

CONTROL POR PLANIFICACIÓN DE GANANCIA CON MODELOS BORROSOS

José L. Díez, José L. Navarro y Antonio Sala¹

*Departamento de Ingeniería de Sistemas y Automática
Universidad Politécnica de Valencia*

Resumen: En este artículo se presentan los tipos de modelos borrosos y metodologías de identificación (por agrupamiento borroso) más adecuados para obtener modelos locales de sistemas no lineales. En particular, se muestra qué técnicas de control por planificación de ganancia son aplicables a los modelos así identificados. Estas técnicas, basándose en el diseño de controladores lineales para los modelos locales identificados, consiguen obtener de forma sencilla controladores para un sistema borroso. Copyright ©2004 CEA-IFAC

Palabras Clave: control con modelos locales, planificación de ganancia, técnicas de control inteligente, sistemas borrosos.

1. INTRODUCCIÓN

El paradigma de la división del comportamiento de un sistema complejo no lineal en comportamientos más simples en un entorno local, resulta de gran utilidad al abordar el problema del control de dichos sistemas. Los modelos borrosos basados en reglas (Wang, 1997) son una posibilidad para realizar dicha división manteniendo una legibilidad del resultado. Tras desarrollar (con algún método analítico o de identificación) un conjunto parametrizado de modelos locales lineales lo suficientemente preciso del proceso no lineal (Johansson, 1993), existen dos enfoques principales para realizar el control del proceso.

Una de las opciones para el control con este tipo de modelos, desarrollada en la pasada década (Tanaka and Sugeno, 1992), es la resolución de *desigualdades matriciales lineales* (en adelante se usará el firmemente establecido acrónimo LMI). Esta técnica asegura la estabilidad de un punto de funcionamiento del sistema, aunque puede dar resultados conservadores. Además, convierte el problema del diseño del control en una resolución matemática de ecuaciones cuyos elementos no tienen por qué referirse a modelos loca-

les lineales entendidos como linealizaciones (dado que se basan en expresar sistemas como "combinaciones convexas"), con lo que se puede perder la capacidad de emplear el conocimiento heurístico de control para mejorar el comportamiento de los controladores diseñados, así como la interpretabilidad del resultado final.

Como alternativa, algunos algoritmos de identificación de modelos borrosos (Babuska, 1998; Díez *et al.*, 2002) obtienen consecuentes de las reglas interpretables como linealizaciones locales del proceso. Si se desea explotar dicha interpretación se pueden emplear las técnicas conocidas como *control por planificación de ganancia*, aplicadas satisfactoriamente en el control de procesos no lineales desde hace años (Stein *et al.*, 1977). Las aplicaciones van desde la ingeniería aeroespacial al control de procesos, en un ámbito no necesariamente restringido al de los modelos borrosos. La idea básica es diseñar diferentes controladores para diferentes modelos lineales en diferentes puntos de operación e interpolar estos controladores, con lo que se llega a un controlador no lineal global. Sin embargo, hasta los años noventa es raro encontrar un tratamiento teórico (Aström and Wittenmark, 1995), aunque afortunadamente en los últimos años han aparecido interesantes revisiones completas sobre el tema (Leith and Leithead, 2000; Rugh and Shamma, 2000).

¹ Trabajo parcialmente financiado por el proyecto DPI2002-0525 del Ministerio de Ciencia y Tecnología.

El objetivo de esta contribución es revisar las técnicas de planificación de ganancia, investigando cuáles de ellas permiten una fácil adaptación a los modelos borrosos. Del mismo modo, se analizan qué paradigmas de modelos borrosos y metodologías de identificación son los adecuados para aplicar las referidas técnicas. Algunos aspectos como el tratamiento del cambio de punto funcionamiento y las distintas alternativas de interpolación son también discutidos.

La estructura del artículo es la siguiente. En la sección 2 se presentan las clases de modelos borrosos y las ideas preliminares sobre las técnicas de control a utilizar. La sección 3 se dedica al uso de técnicas LMI en este marco, para pasar a describir el control por planificación de ganancia basado en modelos en puntos de operación en la sección 4. La visión adoptada para presentar esta técnica está muy relacionada con los modelos borrosos de Takagi-Sugeno (TS). Una mejora, basada en la linealización por velocidad, se muestra en la sección 5. Estas técnicas se aplican sobre un ejemplo en la sección 6. Una sección de conclusiones resume el trabajo.

2. TIPOS DE MODELOS Y FILOSOFÍA DE CONTROL

Considérense los sistemas no lineales representados por una planta genérica invariante en el tiempo:

$$\dot{x} = f(x, u) \quad (1)$$

donde x es el vector de estado $n \times 1$, u es el vector de entrada $m \times 1$, y se ha asumido que x y u incluyen todas las dependencias con variables exógenas. $f(\cdot)$ es una función vectorial con derivadas continuas.

La linealización por Jacobiano obtiene modelos locales lineales en un punto de equilibrio. La integración de los controladores diseñados para esos modelos es el objetivo de la técnica de planificación de ganancia. No obstante, la linealización por Jacobiano no es la única forma de obtener dichos modelos locales, existiendo alternativas (Walter and Pronzato, 1997). Este trabajo se centra en los modelos borrosos (Babuska, 1998) obtenidos con técnicas como, por ejemplo, el agrupamiento borroso (Bezdek, 1987).

Agrupamiento borroso. Las técnicas de agrupamiento borroso tratan de obtener un modelo a partir de una serie de datos experimentales $z_k = (y_k, u_k)$, $k = 1, \dots, N$. Estas técnicas buscan asignar cada punto a una clase entre un número prefijado de ellas, permitiendo asignaciones de pertenencia parcial. Los algoritmos buscan obtener los valores de la pertenencia μ_{ik} de cada dato a cada clase, los *centroides* de cada clase y los parámetros de un modelo local β_i , $i = 1, \dots, c$ (donde c es el número de clases en las que se desea dividir el régimen de funcionamiento del sistema) que minimizan un índice de coste, por ejemplo (Díez *et al.*, 2002):

$$J = \sum_{k=1}^N \sum_{i=1}^c \mu_{ik}^m (E_{ik} + D_{ik}) + (1 - \mu_{ik})^m H_{ik} \quad (2)$$

donde $E_{ik} = \|y_k - \varphi(\beta_i, u_k)\|^2$ es un término de error de modelado (φ define la estructura del modelo, normalmente lineal) y D_{ik} , H_{ik} son términos relacionados con la distancia de un punto al centroide. El exponente m es definible por el usuario. Suele forzarse la condición de partición $\sum_i \mu_{ik} = 1$. Una descripción más detallada de algunos de estos algoritmos aparecen en las referencias ya citadas y en (Díez, 2003; Díez *et al.*, 2004).

Modelos Takagi-Sugeno (TS). Otra posibilidad es identificar experimentalmente modelos de tipo:

$$\dot{x} = \sum_{i=1}^c \mu_i(\alpha) \varphi(\beta, x, u)$$

La identificación de dichos modelos se trata en (Walter and Pronzato, 1997; Johansen and Murray-Smith, 1997). En el caso lineal, utilizando representación interna, se dispone de modelos de la forma:

$$\dot{x} = \sum_{i=1}^c \mu_i(x, u) (A_i x + B_i u + a_i) \quad \text{con} \quad \sum_{i=1}^c \mu_i = 1. \quad (3)$$

Al tomar $a_i = 0$ quedan los modelos borrosos TS (Takagi and Sugeno, 1985). Estos modelos pueden también ser obtenidos a partir de cotas en los coeficientes de las ecuaciones diferenciales del sistema (Tanaka and Wang, 2001).

Control. En general, se dispone de un conjunto finito de modelos continuos o discretos

$$\begin{aligned} \dot{x} &= A_i x + B_i u + a_i \\ x_{k+1} &= A_i x_k + B_i u_k + a_i \end{aligned} \quad (4)$$

para los que se deben diseñar reguladores y estrategias de conmutación entre ellos. El caso de modelos Lineales de Parámetros Variantes en el tiempo (LPV, $\dot{x} = A(t)x + B(t)u$ o su discretización) también puede ser considerado de una forma similar. No obstante, estos últimos no necesitan de correcciones de punto de funcionamiento o acción integral dado que no hay cambios en el mismo. Si las transiciones de punto de funcionamiento son lentas, la inclusión de una pequeña acción integral permite considerar los modelos (4) en el marco LPV.

En términos generales, el diseño de un controlador por planificación de ganancia para (1) se describe como un procedimiento de cuatro pasos (Aström and Wittenmark, 1995), con diferentes opciones técnicas en cada uno de ellos:

- Obtener un conjunto finito de **modelos lineales** con parámetros variables, según alguna de las metodologías antes expuestas, y un conjunto de *variables de planificación* que permitan determinar el grado de validez μ_i de cada modelo,
- diseñar **controladores mediante métodos lineales**, lo que normalmente lleva a una familia de

controladores lineales independientes diseñados para valores aislados (puntos de operación) de las variables de planificación.

- realizar la **planificación de ganancia** propiamente dicha, mediante la interpolación de la familia de controladores lineales de forma que los coeficientes de los controladores (ganancias) varíen (sean planificados) de acuerdo con valores actualizados de las variables de planificación, y
- evaluar el **rendimiento** del control diseñado, aunque habitualmente solo se puede realizar un estudio analítico a nivel local de las propiedades de estabilidad, mientras que la evaluación no local está basada en simulaciones.

Nótese que resolver problemas de control independientes en cada punto de operación no tiene por qué ser siempre adecuado ya que el hecho de que cada modelo local y su regulador sea estable no asegura la estabilidad global para cualquier régimen de trabajo (Tanaka and Sugeno, 1992; Leith and Leithead, 2000).

3. PLANIFICACIÓN DE GANANCIA MEDIANTE DESIGUALDADES MATRICIALES LINEALES

Los problemas de optimización numérica LMI han recibido mucha atención en los últimos diez años (Boyd *et al.*, 1994), en particular en el campo de la ingeniería de sistemas y de control. Los problemas LMI se pueden resolver eficientemente de forma numérica.

Definición de LMI. Una LMI es una desigualdad matricial de la forma

$$F(x) = F_0 + \sum_{i=1}^m x_i F_i > 0, \quad (5)$$

donde $x^T = (x_1, x_2, \dots, x_m)$ es la variable y las matrices simétricas $F_i = F_i^T \in R^{n \times n}$, $i = 0, \dots, m$ son conocidas. El símbolo de desigualdad > 0 significa que $F(x)$ es definida positiva.

La LMI (5) es una restricción convexa de x , es decir, el conjunto $\{x \mid F(x) > 0\}$ es convexo. La expresión (5) puede representar una gran variedad de restricciones convexas de x . En la mayor parte de casos de interés en la teoría de control x_i son elementos de matrices. Cuando se tienen múltiples LMIs $F^{(i)} > 0$, $i = 1, \dots, p$, pueden ser expresadas como una única LMI $\text{diag}(F^{(1)}, \dots, F^{(p)}) > 0$.

Dada una LMI $F(x) > 0$, el problema LMI es encontrar x^{fact} tal que $F(x^{fact}) > 0$ o determinar si la LMI no es factible. Este es un problema de factibilidad convexa.

A continuación se presentan las dos formas más habituales para el desarrollo de controladores planteando problemas LMI, cuando se dispone de modelos lineales de parámetros variables de sistemas. Para un desarrollo en detalle ver, por ejemplo, (Tanaka and Wang, 2001).

3.1 Proceso iterativo para diseño de controladores

La condición de estabilidad simultánea de Lyapunov es un problema LMI: dadas $A_{*i} \in R^{n \times n}$, con $i = 1, 2, \dots, c$, (para un sistema discreto $x_{k+1} = A_{*i}x_k = (A_i + B_i K_i)x_k$) hay que encontrar P que satisfaga la LMI

$$P > 0, \quad A_{*i}^T P A_{*i} - P < 0, \quad i = 1, 2, \dots, c, \quad (6)$$

o determinar que P no existe. Con ello, si $x_{k+1} = \sum_i \mu_i A_{*i} x_k$ se garantiza que $x_k^T P x_k$ es una función de Lyapunov global. Existe una expresión equivalente para el caso continuo.

Así pues, un posible proceso de diseño de controladores para un sistema no lineal que da buenos resultados en múltiples aplicaciones, quedará así:

1. Obtener un modelo del sistema en la forma (4) ($a_i = 0$),
2. Diseñar un controlador para cada punto de operación atendiendo al rendimiento "local",
3. Realizar un análisis de estabilidad planteado como problema LMI,
4. Si el problema LMI no es factible, rediseñar los controladores.

3.2 Diseño directo por realimentación del estado

Existe una segunda estrategia de diseño de controladores basada en LMI que permite obtener directamente un controlador que asegura la estabilidad del sistema en bucle cerrado mediante la aplicación de realimentación del estado a cada modelo en los i puntos de operación (eliminando su término independiente en el caso de tenerlo) de la forma (4).

La condición suficiente de estabilidad del sistema en este caso es la existencia de una matriz común definida positiva P y unas ganancias K_i tal que verifique para todos los modelos locales la desigualdad matricial bilineal

$$(A_i + B_i K_i)^T P (A_i + B_i K_i) - P < 0 \quad (7)$$

verificando al mismo tiempo para todos los pares de modelos locales la desigualdad matricial bilineal

$$\left(\frac{G_{ij} + G_{ji}}{2} \right)^T P \left(\frac{G_{ij} + G_{ji}}{2} \right) - P < 0 \quad (8)$$

donde $G_{ij} = A_i + B_i K_j$. Este problema se puede reescribir como LMI, definiendo $X = P^{-1}$ e $Y_i = K_i X$, como un problema LMI: dadas A_i, B_i con $i = 1, 2, \dots, c$, hay que encontrar X y las c Y_i s que satisfagan la LMI

$$X > 0, \quad A_i X + B_i Y_i + X A_i^T + Y_i B_i^T < 0, \quad (9)$$

o determinar que X no existe. Si el problema es factible y se encuentran de forma simultánea X y las Y_i s, se deshacen los cambios de variable despejando las ganancias de realimentación K_i y el valor de P definida positiva. De este modo se dispone de una

herramienta sencilla y útil para el diseño de sistemas de control para procesos no lineales ($u = \sum_i \mu_i K_i$).

3.3 Análisis de aplicabilidad en planificación de ganancia

Las técnicas LMI expuestas proporcionan un adecuado marco para el diseño de controladores globalmente estables para los modelos en la forma (3), en el sentido de que *desde cualesquiera condiciones iniciales se puede alcanzar el origen*.

Sin embargo, el primer problema que plantean es la interpretación de los modelos: (3) con $a_i = 0$ implica que todos los modelos tienen el mismo punto de equilibrio y que los modelos A_i deban ser interpretados como cotas y no como modelos locales del sistema.

Un segundo problema radica en que la forma concreta de interpolación entre modelos (las funciones validez o pertenencia μ) no aparece en la LMI (9), con lo que se puede llegar a resultados conservadores (la no existencia de funciones cuadráticas comunes no implica la inestabilidad del sistema). Otros tipos de LMI buscan funciones de Lyapunov globales más generales (Guerra and Vermeiren, 2001).

Un tercer problema del diseño directo está relacionado con los cambios de punto de operación, ya que esto implica cambiar todas las cotas A_i y las funciones de pertenencia asociadas de forma adecuada. En modelos sin término independiente, la figura 1 describe en el caso más simple la necesidad de cambiar los A_i si se cambia el punto de operación. Por tanto, las técnicas de LMI, en ciertos casos, requerirán a su vez un bucle *externo* de planificación de ganancia basado en la referencia.

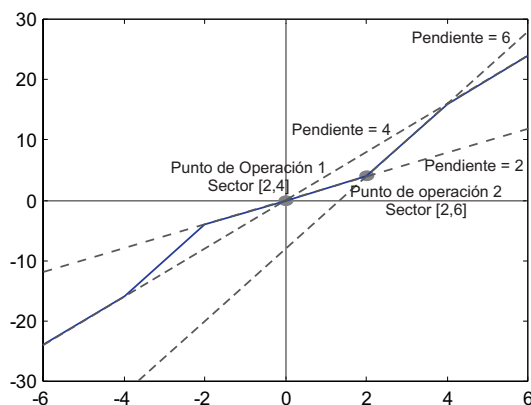


Figura 1. Cambios en el punto de operación obligan a cambiar la descripción de modelos (4).

En conclusión, las LMIs adolecen de algunos inconvenientes en términos de interpretabilidad, conservatividad e implementación de los cambios de referencia aunque son actualmente la solución más elegante desde el punto de vista teórico. Estas técnicas han tenido éxito reciente en aplicaciones (Schulte and Hahn, 2004).

4. CONTROLADORES BASADOS EN MODELOS LPV EN PUNTOS DE OPERACIÓN

En este apartado se muestra un enfoque de la planificación de ganancia que evidencia su similitud con el modelado y control borroso (Johansen and Murray-Smith, 1997).

Considérese que se ha aproximado la dinámica del sistema (1) mediante linealizaciones en el entorno de diferentes puntos de operación $(x_{o_i}, u_{o_i}) \in R^{n+m}$ $i = 1, \dots, c$. Se supone que estos puntos se pueden parametrizar en función de un vector de variables de planificación ϕ , que puede incluir todas las variables medibles del sistema (internas o externas) de modo que $\phi(t)$ siempre esté disponible (Rugh and Shamma, 2000). A $\phi \in \Phi$ se le llama régimen de operación y al conjunto de todos ellos, Φ , conjunto de operación.

Eliminando los términos de orden superior, el sistema (1) la familia de linealizaciones en puntos de operación:

$$\dot{x} = \nabla_x f(x_o(\phi), u_o(\phi))x + \nabla_u f(x_o(\phi), u_o(\phi))u + d_f(x_o(\phi), u_o(\phi)), g(x_o(\phi), u_o(\phi))u + \quad (10)$$

donde $\phi \in \Phi$, $d_f(\cdot)$ es el término independiente (cero si ϕ es un punto de equilibrio) y $\nabla_x f$ indica la matriz Jacobiana de f respecto de x , etc. Tomando un conjunto finito de puntos de operación $\{\phi_i\}$, $i = 1, \dots, c$, se tendrán unos modelos locales dados por $\dot{x} = f_i(x, u) = A_i x + B_i u + a_i$. La interpretación es que para cada valor de linealización ϕ , el sistema (10) describe el comportamiento local de la planta no lineal en el entorno del punto de operación correspondiente. A partir de esta descripción se formarán las redes de modelos locales.

Definición de Red de Modelos Locales. *Dados c puntos de operación y sus modelos locales según (10) y seleccionadas adecuadamente las funciones μ de validez o pertenencia (normalizadas de la forma $\sum_i \mu_i(\phi) = 1$), se define una Red de Modelos Locales como la interpolación de los c modelos locales dada por (Hunt et al., 1996):*

$$\dot{x} = \sum_{i=1}^c \mu_i(\phi) f_i(x, u). \quad (11)$$

Esta aproximación describe el comportamiento de la planta de forma lineal para en el entorno de cada valor de la variable de planificación (ϕ_i tal que $i \in [1, c]$) mediante $f_i(x, u)$. La expresión (11) es equivalente bajo ciertas condiciones (Hunt et al., 1996) a los modelos borrosos (3).

Considérese en este caso que a continuación se desarrolla un controlador para cada uno de los puntos de operación (x_o, u_o) . El resultado será, en lo que respecta al control, un conjunto de c controladores lineales:

$$u_i = J_i x + K_i e + u_{o_i}. \quad (12)$$

cada uno de los ellos diseñado para asegurar un funcionamiento adecuado (error e pequeño o nulo) en bucle cerrado cuando se emplea con la linealización de la planta que le corresponde. El término independiente que aparece en cada f_i de (11) ha de ser tratado aparte, considerándolo por ejemplo como una perturbación a eliminar con una prealimentación o acción integral. Para que el conjunto indexado de controladores lineales sea aplicable, se ha de conseguir en base a ellos un controlador no lineal único, mediante un controlador lineal de parámetros variables parametrizado con ϕ :

$$u = J(\phi)x + K(\phi)e + u_o(\phi). \quad (13)$$

Para interpolar controladores existen numerosos métodos (Leith and Leithead, 2000; Rugh and Shamma, 2000), pero muchos de ellos son soluciones ad-hoc a problemas concretos y no están lo suficientemente justificados como para ser planteados como una metodología genérica. Por ejemplo, esta combinación se puede realizar con redes de controladores locales.

Definición de Red de Controladores Locales. *Dado un conjunto de controladores locales lineales diseñados para los modelos locales de la planta (11), se define la Red de Controladores Locales como la combinación de esos controladores independientes con:*

$$u = \sum_i^c [\mu_i(\phi)J_i]x + \sum_i^c [\mu_i(\phi)K_i]e + \sum_i^c [\mu_i(\phi)u_{o_i}(\phi)] \quad (14)$$

donde para la combinación de los controladores se emplea (Hunt and Johansen, 1997) la misma regla de variación que dan las funciones de pertenencia (validez) para el modelo de la planta (11).

Esta definición lleva implícita la suposición de que, de algún modo, la variación entre modelos de la planta captura su dinámica. Hay que tener en cuenta que modelos como (11) son la combinación de los modelos locales que se desprenden de (1), pero la relación entre las soluciones de ambos sistemas no es directa. El desarrollo en serie de (11) en el entorno del punto de operación aproxima perfectamente a (1), pero contiene términos cruzados de las derivadas de las funciones de pertenencia, con lo que en aquellas zonas en las que la derivada de alguna de las funciones de pertenencia tome valores elevados, la dinámica del desarrollo en serie estará muy relacionada con las funciones de pertenencia y poco con el modelo local.

Si los puntos de operación seleccionados son puntos de equilibrio, se pueden utilizar técnicas de análisis de estabilidad en tiempo detenido (*frozen-time*, (Desoer, 1969)). Si ese no es el caso, es posible llegar a resultados en forma de cotas (Díez and Previdi, 2001) en las que interviene la granularidad del modelo y la suavidad del cambio entre puntos de operación para asegurar un buen comportamiento del control basado en estos modelos. Si los modelos f_i en (11) son li-

neales *sin* término independiente, pueden aplicarse las técnicas de la Sección 3.

En definitiva, la aplicabilidad de la filosofía clásica de control por planificación de ganancia en los controladores basados en modelos LPV del sistema en diferentes puntos de operación se restringe a situaciones en las que la transición entre modelos es lo suficientemente lenta como para que la influencia de los términos cruzados en los que aparecen las derivadas de las funciones de pertenencia sea pequeña (Leith and Leithead, 1999).

5. CONTROLADORES BASADOS EN MODELOS LPV LINEALIZADOS POR VELOCIDAD

Se puede obtener una representación alternativa a la linealización en torno a un punto de operación (10) derivando a ambos lados de la igualdad y, haciendo el cambio de variable $\dot{x} = v$. En (Leith and Leithead, 1998) se demuestra que la llamada solución a la linealización basada en la velocidad, aproxima localmente la solución del sistema no lineal (1) en un punto de operación genérico (x_o, u_o) (no necesariamente de equilibrio). La solución de la linealización basada en la velocidad es solo una aproximación local, pero se puede encontrar una solución asociada a cada punto de operación de un sistema no lineal, con grado de precisión arbitrario, y parametrizarlas en función de una variable de planificación ρ (con las mismas características de ϕ en (10)). Así pues, una familia de linealizaciones basadas en la velocidad parametrizada por la variable de planificación ρ engloba toda la dinámica del sistema no lineal (ρ captura la estructura no lineal del sistema) quedando:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= v, \\ \dot{v} &= (\nabla_x f(x_o(\rho), u_o(\rho)) + \nabla_x d_f(x_o(\rho), u_o(\rho)))v + \\ &+ (\nabla_u f(x_o(\rho), u_o(\rho)) + \nabla_u d_f(x_o(\rho), u_o(\rho)))\dot{u}. \end{aligned} \quad (15)$$

Esta representación tiene la ventaja, con respecto a (10), de que la función no lineal d_f ha desaparecido. En (Leith and Leithead, 1998) se discuten condiciones que relacionan la estabilidad del sistema no lineal con la estabilidad de sus linealizaciones basadas en la velocidad.

Cuando se dispone de una familia de linealizaciones de la planta basada en la velocidad (15), se debe determinar la familia de controladores adecuada. Como cada linealización (15) es lineal (ha desaparecido el término independiente), se pueden emplear métodos de diseño lineales para el diseño de cada uno de los controladores sobre \dot{u} .

Definición de Red de Modelos Locales por Velocidad. *Dado un conjunto indexado ($i \in [1, c]$) de modelos locales según (15) (uno por punto de operación (x_i, u_i)), una Red de Modelos Locales por Velocidad es el modelo global consistente en la ponderación:*

$$\begin{aligned}\dot{x} &= v, \\ \dot{v} &= \sum_i^c \mu_i(\rho) [(\nabla_x f(x_o(\rho), u_o(\rho)) + \nabla_x d_f(x_o(\rho), u_o(\rho)))]v + \\ &+ \sum_i^c \mu_i(\rho) [(\nabla_u f(x_o(\rho), u_o(\rho)) + \nabla_u d_f(x_o(\rho), u_o(\rho)))]\dot{u},\end{aligned}\quad (16)$$

en la que μ varía igual que en el modelo (11) original.

Ahora se podrá diseñar un controlador para cada uno de los modelos locales según:

$$\dot{u} = J_i v + K_i \dot{e}, \quad (17)$$

donde se asume que las derivadas del estado de la planta y del error se pueden medir o son calculables. El último paso del proceso de diseño será la realización de un controlador no lineal desde la familia de controladores linealizados por velocidad. La interpolación entre los controladores lineales lleva a una familia (red) de controladores linealizados por velocidad.

Definición de Red de Controladores Locales por Velocidad. Dado un conjunto de controladores locales lineales diseñados según (17), la combinación de éstos con la misma regla de variación que dan las funciones de pertenencia (validez) para el modelo de la planta (16), genera la Red de Controladores Locales por Velocidad:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= v, \\ \dot{u} &= \sum_i^c [\mu_i(\rho) J_i]v + \sum_i^c [\mu_i(\rho) K_i] \dot{e}.\end{aligned}\quad (18)$$

El controlador no lineal definitivo en su forma basada en velocidad se puede obtener directamente permitiendo que la variable de planificación ρ varíe con el punto de operación. La versión discreta será:

$$\begin{aligned}\Delta v_k &= v_k - v_{k-1}, \\ \Delta u_k &= \sum_i^c [\mu_i(\rho) J_i] \Delta v_k + \sum_i^c [\mu_i(\rho) K_i] \Delta e_k.\end{aligned}\quad (19)$$

En estos casos, en contraste con las representaciones de las redes de modelos locales, al desaparecer el término independiente se mantiene una relación directa (Leith and Leithead, 1999) entre las características dinámicas de (16) y de (18). Debido a las operaciones de diferenciación e integración asociadas con los modelos locales en su representación por velocidad, el orden de estos modelos y la sensibilidad a ruido puede ser mayor que el de la representación directa (1).

La estabilidad y rendimiento de los sistemas no lineales diseñados por el método de planificación de ganancia basada en la velocidad, puede analizarse con métodos de propósito general para sistemas no lineales (Leith and Leithead, 2000) como pequeña ganancia (Sandberg, 1964), teoría de tiempo detenido (Desoer, 1969) o la teoría de Lyapunov (sección 3).

6. EJEMPLO

A continuación se mostrarán, con la aplicación a un ejemplo, los resultados que se obtienen con el empleo de las técnicas basadas en la planificación de ganancia comentadas en los apartados anteriores.

El sistema no lineal empleado es el descrito por la ecuación (20)

$$y_{k+1} = 0,0875(y_k + 2,0714)^2 + 0,3u_k + 2,6714 \quad (20)$$

en el que y es la salida del sistema y u la entrada.

6.1 Red de controladores locales

Para el desarrollo de estos controladores se seguirán las técnicas descritas en las secciones 2 y 4.

Identificación de modelos locales. Supongamos que, de forma automática tras la aplicación de un algoritmo de identificación adecuado (como los mencionados en la sección 2) o simplemente tras la elección de dos puntos de operación (u_{k-1}, y_{k-1}, y_k) en el espacio entrada-salida como en los métodos tradicionales de planificación de ganancia descritos, se ha llegado a los modelos locales (linealizaciones) de la tabla 1.

Punto operación	Función transferencia	Térm. indep.
$P_1=(0,2,5,4,5)$	$\frac{0,3z^{-1}}{1-0,8z^{-1}}$	2,5
$P_2=(0,5,3572,7,5)$	$\frac{0,3z^{-1}}{1-1,3z^{-1}}$	0,5356

Tabla 1. Modelos locales del sistema (20).

Integración de modelos locales. Con los modelos locales disponibles, se puede pensar que empleando las funciones de pertenencia identificadas (en este caso, aproximadamente una interpolación lineal), se obtendrá una aproximación buena al modelo (20) entre los puntos de operación y se usará para el desarrollo de un controlador. Sin embargo, la presencia de los términos independientes hace que aparezca un error de interpolación significativo (figura 2), lo que se reflejará en el rendimiento final del controlador.

Diseño de controladores locales. Para el diseño de los controladores se puede usar un criterio de diseño tradicional como, por ejemplo, el de asignación de polos. Para asignar un polo en 0,4, la acción de control necesaria en cada punto de operación se puede obtener resolviendo el sistema de ecuaciones formado por el correspondiente modelo local de la tabla 1 y (21), donde r es la referencia a seguir por el sistema.

$$\hat{y}_{k+1} - r_k = 0,4(\hat{y}_k - r_k) \quad (21)$$

Para el modelo local en el punto de operación (0,2,5,4,5) la ecuación a resolver es:

$$0,8y_k + 0,3u_k + 2,5 - r_k = 0,4(\hat{y}_k - r_k) \quad (22)$$

lo que resulta, despejando u_k en (22), en el controlador dado por la acción de control (23):

$$u_k^{(1)} = -1,33y_k + 2r_k - 8,33 \quad (23)$$

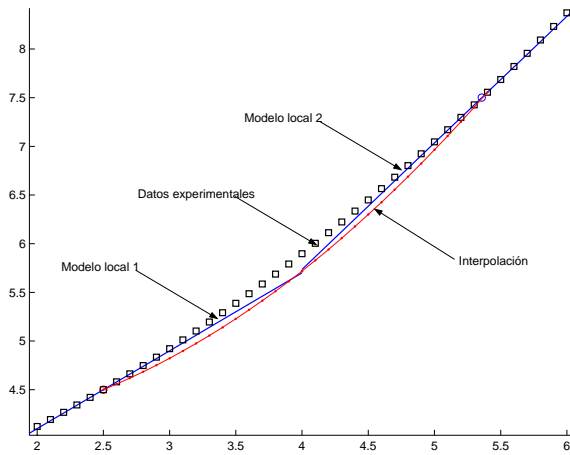


Figura 2. Diferencia entre los datos experimentales (cuadrados) y la interpolación lineal de los modelos lineales identificados (línea con puntos).

En el caso del modelo local en el punto de operación $(0,5.3572,7.5)$ resulta:

$$1,3y_k + 0,3u_k + 0,5356 - r_k = 0,4(\hat{y}_k - r_k) \quad (24)$$

$$u_k^{(2)} = -3y_k + 2r_k - 1,79 \quad (25)$$

Integración de controladores locales. La teoría de planificación de ganancia lleva a un controlador global del sistema como combinación de los anteriores:

$$u_k^{(LPO)} = \mu_1 u_k^{(1)} + \mu_2 u_k^{(2)} \quad (26)$$

donde μ_1 y μ_2 suelen definirse, por ejemplo, iguales a las funciones de pertenencia identificadas. A continuación mostraré en un contraejemplo que emplear estas funciones de pertenencia para la ponderación de las acciones de control entre puntos de funcionamiento no es siempre válido para control. Con la interpolación de los modelos Takagi-Sugeno (3), las ganancias del controlador global pueden ser localmente negativas incluso cuando las ganancias de los controladores locales sean positivas.

A modo de comprobación, pueden calcularse en este ejemplo las funciones de pertenencia que idealmente deberían haberse identificado (aunque sin disponer del modelo no lineal, en un caso real, es imposible). Estas funciones de pertenencia deberían obtener con (26) la acción de control resultante de exigir las especificaciones (21) al modelo no lineal (20), esto es,

$$\begin{aligned} 0,0875(y_k + 2,0714)^2 + 0,3u_k + 2,6714 - r_k = \\ = 0,4(y_k - r_k) \end{aligned} \quad (27)$$

de donde al despejar se obtiene una acción de control:

$$u_k^{(OPT)} = -0,29y_k^2 + 0,13y_k + 2r_k - 10,1713 \quad (28)$$

Ahora, el valor óptimo de pertenencia puede obtenerse igualando u_k^{LPO} en (26) a u_k^{OPT} en (28) (teniendo en cuenta la condición de partición borrosa $\mu_1 + \mu_2 = 1$), de donde:

$$\begin{aligned} \mu_1^{(OPT)}(y_k) &= \frac{-0,29y_k^2 + 0,13y_k - 8,3813}{1,67y_k - 6,54} \\ \mu_2^{(OPT)}(y_k) &= 1 - \mu_1^{(OPT)}(y_k) \end{aligned} \quad (29)$$

Evidentemente esto no corresponde a una interpolación lineal de controladores, como se puede observar en la representación de $\mu_1^{(OPT)}$ en la figura 3, ni a ninguna función de pertenencia borrosa identificada experimentalmente en las que la restricción impuesta por partición borrosa hace que las funciones de pertenencia de modelos borrosos tengan sus valores en el rango $[0,1]$.

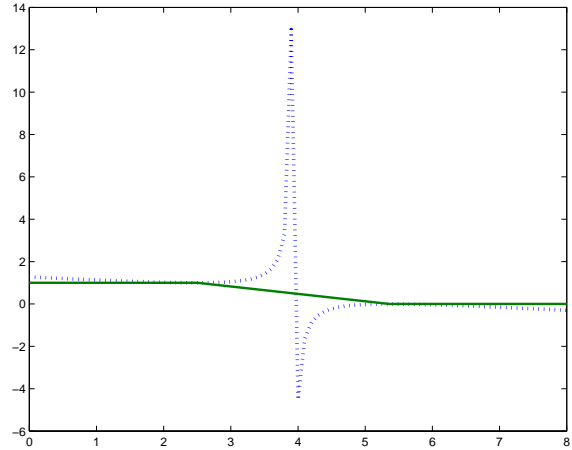


Figura 3. Funciones de pertenencia para la interpolación lineal $\mu_1^{(LIN)}$ (línea continua) e interpolación óptima $\mu_1^{(OPT)}$ (línea de puntos).

Si no se realiza la interpolación (29), se aprecian efectos negativos tanto en dinámica como en error de posición. Para evitar en lo posible el segundo efecto, en (Johansen and Murray-Smith, 1997) se propone incluir una acción integral. Esto se puede hacer, por ejemplo, diseñando un controlador clásico que incluya acción integral (lo que puede dar problemas por la suma ponderada de las acciones integrales de todos los controladores) o poniendo la acción integral en paralelo con el controlador global (con constante de integración K_i a definir) que lleve a una acción conjunta $u_k^{(INT)}$. El integrador eliminará todo tipo de "perturbaciones", considerando una de ellas el término independiente de los modelos.

Evaluación del rendimiento. En la tabla 2 se comentan de forma resumida los resultados de diferentes simulaciones de los controladores por planificación de ganancia propuestos (en comparación con los locales en los puntos de operación y el óptimo) y que se pueden observar en las figuras 4 a 8 que representan la evolución temporal de la salida del sistema. Como conclusión general, el estudio de los controladores que la teoría de control por planificación de ganancia propone (con integrador $u_k^{(INT)}$ o sin él $u_k^{(LPO)}$), se puede decir que el mejor comportamiento lo muestra el controlador con acción integral, pero en cualquier caso sería deseable una mejora. Queda por tanto clarificado que obviar la existencia de los términos no homogéneos para el diseño de los controladores, aunque se incluya acción integral, no es muy apropiado e incluso se pueden encontrar ejemplos en los que un

EXPERIMENTO	$u_k^{(1)}$		ACCIÓN DE CONTROL		
	$u_k^{(1)}$	$u_k^{(2)}$	$u_k^{(LPO)}$	$u_k^{(INT)}$	$u_k^{(OPT)}$
A. Entorno de P_1 (figura 4).	Pequeño e_p	Inestable	Gran e_p	Elevada sobreoscilación	Correcto
B. Entorno de P_2 (figura 5).	Inestable	Pequeño e_p	Gran e_p	Elevado t_e	Correcto
C. Zona intermedia (figura 6).	Gran e_p	Gran e_p	Gran e_p	Gran e_p	Correcto
D. Salto de P_1 a P_2 (figura 7).	Malo	Malo	Correcto	-	Correcto
E. Salto de P_2 a P_1 (figura 8).	Malo	Malo	Correcto	-	Correcto

Tabla 2. Comportamiento, en experimentos a lo largo del rango de operación, de los diferentes controladores diseñados (e_p =error de posición, t_e =tiempo de establecimiento).

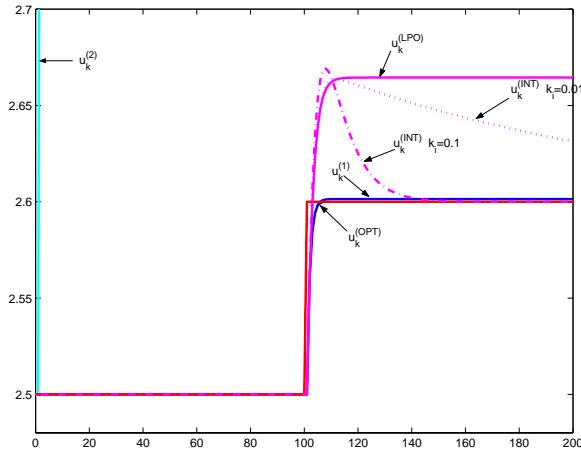


Figura 4. Experimento A. Control por planificación de ganancia en el entorno de P_1 : punto inicial 2.5, punto final 2.6.

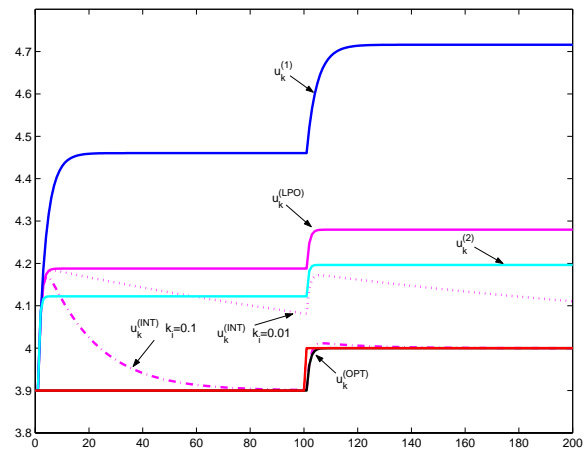


Figura 6. Experimento C. Control por planificación de ganancia en el entorno de un punto intermedio: punto inicial 3.9, punto final 4.

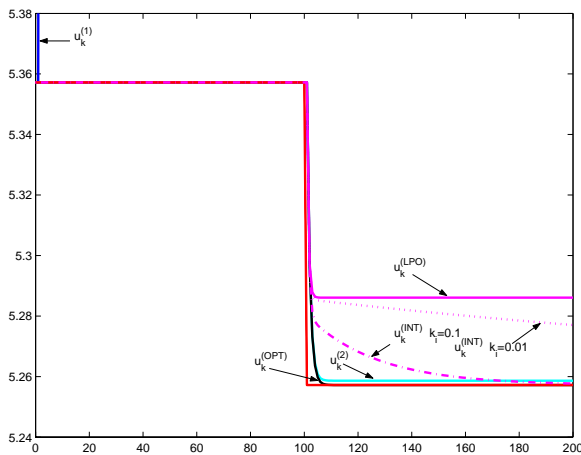


Figura 5. Experimento B. Control por planificación de ganancia en el entorno de P_2 : punto inicial 5.3572, punto final 5.2572.

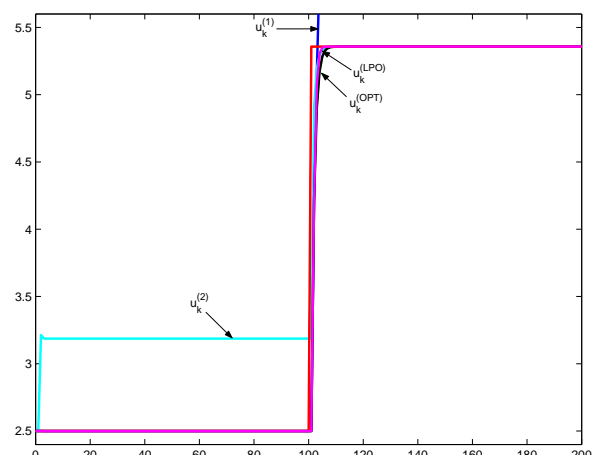


Figura 7. Experimento D. Control por planificación de ganancia de P_1 a P_2 : punto inicial 2.5, punto final 5.3572.

controlador así diseñado lleve a sistemas inestables en bucle cerrado (Leith and Leithhead, 2000).

6.2 Redes de controladores locales por velocidad

Para ilustrar este método de diseño de controladores se considerará de nuevo el sistema no lineal dado por la ecuación (20). Se diseñará en este caso un control por planificación de ganancia basado en modelos LPV del sistema linealizados por velocidad, describiendo problemas y proponiendo soluciones para mejorar el comportamiento del controlador final.

Identificación de modelos locales por velocidad. Desde los modelos locales (linealizaciones) identificados y dados en la tabla 1 se puede contruir un modelo linealizado por velocidad, linealización por incrementos $\Delta\hat{y}_k = \hat{y}_k - \hat{y}_{k-1}$ en el caso discreto, con los modelos locales de la tabla 3.

Punto de operación	Modelo incremental
(0,2.5,4.5)	$\Delta\hat{y}_{k+1} = 0,8\Delta\hat{y}_k + 0,3\Delta u_k$
(0,5.3572,7.5)	$\Delta\hat{y}_{k+1} = 1,3\Delta\hat{y}_k + 0,3\Delta u_k$

Tabla 3. Modelos locales por velocidad de (20).

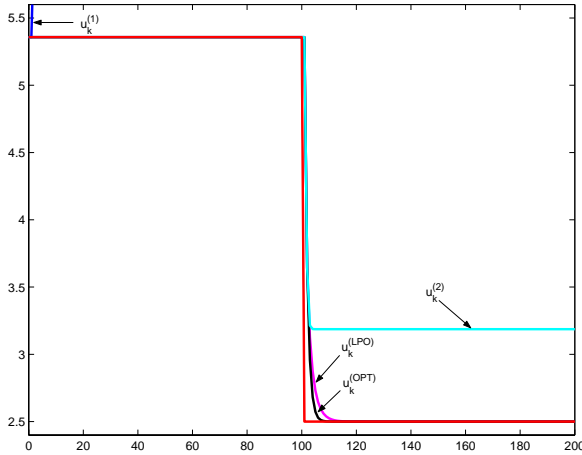


Figura 8. Experimento E. Control por planificación de ganancia de P_2 a P_1 : Punto inicial 5.3572, punto final 2.5.

Integración de modelos locales por velocidad. Para evaluar la aplicabilidad de las funciones de pertenencia identificadas (interpolación lineal) a la integración de los nuevos modelos, se empleará el mismo método del apartado anterior. De este modo se determinarán las funciones de pertenencia necesarias para realizar un buen control con estos modelos locales por incrementos en los que el término independiente ha desaparecido y se compararán con las identificadas.

Diseño de controladores locales por velocidad. Para asignar en este caso un polo en 0.4, la acción de control necesaria en cada punto de operación se puede obtener resolviendo el sistema de ecuaciones formado por el correspondiente modelo local de la tabla 3 y (30), donde r es la referencia a seguir por el sistema.

$$\Delta \hat{y}_{k+1} - \Delta r_k = 0,4(\Delta \hat{y}_k - \Delta r_k) \quad (30)$$

Para el modelo local por incrementos en el punto de operación (0, 2.5, 4.5) la ecuación a resolver es:

$$0,8\Delta y_k + 0,3\Delta u_k - \Delta r_k = 0,4(\Delta \hat{y}_k - \Delta r_k) \quad (31)$$

lo que resulta, despejando Δu_k en (31), en el controlador dado por la acción de control (32):

$$\Delta u_k^{(VEL1)} = -1,33\Delta y_k + 2\Delta r_k \quad (32)$$

En el caso del modelo local en el punto de operación (0,5.3572,7.5) resulta:

$$1,3\Delta y_k + 0,3\Delta u_k - \Delta r_k = 0,4(\Delta \hat{y}_k - \Delta r_k) \quad (33)$$

$$\Delta u_k^{(VEL2)} = -3\Delta y_k + 2\Delta r_k \quad (34)$$

Integración de controladores locales por velocidad. La teoría de planificación de ganancia por velocidad (19) lleva a un controlador global del sistema como combinación de los anteriores:

$$\Delta u_k^{(VEL)} = \mu_1 \Delta u_k^{(VEL1)} + \mu_2 \Delta u_k^{(VEL2)} \quad (35)$$

donde μ_1 y μ_2 están, de nuevo, por definir y podrían ser, por ejemplo, las funciones de pertenencia identificadas.

El modelo del sistema (20) puede escribirse de forma incremental:

$$\Delta y_{k+1} = 0,0875\Delta y_k^2 + 0,3625\Delta y_k + 0,3\Delta u_k \quad (36)$$

donde los incrementos se definen como en todas las linealizaciones por velocidad hasta el momento y $\Delta y_k^2 = y_k^2 - y_{k-1}^2$. Sustituyendo dicho modelo en las especificaciones (30) puede obtenerse directamente el controlador no lineal que obtiene exactamente el objetivo previsto:

$$\Delta u_k^{(INC)} = -0,2917\Delta y_k^2 + 0,1250\Delta y_k + 2\Delta r_k \quad (37)$$

Como ya se vio en el apartado anterior, desde el sistema de ecuaciones formado por (35) y (37) (teniendo en cuenta condición de partición borrosa $\mu_1 + \mu_2 = 1$) podremos despejar las pertenencias adecuadas para una correcta interpolación:

$$\begin{aligned} \mu_1^{(INC)}(y_k, y_{k-1}) &= \frac{-0,2917\Delta y_k^2 + 3,1250\Delta y_k}{1,6667\Delta y_k} \\ \mu_2^{(INC)}(y_k, y_{k-1}) &= 1 - \mu_1^{(INC)}(y_k, y_{k-1}) \end{aligned} \quad (38)$$

La ecuación de $\mu_1^{(INC)}$ tampoco corresponde a una interpolación lineal de controladores. Sin embargo, al deshacer los incrementos y simplificar (haciendo $y_k^2 - y_{k-1}^2 = [y_k + y_{k-1}][y_k - y_{k-1}]$) se obtiene:

$$\begin{aligned} \mu_1^{(INC)}(y_k, y_{k-1}) &= \frac{-0,2917(y_k^2 - y_{k-1}^2) + 3,1250(y_k - y_{k-1})}{1,6667(y_k - y_{k-1})} = \\ &= \frac{-0,2917(y_k + y_{k-1}) + 3,1250}{1,6667} \end{aligned} \quad (39)$$

que en el caso de una discretización apropiada en la que los incrementos sean lo suficientemente pequeños e $y_k \approx y_{k-1}$ corresponde a:

$$\begin{aligned} \mu_1^{(INC)}(y_k, y_{k-1}) &= \frac{-0,2917(y_k + y_{k-1}) + 3,1250}{1,6667} \cong \\ &\cong -0,35y_k + 1,8750 \end{aligned} \quad (40)$$

que es una función lineal con valor 1 en $y(k) = 2,5$ y 0 en $y(k) = 5,3572$, idéntica a la función de pertenencia identificada, lo que nos indica que la interpolación con las funciones de pertenencia lineales (identificadas) será una buena opción con estos controladores. Esto es debido a que la linealización por incrementos, al hacer desaparecer el término independiente de los modelos, convierte los modelos locales afines de TS en modelos locales homogéneos de TS que se pueden interpolar sin problemas de la forma propuesta por estos modelos borrosos, pero que no aproximan funciones correctamente sin el marco adicional de las linealizaciones por velocidad.

Evaluación del rendimiento. La tabla 4 resume los resultados de las simulaciones realizadas con el controlador por velocidad propuesto (en comparación con los locales en los puntos de operación y el teórico no lineal) y, en aquellos casos en los que aparece un error en régimen permanente, un nuevo controlador

EXPERIMENTO	$u_k^{(VEL)}$		ACCIÓN DE CONTROL		
	$u_k^{(VEL1)}$	$u_k^{(VEL2)}$	$u_k^{(VEL)}$	$u_k^{(INT)}$	$u_k^{(INC)}$
A. Entorno de P_1 (figura 9).	Pequeño e_p	Gran e_p	Correcto	-	Correcto
B. Entorno de P_2 (figura 10).	Gran e_p	Pequeño e_p	Correcto	-	Correcto
C. Zona intermedia (figura 11).	Gran e_p	Gran e_p	Correcto	-	Correcto
D. Salto de P_1 a P_2 (figura 12).	Gran e_p	Gran e_p	Pequeño e_p	Elevadot t_e	Correcto
E. Salto de P_2 a P_1 (figura 13).	Gran e_p	Gran e_p	Pequeño e_p	Sobreoscilación	Correcto

Tabla 4. Comportamiento, en experimentos a lo largo del rango de operación, de los controladores por velocidad diseñados (e_p =error de posición, t_e =tiempo de establecimiento).

$u_k^{(INT)}$ con un incremento de acción de control debido a acción integral $\Delta u_k^{INT} = K_i(r(k) - y(k))$ (con K_i pequeña) sumado al incremento $u_k^{(INC)}$ de la ecuación 37. Todas esta simulaciones de la evolución temporal de la salida del sistema se pueden observar en las figuras 9 a 13. Las familias de controladores por

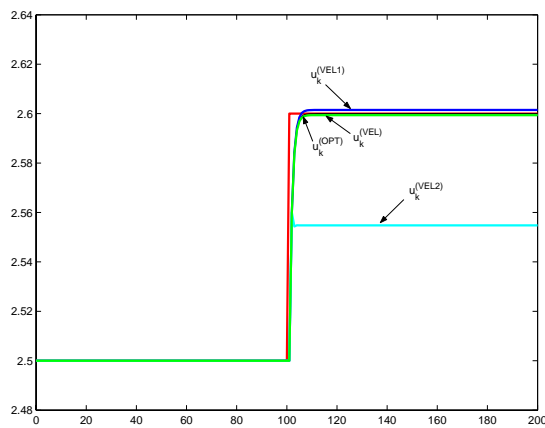


Figura 9. Experimento A. Control por velocidad en el entorno de P_1 : punto inicial 2.5, punto final 2.6.

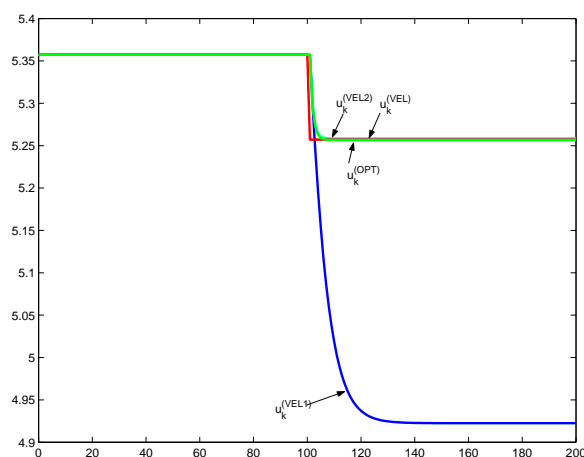


Figura 10. Experimento B. Control por velocidad en el entorno de P_2 : punto inicial 5.3572, punto final 5.2572.

incrementos propuestas superan en todos los casos de pequeñas variaciones a las familias de controladores en los puntos de operación (figuras 4 a 8) y por eso será el controlador más apropiado para el sistema, ya que esta será la forma habitual de operación del sistema. En aquellos casos en los que aparecen errores

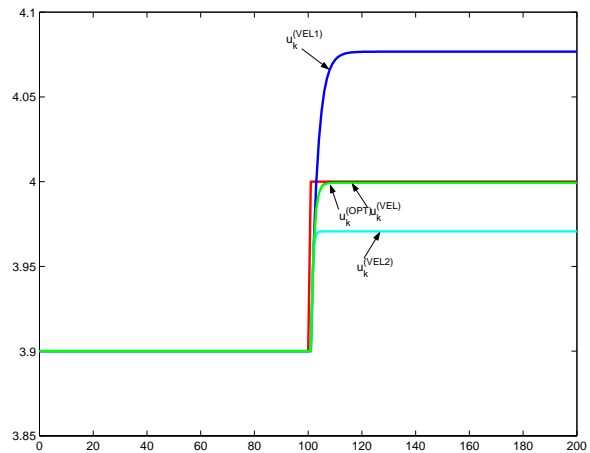


Figura 11. Experimento C. Control por velocidad en el entorno de un punto intermedio: punto inicial 3.9, punto final 4.

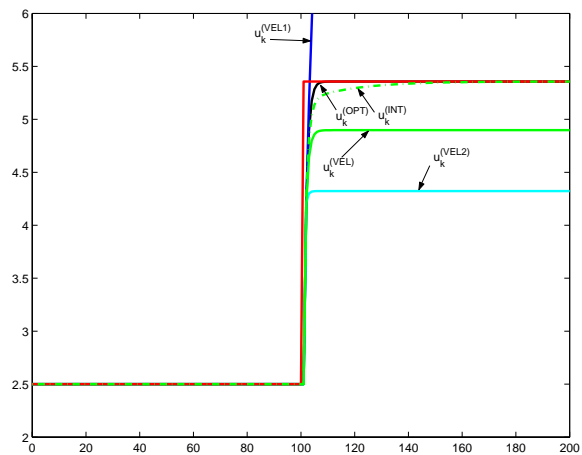


Figura 12. Experimento D. Control por velocidad de P_1 a P_2 : punto inicial 2.5, punto final 5.3572.

de posición, éstos se pueden subsanar con la adición de acción integral.

6.3 Linealización por incrementos parcial.

El controlador elegido (37) está basado tan solo en las variaciones incrementales de las variables, lo que puede llevar a una situación en la que un error inicial en el seguimiento de una referencia constante (debido, por ejemplo, a unas condiciones iniciales no adecuadas) no sea nunca subsanado. Este error en régimen permanente se elimina fácilmente aplicando una acción integral en paralelo con el controlador diseñado de la

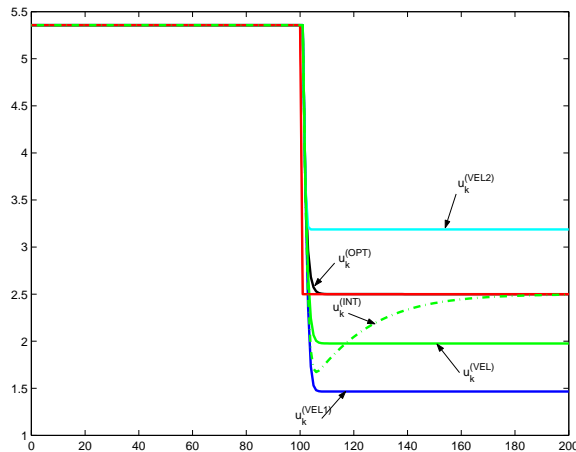


Figura 13. Experimento E. Control por velocidad de P_2 a P_1 : punto inicial 5.3572, punto final 2.5.

forma comentada en el apartado 5, pero que habrá que ajustar experimentalmente.

Otra opción más elegante que se propone aquí consiste en rehacer el criterio de diseño para que aparezca explícitamente la acción integral, además de los incrementos, mediante alguna medida del error en el seguimiento de la referencia. Esto se puede hacer partiendo de la especificación (21) y restando y_k a ambos lados (en lugar de tomar incrementos en todas las variables, con lo que se llegaría a (30)) se obtiene una expresión (41) equivalente a (30) en la que se explicita el error de seguimiento de la referencia, con lo que solo se hace una linealización por incrementos parcial.

$$\begin{aligned} \hat{y}_{k+1} - r_k &= 0,4(\hat{y}_k - r_k) \\ &\Downarrow \\ \hat{y}_{k+1} - \hat{y}_k - r_k &= 0,4(\hat{y}_k - r_k) - \hat{y}_k \quad (41) \\ &\Downarrow \\ \Delta \hat{y}_{k+1} &= (1 - 0,4)(r_k - \hat{y}_k) \end{aligned}$$

Por tanto, dado un modelo incremental genérico de la forma $\Delta \hat{y}_{k+1} = p_i \Delta u_k + q_i \Delta \hat{y}_k$, la acción de control se podrá calcular para cada controlador i despejando como en

$$\begin{aligned} p_i \Delta u_k + q_i \Delta \hat{y}_k &= (1 - 0,4)(r_k - \hat{y}_k) \\ &\Downarrow \\ \Delta u_k &= \frac{1 - 0,4}{p_i} (r_k - \hat{y}_k) - \frac{q_i}{p_i} \Delta \hat{y}_k \quad (42) \end{aligned}$$

La figura 14 muestra como un controlador diseñado con la linealización parcial por incrementos propuesta siempre tiene el mismo comportamiento a lo largo de todo el rango de funcionamiento del sistema (entre ambos puntos de operación). Así pues, supera tanto al controlador por planificación de ganancia tradicional como al controlador por velocidad que mostraba el mejor comportamiento en el ejemplo anterior.

7. CONCLUSIONES

En este artículo se han revisado las técnicas de planificación de ganancia para familias de modelos LPV,

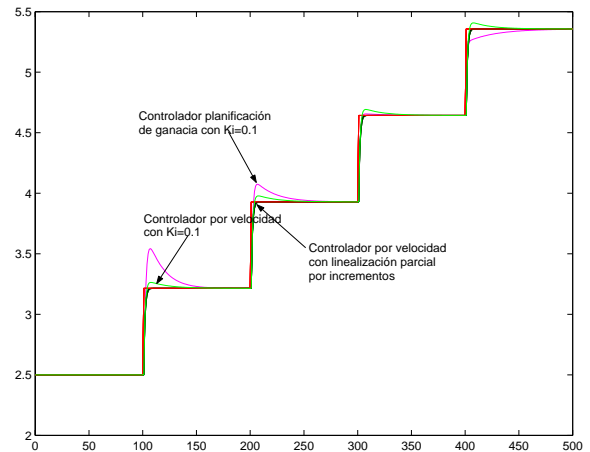


Figura 14. Funcionamiento de todos los controladores a lo largo de la zona de trabajo.

investigando cuáles de ellas permiten una fácil adaptación a los modelos borrosos (u otro conjunto de modelos lineales locales que describan un sistema no lineal).

Por su sencillez y filosofía de división del problema en subproblemas conservando la continuidad con los métodos lineales de diseño, son especialmente aplicables los controladores basados en modelos LPV en puntos de operación, aunque el término independiente de los mismos puede conllevar algunos problemas.

El diseño por velocidad mantiene las ventajas anteriores y sin restricciones al respecto de la técnica de diseño de controladores que se haya de emplear (los términos independientes han desaparecido). Además la planificación de ganancia basada en la velocidad proporciona un marco de análisis y diseño con un único tipo de linealización. Adicionalmente, el controlador no lineal que resulta es válido en todos los posibles puntos de funcionamiento de la planta, no solo en la vecindad de los puntos de equilibrio.

Por otra parte, los métodos que emplean las LMIs permiten desarrollar de forma sencilla controladores globales estables para el sistema, aunque más conservadores que los anteriores.

Además, en el artículo se han analizado qué paradigmas de modelos borrosos y metodologías de identificación son los adecuados para aplicar las referidas técnicas de control. Algunos aspectos como el tratamiento del cambio de punto funcionamiento y las distintas alternativas de interpolación también han sido discutidos.

8. REFERENCIAS

- Aström, K.J. and B. Wittenmark (1995). *Adaptive Control*. Ed. Addison-Wesley. Reading, Massachusetts, USA.
- Babuska, R. (1998). *Fuzzy Modeling for Control*. Ed. Kluwer Academic. Boston, USA.

- Bezdek, J.C. (1987). *Pattern recognition with Fuzzy Objective Function Algorithms*. Ed. Plenum Press. New York, USA.
- Boyd, S., L. ElGhaoui, E. Feron and V. Balakrishnan (1994). *Linear matrix inequalities in system and control theory*. Ed. SIAM. Philadelphia, USA.
- Desoer, C.A. (1969). Slowly varying controller $dx/dt=a(t)x$. *IEEE Transactions on Automatic Control* **14**, 780–781.
- Díez, J. L. (2003). *Técnicas de agrupamiento para identificación y control por modelos locales*. Tesis Doctoral, DISA. Universidad Politecnica de Valencia.
- Díez, J. L., A. Sala and J. L. Navarro (2002). Fuzzy clustering algorithm for local model control. *Proc. IFAC 15th World Congress* pp. 60–66.
- Díez, J. L. and F. Previdi (2001). Guaranteed closed loop precision in multiple model based control. *Proc. IFAC Workshop on Adaptation and Learning in Control and Signal Processing* pp. 139–144.
- Díez, J. L., J. L. Navarro and A. Sala (2004). Algoritmos de agrupamiento en la identificación de modelos borrosos. *RIAI: Revista Iberoamericana de Automática e Informática Industrial (enviado)*.
- Guerra, T.M. and L. Vermeiren (2001). Conditions for non quadratic stabilization of discrete fuzzy models. *Proc. IFAC Workshop on Advanced Fuzzy-Neural Control* pp. 1–6.
- Hunt, K.J. and T.A. Johansen (1997). Design and analysis of gain-scheduled control using local controller networks. *International Journal of Control* **66**, 619–651.
- Hunt, K.J., R. Haas and R. Murray-Smith (1996). Extending the functional equivalence of radial basis function networks and fuzzy inference systems. *IEEE Transactions on Neural Networks* **7**, 776–781.
- Johansen, T.A. and R. Murray-Smith (1997). The operating regime approach to nonlinear modelling and control. In: *Multiple model approaches to modelling and control* (R. Murray-Smith and T.A. Johansen, Eds.). Ed. Taylor & Francis. London, UK.
- Johansson, R. (1993). *System modeling and identification*. Ed. Prentice-Hall, Information and System Sciences series. New Jersey, USA.
- Leith, D. J. and W. E. Leithead (2000). Survey of gain scheduling analysis and design. *International Journal of Control* **73**, 1001–1025.
- Leith, D.J. and W.E. Leithead (1998). Gain-scheduled and nonlinear systems: dynamic analysis by velocity-based linearisation families. *International Journal of Control* **70**, 289–317.
- Leith, D.J. and W.E. Leithead (1999). Analytic framework for blended multiple model systems using linear local models. *International Journal of Control* **72**, 605–619.
- Rugh, W. J. and J. S. Shamma (2000). Research on gain scheduling. *Automatica* **36**, 1401–1425.
- Sandberg, I. W. (1964). In the l_2 -boundedness of solutions of nonlinear functional equations. *Bell Sys. Tech. J.* **43**, 1581–15997.
- Schulte, H. and H. Hahn (2004). Fuzzy state feedback gain scheduling control of servo-pneumatic actuators. *Control Engineering Practice* **12**(5), 639–650.
- Stein, G., G.L. Hartmann and R. Hendrick (1977). Adaptive control laws for f-8 flight test. *IEEE Transactions on Automatic Control* **22**(5), 758–767.
- Takagi, T. and M. Sugeno (1985). Fuzzy identification of systems and its applications to modeling and control. *IEEE Transactions on System, Man and Cybernetics* **15**, 116–132.
- Tanaka, K. and H. O. Wang (2001). *Fuzzy control systems design and analysis*. Ed. John Wiley & Sons. New York, USA.
- Tanaka, K. and M. Sugeno (1992). Stability analysis and design of fuzzy control systems. *Fuzzy Sets and Systems* **45**, 135–156.
- Walter, E. and L. Pronzato (1997). *Identification of Parametric Models from Experimental Data*. Ed. Springer-Verlag. London, UK.
- Wang, L.-X. (1997). *A Course in Fuzzy Systems and Control*. Ed. Prentice-Hall. New Jersey, USA.