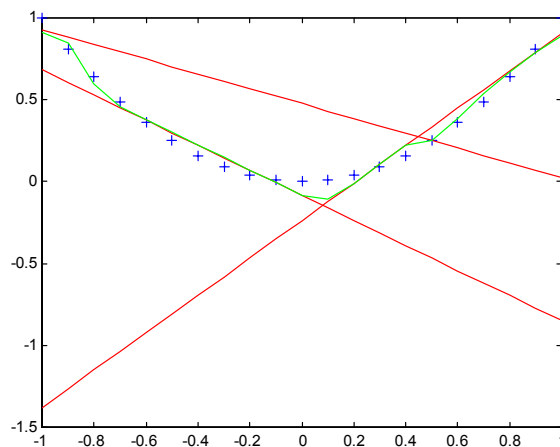


Fig. 1. FCRM en la detección de datos sin estructura lineal (cruces: datos, línea continua: simulación basada en el modelo, líneas rectas: modelos lineales identificados).

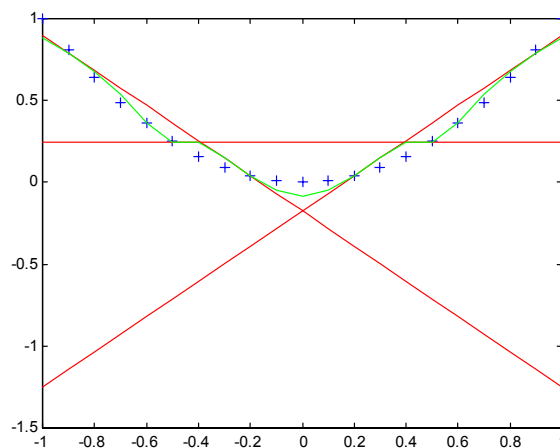


Fig. 2. FCRM en la detección de datos sin estructura lineal con  $U$  dada (cruces: datos, línea continua: simulación basada en el modelo, líneas rectas: modelos lineales identificados).

## 5. ALGORITMOS CON PROTOTIPOS MIXTOS

Existe un tercer tipo de algoritmos (además de los que tienen norma adaptativa o los que emplean prototipos lineales) que intentan superar los problemas de los algoritmos con prototipos lineales mediante la combinación de éstos con los de norma

adaptativa. Estos algoritmos son el algoritmo *fuzzy c-elliptotypes* (FCE) (Bezdek, 1987) y el algoritmo *adaptive fuzzy c-regression models* (AFCR) (Ryoke y Nakamori, 1996), y a los que podríamos llamar algoritmos con prototipos mixtos. Con FCE se pretenden superar algunos de los problemas del FCV. Se toma un criterio genérico,

$$J(Z;U) = \sum_{i=1}^c \sum_{k=1}^N (\mu_{ik})^m D_{eik} \quad (18)$$

se fuerza a cada clase a tener un centro de gravedad  $cdg_i$  y se mide la distancia como combinación de las distancias de FCM ( $D_{ik}$ ) y FCV ( $D_{rik}$ ):

$$D_{eik} = \alpha D_{ik} + (1-\alpha) D_{rik} \quad (19)$$

con  $\alpha \in [0,1]$ . El problema en este algoritmo es la elección del  $\alpha$  correcto para cada clase. El algoritmo AFRCR intenta proporcionar un tratamiento similar a FCRM del que hace FCE con FCV. En este caso el criterio queda:

$$J(Z;U, \beta_1, \dots, \beta_c, c_1, \dots, c_c) = \sum_{i=1}^c \sum_{k=1}^N (\mu_{ik})^m D_{aik} \quad (20)$$

y se toma la distancia como combinación de las distancias de FCRM ( $E_{ik}$ ) y FCM ( $D_{ik}$ ):

$$D_{aik} = \alpha_k E_{ik}(\beta_i) + (1-\alpha_k) \eta D_{ik} \quad (21)$$

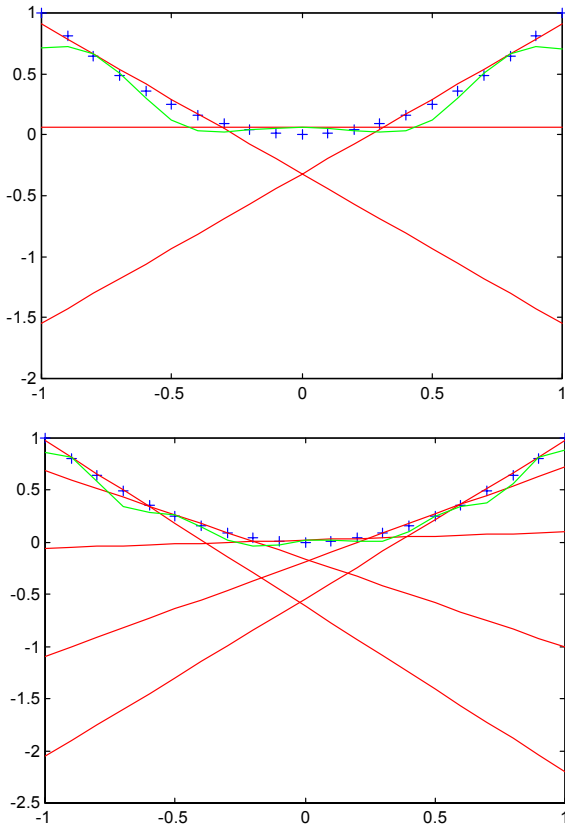


Fig. 3. AFRCR en la detección de datos sin estructura lineal (cruces: datos, línea continua: simulación basada en el modelo, líneas rectas: modelos lineales identificados) para 3 (parte superior) y 5 (parte inferior) clases.

con  $\alpha \in [0,1]$ . El primer término proporciona el mismo criterio que FCRM y el segundo incrementa la capacidad de partición en el espacio de las variables ya que tiene en cuenta la distancia de los datos al prototipo de las clases. La elección del  $\alpha$  se hace de forma dinámica en este algoritmo y se acerca a 1 según la estructura descubierta en la clase es más lineal. Su determinación se basa en

$$\alpha_i = 1 - \frac{\min\{\lambda_{ij}\}}{\max\{\lambda_{ij}\}}, \quad i = 1, 2, \dots, c \quad (22)$$

con  $\lambda_{ij}$  los autovalores de la matriz de covarianzas definida en (14) para GK. De este modo se conjugan en un solo algoritmo ventajas de FCRM, FCM y GK. El parámetro  $\eta$  sirve de balance entre los términos cuando su tamaño medio es muy diferente y no hay ningún estudio respecto a su determinación.

Los resultados que obtiene AFRCR para el mismo ejemplo planteado en las figuras 1 y 2 se pueden observar en la figura 3 y se pueden comparar con el resultado obtenido por GK en la figura 4 y FCRM en la figura 1.

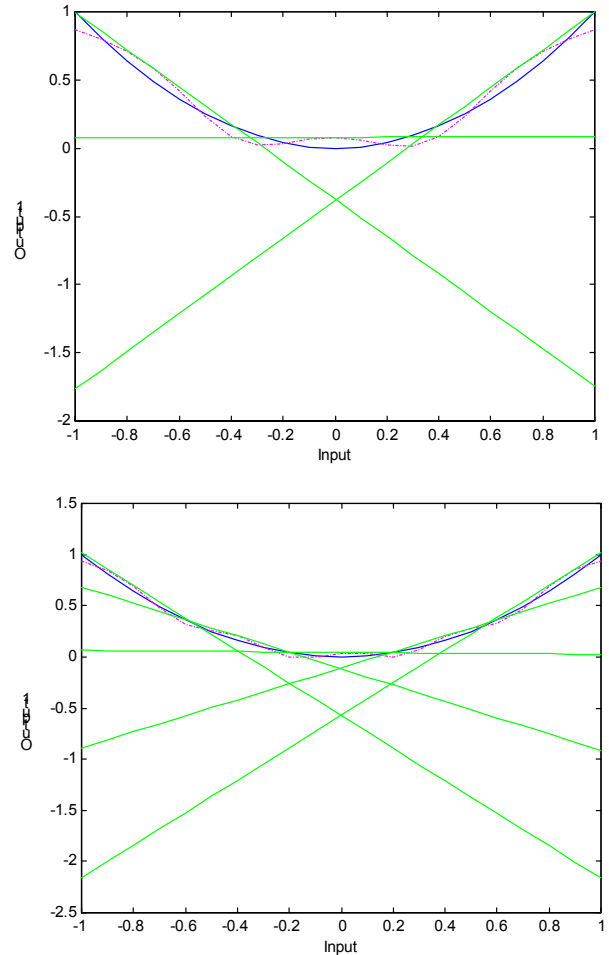


Fig. 4. GK en la detección de datos sin estructura lineal (línea continua: datos, línea discontinua: simulación basada en el modelo, líneas rectas: modelos lineales identificados) para 3 (parte superior) y 5 (parte inferior) clases.

Los resultados se corresponden con la mejora indicada en (Ryoke y Nakamori, 1996) respecto a FCRM, igualando resultados de algoritmos como el GK y obteniendo, al tiempo de realización del agrupamiento, una serie de modelos locales lineales que se ajustan perfectamente a la función en estudio e incluyendo el error de modelado en la función de coste. Además, la capacidad de detección de estructuras lineales no se ha perdido en AFCR, obteniendo resultados idénticos a FCRM con diferentes conjuntos de datos en lo que éste funcionaba correctamente.

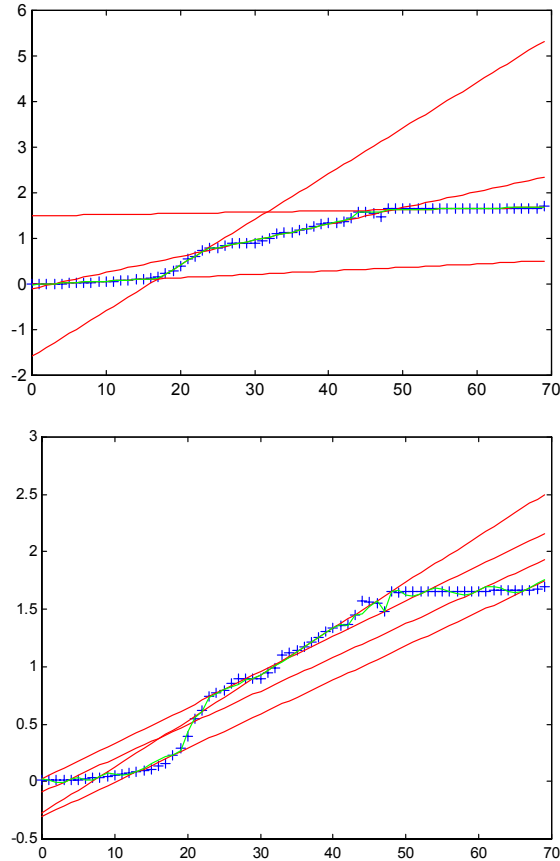


Fig. 5. AFCR (parte superior) y FCRM (parte inferior) en la detección de datos sin estructura lineal (cruces: datos, línea continua: simulación basada en el modelo, líneas rectas: modelos lineales identificados).

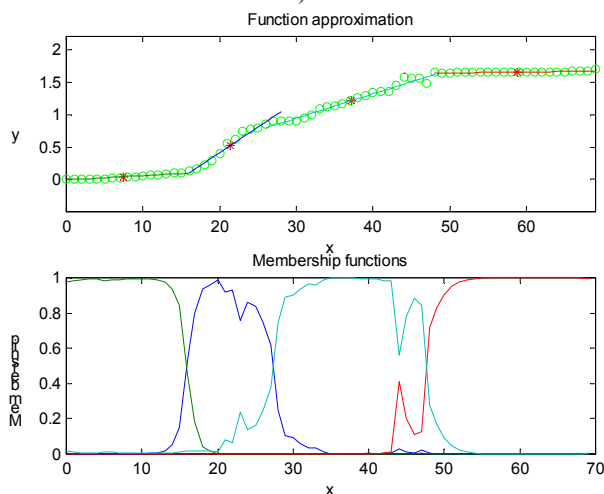


Fig. 6. GK detectando estructuras lineales en datos reales (círculos: datos, líneas continuas: modelos lineales, cruces: prototipos). En la parte inferior se observan las funciones de pertenencia.

A continuación, y dados los buenos resultados obtenidos, se analiza el campo en el que GK se comporta mejor y que es, por otra parte, el que más interesa: la identificación de modelos locales lineales de funciones estáticas y dinámicas desde datos reales, como se da en las aplicaciones a control. Para ello, se ha tomado en primer lugar una serie de datos reales correspondientes al ratio de la cinética de crecimiento de un biorreactor (Carbonell *et al.*, 2000), ejemplo que se muestra en la figura 5.

Se puede observar como AFCR supera FCRM (figura 5) e iguala GK (figura 6) en este ejemplo. Cabe destacar que en ambos casos de resultado positivo (AFCR y GK) las funciones de pertenencia borrosas obtenidas pierden parte de su interpretabilidad (convexidad), como se muestra en la parte inferior de la figura 6.

El efecto de la pérdida de la interpretabilidad se hace mucho más claro en sistemas más "complejos" (orden más elevado), pero no se puede representar gráficamente de forma adecuada. El análisis de los datos en estos casos mediante índices (Ahvenlampi *et al.*, 2003) lleva a concluir que las funciones de pertenencia pierden su interpretabilidad a cambio de un bajo error de modelado.

Una inspección de la matriz U definitiva a la que llevan AFCR o GK indica que se minimiza el error no por cercanía del modelo obtenido, sino por la ponderación de varios modelos. Sin embargo, lo que se pretende buscando modelos cuyo fin es un posterior uso en control, son modelos locales lineales que se aproximen lo más posible al modelo del sistema: se pretende aproximar la función desconocida que representa al sistema con hiperplanos en el entorno del prototipo de la clase que representará un punto de funcionamiento. La idea que se persigue a partir de este momento es incluir en el proceso de agrupamiento alguna condición que favorezca la pertenencia a clases concretas: entradas de U (pertenencias) cercanas a 1 si estamos cerca del prototipo de la clase y cercanas a 0 si estamos lejos del prototipo.

Se pretende, por tanto, conseguir la convexidad de las funciones de pertenencia borrosas suministradas en el proceso de identificación, pues es lo que se necesita para una posterior interpretación y validación y ni el algoritmo AFCR ni el GK lo consiguen. A pesar de esto, con los algoritmos propuestos hasta el momento, ya se puede decir que el funcionamiento de AFCR supera a GK, dado que para los mismos conjuntos de datos se obtienen resultados finales similares pero con la ventaja de que el consecuente afin de las reglas borrosas identificadas forma parte del propio proceso de agrupamiento.

## 6. ALGORITMOS QUE FAVORECEN LA CONVEXIDAD

Aprovechando la metodología de minimización de índices de coste por agrupamiento comentada brevemente en el apartado 2.2 y propuesta en

(Bezdek, 1987), donde indican las condiciones para la convergencia del índice  $J$  de los algoritmos de agrupamiento, se propone añadir nuevos términos a la distancia (21) empleada en AFCR para mejorar la convexidad de las funciones de pertenencia manteniendo lo positivo de este algoritmo (Díez et al., 2002). Para un criterio como el mostrado en (23)

$$J(Z; U, \beta_1, \dots, \beta_c, c_1, \dots, c_c) = \sum_{i=1}^c \sum_{k=1}^N (\mu_{ik})^m D_{C_{ik}} \quad (23)$$

se incluirá en  $D_{C_{ik}}$  un término para penalizar la alta pertenencia de los puntos lejanos a un prototipo ( $D_{lejos_{ik}}$ ) y otro para penalizar la baja pertenencia de puntos cercanos al prototipo ( $D_{cerca_{ik}}$ ), manteniendo también las distancias de FCRM ( $E_{ik}$ ) y FCM ( $D_{ik}$ ).

La nueva distancia global que se empleará será:

$$D_{C_{ik}} = \frac{\alpha_i}{3} E_{ik}(\beta_i) + \frac{\alpha_i}{3} \gamma_1 D_{lejos_{ik}} + \frac{\alpha_i}{3} \gamma_2 D_{cerca_{ik}} + (1 - \alpha_i) \eta D_{ik} \quad (24)$$

con  $\alpha \in [0,1]$  siguiendo para su determinación el criterio (22). El parámetro  $\eta$  se mantiene para el balance entre los términos cuando su tamaño medio es muy diferente y se incluyen  $\gamma_1$  y  $\gamma_2$  con el mismo fin.

Para determinar los valores de  $D_{lejos_{ik}}$  y  $D_{cerca_{ik}}$  se identifica en (25) y (26), respectivamente, el criterio de distancia que es necesario incluir en un índice para expresar la penalización por alta pertenencia de puntos lejanos a un prototipo (25) y baja pertenencia de puntos cercanos al prototipo (26). Se ha utilizado una penalización exponencial en ambos casos, lo que llevará a una preferencia por la generación de funciones de pertenencia exponenciales, aunque dicho criterio puede ser modificado según el criterio que pueda interesar en cada caso.

$$J_{lejos_{ik}} = \mu_{ik}^m \left[ 1 - \exp\left(-\frac{D_{ik}^2}{2\sigma_1^2}\right) \right] \Rightarrow D_{lejos_{ik}} = 1 - \exp\left(\frac{D_{ik}^2}{2\sigma_1^2}\right) \quad (25)$$

$$J_{cerca_{ik}} = (1 - \mu_{ik})^m \left[ \exp\left(-\frac{D_{ik}^2}{2\sigma_2^2}\right) \right] \Rightarrow D_{cerca_{ik}} = \frac{(1 - \mu_{ik})^m}{\mu_{ik}^m} \exp\left(-\frac{D_{ik}^2}{2\sigma_2^2}\right) \quad (26)$$

Este nuevo algoritmo que se propone, denominado AFCRC (*Adaptive Fuzzy C-Regression models with Convexity enhancement*), ha sido programado y, aunque se pretende realizar en el futuro un estudio teórico para la determinación más adecuada de  $\sigma_1$  y  $\sigma_2$ , se han llevado a cabo numerosas simulaciones con resultados muy interesantes determinando  $\sigma_1$  y  $\sigma_2$  de forma manual.

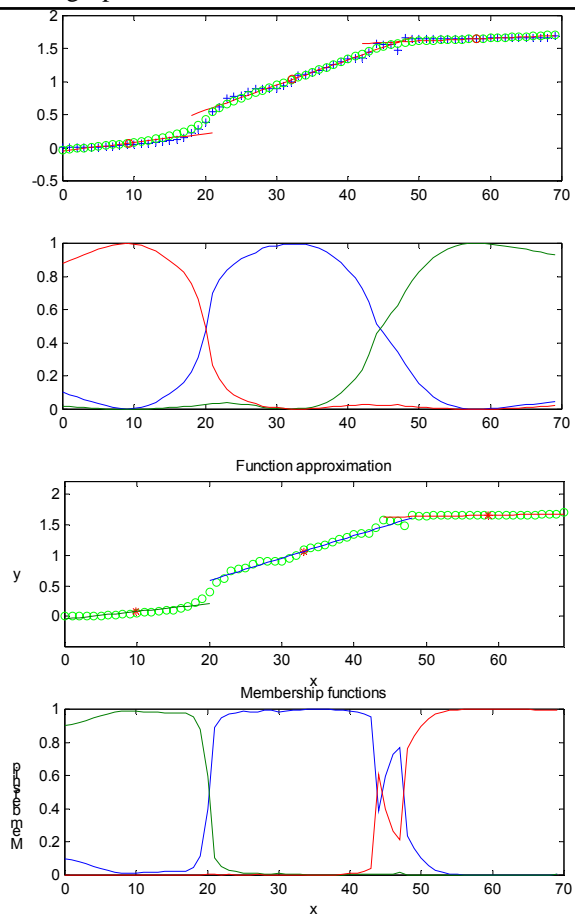


Fig. 7. Detección de 3 clases y funciones de pertenencia con AFCRC (parte superior) y GK (parte inferior).

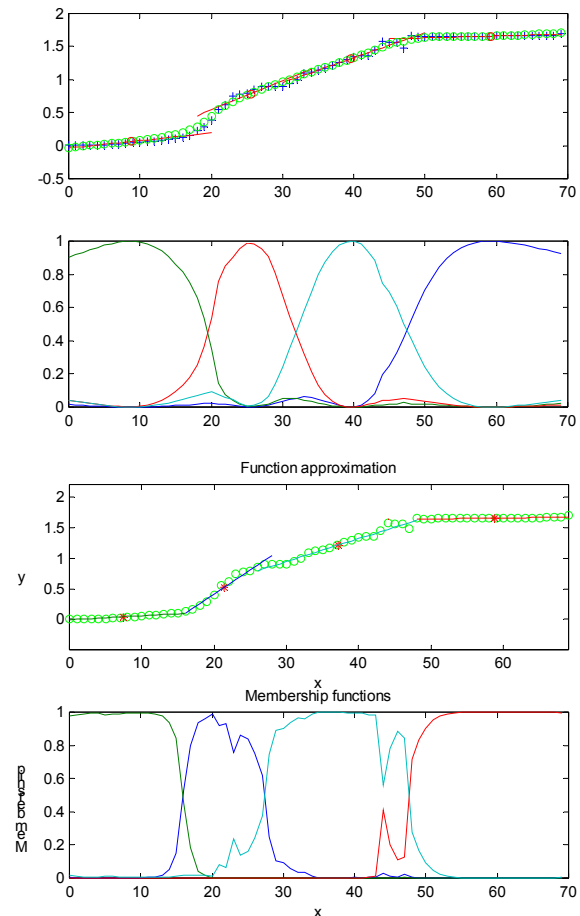


Fig. 8. Detección de 4 clases y funciones de pertenencia con AFCRC (parte superior) y GK (parte inferior).

Una primera aproximación sencilla de estos parámetros se ha determinado viendo que los términos sigma están situados en el denominador de un término exponencial, cuyo numerador es la distancia al cuadrado del punto que se está evaluando. Es por ello que se intuye una dependencia del  $\sigma$  adecuado con las distancias, el rango máximo de las variables (universo de discurso) y el número de clases que se pretende emplear para explicar el sistema. Se pueden usar reglas sencillas basadas en aproximaciones de la máxima y mínima distancia entre clases esperada (Sala *et al.*, 2002).

### 6.1 Identificación de funciones unidimensionales

Con unos valores adecuados de los parámetros del índice AFCRC, los resultados para distinto número de clases se pueden observar en las figuras 7 a 9 para el mismo conjunto de datos empleados en el ejemplo del biorreactor de las figuras 5 y 6. Con el fin de resaltar la clara mejora proporcionada la nueva propuesta, en todas las figuras se presenta en la parte superior los resultados del algoritmo AFCRC y en la inferior los de los algoritmos AFCRC/GK (ambos obtienen resultados muy similares).

En combinaciones de datos más sencillas, como el caso de la parábola empleada en las figuras 1 a 4, AFCRC no pierde sus capacidades. Esto queda claramente mostrado en la figura 10 para 2, 3, 4 y 8 clases.

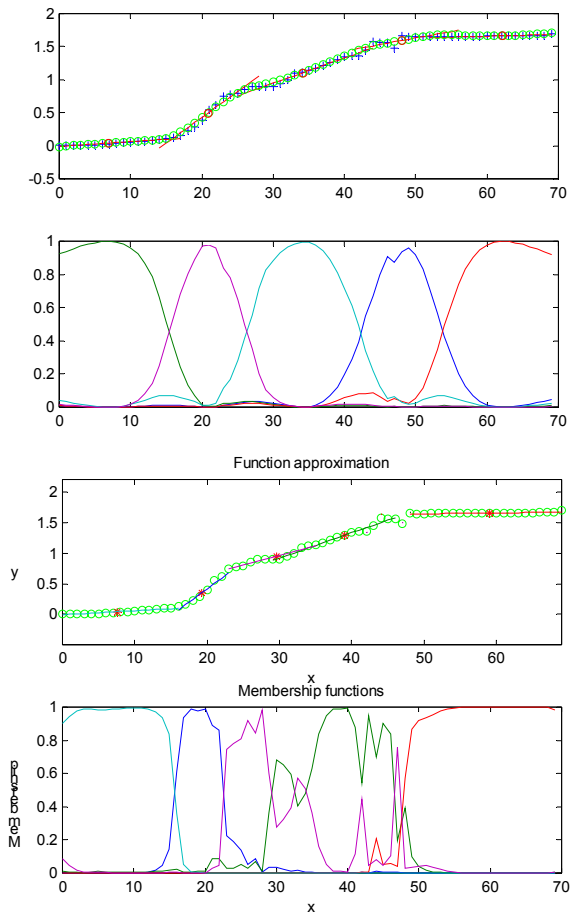


Fig. 9. Detección de 5 clases y funciones de pertenencia con AFCRC (parte superior) y GK (parte inferior).

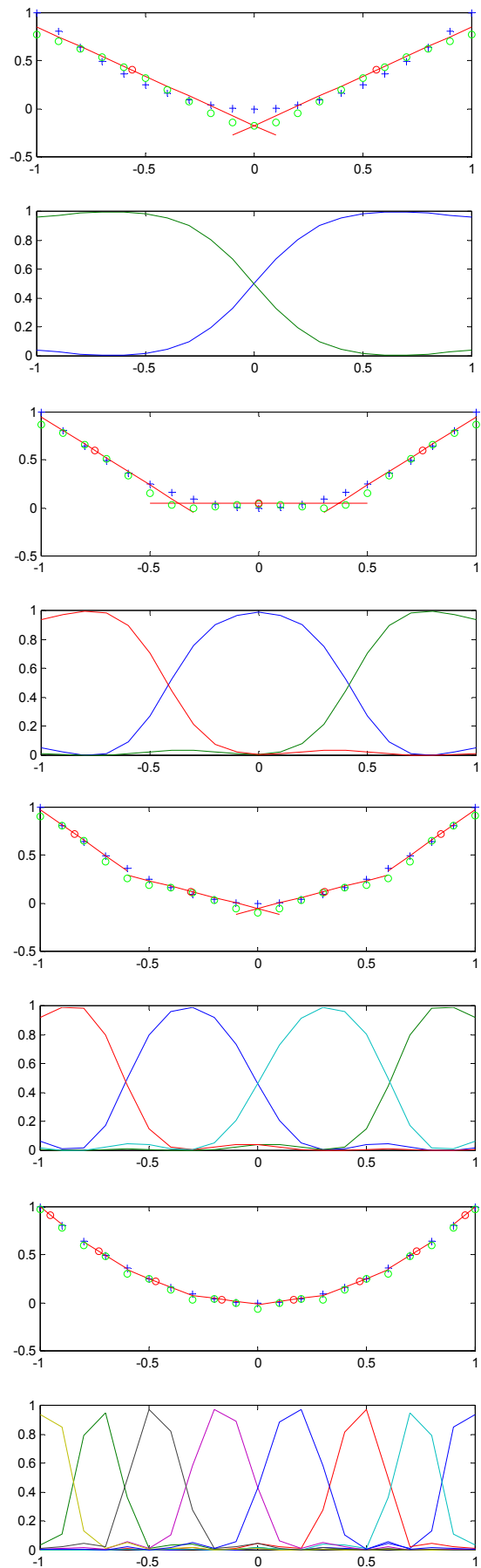


Fig. 10. Detección de diferentes números de clases (cuatro casos) y sus funciones de pertenencia con AFCRC.



### 6.2 Identificación de funciones de varias variables

El sistema no lineal con dos variables de entrada ( $x_1$ ,  $x_2$ ) y una de salida ( $y$ ) descrito por la ecuación (27), ha sido empleado por diferentes autores para comprobar el funcionamiento de diferentes técnicas de identificación borrosa (Sugeno y Yasukawa, 1993), (Emami et al., 1998).

$$y = (1 + x_1^{-2} + x_2^{-1.5})^2 \quad \text{con} \quad 1 \leq x_1, x_2 \leq 5 \quad (27)$$

En el ejemplo de este apartado, se ha modificado el conjunto original de 50 pares de datos originales empleados en (Sugeno y Yasukawa, 1993) mediante la adición de ruido aleatorio. La superficie no lineal a identificar se muestra en la figura 11.

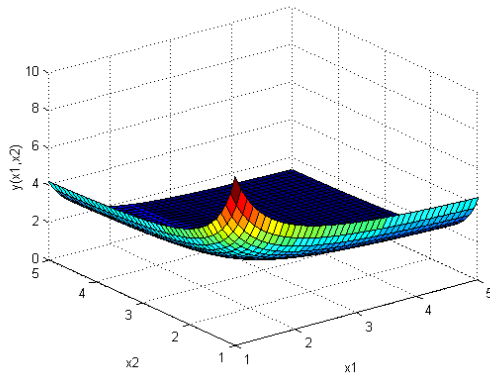


Fig. 11. Sistema no lineal a identificar.

Las figuras 12 y 13 muestran, respectivamente, cómo los datos son asignados (considerando la pertenencia más alta) a clases mediante la aplicación de los algoritmos AFMR y AFCRC. Para facilitar la interpretación, se han marcado los prototipos de las clases (+) y los límites de las clases (líneas), excepto en el caso de la clase no interpretable de la figura 12.

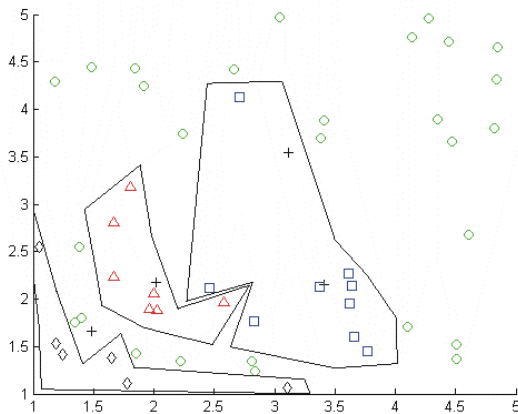


Fig. 12. Asignación de datos a clases mediante AFMR.

Dado que las funciones de pertenencia identificadas son más compactas y corresponden mejor a los modelos locales que detectaría un experto al observar la figura 11, AFCRC mejora (de nuevo en este ejemplo) los resultados de AFMR en el sentido de la interpretabilidad de las funciones de pertenencia. La función identificada es estática pero, dado que los

modelos dinámicos suelen ser tratados como funciones estáticas multidimensionales en la identificación borrosa (Sugeno y Yasukawa, 1993), AFCRC se muestra aplicable en la identificación borrosa de sistemas dinámicos.

El algoritmo AFCRC puede ser empleado en conjuntos de datos de dimensiones más elevadas (más de dos entradas) pero, en ese caso, los resultados no pueden ser visualizados (Sala et al., 2002).

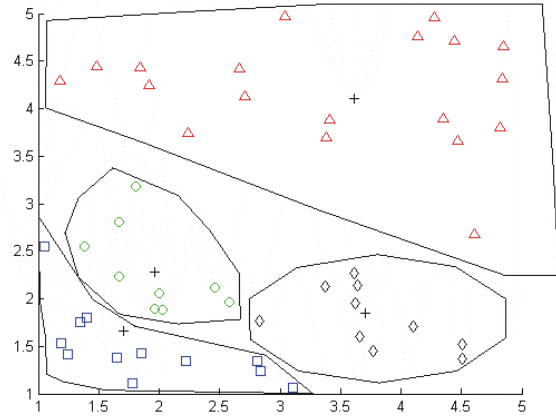


Fig. 13. Asignación de datos a clases mediante AFCRC.

## 7. CONCLUSIONES

En este artículo se han revisado las principales técnicas de agrupamiento, enfocando esta revisión hacia las técnicas más adecuadas para la identificación de modelos borrosos interpretables.

Este trabajo presenta además la definición e implementación de un nuevo algoritmo que mejora la interpretabilidad de las reglas borrosas (denominado AFCRC) de forma muy clara, además de generar en el proceso de agrupamiento los consecuentes afines de las reglas borrosas de tipo Takagi-Sugeno.

El algoritmo de agrupamiento AFCRC (especialmente diseñado para identificar modelos borrosos para control) proporciona modelos que experimentan en su funcionamiento para simulación mejoras importantes, tanto por la facilidad de implementación de los antecedentes del modelo basado en reglas como distancias (ponderadas exponencialmente) al prototipo (gracias a la convexidad de las funciones de pertenencia), como por la generación del consecuente en el proceso de agrupamiento teniendo en cuenta el error de modelado en cada paso de la iteración.

Igualmente se observa mejoría respecto al efecto del ruido en el proceso de identificación, pues los términos añadidos implican, implícitamente, una cierta forma de la función de pertenencia del cluster deseada, con lo que los resultados tienden a esa forma incluso contaminados con ruido, dado que el error de modelado no es el único término del índice.

## REFERENCIAS

- Ahvenlampi T., Díez J. L., Navarro J. L. (2003). *New methods for validation of local models in fuzzy clustering identification*. Proc. of IFAC Conference on Intelligent Control and Signal Processing, pp. 9-12.
- Babuska R. (1996). *Fuzzy Modeling and Identification*, PhD. dissertation. Delft University of Technology, Delft, The Netherlands.
- Bezdek J. C. (1987). *Pattern recognition with Fuzzy Objective Function Algorithms*. Ed. Plenum Press.
- Carbonell P., Díez J. L., Navarro J. L. (2000). Aplicaciones de técnicas de modelos locales en sistemas complejos. *Revista de la Asociación Española para la Inteligencia Artificial*, vol. **10**, pp. 111-118.
- Díez J. L., Navarro J. L. (1999). Fuzzy Models of Complex Systems by means of Clustering Techniques. *Proc. 2nd Intelligent Systems in Control and Measurement*, pp.147-153.
- Díez J. L., Navarro J. L., Sala A. (2002). Fuzzy Clustering Algorithm for Local Model Control. *Proc. IFAC 15<sup>th</sup>. World Congress*, pp. 60-66.
- Díez J. L., Navarro J. L., Sala A. (2004). Control por Planificación de Ganancia con Modelos Borrosos. *Revista Iberoamericana de Automática e Informática Industrial*, vol. **1**, nº1, pp. 32-43.
- Duda, R. O., Hart, P. E., Stork D. G. (2000). *Pattern Classification*. John Wiley & Sons, New York.
- Emami M. R., Türksen I. B., Goldenberg A. A. (1998). Development of a Systematic Methodology of Fuzzy Logic Modeling. *Transactions on Fuzzy Systems*, vol. **6**, nº3, pp. 346-36.
- Gustafson E. E., Kessel W. C. (1979). Fuzzy Clustering with a Fuzzy Covariance Matrix. *IEEE CDC*, San Diego, California, pp. 761-766.
- Hathaway R. J., Bezdek J. C. (1991). Grouped Coordinate Minimization Using Newton's Method for Inexact Minimization in One Vector Coordinate. *Journal of Optimization Theory and Applications*, vol. **71**, nº 3, pp. 503-516.
- Hathaway R. J., Bezdek J. C. (1993). Switching Regression Models and Fuzzy Clustering. *Transactions on Fuzzy Systems*, vol. **1**, nº3, pp. 195-204.
- Johansen, T.A., Murray-Smith, R. (1997). The operating regime approach to nonlinear modelling and control. *Multiple Model Approaches to Modelling and Control* (Eds. R. Murray-Smith and T.A. Johansen). Taylor & Francis, London.
- Johansson, R. (1993). *System modeling and identification*. Information and Systems Science series. Prentice-Hall, New Jersey.
- Kim E., Park M., Ji S., Park M. (1997). A New Approach to Fuzzy Modeling. *Transactions on Fuzzy Systems*, vol. **5**, nº3, pp. 328-337.
- Klawonn F., Kruse R., Timm H. (1997). Fuzzy Shell Cluster Analysis. *Learning, Networks and Statistics* (Eds. G. Della Riccia, H.-J. Lenz and R. Kruse). Springer, New York.
- Nelles, O. (1999). *Nonlinear system identification with local linear neuro-fuzzy models*. PhD dissertation. Darmstadt University of Tech., Darmstadt, Germany.
- Ryoke M., Nakamori Y. (1996). Simultaneous Analysis of Classification and Regression by Adaptive Fuzzy Clustering. *Japanese Journal of Fuzzy Theory and Systems*, vol. **8**, nº1, pp. 99-113.
- Sala A., Díez J. L., Navarro J. L. (2002). A Fuzzy Clustering Algorithm Enhancing Membership Functions Interpretability. *Proc. Control'02, 5th Portuguese Control Conference*, pp. 200-206.
- Sugeno M., Yasukawa T. (1993). A Fuzzy-Logic-Based Approach to Qualitative Modeling. *Transactions on Fuzzy Systems*, vol. **1**, nº1, pp. 7-31.