

**UNIVERSITAT POLITÈCNICA DE VALÈNCIA**

**Departamento de Ingeniería Mecánica y de Materiales**



**TESIS DOCTORAL**

---

**Modelado del contacto rueda-carril para aplicaciones  
de simulación de vehículos ferroviarios y estimación  
del desgaste en el rango de baja frecuencia**

---

*Presentada por:* D. Andrés Rovira Cardete

*Dirigida por:* Dr. D. Alejandro Roda Buch

Dr. D. Luis Baeza González

Valencia, Enero de 2012



TESIS DOCTORAL

---

**Modelado del contacto rueda-carril para aplicaciones  
de simulación de vehículos ferroviarios y estimación  
del desgaste en el rango de baja frecuencia**

---

que para la obtención  
del grado de  
Doctor Ingeniero Industrial

presenta

**D. Andrés Rovira Cardete**

en el  
Departamento de Ingeniería Mecánica y de Materiales  
de la Universitat Politècnica de València

Dirigida por

**Dr. D. Alejandro Roda Buch**

**Dr. D. Luis Baeza González**

Valencia, Enero 2012



TESIS DOCTORAL

**Modelado del contacto rueda-carril para aplicaciones  
de simulación de vehículos ferroviarios y estimación  
del desgaste en el rango de baja frecuencia**

*Presentada por:* D. Andrés Rovira Cardete

*Dirigida por:* Dr. D. Alejandro Roda Buch  
Dr. D. Luis Baeza González

TRIBUNAL CALIFICADOR

Presidente: Dr. D. \_\_\_\_\_

Vocales: Dr. D. \_\_\_\_\_

Dr. D. \_\_\_\_\_

Dr. D. \_\_\_\_\_

Secretario Dr. D. \_\_\_\_\_

En Valencia, a \_\_\_\_ de \_\_\_\_\_ de 2011



# Resumen

En el análisis de la dinámica ferroviaria el estudio del contacto rueda-carril representa un papel muy importante debido a que no sólo condiciona el movimiento de los vehículos en vía, con fenómenos asociados como la estabilidad o el confort, sino que también produce fenómenos de degradación como el desgaste asociado a baja frecuencia (desgaste de los perfiles) o alta frecuencia (desgaste ondulatorio en carriles) o fenómenos de fatiga de contacto en rodadura.

Tras estudiar la bibliografía disponible relacionada con el contacto rueda-carril, en esta Tesis se ha desarrollado e implementado un modelo para resolver el problema completo de contacto, cuya aplicación es la simulación dinámica y la estimación de desgaste en el rango de baja frecuencia. Este modelo tiene en cuenta la geometría tridimensional del contacto rueda-carril y estima el área de contacto a partir de la interpenetración virtual entre perfiles. Para resolver el problema normal, se define una elipse equivalente al área de contacto no-elíptica y se asume una distribución de tensiones normales que sigue la teoría de Hertz. El problema tangencial se resuelve para la elipse equivalente con la opción de considerar el coeficiente de rozamiento variable.

El desarrollo de este modelo de contacto se acompaña de resultados experimentales que permiten, o bien validar los resultados numéricos obtenidos con la aplicación del modelo de contacto, o bien parametrizar estos modelos para considerar distintas condiciones en el contacto. Por una parte, se utiliza la técnica de ultrasonidos, aplicada para el estudio del contacto entre superficies metálicas. Esta técnica permite obtener la forma y tamaño del área de contacto así como una estimación de la distribución de presiones normales. Por otra parte, se emplean curvas de tracción medidas experimentalmente en una máquina de doble disco para extraer los parámetros que definen el comportamiento tangencial del contacto rueda-carril bajo distintas condiciones: superficies secas, mojadas, con aceite, con modificadores de fricción, etc.

Finalmente se realiza una aplicación del modelo de contacto al caso de la simulación dinámica, donde se evalúa el efecto de considerar un coeficiente de rozamiento variable frente al método clásico de coeficiente de rozamiento constante. Además, se comparan los resultados de desgaste mediante los dos algoritmos de desgaste existentes (local/global).

**Palabras clave:** contacto rueda-carril, simulación dinámica, desgaste, baja frecuencia





# Resum

En l'anàlisi de la dinàmica ferroviària l'estudi del contacte roda-carril representa un paper molt important pel fet que no sols condiciona el moviment dels vehicles en via, amb fenòmens associats com l'estabilitat o el confort, sinó que també produïx fenòmens de degradació com el desgast associat a baixa freqüència (desgast dels perfils) o alta freqüència (desgast ondulatori en carrils) o fenòmens de fatiga de contacte en rodament.

Després d'estudiar la bibliografia disponible relacionada amb el contacte roda-carril, en esta Tesi s'ha desenrotllat i implementat un model per a resoldre el problema complet de contacte, l'aplicació del qual és la simulació dinàmica i l'estimació de desgast en el rang de baixa freqüència. Este model té en compte la geometria tridimensional del contacte roda-carril i estima l'àrea de contacte a partir de la interpenetració virtual entre perfils. Per a resoldre el problema normal, es defineix una el·lipse equivalent a l'àrea de contacte no-el·líptica i s'assumeix una distribució de tensions normals que segueix la teoria de Hertz. El problema tangencial es resol per a l'el·lipse equivalent amb l'opció de considerar el coeficient de fregament variable.

El desenrotllament d'este model de contacte s'acompanya de resultats experimentals que permeten o bé validar els resultats numèrics obtinguts amb l'aplicació del model de contacte, o bé parametritzar estos models per a considerar distintes condicions en el contacte. D'una banda, s'utilitza la tècnica d'ultrasons, aplicada per a l'estudi del contacte entre superfícies metàl·liques. Esta tècnica permet obtenir la forma i grandària de l'àrea de contacte així com una estimació de la distribució de pressions normals. D'altra banda, s'empren corbes de tracció mesurades experimentalment en una màquina de doble disc per a extraure els paràmetres que defineixen el comportament tangencial del contacte roda-carril davall distintes condicions: superfícies seques, banyades, amb oli, amb modificadors de fricció, etc.

Finalment es realitza una aplicació del model de contacte al cas de la simulació dinàmica, on s'avalua l'efecte de considerar un coeficient de fregament variable enfront del mètode clàssic de coeficient de fregament constant. A més, es comparen els resultats de desgast per mitjà dels dos algoritmes de desgast existents (local/global).

**Paraules clau:** contacte roda-carril, simulació dinàmica, desgast, baixa freqüència



# Abstract

In the analysis of the railroad dynamics the study of the wheel-rail contact represents a very important role because it not only conditions the motion of the vehicles on the track, with associated phenomena such as stability or comfort, but also leads to degradation phenomena such as wear associated with low frequency (wear in the profiles) or high frequency (corrugation on rails) or rolling contact fatigue phenomena.

After studying the available literature related to the wheel-rail contact, in this Thesis a model to solve the whole contact problem has been developed and implemented, whose application is the dynamic simulation and the estimation of wear on the low frequency range. This model takes into account the three-dimensional geometry of the wheel-rail contact and it estimates the contact area from the virtual interpenetration between profiles. To solve the normal problem, an equivalent ellipse to the non-elliptic contact area is defined and a normal stress distribution following the theory of Hertz is assumed. The tangential problem is solved for the equivalent ellipse with the option of incorporating a variable coefficient of friction.

The development of this contact model is accompanied by experimental results that lead either to validate the numerical results obtained with the application of the contact model or to parameterize these models to consider different conditions in the contact. On the one hand, the ultrasound technique is used, applied to the study of the contact between metallic surfaces. This technique allows for the obtaining of the shape and size of the contact area and an estimate of the distribution of normal pressures. On the other hand, creep curves measured experimentally in a twin-disc machine are used to extract the parameters that define the tangential behaviour of the wheel-rail contact under different conditions: dry surfaces, wet surfaces, surfaces with oil, with friction modifiers, etc.

Finally, the model is applied in the dynamic simulation where the effect of considering a variable coefficient of friction against the classical method of constant coefficient of friction is assessed. In addition, the wear results obtained with the two existing wear algorithms (local/global) are compared.

**Keywords:** wheel-rail contact, dynamic simulation, wear, low frequency



# Agradecimientos

Quiero empezar expresando mi gratitud por la ayuda prestada a los directores de Tesis. A Luis, que fue quien me animó a realizarla y a Àlex por ordenar todas las ideas que yo tenía en mi cabeza y por su titánico trabajo buscando que cada frase tuviera el sentido correcto.

En segundo lugar, debo mi más sincero agradecimiento a Javier Fuenmayor. No sólo por su apoyo prestado al iniciar la tesis sino también por sus consejos en los momentos más difíciles. Aprovecho para agradecer a Javier Carballeira la ayuda que me ha prestado y que siempre ha contado conmigo en todo momento, contribuyendo a crear sentimiento de grupo. Muchas gracias también a Paco Valero, por la confianza que ha tenido conmigo desde el principio.

Y en este espacio quiero también expresar el agradecimiento a mis compañeros de Departamento. A todos aquéllos con los que he compartido docencia, sesiones de laboratorio y hemos tomado el café juntos. Sobre todo para aquéllos que me habéis animado y mostrado empatía hacia mi situación.

*I also would like to thank all the help that I received in my internship in the University of Sheffield. Since the first day that I was there I felt like a member of your group. Roger, Matt and the rest of the people of the Tribology Group, thank you for your cooperation. My work there was decisive for the completion of this Thesis.*

*No m'oblíde dels meus pares, que encara que no entenen massa be quina és la meua faena, en tot moment m'han animat a seguir avant. I a ma germana, que fa temps que es doctorà i sap molt be lo que significa tot este procés.*

*Gràcies a tots els que m'estímen, i han sabut comprendre'm i esperar-me durant estos quatre anys de tesis ¡Gràcies a tots per la vostra amistat i infinita paciència!*

*I, clar, en estos agraïments no pot faltar la persona que ha cuidat de mi durant estos anys; la que sempre m'ha animat en els moments més baixos i en la que m'he casat. Moltes gràcies, Amor.*



A Àlex  
A la memòria de Manolo, d.e.p.  
i, molt especialment, al meu Amor

*“Els que coneixen als demés son intel·ligents.*

*Els que se coneixen ad ells mateixos són allumenats.*

*Els que superen als demés tenen força.*

*Els que se superen ad ells mateixos són poderosos.*

*Els que coneixen l'alegria són rics.*

*Els que continuen enèrgicament tenen força de voluntat.*

*Els que no perden les seues bases resistixen.*

*Els que moren pero no les perden tenen la longevitat.”*

Lao Tse. Tao Te Ching. Cap. 33. (s. VI a.C)





# Índice general

Resumen.....	i
Resum .....	iii
Abstract .....	v
Agradecimientos .....	vii
Índice general.....	xi
1. Introducción .....	1
1.1. Motivación y antecedentes .....	1
1.2. Objetivos .....	3
1.3. Organización y desarrollo de la Tesis.....	4
2. Revisión de modelos de contacto y estimación del desgaste.....	7
2.1. Introducción .....	7
2.2. Análisis del problema de contacto rueda-carril .....	7
2.2.1. El problema de contacto rueda-carril.....	7
2.2.2. Clasificación de las teorías de contacto rueda-carril.....	9
2.2.3. Procedimiento para el estudio del contacto rueda-carril.....	11
2.2.4. Enfoques del problema de contacto.....	15
2.3. Problema geométrico de contacto.....	18
2.3.1. Coordenadas y sistemas de referencia .....	19
2.3.2. Geometría de la vía.....	23
2.3.3. Soluciones propuestas para resolver el problema geométrico .....	25
2.4. Problema normal .....	31
2.4.1. Introducción.....	31
2.4.2. Modelos de punto teórico de contacto .....	32
2.4.3. Modelos basados en la interpenetración virtual entre superficies.....	39
2.5. Problema tangencial .....	47

---

2.5.1. Introducción.....	47
2.5.2. Modelos utilizados para la resolución del problema tangencial .....	50
2.6. Estimación del desgaste.....	76
2.6.1. Introducción.....	76
2.6.2. Hipótesis generales.....	77
2.6.3. Evaluación del desgaste.....	78
2.7. Conclusiones .....	86
3. La herramienta de simulación dinámica.....	87
3.1. Introducción .....	87
3.2. Sistemas de referencia y coordenadas .....	88
3.2.1. Sistemas de referencia .....	88
3.2.2. Coordenadas .....	89
3.2.3. Transformaciones entre sistemas de referencia .....	90
3.3. Formulación de las ecuaciones del movimiento .....	92
3.4. Ecuaciones del movimiento.....	93
3.4.1. Términos derivados de la energía cinética.....	94
3.4.2. Fuerzas generalizadas .....	104
3.5. Conclusiones .....	118
4. Problema geométrico y normal en el contacto rueda-carril.....	119
4.1. Introducción .....	119
4.2. Procedimiento de resolución del problema geométrico y normal .....	120
4.2.1. Descripción general .....	120
4.2.2. Problema geométrico de contacto.....	125
4.2.3. Problema normal de contacto .....	139
4.2.4. Resultados.....	153
4.3. Aplicación de la técnica de ultrasonidos al contacto rueda-carril. Problema normal. ....	169
4.3.1. Procedimiento usado para el estudio del contacto rueda-carril mediante la técnica de ultrasonidos .....	170
4.3.2. Especímenes de ensayo y geometría.....	172

---

4.3.3. Método experimental .....	177
4.3.4. Resultados.....	181
4.3.5. Comparación con modelos numéricos .....	188
4.4. Conclusiones .....	169
5. Problema tangencial y estimación del desgaste en el contacto rueda-carril .....	195
5.1. Introducción .....	195
5.2. Aplicación de la técnica de ultrasonidos al contacto rueda-carril. Problema tangencial y estimación del desgaste .....	196
5.2.1. Descripción del procedimiento .....	197
5.2.2. Resultados.....	201
5.3. Inclusión de coeficiente de rozamiento variable en FASTSIM .....	217
5.3.1. Necesidad de la inclusión de un coeficiente de rozamiento variable .....	218
5.3.2. Identificación de parámetros a partir de curvas experimentales .....	219
5.3.3. Análisis del desgaste en la máquina de doble disco .....	258
5.3.4. Aplicación al contacto rueda-carril .....	267
5.4. Conclusiones .....	217
6. Aplicación a la simulación dinámica.....	293
6.1. Introducción .....	293
6.2. Datos de entrada de las simulaciones .....	296
6.2.1. Características del vehículo .....	296
6.2.2. Geometría transversal de la vía.....	298
6.2.3. Características del circuito.....	298
6.3. Análisis del contacto rueda-carril y estimación del desgaste.....	299
6.3.1. Problema de contacto rueda-carril .....	299
6.3.2. Estimación del desgaste.....	300
6.4. Cálculos realizados.....	305
6.5. Resultados .....	305
6.5.1. Movimiento de los ejes.....	306
6.5.2. Estimación del desgaste.....	312

---

6.5.3. Tiempo de cálculo de la simulación .....	326
6.6. Conclusiones .....	328
7. Conclusiones .....	293
Bibliografía .....	333
Anexo I. Expresión de las matrices de transformación .....	341
Anexo II. Derivación de las matrices de transformación .....	343
Anexo III. Expresión de las matrices G .....	349
Anexo IV. Características del vehículo empleado en la simulación dinámica.....	355
Anexo V. Artículos publicados en relación a la Tesis.....	359

# 1. Introducción

## 1.1. Motivación y antecedentes

Los primeros estudios del contacto que pueden aplicarse al caso ferroviario se deben a Hertz [35] y a Carter [14]. Hertz en 1882, a partir de sus estudios en el campo del contacto entre superficies elásticas, publicó su teoría para resolver el problema de contacto normal. Este modelo ofrecía una solución analítica al problema de contacto entre dos cuerpos cuya geometría en las cercanías del contacto se puede definir mediante paraboloides y sus superficies son suaves. Posteriormente, Carter en 1926 publicó un modelo para resolver el problema tangencial que aparece en el contacto entre una rueda y un carril ferroviarios. Se trata de un modelo bidimensional deducido a partir del contacto entre un cilindro (rueda) y un plano (carril).

Desde los años 60 y sobretodo a partir de la década de los 80 del siglo pasado se desarrolló una gran número de teorías que formulan el problema de contacto rueda-carril. Aportaciones como las de Vermeulen y Johnson [106], Kalker [42-45], Shen *et al.* [99] o Knothe [49, 51] permitieron obtener una mejor estimación de las fuerzas generadas en el contacto rueda-carril.

Posteriormente aparecieron numerosos trabajos en el campo del contacto rueda-carril [54], especialmente para superar las limitaciones de la hipótesis de contacto *herciano*, que asume que las superficies tienen una curvatura constante y que el área de contacto es elíptica. Se propusieron diversas soluciones, incluyendo áreas de contacto basadas en elipse equivalente [76], modelos *semi-hercianos* [8, 77, 88] (o *quasi-hercianos* [48,76-77]) o formulaciones completas en elementos finitos [104].

Recientemente, una de las últimas aportaciones es la inclusión de un coeficiente de rozamiento variable para resolver el problema de contacto tangencial [34, 69, 78, 82].

Este desarrollo de modelos progresivamente más complejos se ha basado, en la mayoría de los casos, en la aplicación de relaciones cinemáticas y modelos de comportamiento del material. Sin embargo, este avance en el aspecto computacional no ha ido acompañado de estudios experimentales sobre el contacto rueda-carril.

Según Evans y Berg [28] en los desafíos aún existentes en el campo de simulación dinámica, todavía existe la necesidad de desarrollar algoritmos de contacto más exactos, más aún si las simulaciones dinámicas se basan en el uso de

perfiles de rueda-carril de diseño y usan valores estimados en el coeficiente de rozamiento entre rueda y carril.

Por tanto, en líneas generales se puede afirmar que se ha dedicado gran cantidad de esfuerzo en investigación en esta área y actualmente se dispone de una variedad de alternativas con distintos grados de sofisticación para abordar aspectos como el multicontacto o áreas de contacto no hercianas [28]. Sin embargo, existe un compromiso entre la precisión y el tiempo de resolución del problema de contacto rueda-carril que permite clasificar los distintos modelos de contacto según sus distintas aplicaciones.

Una de las aplicaciones del contacto rueda-carril es la simulación dinámica. En este tipo de problema, a partir del cálculo de las fuerzas en el contacto rueda-carril, se obtiene el movimiento de los cuerpos que componen el vehículo ferroviario. En este caso, el modelo de contacto utilizado debe tener asociado un coste computacional bajo, de tal forma que su uso sea compatible con el tiempo total de cálculo de la simulación.

Otra de las aplicaciones a las que se ha enfocado el estudio del contacto rueda-carril en la bibliografía es la estimación del desgaste. Kalker [46] y posteriormente Zobory [112] distinguen dos tipos de desgaste: *desgaste longitudinal* que da lugar a defectos como el *desgaste ondulatorio* en carriles y *pérdida de redondez* en ruedas (*poligonalización* u otros) y *desgaste transversal* o *desgaste en los perfiles* donde se supone que el carril es una extrusión perfecta y la rueda es axisimétrica. Las herramientas usadas para el estudio de estos dos fenómenos son distintas, sobretodo en lo que se refiere al rango de frecuencias estudiadas.

El análisis del desgaste longitudinal requiere la consideración de fenómenos de *alta frecuencia* que precisa normalmente del uso de modelos de contacto no estacionarios y la inclusión de la flexibilidad de los carriles y de los ejes ferroviarios (en este caso se deben ofrecer resultados fiables hasta un rango de unos 5 kHz [52]). Por otro lado, el análisis del desgaste de los perfiles requiere un modelado dinámico adecuado de los vehículos y del comportamiento de éstos en vía (estos fenómenos suceden en el rango de frecuencias de 0-20 Hz [52]).

De los dos tipos de desgaste, en esta Tesis se va a tratar el desgaste de los perfiles. Este problema combina el uso de un algoritmo de contacto, la modelización de la dinámica de los sistemas multicuerpo que forman el vehículo y la implementación de una herramienta de desgaste [49-51, 86-87].

Sobre este tema recientemente se ha publicado un número relativamente elevado de artículos que usan programas de simulación comerciales para modelizar

la dinámica de los vehículos ferroviarios, combinados con rutinas externas para estimar el desgaste [23, 40, 55, 86, 87, 89, 112]. Sin embargo, el uso de esta metodología presenta dos inconvenientes principales: en primer lugar, el empleo de programas comerciales implica la utilización de los modelos de contacto de los que disponen estos programas, que no incluyen los últimos desarrollos realizados en Mecánica de Contacto. En segundo lugar, no se tiene acceso a los datos que internamente procesan estos modelos, como distribuciones de las magnitudes dentro de las áreas de contacto.

La presente Tesis está motivada por la necesidad de obtener un modelo de resolución del problema completo de contacto rueda-carril, cuyos resultados estén contrastados con medidas experimentales. La aplicación de este algoritmo de contacto será para la *simulación dinámica* y para la *estimación del desgaste en los perfiles en el rango de baja frecuencia*.

Por tanto este modelo deberá poseer un bajo coste computacional a la vez que una precisión suficiente para su aplicación a la simulación dinámica (cálculo de las fuerzas globales en la interacción rueda carril), como para la estimación del desgaste en los perfiles (cálculo de las distribuciones de las distintas magnitudes dentro de las áreas de contacto).

## 1.2. Objetivos

El objetivo fundamental de esta Tesis es el diseño e implementación de un modelo de contacto rueda-carril para aplicaciones de simulación dinámica de vehículos ferroviarios en el rango de baja frecuencia y la estimación del desgaste correspondiente en los perfiles (desgaste transversal). Para conseguir este objetivo se plantea el uso de técnicas experimentales que permitan bien la validación de los algoritmos numéricos propuestos, o bien su parametrización para ser capaces de reproducir resultados medidos experimentalmente. La consecución de este objetivo final se plantea en base a los siguientes objetivos parciales:

- Revisión de los modelos de contacto presentes en la bibliografía compatibles con el objetivo de esta Tesis.
- Desarrollo e implementación de un algoritmo de resolución del problema geométrico basado en la interpenetración virtual entre superficies que tenga en cuenta la forma de los perfiles reales de rueda y carril. Los perfiles se obtienen a partir de mediciones realizadas a perfiles en uso.
- Desarrollo e implementación de un algoritmo de resolución del problema normal de contacto que aproveche los resultados obtenidos en la resolución del problema geométrico. Este modelo estará basado en el enfoque de

contacto elástico y deberá ser capaz de considerar el multicontacto. La resolución de los problemas geométrico y normal debe combinar un bajo coste computacional con una precisión adecuada para describir el contacto rueda-carril.

- Uso de técnicas experimentales, que permitan obtener la forma y tamaño de las áreas de contacto y la distribución de presiones normales, para su comparación con los resultados obtenidos con el algoritmo numérico propuesto.
- Desarrollo e implementación de un algoritmo de resolución del problema de contacto tangencial. Se deberá tener en cuenta un modelo de coeficiente de rozamiento variable con el fin de poder reproducir las tendencias que aparecen en curvas de tracción medidas experimentalmente.
- Caracterización del comportamiento tangencial del contacto rueda-carril a partir de curvas de tracción medidas experimentalmente bajo distintas condiciones (superficies secas, mojadas, con presencia de diversos contaminantes, etc.). Esta caracterización permitirá determinar los parámetros que describen el comportamiento tangencial bajo distintas condiciones de operación.
- Obtención de las ecuaciones que rigen el movimiento de los cuerpos que componen un vehículo ferroviario dado un circuito de vía con modelos de grandes desplazamientos.
- Aplicación del procedimiento de resolución del problema de contacto propuesto en esta Tesis a la simulación dinámica, empleando las ecuaciones del movimiento deducidas anteriormente. Esta aplicación permitirá comprobar el efecto de considerar un coeficiente de rozamiento variable sobre la dinámica de los ejes y el sobre el desgaste de los perfiles.

### **1.3. Organización y desarrollo de la Tesis**

La memoria de esta Tesis está organizada en tres bloques: (1) estudio del contacto rueda carril, estimación del desgaste y simulación dinámica de vehículos ferroviarios; (2) diseño e implementación de un modelo de resolución del contacto rueda-carril; y (3) aplicación del modelo de contacto a la simulación dinámica. Además de este primer capítulo, el texto de esta Tesis Doctoral se organiza en otros seis capítulos.

En el Capítulo 2 se presenta el procedimiento empleado para el estudio del contacto rueda-carril atendiendo al problema de contacto propiamente dicho y a la



estimación del desgaste. En él se expone una revisión de los modelos de contacto presentes en la bibliografía compatibles con los objetivos de esta Tesis, así como de los conceptos asociados a la estimación del desgaste en perfiles. El análisis del contacto rueda-carril se plantea según una secuencia de tres pasos: problema geométrico, problema normal y problema tangencial.

En el Capítulo 3, a partir del principio de Lagrange, se desarrollan las ecuaciones del movimiento de un vehículo ferroviario dado un determinado trazado de vía. Estas ecuaciones se obtienen bajo la hipótesis de contacto elástico rueda-carril. De esta forma se consigue un conjunto de ecuaciones diferenciales ordinarias. En la expresión de las ecuaciones del movimiento se tienen en cuenta diferentes no linealidades, como son las correspondientes a las transformaciones entre los sistemas de referencia propias de una formulación para grandes desplazamientos.

Los Capítulos 4 y 5 constituyen el núcleo fundamental de esta Tesis. En ellos se desarrolla el modelo de contacto propuesto. El Capítulo 4 está dedicado a la resolución del problema geométrico y normal de contacto, donde se describe el algoritmo y se presentan diversos ejemplos. En este capítulo se incluye una validación del procedimiento de resolución del problema geométrico y normal a partir de los resultados de una técnica experimental de ultrasonidos. Esta técnica experimental permite obtener el área de contacto y la distribución de presiones normales que aparecen entre dos cuerpos metálicos.

El Capítulo 5 está centrado en la resolución del problema tangencial y en la estimación del desgaste. Este capítulo está dividido en dos grandes apartados. En un primer apartado se postprocesan los datos del problema normal obtenidos mediante la técnica experimental de ultrasonidos. Estos resultados se comparan con los que se obtienen según el procedimiento numérico propuesto para la resolución del problema tangencial y la estimación del desgaste. De esta forma, además de su uso original, la técnica de ultrasonidos permite evaluar efectos que no se han tenido en cuenta en el modelo teórico de contacto, como por ejemplo la rugosidad de las superficies.

En un segundo apartado del Capítulo 5, se introducen modificaciones en el algoritmo FASTSIM [44] para considerar un coeficiente de rozamiento variable. En la modelización del contacto rueda-carril, el coeficiente de rozamiento variable se introduce a través de parámetros del comportamiento tangencial. Se presenta un procedimiento que permite identificar estos parámetros a partir de curvas de tracción medidas experimentalmente en condiciones de laboratorio (usando una máquina de doble disco). En este apartado también se realiza un análisis del

desgaste a partir de datos experimentales obtenidos bajo condiciones de laboratorio en la máquina de doble disco.

En el Capítulo 6 se muestran los resultados de la aplicación del modelo de contacto desarrollado en esta Tesis a la simulación dinámica de un vehículo ferroviario en su paso por un circuito de vía. Se comparan los resultados de simulación y de desgaste de los perfiles obtenidos mediante un coeficiente de rozamiento constante con los obtenidos mediante un coeficiente de rozamiento variable y utilizando dos algoritmos de desgaste distintos.

En el Capítulo 6 se recogen las conclusiones que se extraen del trabajo realizado y se resumen las aportaciones a la Tesis.

Posteriormente se presenta el listado de las referencias bibliográficas empleadas en el desarrollo del trabajo aquí expuesto y citadas en la misma.

Finalmente, como información complementaria se incluyen unos Anexos donde se presentan los siguientes puntos: en los tres primeros se muestran las expresiones, propiedades y desarrollos usados en el Capítulo 3 para la obtención de las ecuaciones del movimiento de un vehículo ferroviario; en el cuarto Anexo se detallan las características del vehículo ferroviario empleado en la simulación dinámica del Capítulo 6; finalmente, en el quinto Anexo, se listan y se anexan las versiones *pre-print* de los artículos publicados en relación a la presente Tesis.

## **2. Revisión de modelos de contacto y estimación del desgaste**

### **2.1. Introducción**

Todas las fuerzas de sustentación y guiado de un vehículo ferroviario se transmiten a través de las áreas de contacto entre las ruedas y los carriles [37]. Por tanto, la determinación de estas fuerzas y, en general, la resolución del problema de contacto es vital en el campo de la simulación dinámica. Además, el número de áreas de contacto con su forma y tamaño y la distribución de presiones en cada una de ellas es necesario para una correcta estimación de parámetros de desgaste en los perfiles de rueda y carril.

En este capítulo de la Tesis se realiza un análisis del problema de contacto aplicado al ámbito ferroviario y se describe el procedimiento que se aborda en la bibliografía para la resolución del problema de contacto completo.

La resolución del problema de contacto se puede dividir en tres pasos: problema geométrico, problema normal y problema tangencial de contacto. En este capítulo se describe cada uno de ellos y los distintos modelos usados por los autores presentes en la bibliografía.

Finalmente, se dedicará un último apartado a la estimación del desgaste en el contacto rueda-carril, aplicado al desgaste en los perfiles. En este apartado se describen los distintos conceptos asociados al desgaste, así como los modelos de desgaste usados y los distintos algoritmos empleados.

### **2.2. Análisis del problema de contacto rueda-carril**

En este apartado se exponen las características del contacto rueda-carril y la problemática asociada a su resolución. Posteriormente se presenta una clasificación de las distintas teorías. Finalmente, se describe el procedimiento empleado para resolver el problema de contacto completo.

#### **2.2.1. El problema de contacto rueda-carril**

Kalker [43] distingue dos problemas asociados al campo del contacto rueda-carril. Por una parte, conocida la geometría y cinemática del contacto, se debe establecer la magnitud de las fuerzas en el contacto (problema de análisis de

fuerzas). Por otra parte, conocidas las fuerzas en el contacto, se debe calcular cuál será el movimiento del vehículo ferroviario o tren (problema de análisis del movimiento). La primera cuestión forma parte de la Mecánica de Contacto; la segunda, de Dinámica Vehicular. En este capítulo se tratará desde la perspectiva de la Mecánica de Contacto (problema de análisis de fuerzas).

Los datos de entrada necesarios para resolver el problema de contacto son:

- Geometría del contacto: dimensiones nominales que definen la geometría transversal de la vía y definición de las superficies de la rueda y el carril.
- Propiedades mecánicas de los cuerpos en el contacto.
- Posición relativa del eje ferroviario (de las ruedas) con respecto a la vía (carriles) teniendo en cuenta el problema tridimensional.
- Cinemática del contacto: velocidades relativas de los puntos teóricos de contacto dentro de cada área de contacto y velocidad longitudinal del vehículo.
- Estado tribológico de las superficies en el contacto.

Con estos datos de entrada, y según la teoría utilizada, los resultados del problema de contacto son:

- Número de áreas de contacto.
- Forma y tamaño de las áreas de contacto.
- Posición y conicidad (orientación) de las áreas de contacto con respecto a un sistema de referencia conocido.
- Distribución de presiones (normales y tangenciales) sobre las áreas de contacto.
- Fuerzas y momentos totales (normales y tangenciales) resultantes de la distribución de tensiones sobre las áreas de contacto.

Para plantear el problema de contacto será también necesario establecer la aplicación en la que se van a usar los resultados. Según esta aplicación se aconsejará o se evitará la asunción de ciertas hipótesis o el uso de procedimientos simplificados que permitan resolver el problema con un coste computacional adecuado (para la aplicación en concreto) sin sacrificar la precisión del resultado que se busca.

Por ejemplo, en el caso en que el problema tenga como aplicación la simulación dinámica, la distribución de tensiones sobre el área de contacto podrá sustituirse por las fuerzas y momentos totales aplicados sobre el eje y sobre los carriles. Incluso dentro de la simulación dinámica, para un trazado en vía recta donde previsiblemente los desplazamientos laterales sean pequeños, se puede recurrir a modelos de geometría rueda-carril simplificados y modelos dinámicos lineales para el cálculo del problema tangencial. Otro caso distinto sería si se desea hacer una estimación del desgaste de los perfiles o cualquier otra aplicación que requiera un análisis local de las tensiones de los cuerpos en el contacto. En tal caso será necesario conocer con precisión la posición y forma de las áreas de contacto, así como la distribución de tensiones dentro de estas áreas.

### 2.2.2. Clasificación de las teorías de contacto rueda-carril

Se puede proponer diversas clasificaciones para las teorías de contacto; en esta Tesis se sigue la clasificación propuesta por Kalker [43, 45] que a su vez es seguida por Garg y Dukkipati [32].

- Según la teoría de elasticidad empleada los modelos de contacto se pueden clasificar en *exactos* o *simplificados*. La teoría *exacta* está basada en el supuesto de semiespacio infinito, según el cual, los desplazamientos de un punto dependen de las fuerzas aplicadas en todos los puntos del dominio. Esta relación se podría expresar como

$$\mathbf{u}(x, y) = \int_{\Omega} \mathbf{H}(\xi, \eta) \mathbf{p}(\xi, \eta) d\xi d\eta \quad (2.1)$$

siendo  $\mathbf{u}$  el vector del desplazamiento debido a deformaciones elásticas en el punto  $x, y$ ,  $\mathbf{H}$  la matriz de flexibilidad y  $\mathbf{p}$  la fuerza por unidad de área. Estas magnitudes son función de las coordenadas locales  $\xi, \eta$ , respecto a los puntos  $x, y$ , dentro de un dominio genérico  $\Omega$ .

Por otra parte, la teoría *simplificada* supone que los desplazamientos en un punto dependen exclusivamente de las fuerzas aplicadas en dicho punto:

$$\mathbf{u}(x, y) = L \mathbf{p}(x, y) \quad (2.2)$$

siendo  $L$  el parámetro de flexibilidad.

- Según la consideración de los efectos dinámicos en el contacto, las distintas teorías se pueden clasificar en teorías *dinámicas* o teorías *cuasi-estáticas*. Las teorías *dinámicas* incluyen en la formulación del problema de contacto rodante los efectos inerciales. En cambio, las teorías *cuasi-*

*estáticas* desprecian estos efectos inerciales. Según Kalker [43] los efectos inerciales sólo son perceptibles en la teoría de contacto para velocidades de circulación por encima de 500 km/h.

- Según las dimensiones consideradas en el modelado, se pueden clasificar en teorías *tridimensionales* o teorías *bidimensionales*. En las teorías *tridimensionales* los desplazamientos  $\mathbf{u}$  y las presiones  $\mathbf{p}$  dependen de las tres coordenadas  $x$ ,  $y$ ,  $z$ . En cambio, en las teorías *bidimensionales*,  $\mathbf{u}$  y  $\mathbf{p}$  son independientes de la variable  $y$ . Por tanto, las teorías bidimensionales tienen una aplicación limitada en la dinámica de vehículos ferroviarios.
- Según la consideración de los efectos transitorios, se pueden distinguir entre teorías *no estacionarias* (o *transitorias*) y *estacionarias*. Las teorías *no estacionarias* consideran los efectos transitorios que aparecen en el contacto por rodadura. Según Garg y Dukkipati [32] los fenómenos transitorios en el contacto por rodadura se consideran de menor importancia en el campo de la dinámica ferroviaria.

La expresión cinemática que expresa la relación entre el deslizamiento y los desplazamientos debidos a deformaciones elásticas ambos en el plano tangencial al contacto es

$$\gamma = \mathbf{w} - \frac{\partial \mathbf{u}_t}{\partial x} + \frac{1}{V} \frac{\partial \mathbf{u}_t}{\partial t} \quad (2.3)$$

siendo  $\gamma$  el deslizamiento adimensional,  $\mathbf{w}$  el deslizamiento rígido (calculado a partir de los pseudodeslizamientos),  $\mathbf{u}_t$  los desplazamientos tangenciales debidos a deformaciones elásticas,  $V$  la velocidad longitudinal del vehículo,  $x$  la coordenada longitudinal y  $t$  la variable temporal. En un modelo *no estacionario* se considera  $\partial \mathbf{u}_t / \partial t \neq 0$ , mientras que en un modelo *estacionario* esta variación es nula con respecto al tiempo.

- Según la condición de saturación de las fuerzas se pueden clasificar en teorías *lineales* o teorías *no-lineales*. En una teoría *lineal* se asume que las presiones tangenciales  $p_t$  son lineales respecto a los pseudodeslizamientos en todo el rango de análisis. En cambio, en una teoría *no-lineal* o *de saturación* se considera la ley de Amontons-Coulomb en la que la tensión tangencial  $p_t$  está limitada por la magnitud de la presión normal  $p_z$  y el coeficiente de rozamiento  $\mu$  en ese punto:

$$p_t \leq \mu p_z \quad (2.4)$$

Considerando la aplicación del problema de contacto usado en esta Tesis (simulación dinámica junto a la estimación del desgaste transversal de los perfiles en el rango de baja frecuencia) y atendiendo a la clasificación anterior se utilizará un modelo de contacto que cumpla las siguientes características:

- Según la teoría de elasticidad, será recomendable emplear modelos de contacto basados en la teoría elástica *simplificada* debido a que tienen un coste computacional mucho menor, siempre que la precisión de los resultados sea adecuada.
- En cuanto a la consideración de los efectos dinámicos, se usarán teorías *cuasi-estáticas*. El conjunto de teorías usadas generalmente para resolver el problema de contacto rueda-carril en el campo de la simulación dinámica no tienen en cuenta los efectos inerciales sobre las fuerzas en el contacto.
- Según las dimensiones consideradas en el modelado, debido a la geometría del contacto rueda-carril, se usarán teorías *tridimensionales*. Para geometrías más sencillas, como por ejemplo el contacto entre dos cilindros paralelos (máquina de doble disco), se usarán teorías *bidimensionales*.
- Según la consideración de los efectos transitorios, se utilizarán teorías *estacionarias*. Esta hipótesis permite reducir el coste computacional además de ser compatible con la aplicación para la simulación dinámica y la estimación del desgaste en los perfiles en el contacto, en el rango de baja frecuencia.
- Finalmente, según la condición de saturación de las fuerzas para la resolución del problema tangencial, se usarán teorías *no-lineales*. Este aspecto será básico si se quiere tener en cuenta el estado tribológico de las superficies en el contacto.

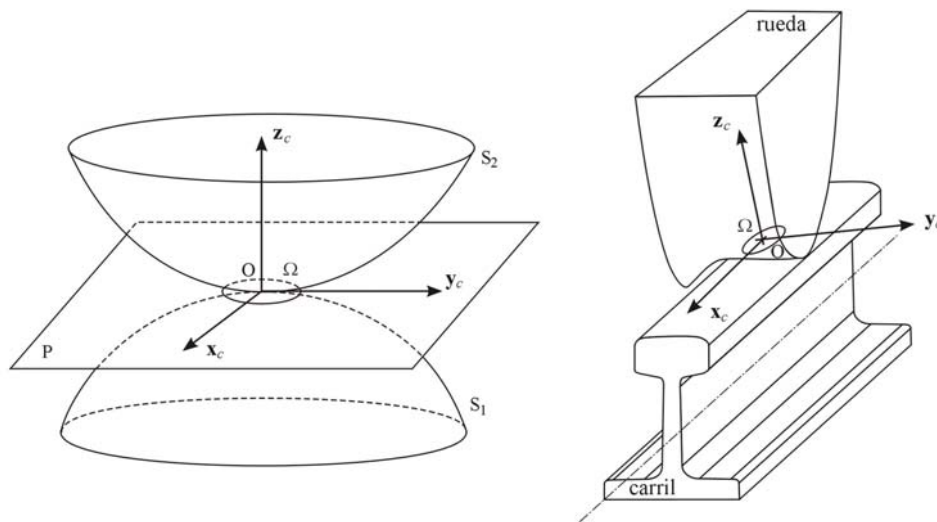
### 2.2.3. Procedimiento para el estudio del contacto rueda-carril

Una vez expuesta una clasificación para las teorías de contacto y habiendo señalado las características que debe cumplir el método de resolución del problema de contacto propuesto en esta Tesis, se va a exponer el procedimiento seguido para el estudio del contacto entre dos superficies, en el ámbito del contacto rueda-carril.

Debido a características como la geometría de las superficies en el contacto, la elevada rigidez de los materiales empleados y la consideración de la tribología en la interfase, la resolución del contacto rueda-carril resulta un problema complejo. Además, las magnitudes asociadas a la resolución del problema de contacto aparecen en principio acopladas, lo que dificulta su

resolución. En este apartado se describe el procedimiento generalmente empleado para la resolución del contacto rueda-carril [32, 45]. Según este procedimiento se considera que los materiales en contacto son homogéneos e isotrópicos y que su comportamiento es elástico-lineal.

El primer paso consiste en obtener el área de contacto a partir de la geometría de las superficies de rueda y carril y de la posición relativa entre ambos cuerpos. La Figura 2.1 muestra un esquema del área de contacto que aparece entre dos superficies genéricas  $S_1$  y  $S_2$  (izq.) y entre las superficies de la rueda y del carril (dcha.). 'O' es el punto teórico de contacto, definido según la teoría de contacto utilizada. Este punto se usa como origen del sistema de referencia asociado al contacto, con origen en 'O' y definido por los ejes  $x_c, y_c, z_c$ . Los ejes  $x_c, y_c$  definen el plano tangente al contacto y el eje  $z_c$  la dirección normal.  $\Omega$  es el área de contacto, contenida en el plano  $x_c-y_c$  y calculada también según la teoría de contacto utilizada. Esta área de contacto acota el dominio en el que se distribuyen las tensiones asociadas al contacto entre superficies.



**Figura 2.1.** Izq.: contacto entre dos cuerpos genéricos. Dcha.: contacto entre la rueda y el carril. Adaptado de [51].

Una vez obtenida el área de contacto se procede al cálculo de la distribución de tensiones sobre esta área. Según las direcciones de los ejes asociados al contacto, se pueden obtener dos tipos de tensiones:

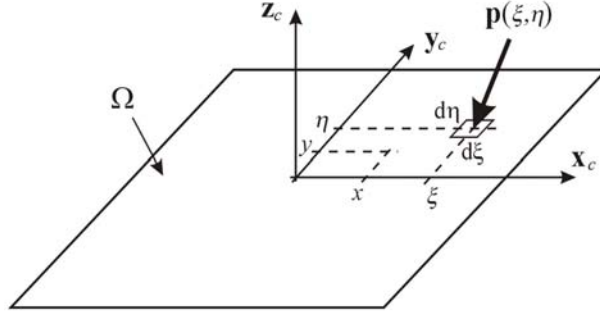
- Tensiones normales al contacto, que son paralelas al eje  $z_c$ .
- Tensiones tangenciales al contacto, que están contenidas en el plano  $x_c-y_c$ .



Para obtener el valor de las tensiones sobre el área de contacto se parte de la relación que aparece entre dichas tensiones  $\mathbf{p}$  y los desplazamientos debidos a deformaciones elásticas  $\mathbf{u}$ . Según la clasificación del apartado anterior, considerando la teoría elástica *exacta*, la ecuación (2.1) según Love [60] se podría expresar como:

$$\begin{Bmatrix} u_x(x, y) \\ u_y(x, y) \\ u_z(x, y) \end{Bmatrix} = \frac{1}{2\pi G} \int_{\Omega} \begin{bmatrix} h_{xx} & h_{xy} & h_{xz} \\ h_{yx} & h_{yy} & h_{yz} \\ h_{zx} & h_{zy} & h_{zz} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} p_x(\xi, \eta) \\ p_y(\xi, \eta) \\ p_z(\xi, \eta) \end{Bmatrix} d\xi d\eta \quad (2.5)$$

siendo  $G$  el módulo de elasticidad transversal combinado para los materiales de la rueda y del carril,  $h$  los parámetros de flexibilidad y  $\xi, \eta$  las coordenadas locales medidas al origen del sistema de referencia del contacto  $x, y$  (Figura 2.2).



**Figura 2.2.** Aplicación de la teoría *exacta* de la elasticidad. Adaptado de [51].

Las expresiones de los parámetros de flexibilidad  $h$  son:

$$\begin{aligned} h_{xx} &= \frac{1-\sigma}{d} + \frac{\sigma(x-\xi)^2}{d^3} & h_{xy} &= \frac{\sigma(x-\xi)^2(y-\eta)^2}{d^3} = h_{yx} & h_{xz} &= \frac{\kappa(x-\xi)}{d^2} = h_{zx} \\ h_{yy} &= \frac{1-\sigma}{d} + \frac{\sigma\eta^2}{d^3} & h_{yz} &= \frac{\kappa(y-\eta)}{d^2} = h_{zy} \\ h_{zz} &= \frac{1-\sigma}{d} \end{aligned} \quad (2.6)$$

$$\text{con } d = \sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2}$$

donde las constantes  $G$ ,  $\sigma$  y  $\kappa$  se calculan a partir de los módulos de elasticidad transversal de la rueda y carril,  $G_w$  y  $G_r$ , y a partir de los coeficientes de Poisson de rueda y carril,  $\sigma_w$  y  $\sigma_r$ , según [32]:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{G} &= \frac{1}{2} \left( \frac{1}{G_w} + \frac{1}{G_r} \right) \\
\frac{\sigma}{G} &= \frac{1}{2} \left( \frac{\sigma_w}{G_w} + \frac{\sigma_r}{G_r} \right) \\
\kappa &= \frac{G}{4} \left( \frac{1-2\sigma_w}{G_w} - \frac{1-2\sigma_r}{G_r} \right)
\end{aligned} \tag{2.7}$$

Tomando las dos primeras ecuaciones y reordenando se llega a la expresión del módulo de elasticidad y el coeficiente de Poisson combinados para los materiales de rueda y carril:

$$\begin{aligned}
G &= 2 \frac{G_w G_r}{G_w + G_r} \\
\sigma &= \frac{G}{2} \frac{G_w \sigma_r + G_r \sigma_w}{G_w G_r}
\end{aligned} \tag{2.8}$$

Para un material, el módulo de elasticidad transversal se puede calcular a partir del módulo de Young y del coeficiente de Poisson como:

$$G_k = \frac{E_k}{2(1+\sigma_k)} \tag{2.9}$$

siendo  $k = r$  para el material del carril y  $k = w$ , para la rueda.

Cuando los dos cuerpos están hechos del mismo material ( $\sigma_1 = \sigma_2$ ,  $G_1 = G_2$ ) o cuando éstos son incompresibles ( $\sigma_1 = \sigma_2 = 0,5$ ), la constante  $\kappa$  es nula y, por tanto, los parámetros  $h_{xz}$ ,  $h_{yz}$ ,  $h_{zx}$  y  $h_{zy}$  en (2.6). En estos casos, se cumple la hipótesis que los desplazamientos tangenciales  $u_x$ ,  $u_y$  no están influenciados por las presiones normales  $p_z$  y que los desplazamientos normales  $u_z$  no están influenciados por las tensiones tangenciales  $p_x$ ,  $p_y$ . Esta situación se conoce como *cuasi-identidad elástica* entre materiales.

En el caso del contacto de la rueda con el carril, puesto que ambos cuerpos están contruidos de acero, se puede suponer que se cumple la *cuasi-identidad elástica* entre materiales, por lo que la ecuación para  $z$  en (2.5) correspondiente a la distribución de tensiones normales quedaría desacoplada de las ecuaciones para  $x$ ,  $y$  correspondientes a las distribuciones de tensiones tangenciales. Según esta condición, la expresión (2.5) se podría desdoblar en:

$$\begin{Bmatrix} u_x(x, y) \\ u_y(x, y) \end{Bmatrix} = \frac{1}{2\pi G} \int_{\Omega} \begin{bmatrix} h_{xx} & h_{xy} \\ h_{yx} & h_{yy} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} p_x(\xi, \eta) \\ p_y(\xi, \eta) \end{Bmatrix} d\xi d\eta \tag{2.10.a}$$

$$u_z(x, y) = \frac{1}{2\pi G} \int_{\Omega} h_{zz} p_z(\xi, \eta) d\xi d\eta \quad (2.10.b)$$

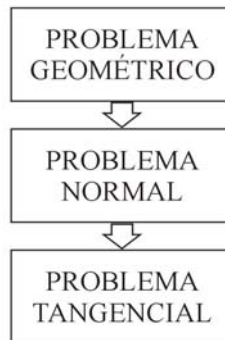
De este modo, los dos problemas se pueden resolver de forma independiente.

Para la resolución del problema tangencial, en el caso de que se use una teoría *no-lineal* que considere la saturación de las fuerzas tangenciales mediante la ley de Amontons-Coulomb, será necesario disponer de la distribución de tensiones normales dentro del área de contacto. Por tanto, se deberá resolver en primer lugar el problema normal, usando la expresión (2.10.b), y posteriormente el problema tangencial mediante (2.10.a).

De esta forma se puede definir el siguiente procedimiento para la resolución del problema de contacto rueda-carril:

1. En primer lugar se resuelve el **problema geométrico de contacto**, con el fin de establecer la posición y una estimación del área de contacto.
2. En segundo lugar se aborda el **problema normal de contacto** para obtener el área de contacto y la distribución de tensiones normales.
3. Finalmente, con los datos de la distribución de presiones normales, se resuelve el **problema tangencial de contacto**.

La Figura 2.3 muestra un esquema de los pasos seguidos para resolver el problema de contacto rueda-carril.



**Figura 2.3.** Procedimiento de resolución del problema de contacto rueda-carril.

#### 2.2.4. Enfoques del problema de contacto

Considerando el procedimiento descrito en el apartado anterior, para abordar el problema de contacto se pueden distinguir dos enfoques distintos: el *contacto rígido* y el *contacto elástico* [92, 95].

- El enfoque de *contacto rígido* (en inglés *rigid contact* [92]) o también llamado de *contacto restringido* (en inglés *constraint approach* [95]) supone que ambos cuerpos son infinitamente rígidos y el contacto aparece en un punto. Este punto constituye el *punto teórico de contacto*.

Para obtener este punto teórico de contacto se aplica un procedimiento geométrico en el que se imponen dos restricciones: que la posición en los dos cuerpos en el contacto sea la misma, y que el vector normal a ambas superficies sea el mismo.

La definición del área de contacto se obtiene a partir de las características de este punto de contacto según la teoría de contacto normal empleada.

En un enfoque de *contacto rígido* o *restringido* el conjunto de coordenadas que define la posición relativa del eje con respecto a la vía (ver sección 2.3.1) constituye un conjunto de coordenadas dependientes. Esto es debido a las restricciones impuestas por la vía para el movimiento del eje, que no permiten la interpenetración entre superficies.

- En el enfoque de *contacto elástico* (en inglés *elastic contact* [92] o *elastic approach* [95]) las superficies en el contacto se suponen también infinitamente rígidas, pero con la posibilidad de que exista interpenetración. Esta *interpenetración virtual* se puede calcular de forma geométrica y la fuerza de interacción es función de esta interpenetración, según la teoría de contacto normal utilizada.

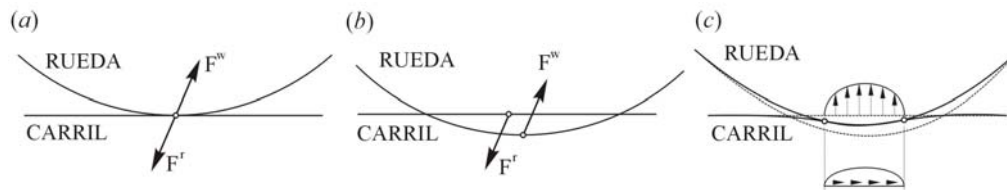
La definición del punto teórico de contacto dependerá de la teoría de contacto empleada. Debido a que aparece una interpenetración entre superficies, la posición del punto de contacto sobre un cuerpo no necesariamente coincidirá con la posición del punto de contacto sobre el otro cuerpo. En cambio, el valor de la fuerza de interacción, según la tercera ley de Newton, sí que serán iguales y de sentido contrario sobre ambos cuerpos en la interfase.

La obtención del área de contacto también depende de la teoría de contacto normal empleada pero, en cualquier caso, será función de la interpenetración entre las superficies de la rueda y del carril.

En un enfoque de *contacto elástico* el conjunto de coordenadas que define la posición relativa del eje con respecto a la vía (ver sección 2.3.1) constituye un sistema de coordenadas independientes. De esta forma, el eje se puede mover libremente dentro de la vía dando lugar a diversas áreas de interpenetración.

En la realidad al producirse un contacto entre superficies y transmitir una fuerza normal, aparece una deformación local de los cuerpos en la zona de contacto que da lugar al área de contacto. Además, estas fuerzas en el contacto no son puntuales, sino que aparecen distribuidas en esta área de contacto.

La Figura 2.4 ilustra los dos enfoques descritos para modelizar el contacto entre superficies ((a) contacto rígido, (b) contacto elástico) junto a un esquema del caso real.



**Figura 2.4.** Modelos de contacto entre rueda y carril: (a) Modelo de contacto rígido. (b) Modelo de contacto elástico. (c) Caso real. Adaptado de [95]

La clasificación según estos dos enfoques permite, como se verá en el apartado 2.4, distinguir dos familias de métodos de **contacto normal**. Por una parte, los métodos de contacto normal *basados en la interpenetración virtual* entre superficies (concepto que también se utiliza en [49-50, 76]). Por otra parte, en contraposición se pueden distinguir los métodos de *punto teórico de contacto*. En los primeros la obtención del área de contacto será función del volumen de interpenetración entre superficies, mientras que en los segundos, de las características del punto teórico de contacto.

Por tanto, el enfoque de *contacto rígido* permite fácilmente estimar el área de contacto a partir de las características de este punto, mediante una teoría de *punto teórico de contacto*. Por otra parte, el enfoque de *contacto elástico* ofrece una estimación del área de contacto a partir de la interpenetración entre la rueda y el carril; por tanto está relacionado con los métodos de contacto normal *basados en la interpenetración virtual*.

No obstante, diversos autores optan por la combinación de la resolución del problema geométrico mediante *contacto elástico* con la resolución del problema normal mediante una teoría de *punto teórico de contacto*. Tal es el caso empleado en [84, 92, 93 y 95].

En la aplicación del contacto rueda-carril para la simulación dinámica, los dos enfoques usados dan lugar a distintas formulaciones de las ecuaciones del movimiento:

- Según el enfoque de *contacto rígido* o *enfoque restringido* se utilizan una serie de ecuaciones de restricción para definir la modelización del contacto rueda-carril. Por tanto, se tiene un conjunto de ecuaciones diferenciales-algebraicas.

Las fuerzas normales al contacto se obtienen a partir de las fuerzas de reacción asociadas a las ecuaciones de restricción (multiplicadores de Lagrange, ver [96]).

- Según el enfoque de *contacto elástico*, el conjunto de ecuaciones que definen el movimiento de los cuerpos constituye un sistema de ecuaciones diferenciales.

El valor de las fuerzas normales se obtiene a partir de la indentación entre superficies (de forma geométrica). Según este enfoque el número de áreas de contacto es una variable ya que depende de las zonas de interpenetración entre los perfiles de la rueda y del carril. Por tanto, este enfoque permite modelizar el caso del *multicontacto* (cuando aparece más de un área de contacto por rueda).

Este aspecto se tendrá en cuenta en la obtención de las ecuaciones del movimiento en el Cap. 3.

Una vez presentado el procedimiento de resolución del contacto rueda-carril y los dos enfoques utilizados en la bibliografía se va a describir el problema geométrico de contacto junto a las soluciones propuestas por los distintos autores.

### **2.3. Problema geométrico de contacto**

En este apartado se tratan los aspectos relacionados con la geometría del contacto rueda-carril.

Para una geometría de la vía dada, conocidas las superficies de la rueda y del carril y establecida la posición relativa de estos cuerpos, la resolución del problema geométrico de contacto consiste en obtener:

- El número de áreas de contacto que aparecen entre la superficie de la rueda y del carril.
- La posición de cada área de contacto.
- La conicidad correspondiente de cada área de contacto.
- Otros parámetros en función de la teoría de contacto normal empleada.

En relación al último punto, por ejemplo, en el caso de que se emplee la teoría de Hertz estos otros parámetros son la indentación máxima y los valores de las curvaturas en el punto teórico de contacto. Si, en cambio, se usa un modelo de contacto *basado en la interpenetración virtual* entre superficies, los otros parámetros necesarios son la forma y tamaño del área de interpenetración.

En primer lugar se describen las coordenadas y sistemas de referencia empleados para describir el movimiento del eje ferroviario con respecto a la vía. Posteriormente, se define la geometría transversal de la vía. Finalmente, se presentan distintos procedimientos usados en la bibliografía para la resolución del problema geométrico de contacto.

### 2.3.1. Coordenadas y sistemas de referencia

En esta sección en primer lugar se describen los sistemas de referencia utilizados para modelizar el contacto rueda-carril. Posteriormente se presenta el conjunto de coordenadas analizadas y, finalmente, se describen las transformaciones entre los sistemas de referencia utilizados.

#### a. Definición de los sistemas de referencia

Para la modelización del problema de contacto rueda-carril, se van a usar tres sistemas de referencia: sistema de referencia asociado a la vía  $\tilde{x}\tilde{y}\tilde{z}$ , sistema de referencia asociado al eje ferroviario  $\bar{x}\bar{y}\bar{z}$  y sistema de referencia asociado a cada área de contacto  $x_c y_c z_c$ .

El **sistema de referencia asociado a la vía**  $\tilde{x}\tilde{y}\tilde{z}$  se define para cada posición a lo largo del trazado de la vía, de tal forma que el eje  $\tilde{x}$  es tangente a la vía y según el sentido de avance. El eje  $\tilde{y}$  marca la dirección lateral, de tal forma que los ejes  $\tilde{x}-\tilde{y}$  definen el plano de la vía y el eje  $\tilde{z}$  es vertical y hacia arriba. El origen de este sistema de referencia es el punto  $T$  que define el eje de la vía.

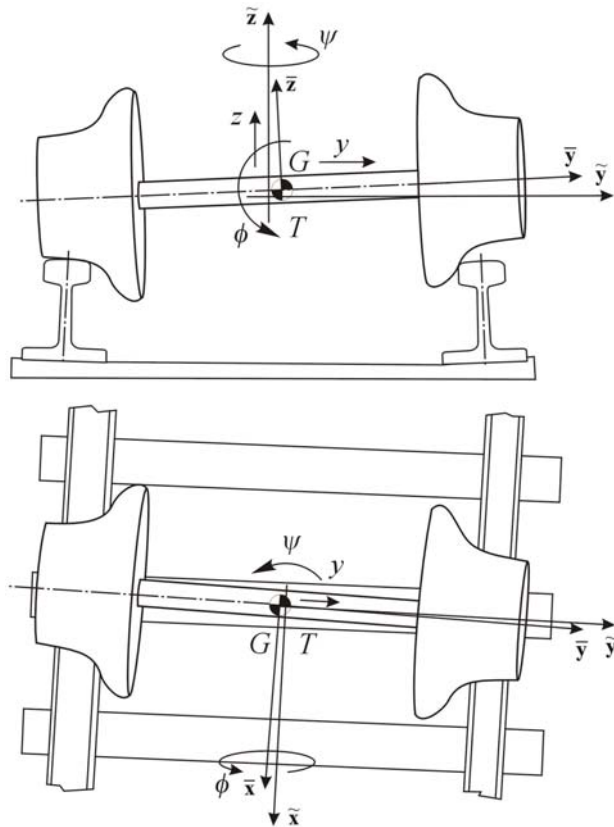
Para la descripción del contacto rueda-carril, se utiliza un sistema de referencia asociado a la vía para cada uno de los ejes ferroviarios. Este sistema de referencia se desplaza siguiendo el eje de la vía a una velocidad longitudinal  $V$  que es la velocidad del vehículo.

Por otra parte, se define un **sistema de referencia asociado al eje ferroviario**  $\bar{x}\bar{y}\bar{z}$  para cada uno de los ejes de la composición. Los ejes del sistema de referencia están orientados según los ejes principales de inercia del cuerpo, de

tal forma que  $\bar{y}$  coincide con el eje de rotación. Puesto que el eje ferroviario es una geometría de revolución, para situar este sólido en el espacio no se considera la rotación alrededor del eje  $\bar{y}$ . El eje  $\bar{x}$  indica la dirección y el sentido de avance y  $\bar{z}$  es aproximadamente vertical y hacia arriba.

Este sistema de referencia se define a partir del sistema de referencia de la vía, siguiendo al transformación de coordenadas según la secuencia Z-X [96, 97]. El origen del sistema de referencia es el centro de masas del eje  $G$ . El sistema de referencia del eje coincide con el sistema de referencia de la vía si el eje está centrado.

La Figura 2.5 muestra los sistemas de referencia de la vía y del eje, para una posición genérica del eje.



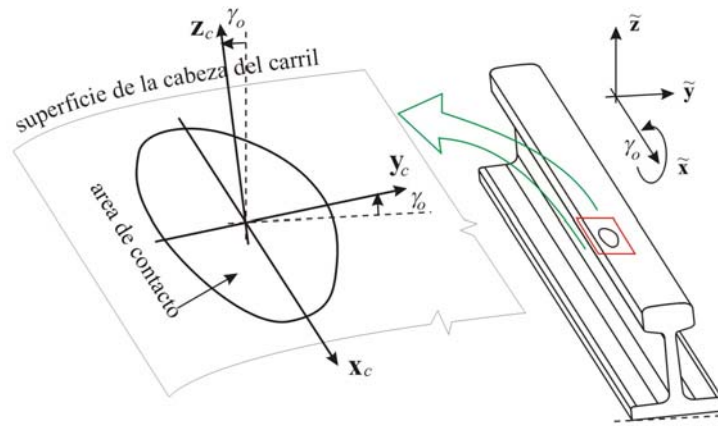
**Figura 2.5.** Sistema de referencia  $\tilde{x}\tilde{y}\tilde{z}$  de la vía y sistema de referencia  $\bar{x}\bar{y}\bar{z}$  del eje ferroviario, junto a las coordenadas que definen el movimiento del eje en la vía.

En tercer lugar, se tiene el **sistema de referencia asociado al contacto rueda-carril**  $x_c y_c z_c$ . Se obtiene a partir del sistema de referencia asociado a la vía



para el eje ferroviario mediante una rotación alrededor del eje  $\tilde{x}$  que tiene en cuenta la conicidad del área de contacto. Los ejes  $x_c, y_c$  marcan el plano tangencial al contacto siendo  $x_c$  la dirección longitudinal e  $y_c$  la dirección transversal o lateral. El eje  $z_c$  indica la dirección normal. El origen de este sistema de referencia se encuentra en la posición del punto teórico de contacto definido según la teoría de contacto utilizada. Se utiliza un sistema de referencia asociado al contacto para cada área de contacto que aparece entre cada eje del vehículo y los carriles de la vía.

La Figura 2.6 muestra el sistema de referencia asociado a un área de contacto y su obtención a partir del sistema de referencia asociado a la vía del correspondiente eje ferroviario.



**Figura 2.6.** Definición del sistema de referencia del contacto.

Una vez definidos los sistemas de referencia utilizados para modelizar el contacto rueda-carril se procede a describir las coordenadas utilizadas para expresar la posición y orientación relativa del eje ferroviario con respecto a la vía.

### b. Coordenadas utilizadas

Para expresar la posición y orientación del eje ferroviario en la vía se usa un conjunto típico de cuatro coordenadas [32, 97], que son: el desplazamiento lateral  $y$ , el desplazamiento vertical  $z$  (ambos desplazamientos del centro de masas del eje  $G$  medidos en el sistema de referencia de la vía); el giro alrededor del eje  $X$   $\phi$  (ángulo de balanceo) y el giro alrededor del eje  $Z$ ,  $\psi$  (ángulo de lazo):

$$\mathbf{q} = \{y, z, \phi, \psi\}^T \quad (2.11)$$

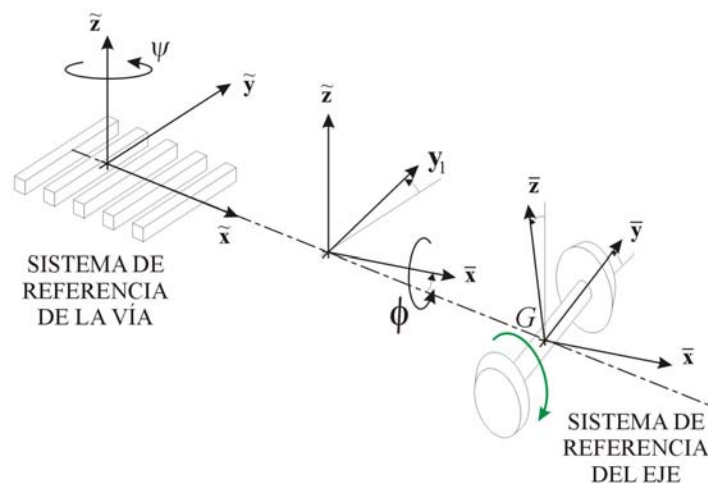
donde los ángulos  $\phi$ ,  $\psi$  son ángulos de Euler que definen la transformación de coordenadas según la secuencia Z-X, desde el sistema de referencia de la vía al sistema de referencia del eje.

Con respecto al giro principal del eje ferroviario, se asume que este giro se realiza a velocidad constante, de valor  $V/r_o$  (siendo  $V$  la velocidad del vehículo y  $r_o$  el radio nominal de las ruedas). Se puede adoptar esta hipótesis debido a que la inercia del eje ferroviario es muy grande y que las acciones que pueden producir variaciones en esta velocidad nominal son pequeñas.

Una vez definidas las coordenadas utilizadas, se pueden obtener las expresiones de las transformaciones entre los distintos sistemas de referencia.

### c. Transformaciones entre sistemas de referencia

Considerando los tres sistemas de referencia utilizados, se van a definir las correspondientes transformaciones entre éstos.



**Figura 2.7.** Secuencia de rotaciones que define la transformación desde el sistema de referencia del eje al sistema de referencia del eje.

La primera transformación es la realizada entre el sistema de referencia asociado a la vía y el sistema de referencia asociado al eje según la secuencia de rotaciones Z-X (partiendo del sistema de referencia de la vía): en primer lugar se realiza un giro alrededor del eje  $\tilde{z}$  de valor  $\psi$ , seguido de un giro en  $\tilde{x}$  de valor  $\phi$ , tal como se observa en la Figura 2.7. Esta transformación depende del valor de las coordenadas que son ángulos de Euler [96, 97].

Siendo  $\bar{\mathbf{v}}$  un vector expresado en el sistema de referencia del eje y  $\tilde{\mathbf{v}}$ , en el sistema de referencia de la vía, la expresión de la transformación está dada por:

$$\tilde{\mathbf{v}} = [\mathbf{T}_Z(\psi)\mathbf{T}_X(\phi)] \bar{\mathbf{v}} = \mathbf{T}_b^{eje}(\phi, \psi) \bar{\mathbf{v}} \quad (2.12)$$

donde  $\mathbf{T}_Z$  y  $\mathbf{T}_X$  son las matrices de transformación con respecto a los ejes Z y X, respectivamente, y  $\mathbf{T}_b^{eje}$  es la matriz de transformación asociada a los giros del eje ferroviario. La expresión de estas matrices se muestra en el Anexo I.

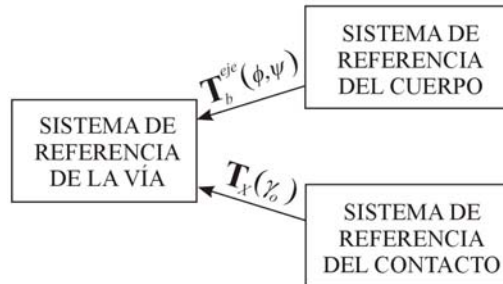
La segunda transformación es la que relaciona el sistema de referencia de la vía con el sistema de referencia asociado al contacto. Esta transformación se realiza mediante un giro alrededor del eje  $\tilde{\mathbf{x}}$  de la vía (Figura 2.6).

La expresión de la transformación de un vector  $\mathbf{v}_c$  en el sistema de referencia del contacto, al sistema de referencia de la vía, es:

$$\tilde{\mathbf{v}} = \mathbf{T}_X(\gamma_o) \mathbf{v}_c \quad (2.13)$$

siendo  $\gamma_o$  el ángulo de conicidad calculado para cada área de contacto.

La Figura 2.8 muestra un esquema de las transformaciones definidas entre los sistemas de referencia utilizados.

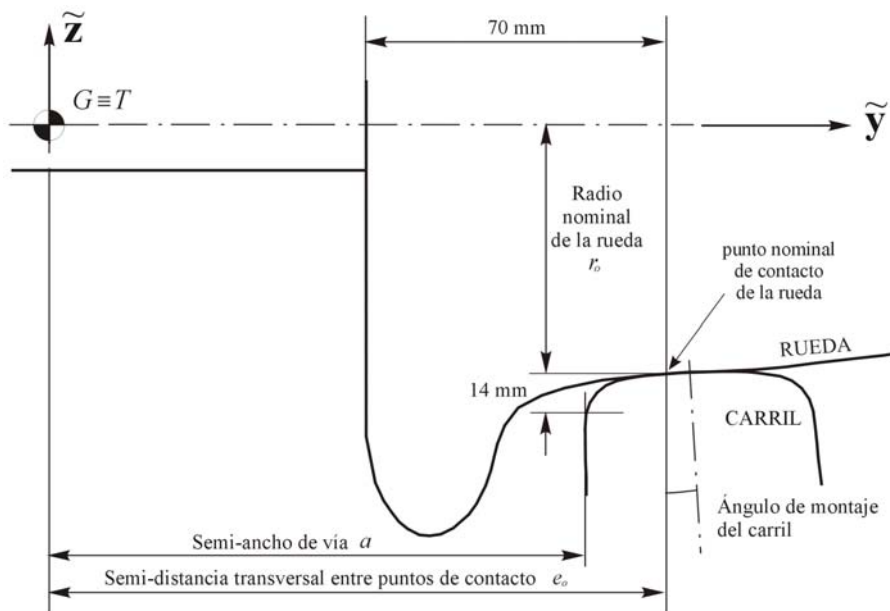


**Figura 2.8.** Esquema de las dos transformaciones definidas entre los sistemas de referencia utilizados.

### 2.3.2. Geometría de la vía

La geometría transversal de la vía queda definida por la posición de los perfiles de rueda y carril. Para disponer estos perfiles dentro del plano  $\tilde{\mathbf{x}} - \tilde{\mathbf{y}}$ , se toma como origen de referencia la posición del eje en la vía  $T$  que coincide con el centro de masas del eje  $G$  cuando el eje está centrado (Figura 2.9):

- Como origen del perfil de la rueda se toma el punto nominal de contacto (situado a 70 mm de su cara interna). Dentro del plano transversal a la vía, este punto se coloca por debajo del centro de masas del eje a una distancia  $r_o$  (radio nominal de la rueda) y en sentido transversal  $e_o$  (semi-distancia transversal entre puntos de contacto).
- Para colocar el perfil del carril en su posición nominal, en primer lugar se practica una rotación igual al ángulo de montaje sobre la traviesa. El perfil rotado se coloca a una distancia transversal respecto al eje de la vía igual al semi-ancho de vía  $a$ , medido 14 mm por debajo de la cabeza del carril. A su vez, se coloca a una distancia igual al radio nominal de la rueda  $r_o$  por debajo del eje de la vía, de tal forma que quede tangente con el perfil de la rueda.



**Figura 2.9.** Geometría transversal de la vía.

Para el trabajo con perfiles desgastados, el perfil de la rueda se coloca de la misma forma, teniendo en cuenta el efecto del desgaste sobre el radio nominal de la rueda. Sobre el carril, el desgaste en su cara interna produce un sobreecho equivalente (que puede llegar a ser del orden de mm). Este desgaste se debe tener en cuenta para situar el perfil del carril desgastado sobre el plano transversal a la vía. Dentro del Cap. 4, en las Figuras 4.44 y 4.45, se muestran perfiles de rueda y carril nuevos junto a perfiles desgastados, respectivamente. El efecto del desgaste sobre la geometría de los perfiles provoca una situación diferente de los puntos de

contacto y orientación de las fuerzas de interacción, lo que condiciona el comportamiento dinámico del eje en vía.

### 2.3.3. Soluciones propuestas para resolver el problema geométrico

En la bibliografía se presentan diversos modelos para abordar la resolución del problema geométrico de contacto. Se van a comentar dos de ellos: en primer lugar el modelo de Shabana y en segundo lugar el modelo de Santamaría-Vadillo-Gómez.

#### a. Modelo geométrico de Shabana

El procedimiento se describe en Shabana *et al.* [95] y posteriormente en [97] como un modelo de contacto rueda-carril aplicado a la simulación dinámica.

Se trata de un modelo de resolución del problema de contacto rueda-carril donde se propone un procedimiento para resolver el problema geométrico de contacto. Se utiliza un enfoque de *contacto elástico*. Tras la resolución del problema geométrico, el problema normal de contacto se resuelve por la teoría de Hertz (ver apartado 2.4.2). En este apartado se va a describir el modelo de resolución del problema geométrico.

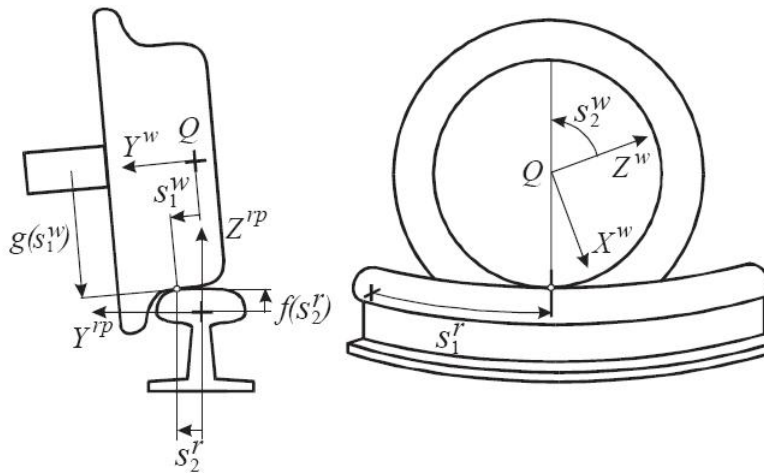
Para describir la geometría del contacto con el carril, se utiliza un conjunto de cuatro parámetros, que son:

$$\{s_1^r, s_2^r, s_1^w, s_2^w\}^T \quad (2.14)$$

Estos cuatro parámetros se utilizan para definir la geometría de las superficies de la rueda y del carril (Figura 2.10). Estas superficies se obtienen a partir de los perfiles de rueda y carril, suponiendo una extrusión del perfil del carril a lo largo del eje  $\tilde{x}$  y una revolución del perfil de la rueda alrededor del eje  $\bar{y}$ .

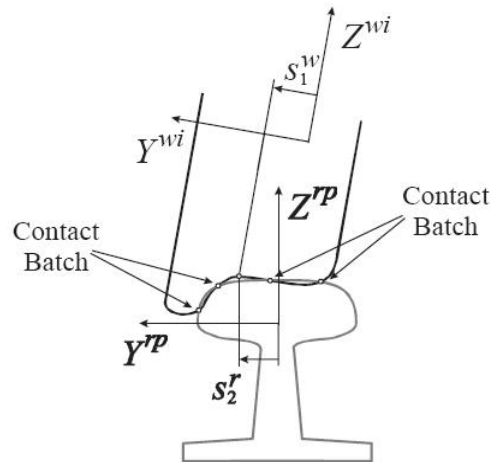
- Para el carril, su perfil se obtiene mediante la función  $f(x)$  y el parámetro  $s_2^r$ . De esta forma, el perfil del carril queda definido mediante el par de puntos  $(s_2^r, f(s_2^r))$ . Se utiliza el parámetro  $s_1^r$  para expresar la longitud del arco trazado por el eje en el circuito, según la Figura 2.10. Por tanto, con el conjunto de parámetros  $(s_1^r, s_2^r)$  define la superficie del carril.

- Por otra parte, el perfil de la rueda se define mediante la función  $g(x)$  y el parámetro  $s_1^w$ . Un punto genérico del perfil de la rueda es  $(s_1^w, g(s_1^w))$ . El parámetro  $s_2^w$  define la revolución del perfil alrededor del eje principal  $\bar{y}$ , por lo que la superficie de la rueda queda definida mediante los dos parámetros  $(s_1^w, s_2^w)$ .



**Figura 2.10.** Parámetros geométricos usados por Shabana para definir la geometría del contacto. Extraído de [95].

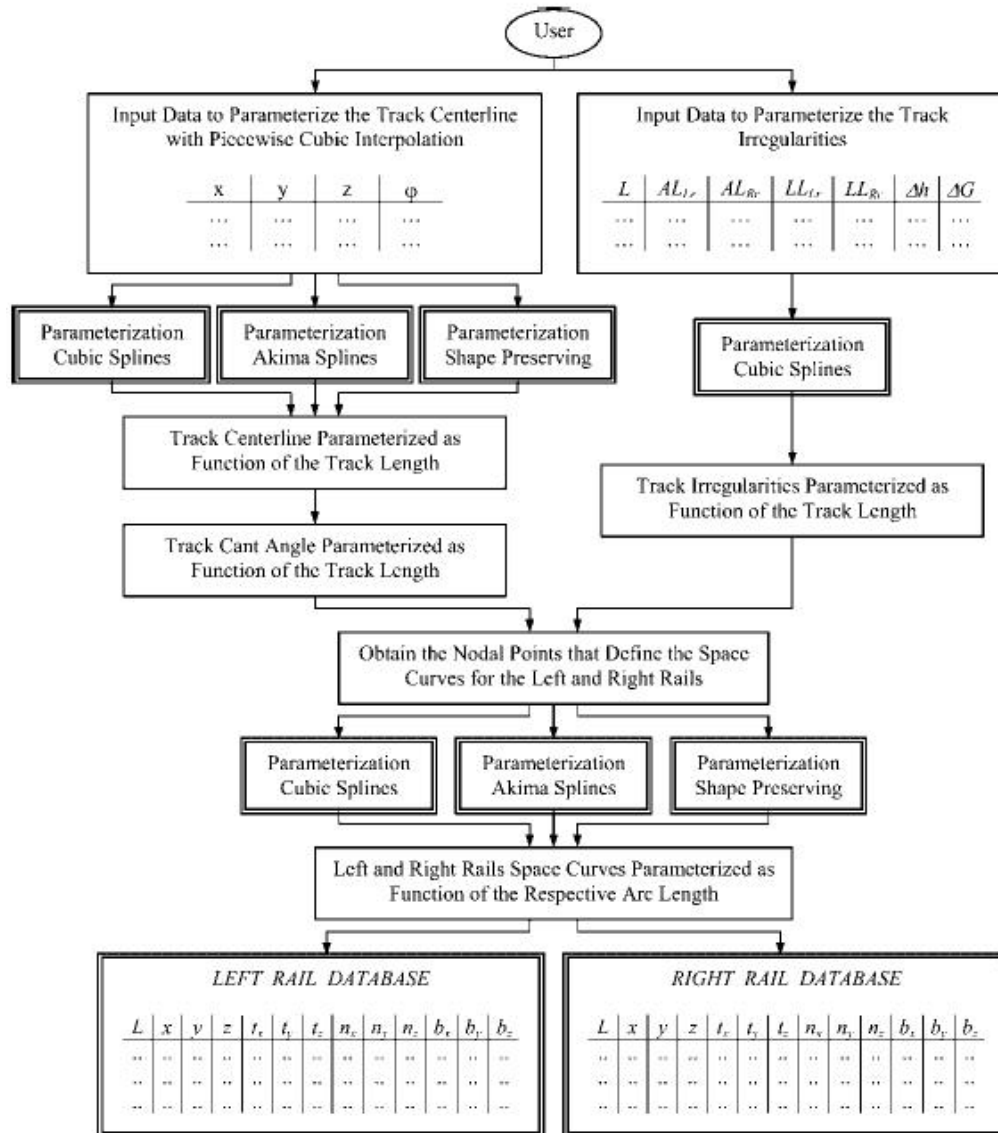
Una vez definida la geometría del contacto, se usa un método *basado en la interpenetración virtual* entre perfiles para encontrar las áreas de contacto. Según el procedimiento descrito en [95], se obtiene la distancia entre pares de puntos de la rueda y del carril para determinar los puntos de contacto. Los puntos del carril y de la rueda con valores de interpenetración no nulos se agrupan en *lotes de contacto* que darán lugar a las distintas áreas de contacto (Figura 2.11). El número de *lotes de contacto* para cada combinación de rueda y carril es una variable, aunque en [95] está limitado a un máximo de dos.



**Figura 2.11.** Obtención de las áreas de contacto entre rueda y carril a partir de *lotes de contacto* (*contact batch*). Extraído de [95].

Por otra parte Pombo *et al.* [84-85] utilizan un modelo de contacto geométrico basado en el modelo de Shabana. La aplicación del modelo de contacto también es la simulación dinámica. En este trabajo se emplean splines cúbicos para expresar las funciones  $f(x)$  y  $g(x)$  que definen los perfiles del carril y de la rueda, respectivamente.

Además, debido a que la resolución del problema geométrico es un procedimiento computacionalmente costoso, se propone realizar un preproceso del problema geométrico de contacto que permite reducir tiempo de cálculo durante la simulación dinámica. De esta forma, se resuelve el problema geométrico de contacto para distintos valores de las coordenadas que expresan la posición relativa de la rueda con respecto al carril y para distintos valores de irregularidades en la vía. Estos resultados se presentan en tablas (Figura 2.12), las cuales son accesibles durante el proceso de simulación dinámica. Según este procedimiento, la resolución del problema geométrico se realiza fuera del proceso de integración.



**Figura 2.12.** Esquema del preproceso realizado para calcular las tablas que permitan resolver el problema geométrico de contacto. Extraído de [84].

### b. Modelo de Santamaría-Vadillo-Gómez

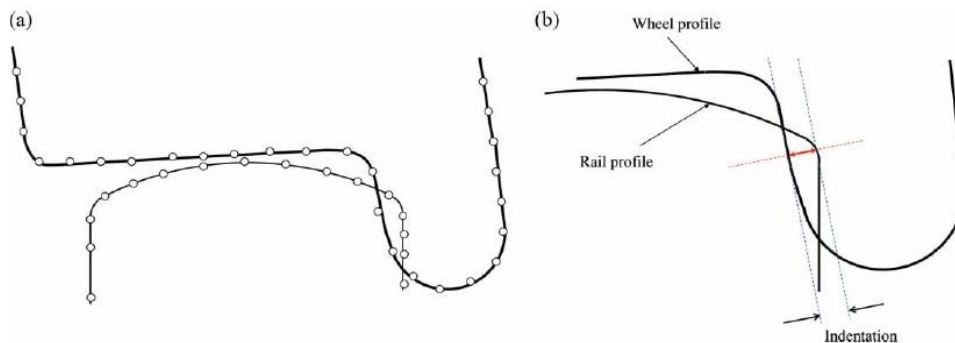
Este procedimiento se describe en Santamaría *et al.* [92] para su aplicación a la simulación dinámica y posteriormente en Santamaría *et al.* [93] para la evaluación de desgaste en los perfiles de rueda y carril.



Al igual que el modelo de Shabana, se trata de un procedimiento completo de resolución del contacto rueda-carril, donde se propone un modelo para el problema geométrico. Utiliza un enfoque de *contacto elástico*. Tras la resolución del problema geométrico, se aborda el problema normal con la teoría de Hertz (ver apartado 2.4.2). En este apartado se va a describir el modelo de resolución del problema geométrico.

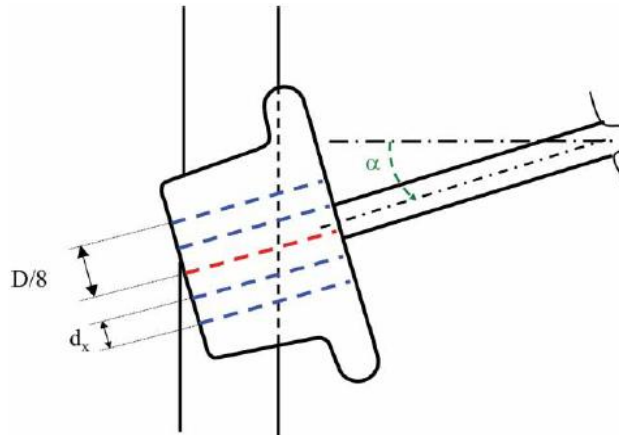
Para la modelización de las superficies en el contacto se parte de la definición de los perfiles de la rueda y del carril. Como en el modelo de Shabana, la superficie de la rueda se define por revolución de su perfil, y la del carril, por extrusión. Para la definición de los perfiles se usa una discretización con puntos separados entre 0,5 y 3 mm y splines cúbicos para interpolar entre estos puntos (Figura 2.13-(a)).

A partir de la definición de los perfiles y de la generación de las superficies en el contacto mediante estos perfiles, para un problema bidimensional se pueden obtener fácilmente las áreas de interpenetración entre estos dos cuerpos y el valor correspondiente de indentación (Figura 2.13-(b)). El valor de indentación se usará para calcular la fuerza normal.



**Figura 2.13.** (a) Discretización de los perfiles de rueda y carril. (b) Indentación del área de contacto. Extraído de [92].

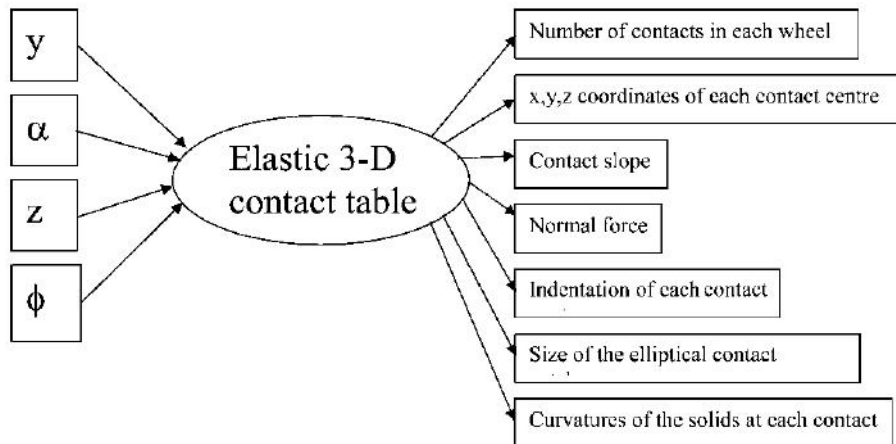
Con el fin de resolver el problema geométrico de contacto entre rueda y carril con un coste computacional bajo, se reduce el problema tridimensional a una serie de problemas bidimensionales. Para ello se toman distintas secciones de la rueda, definidas por planos paralelos al plano  $\bar{y} - \bar{z}$  (en el sistema de referencia del eje) y se busca la intersección de estos perfiles con el perfil del carril. Según la Figura 2.14 se definen planos verticales separados una distancia  $d_x$  y hasta una separación longitudinal máxima del plano central igual a  $D/8$  según el sistema de referencia del eje, siendo  $D$  el diámetro nominal de la rueda.



**Figura 2.14.** Procedimiento empleado para buscar los puntos de contacto entre la rueda y el carril. Extraído de [92].

Para reducir el coste computacional empleado durante el cálculo de la simulación dinámica, se propone el precalcular el problema geométrico para diversas posiciones relativas del eje con respecto a la vía. Para ello se crea una tabla de contacto elástico 3D (Figura 2.15). La posición relativa del eje respecto a la vía en [92] se expresa mediante el mismo conjunto de coordenadas de (2.11), pero siendo  $y$  el desplazamiento lateral,  $\alpha$  el ángulo de lazo (giro alrededor del eje  $Z$ ),  $z$  el desplazamiento vertical y  $\phi$  el ángulo de balanceo (giro alrededor del eje  $X$ ).

Para generar la tabla de forma eficiente se hace uso de las simetrías que aparecen en la posición relativa del eje y del carril. Respecto a los valores que adoptan las coordenadas  $y$ ,  $\alpha$ ,  $z$ ,  $\phi$  para generar la tabla, se parte de la solución de la posición relativa obtenida suponiendo contacto rígido (donde el conjunto de coordenadas es dependiente). De esta forma se reduce en gran medida el número de combinaciones que se deben precalcular en la tabla de contacto elástico 3D.



**Figura 2.15.** Tabla creada con el precálculo del problema geométrico de contacto. Extraído de [92].

Hasta aquí se han descrito los modelos de Shabana y Santamaría-Vadillo-Gómez para la resolución del problema geométrico de contacto.

## 2.4. Problema normal

### 2.4.1. Introducción

En este apartado se tratan los aspectos relacionados con la resolución del problema normal de contacto. Como ya se ha visto en la sección 2.2.3, debido a la hipótesis de *cuasi-identidad elástica*, para la obtención de las tensiones en el contacto se puede abordar en primer lugar el problema normal y, en segundo lugar, el problema tangencial (este problema se tratará en el apartado 2.5).

Se van a describir una serie de modelos utilizados para resolver el problema normal de contacto en el ámbito del contacto rueda-carril. Según la distinción realizada en la sección 2.2.4 a partir de los dos enfoques distintos en el análisis del contacto rueda-carril, en esta Tesis se propone una clasificación de las teorías de contacto normal en dos familias: los *modelos de punto teórico de contacto* y los *modelos basados en la interpenetración virtual* entre superficies.

A continuación se describirán distintos modelos de resolución del problema de contacto normal. En primer lugar se describirán los modelos de *punto teórico de contacto*, para pasar después a los modelos *basados en la interpenetración virtual entre superficies*.

### 2.4.2. Modelos de punto teórico de contacto

Según la definición propuesta en esta Tesis, los modelos para resolver el problema normal utilizando *punto teórico de contacto* son aquéllos que estiman las características del área de contacto a partir del punto teórico de contacto. Dentro de este grupo se va a describir la teoría de Hertz.

#### a. Teoría de Hertz

En este punto se describe el planteamiento de teoría de Hertz [35, 41]. Posteriormente se presentará la solución para un caso bidimensional y para el caso general.

La teoría de Hertz se trata del primer análisis satisfactorio de las tensiones en el contacto de dos sólidos elásticos. Ésta se basa en cuatro hipótesis principales [2, 41]:

- Las superficies de los cuerpos en la zona de contacto son *suaves*, es decir, sin presencia de rugosidad, y no conformes.
- Cada cuerpo en el contacto se puede modelizar como un semiespacio elástico. Esta hipótesis requiere que las dimensiones del área de contacto sean pequeñas en relación con los radios de curvatura de los cuerpos. Además, según esta hipótesis se asume un comportamiento elástico lineal.
- En cuanto a la geometría de las superficies en el contacto, la distancia entre los perfiles indeformados de ambos cuerpos en la proximidad del punto de contacto se puede aproximar por un paraboloides.
- El contacto entre superficies se realiza sin rozamiento, por tanto sólo se transmite una presión normal.

Según estas hipótesis el área de contacto es una elipse y la distribución de tensiones normales un elipsoide.

La superficie de cada uno de los cuerpos se considera *suave* tanto a escala macroscópica como a escala microscópica. En la escala microscópica implica la ausencia de pequeñas irregularidades en la superficie (rugosidad) que daría lugar a un contacto fragmentado o variaciones elevadas en la presión de contacto. A escala macroscópica los perfiles de las superficies en el contacto son continuos hasta su segunda derivada en la zona cercana al punto de contacto.

Cuando dos cuerpos de geometrías *suaves* y no conformes se ponen en contacto, inicialmente se tocan en un punto o a lo largo de una línea. Bajo la acción de una pequeña carga, éstos se deforman en la cercanía del contacto y se crea un

área de contacto de dimensiones finitas y pequeñas en comparación con las dimensiones de los dos cuerpos.

Se toma como origen del sistema de referencia asociado al contacto  $\mathbf{x}_c$ - $\mathbf{y}_c$ - $\mathbf{z}_c$ , el primer punto de contacto, donde se define el plano tangente a las dos superficies. Los ejes  $\mathbf{y}_c$ - $\mathbf{z}_c$  definen el plano tangente, mientras que el eje  $\mathbf{z}_c$  señala la dirección normal. El sentido de  $\mathbf{z}_c$  que se toma como positivo es el dado por el vector normal del cuerpo colocado debajo.

En la situación donde se produce el primer contacto, la superficie de cada uno de los cuerpos se puede describir mediante una función cuadrática, de tal forma que la distancia entre las superficies indeformadas se puede expresar como:

$$h(x, y) = C_1 x^2 + C_2 y^2 + C_3 xy \quad (2.15)$$

Mediante una elección adecuada de los ejes, el coeficiente  $C_3$  se puede hacer cero, con lo que queda:

$$h(x, y) = Ax^2 + By^2 = \frac{1}{2R'}x^2 + \frac{1}{2R''}y^2 \quad (2.16)$$

donde  $A$  y  $B$  son constantes positivas que tienen el valor de las curvaturas combinadas y  $R'$  y  $R''$  los radios de curvatura relativos a éstas.

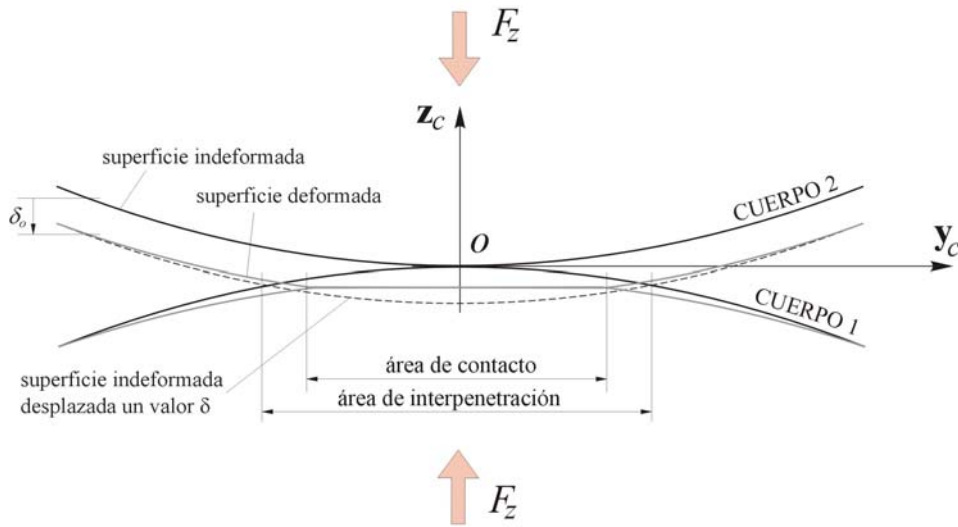
Considerando la situación en la que se aplica una fuerza normal  $F_z$ , aparece un acercamiento entre los dos cuerpos de valor  $\delta_o$ . Si las superficies de los cuerpos no se deformasen, aparecería una interpenetración entre sus perfiles tal como se muestra en la línea de puntos de la Figura 2.16. Debido a la presión en el contacto, cada punto de la superficie de cada cuerpo se desplaza paralelo al eje  $\mathbf{z}_c$  una cantidad  $u_{z1}$ ,  $u_{z2}$ , respectivamente. En este caso, para un punto que pertenezca al área de contacto, se puede escribir la relación:

$$u_{z1} + u_{z2} + h = \delta_o \quad (2.17)$$

Por otra parte, si los puntos se encuentran fuera del área de contacto, se cumple:

$$u_{z1} + u_{z2} + h > \delta_o \quad (2.18)$$

Para resolver el problema es necesario encontrar la distribución de presiones normales transmitidas entre los dos cuerpos en la superficie de contacto, de tal forma que los desplazamientos elásticos resultantes cumplan la ecuación (2.17) dentro del área de contacto y (2.18) fuera de ésta.



**Figura 2.16.** Representación esquemática del contacto entre dos superficies.

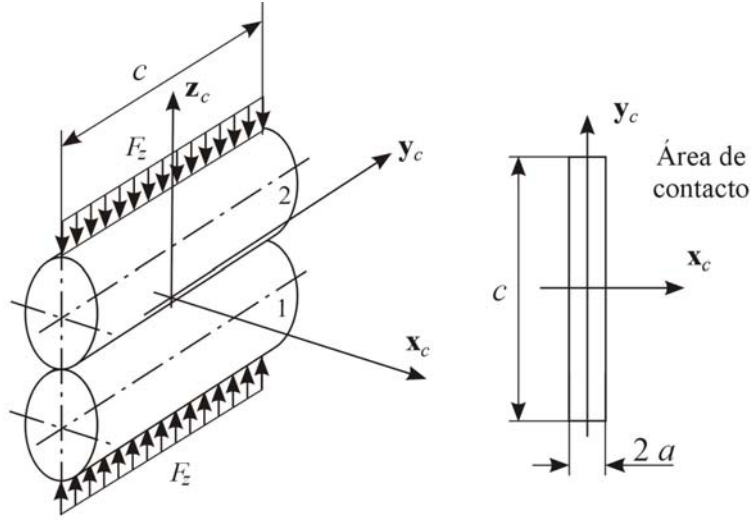
Se van a estudiar dos casos con distintas geometrías: en primer lugar, el contacto entre dos cilindros de ejes paralelos que da lugar a un modelo bidimensional, y en segundo lugar, el caso general de contacto entre dos paraboloides, que constituye un caso tridimensional.

El primer caso que se va a describir es el contacto bidimensional que aparece entre dos **cilindros de ejes paralelos**, tal como aparece en la Figura 2.17, donde  $c$  es la longitud de los cilindros y  $R_1, R_2$  son sus radios, respectivamente.

Para la geometría considerada, la distribución de presiones normales que da lugar a los desplazamientos que satisfacen la ecuación (2.17), según la teoría de Hertz [41], es:

$$p_z(x) = p_{z_0} \sqrt{1 - \left(\frac{x}{a}\right)^2} \quad (2.19)$$

para  $x < a$ , donde  $a$  es la semilongitud del área de contacto,  $x$  es la posición longitudinal medida con respecto al origen del sistema de referencia en  $O$  y  $p_{z_0}$  es el valor máximo de presión.



**Figura 2.17.** Contacto entre dos cilindros de ejes paralelos.

El área de contacto que aparece es un rectángulo paralelo al eje  $y_c$  de dimensiones  $2a$  en sentido longitudinal y  $c$  en transversal. Integrando la distribución de presiones en el área de contacto se obtiene la expresión de la fuerza total:

$$F_z = \int_{-c/2}^{c/2} \int_{-a}^a p_z(x) dx dy = \frac{\pi p_{z_0} a c}{2} \quad (2.20)$$

Por otra parte, aplicando la teoría de semiespacio elástico y con las condiciones de contorno correspondientes, se puede resolver la ecuación (2.17) y obtener las dimensiones del área de contacto [41]. De esta forma, la semilongitud de área de contacto se calcula como:

$$a^2 = \frac{4 F_z R^*}{\pi c E^*} \quad (2.21)$$

siendo  $R^*$  la curvatura combinada de los dos cilindros y  $E^*$  el módulo de Young combinado de los materiales en el contacto, calculados según:

$$\frac{1}{R^*} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \quad (2.22)$$

$$\frac{1}{E^*} = \frac{1 - \sigma_1^2}{E_1} + \frac{1 - \sigma_2^2}{E_2} \quad (2.23)$$

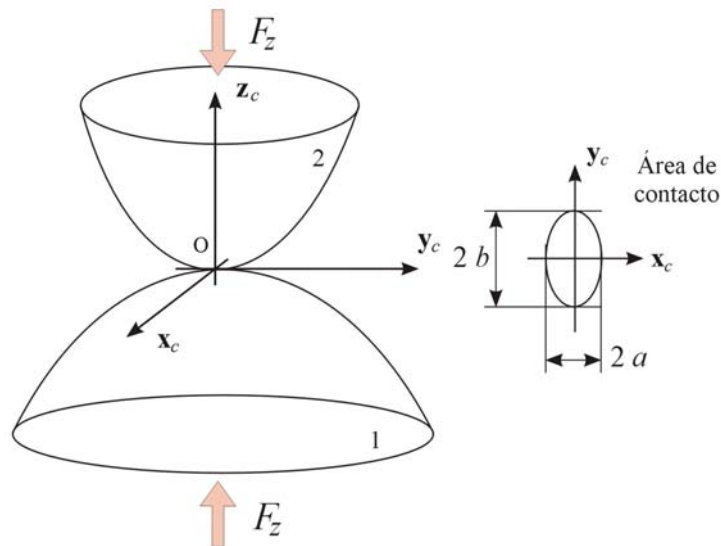
donde  $E_1$ ,  $E_2$  y  $\sigma_1$ ,  $\sigma_2$  son los módulos de Young y los coeficientes de Poisson de los dos materiales en el contacto, respectivamente.

Combinando las ecuaciones (2.20) y (2.21) y despejando el valor de  $p_{z_o}$ , se puede obtener el valor de la presión máxima en función de la fuerza aplicada y de las características geométricas y resistentes de los cuerpos en el contacto:

$$p_{z_o}^2 = \frac{F_z E^*}{\pi c R^*} \quad (2.24)$$

En segundo lugar, una vez analizado el contacto entre dos cilindros paralelos, se tratará el **contacto entre dos paraboloides** (Figura 2.18). Esta geometría constituye el caso general de contacto que se puede describir por la teoría de Hertz.

La geometría de los cuerpos se define a partir de los radios de curvatura de los cuerpos en el punto de contacto, siendo  $R_{1x}$ ,  $R_{1y}$  los radios de curvatura del cuerpo 1 en dirección longitudinal y transversal, respectivamente, y  $R_{2x}$ ,  $R_{2y}$  los radios correspondientes al cuerpo 2, según las mismas direcciones.



**Figura 2.18.** Contacto entre dos paraboloides (caso general).

Los valores de curvaturas combinadas  $A$  y  $B$  se pueden obtener como:

$$A = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{R_{1x}} + \frac{1}{R_{2x}} \right) \quad (2.25)$$

$$B = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{R_{1y}} + \frac{1}{R_{2y}} \right)$$



siendo  $A$  el valor de la curvatura longitudinal y  $B$  el valor de la curvatura transversal. Si el cuerpo 1 es el carril y el cuerpo 2 la rueda,  $R_{1x}$  es el radio longitudinal del carril ( $1/R_{1x} = 0$ ),  $R_{2x}$  es el radio de rodadura de la rueda ( $R_{2x} = R$ ),  $R_{1y}$  es el radio correspondiente a la curvatura transversal del carril y  $R_{2y}$  es el radio correspondiente a la curvatura transversal de la rueda.

En tal caso, el área de contacto es una elipse cuyos semiejes son  $a$  y  $b$ , en sentido longitudinal y transversal, respectivamente y la distribución de presiones normales es semielíptica, según:

$$p_z(x, y) = p_{z_0} \sqrt{1 - \left(\frac{x}{a}\right)^2 - \left(\frac{y}{b}\right)^2} \quad (2.26)$$

siendo  $p_{z_0}$  el valor máximo de presión.

Integrando la expresión (2.26) dentro del área de contacto, se obtiene el valor de la fuerza normal  $F_z$ :

$$F_z = \int_{-b}^b \int_{-\bar{a}(y)}^{\bar{a}(y)} p_{z_0} \sqrt{1 - \left(\frac{x}{a}\right)^2 - \left(\frac{y}{b}\right)^2} dx dy \quad (2.27)$$

con  $\bar{a}(y) = a \sqrt{1 - (y/b)^2}$ , cuyo resultado es:

$$F_z = \frac{2}{3} \pi a b p_{z_0} \quad (2.28)$$

A partir de la ecuación anterior, se puede obtener el valor de la presión máxima en función de las dimensiones de la elipse y de la fuerza normal:

$$p_{z_0} = \frac{3F_z}{2\pi a b} \quad (2.29)$$

Para obtener las dimensiones de la elipse se deben resolver unas integrales elípticas completas [41]. Estos resultados se encuentran precalculados y se expresan según las fórmulas [9, 32]:

$$a = m \left( \frac{3}{2} F_z \frac{1 - \sigma^2}{E} \frac{1}{A + B} \right)^{\frac{1}{3}} \quad (2.30)$$

$$b = n \left( \frac{3}{2} F_z \frac{1 - \sigma^2}{E} \frac{1}{A + B} \right)^{\frac{1}{3}}$$

siendo  $m$  y  $n$  valores que se obtienen en tablas a partir de la relación entre las curvaturas  $A$  y  $B$ ,  $E$  el módulo de Young de los materiales y  $\sigma$  el coeficiente de Poisson. En caso de que los cuerpos tengan distintas características mecánicas, se empleará la relación [32]:

$$\frac{1-\sigma^2}{E} = \frac{1}{2} \left( \frac{1-\sigma_1^2}{E_1} + \frac{1-\sigma_2^2}{E_2} \right) \quad (2.31)$$

También es posible hallar el valor de la indentación  $\delta_o$  que aparece entre las superficies en el contacto como consecuencia de la fuerza normal  $F_z$  a partir de la siguiente relación [9, 32]:

$$\delta_o = r \left( \left( \frac{3}{2} F_z \frac{1-\sigma^2}{E} \right)^2 (A+B) \right)^{\frac{1}{3}} \quad (2.32)$$

donde el parámetro  $r$  se obtiene en tablas a partir de los valores de las curvaturas  $A$  y  $B$ .

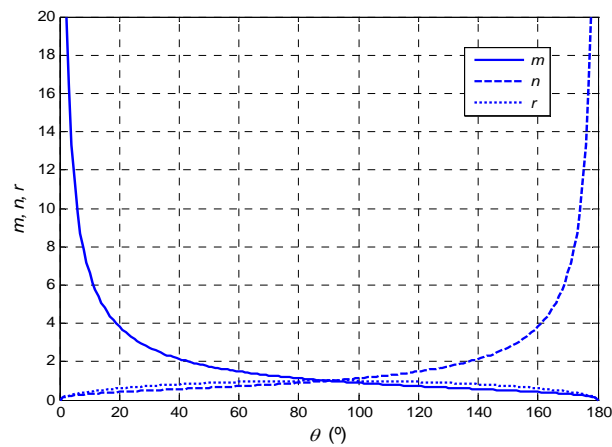
Para hallar los valores de  $m$ ,  $n$  y  $r$ , se obtiene el valor del ángulo  $\theta$  en grados que permite interpolar en la Tabla 2.1.

$$\cos \theta = \frac{|B-A|}{B+A} \quad (2.33)$$

**Tabla 2.1.** Coeficientes de Hertz para  $0 \leq \theta \leq 180^\circ$ . Extraído de [8].

$\theta^\circ$	0	5	10	30	60	90	120	150	170	175	180
$\lambda = A/B$	0	0.0019	0.0077	0.0717	0.3333	1	3.0	13.93	130.6	524.6	$\infty$
$n/m$	0	0.0212	0.0470	0.1806	0.4826	1	2.0720	5.5380	21.26	47.20	$\infty$
$m$	$\infty$	11.238	6.612	2.731	1.486	1	0.7171	0.4931	0.311	0.2381	0
$r$	0	0.2969	0.4280	0.7263	0.9376	1	0.9376	0.7263	0.4280	0.2969	0

La Figura 2.19 muestra la evolución de los parámetros  $m$ ,  $n$  y  $r$  en función del ángulo  $\theta$ . Este gráfico es simétrico con respecto a  $\theta = 90^\circ$ . Por tanto, la información de la Tabla 2.1 se puede presentar sólo para valores de 0 a  $90^\circ$  y cambiando los parámetros  $m$  por  $n$  y viceversa.



**Figura 2.19.** Valores de los parámetros  $m$ ,  $n$  y  $r$  en función del ángulo  $\theta$ .

Una vez descrita la teoría de Hertz, que constituye un modelo de contacto normal de *punto teórico de contacto*, se pasarán a describir los modelos *basados en la interpenetración virtual* entre superficies.

### 2.4.3. Modelos basados en la interpenetración virtual entre superficies

Según la clasificación propuesta en esta Tesis, los modelos de contacto normal *basados en la interpenetración virtual* estiman el área de contacto a partir del área de interpenetración que aparece entre las superficies de la rueda y carril. Esta interpenetración tiene lugar como consecuencia del movimiento relativo de las superficies que se consideran indeformables y con la capacidad de solaparse.

Se van a describir dos modelos presentes en la bibliografía: en primer lugar el modelo de Kik y Piotrowski, y en segundo lugar, el modelo de Ayasse y Chollet.

#### a. Modelo de Kik-Piotrowski

El modelo de Kik-Piotrowski se describe en [48] y posteriormente en [76-77]. Se trata de un modelo para resolver el problema normal y el problema tangencial de contacto. En este apartado se va a describir con detalle el procedimiento de resolución del problema normal porque se utilizará más adelante en el Cap. 4. El problema tangencial se describirá en el apartado 2.5.

Este modelo se trata de una teoría *cuasi-herciana* ya que asume la distribución de presiones de Hertz en la dirección longitudinal. En cambio, en

dirección transversal la geometría de los perfiles de rueda y carril no tiene una curvatura constante, por lo que las hipótesis de Hertz no son válidas. Este tipo de teorías en [76] se conocen como *semi-hercianas*.

**Planteamiento del problema elástico:** Para la definición de la geometría en el contacto se asume que la rueda es un cuerpo de revolución de radio  $R$  y la superficie de rodadura del carril es cilíndrica. Para el cálculo de los desplazamientos debidos a deformaciones elásticas se desprecia la forma real de los cuerpos y se reemplazan por semi-espacios elásticos. Esta simplificación permite el uso de las funciones de influencia de Boussinesq para el cálculo de los desplazamientos debidos a deformaciones elásticas [45].

Se toma como punto geométrico de contacto, el punto en que se tocan la rueda y el carril sin transmitir ninguna carga. En este punto se define el origen del sistema de referencia asociado al contacto, donde los ejes  $\mathbf{x}_c$ - $\mathbf{y}_c$  definen el plano tangencial al contacto y  $\mathbf{z}_c$  la dirección normal, definida según el vector normal al carril. El eje  $\mathbf{x}_c$  define la dirección longitudinal y el sentido de avance e  $\mathbf{y}_c$  la dirección transversal.

Se definen los perfiles de rueda y carril como la sección de las superficies en contacto por el plano  $\mathbf{y}_c$ - $\mathbf{z}_c$  ( $x = 0$ ). En esta sección la separación entre los perfiles indeformados de la rueda y del carril se obtiene como:

$$f(y) = f_w(y) + f_r(y) \quad (2.34)$$

siendo  $f_w(y)$  y  $f_r(y)$  los perfiles de la rueda y carril.

Para cualquier otra sección ( $x \neq 0$ ), la separación entre perfiles indeformados se calcula como:

$$h(x, y) = f(y) + \frac{x^2}{2R} \quad (2.35)$$

siendo  $R$  el valor del radio de rodadura.

Por tanto, para un punto que pertenece al área de contacto tomando la relación (2.17) y asumiendo el principio de cuasi-identidad elástica,  $u_{z1} = u_{z2} = u_z$  se puede escribir:

$$2u_z(x, y) + h(x, y) = \delta_o \quad (2.36)$$

donde el valor de la deformación elástica se puede calcular a partir de la ecuación (2.10.b):

$$u_z(x, y) = \frac{1 - \sigma^2}{\pi E} \iint_{\Omega} \frac{p_z(\xi, \eta)}{\sqrt{(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2}} d\xi d\eta \quad (2.37)$$

Particularizando la ecuación (2.36) para el punto geométrico de contacto se tiene:

$$\delta_o = 2u_z(0, 0) = 2u_{z_o} \quad (2.38)$$

**Estimación del área de contacto:** El método parte de la solución del problema de interpenetración entre rueda y carril. Tomando el valor de indentación máxima  $\delta_o$ , se define un nuevo valor minorado  $K \delta_o$  y se calcula la nueva área de interpenetración correspondiente. Esta área será una estimación del área de contacto.

A partir de la distancia entre perfiles indeformados de la fórmula (2.34) se puede definir la función de interpenetración como:

$$g(y) = \begin{cases} K \delta_o - f(y) & \text{si } f(y) \leq K \delta_o \\ 0 & \text{si } f(y) > K \delta_o \end{cases} \quad (2.39)$$

Y tomando este valor de interpenetración corregida, se pueden calcular los bordes del área de contacto, según:

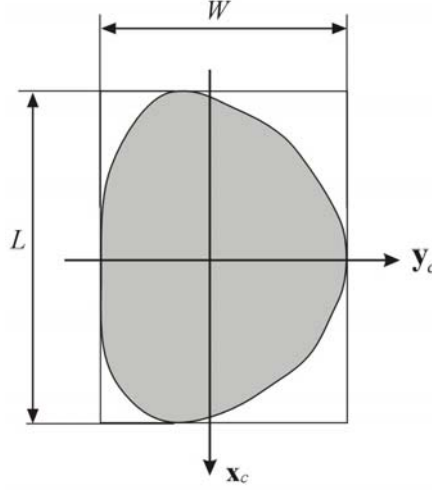
$$x_l(y) = -x_r(y) \approx \sqrt{2Rg(y)} \quad (2.40)$$

donde  $x_l(y)$  representa el borde anterior del área de contacto (del inglés *leading*) y  $x_r(y)$  el borde posterior (del inglés *trailing*);  $R$  es el radio de rodadura. Según la fórmula anterior se supone que el área de contacto es simétrica con respecto al eje  $y_c$ .

**Corrección de forma del área de contacto:** Según este procedimiento, el área de contacto obtenida sólo es válida para áreas circulares. Para cualquier otra forma, será necesario realizar una corrección que tenga en cuenta la deformación de las superficies en las cercanías del contacto [76-77]. Para aplicar esta corrección de forma se definen unas curvaturas equivalentes a partir de las dimensiones del área de contacto y de la indentación máxima y se aplica la teoría de Hertz (Tabla 2.1). Piotrowski y Kik [77] proponen el uso de las tablas de Hertz definidas para  $\theta$  que varía de 0 a 90°. Por tanto, las relaciones entre curvaturas o entre parámetros se definirán de tal modo que el rango de trabajo quede dentro de la tabla.

Los valores de las curvaturas equivalentes se obtienen a partir del largo  $L$  y el ancho  $W$  del área de contacto, tal como indica la Figura 2.20, y del valor de indentación máxima corregida  $K \delta_o$ , según:

$$A_{eq} = \frac{4K\delta_o}{L^2} \quad B_{eq} = \frac{4K\delta_o}{W^2} \quad (2.41)$$



**Figura 2.20.** Dimensiones del área de contacto:  $L$  largo,  $W$  ancho.

A partir de los valores anteriores, la relación entre curvaturas  $\lambda$  se define como:

$$\lambda = \begin{cases} (W/L)^2 & \text{si } (W/L) \leq 1 \\ (L/W)^2 & \text{si } (W/L) > 1 \end{cases} \quad (2.42)$$

Utilizando este valor se puede obtener el factor de corrección  $\beta$ . Para ello, se define el factor  $\beta_o$  como la relación  $m/n$  o bien utilizando la fórmula empírica obtenida a partir de la Tabla 2.1 (tomando los valores de  $\theta$  de 0 a 90°):

$$\beta_o = \frac{1}{0,5837 \lambda - 0,1053 \lambda^2 + 0,5184 \sqrt{\lambda}} \quad (2.43)$$

y el valor de  $\beta$  se obtiene como:

$$\beta = \begin{cases} \beta_o & \text{si } (W/L) \leq 1 \\ 1/\beta_o & \text{si } (W/L) > 1 \end{cases} \quad (2.44)$$

Para realizar la corrección de forma, se usan estas dos condiciones:

$$L_c/W_c = \beta \quad L_c W_c = LW \quad (2.45)$$

y resolviendo se obtiene:

$$\begin{aligned} L_c &= \sqrt{\beta LW} \\ W_c &= \sqrt{LW/\beta} \end{aligned} \quad (2.46)$$

Definiendo  $\Delta W = W_c - W$ , si  $\Delta W$  es negativo, el área se contrae en sentido transversal; en caso contrario, se expande. En cualquier caso, la superficie del área de contacto se mantiene la misma.

La separación entre perfiles indeformados corregida y la función de interpenetración corregida se definen de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} f_c(y) &= f(y_1) \\ g_c(y) &= g(y_1) \end{aligned} \quad (2.47)$$

siendo:

$$y_1 = y - \frac{W_c - W}{W}(y_o - y) \quad (2.48)$$

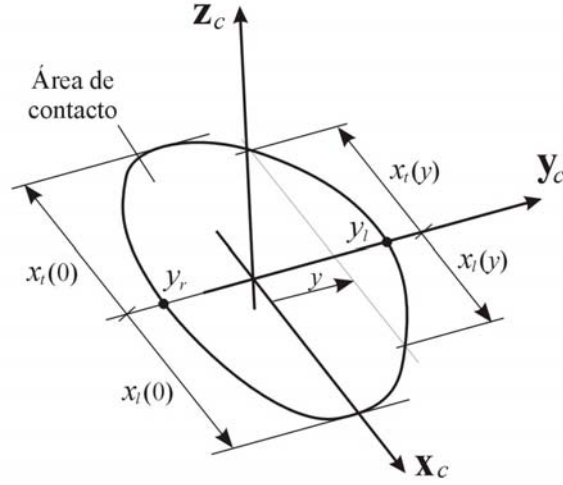
donde  $y_o$  es la coordenada lateral del punto geométrico de contacto.

El radio de rodadura  $R$  también se debe corregir, siendo:

$$R_c = \frac{L_c^2}{8K\delta_o} \quad (2.49)$$

valor que se usará en lugar de  $R$  en las fórmulas (2.35), para calcular la separación entre superficies, y (2.40), para obtener las dimensiones del área de contacto corregida.

Una vez obtenida el área de contacto a partir del área de interpenetración y realizada la correspondiente corrección de forma se obtiene un área de contacto corregida como la que aparece esquemáticamente en la Figura 2.21.



**Figura 2.21.** Área de contacto obtenida por el método de Kik-Piotrowski.  $x_l(y)$  denota el borde anterior del área de contacto y  $x_r(y)$ , el posterior.

**Distribución de presiones normales y fuerza total:** Asumiendo la distribución de presiones *cuasi-herciana*, de tal forma que en la dirección de rodadura la distribución es semi-elíptica, se tiene:

$$p_z(x, y) = \frac{P_{z_0}}{x_l(0)} \sqrt{x_l^2(y) - x^2} \quad (2.50)$$

donde  $p_{z_0}$  es la presión en el punto geométrico de contacto.

La fuerza total se obtiene integrando la fórmula anterior en el área de contacto:

$$F_z = \frac{P_{z_0}}{x_l(0)} \int_{y_r}^{y_l} \int_{-x_l}^{x_l} \sqrt{x_l^2(y) - x^2} dx dy \quad (2.51)$$

siendo  $y_r, y_l$  los límites del área de contacto según la Figura 2.21. El valor de esta integral podría expresarse como:

$$I_1 = \int_{y_r}^{y_l} \int_{-x_l}^{x_l} \sqrt{x_l^2(y) - x^2} dx dy \quad (2.52)$$

Por otra parte, para obtener el valor de la presión en el punto geométrico de contacto, se aplica la ecuación (2.37) en dicho punto:

$$u_z(0,0) = \frac{1-\sigma^2}{\pi E} \frac{P_{z_0}}{x_l(0)} \int_{y_r}^{y_l} \int_{-x_l}^{x_l} \frac{\sqrt{x_l^2(y) - x^2}}{\sqrt{x^2 + y^2}} dx dy \quad (2.53)$$



donde la integral se puede expresar como:

$$I_2 = \int_{y_r}^{y_l} \int_{-x_l}^{x_l} \frac{\sqrt{x_l^2(y) - x^2}}{\sqrt{x^2 + y^2}} dx dy \quad (2.54)$$

Combinando las ecuaciones (2.38), (2.51) y (2.53) y utilizando la definición de las integrales (2.52) y (2.54) se llega a la expresión de la fuerza normal total en función de la indentación máxima  $\delta_o$ :

$$F_z = \frac{\pi E \delta_o}{2(1-\sigma^2)} \frac{I_1}{I_2} \quad (2.55)$$

El modelo de Kik-Piotrowski resuelve el problema normal de contacto según este procedimiento. En el apartado 2.5 se ofrece una descripción del procedimiento de resolución del problema tangencial.

### b. Modelo de Ayasse-Chollet

El modelo de Ayasse-Chollet se describe en [8] y posteriormente en [76]. Se trata de un modelo para resolver el problema normal y el problema tangencial de contacto. Este modelo se ha aplicado en la simulación de un paso por desvíos ferroviarios [94].

En este apartado se va a describir el problema normal. El problema tangencial se describirá brevemente más adelante en el apartado 2.5.

Según la clasificación propuesta en esta Tesis, se trata de un modelo *basado en la interpenetración virtual* entre perfiles. Al igual que el modelo de Kik-Piotrowski este modelo estima el área de contacto a partir del área de interpenetración, para un valor de indentación minorado. Posteriormente, realiza una corrección de forma basada en la teoría de Hertz para compensar la deformación de las superficies en las cercanías del contacto.

Al igual que el modelo anterior, se trata de una teoría *quasi-herciana* [8] o *semi-herciana* según [76]. Del mismo modo que la teoría anterior se asume la distribución de presiones de Hertz en la dirección de rodadura (longitudinal). En dirección transversal, las curvaturas de los perfiles no son constantes, por lo que no se puede aplicar directamente la teoría de Hertz.

**Estimación del área de contacto y corrección de forma:** Para obtener el área de contacto, se siguen dos pasos. En primer lugar se toma  $\delta_o$  como la indentación máxima entre las superficies de la rueda y del carril para una posición dada; posteriormente se estima el área de contacto como el área de interpenetración

correspondiente a una indentación minorada de valor  $K \delta_o$ . En el modelo de Ayasse-Chollet se toma un valor de  $K = 0,5$ .

En segundo lugar se realiza una corrección de forma para tener en cuenta la deformación de las superficies en el contacto. La corrección de forma se basa también en el modelo de Hertz. El procedimiento usado por Ayasse-Chollet es el siguiente: tomando las dimensiones geométricas del área de contacto y el valor de la indentación se pueden calcular unas curvaturas combinadas equivalentes. Se propone una fórmula para corregir la curvatura y calcular a partir de ésta las nuevas dimensiones corregidas.

El área de contacto obtenida por interpenetración se circunscribe por un rectángulo de dimensiones  $2 a_g \cdot 2 b_g$ , en sentido longitudinal y transversal, respectivamente (tal como indica la Figura 2.20, tomando  $L = 2 a_g$  y  $W = 2 b_g$ ). Asumiendo que las curvaturas de los cuerpos en las cercanías del contacto son constantes, se pueden calcular los valores de estas curvaturas a partir de (2.16) para un valor de indentación  $\delta_o$  como:

$$\delta_o = A_{eq} a_g^2 = B_{eq} b_g^2 \quad (2.56)$$

donde  $A_{eq}$  y  $B_{eq}$  son los valores equivalentes de las curvaturas. Estas curvaturas se calculan a partir de la ecuación anterior, conocidas las dimensiones  $a_g$  y  $b_g$ .

Llegado a este punto se puede calcular la relación entre curvaturas  $\lambda$  como:

$$\lambda = \frac{A_{eq}}{B_{eq}} = \left( \frac{b_g}{a_g} \right)^2 \quad (2.57)$$

y tomando la relación de curvaturas, a partir de la Tabla 2.1 se puede obtener la relación  $n/m$ .

La corrección propuesta por Ayasse-Chollet consiste en obtener el valor de la curvatura corregida en sentido longitudinal,  $A_c$ , a partir de la relación:

$$\frac{A_c}{A_{eq}} = \frac{(b_c/a_c)^2}{(b_g/a_g)^2} = \frac{(n/m)^2}{\lambda} \quad (2.58)$$

En este caso se puede redefinir la ecuación (2.56) para el caso de la curvatura corregida, y obtener a partir de ésta el valor de  $a_c$ :

$$\delta_o = A_c a_c^2 = B_{eq} b_g^2 \quad (2.59)$$

Por tanto las dimensiones del área corregida serán, en sentido transversal  $b = b_g$  (sin corrección) y en sentido longitudinal  $a = a_c = \sqrt{\delta_o/A_c}$ .

**Obtención de la fuerza normal:** Sobre el procedimiento de resolución del problema normal se ofrecen muy pocos detalles en los dos artículos publicados [8, 76]. Según [76], para la obtención de la fuerza normal se utiliza el concepto de *elipse equivalente*. El área de contacto obtenida a partir de la *interpenetración virtual* entre superficies y corregida según el criterio definido, se asimila a una elipse cuyos semiejes valen  $a$  y  $b$  en sentido longitudinal y transversal, respectivamente.  $a$  es el valor de la semi-longitud del área de contacto corregido según la ecuación (2.59) ( $a = a_c$ ), mientras que  $b$  es el valor geométrico de la semi-anchura del área de contacto ( $b = b_g$ ).

El valor de la fuerza normal se obtiene a partir de la ecuación (2.32) de Hertz, a partir del valor de la indentación máxima  $\delta_o$  y de las curvaturas corregidas del área de contacto [8]. Para  $A$  se toma la curvatura corregida  $A_c$  calculada según la fórmula (2.58) y para  $B$  el valor de la curvatura equivalente  $B_{eq}$  calculada a partir de (2.59). De este modo, la ecuación (2.32) particularizada para el modelo de Ayasse-Chollet, quedaría:

$$\delta_o = r \left( \left( \frac{3}{2} F_z \frac{1 - \sigma^{*2}}{E^*} \right)^2 (A_c + B_{eq}) \right)^{\frac{1}{3}} \quad (2.60)$$

En este apartado se han descrito dos modelos *basados en la interpenetración virtual* entre superficies, y el modelo de Hertz que constituye un modelo de *punto teórico de contacto*, utilizados para la resolución del problema normal de contacto.

## 2.5. Problema tangencial

### 2.5.1. Introducción

Una vez descritos modelos para la resolución del problema geométrico y del problema normal para resolver el contacto entre la rueda y el carril, según la secuencia definida en el apartado 2.2.3, se va a pasar a presentar distintos modelos de resolución del problema tangencial de contacto.

Existe una gran cantidad de modelos para la resolución del problema de contacto tangencial en el contacto rueda-carril. En este apartado se describirán los modelos que sean adecuados para su aplicación a la simulación dinámica y para la estimación del desgaste, en el rango de la baja frecuencia. Por tanto, los requisitos que deberán cumplir son:

- Tener un bajo coste computacional que haga compatible su uso dentro de un programa de simulación dinámica.
- Procesar el área de contacto de tal forma que se disponga de una distribución de las distintas magnitudes, asociadas al problema de contacto, dentro del área de contacto y que permita la evaluación de los distintos modelos para estimar el desgaste.

En [9] se propone la distinción entre *modelos de contacto basados en la superficie* (en inglés *surface-based contact models*) y modelos basados en *leyes de saturación* (en inglés *saturation laws*). Los primeros, para resolver el problema de contacto tangencial realizan una evaluación de la superficie de contacto. En cambio, los segundos se basan en ajustes empíricos para considerar la saturación del área de contacto según el valor del coeficiente de rozamiento y la fuerza normal.

Considerando el segundo requisito se describirán los *modelos de contacto basados en la superficie* que además tengan un coste computacional compatible con su uso en la simulación dinámica.

Aunque no se vaya a considerar en esta Tesis es interesante mencionar los modelos basados en *leyes de saturación* también conocidos como *modelos heurísticos*. Dentro de este grupo cabría distinguir el método de Johnson y Vermeulen [106], la modificación propuesta por Shen, Hedrick y Elkins al método anterior [99] o el método de Polach [79-81]. Respecto a este último modelo, Polach [82] introduce la consideración de un coeficiente de rozamiento variable.

En cuanto a los *modelos de contacto basados en la superficie*, la aportación más importante se debe a Kalker [2, 107]. Este autor en primer lugar desarrolló un programa para resolver el problema normal y tangencial de contacto según la teoría de elasticidad *exacta* (CONTACT [45]).

Sin embargo, este programa tenía un coste computacional demasiado elevado para utilizarse en el ámbito de la simulación dinámica, por lo que diseñó nuevos modelos de resolución del problema de contacto tangencial. Tal fue el caso del modelo de contacto *Kalker lineal* [45] basado también en la teoría de elasticidad *exacta* pero limitado a áreas de contacto elípticas. Al ser *lineal* asume

que las tensiones tangenciales son proporcionales a los valores de los pseudodeslizamientos sin tener en cuenta si existe o no saturación de éstas. Esta hipótesis es equivalente a que el coeficiente de rozamiento es infinito y, por tanto, toda el área de contacto se encuentra en adhesión.

Posteriormente Kalker [44] desarrolló un modelo de resolución del problema tangencial de contacto basado en la teoría de elasticidad *simplificada* que considera la saturación de las tensiones tangenciales. Este modelo de contacto, llamado FASTSIM, tiene un coste computacional mucho menor que CONTACT manteniendo un grado de precisión adecuado en el campo de la simulación dinámica [44].

Por una parte, el programa CONTACT se utiliza para investigaciones detalladas sobre aspectos mecánicos del contacto como el desgaste ondulatorio, como herramienta de validación para otros algoritmos simplificados o para la generación de tablas sobre diversos parámetros asociados al contacto [107]. Por otra parte, FASTSIM es ampliamente utilizado en aplicaciones de simulación dinámica [2].

FASTSIM inicialmente se desarrolló para la resolución de problemas *estacionarios*, aplicado a áreas de contacto elípticas y con el valor del coeficiente de rozamiento constante para definir la *saturación* de las tensiones tangenciales. Se basa en una relación lineal entre desplazamientos y tensiones en cada punto de contacto, donde los parámetros de flexibilidad se calculan a partir de la teoría de elasticidad *exacta*.

FASTSIM cumple los dos requisitos demandados para su aplicación en el campo de la simulación dinámica y estimación del desgaste en los perfiles: bajo coste computacional unido al procesado del área de contacto.

Sin embargo, presenta unas limitaciones según su diseño original, entre las que cabe destacar:

- Aplicación exclusiva a áreas de contacto elípticas.
- Utilización de un coeficiente de rozamiento constante.

No obstante, estas dos limitaciones son fácilmente superadas introduciendo modificaciones en el algoritmo inicial.

## 2.5.2. Modelos utilizados para la resolución del problema tangencial

En este apartado se presentan distintos modelos para la resolución del problema tangencial y que son adecuados para la aplicación a la simulación dinámica y a la estimación del desgaste en los perfiles de rueda y carril.

En primer lugar se describe el algoritmo FASTSIM, tal como se diseñó en [44]. En segundo lugar, se expone la modificación propuesta por Alonso, Giménez y Martín [5] para mejorar el cálculo del momento de *spin* sin incrementar el coste computacional. Posteriormente, se presentan otros modelos y modificaciones para la consideración de áreas de contacto no elípticas, entre las que cabe destacar el modelo de Kik-Piotrowski aplicado al problema tangencial [48, 76-77], el modelo de Ayasse-Chollet también aplicado al problema tangencial [8, 76] y la modificación de FASTSIM propuesta por Alonso y Giménez para la inclusión de áreas de contacto no elípticas [4]. Finalmente se presentan dos propuestas para la consideración de un coeficiente de rozamiento variable en el algoritmo FASTSIM: la propuesta de Giménez, Alonso y Gómez [34] y la propuesta por Piotrowski [78].

### a. Algoritmo FASTSIM

**Relación entre desplazamientos y tensiones:** El algoritmo de resolución FASTSIM está basado en la teoría de elasticidad simplificada, donde el desplazamiento tangencial debido a deformaciones elásticas de un punto es función exclusivamente de las tensiones tangenciales en dicho punto. Esta relación es lineal y se puede expresar como:

$$\mathbf{u}_t(x, y) = L \mathbf{p}_t(x, y) \quad (2.61)$$

siendo  $\mathbf{u}_t(x, y) = \{u_x(x, y); u_y(x, y)\}$ ,  $\mathbf{p}_t(x, y) = \{p_x(x, y); p_y(x, y)\}$  y  $L$  el parámetro de flexibilidad.

**Ecuación cinemática:** Asumiendo un modelo *estacionario* según la ecuación (2.3), la ecuación cinemática que expresa la relación entre el deslizamiento y los desplazamientos debidos a deformaciones elásticas sería:

$$\boldsymbol{\gamma} = \mathbf{w} - \frac{\partial \mathbf{u}_t}{\partial x} \quad (2.62)$$

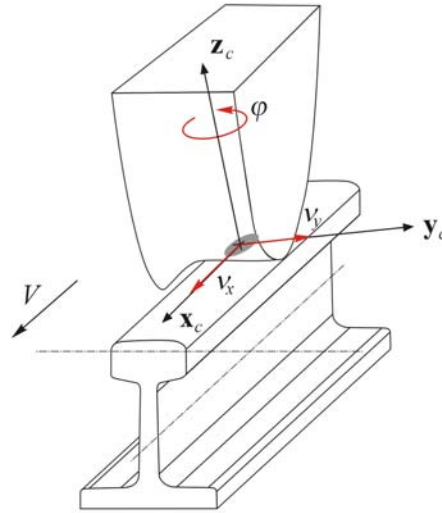
donde  $\boldsymbol{\gamma}$  es el vector de deslizamiento adimensional en el plano de contacto y  $\mathbf{w}$  el vector de deslizamiento rígido adimensional, calculados según:

$$\boldsymbol{\gamma}(x, y) = \frac{1}{V} \mathbf{s}(x, y) = \begin{Bmatrix} \gamma_x(x, y) \\ \gamma_y(x, y) \end{Bmatrix} = \frac{1}{V} \begin{Bmatrix} s_x(x, y) \\ s_y(x, y) \end{Bmatrix} \quad (2.63)$$

$$\mathbf{w}(x, y) = \begin{Bmatrix} v_x - \varphi \cdot y \\ v_y + \varphi \cdot x \end{Bmatrix} \quad (2.64)$$

siendo  $\mathbf{s}$  el vector deslizamiento absoluto en el plano de contacto,  $V$  la velocidad longitudinal del vehículo y  $v_x$ ,  $v_y$  y  $\varphi$  las velocidades de pseudodeslizamiento longitudinal, lateral (transversal) y de *spin* divididas por la velocidad longitudinal del vehículo  $V$ , respectivamente.

Las velocidades de pseudodeslizamiento longitudinal y lateral se calculan a partir de la velocidad relativa del punto de contacto en la rueda con respecto al carril, proyectada en el sistema de referencia asociado al contacto  $\mathbf{x}_c, \mathbf{y}_c, \mathbf{z}_c$ . Se toman las componentes según los ejes  $\mathbf{x}_c$  (término longitudinal) e  $\mathbf{y}_c$  (término lateral) y se dividen por la velocidad longitudinal del vehículo (ver Figura 2.22). El término de *spin* se calcula como la velocidad angular relativa de la rueda con respecto al carril en el sistema de referencia asociado al contacto, proyectada en el eje  $\mathbf{z}_c$ .



**Figura 2.22.** Velocidades de pseudodeslizamiento longitudinal y lateral y término de spin.

**Obtención de los parámetros de flexibilidad:** Para poder aplicar el algoritmo FASTSIM es necesario obtener el valor de los parámetros de flexibilidad de la ecuación (2.61). Kalker [44] propone calcular estos parámetros de tal forma que los resultados obtenidos con la teoría de elasticidad *simplificada*, para valores pequeños de pseudodeslizamientos, coincidan con los valores calculados según la teoría de elasticidad *exacta*. La hipótesis de pequeños pseudodeslizamientos es

equivalente a asumir que toda el área de contacto está en adhesión o que el coeficiente de rozamiento es infinito [5]. Con este fin se usa la teoría lineal desarrollada por Kalker [45]. Esta teoría resuelve de forma *exacta* el problema tangencial donde el área de contacto es elíptica y se encuentra por completo en adhesión.

Por una parte es necesario obtener la expresión de la distribución de presiones en el área de contacto según la teoría *simplificada* (FASTSIM). Sustituyendo la relación lineal entre tensiones y desplazamientos (2.61) en la relación cinemática (2.62), se tiene:

$$\boldsymbol{\gamma} = \mathbf{w} - L \frac{\partial \mathbf{p}_t}{\partial x} \quad (2.65)$$

Asumiendo adhesión ( $\boldsymbol{\gamma} = \mathbf{0}$ ) y despejando el valor de la tensión tangencial, se llega a la expresión

$$\frac{\partial \mathbf{p}_t^{adh}}{\partial x} = \frac{\mathbf{w}}{L} \quad (2.66.a)$$

o bien

$$\frac{\partial \mathbf{p}_t^{adh}}{\partial x} = \frac{1}{L} \begin{Bmatrix} v_x - \varphi \cdot y \\ v_y + \varphi \cdot x \end{Bmatrix} \quad (2.66.b)$$

donde el superíndice *adh* se refiere a *adhesión*.

Kalker en [44] distingue tres parámetros de flexibilidad  $L_1, L_2, L_3$  asociados al pseudodeslizamiento longitudinal, lateral y término de *spin*, respectivamente. El objetivo de considerar estos tres parámetros de flexibilidad es realizar un ajuste con la solución calculada según la teoría *exacta*. Efectuando esta distinción, la ecuación (2.66) quedaría

$$\frac{\partial \mathbf{p}_t^{adh}}{\partial x} = \begin{Bmatrix} \frac{v_x - \varphi \cdot y}{L_1} - \frac{\varphi \cdot y}{L_3} \\ \frac{v_y + \varphi \cdot x}{L_2} + \frac{\varphi \cdot x}{L_3} \end{Bmatrix} \quad (2.67)$$

FASTSIM es capaz de procesar tanto áreas de contacto elípticas como no elípticas. La diferencia radica en el cálculo de los parámetros de flexibilidad  $L$ . En el artículo original [44] se consideran áreas elípticas. En tal caso, si el área de contacto es regular (como es el caso de un área elíptica), los valores de estos parámetros pueden precalcularse y obtenerse fácilmente a partir de tablas.



Integrando la ecuación (2.66) para un área de contacto elíptica (Figura 2.23) se obtiene la distribución de presiones tangenciales en condiciones de adhesión

$$\mathbf{p}_t^{adh}(x, y) = \int_{\bar{a}(y)}^x \frac{\mathbf{w}}{L} dx = \left\{ \begin{array}{l} \left( \frac{v_x}{L_1} - \frac{\varphi y}{L_3} \right) (x - \bar{a}(y)) \\ \frac{v_y}{L_2} (x - \bar{a}(y)) + \frac{\varphi}{2L_3} (x^2 - \bar{a}(y)^2) \end{array} \right\} \quad (2.68)$$

siendo  $\bar{a}(y) = a\sqrt{1 - (y/b)^2}$ .

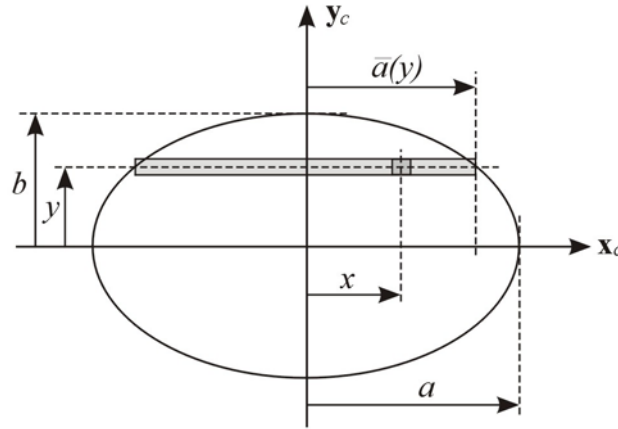


Figura 2.23. Integración del área de contacto elíptica.

Integrando ahora la distribución de presiones tangenciales obtenida en condiciones de adhesión, se obtienen las fuerzas tangenciales generadas en el contacto (también en condiciones de adhesión):

$$\begin{Bmatrix} F_x \\ F_y \end{Bmatrix} = \int_{-b}^b \int_{-\bar{a}(y)}^{\bar{a}(y)} \mathbf{p}_t^{adh}(x, y) dx dy = - \begin{bmatrix} \frac{8a^2b}{3L_1} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{8a^2b}{3L_2} & \frac{\pi a^3b}{4L_3} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} v_x \\ v_y \\ \varphi \end{Bmatrix} \quad (2.69)$$

Por otra parte, según la teoría lineal de Kalker la expresión de las fuerzas tangenciales es [44]:

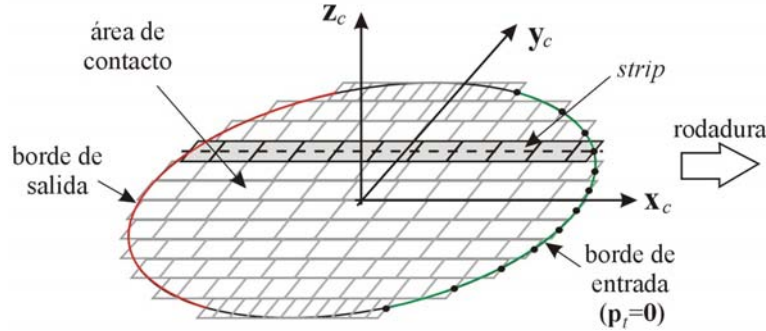
$$\begin{Bmatrix} F_x \\ F_y \end{Bmatrix} = - \begin{bmatrix} c_{11}G ab & 0 & 0 \\ 0 & c_{22}G ab & c_{23}G (ab)^{3/2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} v_x \\ v_y \\ \varphi \end{Bmatrix} \quad (2.70)$$

donde  $c_{11}$ ,  $c_{22}$  y  $c_{23}$  son los coeficientes de Kalker obtenidos a partir de la relación  $a/b$  y de las características mecánicas de los materiales [45] y  $G$  es el módulo de elasticidad transversal combinado de los materiales en el contacto.

Igualando las expresiones (2.69) y (2.70) se pueden obtener los valores de los parámetros de flexibilidad  $L$  para áreas elípticas:

$$L_1 = \frac{8a}{3c_{11}G} \quad L_2 = \frac{8a}{3c_{22}G} \quad L_3 = \frac{\pi a \sqrt{a/b}}{4c_{23}G} \quad (2.71)$$

**Aplicación del algoritmo:** Para aplicar el algoritmo FASTSIM, se integra la ecuación (2.62) dentro del área de contacto. El área de contacto se divide en  $N$  tiras longitudinales o *strips*. Cada una de estas *strips* se divide a su vez en  $N$  elementos. La integración se realiza siguiendo cada una de las *strips* partiendo del borde de entrada de una partícula en el área de contacto hasta el borde de salida (según el sentido de rodadura, siguiendo el sentido contrario al eje  $x_c$ ), ver Figura 2.24. Como condición de contorno se impone que la presión tangencial es nula en el borde de entrada [44].

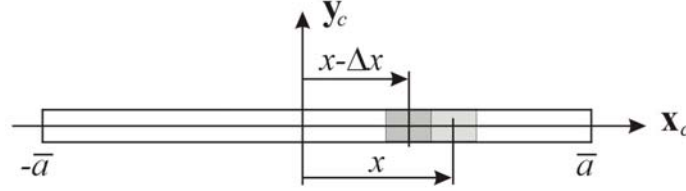


**Figura 2.24.** Discretización del área de contacto elíptica para la aplicación de FASTSIM.

Por tanto según (2.67), integrando numéricamente desde el borde de entrada, donde la tensión tangencial  $\mathbf{p}_{t_0}^{adh} = \mathbf{p}_t^{adh}(\bar{a}, y)$  es conocida (condición de contorno), los valores  $\mathbf{p}_{t_1}^{adh} = \mathbf{p}_t^{adh}(\bar{a} - \Delta x, y)$ ,  $\mathbf{p}_{t_2}^{adh} = \mathbf{p}_t^{adh}(\bar{a} - 2\Delta x, y), \dots$  y así sucesivamente, se determinan a partir del punto anterior (ver Figura 2.25):

$$\mathbf{p}_t^{adh}(x - \Delta x, y) = \mathbf{p}_t(x, y) - \begin{Bmatrix} \frac{v_x}{L_1} - \frac{\varphi \cdot y}{L_3} \\ \frac{v_y}{L_2} + \frac{\varphi \cdot x}{L_3} \end{Bmatrix} \Delta x \quad (2.72.a)$$

o bien: 
$$\mathbf{p}_t^{adh}(x - \Delta x, y) = \mathbf{p}_t(x, y) - \frac{\Delta x}{L} \mathbf{w}(x, y) \quad (2.72.b)$$



**Figura 2.25.** Integración de las tensiones tangenciales en la *strip* que forma parte del área de contacto.

La fórmula anterior se ha obtenido en condiciones de adhesión. Por tanto, será necesario comprobar la hipótesis de adhesión utilizando la ley de Amontons-Coulomb:

$$|\mathbf{p}_t^{adh}(x - \Delta x, y)| < \mu p_z(x - \Delta x, y) \quad (2.73)$$

donde  $\mu$  es el valor del coeficiente de rozamiento, supuesto inicialmente un valor conocido y constante. Si esta condición se cumple, el punto está en adhesión. En caso contrario, estará en deslizamiento y el valor de la tensión tangencial lo impone la ley de Amontons-Coulomb:

$$|\mathbf{p}_t(x - \Delta x, y)| = \mu p_z(x - \Delta x, y) \quad (2.74)$$

En tal caso, el vector tensión tangencial en deslizamiento se supondrá colineal al vector tensión tangencial en adhesión y sus componentes son

$$p_k(x - \Delta x, y) = \mu p_z(x - \Delta x, y) \frac{p_k^{adh}(x - \Delta x, y)}{|\mathbf{p}_t^{adh}(x - \Delta x, y)|} \quad (2.75)$$

siendo  $k = x$  (longitudinal),  $y$  (transversal).

**Elección de la distribución de tensiones normales:** Según Kalker [44] existe cierto grado de libertad en la elección de la distribución de presiones normales. En [44] propone utilizar una distribución de presiones parabólica debido a que proporciona un mejor ajuste de las zonas de adhesión y deslizamiento con respecto a la solución ofrecida por CONTACT:

$$p_z(x, y) = p_{m\acute{a}x} \left[ 1 - \left( \frac{x}{a} \right)^2 - \left( \frac{y}{b} \right)^2 \right] \quad (2.76)$$

donde  $p_{m\acute{a}x}$  es el valor máximo de la distribuci3n de presiones normales. Integrando la distribuci3n de presiones dentro del área elíptica y conocido el valor de fuerza normal, se puede obtener el valor de  $p_{m\acute{a}x}$

$$p_{m\acute{a}x} = \frac{2F_z}{\pi a b} \quad (2.77)$$

Esta distribuci3n se puede comparar con la distribuci3n semielíptica de Hertz de la ecuaci3n (2.26).

**Obtenci3n del deslizamiento en el área de contacto:** En el algoritmo FASTSIM original [44] no se realiza el cculo de los deslizamientos  $\gamma$ . El cculo de estos valores no es necesario para establecer la distribuci3n de tensiones en el área de contacto. Sin embargo, son valores necesarios para realizar una estimaci3n del desgaste de forma local en el área de contacto. El procedimiento descrito se trata de una extensi3n del algoritmo FASTSIM original.

El cculo de los deslizamientos locales en el área de contacto se puede realizar a partir de la ecuaci3n (2.65), considerando la distinc3n entre las zonas de adhesi3n y de deslizamiento.

En la zona de adhesi3n el valor de la tensi3n tangencial según la ecuaci3n (2.72) es  $\mathbf{p}_t(x - \Delta x, y) = \mathbf{p}_t^{adh}(x - \Delta x, y)$  y el valor del deslizamiento es nulo por hip3tesis ( $\gamma = \mathbf{0}$ ).

En la zona de deslizamiento, desarrollando la ecuaci3n (2.65) y según la discretizaci3n empleada, quedaría:

$$\gamma(x, y) = \mathbf{w}(x, y) - \frac{L}{\Delta x} [\mathbf{p}_t(x, y) - \mathbf{p}_t(x - \Delta x, y)] \quad (2.78)$$

Sustituyendo en la ecuaci3n anterior la relaci3n de (2.72) se llega a la expresi3n del vector deslizamiento adimensional en  $(x, y)$  a partir de la diferencias entre las tensiones tangenciales calculadas y las tensiones tangenciales en condiciones de adhesi3n en  $(x - \Delta x, y)$ :

$$\gamma(x, y) = \frac{L}{\Delta x} [\mathbf{p}_t(x - \Delta x, y) - \mathbf{p}_t^{adh}(x - \Delta x, y)] \quad (2.79.a)$$

cuyas componentes son:

$$\begin{aligned}\gamma_x(x, y) &= \frac{L_1}{\Delta x} [p_x(x - \Delta x, y) - p_x^{adh}(x - \Delta x, y)] \\ \gamma_y(x, y) &= \frac{L_2}{\Delta x} [p_y(x - \Delta x, y) - p_y^{adh}(x - \Delta x, y)]\end{aligned}\quad (2.79.b)$$

De esta forma se llega a una expresión que permite obtener el valor del deslizamiento adimensional aplicando diferencias finitas según la discretización empleada por FASTSIM.

Una vez descrito el algoritmo FASTSIM, se va a presentar la modificación propuesta por Alonso, Giménez y Martín para mejorar el cálculo del momento de *spin*.

### **b. Modificación de FASTSIM propuesta por Alonso-Giménez-Martín para mejorar el cálculo del *spin***

Se trata de una modificación introducida en el algoritmo FASTSIM para mejorar el cálculo de los momentos de *spin*. Esta modificación se ha publicado en [5].

Se procede de la misma forma que con FASTSIM pero considerando un parámetro de flexibilidad adicional. La solución del problema tangencial de contacto, asumiendo adhesión obtenida mediante FASTSIM, se iguala con la solución obtenida según la teoría de elasticidad *exacta*. A partir de esta igualdad se obtienen los valores de los parámetros de flexibilidad.

Por una parte, en la ecuación (2.66) se distinguen cuatro en lugar de tres parámetros de flexibilidad:

$$\frac{\partial \mathbf{p}_t^{adh}}{\partial x} = \begin{pmatrix} \frac{v_x}{L_1} - \frac{\varphi \cdot y}{L_4} \\ \frac{v_y}{L_2} + \frac{\varphi \cdot x}{L_3} \end{pmatrix}\quad (2.80)$$

Integrando la ecuación anterior se llega a una expresión análoga a (2.68) con las distribuciones de tensiones tangenciales dentro de la *strip*:

$$\begin{cases} p_x(x, y) \\ p_y(x, y) \end{cases} = \begin{cases} \left( \frac{v_x}{L_1} - \frac{\varphi \cdot y}{L_4} \right) (x - \bar{a}(y)) \\ \frac{v_y}{L_2} (x - \bar{a}(y)) + \frac{\varphi}{2L_3} (x^2 - \bar{a}(y)^2) \end{cases} \quad (2.81)$$

y el correspondiente momento de *spin* sería:

$$m_z(x, y) = x p_y(x, y) - y p_x(x, y) \quad (2.82)$$

Integrando ahora estas expresiones dentro del área de contacto (supuesta elíptica), se obtiene la magnitud de las fuerzas tangenciales y del momento de spin:

$$\begin{cases} F_x \\ F_y \\ M_z \end{cases} = - \begin{bmatrix} \frac{8a^2b}{3L_1} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{8a^2b}{3L_2} & \frac{\pi a^3b}{4L_3} \\ 0 & -\frac{\pi a^3b}{4L_2} & \frac{8a^2b^3}{15L_4} \end{bmatrix} \begin{cases} v_x \\ v_y \\ \varphi \end{cases} \quad (2.83)$$

Por otra parte, la solución ofrecida por la teoría lineal de Kalker es [5, 45]:

$$\begin{cases} F_x \\ F_y \\ M_z \end{cases} = - \begin{bmatrix} c_{11}G ab & 0 & 0 \\ 0 & c_{22}G ab & c_{23}G(ab)^{3/2} \\ 0 & -c_{23}G(ab)^{3/2} & c_{33}G(ab)^2 \end{bmatrix} \begin{cases} v_x \\ v_y \\ \varphi \end{cases} \quad (2.84)$$

Igualando término a término se obtienen los valores de los parámetros  $L_1$ ,  $L_3$  y  $L_4$ . Para el parámetro  $L_2$ , éste se puede obtener a partir de las ecuaciones correspondientes a  $F_y$  y  $M_z$ . Debido a que la fuerza  $F_y$  tiene mayor importancia, el parámetro  $L_2$  se obtiene a partir de esta ecuación [5]. Por tanto, los parámetros  $L_1$ ,  $L_2$  y  $L_3$  se definen de la misma forma que Kalker tal como aparecen en (2.71). Y el parámetro  $L_4$  queda definido como:

$$L_4 = \frac{8b}{15c_{33}G} \quad (2.85)$$

Según esta modificación, se introduce un nuevo coeficiente en FASTSIM para el cálculo del momento de *spin*. Según [5] esta repercusión es despreciable en el campo de la simulación dinámica, pero debe tenerse en cuenta en el cálculo de la disipación energética y la posterior estimación del desgaste. Esta modificación no implica un incremento de coste computacional en el algoritmo FASTSIM.

Una vez descrita esta modificación, se van a pasar a presentar los distintos modelos considerados para resolver el problema de contacto tangencial para áreas de contacto no elípticas y, posteriormente, las distintas modificaciones para considerar el efecto de un coeficiente de rozamiento variable.

### c. Modelo de Kik-Piotrowski

El modelo de contacto de Kik-Piotrowski consiste en un método de resolución del problema de contacto normal y tangencial. La resolución del problema normal ha sido abordada en el apartado 2.4. En este apartado se describirá brevemente la resolución propuesta por Kik y Piotrowski para el problema tangencial [48, 76-77].

**Procedimiento:** Para obtener la distribución de tensiones tangenciales en el área de contacto se aplica FASTSIM a las áreas de contacto (generalmente no elípticas) obtenidas a través de la *interpenetración virtual* entre superficies. Se procede como con FASTSIM, igualando esta expresión con la solución obtenida considerando la teoría de elasticidad *exacta*. Los valores de los coeficientes de Kalker se calculan a partir del área de contacto no elíptica, usando el concepto de *elipse equivalente*. De esta forma se pueden obtener los valores de los parámetros de flexibilidad, para cada una de las áreas de contacto obtenidas por *interpenetración virtual*.

**Obtención de los parámetros de flexibilidad:** La distribución de tensiones tangenciales, en condiciones de adhesión, se obtiene integrando la ecuación (2.66) en una *strip* del área de contacto no elíptica. Para cada una de las áreas de contacto obtenidas, se tiene:

$$\mathbf{p}_t^{adh}(x, y) = \frac{1}{L} \left\{ \begin{array}{l} (x - x_l(y))(v_x - \varphi y) \\ (x - x_l(y))v_y + \frac{1}{2}(x^2 - x_l(y)^2)\varphi \end{array} \right\} \quad (2.86)$$

Integrando ahora esta expresión en el área de contacto se puede obtener la magnitud de las fuerzas tangenciales:

$$\left\{ \begin{array}{l} F_x \\ F_y \end{array} \right\} = \frac{1}{L} \int_{y_r}^{y_l} \int_{-x_l}^{x_l} \mathbf{p}_t^{adh}(x, y) dx dy = \frac{1}{L} \left\{ \begin{array}{l} \int_{y_r}^{y_l} \int_{-x_l}^{x_l} p_x^{adh}(x, y) dx dy \\ \int_{y_r}^{y_l} \int_{-x_l}^{x_l} p_y^{adh}(x, y) dx dy \end{array} \right\} \quad (2.87)$$

Utilizando la definición de  $x_l(y)$  a partir de la ecuación (2.40) y realizando la integración según la variable  $x$ , la expresión anterior queda:

$$\begin{Bmatrix} F_x \\ F_y \end{Bmatrix} = - \begin{bmatrix} \frac{4R}{L} \int_{y_r}^{y_l} g(y) dy & 0 & -\frac{4R}{L} \int_{y_r}^{y_l} y g(y) dy \\ 0 & \frac{4R}{L} \int_{y_r}^{y_l} g(y) dy & \frac{4\sqrt{2R^3}}{3L} \int_{y_r}^{y_l} [g(y)]^{3/2} dy \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} v_x \\ v_y \\ \varphi \end{Bmatrix} \quad (2.88)$$

donde la función  $g(y)$  está definida en (2.39). Estas integrales deben resolverse de forma numérica.

Para obtener el valor de los coeficientes se procede de la misma forma que con FASTSIM, igualando la expresión de las fuerzas tangenciales al contacto con la solución ofrecida por la teoría lineal de Kalker para áreas elípticas (2.70). Igualando término a término las matrices en las ecuaciones (2.88) y (2.70), se puede observar como el término asociado a  $\varphi$  en la ecuación de  $F_x$  en (2.88) no tiene su correspondiente parte en (2.70). Esto es debido a que, por simetría del área elíptica, la fuerza longitudinal creada por el término de *spin* se anula.

Para la obtención de los coeficientes de Kalker  $c_{11}$ ,  $c_{22}$ ,  $c_{23}$  y de los semiejes de la elipse  $a$ ,  $b$  en (2.70) para el área no elíptica se usa el concepto de *elipse equivalente*. Siendo  $L$  y  $W$  el largo y ancho del área de contacto no elíptica según la Figura 2.20 y  $A$  el valor de la superficie del área de contacto no elíptica, se definen los semiejes de la elipse equivalente  $a_e$ ,  $b_e$  según las dos condiciones:

$$\begin{aligned} a_e/b_e &= L/W \\ \pi a_e b_e &= A \end{aligned} \quad (2.89)$$

de donde se puede resolver el valor de los semiejes de la elipse equivalente:

$$a_e = \sqrt{\frac{AL}{\pi W}} \quad b_e = \sqrt{\frac{AW}{\pi L}} \quad (2.90)$$

Por tanto, los valores de los coeficientes de Kalker se calcularán para los valores de los semiejes de la elipse equivalente  $a_e$ ,  $b_e$ . Estos coeficientes de Kalker obtenidos para el caso no elíptico en [48, 76], se denotan como  $c_x$ ,  $c_y$ ,  $c_z$ , según estén asociados al pseudodeslizamiento longitudinal, lateral o de *spin*, respectivamente. Por tanto, la ecuación (2.70) quedaría

$$\begin{Bmatrix} F_x \\ F_y \end{Bmatrix} = - \begin{bmatrix} c_x G a_e b_e & 0 & 0 \\ 0 & c_y G a_e b_e & c_z G (a_e b_e)^{3/2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} v_x \\ v_y \\ \varphi \end{Bmatrix} \quad (2.91)$$

En cuanto a los parámetros de flexibilidad, se distinguen  $L_x$ ,  $L_y$  y  $L_z$ , asociados al pseudodeslizamiento longitudinal, lateral y *spin*, respectivamente. Igualando las ecuaciones (2.88) y (2.91) y despejando los valores de  $L$  se tiene:



$$\begin{aligned}
L_x &= \frac{4\pi R}{c_x G A} \int_{y_r}^{y_l} g(y) dy & L_y &= \frac{4\pi R}{c_y G A} \int_{y_r}^{y_l} g(y) dy \\
L_z &= \frac{4\sqrt{2}\pi^3 R^3}{3c_z G A^{3/2}} \int_{y_r}^{y_l} [g(y)]^{3/2} dy
\end{aligned} \tag{2.92}$$

Estos valores se deberán calcular resolviendo numéricamente las integrales para cada una de las áreas de contacto obtenidas.

Una vez obtenidos los parámetros de flexibilidad según el método propuesto, se aplica el algoritmo FASTSIM para el área de contacto no elíptica.

#### d. Modelo de Ayasse-Chollet

Al igual que el modelo de Kik-Piotrowski, se trata de un modelo de resolución del problema de contacto normal y tangencial. La parte correspondiente a la resolución del problema normal se ha expuesto en el apartado 2.4. En esta sección se presentará el procedimiento de resolución del problema tangencial, descrito en [8, 76].

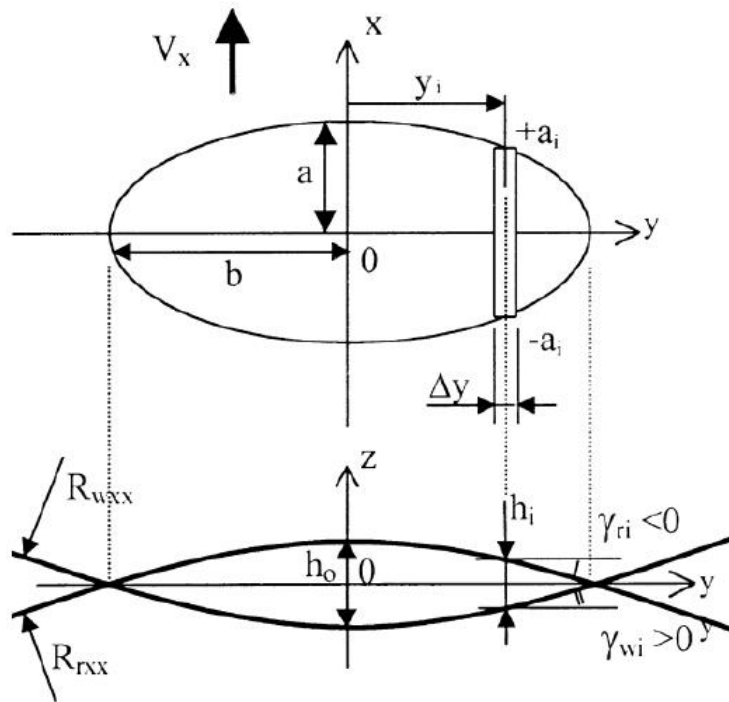
**Planteamiento:** El procedimiento para la resolución del problema tangencial según el modelo de Ayasse-Chollet, está basado en FASTSIM. En primer lugar, se define un área de contacto *basada en la interpenetración virtual*. En esta área de contacto se utiliza la misma discretización en *strips* y elementos, y se asume la misma distribución de tensiones tangenciales que FASTSIM.

En segundo lugar, se utilizan los parámetros de flexibilidad obtenidos por FASTSIM pero definidos para cada una de las *strips*. Una vez obtenidos los valores de estos parámetros, se integra la distribución de tensiones tangenciales sobre cada una de las *strips* del área de contacto.

**Obtención del área de contacto para resolver el problema tangencial:** Para procesar el área de contacto y resolver el problema tangencial, se divide ésta en tiras longitudinales o *strips* al igual que FASTSIM. Las dimensiones de cada *strip* serán: ancho  $\Delta y$  (para todas iguales) y largo  $2 a_i$ . El valor de  $a_i$  se calcula en función de la indentación correspondiente a cada *strip*  $\delta_i$  y del valor de la curvatura  $A_c$ ; particularizando la fórmula (2.59) para una *strip* genérica, queda:

$$\delta_i = A_c a_i^2 \tag{2.93}$$

La Figura 2.26 muestra un área de contacto elíptica corregida según el criterio de Ayasse-Chollet. Se muestra una *strip* dentro de esta área de contacto. En la figura  $h_o$  es el valor de la indentación  $\delta_o$ .



**Figura 2.26.** Área de contacto elíptica corregida y *strip* según el modelo de Ayasse-Chollet. Extraído de [8].

**Obtención de los parámetros de flexibilidad:** Se asume que la relación entre desplazamientos tangenciales debidos a deformaciones elásticas y tensiones tangenciales es lineal como FASTSIM (2.61).

Según este procedimiento, se define una distribución de tensiones tangenciales para cada *strip* a partir de la distribución de tensiones tangenciales propuesta por FASTSIM. Los parámetros de flexibilidad  $L_1$ ,  $L_2$  y  $L_3$  también se definen para cada *strip*. Siendo  $a = a_c$  la semi-longitud del área de contacto corregida según (2.59) y  $a_i$  la semi-longitud de la *strip*  $i$ , a partir de (2.71) se pueden definir los parámetros de flexibilidad para cada *strip* como:

$$\begin{aligned}
L_{1i} &= \frac{8a}{3c_{11}G} = \frac{8a_i}{3c_{11}G(a_i/a)} = \frac{8a_i}{3c_{11}Gk_i} \\
L_{2i} &= \frac{8a}{3c_{22}G} = \frac{8a_i}{3c_{22}G(a_i/a)} = \frac{8a_i}{3c_{22}Gk_i} \\
L_{3i} &= \frac{\pi a}{4c_{23}G} \sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\pi a_i}{4c_{23}G(a_i/a)} \sqrt{\frac{m}{n}} = \frac{\pi a_i}{4c_{23}Gk_i} \sqrt{\frac{m}{n}}
\end{aligned} \tag{2.94}$$

donde se define  $k_i = a_i/a$  para expresar la relación entre la longitud de la *strip*  $i$  y la longitud del área de contacto y se utiliza la relación  $a/b = m/n$  obtenida a partir de las ecuaciones de Hertz (2.30) siendo  $b$  el semi-ancho del área de contacto.

Por tanto, la distribución de tensiones tangenciales de FASTSIM de (2.68), particularizada para la *strip*  $i$  queda:

$$\mathbf{p}_{t_i}^{adh}(x, y_i) = \left\{ \begin{array}{l} \left( \frac{v_x}{L_{1i}} - \frac{\varphi y_i}{L_{3i}} \right) (x - a_i) \\ \frac{v_y}{L_{2i}} (x - a_i) + \frac{\varphi}{2L_{3i}} (x^2 - a_i^2) \end{array} \right\} \tag{2.95}$$

Sustituyendo los valores de los parámetros de flexibilidad de (2.94), sabiendo que  $k_i/a_i = a$ , y reordenando se llega a la expresión:

$$\mathbf{p}_{t_i}^{adh}(x, y_i) = - \left\{ \begin{array}{l} \frac{3c_{11}G}{8} v_x - \frac{4c_{23}G}{\pi} \sqrt{\frac{n}{m}} \varphi y_i \\ \frac{3c_{22}G}{8} v_y + \frac{2c_{23}G}{\pi} \sqrt{\frac{n}{m}} \varphi (a_i + x) \end{array} \right\} \frac{a_i - x}{a} \tag{2.96}$$

Dicha expresión se corresponde con las tensiones tangenciales en condiciones de adhesión.

**Elección de la distribución de presiones normales:** Para comprobar la hipótesis de adhesión (2.73) Ayasse *et al.* proponen utilizar la distribución de presiones normales parabólica. Particularizando la ecuación (2.76) para la *strip* genérica  $i$ , se tiene

$$p_{z_i}(x, y_i) = \frac{2F_z}{\pi ab} \left[ 1 - \left( \frac{x}{a} \right)^2 - \left( \frac{y_i}{b} \right)^2 \right] \tag{2.97}$$

Una vez presentados los procedimientos usados por los modelos *quasi-hercianos* (o *semi-hercianos*) de Kik-Piotrowski y Ayasse-Chollet para resolver el

problema tangencial se va a presentar la modificación de FASTSIM propuesta por Alonso-Giménez para considerar áreas de contacto no elípticas.

### e. Modificación de FASTSIM propuesta por Alonso-Giménez para considerar áreas no elípticas

Se trata de una modificación del algoritmo FASTSIM para la resolución del problema tangencial para áreas de contacto no elípticas. Este método se describe en [4].

**Procedimiento:** En esta modificación se propone aproximar el área de contacto no-regular por dos semi-elipses, alineadas según el eje  $y_c$ . Al tratarse de figuras regulares, los correspondientes parámetros de flexibilidad se pueden precalcular, de tal forma que su obtención sea rápida. Una vez obtenidos estos valores, se puede aplicar FASTSIM para el área de contacto no elíptica.

**Obtención de los parámetros de flexibilidad:** Para obtener los parámetros de flexibilidad  $L$  se sigue la misma metodología que utiliza FASTSIM: por una parte se utiliza la teoría elástica *simplificada* y se asume adhesión en toda el área de contacto. Por otra parte, se utiliza la teoría *exacta* suponiendo valores de deslizamiento pequeños. Los parámetros de flexibilidad se obtienen igualando las dos expresiones.

Considerando una teoría elástica *exacta* se pueden obtener las expresiones de las fuerzas tangenciales al contacto bajo la hipótesis de pequeños pseudodeslizamientos. Para un área de forma no-regular, se tendría la expresión [4]:

$$\begin{Bmatrix} F_x \\ F_y \end{Bmatrix} = - \begin{bmatrix} \tilde{c}_{11} G \frac{A}{\pi} & \tilde{c}_{12} G \frac{A}{\pi} & \tilde{c}_{13} G \left(\frac{A}{\pi}\right)^{3/2} \\ \tilde{c}_{21} G \frac{A}{\pi} & \tilde{c}_{22} G \frac{A}{\pi} & \tilde{c}_{23} G \left(\frac{A}{\pi}\right)^{3/2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} v_x \\ v_y \\ \varphi \end{Bmatrix} \quad (2.98)$$

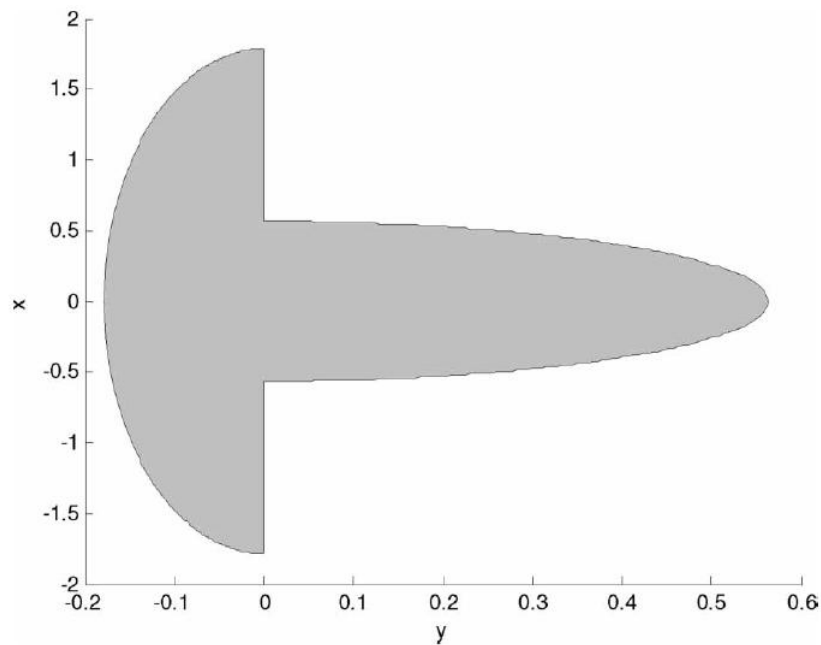
donde  $A$  es el valor de la superficie del área de contacto no elíptica y  $\tilde{c}_{ij}$  son los valores de los coeficientes de Kalker obtenidos para áreas no elípticas.

Para áreas elípticas, los coeficientes  $\tilde{c}_{12}$ ,  $\tilde{c}_{13}$  y  $\tilde{c}_{21}$ , son nulos por simetría. Para áreas de contacto genéricas, el valor de los coeficientes  $\tilde{c}_{12}$  y  $\tilde{c}_{21}$  son muy pequeños.

Por otra parte, usando la teoría elástica *simplificada*, a partir de la expresión de las tensiones tangenciales ofrecida por FASTSIM (2.66) y distinguiendo cuatro parámetros de flexibilidad, se tiene

$$\frac{\partial \mathbf{p}_t^{adh}}{\partial x} = \begin{Bmatrix} \frac{v_x - \varphi \cdot y}{L_1 - L_4} \\ \frac{v_y + \varphi \cdot x}{L_2 + L_3} \end{Bmatrix} \quad (2.99)$$

Para considerar el área de contacto no-regular se propone aproximar esta área de contacto a dos semi-elipses alineadas con el eje  $y_c$ , tal como muestra la Figura 2.27. Para cada una de las semi-elipses se obtienen los parámetros de flexibilidad y se resuelve el problema tangencial.



**Figura 2.27.** Área de contacto no elíptica aproximada por dos semielipses. En la Figura 'x' indica el eje  $x_c$ , mientras que 'y' indica el eje  $y_c$ . Extraído de [4].

Integrando la distribución de presiones en condiciones de adhesión de la ecuación (2.99) sobre una semi-elipse, tal como propone FASTSIM, según [4] se llega a la expresión

$$\begin{Bmatrix} F_x \\ F_y \end{Bmatrix} = - \begin{bmatrix} \frac{4a^2b}{3L_1} & 0 & \pm \frac{a^2b^2}{2L_4} \\ 0 & \frac{4a^2b}{3L_2} & \frac{\pi a^3b}{2L_3} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} v_x \\ v_y \\ \varphi \end{Bmatrix} \quad (2.100)$$

siendo el signo del término (1,5) positivo si la semielipse se encuentra en  $y > 0$  y negativo si se encuentra en  $y < 0$ . Los términos (1,2) y (2,1) de la matriz son nulos por simetría.

Por otra parte, la ecuación (2.98) se puede particularizar para el área de contacto considerada. Haciendo  $\tilde{c}_{12} = \tilde{c}_{21} = 0$ , y tomando el valor de los coeficientes de Kalker calculados para media elipse (superíndice 'm') se tienen las fuerzas transmitidas por una semielipse en condiciones de adhesión:

$$\begin{Bmatrix} F_x \\ F_y \end{Bmatrix} = - \begin{bmatrix} \tilde{c}_{11}^m G \frac{A}{\pi} & 0 & \tilde{c}_{13}^m G \left(\frac{A}{\pi}\right)^{3/2} \\ 0 & \tilde{c}_{22}^m G \frac{A}{\pi} & \tilde{c}_{23}^m G \left(\frac{A}{\pi}\right)^{3/2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} v_x \\ v_y \\ \varphi \end{Bmatrix} \quad (2.101)$$

Estos coeficientes  $\tilde{c}_{ij}^m$  se pueden precalcular en función de la relación de los semiejes  $a, b$  de la semielipse.

Igualando (2.100) y (2.101) y despejando, según [4], se llega a la expresión de los parámetros de flexibilidad  $L$  para una semi-elipse:

$$\begin{aligned} L_1 &= \frac{4a}{3\tilde{c}_{11}^m G} & L_2 &= \frac{4a}{3\tilde{c}_{22}^m G} \\ L_3 &= \frac{\pi a^{3/2}}{8\sqrt{b}\tilde{c}_{23}^m G} & L_4 &= \frac{\sqrt{ab}}{2\tilde{c}_{13}^m G} \end{aligned} \quad (2.102)$$

Una vez obtenidos los parámetros de flexibilidad correspondientes a cada una de las semielipses, se divide el área en tiras longitudinales o *strips* y se aplica el algoritmo FASTSIM para cada una de ellas.

En [4] se ha comprobado que la precisión y el coste computacional de este método, en el que el área de contacto no-regular se asimila a dos semielipses, es adecuada para su uso en la simulación dinámica.

Una vez descrita el método de Alonso-Giménez para resolver el problema tangencial para áreas no elípticas se van a describir dos alternativas presentadas para la consideración de un coeficiente de rozamiento variable en FASTSIM.

#### **f. Modificación de FASTSIM de Giménez-Alonso-Gómez para considerar un coeficiente de rozamiento variable**

Se trata de una modificación del algoritmo FASTSIM propuesta por Giménez-Alonso-Gómez para considerar un coeficiente de rozamiento variable. Esta modificación se describe en [34].

**Planteamiento:** En este modelo se considera que el coeficiente de rozamiento es función del deslizamiento que aparece entre la rueda y el carril. Para expresar esta relación se utiliza la *función de fricción* o *ley de fricción*, que tiene la forma

$$\mu = \mu(\gamma) \quad (2.103)$$

Para resolver el problema tangencial se sigue el mismo planteamiento que FASTSIM. Se divide el área de contacto en tiras longitudinales o *strips* y se realiza una integración de las tensiones tangenciales, desde el borde de entrada hasta el borde de salida. Como condición de contorno, en el borde de entrada se supone que la tensión tangencial es nula.

Cada una de las *strips* se divide a su vez en elementos. Al igual que en FASTSIM se supone que cada elemento está en adhesión y se obtiene el valor de las tensiones tangenciales según la fórmula (2.72). Una vez calculado el valor de la tensión tangencial y conocido el valor de la presión normal en ese punto, se comprueba la hipótesis de adhesión utilizando la condición (2.73). Esta fórmula, considerando un coeficiente de rozamiento que es función del deslizamiento, quedaría:

$$|\mathbf{p}_t^{adh}(x - \Delta x, y)| < \mu(\gamma) p_z(x - \Delta x, y) \quad (2.104)$$

En este punto, para poder resolver la inecuación (2.104) es necesario hallar el valor del deslizamiento  $\gamma$  para así poder obtener el valor del coeficiente de rozamiento  $\mu(\gamma)$  y comprobar si se cumple o no la hipótesis de adhesión. Giménez *et al.* en [34] proponen un procedimiento para resolver este problema.

**Cálculo del deslizamiento con  $\mu$  variable:** Para poder comprobar la condición de adhesión se debe buscar una fórmula que permita obtener el valor del coeficiente de rozamiento  $\mu$  en función de valores conocidos, como es el deslizamiento

rígido  $\mathbf{w}$ , los valores de tensiones tangenciales en condiciones de adhesión  $\mathbf{p}_t^{adh}$  y los valores de presiones normales  $p_z$ .

Según la extensión de FASTSIM presentada en el punto 2.5.2.a para el cálculo de los deslizamientos en el área de contacto, éstos se obtienen a partir de la fórmula (2.79) en función de los valores de las tensiones tangenciales en condiciones de adhesión y de los valores de las tensiones tangenciales considerando la ley de saturación, según:

$$\gamma(x, y) = \frac{L}{\Delta x} [\mathbf{p}_t(x - \Delta x, y) - \mathbf{p}_t^{adh}(x - \Delta x, y)]$$

Esta fórmula no se puede aplicar directamente en un planteamiento con coeficiente de rozamiento variable, ya que no se conoce el valor de la presión tangencial  $\mathbf{p}_t$ . Giménez *et al.* en [34] buscan una fórmula alternativa que permita obtener el valor del deslizamiento a partir de parámetros conocidos.

Tomando la ecuación (2.72) según el algoritmo FASTSIM, ésta se podría expresar como:

$$\mathbf{p}_t^{adh}(x - \Delta x, y) = \mathbf{p}_t(x, y) + \Delta \mathbf{p}_t^{adh} \quad (2.105)$$

donde:

$$\Delta \mathbf{p}_t^{adh} = -\frac{\Delta x}{L} \mathbf{w}(x, y) \quad (2.106)$$

En este punto, se comprueba si está o no en adhesión y se obtiene el valor de las tensiones tangenciales  $\mathbf{p}_t(x - \Delta x, y)$ . En esta situación, se puede expresar la relación:

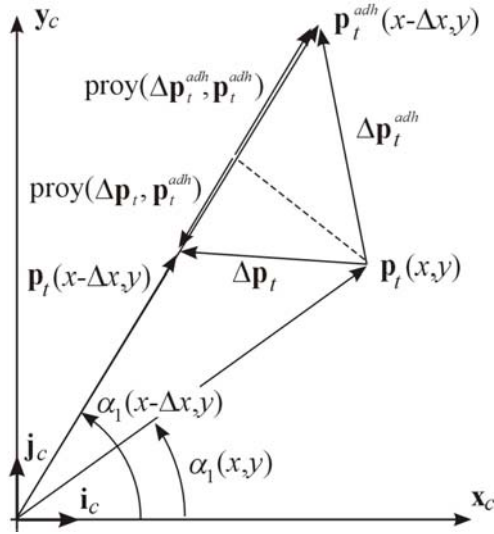
$$\mathbf{p}_t(x - \Delta x, y) = \mathbf{p}_t(x, y) + \Delta \mathbf{p}_t \quad (2.107)$$

Restando (2.107) de la ecuación (2.105), se tiene:

$$\mathbf{p}_t^{adh}(x - \Delta x, y) - \mathbf{p}_t(x - \Delta x, y) = \Delta \mathbf{p}_t^{adh} - \Delta \mathbf{p}_t \quad (2.108)$$

Ecuación que también se puede obtener gráficamente a partir del diagrama de la Figura 2.28.





**Figura 2.28.** Diagrama vectorial de las tensiones tangenciales. Adaptado de [34].

Combinando ahora las ecuaciones (2.79) y (2.108) se llega a la expresión:

$$\gamma(x, y) = \frac{L}{\Delta x} [\Delta \mathbf{p}_t - \Delta \mathbf{p}_t^{adh}] \quad (2.109)$$

Para el cálculo del coeficiente de rozamiento a partir de la función de fricción (2.103) sólo es necesario conocer el módulo del deslizamiento adimensional  $\gamma = |\gamma|$ ; por tanto, tomando el módulo de (2.109), la expresión anterior queda:

$$\gamma(x, y) = |\gamma(x, y)| = \frac{L}{\Delta x} |\Delta \mathbf{p}_t - \Delta \mathbf{p}_t^{adh}| \quad (2.110)$$

A partir de la Figura 2.28 se deduce que el valor de  $|\Delta \mathbf{p}_t - \Delta \mathbf{p}_t^{adh}|$  es igual a la diferencia entre las proyecciones de ambos vectores en la dirección del vector  $\mathbf{p}_t^{adh}(x - \Delta x, y)$ , por tanto:

$$\gamma(x, y) = |\gamma(x, y)| = \frac{L}{\Delta x} |\Delta \mathbf{p}_t - \Delta \mathbf{p}_t^{adh}| = \frac{L}{\Delta x} [\text{proy}(\Delta \mathbf{p}_t^{adh}, \mathbf{p}_t^{adh}) - \text{proy}(\Delta \mathbf{p}_t, \mathbf{p}_t^{adh})] \quad (2.111)$$

donde el operador 'proy( $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ )' se refiere al vector resultante de la proyección del vector  $\mathbf{u}$  sobre el vector  $\mathbf{v}$ . Esta ecuación se va a desarrollar por separado, tomando las dos partes del término de la derecha. Por un lado, se puede escribir:

$$\text{proy}(\Delta \mathbf{p}_t^{adh}, \mathbf{p}_t^{adh}) = \Delta \mathbf{p}_t^{adh} \frac{\mathbf{p}_t^{adh}}{|\mathbf{p}_t^{adh}|} = \Delta \mathbf{p}_t^{adh} [\cos(\alpha_1(x - \Delta x, y)) \mathbf{i}_c + \sin(\alpha_1(x - \Delta x, y)) \mathbf{j}_c] \quad (2.112)$$

donde  $\alpha_1$  es el ángulo que forma el vector tensión tangencial con respecto al eje  $\mathbf{x}_c$ , e  $\mathbf{i}_c$ ,  $\mathbf{j}_c$  son los vectores unitarios de los ejes  $\mathbf{x}_c$ ,  $\mathbf{y}_c$ , respectivamente (ver Figura 2.28).

Multiplicando por  $L/\Delta x$  y utilizando la igualdad (2.106), se llega a la expresión:

$$\frac{L}{\Delta x} \text{proy}(\Delta \mathbf{p}_t^{adh}, \mathbf{p}_t^{adh}) = -w_x \cos(\alpha_1(x - \Delta x, y)) - w_y \sin(\alpha_1(x - \Delta x, y)) \quad (2.113)$$

Por otro lado, para obtener la expresión de la segunda parte de (2.111) se asumen dos hipótesis [34]:

- La proyección del vector  $\Delta \mathbf{p}_t$  sobre el vector  $\mathbf{p}_t^{adh}$  es aproximadamente igual al incremento en el módulo del vector  $\mathbf{p}_t(x, y)$  (ver Figura 2.28).
- En la zona de deslizamiento, el valor del módulo de la tensión tangencial se obtiene como el producto de  $\mu(\gamma)$  por la presión normal.

Siguiendo el procedimiento descrito en [34], finalmente se llega a la siguiente expresión que permite obtener el valor del deslizamiento adimensional en función del deslizamiento rígido ( $\mathbf{w}$ ), los valores de tensiones tangenciales en condiciones de adhesión (de donde se calcula el ángulo  $\alpha_1$ ), de la función de fricción ( $\mu(\gamma)$ ) y de la presión normal ( $p_z$ ):

$$\gamma(x, y) = -\mathbf{w} \cdot \begin{Bmatrix} \cos(\alpha_1(x - \Delta x, y)) \\ \sin(\alpha_1(x - \Delta x, y)) \end{Bmatrix} + L \left[ \frac{\partial \mu(\gamma)}{\partial \gamma} \frac{\partial \gamma}{\partial x} p_z(x, y) + \mu(\gamma) \frac{\partial p_z(x, y)}{\partial x} \right] \quad (2.114)$$

donde el ángulo  $\alpha_1$  se calcula como

$$\alpha_1 = \text{atan} 2(p_y^{adh}, p_x^{adh}) \quad (2.115)$$

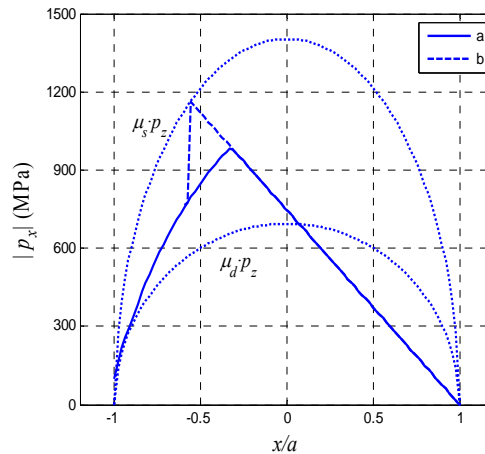
**Modificaciones realizadas en el procedimiento:** Con el fin de mejorar la solución de la distribución de tensiones tangenciales en el área de contacto se realizan dos modificaciones.

- La primera modificación consiste en eliminar el término asociado a la derivada  $\partial \gamma / \partial x$ . De esta forma se elimina una inestabilidad en el cálculo de las tensiones tangenciales. Una vez la inestabilidad no aparece, el término eliminado adopta valores pequeños [34]. Aplicando esta técnica, la ecuación (2.114) queda

$$\gamma(x, y) = -\mathbf{w} \cdot \begin{Bmatrix} \cos(\alpha_1(x - \Delta x, y)) \\ \sin(\alpha_1(x - \Delta x, y)) \end{Bmatrix} + L \left[ \mu(\gamma) \frac{\partial p_z(x, y)}{\partial x} \right] \quad (2.116)$$

- La segunda modificación es relativa al cálculo del coeficiente de rozamiento en la zona de adhesión. Según la función de fricción considerada, en la zona de adhesión (donde el deslizamiento es nulo), el valor correspondiente de coeficiente de rozamiento sería  $\mu_o = \mu(0)$ . Entonces, al pasar a la zona de deslizamiento, se calcula el valor de deslizamiento  $\gamma$  y su valor correspondiente  $\mu = \mu(\gamma)$  según la ley genérica (2.103). Por tanto, en este punto donde aparece el cambio de la zona de adhesión a la zona de deslizamiento, aparece un salto en la distribución de tensiones tangenciales (ver Figura 2.29, caso b).

Para evitar esta discontinuidad en las tensiones tangenciales se define un valor de deslizamiento ficticio  $\gamma^*$  en la zona de adhesión. Según este procedimiento, el valor del coeficiente de rozamiento en la zona de adhesión se calcularía a partir de este deslizamiento ficticio  $\mu = \mu(\gamma^*)$ . La Figura 2.29 muestra la distribución de tensiones tangenciales calculadas según estos dos métodos.



**Figura 2.29.** Diferencias en el cálculo de la tensión tangencial: (a) el coeficiente de rozamiento se calcula en función del deslizamiento ficticio. (b) el coeficiente de rozamiento en la zona de adhesión es constante, igual al coeficiente de rozamiento estático.

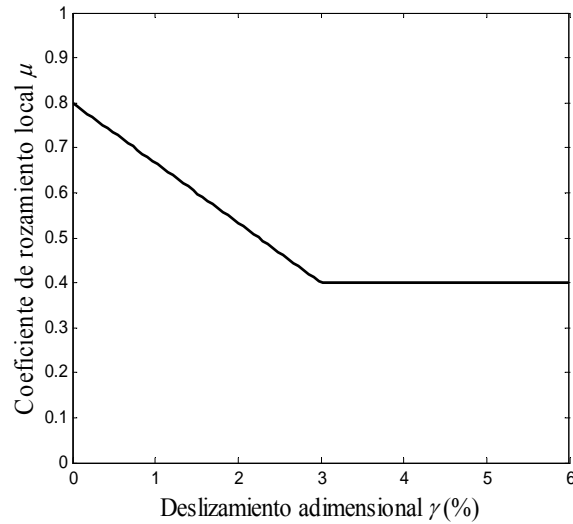
**Distribución de presiones normales:** En [34] se supone, al igual que para FASTSIM, una distribución de tensiones parabólica (2.76). Calculando la derivada de  $p_z$  con respecto a  $x$  y sustituyendo en la ecuación (2.116), queda:

$$\gamma(x, y) = -\mathbf{w} \cdot \begin{Bmatrix} \cos(\alpha_1(x - \Delta x, y)) \\ \sin(\alpha_1(x - \Delta x, y)) \end{Bmatrix} - \mu(\gamma) \frac{2p_{\max}}{a^2} L x \quad (2.117)$$

**Función de fricción considerada:** Para modelizar el valor del coeficiente de rozamiento en función del deslizamiento adimensional según (2.103) se utiliza la siguiente función definida a trozos:

$$\mu(\gamma) = \begin{cases} \mu_s - \frac{\mu_s - \mu_d}{\gamma_c} \gamma & \text{si } 0 \leq \gamma \leq \gamma_c \\ \mu_d & \text{si } \gamma_c < \gamma \end{cases} \quad (2.118)$$

donde  $\mu_s$  es el valor del coeficiente de rozamiento estático (para  $\gamma = 0$ ),  $\mu_d$  es el valor del coeficiente de rozamiento dinámico (para  $\gamma > \gamma_c$ ) y  $\gamma_c$  es el valor de deslizamiento umbral. En la Figura 2.30 se muestra una representación de la función de fricción definida a trozos para valores usuales de los parámetros de los que depende.



**Figura 2.30.** Ejemplo de la función de fricción definida a trozos, con  $\mu_s = 0,8$ ,  $\mu_d = 0,4$  y  $\gamma_c = 3 \%$ .

**Obtención del deslizamiento a partir de la función de fricción:** Conocida la función  $\mu(\gamma)$ , esta expresión y su derivada se pueden sustituir en la ecuación (2.116). Se distinguen dos casos, según  $\gamma$  esté en uno u otro tramo. Suponiendo que  $\gamma \leq \gamma_c$ , sustituyendo y despejando el valor de  $\gamma$ , quedaría:

$$\gamma = \frac{-\mathbf{w} \cdot \begin{Bmatrix} \cos(\alpha_1) \\ \sin(\alpha_1) \end{Bmatrix} + L \left( \mu_s \frac{\partial p_z}{\partial x} \right)}{1 + L \frac{\mu_s - \mu_d}{\gamma_c} \frac{\partial p_z}{\partial x}} \quad (2.119)$$

y para  $\gamma > \gamma_c$ :

$$\gamma = -\mathbf{w} \cdot \begin{Bmatrix} \cos(\alpha_1) \\ \sin(\alpha_1) \end{Bmatrix} + L \mu_d \frac{\partial p_z}{\partial x} \quad (2.120)$$

De esta forma se llega a una función explícita que permite obtener el módulo del deslizamiento adimensional en un punto perteneciente al área de contacto. Conociendo el deslizamiento  $\gamma$  y sustituyendo en la ecuación (2.118) se puede obtener el valor del coeficiente de rozamiento  $\mu$ . A partir de este valor se comprueba la hipótesis de adhesión (2.104).

Siguiendo el procedimiento descrito, se puede implementar el uso de un coeficiente de rozamiento variable en FASTSIM. Según se afirma en [34] esta modificación no implica un incremento de coste significativo respecto a FASTSIM y, además, permite una importante mejora en el modelado de las leyes que relacionan tensiones y deformaciones en el contacto rueda-carril.

#### **g. Modificación de FASTSIM de Piotrowski para considerar un coeficiente de rozamiento variable**

Se trata de una modificación del algoritmo FASTSIM propuesta por Piotrowski para considerar un coeficiente de rozamiento variable. Esta modificación se describe en [78].

**Planteamiento:** Esta modificación de FASTSIM considera que el coeficiente de rozamiento es función del deslizamiento. Para ello usa una función de fricción genérica  $\mu(\gamma)$ . Los valores de deslizamiento se calculan a partir de la *densidad de potencia de fricción*.

Piotrowski en [78] distingue dos formas para evaluar la función de fricción que dan lugar a distintas distribuciones de tensiones normales: *con recuperación de la fricción estática y sin recuperación de la fricción estática*.

**Concepto de densidad de potencia de fricción:** Este concepto se define en [78]. La densidad de potencia de fricción es el valor de entrada para el cálculo de la temperatura en el contacto. En este modelo se usa para obtener el valor del deslizamiento en FASTSIM bajo la hipótesis que el coeficiente de rozamiento depende únicamente del valor del deslizamiento y no de la posición de la partícula en el área de contacto, en particular de la coordenada  $x$ .

La densidad de potencia de fricción es un escalar que se define como:

$$P_d = \mathbf{s} \cdot \mathbf{p}_t = \gamma \cdot \mathbf{p}_t \cdot V \quad (2.121)$$

siendo  $\mathbf{s}$  el vector deslizamiento absoluto,  $\boldsymbol{\gamma}$  el vector deslizamiento adimensional,  $\mathbf{p}_t$  el vector de tensiones tangenciales y  $V$  la velocidad longitudinal del vehículo. Utilizando la relación cinemática (2.62) y la relación entre tensiones y deformaciones de FASTSIM (2.61), se puede escribir:

$$P_d = \boldsymbol{\gamma} \cdot \mathbf{p}_t V = \left( \mathbf{w} - \frac{\partial \mathbf{u}_t}{\partial x} \right) \cdot \mathbf{p}_t V = \left( \mathbf{w} - L \frac{\partial \mathbf{p}_t}{\partial x} \right) \cdot \mathbf{p}_t V \quad (2.122.a)$$

o bien:

$$P_d = \left[ p_x w_x + p_y w_y - L \left( p_x \frac{\partial p_x}{\partial x} + p_y \frac{\partial p_y}{\partial x} \right) \right] V \quad (2.122.b)$$

Para simplificar la ecuación anterior, en [78] se presenta la siguiente relación:

$$p_t \frac{\partial p_t}{\partial x} = \left( p_x \frac{\partial p_x}{\partial x} + p_y \frac{\partial p_y}{\partial x} \right) \quad (2.123)$$

**Hipótesis de presiones normales:** como hipótesis de presiones normales se asume el modelo de Kik-Piotrowski [48, 77], aunque se puede usar la distribución semi-elíptica de Hertz o la distribución parabólica de Kalker.

Asumiendo que las presiones normales siguen el modelo de Kik-Piotrowski (ecuación (2.50)), en el área de deslizamiento el valor de las tensiones tangenciales sería:

$$p_t(x, y) = \mu(\gamma) p_z(x, y) = \frac{\mu(\gamma) p_{z_0}}{x_l(0)} \sqrt{x_l^2(y) - x^2} \quad (2.124)$$

derivando esta expresión con respecto a  $x$  y teniendo en cuenta que  $\mu$  no depende de  $x$ :

$$\frac{\partial p_t}{\partial x} = - \frac{\mu(\gamma) p_{z_0}}{x_l(0)} \frac{x}{\sqrt{x_l^2(y) - x^2}} \quad (2.125)$$

con lo que el producto (2.123) se podría expresar como:  $p_t \frac{\partial p_t}{\partial x} = - \left( \frac{\mu(\gamma) p_{z_0}}{x_l(0)} \right)^2 x$

Sustituyendo esta expresión en (2.122), quedaría:

$$P_d = \left[ p_x w_x + p_y w_y + L \left( \frac{\mu(\gamma) p_{z_0}}{x_l(0)} \right)^2 x \right] V \quad (2.126)$$

**Cálculo de los deslizamientos:** Tomando la definición de la densidad de potencia de fricción, se puede escribir  $P_d = \mathbf{s} \cdot \mathbf{p}_t = s p_t \cos(\mathbf{s}, \mathbf{p}_t) = -s p_t$ . Donde  $\cos(\mathbf{s}, \mathbf{p}_t)$

es el ángulo formado por ambos vectores. El signo negativo es debido a que ambos tienen la misma dirección y sentido opuesto. Despejando de esta fórmula, el módulo del deslizamiento absoluto  $s$  se puede obtener como:

$$s = -\frac{P_d}{p_t} \quad (2.127)$$

y el vector deslizamiento absoluto, utilizando la relación anterior y sabiendo  $\mathbf{s}$  que lleva la misma dirección y sentido opuesto que el vector de tensiones tangenciales  $\mathbf{p}_t$ :

$$\mathbf{s} = -s \frac{\mathbf{p}_t}{p_t} = \frac{P_d}{p_t^2} \mathbf{p}_t \quad (2.128)$$

De esta forma se puede obtener el valor del deslizamiento a partir de las tensiones tangenciales y de la densidad de potencia de fricción.

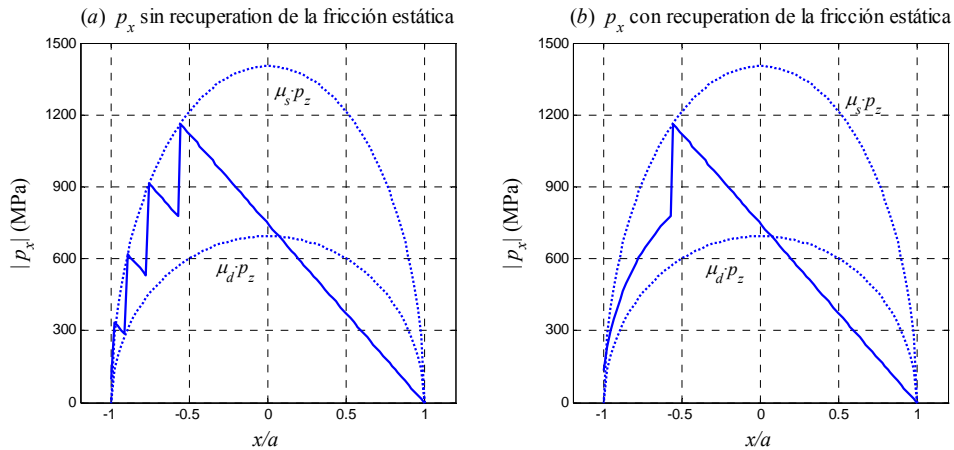
**Formas para la evaluación de la función de fricción:** Piotrowski en [78] distingue dos formas para evaluar la función (o ley) de fricción  $\mu(\gamma)$ . Éstas se conocen como *con recuperación de la fricción estática* y *sin recuperación de la fricción estática*.

- Ley de fricción *con recuperación de la fricción estática*: Según esta forma de evaluar la función (o ley) de fricción, el valor del coeficiente de rozamiento se obtiene para cada punto del área de contacto en función del valor de deslizamiento calculado. Esta forma de evaluar la función de fricción según [78] puede dar lugar a un comportamiento inestable en la zona de deslizamiento, de tal forma que se sucedan zonas de deslizamiento-adhesión.
- Ley de fricción *sin recuperación de la fricción estática*: según esta forma de evaluar la ley de fricción, cuando una partícula del área de contacto empieza a deslizar con una velocidad  $\gamma'$ , el coeficiente de rozamiento se fija como  $\mu(\gamma')$ . Este valor se mantiene mientras la partícula está en contacto. Se asume que durante el paso de la partícula por la zona de deslizamiento, el valor del coeficiente de rozamiento ya no depende del deslizamiento.

La Figura 2.31 muestra un ejemplo de las distribuciones de tensiones tangenciales obtenidas mediante estas dos formas de evaluar la función de fricción.

Piotrowski en [78] menciona que no existen pruebas experimentales de que el uso de una ley de fricción *con recuperación de la fricción estática* sea adecuado

para el caso de rodadura entre materiales de acero. Por tanto, recomienda el uso de una ley de fricción *sin recuperación de la fricción estática*.



**Figura 2.31.** Distribuciones de tensiones tangenciales obtenidas según los dos métodos para evaluar la función de fricción considerados por Piotrowski: (a) *sin recuperación de la fricción estática*. (b) *con recuperación de la fricción estática*.

Según estas modificaciones descritas se puede considerar un coeficiente de rozamiento variable en el algoritmo FASTSIM.

En este apartado se han expuesto los distintos aspectos asociados al problema tangencial de contacto, incluyendo los modelos de la bibliografía considerados para su aplicación en la simulación dinámica y estimación del desgaste.

## 2.6. Estimación del desgaste

### 2.6.1. Introducción

Una vez presentados los modelos de contacto usados en la bibliografía para la aplicación a la simulación dinámica y estimación del desgaste, en este apartado se estudian los conceptos asociados al desgaste de los perfiles como consecuencia de las tensiones que aparecen en el contacto rueda-carril.

Kalker en [46] distingue dos tipos de desgaste en ruedas y carriles ferroviarios: por una parte el *desgaste ondulatorio* de los carriles o la *falta de redondez* de las ruedas; por otra parte, la *evolución del perfil* de las ruedas y



carriles, cuando la rueda es perfectamente redonda y el carril es una extrusión perfecta. Esta misma distinción es realizada por Zobory en [112].

- En cuando al primer tipo, el desgaste ondulatorio es un fenómeno muy complicado [46]. Más de 100 años de investigación todavía no han conseguido desvelar sus secretos. Se han expuesto diversas teorías de las que algunas no funcionan o algunas funcionan demasiado bien en el sentido en el que el desgaste ondulatorio debería aparecer en cada carril. De hecho, en algunas vías aparece mucho más rápido que en otras. Sin embargo en las teorías existentes queda claro que procesos metalúrgicos complejos se deben considerar junto a la mecánica del contacto y que existe una interacción entre estas dos.

En [46] se señala que los modelos *estacionarios* no son suficientes para describir la mecánica del contacto del desgaste ondulatorio. Los modelos de contacto deben incluir fenómenos *transitorios* y *periódicos*.

- En cuanto al segundo tipo de desgaste, éste es el que afecta a la *evolución de los perfiles*. En este caso, los modelos de contacto *estacionarios* son adecuados para realizar las estimaciones de desgaste. Este es el tipo de desgaste estudiado en esta Tesis.

En este apartado se enuncian las hipótesis generales para el cálculo del desgaste en los perfiles y, posteriormente, se presentan los conceptos asociados a la evaluación del desgaste.

### 2.6.2. Hipótesis generales

Para el cálculo del desgaste asociado a la evolución de los perfiles, se asumen las siguientes hipótesis generales:

1. Se considera únicamente el *desgaste por abrasión*. Se desprecia la deformación plástica. Esta simplificación se fundamenta en tres razones [40]: (a) La deformación plástica aparece, pero es muy difícil de modelizar sin el uso de técnicas de elementos finitos o similares, que tienen un coste computacional muy elevado. (b) Es razonable asumir que la mayor contribución al desgaste de los perfiles sea el desgaste por abrasión. (c) Cuando las herramientas de predicción se calibran con datos experimentales, ambos fenómenos se incluyen esencialmente en el modelo de desgaste.
2. Las distintas herramientas de predicción estudian el *desgaste sobre el perfil de la rueda*, donde el desgaste estimado en cada instante de tiempo se va

acumulando sobre el perfil de la rueda. No obstante, existe algún trabajo para el estudio de la evolución del perfil del carril [39].

3. Se asume que el desgaste es *regular* [10]: se estudia la variación del perfil transversal y no la formación de patrones a lo largo de la dirección longitudinal (circunferencial). Por tanto, en el caso de la rueda, el desgaste que aparece en un determinado instante de tiempo y para una determinada posición, se distribuye a lo largo de la circunferencia completa de la rueda. Se trata de una hipótesis general en el estudio de la *evolución de los perfiles*, asumida diversos trabajos ([10, 23, 38, 40, 55, 86-87, 89]).
4. En cuanto a la *presencia de contaminantes* en la interfase de contacto, diversos autores consideran únicamente la presencia del contaminante variando el valor del coeficiente de rozamiento (o de la función de fricción, en el caso de utilizar coeficiente de rozamiento variable). Tal es el caso de [89]. Sin embargo, para obtener una buena estimación del desgaste es necesario disponer de la ley de desgaste correspondiente, obtenida con la presencia de dicho contaminante [40, 91, 105].

### 2.6.3. Evaluación del desgaste

La evaluación del desgaste representa el núcleo de una herramienta de predicción de la evolución de los perfiles. Se puede dividir en dos partes: por una parte el *algoritmo de desgaste* y, por otra parte, *los modelos y leyes de desgaste*.

El *algoritmo de desgaste* evalúa las magnitudes asociadas al contacto rueda-carril, basándose en la teoría de contacto utilizada. Por otra parte, las *leyes o funciones de desgaste* estiman la cantidad de material perdida relacionando la pérdida de material con las condiciones del contacto. Estas *leyes de desgaste* se agrupan en distintos *modelos de desgaste*, según estimen el material perdido a partir de unas u otras magnitudes asociadas al contacto.

En primer lugar se presentarán los distintos *algoritmos de desgaste*, para pasar a los *modelos* y posteriormente a las *leyes de desgaste*.

#### a. Algoritmos de desgaste

Según el algoritmo de desgaste, la evaluación del desgaste puede hacerse de forma *local* o de forma *global*:

- *Local*: Para la aplicación del desgaste de forma local, es necesario conocer la distribución de las distintas magnitudes asociadas al contacto: distribución de presiones normales, de tensiones tangenciales y valores de

deslizamientos en el área de contacto. La implementación de este algoritmo es compleja ya que debe integrarse junto a las rutinas de contacto, para poder disponer de información sobre la distribución de las distintas magnitudes.

El cálculo del desgaste de forma local asume que sólo aparece desgaste en la zona de deslizamiento dentro del área de contacto. Por tanto, el uso de un algoritmo de forma local permite conocer la distribución del desgaste en el área de contacto.

- *Global*: Para la aplicación del algoritmo de desgaste de forma global, el desgaste puede obtenerse directamente de valores totales de la fuerza normal o tangencial y de los valores de los pseudodeslizamientos que actúan en el área de contacto. La implementación de este algoritmo es directa ya que se utilizan los valores de salida que ofrecen los distintos modelos de contacto. Como consecuencia, el cálculo del desgaste se reduce a un post-proceso.

Este procedimiento de evaluación proporciona información adecuada a nivel de valores medios, pero no de forma local sobre el área de contacto. Por tanto, la profundidad de desgaste se calcula siguiendo la hipótesis de que el desgaste se distribuye sobre el área de contacto [89].

### b. Modelos de desgaste

En la literatura sobre el contacto rueda-carril se describen dos modelos básicos de desgaste [25, 102, 105, 112]:

- *Modelo de desgaste de deslizamiento* [105] o *modelo de desgaste basado en la presión normal* [112]. Está basado en el modelo de Archard [6] que se usa ampliamente en el campo de la tribología para el modelado del desgaste en contactos con deslizamiento y rodadura [40]. Según este modelo, la pérdida de material depende de la combinación de la distancia deslizada, la fuerza normal y la dureza del material:

$$V_{wear} = k \frac{F_z d}{H} \quad (2.129)$$

donde  $V_{wear}$  es el volumen de material perdido por desgaste ( $m^3$ ),  $d$  es la distancia deslizada (m),  $F_z$  es la fuerza normal (N),  $H$  es la dureza del material más blando ( $N/m^2$ ) y  $k$  es el coeficiente de desgaste.

Las distintas *leyes de desgaste* asociadas a este *modelo de desgaste* ofrecen valores para el coeficiente  $k$  en función de los materiales y de las condiciones en el contacto.

- *Modelo de desgaste de transferencia de energía* [105] o *modelo de desgaste basado en la disipación energética* [112]. Este modelo asume que la pérdida de material es función de la energía o potencia disipada por fricción en el área de contacto. Ésta es función de las fuerzas (o tensiones) tangenciales al contacto y de la velocidad relativa entre la rueda y el carril.

La potencia disipada por fricción en una determinada área de contacto se calcula como

$$P_{fric} = \int_A \mathbf{p}_t \cdot \mathbf{s} dA \quad (2.130)$$

siendo  $\mathbf{p}_t$  el vector de tensiones tangenciales en el área de contacto,  $\mathbf{s}$  el vector velocidad de deslizamiento ( $\mathbf{s} = \boldsymbol{\gamma} V$ ) y  $A$  el área de contacto.

Una vez descritos los dos modelos de desgaste empleados mayoritariamente en la bibliografía, se van a presentar las leyes de desgaste.

### c. Leyes de desgaste

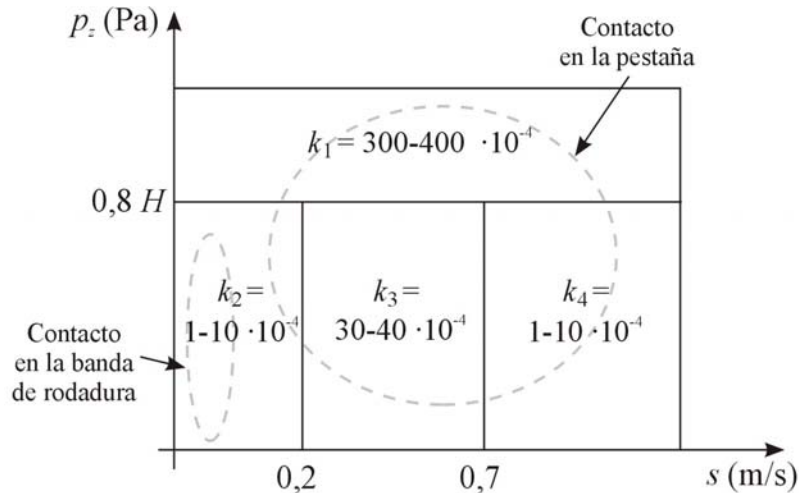
En esta sección se describen tres *leyes de desgaste* distintas: la ley de desgaste del *Royal Institute of Technology-Stockholm* (KTH) (basada en el *modelo de desgaste de deslizamiento*), la ley de desgaste de *British Rail Research* (BRR) y la ley de desgaste de la *University of Sheffield* (USFD) (estas dos últimas leyes basadas en el *modelo de desgaste de transferencia de energía*).

Para la obtención de los parámetros que definen las distintas leyes de desgaste se pueden utilizar datos provenientes de tres categorías [25]: (a) medidas de campo, (b) investigación en laboratorio o (c) modelos teóricos de predicción. Entre ellas, la más utilizada actualmente es la investigación en laboratorio, que permite obtener datos de desgaste bajo condiciones controladas que intentan reproducir las condiciones que aparecen en el contacto rueda-carril.

**Ley de desgaste del *Royal Institute of Technology-Stockholm* (KTH)** [40]: Esta ley de desgaste está incluida en los *modelos de desgaste de deslizamiento*, por tanto, se basa en el modelo de Archard para calcular el volumen de material desgastado.

El valor del coeficiente de desgaste  $k$  de la ecuación (2.129) se determina a partir de mediciones en laboratorio en máquinas de *pin-sobre-disco*. Este valor se

puede obtener a partir de la Figura 2.32 en función del módulo de la velocidad de deslizamiento absoluta  $s$  y de la presión normal  $p_z$  junto a la dureza del material más blando  $H$ . Este gráfico muestra el valor del coeficiente de desgaste  $k$  para aceros usados en ruedas y carriles ferroviarios. El gráfico se divide en 4 regiones, indicadas por  $k_1$ ,  $k_2$ ,  $k_3$  y  $k_4$ , para describir distintos estados de desgaste, siendo el más severo el de la parte de arriba.



**Figura 2.32.** Valor del coeficiente  $k$  según la ley de desgaste KTH. Adaptado de [40].

Estos valores de  $k$  se han determinado para superficies secas y limpias. En su aplicación al contacto real rueda-carril deben tenerse en cuenta efectos como la contaminación de la superficie por efecto de la lubricación aplicada, fenómenos climáticos (lluvia, hielo, ambiente seco). En [40] se menciona que se ha planificado realizar más mediciones en laboratorio mediante el uso de lubricantes. En un trabajo posterior, Enblom y Berg [24] consideran un factor de reductor de 5,5 para reducir el desgaste en condiciones de *lubricación natural* (con presencia de humedad y contaminación sobre los carriles), a partir de los valores de  $k$  obtenidos de la Figura 2.32.

El desgaste correspondiente a un área de contacto en la banda de rodadura de la rueda se sitúa normalmente en la zona  $k_2$ , mientras que el correspondiente a un área de contacto en la pestaña de la rueda se puede situar en las zonas  $k_1$ ,  $k_3$  o  $k_4$ , dependiendo de la velocidad de deslizamiento y de la fuerza normal.

Esta ley puede aplicarse de forma *global* o de forma *local*:

- De forma *global*, para obtener el coeficiente de desgaste  $k$  se estima el módulo de la velocidad de deslizamiento absoluta  $s$  a partir de las velocidades de pseudodeslizamiento normalizadas (pseudodeslizamientos):

$$s \approx \sqrt{v_x^2 + v_y^2} V \quad (2.131)$$

En la fórmula (2.129)  $F_z$  representa la fuerza normal sobre el área de contacto y  $d$  la distancia deslizada por el área de contacto calculada a partir de la velocidad  $s$  de (2.131).

- De forma *local*, para obtener el coeficiente de desgaste  $k$  se toma la velocidad de deslizamiento calculada a partir de los deslizamientos obtenidos según la ecuación cinemática (2.62) asociada a la resolución del problema tangencial de contacto. Esta ecuación se aplica de forma local, para cada partícula del área de contacto:

$$s = \sqrt{\gamma_x^2 + \gamma_y^2} V \quad (2.132)$$

En la fórmula (2.129)  $F_z$  representa la presión normal en el elemento considerado y  $d$  la distancia deslizada por el elemento calculada a partir de la velocidad  $s$  de (2.132).

Jendel en [39] utiliza un algoritmo de desgaste local. Para obtener el valor del deslizamiento local de una partícula en el área de contacto, desprecia el término elástico en la ecuación (2.62).

**Ley de desgaste de *British Rail Research (BRR)*** [75]: Esta ley de desgaste forma parte de los *modelos de desgaste de transferencia de energía*. Surgió como resultado de un trabajo pionero realizado por *British Rail* para entender y modelizar el comportamiento del desgaste de la rueda y carril. En este trabajo se concluye que la tasa de desgaste en la rueda se puede relacionar con la energía de fricción disipada a través del rozamiento en cada área de contacto de la rueda con el carril.

Como indicador de la energía disipada se utiliza el índice  $T\gamma$ , también llamado *índice de desgaste*, *número de desgaste* o *factor de desgaste*. Esta ley de desgaste se aplica de forma global. Por tanto, el índice  $T\gamma$  se define como el producto de las fuerzas tangenciales al desgaste por los correspondientes valores de pseudodeslizamientos ( $T$  representa las fuerzas tangenciales mientras que  $\gamma$  representa los pseudodeslizamientos, cuando se aplica a nivel global):

$$T\gamma = |F_x v_x + F_y v_y| \quad (2.133)$$

Autores como Alonso *et al.* [5] señalan la conveniencia de considerar el momento de *spin* en el cálculo de  $T\gamma$ .

$$T\gamma = |F_x v_x + F_y v_y + M_{sp}\phi| \quad (2.134)$$

La tasa de desgaste se expresa en pérdida de área en el perfil de la rueda por distancia rodada (Tabla 2.2), donde  $D$  representa el diámetro nominal de la rueda en mm. En esta ley se distinguen tres regímenes: *suave*, *severo* y un régimen de *transición* entre ambos. El régimen *suave* está asociado a las condiciones que se dan en el contacto de la banda de rodadura de la rueda con la corona del carril, mientras que el régimen *severo* está asociado normalmente a las condiciones que se dan en el contacto de la pestaña de la rueda con la cara interna del carril.

**Tabla 2.2.** Tasas de desgaste de la BRR para contactos secos. Extraído de [75].

Régimen	$T\gamma$ (N)	Tasa de desgaste ( $W_R$ ) (mm <sup>2</sup> /km rodado)
Suave	$T\gamma < 100$	$0,25 T\gamma/D$
Transición	$100 \leq T\gamma < 200$	$25,0/D$
Severo	$200 \leq T\gamma$	$(1,19 T\gamma - 154)/D$

Los datos de esta ley de desgaste se han obtenidos para aceros del tipo R8T para las ruedas y BS11 para los carriles. Esta ley es válida para contacto rueda-carril en condiciones de superficies secas y limpias.

**Ley de desgaste de la University of Sheffield (USFD) [57]:** Al igual que la anterior, esta ley de desgaste forma parte de los *modelos de desgaste de transferencia de energía*. La ley de desgaste de la USFD se basa en datos experimentales obtenidos en condiciones de laboratorio en una máquina de doble disco y expresa la tasa de desgaste como el material perdido ( $\mu\text{g}$ ) por distancia rodada (m) por unidad de área (mm<sup>2</sup>).

Para la estimación del desgaste se usa el índice de desgaste  $T\gamma$  dividido por el área de contacto  $A$ . Este índice se conoce como  $T\gamma/A$ .

Según los mecanismos de desgaste que aparecen en el contacto rueda-carril, se distinguen tres regímenes, con distintas tasas de desgaste asociadas (ver Tabla 2.3):

- *Régimen suave*: en este primer régimen la tasa de desgaste crece linealmente con la energía disipada. El mecanismo de desgaste que prevalece es la oxidación.

La transición entre el régimen suave y el régimen severo está asociada al paso de un área con zona de adhesión y zona de deslizamiento a un área completa en deslizamiento.

- *Régimen severo*: en este régimen, la tasa de desgaste permanece constante. Esto es debido a que toda el área está en deslizamiento. El desgaste está controlado por la tensión tangencial que permanece saturada por el coeficiente de rozamiento. Las tensiones en el contacto producen un incremento de las tensiones cortantes en el material que se acumulan y producen rotura del material por delaminación (*ratcheting*).

La transición entre el régimen severo y el régimen catastrófico está asociada al cambio de temperatura, que produce un deterioro de las propiedades mecánicas de los materiales. Por tanto aumenta la tasa de desgaste.

- *Régimen catastrófico*: En este régimen la tasa de desgaste aumenta en gran medida, siendo proporcional al aumento de energía disipada. El mecanismo de desgaste que aparece es la delaminación severa.

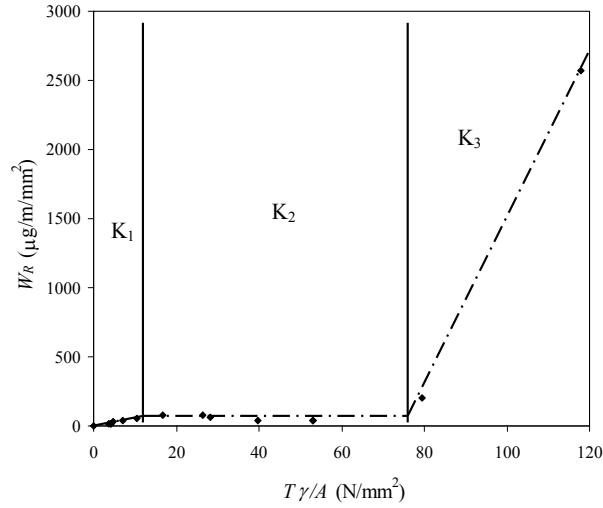
**Tabla 2.3.** Tasas de desgaste de la USFD. Extraído de [57].

Régimen	$T\gamma/A$ (N/mm <sup>2</sup> )	Tasa de desgaste ( $W_R$ ) ( $\mu\text{g/m rodado/mm}^2$ )
Suave ( $K_1$ )	$T\gamma/A \leq 10,4$	$5,3 T\gamma/A$
Severo ( $K_2$ )	$10,4 < T\gamma/A \leq 77,2$	55,0
Catastrófico ( $K_3$ )	$77,2 < T\gamma/A$	$55,0 + 61,9 (T\gamma/A - 77,2)$

Los coeficientes de la Tabla 2.3 se han obtenido para ruedas de acero R8T y carriles de acero 900A. Esta ley es válida para contactos secos y limpios.

La Figura 2.33 representa gráficamente los valores del desgaste medidos junto a los tres regímenes de desgaste identificados.





**Figura 2.33.** Tasas de desgaste y regímenes identificados según la ley USFD.

Esta ley de desgaste se puede aplicar de forma local o global [89, 102]:

- De forma *global* el índice  $T\gamma/A$  se puede calcular a partir de la fórmula (2.134), que incluye el efecto del momento de *spin*, y dividiendo por el área de contacto  $A$ :

$$\frac{T\gamma}{A} = \frac{|F_x v_x + F_y v_y + M_{sp} \phi|}{A} \quad (2.135)$$

Entonces, según el valor del índice  $T\gamma/A$  calculado globalmente, se obtiene el valor correspondiente de tasa de desgaste para el área de contacto según la Tabla 2.3.

- De forma *local* el índice  $T\gamma/A$  representa el producto de las tensiones tangenciales  $T/A$  por los valores de los deslizamientos adimensionales  $\gamma$  en el área de contacto:

$$\frac{T\gamma}{A}(x, y) = |p_x(x, y)\gamma_x(x, y) + p_y(x, y)\gamma_y(x, y)| \quad (2.136)$$

En esta fórmula, el efecto del momento de *spin* se tiene en cuenta en el cálculo de los deslizamientos  $\gamma_x$ ,  $\gamma_y$  en el área de contacto teniendo en cuenta el valor del término de *spin* en la ecuación (2.62).

Para el valor del índice  $T\gamma/A$  se obtiene la correspondiente tasa de desgaste para el elemento del área de contacto según la Tabla 2.3.

Hasta aquí se han descrito las distintas leyes de desgaste usadas en el contacto rueda-carril y los conceptos asociados a la evaluación del desgaste.

## 2.7. Conclusiones

En este capítulo se han estudiado distintos modelos para resolver el problema de contacto rueda-carril y posteriormente, realizar una estimación del desgaste. De los puntos presentados en el capítulo, se pueden extraer las siguientes conclusiones:

- Para el procedimiento de resolución del problema de contacto rueda-carril, debido a las características geométricas y mecánicas de los cuerpos en el contacto, se asume la hipótesis de cuasi-identidad elástica. Por tanto, la resolución del problema de contacto se plantea en tres pasos: (1) problema geométrico de contacto, (2) problema normal de contacto y (3) problema tangencial de contacto.
- Para la aplicación de un modelo de contacto en el campo de la simulación dinámica y la estimación del desgaste en los perfiles en el rango de baja frecuencia, éste debe reunir los siguientes requisitos:
  - Realizar una adecuada descripción del problema de contacto manteniendo un coste computacional compatible con el uso en un programa de simulación dinámica.
  - Procesar el área de contacto en el problema de resolución del contacto rueda-carril con el fin de obtener una distribución de las distintas magnitudes dentro del área, y así poder realizar una estimación del desgaste.
- Para cumplir los requisitos anteriores, en cuando al contacto rueda-carril se utilizan modelos de contacto *estacionarios* que proporcionan una adecuada descripción del problema de contacto para la aplicación de la estimación del desgaste en los perfiles. En cuanto a la estimación del desgaste, será recomendable emplear algoritmos de desgaste que hagan una evaluación local del área de contacto.
- Finalmente, para la estimación del desgaste a partir de indicadores obtenidos como solución del problema de contacto, será necesario disponer de leyes de desgaste que consideren los distintos estados tribológicos de las superficies en el contacto.

## 3. La herramienta de simulación dinámica

### 3.1. Introducción

El objetivo de este capítulo es obtener las ecuaciones que permiten modelizar el movimiento de un vehículo ferroviario en un circuito determinado. De esta forma estas ecuaciones se pueden implementar en un código y, dado un determinado trazado de vía, integrar el movimiento del vehículo.

Para la modelización del movimiento de los distintos cuerpos en la vía, se considerará una doble transformación entre sistemas de referencia: una primera transformación asociada a los giros de la vía (impuestos por el trazado de la vía) y una segunda transformación asociada al movimiento de cada cuerpo con respecto a la vía. En la obtención de las ecuaciones no se asumirán pequeños desplazamientos para ninguno de los giros o desplazamientos y se tendrá en cuenta las no-linealidades que aparecen; el hecho de despreciar algún término podría llevar a la obtención de una respuesta distinta bajo determinadas condiciones de contorno [97].

El conjunto de coordenadas utilizado pretende modelizar la *dinámica transversal* [32] del vehículo ferroviario en el *rango de baja frecuencia* con aplicación al *desgaste en los perfiles*. Se ha implementado un modelo sencillo de simulación dinámica donde no se considera la coordenada longitudinal en ninguno de los cuerpos que componen el vehículo ni el efecto de la rotación de los ejes ferroviarios; la rotación de los ejes se asume que se realiza a velocidad constante, por lo que se trata como un movimiento impuesto. Además, todos los sólidos que componen el vehículo se asumirán indeformables.

En cuanto a la modelización del contacto, las ecuaciones empleadas permiten aplicar un modelo genérico de contacto rueda carril basado en un enfoque de *contacto elástico* (ver Cap. 2). Según este enfoque, el conjunto de coordenadas que define la posición relativa del eje con respecto a la vía es independiente. Este enfoque permite modelar la situación de *multicontacto* (cuando aparece más de un punto de contacto sobre una rueda) lo que mejora la estimación de las áreas de contacto rueda-carril y, por tanto, del desgaste en los perfiles.

En el desarrollo de este capítulo, en primer lugar se presentan los sistemas de referencia empleados y las coordenadas utilizadas para describir el movimiento

de los cuerpos. En segundo lugar, se establece la formulación empleada en las ecuaciones del movimiento. Posteriormente, se obtienen las ecuaciones del movimiento, empleando el principio de Lagrange. Finalmente, se exponen las conclusiones.

## 3.2. Sistemas de referencia y coordenadas

En este apartado se definen los sistemas de referencia y las coordenadas utilizados para modelizar el movimiento de los cuerpos que componen el vehículo ferroviario.

### 3.2.1. Sistemas de referencia

Para la modelización del movimiento de los cuerpos que componen el vehículo se usa un conjunto de cuatro sistemas de referencia: sistema de referencia global  $xyz$ , sistema de referencia de la vía  $\tilde{x}\tilde{y}\tilde{z}$ , sistema de referencia del cuerpo  $\overline{xy}\overline{z}$  y sistema de referencia del área de contacto  $x_c y_c z_c$ . Entre ellos, el sistema de referencia de la vía, el sistema de referencia del cuerpo (en el caso de tratarse de un eje ferroviario) y el sistema de referencia del área de contacto se han definido en el Cap. 2. Por tanto en este capítulo se definen el sistema de referencia global y el sistema de referencia del cuerpo (en el caso genérico):

- **Sistema de referencia global o absoluto  $xyz$ :** Se define el origen en el inicio del circuito, con el eje  $x$  indicando la dirección y sentido de avance y el eje  $y$  definiendo la dirección lateral, de tal forma que según la regla de la mano derecha, el eje  $z$  sea vertical y hacia arriba. La orientación de los ejes de este sistema de referencia es fija y sirve para relacionar las posiciones y orientaciones de los distintos cuerpos del vehículo. El eje  $z$  indica la dirección en la que actúa la gravedad.
- **Sistema de referencia asociado a cada cuerpo  $\overline{xy}\overline{z}$ :** Este sistema de referencia está asociado a cada uno de los cuerpos que forman el vehículo. Se distingue entre si el cuerpo es un *eje ferroviario* o un *bastidor* (bogie o caja). En el Cap. 2 se define el sistema de referencia asociado a un eje ferroviario. En el caso de que se trate de un bastidor, este sistema de referencia se define con su origen en el centro de masas  $G$  del cuerpo cuando el vehículo está en la posición de equilibrio y centrado en la vía, cuyos ejes están alineados con los ejes principales de inercia del cuerpo, donde  $\overline{x}$  sigue la dirección longitudinal,  $\overline{y}$  la lateral y  $\overline{z}$  la vertical. El eje  $\overline{x}$  señala el sentido de avance y el sentido de  $\overline{y}$  se define de tal forma

que  $\bar{z}$  señale hacia arriba. La Figura 3.1 muestra un ejemplo del sistema de referencia  $\bar{xyz}$  asociado a un bastidor.

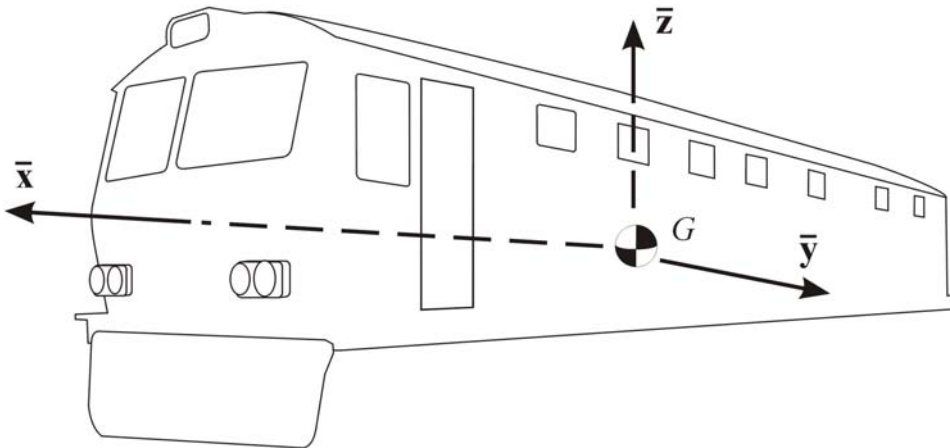


Figura 3.1. Sistema de referencia  $\bar{xyz}$  asociado a un bastidor.

### 3.2.2. Coordenadas

El conjunto de coordenadas empleado para expresar el movimiento de los cuerpos depende de si se trata de un *eje ferroviario* o de un *bastidor*. De forma genérica se puede expresar el conjunto de coordenadas que define el movimiento de un cuerpo en la vía como:

$$\mathbf{q} = \{y, z, \phi, \theta, \psi\}^T \quad (3.1)$$

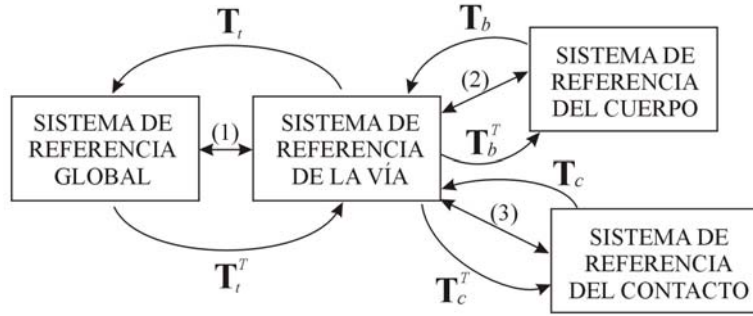
siendo  $y$  el desplazamiento lateral,  $z$  el desplazamiento vertical (ambos son desplazamientos del centro de masas del cuerpo  $G$  medidos en el sistema de referencia de la vía),  $\phi$  el giro alrededor del eje longitudinal  $X$  (ángulo de balanceo),  $\theta$  el giro alrededor del eje lateral  $Y$  (ángulo de cabeceo) y  $\psi$  el giro alrededor del eje vertical  $Z$  (ángulo de lazo). El movimiento en  $X$  se impone para todos y cada uno de los cuerpos del vehículo. En el caso de la coordenada  $\theta$ , existen dos planteamientos:

- Para un *eje ferroviario* se asume que la rotación alrededor del eje  $Y$  se realiza a velocidad constante, por lo que este giro es un movimiento impuesto y no una coordenada. Se usa el conjunto de coordenadas definido en el Cap. 2, según la fórmula (2.11).
- En el caso de tratarse de un *bastidor*, la coordenada  $\theta$  expresa el ángulo de cabeceo.

Los ángulos  $\phi$ ,  $\theta$ ,  $\psi$  son ángulos de Euler que definen la transformación de coordenadas según la secuencia Z-X-Y desde el sistema de referencia de la vía al sistema de referencia del cuerpo.

### 3.2.3. Transformaciones entre sistemas de referencia

A partir de los cuatro sistemas de referencia utilizados se pueden definir tres transformaciones de coordenadas según la Figura 3.2.



**Figura 3.2.** Esquema que presenta los cuatro sistemas de referencia utilizados y las tres transformaciones definidas entre éstos.

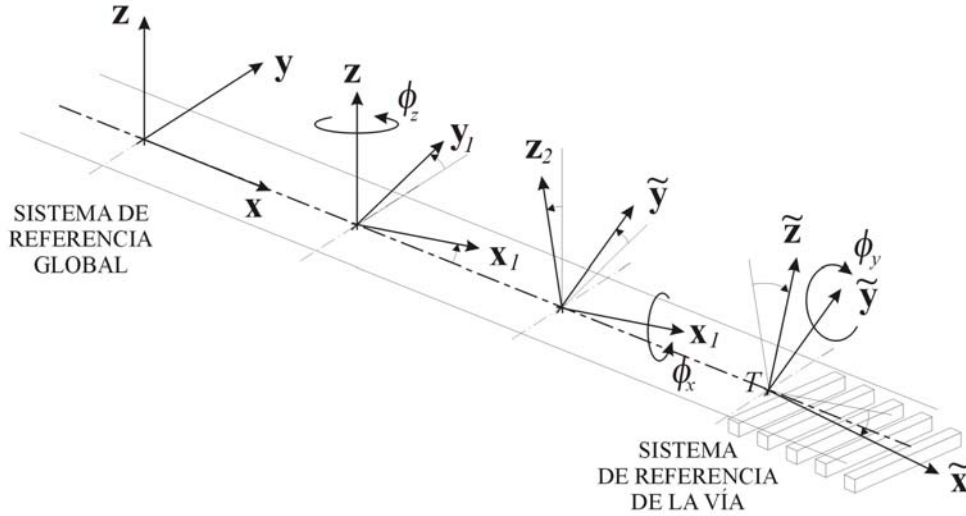
Estas transformaciones son:

1. *Transformación entre el sistema de referencia global y el sistema de referencia de la vía.* Esta primera transformación depende de los giros que aparecen en la vía  $\phi_x$ ,  $\phi_y$ ,  $\phi_z$ , según la secuencia Z-X-Y (definida desde el sistema de referencia global al sistema de referencia de la vía), tal como muestra la Figura 3.3. Estos giros son valores conocidos que dependen del trazado de la vía y su magnitud es grande, de tal forma que no se pueden asumir *pequeños desplazamientos*.

La transformación entre un vector expresado en el sistema de referencia de la vía  $\tilde{\mathbf{v}}$  y un vector en el sistema de referencia global  $\mathbf{v}$  es:

$$\mathbf{v} = [\mathbf{T}_Z(\phi_z)\mathbf{T}_X(\phi_x)\mathbf{T}_Y(\phi_y)] \tilde{\mathbf{v}} = \mathbf{T}_t(\phi_x, \phi_y, \phi_z) \tilde{\mathbf{v}} \quad (3.2)$$

donde  $\mathbf{T}_Z$ ,  $\mathbf{T}_X$ ,  $\mathbf{T}_Y$  son las matrices de transformación correspondientes a los giros alrededor del eje Z, X, Y, respectivamente, y  $\mathbf{T}_t$  es la matriz de transformación correspondiente a los giros de la vía. La expresión de estas matrices se muestra en el Anexo I. El subíndice  $t$  hace referencia a la vía (en inglés *track*).



**Figura 3.3.** Transformación entre el sistema de referencia global y el sistema de referencia de la vía.

2. *Transformación entre el sistema de referencia de la vía y el sistema de referencia del cuerpo.* Esta transformación depende de los giros  $\phi$ ,  $\theta$ ,  $\psi$ , según la secuencia Z-X-Y (definida desde el sistema de referencia de la vía al sistema de referencia del cuerpo), tal como muestra la Figura 3.4. Estos giros son coordenadas del problema. Aunque sean *pequeños desplazamientos* no se procederá a linealizar ninguna de las expresiones derivadas de estos ángulos debido a que si se eliminan términos puede obtenerse una respuesta distinta [97].

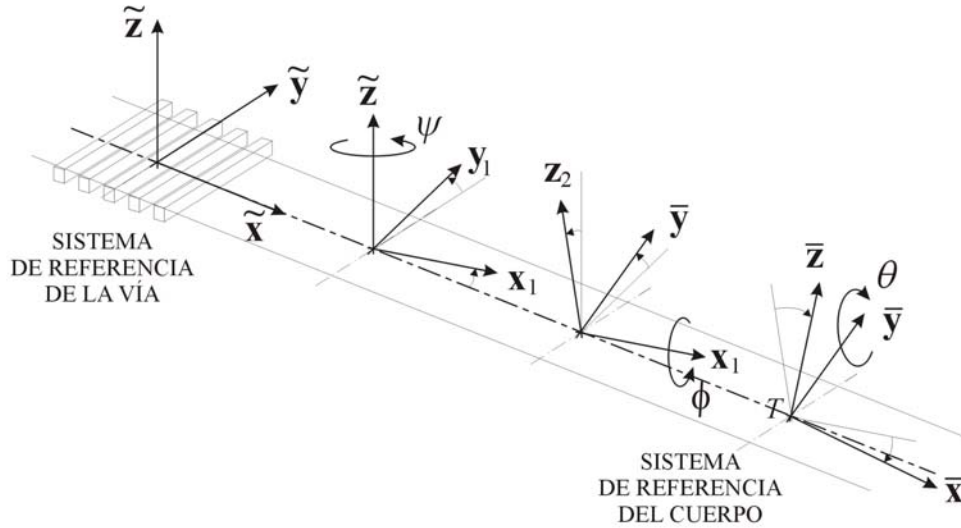
La transformación entre un vector expresado en el sistema de referencia del cuerpo  $\bar{\mathbf{v}}$  y un vector en el sistema de referencia de la vía  $\tilde{\mathbf{v}}$  es:

$$\tilde{\mathbf{v}} = [\mathbf{T}_Z(\psi)\mathbf{T}_X(\phi)\mathbf{T}_Y(\theta)] \bar{\mathbf{v}} = \mathbf{T}_b(\phi, \theta, \psi) \bar{\mathbf{v}} \quad (3.3)$$

donde  $\mathbf{T}_Z$ ,  $\mathbf{T}_X$ ,  $\mathbf{T}_Y$  son las matrices de transformación correspondientes a los giros alrededor del eje Z, X, Y, respectivamente y la matriz  $\mathbf{T}_b$  es la matriz de transformación asociada a los giros del cuerpo. La expresión de estas matrices se muestra en el Anexo I. El subíndice  $b$  se refiere al cuerpo (en inglés *body*).

En el caso de que el cuerpo sea un eje ferroviario no se considera el ángulo de cabeceo  $\theta$  en la transformación entre coordenadas, debido a que el eje es axisimétrico. El giro en  $\theta$  es un movimiento impuesto y no una

coordenada del problema. La expresión de la transformación se muestra en la ecuación (2.12).



**Figura 3.4.** Transformación entre el sistema de referencia de la vía y el sistema de referencia del cuerpo.

3. *Transformación entre el sistema de referencia de la vía y el sistema de referencia del área de contacto.* Esta transformación se hace a través de un giro alrededor del eje X (en este caso, se corresponde con el eje  $\tilde{x}$ ) de valor igual a la conicidad en el contacto (ver Figura 2.6). La transformación entre un vector en el sistema de referencia del contacto y el sistema de referencia de la vía (retomando la ecuación (2.13)) es:

$$\tilde{\mathbf{v}} = [\mathbf{T}_x(\gamma_o)] \mathbf{v}_c = \mathbf{T}_c(\gamma_o) \mathbf{v}_c$$

donde el subíndice  $c$  hace referencia al área de contacto,  $\gamma_o$  es la conicidad calculada para cada área de contacto según el modelo de contacto empleado y  $\mathbf{T}_x$  es la matriz de transformación correspondiente a un giro alrededor del eje X (Anexo I).

### 3.3. Formulación de las ecuaciones del movimiento

Como ya se ha mencionado en el Cap. 2 la elección del enfoque del problema de contacto empleado condiciona la formulación de las ecuaciones del movimiento.

En esta Tesis se usará un enfoque de *contacto elástico* [92, 95] (ver Cap. 2, sección 2.2.4). Por tanto, las coordenadas que definen la posición y orientación de



los *ejes* son independientes entre sí. Según el modelo de vehículo empleado en esta tesis (cuerpos conectados mediante elementos visco-elásticos) las coordenadas que definen la posición y orientación de los *bastidores* son también independientes entre sí. De esta forma, tras desarrollar las ecuaciones del movimiento, se obtendrá un conjunto de ecuaciones diferenciales ordinarias [31, 96].

El conjunto de coordenadas independientes que definen la posición y orientación de los cuerpos que forman el vehículo se representa por el vector  $\mathbf{q}$ .

### 3.4. Ecuaciones del movimiento

En este apartado se presenta la deducción de las ecuaciones del movimiento para un cuerpo genérico sometido a una doble transformación de coordenadas: para un cuerpo genérico se tiene una primera transformación asociada a la geometría del trazado de la vía, que son datos del problema, y una segunda transformación asociada a los giros del propio cuerpo, que son coordenadas del problema.

En el desarrollo que sigue se supondrá que el vehículo tiene una velocidad de traslación longitudinal constante igual a  $V$  y que el centro de masas de todos los cuerpos poseen dicha velocidad en la dirección longitudinal  $\tilde{x}$  de la vía.

Las ecuaciones del movimiento se usarán aplicando el principio de Lagrange [31, 96]. La expresión de las ecuaciones de Lagrange, para un conjunto de coordenadas independientes, es:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial E_c}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial E_c}{\partial q_j} - Q_j = 0 \quad (3.4)$$

donde  $E_c$  es la energía cinética del sistema,  $Q_j$  la fuerza generalizada correspondiente a la coordenada  $q_j$  con  $j = 1, 2 \dots N$  ( $N$  es el número total de coordenadas) y  $\dot{q}_j$  su primera derivada con respecto al tiempo. Esta misma metodología se ha seguido en [13] para obtener las ecuaciones del movimiento en el caso de un tren articulado.

Dentro del término de fuerzas generalizadas se tendrán en cuenta las aportaciones de todas las fuerzas externas entre las que cabe mencionar: fuerza peso, fuerzas originadas en el contacto rueda-carril (para el caso de los ejes), fuerzas en los elementos de unión (muelles y amortiguadores) y fuerzas (o momentos) directamente aplicados.

### 3.4.1. Términos derivados de la energía cinética

En este apartado se desarrolla la cinemática de un cuerpo genérico para finalmente obtener los términos correspondientes en las ecuaciones de Lagrange. La energía cinética para un cuerpo con movimiento de traslación y de rotación tiene la expresión:

$$E_c = \frac{1}{2}m(\mathbf{v}_G)^T \mathbf{v}_G + \frac{1}{2}\boldsymbol{\omega}^T \mathbf{I}_G \boldsymbol{\omega} \quad (3.5)$$

donde  $m$  es la masa del cuerpo,  $\mathbf{v}_G$  la velocidad absoluta del centro de masas,  $\boldsymbol{\omega}$  la velocidad angular del cuerpo e  $\mathbf{I}_G$  el tensor de inercia del cuerpo (con  $\boldsymbol{\omega}$  e  $\mathbf{I}_G$  expresados en el mismo sistema de referencia).

En la ecuación anterior, el primer término representa la energía cinética de traslación y el segundo término la energía cinética de rotación.

Para la obtención de las ecuaciones del movimiento el término de la energía cinética de rotación se expresará en el sistema de referencia del cuerpo. De esta forma, el tensor de inercia  $\bar{\mathbf{I}}_G$  será una matriz diagonal y constante.

En los siguientes puntos se obtendrán las expresiones de las velocidades y aceleraciones en función de las coordenadas del problema.

Se usará la siguiente notación con el fin de expresar el sistema de referencia en el que se mide cada vector:  $\mathbf{v}$  si el vector está medido en el sistema de referencia global,  $\tilde{\mathbf{v}}$  si lo está en el sistema de referencia de la vía,  $\bar{\mathbf{v}}$  en el sistema de referencia del cuerpo y  $\mathbf{v}_c$  en el sistema de referencia del contacto.

#### a. Cinemática

En este punto se obtienen las expresiones de las distintas magnitudes cinemáticas que describen los movimientos de los cuerpos y de los distintos términos que aparecen más adelante en la expresión de las ecuaciones del movimiento aplicando el principio de Lagrange.

Para modelizar el movimiento de los distintos cuerpos que forman un vehículo ferroviario, se distinguirá entre un movimiento de arrastre del sistema de referencia de la vía y un movimiento relativo del cuerpo respecto de la vía. Los términos asociados al movimiento de arrastre se denotarán con el subíndice  $t$  (del inglés *track*, vía), y los términos asociados al movimiento relativo del cuerpo con el subíndice  $b$  (del inglés *body*, cuerpo).

Los giros de la vía y del cuerpo se pueden ordenar en un vector, respectivamente, como:

$$\mathbf{\Phi}_t = \{\phi_x \ \phi_y \ \phi_z\}^T \quad (3.6)$$

$$\mathbf{\Phi}_b = \{\phi \ \theta \ \psi\}^T \quad (3.7)$$

Cabe recordar que en las expresiones anteriores, los giros son ángulos de Euler.

De la misma forma se puede expresar el vector de desplazamientos del centro de masas del cuerpo medido en el sistema de referencia de la vía:

$$\tilde{\mathbf{u}}_b = \{0 \ y \ z\}^T \quad (3.8)$$

### ***a.1. Posición***

La **posición** del centro de masas de un cuerpo  $j$  (Figura 3.5) en el sistema de referencia global ( $\mathbf{r}_G$ ) tiene la expresión (se omite el subíndice  $j$ ):

$$\mathbf{r}_G = \mathbf{r}_T + \mathbf{r}_{TG} = \mathbf{r}_T + \mathbf{T}_t \tilde{\mathbf{u}}_b \quad (3.9)$$

donde  $\mathbf{r}_T$  es la posición del origen del sistema de referencia de la vía asociado al cuerpo  $j$ ,  $\mathbf{r}_{TG}$  es el vector que va desde el origen del sistema de referencia de la vía al centro de masas del cuerpo (ambos medidos en el sistema de referencia de la vía),  $\mathbf{T}_t$  es la matriz de transformación asociada a los giros de la vía y  $\tilde{\mathbf{u}}_b$  es el vector de posición del centro de masas del cuerpo, medido en el sistema de referencia de la vía.

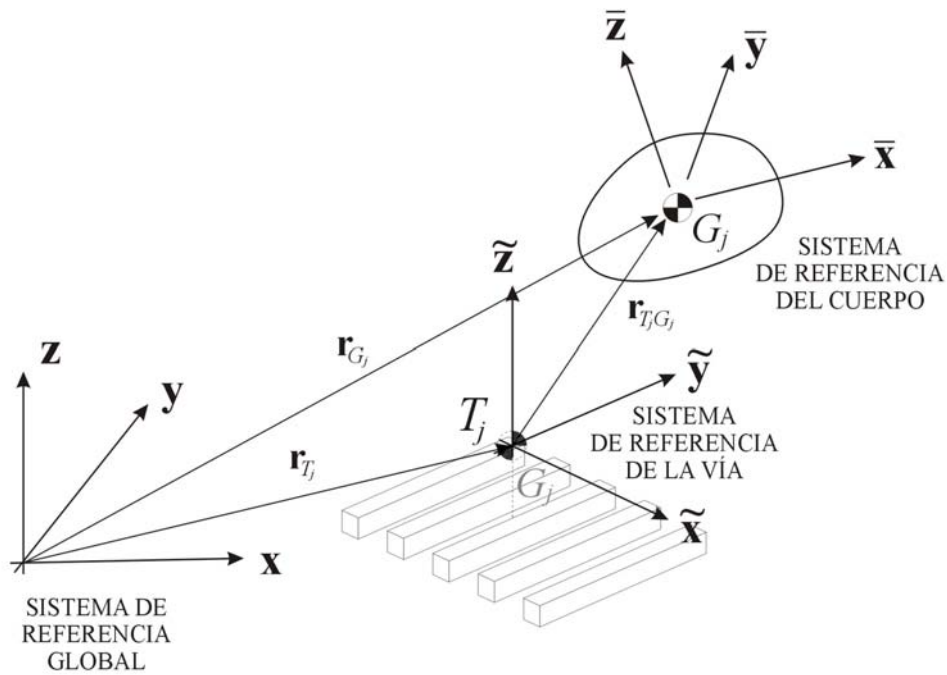


Figura 3.5. Posición del centro de masas de un cuerpo \$j\$.

### a.2. Velocidad

En primer lugar se deducen los términos de **translación**. La velocidad absoluta del centro de masas de un sólido en el sistema de referencia global (\$v\_G\$) se obtiene derivando la expresión (3.9) con respecto al tiempo:

$$\mathbf{v}_G = \dot{\mathbf{r}}_G = \dot{\mathbf{r}}_T + \dot{\mathbf{T}}_t \tilde{\mathbf{u}}_b + \mathbf{T}_t \dot{\tilde{\mathbf{u}}}_b \quad (3.10)$$

Aplicando las propiedades deducidas en el Anexo II para obtener las derivadas de una matriz de transformación, queda:

$$\mathbf{v}_G = \dot{\mathbf{r}}_G = \dot{\mathbf{r}}_T + \underline{\underline{\Omega}}_t \mathbf{T}_t \tilde{\mathbf{u}}_b + \mathbf{T}_t \dot{\tilde{\mathbf{u}}}_b \quad (3.11)$$

siendo los nuevos términos:

- \$\dot{\mathbf{r}}\_T\$ la velocidad del origen del sistema de referencia de la vía (\$T\$), expresado en el sistema de referencia global.
- \$\underline{\underline{\Omega}}\_t\$ la matriz antisimétrica correspondiente al vector velocidad angular \$\underline{\underline{\Omega}}\_t\$ de arrastre expresado en el sistema de referencia global. Este vector se obtiene más adelante y su expresión se encuentra en el Anexo II.

- $\dot{\tilde{\mathbf{u}}}_b$  la primera derivada temporal del vector  $\tilde{\mathbf{u}}_b$  y representa la velocidad relativa del centro de masas del cuerpo medida en el sistema de referencia de la vía:

$$\dot{\tilde{\mathbf{u}}}_b = \{0 \ \dot{y} \ \dot{z}\}^T \quad (3.12)$$

Considerando ahora los términos de **rotación**, la expresión de la velocidad angular absoluta del cuerpo medida en el sistema de referencia global ( $\boldsymbol{\omega}$ ), se calcula como un término de arrastre que expresa la cinemática impuesta por el trazado de la vía ( $\boldsymbol{\Omega}_t$ ) más un término de movimiento relativo ( $\boldsymbol{\omega}_b$ ):

$$\boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{\Omega}_t + \boldsymbol{\omega}_b \quad (3.13)$$

El movimiento de arrastre está prescrito por la geometría de la vía y la velocidad de circulación. El movimiento relativo depende de las coordenadas del problema.

Por una parte, la velocidad de arrastre se puede expresar como [96]:

$$\boldsymbol{\Omega}_t = \mathbf{G}_t \dot{\boldsymbol{\Phi}}_t \quad (3.14)$$

donde la matriz  $\mathbf{G}_t$  relaciona el vector velocidad angular de arrastre  $\boldsymbol{\Omega}_t$  con el vector  $\dot{\boldsymbol{\Phi}}_t$  donde se ordenan las derivadas con respecto al tiempo de los ángulos de Euler asociados a las rotaciones del sistema de referencia de la vía. Esta matriz depende de los giros de la vía (ángulos de Euler) y su expresión se encuentra en el Anexo III.

Por otra parte, la velocidad angular relativa medida en el sistema de referencia de la vía, se puede expresar de forma análoga como

$$\tilde{\boldsymbol{\omega}}_b = \tilde{\mathbf{G}}_b \dot{\boldsymbol{\Phi}}_b \quad (3.15)$$

donde la matriz  $\tilde{\mathbf{G}}_b$  relaciona la velocidad angular relativa del cuerpo  $\tilde{\boldsymbol{\omega}}_b$  expresada en el sistema de referencia de la vía con el vector  $\dot{\boldsymbol{\Phi}}_b$  donde se ordenan las derivadas con respecto al tiempo de los ángulos de Euler asociados a las rotaciones del sistema de referencia asociado al cuerpo. Esta matriz depende de los giros del cuerpo (ángulos de Euler) y su expresión se encuentra en el Anexo III.

Tomando la ecuación (3.15) y transformándola al sistema de referencia global, queda:

$$\boldsymbol{\omega}_b = \mathbf{T}_t \tilde{\boldsymbol{\omega}}_b = \mathbf{T}_t \tilde{\mathbf{G}}_b \dot{\boldsymbol{\Phi}}_b \quad (3.16)$$

Sustituyendo las expresiones (3.14) y (3.16) en (3.13) se tiene la expresión de la velocidad angular absoluta:

$$\boldsymbol{\omega} = \mathbf{G}_t \dot{\boldsymbol{\Phi}}_t + \mathbf{T}_t \tilde{\mathbf{G}}_b \dot{\boldsymbol{\Phi}}_b \quad (3.17)$$

En la formulación de las ecuaciones del movimiento, los términos de rotación se expresarán en el sistema de referencia del cuerpo. La expresión de la velocidad angular absoluta expresada en el sistema de referencia del cuerpo ( $\bar{\boldsymbol{\omega}}$ ) se obtiene mediante la doble transformación inversa a partir de  $\boldsymbol{\omega}$ , según:

$$\bar{\boldsymbol{\omega}} = \mathbf{T}_b^T \mathbf{T}_t^T \boldsymbol{\omega} \quad (3.18)$$

Desarrollando la expresión anterior y agrupando, queda:

$$\bar{\boldsymbol{\omega}} = \mathbf{T}_b^T (\mathbf{T}_t^T \mathbf{G}_t) \dot{\boldsymbol{\Phi}}_t + (\mathbf{T}_b^T \tilde{\mathbf{G}}_b) \dot{\boldsymbol{\Phi}}_b = \mathbf{T}_b^T \tilde{\mathbf{G}}_t \dot{\boldsymbol{\Phi}}_t + \bar{\mathbf{G}}_b \dot{\boldsymbol{\Phi}}_b \quad (3.19)$$

donde se han tenido en cuenta las siguientes simplificaciones:

- $\tilde{\mathbf{G}}_t = \mathbf{T}_t^T \mathbf{G}_t$ , matriz que depende exclusivamente de los giros de la vía. Aunque la notación se exprese de esta forma, no representa una transformación de coordenadas.
- $\mathbf{T}_t^T \mathbf{T}_t = \mathbf{I}$  aplicando la propiedad básica de las matrices de transformación [96].  $\mathbf{I}$  es la matriz identidad.
- $\bar{\mathbf{G}}_b = \mathbf{T}_b^T \tilde{\mathbf{G}}_b$  matriz que depende exclusivamente de los giros del cuerpo. Al igual como sucede con las matrices  $\mathbf{G}$  asociadas a los giros de la vía, aunque la notación se exprese de esta forma no representa una transformación de coordenadas.

Las expresiones de las matrices  $\tilde{\mathbf{G}}_t$  y  $\bar{\mathbf{G}}_b$  se presentan en el Anexo III.

### ***a.3. Aceleración***

Al igual que en el punto anterior, en primer lugar se presentan los valores de las magnitudes de **translación**.

Derivando la ecuación (3.11) con respecto al tiempo se obtiene la expresión de la aceleración absoluta de translación del centro de masas de un cuerpo en el sistema de referencia global ( $\mathbf{a}_G$ ). Reordenando, se tiene:

$$\begin{aligned} \mathbf{a}_G = \dot{\mathbf{v}}_G = \ddot{\mathbf{r}}_T + \underline{\underline{\dot{\mathbf{Q}}}}_T \mathbf{T}_t \tilde{\mathbf{u}}_b + \underline{\underline{\mathbf{Q}}}_T \underline{\underline{\mathbf{Q}}}_T \mathbf{T}_t \tilde{\mathbf{u}}_b + \underline{\underline{\mathbf{Q}}}_T \mathbf{T}_t \ddot{\tilde{\mathbf{u}}}_b + \underline{\underline{\mathbf{Q}}}_T \mathbf{T}_t \dot{\tilde{\mathbf{u}}}_b + \mathbf{T}_t \ddot{\tilde{\mathbf{u}}}_b = \\ = \left( \ddot{\mathbf{r}}_T + \underline{\underline{\dot{\mathbf{Q}}}}_T \mathbf{T}_t \tilde{\mathbf{u}}_b + \underline{\underline{\mathbf{Q}}}_T \underline{\underline{\mathbf{Q}}}_T \mathbf{T}_t \tilde{\mathbf{u}}_b \right) + \left( \mathbf{T}_t \ddot{\tilde{\mathbf{u}}}_b \right) + \left( 2 \underline{\underline{\mathbf{Q}}}_T \mathbf{T}_t \dot{\tilde{\mathbf{u}}}_b \right) \end{aligned} \quad (3.20)$$

siendo:

- $\ddot{\mathbf{r}}_T$  la aceleración del origen del sistema de referencia de la vía ( $T$ ), expresada en el sistema de referencia global.
- $\underline{\underline{\dot{\mathbf{Q}}}}_T$  la matriz antisimétrica correspondiente al vector de aceleración angular de arrastre  $\dot{\underline{\underline{\mathbf{Q}}}}_T$  en el sistema de referencia absoluto, que se calcula como  $\underline{\underline{\dot{\mathbf{Q}}}}_T = d\underline{\underline{\mathbf{Q}}}_T/dt$ .
- $\ddot{\tilde{\mathbf{u}}}_b$  la segunda derivada del vector  $\tilde{\mathbf{u}}_b$  con respecto al tiempo, que representa la aceleración relativa del centro de masas del cuerpo medida en el sistema de referencia de la vía:

$$\ddot{\tilde{\mathbf{u}}}_b = \frac{d^2 \tilde{\mathbf{u}}_b}{dt^2} = \{0 \ \ddot{y} \ \ddot{z}\}^T \quad (3.21)$$

En la expresión (3.20) se han distinguido tres términos agrupados entre paréntesis: el primero de ellos representa la aceleración de arrastre impuesta por el trazado de la vía, el segundo la aceleración relativa del centro de masas con respecto a la vía y el tercero la aceleración de Coriolis, todos ellos medidos en el sistema de referencia global.

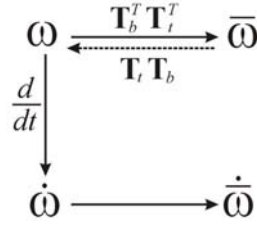
Se determinan ahora las magnitudes asociadas a la **rotación**. Derivando la ecuación (3.17) con respecto al tiempo se obtiene la aceleración angular de arrastre  $\dot{\underline{\underline{\omega}}}$  expresada en el sistema de referencia global:

$$\dot{\underline{\underline{\omega}}} = \frac{d\underline{\underline{\omega}}}{dt} = \dot{\mathbf{G}}_t \underline{\underline{\Phi}}_t + \mathbf{G}_t \ddot{\underline{\underline{\Phi}}}_t + \left( \underline{\underline{\mathbf{Q}}}_T \mathbf{T}_t \tilde{\mathbf{G}}_b + \mathbf{T}_t \dot{\tilde{\mathbf{G}}}_b \right) \dot{\underline{\underline{\Phi}}}_b + \mathbf{T}_t \tilde{\mathbf{G}}_b \ddot{\underline{\underline{\Phi}}}_b \quad (3.22)$$

siendo  $\dot{\mathbf{G}}_t = d\mathbf{G}_t/dt$  y  $\dot{\tilde{\mathbf{G}}}_b = d\tilde{\mathbf{G}}_b/dt$ , matrices cuya expresión se obtiene en el Anexo III.

Puesto que los términos de rotación se expresan en el sistema de referencia del cuerpo será necesario también obtener la derivada con respecto al tiempo de la velocidad angular expresada en el sistema de referencia del cuerpo, denotado como  $\dot{\underline{\underline{\omega}}}$ . Esta expresión se podría obtener directamente derivando  $\underline{\underline{\omega}}$  con respecto al tiempo de (3.19), pero este vector está medido en un sistema de referencia cuyos

ejes cambian de orientación en el tiempo, lo que dificulta su obtención. En cambio se dispone de la expresión de  $\dot{\omega}$  que es la derivada de la velocidad angular expresada en ejes fijos con respecto al tiempo. Para la obtención de  $\dot{\bar{\omega}}$  se deriva la ecuación (3.18), se sustituye el valor de  $\dot{\omega}$  (3.22) y se despeja  $\dot{\bar{\omega}}$ , tal como plantea el procedimiento de la Figura 3.6.



**Figura 3.6.** Esquema para la obtención de la expresión de la derivada  $\dot{\bar{\omega}}$ .

Tomando la expresión (3.18), se deriva con respecto al tiempo y se tiene

$$\dot{\omega} = \dot{T}_t T_b \bar{\omega} + T_t \dot{T}_b \bar{\omega} + T_t T_b \dot{\bar{\omega}} \quad (3.23)$$

Despejando de la ecuación anterior el término  $\dot{\bar{\omega}}$  y aplicando las propiedades de las matrices de transformación y de sus derivadas (Anexo II) se llega a la expresión:

$$\begin{aligned} \dot{\bar{\omega}} &= T_b^T T_t^T \dot{\omega} - \underbrace{T_b^T T_t^T \dot{T}_t T_b}_{\underline{\underline{\Omega_t}}} \bar{\omega} - T_b^T \underbrace{T_t^T T_t \dot{T}_b}_{\mathbf{I}} \bar{\omega} = \\ &= \underbrace{T_b^T T_t^T \dot{\omega}}_{\dot{\bar{\omega}}} - \underbrace{T_b^T \underline{\underline{\tilde{\Omega}_t}} T_b}_{\underline{\underline{\tilde{\Omega}_t}}} \bar{\omega} - \underbrace{T_b^T \dot{T}_b}_{\underline{\underline{\Omega_b}}} \bar{\omega} \end{aligned} \quad (3.24)$$

Agrupando y reordenando se llega a la expresión compacta:

$$\dot{\bar{\omega}} = \frac{d\bar{\omega}}{dt} = \dot{\bar{\omega}} - \left( \underline{\underline{\tilde{\Omega}_t}} + \underline{\underline{\Omega_b}} \right) \bar{\omega} \quad (3.25)$$

siendo:

- $\bar{\omega} = T_b^T T_t^T \dot{\omega}$  con la expresión de  $\dot{\omega}$  dada en (3.22).
- $\underline{\underline{\tilde{\Omega}_t}}$  la matriz antisimétrica correspondiente al vector de velocidad angular del sistema de referencia de la vía  $\bar{\Omega}_t$  expresado en el sistema de referencia del cuerpo. Se calcula a través de la transformación de coordenadas para matrices antisimétricas  $\underline{\underline{\tilde{\Omega}_t}} = T_b^T \underline{\underline{\tilde{\Omega}_t}} T_b$  con la expresión de  $\underline{\underline{\tilde{\Omega}_t}}$  dada en el Anexo II. Por otra parte  $\underline{\underline{\tilde{\Omega}_t}}$  es la matriz antisimétrica correspondiente al



vector  $\tilde{\Omega}_i$  en el sistema de referencia de la vía. Se expresa de esta forma únicamente para obtener una fórmula compacta, ya que la matriz  $\underline{\underline{\Omega}}_i$  dependerá tanto de los giros de la vía, como de los giros del cuerpo.

- $\underline{\underline{\Omega}}_b$  la matriz antisimétrica correspondiente al vector de velocidad angular del sistema de referencia del cuerpo ( $\overline{\Omega}_b$ ) medida en el sistema de referencia del cuerpo. Su expresión se obtiene en el Anexo II.
- $\overline{\omega}$  es el vector de velocidad angular del cuerpo expresado en el sistema de referencia del cuerpo, según se muestra en la ecuación (3.19).

### b. Aportación a la ecuación del movimiento

Una vez obtenidos los términos derivados de la cinemática, se obtendrá su correspondiente aportación en las ecuaciones del movimiento.

Retomando la expresión (3.5) de la energía cinética para el cuerpo  $j$  con movimiento de translación y de rotación.

$$E_c^j = \frac{1}{2} m_j \mathbf{v}_{G_j}^T \mathbf{v}_{G_j} + \frac{1}{2} \overline{\omega}_j^T \overline{\mathbf{I}}_{G_j} \overline{\omega}_j$$

El término asociado a la energía cinética de rotación se expresará en el sistema de referencia del cuerpo. Por tanto, el tensor de inercia del cuerpo  $j$  ( $\overline{\mathbf{I}}_{G_j}$ ) tiene como expresión la siguiente matriz diagonal:

$$\overline{\mathbf{I}}_{G_j} = \begin{bmatrix} I_{x_j} & 0 & 0 \\ 0 & I_{y_j} & 0 \\ 0 & 0 & I_{z_j} \end{bmatrix} \quad (3.26)$$

matriz que es diagonal.

Debido a que la matriz  $\overline{\mathbf{I}}_{G_j}$  es simétrica se podrán aplicar algunas propiedades en la derivación de las ecuaciones del movimiento.

Nótese que los términos de energía cinética de translación se han expresado en el sistema de referencia global, mientras que los términos de la energía cinética de rotación en el sistema de referencia del cuerpo.

Considerando las aportaciones a la energía cinética de todos los cuerpos que forman en vehículo ferroviario, la energía cinética de todo el sistema se calcula como:

$$E_c = \sum_{j=1}^M E_c^j \quad (3.27)$$

siendo  $M$  el número total de cuerpos que forman el vehículo ferroviario.

La aportación de la energía cinética a las ecuaciones del movimiento, según la ecuación de Lagrange (ecuación (3.4), [96]), es:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial E_c}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial E_c}{\partial q_i} \quad (3.28)$$

con  $i = 1, 2 \dots N$ , siendo  $N$  el número de coordenadas del vehículo.

En los siguientes puntos se va a obtener la aportación en las ecuaciones del movimiento para cada una de las coordenadas, considerando el conjunto de coordenadas que define el movimiento de un cuerpo (3.1).

### ***b.1. Coordenada y***

Por una parte, la derivada de la energía cinética con respecto a  $\dot{y}$  del cuerpo  $j$  (omitiendo subíndices  $j$ ) es:

$$\frac{\partial E_c}{\partial \dot{y}} = m \mathbf{v}_G^T \frac{\partial \mathbf{v}_G}{\partial \dot{y}} = m \mathbf{v}_G^T \left( \mathbf{T}_t \begin{Bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{Bmatrix} \right) \quad (3.29)$$

Derivando (3.29) con respecto al tiempo queda:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial E_c}{\partial \dot{y}} \right) = \frac{d}{dt} \left( m \mathbf{v}_G^T \mathbf{T}_t \begin{Bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{Bmatrix} \right) = m \dot{\mathbf{v}}_G^T \mathbf{T}_t \begin{Bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{Bmatrix} + m \mathbf{v}_G^T \dot{\mathbf{T}}_t \begin{Bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{Bmatrix} = m \mathbf{a}_G^T \mathbf{T}_t \begin{Bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{Bmatrix} + m \mathbf{v}_G^T \left( \dot{\mathbf{T}}_t \begin{Bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{Bmatrix} \right) \quad (3.30)$$

Por otra parte, calculando la derivada de la energía cinética con respecto a  $y$ :

$$\frac{\partial E_c}{\partial y} = m \mathbf{v}_G^T \frac{\partial \mathbf{v}_G}{\partial y} = m \mathbf{v}_G^T \left( \mathbf{T}_t \begin{Bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{Bmatrix} \right) \quad (3.31)$$

Considerando las ecuaciones (3.30) y (3.31), la aportación de la energía cinética a la ecuación del movimiento para la coordenada  $y$  del cuerpo  $j$ , es:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial E_c}{\partial \dot{y}} \right) - \frac{\partial E_c}{\partial y} = m \mathbf{a}_G^T \mathbf{T}_t^{(2)} \quad (3.32)$$

donde el superíndice  $\langle i \rangle$  representa la columna  $i$  de la matriz  $\mathbf{T}_t$ .

### b.2. Coordenada $z$

Procediendo de la misma forma, se llega a la expresión:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial E_c}{\partial \dot{z}} \right) - \frac{\partial E_c}{\partial z} = m \mathbf{a}_G^T \mathbf{T}_t^{(3)} \quad (3.33)$$

### b.3. Coordenada $\phi$

Por una parte, la derivada de la energía cinética con respecto a  $\dot{\phi}$ , sabiendo que la matriz  $\bar{\mathbf{I}}_G$  es simétrica y tomando la expresión de  $\bar{\boldsymbol{\omega}}$  dada en (3.19), tiene la expresión:

$$\frac{\partial E_c}{\partial \dot{\phi}} = \bar{\boldsymbol{\omega}}^T \bar{\mathbf{I}}_G \frac{\partial \bar{\boldsymbol{\omega}}}{\partial \dot{\phi}} = \bar{\boldsymbol{\omega}}^T \bar{\mathbf{I}}_G \left( \bar{\mathbf{G}}_b \frac{\partial \dot{\boldsymbol{\Phi}}_b}{\partial \dot{\phi}} \right) = \bar{\boldsymbol{\omega}}^T \bar{\mathbf{I}}_G \bar{\mathbf{G}}_b^{(1)} \quad (3.34)$$

Derivando ahora esta expresión con respecto al tiempo, con  $\bar{\mathbf{I}}_G$  constante, queda:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial E_c}{\partial \dot{\phi}} \right) = \frac{d\bar{\boldsymbol{\omega}}^T}{dt} \bar{\mathbf{I}}_G \bar{\mathbf{G}}_b^{(1)} + \bar{\boldsymbol{\omega}}^T \bar{\mathbf{I}}_G \frac{d\bar{\mathbf{G}}_b^{(1)}}{dt} = \dot{\bar{\boldsymbol{\omega}}}^T \bar{\mathbf{I}}_G \bar{\mathbf{G}}_b^{(1)} + \bar{\boldsymbol{\omega}}^T \bar{\mathbf{I}}_G \dot{\bar{\mathbf{G}}}_b^{(1)} \quad (3.35)$$

Por otra parte, obteniendo ahora la derivada de la energía cinética con respecto a  $\phi$  del cuerpo  $j$ :

$$\frac{\partial E_c}{\partial \phi} = \bar{\boldsymbol{\omega}}^T \bar{\mathbf{I}}_G \frac{\partial \bar{\boldsymbol{\omega}}}{\partial \phi} = \bar{\boldsymbol{\omega}}^T \bar{\mathbf{I}}_G \left( \frac{\partial \mathbf{T}_b^T}{\partial \phi} \tilde{\mathbf{G}}_t \dot{\boldsymbol{\Phi}}_t + \frac{\partial \bar{\mathbf{G}}_b}{\partial \phi} \dot{\boldsymbol{\Phi}}_b \right) \quad (3.36)$$

Combinando las ecuaciones (3.35) y (3.36) se obtiene la aportación de la energía cinética a la ecuación del movimiento para la coordenada  $\phi$ :

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial E_c}{\partial \dot{\phi}} \right) - \frac{\partial E_c}{\partial \phi} = \dot{\bar{\omega}}^T \bar{\mathbf{I}}_G \bar{\mathbf{G}}_b^{(1)} + \bar{\omega}^T \bar{\mathbf{I}}_G \left( \dot{\bar{\mathbf{G}}}_b^{(1)} - \frac{\partial \mathbf{T}_b^T}{\partial \phi} \tilde{\mathbf{G}}_t \dot{\Phi}_t - \frac{\partial \bar{\mathbf{G}}_b}{\partial \phi} \dot{\Phi}_b \right) \quad (3.37)$$

La expresión de la matriz  $\frac{\partial \bar{\mathbf{G}}_b}{\partial \phi}$  se encuentra en el Anexo III.

#### ***b.4. Coordenada $\theta$***

Procediendo de la misma forma que para la coordenada  $\phi$  se llega a la expresión:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial E_c}{\partial \dot{\theta}} \right) - \frac{\partial E_c}{\partial \theta} = \dot{\bar{\omega}}^T \bar{\mathbf{I}}_G \bar{\mathbf{G}}_b^{(2)} + \bar{\omega}^T \bar{\mathbf{I}}_G \left( \dot{\bar{\mathbf{G}}}_b^{(2)} - \frac{\partial \mathbf{T}_b^T}{\partial \theta} \tilde{\mathbf{G}}_t \dot{\Phi}_t - \frac{\partial \bar{\mathbf{G}}_b}{\partial \theta} \dot{\Phi}_b \right) \quad (3.38)$$

La expresión de la matriz  $\frac{\partial \bar{\mathbf{G}}_b}{\partial \theta}$  se encuentra en el Anexo III.

#### ***b.5. Coordenada $\psi$***

Del mismo modo, para la coordenada  $\psi$  se obtiene:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial E_c}{\partial \dot{\psi}} \right) - \frac{\partial E_c}{\partial \psi} = \dot{\bar{\omega}}^T \bar{\mathbf{I}}_G \bar{\mathbf{G}}_b^{(3)} + \bar{\omega}^T \bar{\mathbf{I}}_G \left( \dot{\bar{\mathbf{G}}}_b^{(3)} - \frac{\partial \mathbf{T}_b^T}{\partial \psi} \tilde{\mathbf{G}}_t \dot{\Phi}_t - \frac{\partial \bar{\mathbf{G}}_b}{\partial \psi} \dot{\Phi}_b \right) \quad (3.39)$$

La expresión de la matriz  $\frac{\partial \bar{\mathbf{G}}_b}{\partial \psi}$  se encuentra en el Anexo III.

Una vez obtenida la aportación de la energía cinética, se procede a obtener la aportación de las fuerzas generalizadas en las ecuaciones del movimiento.

### **3.4.2. Fuerzas generalizadas**

Dentro de este término se incluyen las aportaciones de las fuerzas externas entre las que cabe destacar: acciones directamente aplicadas, fuerza peso, fuerzas originadas en el contacto rueda-carril y uniones viscoelásticas entre los distintos cuerpos que forman el vehículo.

Las fuerzas generalizadas se obtendrán mediante el principio de los trabajos virtuales [96]. Dado un conjunto de acciones aplicado en un cuerpo  $j$ , el trabajo virtual puede expresarse como:

$$\delta W_j = \sum_{i=1}^{n_F} \mathbf{F}_i^T \cdot \delta \mathbf{r}_{P_i} \quad (3.40)$$

siendo:

- $n_F$ : número de acciones aplicadas sobre el cuerpo.
- $\mathbf{F}_i$ : acción genérica  $i$ -ésima aplicada sobre el punto  $P$  del cuerpo  $j$ .
- $\delta \mathbf{r}_{P_i}$ : desplazamiento virtual asociado a la acción  $i$ -ésima.

Para el conjunto de coordenadas de un cuerpo  $j$  dado por (3.1), el desplazamiento virtual correspondiente al punto  $P$  se calcula como:

$$\delta \mathbf{r}_{P_i} = \frac{\partial \mathbf{r}_{P_i}}{\partial y_j} \delta y_j + \frac{\partial \mathbf{r}_{P_i}}{\partial z_j} \delta z_j + \frac{\partial \mathbf{r}_{P_i}}{\partial \phi_j} \delta \phi_j + \frac{\partial \mathbf{r}_{P_i}}{\partial \theta_j} \delta \theta_j + \frac{\partial \mathbf{r}_{P_i}}{\partial \psi_j} \delta \psi_j = \sum_{k=1}^N \frac{\partial \mathbf{r}_{P_i}}{\partial q_k} \delta q_k \quad (3.41)$$

Por lo que el trabajo virtual realizado por una acción  $\mathbf{F}_i$  aplicada sobre un cuerpo  $j$  en el punto  $P$  se puede calcular como:

$$\mathbf{F}_i^T \cdot \delta \mathbf{r}_{P_i} = \mathbf{F}_i^T \cdot \sum_{k=1}^N \frac{\partial \mathbf{r}_{P_i}}{\partial q_k} \delta q_k = \sum_{k=1}^N \left( \mathbf{F}_i^T \frac{\partial \mathbf{r}_{P_i}}{\partial q_k} \right) \delta q_k = \sum_{k=1}^N Q_k \delta q_k \quad (3.42)$$

donde  $Q_k$  es la fuerza generalizada correspondiente a la acción genérica  $\mathbf{F}$  para la coordenada  $k$ . Identificando términos en (3.42) la fuerza generalizada se calculará como:

$$Q_k = \mathbf{F}_i^T \frac{\partial \mathbf{r}_{P_i}}{\partial q_k} \quad (3.43)$$

En los siguientes puntos se van a obtener las expresiones de la fuerza generalizada correspondiente a los siguientes casos:

- a. Fuerza genérica
- b. Momento genérico
- c. Fuerza peso
- d. Fuerzas originadas en el contacto rueda-carril
- e. Fuerzas en los elementos de unión

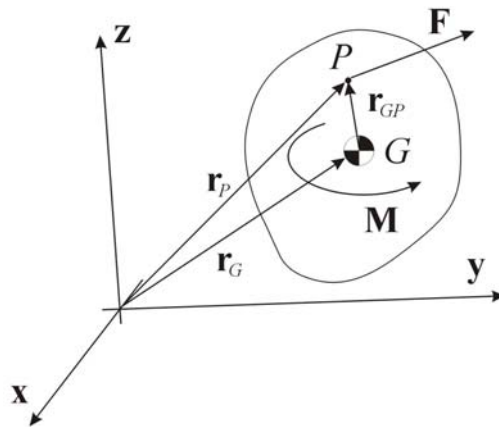
### a. Fuerza genérica

En este punto se obtiene la expresión de la fuerza generalizada correspondiente a una fuerza genérica  $\mathbf{F}$  (expresada en el sistema de referencia global) aplicada en el cuerpo  $j$  en un punto  $P$  perteneciente a este cuerpo.

El vector de posición de la fuerza se puede expresar en el sistema de referencia global como (Figura 3.7):

$$\mathbf{r}_P = \mathbf{r}_G + \mathbf{r}_{GP} \quad (3.44)$$

siendo  $\mathbf{r}_G$  el vector de posición del centro de masas del cuerpo dado en (3.9) y  $\mathbf{r}_{GP}$  el vector que va desde el centro de masas del cuerpo al punto de aplicación de la fuerza.



**Figura 3.7.** Fuerza y momento genéricos aplicados en un cuerpo.

Teniendo en cuenta la doble transformación desde el sistema de referencia del cuerpo, al sistema de referencia global, el valor de  $\mathbf{r}_{GP}$  se calcula como:

$$\mathbf{r}_{GP} = \mathbf{T}_t \mathbf{T}_b \bar{\mathbf{u}}_{GP} \quad (3.45)$$

siendo:

- $\mathbf{T}_t$  la matriz de transformación desde el sistema de referencia de la vía al sistema de referencia global para el cuerpo  $j$ .
- $\mathbf{T}_b$  la matriz de transformación desde el sistema de referencia del cuerpo al sistema de referencia de la vía.
- $\bar{\mathbf{u}}_{GP}$  el vector de posición del punto  $P$  con respecto al centro de masas  $G$  del cuerpo  $j$ , expresado en el sistema de referencia del cuerpo.

Expandiendo los términos de la fórmula (3.45) y haciendo explícitas las coordenadas de las que dependen, queda:

$$\mathbf{r}_p = \mathbf{r}_T + \mathbf{T}_t \begin{Bmatrix} 0 \\ y \\ z \end{Bmatrix} + \mathbf{T}_t \mathbf{T}_b(\phi, \theta, \psi) \bar{\mathbf{u}}_{GP} \quad (3.46)$$

Utilizando el conjunto de coordenadas de (3.1)  $\mathbf{q} = \{y \ z \ \phi \ \theta \ \psi\}^T$ , el desplazamiento virtual correspondiente a  $\mathbf{r}_p$  se calcularía como:

$$\begin{aligned} \delta \mathbf{r}_p &= \frac{\partial \mathbf{r}_p}{\partial y} \delta y + \frac{\partial \mathbf{r}_p}{\partial z} \delta z + \frac{\partial \mathbf{r}_p}{\partial \phi} \delta \phi + \frac{\partial \mathbf{r}_p}{\partial \theta} \delta \theta + \frac{\partial \mathbf{r}_p}{\partial \psi} \delta \psi \\ &= \mathbf{T}_t^{(2)} \delta y + \mathbf{T}_t^{(3)} \delta z + \left( \mathbf{T}_t \frac{\partial \mathbf{T}_t}{\partial \phi} \bar{\mathbf{u}}_{GP} \right) \delta \phi + \left( \mathbf{T}_t \frac{\partial \mathbf{T}_t}{\partial \theta} \bar{\mathbf{u}}_{GP} \right) \delta \theta + \left( \mathbf{T}_t \frac{\partial \mathbf{T}_t}{\partial \psi} \bar{\mathbf{u}}_{GP} \right) \delta \psi \end{aligned} \quad (3.47)$$

Por lo que el trabajo virtual correspondiente, sería:

$$\begin{aligned} \delta W &= \left( \mathbf{F}^T \mathbf{T}_t \begin{Bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{Bmatrix} \right) \delta y + \left( \mathbf{F}^T \mathbf{T}_t \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{Bmatrix} \right) \delta z \\ &+ \left( \mathbf{F}^T \mathbf{T}_t \frac{\partial \mathbf{T}_t}{\partial \phi} \bar{\mathbf{u}}_{GP} \right) \delta \phi + \left( \mathbf{F}^T \mathbf{T}_t \frac{\partial \mathbf{T}_t}{\partial \theta} \bar{\mathbf{u}}_{GP} \right) \delta \theta + \left( \mathbf{F}^T \mathbf{T}_t \frac{\partial \mathbf{T}_t}{\partial \psi} \bar{\mathbf{u}}_{GP} \right) \delta \psi \end{aligned} \quad (3.48)$$

con:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{r}_p}{\partial y} &= \mathbf{T}_t [010]^T & \frac{\partial \mathbf{r}_p}{\partial \phi} &= \mathbf{T}_t \frac{\partial \mathbf{T}_t}{\partial \phi} \bar{\mathbf{u}}_{GP} \\ \frac{\partial \mathbf{r}_p}{\partial z} &= \mathbf{T}_t [001]^T & \frac{\partial \mathbf{r}_p}{\partial \theta} &= \mathbf{T}_t \frac{\partial \mathbf{T}_t}{\partial \theta} \bar{\mathbf{u}}_{GP} \\ & & \frac{\partial \mathbf{r}_p}{\partial \psi} &= \mathbf{T}_t \frac{\partial \mathbf{T}_t}{\partial \psi} \bar{\mathbf{u}}_{GP} \end{aligned} \quad (3.49)$$

Según la expresión de la fuerza generalizada dada en (3.43), las fuerzas generalizadas asociadas a las coordenadas de translación, son

$$\begin{aligned} Q_y|_F &= \mathbf{F}^T \frac{\partial \mathbf{r}_p}{\partial y} = (\mathbf{F}^T \mathbf{T}_t) [010]^T = \tilde{\mathbf{F}}^T [010]^T = \tilde{F}_y \\ Q_z|_F &= \mathbf{F}^T \frac{\partial \mathbf{r}_p}{\partial z} = (\mathbf{F}^T \mathbf{T}_t) [001]^T = \tilde{\mathbf{F}}^T [001]^T = \tilde{F}_z \end{aligned} \quad (3.50.a)$$

donde para cada coordenada de translación el valor de la fuerza generalizada es la correspondiente componente de la fuerza expresada en el sistema de referencia de la vía.

Para las coordenadas de rotación, se tiene:

$$\begin{aligned} Q_\phi|_F &= \mathbf{F}^T \frac{\partial \mathbf{r}_P}{\partial \phi} = (\mathbf{F}^T \mathbf{T}_t) \frac{\partial \mathbf{T}_b}{\partial \phi} \bar{\mathbf{u}}_{GP} = \tilde{\mathbf{F}}^T \left( \frac{\partial \mathbf{T}_b}{\partial \phi} \mathbf{T}_b^T \right) \tilde{\mathbf{u}}_{GP} \\ Q_\theta|_F &= \mathbf{F}^T \frac{\partial \mathbf{r}_P}{\partial \theta} = (\mathbf{F}^T \mathbf{T}_t) \frac{\partial \mathbf{T}_b}{\partial \theta} \bar{\mathbf{u}}_{GP} = \tilde{\mathbf{F}}^T \left( \frac{\partial \mathbf{T}_b}{\partial \theta} \mathbf{T}_b^T \right) \tilde{\mathbf{u}}_{GP} \\ Q_\psi|_F &= \mathbf{F}^T \frac{\partial \mathbf{r}_P}{\partial \psi} = (\mathbf{F}^T \mathbf{T}_t) \frac{\partial \mathbf{T}_b}{\partial \psi} \bar{\mathbf{u}}_{GP} = \tilde{\mathbf{F}}^T \left( \frac{\partial \mathbf{T}_b}{\partial \psi} \mathbf{T}_b^T \right) \tilde{\mathbf{u}}_{GP} \end{aligned} \quad (3.50.b)$$

La fórmula se simplifica si se expresa en función de la fuerza genérica ( $\tilde{\mathbf{F}}$ ) y del vector ( $\tilde{\mathbf{u}}_{GP}$ ) expresados en el sistema de referencia de la vía debido a que las expresiones de las matrices  $\left( \frac{\partial \mathbf{T}_b}{\partial \phi} \mathbf{T}_b^T \right)$ ,  $\left( \frac{\partial \mathbf{T}_b}{\partial \theta} \mathbf{T}_b^T \right)$  y  $\left( \frac{\partial \mathbf{T}_b}{\partial \psi} \mathbf{T}_b^T \right)$  son muy sencillas (ver Anexo II).

### b. Momento genérico

En este punto se seguirá el mismo planteamiento que en el anterior. Dado un momento genérico  $\mathbf{M}$  (expresado en el sistema de referencia global) aplicado sobre un cuerpo  $j$ , éste produce un giro virtual de valor  $\delta \Theta$  (Figura 3.7). Particularizando la fórmula (3.40), el trabajo virtual realizado por este momento genérico, es:

$$\delta W = \mathbf{M}^T \delta \Theta \quad (3.51)$$

El giro virtual correspondiente a cada una de las coordenadas se puede obtener a partir de la expresión de la velocidad angular (3.17); esta fórmula se puede escribir como:

$$\boldsymbol{\omega} = \mathbf{G}_t \dot{\Phi}_t + \mathbf{T}_t \tilde{\mathbf{G}}_b^{(1)} \dot{\phi} + \mathbf{T}_t \tilde{\mathbf{G}}_b^{(2)} \dot{\theta} + \mathbf{T}_t \tilde{\mathbf{G}}_b^{(3)} \dot{\psi}$$

A partir de esta fórmula, el giro virtual correspondiente a cada una de las coordenadas:

$$\delta \Theta = \mathbf{0} \delta y + \mathbf{0} \delta z + \mathbf{T}_t \tilde{\mathbf{G}}_b^{(1)} \delta \phi + \mathbf{T}_t \tilde{\mathbf{G}}_b^{(2)} \delta \theta + \mathbf{T}_t \tilde{\mathbf{G}}_b^{(3)} \delta \psi \quad (3.52)$$

Sustituyendo la expresión de los giros virtuales de (3.52) en (3.51), se obtiene la expresión de las fuerzas generalizadas debidas a un momento externo, asociada a cada una de las coordenadas:



$$\begin{aligned}
Q_y|_M &= 0 \\
Q_z|_M &= 0 \\
Q_\phi|_M &= \mathbf{M}^T \mathbf{T}_t \tilde{\mathbf{G}}_b^{(1)} = \tilde{\mathbf{M}}^T \tilde{\mathbf{G}}_b^{(1)} \\
Q_\theta|_M &= \mathbf{M}^T \mathbf{T}_t \tilde{\mathbf{G}}_b^{(2)} = \tilde{\mathbf{M}}^T \tilde{\mathbf{G}}_b^{(2)} \\
Q_\psi|_M &= \mathbf{M}^T \mathbf{T}_t \tilde{\mathbf{G}}_b^{(3)} = \tilde{\mathbf{M}}^T \tilde{\mathbf{G}}_b^{(3)}
\end{aligned} \tag{3.53}$$

### c. Fuerza peso

La fuerza peso para un cuerpo de masa  $m$ , en el sistema de referencia global, tiene la expresión:

$$\mathbf{P} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ -m g \end{Bmatrix} \tag{3.54}$$

siendo  $g$  la constante de la gravedad.

El punto de aplicación es directamente el centro de masas del cuerpo, por lo que el vector  $\mathbf{r}_p$  según (3.44), tiene la expresión:

$$\mathbf{r}_p = \mathbf{r}_G = \mathbf{r}_T + \mathbf{T}_t \begin{Bmatrix} 0 \\ y \\ z \end{Bmatrix} \tag{3.55}$$

Cuyo desplazamiento virtual es:

$$\begin{aligned}
\delta \mathbf{r}_G &= \frac{\partial \mathbf{r}_G}{\partial y} \delta y + \frac{\partial \mathbf{r}_G}{\partial z} \delta z + \frac{\partial \mathbf{r}_G}{\partial \phi} \delta \phi + \frac{\partial \mathbf{r}_G}{\partial \theta} \delta \theta + \frac{\partial \mathbf{r}_G}{\partial \psi} \delta \psi \\
&= \mathbf{T}_t^{(2)} \delta y + \mathbf{T}_t^{(3)} \delta z + \mathbf{0} \delta \phi + \mathbf{0} \delta \theta + \mathbf{0} \delta \psi
\end{aligned} \tag{3.56}$$

Por tanto, la aportación a las fuerzas generalizadas de la fuerza peso, para cada una de las coordenadas del cuerpo, es:

$$\begin{aligned}
Q_y|_{PESO} &= \mathbf{P}^T \frac{\partial \mathbf{r}_G}{\partial y} = -(m g [0 \ 0 \ 1]) \mathbf{T}_t^{(2)} = -m g \mathbf{T}_{t(3,2)} \\
Q_z|_{PESO} &= \mathbf{P}^T \frac{\partial \mathbf{r}_G}{\partial z} = -(m g [0 \ 0 \ 1]) \mathbf{T}_t^{(3)} = -m g \mathbf{T}_{t(3,3)} \\
Q_\phi|_{PESO} &= 0 \\
Q_\theta|_{PESO} &= 0
\end{aligned} \tag{3.57}$$

$$Q_{\psi}|_{PESO} = 0$$

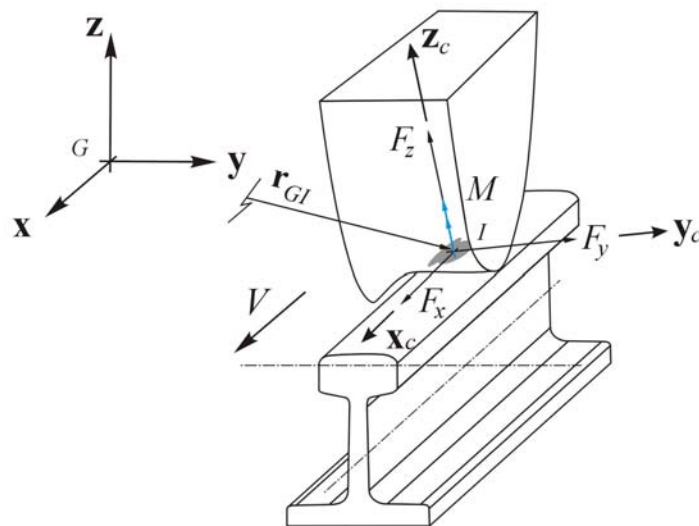
siendo  $\mathbf{T}_{i(i,j)}$  la componente  $i,j$  de la matriz  $\mathbf{T}_t$ .

#### d. Fuerzas en el contacto

En este punto se describe como obtener la aportación de las fuerzas generadas en el contacto rueda-carril a las ecuaciones del movimiento, a través de las fuerzas generalizadas. Este término en las ecuaciones del movimiento sólo aparecerá en el caso de que el cuerpo sea un eje ferroviario.

Cada área de contacto rueda-carril queda caracterizada por (ver Figura 3.8):

- Posición del punto de contacto  $I$  con respecto al centro de masas del eje  $G$ ,  $\bar{\mathbf{u}}_{GI}$  expresado en el sistema de referencia del eje.
- Conicidad en el punto de contacto  $\gamma_0$ , medida en el sistema de referencia de la vía.
- Fuerza normal al contacto  $F_z$  (ver Cap. 2) medida en el sistema de referencia del contacto  $\mathbf{x}_c\mathbf{y}_c\mathbf{z}_c$ .
- Fuerzas tangenciales al contacto (ver Cap. 2): fuerza longitudinal  $F_x$ , fuerza lateral  $F_y$  y momento de *spin*  $M$  medidos en el sistema de referencia del contacto  $\mathbf{x}_c\mathbf{y}_c\mathbf{z}_c$ .



**Figura 3.8.** Fuerzas y momentos que aparecen en un área de contacto rueda-carril.

Considerando cada área de contacto se calcula la aportación de las fuerzas y momentos originados en dicho contacto dentro de las ecuaciones del movimiento.

El valor de las fuerzas originadas en un área de contacto expresadas en el sistema de referencia global, haciendo la doble transformación según la Figura 3.2 es:

$$\mathbf{F}_c = \mathbf{T}_t \mathbf{T}_c \begin{Bmatrix} F_x \\ F_y \\ F_z \end{Bmatrix} \quad (3.58)$$

siendo  $\mathbf{T}_t$  la matriz de transformación asociada a los giros de la vía y  $\mathbf{T}_c$  la matriz de transformación asociada a la conicidad del área de contacto (ver Anexo I).

A su vez, los momentos originados en el contacto, expresados en el sistema de referencia global, son:

$$\mathbf{M}_c = \mathbf{T}_t \mathbf{T}_c \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ M \end{Bmatrix} \quad (3.59)$$

Según la ecuación (3.40) el trabajo virtual realizado por las acciones originadas en un área de contacto, se calcula como:

$$\delta W = \mathbf{F}_c^T \delta \mathbf{r}_I + \mathbf{M}_c^T \delta \Theta \quad (3.60)$$

siendo  $\delta \mathbf{r}_I$  el desplazamiento virtual asociado a la fuerza  $\mathbf{F}_c$  y  $\delta \Theta$  el giro virtual asociado al momento  $\mathbf{M}_c$ , cuyas expresiones son

$$\begin{aligned} \delta \mathbf{r}_I &= \mathbf{T}_t \begin{Bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{Bmatrix} \delta y + \mathbf{T}_t \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{Bmatrix} \delta z + \left( \mathbf{T}_t \frac{\partial \mathbf{T}_b}{\partial \phi} \bar{\mathbf{u}}_{GI} \right) \delta \phi + \left( \mathbf{T}_t \frac{\partial \mathbf{T}_b}{\partial \theta} \bar{\mathbf{u}}_{GI} \right) \delta \theta + \left( \mathbf{T}_t \frac{\partial \mathbf{T}_b}{\partial \psi} \bar{\mathbf{u}}_{GI} \right) \delta \psi \\ \delta \Theta &= \mathbf{0} \delta y + \mathbf{0} \delta z + \left( \mathbf{T}_t \tilde{\mathbf{G}}_b^{(1)} \right) \delta \phi + \left( \mathbf{T}_t \tilde{\mathbf{G}}_b^{(2)} \right) \delta \theta + \left( \mathbf{T}_t \tilde{\mathbf{G}}_b^{(3)} \right) \delta \psi \end{aligned} \quad (3.61)$$

donde  $\bar{\mathbf{u}}_{GI}$  es el vector de posición del punto de contacto  $I$  con respecto al centro de masas del eje  $G$ , medido en el sistema de referencia del eje.

Sustituyendo las expresiones (3.58), (3.59) y (3.61) en (3.60), reordenando y agrupando, se llega a la fórmula:

$$\begin{aligned} \delta W = & \left( \mathbf{F}_c^T \mathbf{T}_t \begin{Bmatrix} \mathbf{0} \\ 1 \\ \mathbf{0} \end{Bmatrix} \right) \delta y + \left( \mathbf{F}_c^T \mathbf{T}_t \begin{Bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \\ 1 \end{Bmatrix} \right) \delta z + \left( \mathbf{F}_c^T \mathbf{T}_t \frac{\partial \mathbf{T}_b}{\partial \phi} \bar{\mathbf{u}}_{Gl} + \mathbf{M}_c^T \mathbf{T}_t \tilde{\mathbf{G}}_b^{(1)} \right) \delta \phi \\ & + \left( \mathbf{F}_c^T \mathbf{T}_t \frac{\partial \mathbf{T}_b}{\partial \theta} \bar{\mathbf{u}}_{Gl} + \mathbf{M}_c^T \mathbf{T}_t \tilde{\mathbf{G}}_b^{(2)} \right) \delta \theta + \left( \mathbf{F}_c^T \mathbf{T}_t \frac{\partial \mathbf{T}_b}{\partial \psi} \bar{\mathbf{u}}_{Gl} + \mathbf{M}_c^T \mathbf{T}_t \tilde{\mathbf{G}}_b^{(3)} \right) \delta \psi \end{aligned} \quad (3.62)$$

de donde se obtiene la expresión de las fuerzas generalizadas debidas a las fuerzas en el contacto, para cada una de las coordenadas:

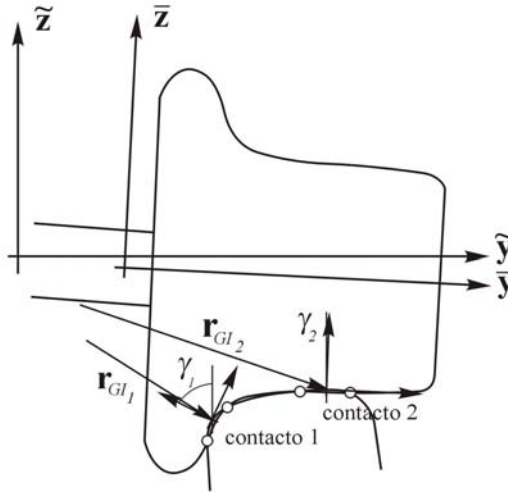
$$\begin{aligned} Q_y|_{CONT} &= \mathbf{F}_c^T \mathbf{T}_t \begin{Bmatrix} \mathbf{0} \\ 1 \\ \mathbf{0} \end{Bmatrix} = [F_x \ F_y \ F_z] \mathbf{T}_c^T \overbrace{\mathbf{T}_t^T \mathbf{T}_t}^{\mathbf{1}} \begin{Bmatrix} \mathbf{0} \\ 1 \\ \mathbf{0} \end{Bmatrix} = F_x \mathbf{T}_{c(2,1)} + F_y \mathbf{T}_{c(2,2)} + F_z \mathbf{T}_{c(2,3)} \\ Q_z|_{CONT} &= \mathbf{F}_c^T \mathbf{T}_t \begin{Bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \\ 1 \end{Bmatrix} = [F_x \ F_y \ F_z] \mathbf{T}_c^T \overbrace{\mathbf{T}_t^T \mathbf{T}_t}^{\mathbf{1}} \begin{Bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \\ 1 \end{Bmatrix} = F_x \mathbf{T}_{c(3,1)} + F_y \mathbf{T}_{c(3,2)} + F_z \mathbf{T}_{c(3,3)} \\ Q_\phi|_{CONT} &= \mathbf{F}_c^T \mathbf{T}_t \frac{\partial \mathbf{T}_b}{\partial \phi} \bar{\mathbf{u}}_{Gl} + \mathbf{M}_c^T \mathbf{T}_t \tilde{\mathbf{G}}_b^{(1)} = \\ &= [F_x \ F_y \ F_z] \mathbf{T}_c^T \overbrace{\mathbf{T}_t^T \mathbf{T}_t}^{\mathbf{1}} \frac{\partial \mathbf{T}_b}{\partial \phi} \bar{\mathbf{u}}_{Gl} + [0 \ 0 \ M] \mathbf{T}_c^T \overbrace{\mathbf{T}_t^T \mathbf{T}_t}^{\mathbf{1}} \tilde{\mathbf{G}}_b^{(1)} = \\ &= [F_x \ F_y \ F_z] \mathbf{T}_c^T \left( \frac{\partial \mathbf{T}_b}{\partial \phi} \mathbf{T}_b^T \right) \tilde{\mathbf{u}}_{Gl} + [0 \ 0 \ M] \mathbf{T}_c^T \tilde{\mathbf{G}}_b^{(1)} \\ Q_\theta|_{CONT} &= \mathbf{F}_c^T \mathbf{T}_t \frac{\partial \mathbf{T}_b}{\partial \theta} \bar{\mathbf{u}}_{Gl} + \mathbf{M}_c^T \mathbf{T}_t \tilde{\mathbf{G}}_b^{(2)} = \\ &= [F_x \ F_y \ F_z] \mathbf{T}_c^T \overbrace{\mathbf{T}_t^T \mathbf{T}_t}^{\mathbf{1}} \frac{\partial \mathbf{T}_b}{\partial \theta} \bar{\mathbf{u}}_{Gl} + [0 \ 0 \ M] \mathbf{T}_c^T \overbrace{\mathbf{T}_t^T \mathbf{T}_t}^{\mathbf{1}} \tilde{\mathbf{G}}_b^{(2)} = \\ &= [F_x \ F_y \ F_z] \mathbf{T}_c^T \left( \frac{\partial \mathbf{T}_b}{\partial \theta} \mathbf{T}_b^T \right) \tilde{\mathbf{u}}_{Gl} + [0 \ 0 \ M] \mathbf{T}_c^T \tilde{\mathbf{G}}_b^{(2)} \\ Q_\psi|_{CONT} &= \mathbf{F}_c^T \mathbf{T}_t \frac{\partial \mathbf{T}_b}{\partial \psi} \bar{\mathbf{u}}_{Gl} + \mathbf{M}_c^T \mathbf{T}_t \tilde{\mathbf{G}}_b^{(3)} = \\ &= [F_x \ F_y \ F_z] \mathbf{T}_c^T \overbrace{\mathbf{T}_t^T \mathbf{T}_t}^{\mathbf{1}} \frac{\partial \mathbf{T}_b}{\partial \psi} \bar{\mathbf{u}}_{Gl} + [0 \ 0 \ M] \mathbf{T}_c^T \overbrace{\mathbf{T}_t^T \mathbf{T}_t}^{\mathbf{1}} \tilde{\mathbf{G}}_b^{(3)} = \\ &= [F_x \ F_y \ F_z] \mathbf{T}_c^T \left( \frac{\partial \mathbf{T}_b}{\partial \psi} \mathbf{T}_b^T \right) \tilde{\mathbf{u}}_{Gl} + [0 \ 0 \ M] \mathbf{T}_c^T \tilde{\mathbf{G}}_b^{(3)} \end{aligned} \quad (3.63)$$

donde  $\tilde{\mathbf{u}}_{Gl}$  es la posición del punto de contacto con respecto al centro de masas del eje, medida en el sistema de referencia de la vía.

Considerando el eje completo  $j$ , la aportación de las fuerzas generadas en el contacto rueda carril, se calculará como la suma de las aportaciones de cada una de las áreas de contacto que aparecen entre las ruedas y los carriles, siendo  $n_c$  el número de áreas de contacto del eje con los carriles:

$$\begin{aligned} Q_{y_j}|_{CONT} &= \sum_{i=1}^{n_c} Q_{y_j}|_{CONT_i} & Q_{z_j}|_{CONT} &= \sum_{i=1}^{n_c} Q_{z_j}|_{CONT_i} \\ Q_{\phi_j}|_{CONT} &= \sum_{i=1}^{n_c} Q_{\phi_j}|_{CONT_i} & Q_{\theta_j}|_{CONT} &= \sum_{i=1}^{n_c} Q_{\theta_j}|_{CONT_i} & Q_{\psi_j}|_{CONT} &= \sum_{i=1}^{n_c} Q_{\psi_j}|_{CONT_i} \end{aligned} \quad (3.64)$$

$n_c$  es una variable del problema geométrico y normal de contacto y no está limitado a  $n_c = 2$  (un área de contacto por cada rueda). En el caso que aparezca *multicontacto* (dos puntos de contacto sobre la misma rueda)  $n_c > 2$ , como sucede en la Figura 3.9.



**Figura 3.9.** Posición de la rueda con respecto al carril en la que aparece multicontacto.

### e. Fuerzas en los elementos de unión

Dentro de esta sección se obtienen las aportaciones a las ecuaciones del movimiento de los elementos de unión entre cuerpos. Como elementos de unión se consideran los elementos viscoelásticos que componen la suspensión primaria y secundaria del vehículo ferroviario.

Para ello se obtendrá la expresión de la fuerza ejercida por el elemento de unión en el sistema de referencia de la vía asociado a cada cuerpo y se introducirá en las ecuaciones del movimiento correspondientes como una fuerza genérica (ver punto 3.4.2.a).

Se va a considerar los siguientes casos:

- Resortes lineales de translación
- Amortiguadores lineales de translación

### ***e.1. Resortes lineales de translación***

En un resorte lineal de translación la fuerza que aparece entre los dos elementos es proporcional a la distancia entre los puntos que conecta. De forma genérica se puede expresar la relación como:

$$F = K(l - l_o) \quad (3.65)$$

donde  $K$  es la rigidez del resorte,  $l$  la distancia entre sus extremos y  $l_o$  la distancia en el equilibrio (se modelan los desplazamientos respecto a la posición de equilibrio).

En la fórmula (3.65) se distinguen distintos valores de rigidez asociados a cada dirección según la expresión:

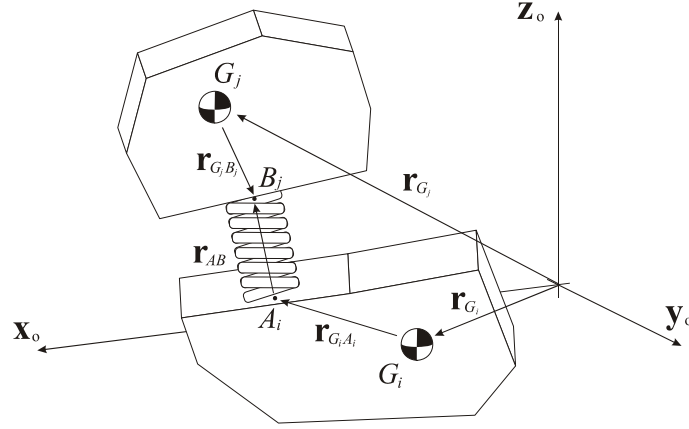
$$\tilde{\mathbf{K}}^K = \begin{bmatrix} k_x & 0 & 0 \\ 0 & k_y & 0 \\ 0 & 0 & k_z \end{bmatrix} \quad (3.66)$$

donde  $\sim^K$  indica que la matriz está definida en el sistema de referencia de la vía asociado al resorte. Estos valores corresponden a las rigideces equivalentes del elemento de la suspensión para cada una de las direcciones definidas por el sistema de referencia asociado a la vía.

La configuración del resorte es la que se muestra en la Figura 3.10. Llamando  $A$  al punto de anclaje del resorte sobre el cuerpo  $i$  y  $B$  al punto de anclaje sobre el cuerpo  $j$ , la expresión de la fuerza realizada por el resorte es:

$$\tilde{\mathbf{F}}_{A_i}^K = \tilde{\mathbf{K}}^K \left( \tilde{\mathbf{r}}_{B_j}^K - \tilde{\mathbf{r}}_{A_i}^K - \tilde{\mathbf{r}}_{A_i B_i}^{K^o} \right) = -\tilde{\mathbf{F}}_{B_j}^K \quad (3.67)$$

donde todos los términos están expresados en el sistema de referencia de la vía asociado al resorte ( $\sim^K$ ).  $\tilde{\mathbf{r}}_{A_i B_i}^{K^o}$  es el vector que expresa la posición en equilibrio del resorte.



**Figura 3.10.** Modelización de un elemento resorte.

Los vectores de posición de los puntos  $A$ ,  $B$  pertenecientes a los sólidos  $i$ ,  $j$ , respectivamente, en el sistema de referencia global (Figura 3.10), son:

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_{A_i} &= \mathbf{r}_{G_i} + \mathbf{r}_{G_i, A_i} = \mathbf{r}_{G_i} + \mathbf{T}_{t_i} \mathbf{T}_{b_i} \bar{\mathbf{u}}_{G_i, A_i} \\ \mathbf{r}_{B_j} &= \mathbf{r}_{G_j} + \mathbf{r}_{G_j, B_j} = \mathbf{r}_{G_j} + \mathbf{T}_{t_j} \mathbf{T}_{b_j} \bar{\mathbf{u}}_{G_j, B_j} \end{aligned} \quad (3.68)$$

siendo  $\bar{\mathbf{u}}_{G_i, A_i}$ ,  $\bar{\mathbf{u}}_{G_j, B_j}$  la posición de los puntos  $A$ ,  $B$  con respecto al centro de masas  $G$  de cada cuerpo expresados en el sistema de referencia de cada cuerpo, y  $\mathbf{T}_{t_i}$ ,  $\mathbf{T}_{b_i}$  las matrices de transformación asociados a los giros de la vía y del cuerpo, respectivamente, correspondientes a cada cuerpo.

Estos valores se deben convertir al sistema de referencia de la vía asociado al resorte según la expresión:

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{r}}_{A_i}^K &= \mathbf{T}_{t_k}^T \mathbf{r}_{A_i} \\ \tilde{\mathbf{r}}_{B_j}^K &= \mathbf{T}_{t_k}^T \mathbf{r}_{B_j} \end{aligned} \quad (3.69)$$

donde  $\mathbf{T}_{t_k}$  es la matriz que realiza la transformación entre el sistema de la vía asociado al resorte y el sistema de referencia global.

El valor de la fuerza ejercida por el resorte expresada en el sistema de referencia de la vía asociado al resorte (ecuación (3.67)) se debe transformar a los sistemas de referencia de la vía asociados a los cuerpos  $i$ ,  $j$  a través de la transformación al sistema de referencia global:

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{F}}_{A_i}^i &= \mathbf{T}_{t_i}^T \mathbf{F} = \mathbf{T}_{t_i}^T \mathbf{T}_{t_k} \tilde{\mathbf{F}}^K \\ \tilde{\mathbf{F}}_{B_j}^j &= -\mathbf{T}_{t_j}^T \mathbf{F} = -\mathbf{T}_{t_j}^T \mathbf{T}_{t_k} \tilde{\mathbf{F}}^K \end{aligned} \quad (3.70)$$

donde  $\mathbf{T}_{i_i}$ ,  $\mathbf{T}_{i_j}$  son las matrices asociadas a los giros de la vía para los cuerpos  $i, j$ , respectivamente.

El valor de las fuerzas ejercidas por el resorte sobre cada uno de los cuerpos según (3.70) se ensamblarán como fuerzas genéricas en las ecuaciones del movimiento de los respectivos cuerpos según las expresiones (3.50) considerando para cada caso el vector de posición del punto de anclaje del resorte en el cuerpo.

## ***e.2. Amortiguadores lineales de translación***

En los amortiguadores lineales de translación, la fuerza que aparece entre los extremos del elemento amortiguador será lineal con respecto a la diferencia de velocidades en sus extremos. Esta relación se puede expresar como:

$$F = C \Delta v \quad (3.71)$$

siendo  $C$  el coeficiente de amortiguamiento e  $\Delta v$  la diferencia de velocidades entre los extremos del amortiguador.

Distinguiendo distintos valores de coeficiente de amortiguamiento para las distintas direcciones, la constante genérica  $C$  se puede expresar como una matriz:

$$\tilde{\mathbf{C}}^C = \begin{bmatrix} c_x & 0 & 0 \\ 0 & c_y & 0 \\ 0 & 0 & c_z \end{bmatrix} \quad (3.72)$$

donde  $\tilde{\phantom{C}}$  indica que la matriz está definida en el sistema de referencia de la vía asociado al amortiguador. Al igual que como se ha procedido con los resortes lineales, estos coeficientes de amortiguamiento se corresponden con valores equivalentes medidos en las direcciones definidas por el sistema de referencia asociado a la vía.

Considerando que el amortiguador está montado entre el punto  $A$  del cuerpo  $i$  y el punto  $B$  del cuerpo  $j$ , la expresión de la fuerza es:

$$\tilde{\mathbf{F}}_{A_i}^C = \tilde{\mathbf{C}}^C (\tilde{\mathbf{r}}_{B_j}^C - \tilde{\mathbf{r}}_{A_i}^C) = -\tilde{\mathbf{F}}_{B_j}^C \quad (3.73)$$

donde todos los términos están expresados en el sistema de referencia de la vía asociado al amortiguador.

Las velocidades de los extremos del amortiguador en el sistema de referencia global se obtienen derivando las expresiones (3.68) con respecto al tiempo:



$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{r}}_{A_i} &= \dot{\mathbf{r}}_{G_i} + \dot{\mathbf{T}}_{t_i} \mathbf{T}_{b_i} \bar{\mathbf{u}}_{G_i A_i} + \mathbf{T}_{t_i} \dot{\mathbf{T}}_{b_i} \bar{\mathbf{u}}_{G_i A_i} \\ \dot{\mathbf{r}}_{B_j} &= \dot{\mathbf{r}}_{G_j} + \dot{\mathbf{T}}_{t_j} \mathbf{T}_{b_j} \bar{\mathbf{u}}_{G_j B_j} + \mathbf{T}_{t_j} \dot{\mathbf{T}}_{b_j} \bar{\mathbf{u}}_{G_j B_j}\end{aligned}\quad (3.74)$$

siendo:

- $\dot{\mathbf{r}}_{G_i}, \dot{\mathbf{r}}_{G_j}$  las velocidades del centro de masas de los cuerpos  $i, j$ , respectivamente, calculadas según (3.11).
- $\dot{\mathbf{T}}_{t_i}, \dot{\mathbf{T}}_{t_j}$  las derivadas con respecto al tiempo de las matrices de transformación asociadas a los giros de la vía (ver Anexo II).
- $\dot{\mathbf{T}}_{b_i}, \dot{\mathbf{T}}_{b_j}$  las derivadas con respecto al tiempo de las matrices de transformación asociadas a los giros del cuerpo (ver Anexo II).
- Puesto que se trata de sólidos indeformables  $\ddot{\mathbf{u}}_{G_i A_i} = \ddot{\mathbf{u}}_{G_j B_j} = \mathbf{0}$ .

Estos valores se deben convertir al sistema de referencia de la vía asociado al amortiguador según la expresión:

$$\begin{aligned}\tilde{\dot{\mathbf{r}}}_{A_i}^C &= \mathbf{T}_{t_c}^T \dot{\mathbf{r}}_{A_i} \\ \tilde{\dot{\mathbf{r}}}_{B_j}^C &= \mathbf{T}_{t_c}^T \dot{\mathbf{r}}_{B_j}\end{aligned}\quad (3.75)$$

donde  $\mathbf{T}_{t_c}$  es la matriz que realiza la transformación entre el sistema de la vía asociado al amortiguador y el sistema de referencia global.

El valor de la fuerza ejercida por el amortiguador expresada en el sistema de referencia de la vía asociado al amortiguador (ecuación (3.73)) se debe transformar a los sistemas de referencia de la vía asociados a los cuerpos  $i, j$  a través de la transformación al sistema de referencia global:

$$\begin{aligned}\tilde{\mathbf{F}}_{A_i}^i &= \mathbf{T}_{t_i}^T \mathbf{F} = \mathbf{T}_{t_i}^T \mathbf{T}_{t_c} \tilde{\mathbf{F}}^C \\ \tilde{\mathbf{F}}_{B_j}^j &= -\mathbf{T}_{t_j}^T \mathbf{F} = -\mathbf{T}_{t_j}^T \mathbf{T}_{t_c} \tilde{\mathbf{F}}^C\end{aligned}\quad (3.76)$$

donde  $\mathbf{T}_{t_i}, \mathbf{T}_{t_j}$  son las matrices asociadas a los giros de la vía para los cuerpos  $i, j$ , respectivamente.

El valor de esta fuerza en el sistema de referencia de la vía asociado al cuerpo según (3.76) se ensamblará en las ecuaciones del movimiento de los cuerpos  $i, j$  utilizando las expresiones obtenidas para una fuerza genérica (3.50) considerando para cada caso el vector de posición del punto de anclaje del amortiguador en el cuerpo.

### **3.5. Conclusiones**

En este capítulo se han obtenido las ecuaciones del movimiento de los cuerpos que forman un vehículo ferroviario.

Se han presentado los sistemas de referencia y las coordenadas usadas en la modelización de los ejes ferroviarios y bastidores que componen el vehículo.

Para la modelización del contacto, se ha usado un enfoque de contacto elástico, con lo que el conjunto de coordenadas que describen el movimiento de los ejes es independiente. Por tanto, el conjunto de ecuaciones que define el movimiento del vehículo está formado por ecuaciones diferenciales ordinarias.

Finalmente, se aplica el principio de Lagrange para obtener las ecuaciones del movimiento a partir de la cinemática de los cuerpos y de las fuerzas generalizadas.

Estas ecuaciones se han implementado en un programa de integración para resolver el problema de la simulación dinámica.

## 4. Problema geométrico y normal en el contacto rueda-carril

### 4.1. Introducción

Según el planteamiento para el estudio del contacto rueda-carril presentado en el Cap. 2, el procedimiento se puede dividir en tres pasos: (1) problema geométrico de contacto, (2) problema normal de contacto y (3) problema tangencial de contacto. La aplicación del modelo de contacto implementado será la simulación dinámica, con el objetivo de la estimación del desgaste en los perfiles de rueda y carril, en el rango de baja frecuencia.

En el presente capítulo se describen las aportaciones realizadas al problema geométrico y normal del contacto rueda-carril, que podrían resumirse como:

- El diseño e implementación de un procedimiento numérico para la obtención del área de contacto y la distribución de presiones normales.
- La validación de este procedimiento mediante el uso de datos experimentales.

En el desarrollo del capítulo se presenta en primer lugar el procedimiento numérico propuesto, compuesto por la resolución del problema geométrico y posteriormente la resolución del problema normal. Este procedimiento numérico se ilustra con una serie de ejemplos de aplicación. En segundo lugar, se analizan dos situaciones de contacto distintas (una para contacto entre superficies de contacto nuevas y otra para superficies de contacto desgastadas) comparando el resultado del análisis numérico propuesto con el resultado del problema de contacto obtenido mediante la técnica experimental de ultrasonidos ([64]). Parte de estos resultados han sido publicados en [90]. Finalmente se presentan las conclusiones.

## 4.2. Procedimiento de resolución del problema geométrico y normal

En este apartado, tras una descripción general del método, se describe el procedimiento de resolución del problema geométrico seguido del procedimiento de resolución del problema normal. Finalmente se presentan unos resultados de aplicación.

### 4.2.1. Descripción general

En esta sección se desarrolla una descripción general del procedimiento. Partiendo de los requisitos que debe cumplir el procedimiento según su aplicación y de las soluciones adoptadas por otros autores, se presenta el procedimiento propuesto así como las hipótesis en las que se basa y una breve justificación de estas hipótesis.

#### a. Requisitos

Debido a que la aplicación del método será su uso en programas de simulación dinámica para la estimación del desgaste en el rango de baja frecuencia, el procedimiento propuesto debe cumplir los siguientes requisitos:

- Poseer una *elevada eficiencia computacional*. El método debe ser capaz de integrarse en programas de simulación dinámica, en los que para cada incremento de tiempo  $\Delta t$  (del orden de milisegundos) debe resolverse el problema de contacto rueda-carril para todos los ejes de la composición. Por tanto, es de vital importancia que el procedimiento propuesto tenga un coste computacional bajo sin penalizar la precisión de los resultados.
- *No considerar los efectos transitorios* en los modelos de contacto, puesto que la aplicación será el cálculo dinámico dentro del rango de *baja frecuencia*. No se tendrá en cuenta en el comportamiento dinámico la deformación a nivel macroscópico de los cuerpos. Este requisito está relacionado con la eficiencia computacional.
- Obtener una *estimación suficientemente precisa* de las áreas de contacto, en cuanto a número, posición, forma y tamaño y *procesar localmente las magnitudes asociadas al contacto* rueda-carril. Este requisito es necesario debido a que una aplicación del procedimiento es la *estimación del desgaste*, que se calcula integrando el desgaste que causa cada una de las

áreas de contacto sobre los perfiles de rueda y carril a medida que el vehículo se mueve sobre la vía.

### **b. Antecedentes**

Diversos autores optan por distintas soluciones para resolver el problema completo de contacto (ver Cap. 2). Por una parte, Kik y Piotrowski [48, 76-77] y Ayasse y Chollet [8, 76] utilizan métodos basados en la *interpenetración virtual* entre superficies y procesan el área de contacto no regular tanto en el problema normal como en el tangencial, pero asumen hipótesis de área de contacto elíptica para el cálculo de los parámetros de flexibilidad (ver Cap. 2). Por otra parte, Alonso y Giménez [2-3], quienes también utilizan programas basados en la *interpenetración virtual*, consideran el área de contacto no regular en el problema normal y aproximan el área de contacto a figuras regulares no-elípticas para la resolución del problema tangencial [4]. Sin embargo, otros autores como Santamaría *et al.* [92-93] y Pombo *et al.* [84-85], tras resolver el problema geométrico considerando la *interpenetración virtual* entre superficies de contacto, emplean el método de punto de contacto teórico de Hertz, donde la elipse de contacto se define a partir del punto de máxima indentación.

Considerando los métodos basados en la *interpenetración virtual*, la estimación del área de contacto se realiza a partir del área de interpenetración, suponiendo una indentación minorada de valor  $K \cdot \delta_0$ , siendo  $\delta_0$  la indentación máxima entre superficies de contacto. La diferencia básica entre los distintos métodos consiste en el valor dado a la constante  $K$ . Kik y Piotrowski [48, 76-77] toman  $K = 0,55$  y Ayasse y Chollet [8, 76] toman  $K = 0,5$  (ver Cap. 2). Además, Kalker en [45] utiliza un valor de  $K = 0,65$  para definir el área potencial de contacto.

En cuanto a las soluciones adoptadas en programas de simulación dinámica implementados por grupos de investigación ferroviaria, en los resultados iniciales al *benchmark* sobre simulación dinámica ferroviaria propuesto por el grupo *RTU* (siglas en inglés de *Rail Technology Unit*, Unidad de Tecnología del Ferrocarril) de la *Manchester Metropolitan University* [98], seis de un total de diez participantes, utilizan elipses para modelizar el contacto rueda-carril, bien sean elipses de Hertz o elipses equivalentes.

### **c. Procedimiento**

El procedimiento de resolución del problema geométrico y normal que se propone consta de los siguientes pasos:

1. Definición de las superficies de rueda y carril a través sus *perfiles en el plano transversal* a la vía. La superficie de la rueda se define por una rotación de su perfil alrededor de su eje de axisimetría, mientras que la superficie del carril por una extrusión a lo largo de su eje longitudinal.
2. Cálculo de las *áreas de interpenetración* y de la interpenetración entre superficies (indentación) dada la posición relativa de ambos cuerpos y considerando las superficies indeformables.  $\delta_0$  es el valor de indentación máxima para cada área de interpenetración.
3. Obtención de las *áreas de contacto* a partir de las áreas de interpenetración. La estimación se realiza suponiendo una indentación minorada de valor  $K \cdot \delta_0$  (donde  $K < 1$ ) y teniendo en cuenta el valor de la conicidad del área de contacto.
4. Obtención del *área de contacto corregida*, teniendo en cuenta la deformación del material en las cercanías del punto teórico de contacto.
5. Ajuste de una *elipse equivalente* al área de contacto corregida mediante criterios geométricos. Se define un parámetro de elipticidad  $\varepsilon$  que expresa la semejanza que existe entre el área de contacto corregida y la elipse equivalente ajustada.
6. Cálculo de la *fuerza normal* mediante la teoría de Hertz tomando los valores de los semiejes de la elipse equivalente y el valor de indentación máxima.
7. Adopción de una *distribución de presiones semielíptica de Hertz* dentro de la elipse equivalente.

#### **d. Hipótesis**

Dada la aplicación del procedimiento de contacto propuesto en esta Tesis, éste se basa en las siguientes hipótesis:

1. Se trata de un método basado en la *interpenetración virtual* entre superficies de rueda y carril.
2. El área de contacto obtenida se aproxima a una elipse, llamada *elipse equivalente*.
3. La distribución de tensiones normales dentro de la elipse equivalente sigue el *modelo de Hertz*.

### e. Justificación de las hipótesis

En esta sección se justifica brevemente la adopción de las tres hipótesis expuestas anteriormente.

En cuanto a la primera hipótesis, en la bibliografía aparecen dos alternativas para estimar el área de contacto a partir de las superficies que definen los cuerpos en la interfase. Por una parte, se tiene la familia de métodos *basados en la interpenetración virtual* entre superficies y, por otra, los métodos basados en *punto teórico de contacto*. Un ejemplo de método basado en punto teórico de contacto sería la teoría de Hertz, que define el área de contacto a partir de las características del punto nominal de contacto. Entre las ventajas de la primera familia de métodos respecto a la segunda, cabría destacar:

- Ofrece una *mejor estimación* de las áreas de contacto debido a que considera la geometría real de los cuerpos en todo el dominio del área potencial de contacto. En la sección 4.2.4 se presentan unos resultados que justifican esta afirmación.
- Tiene una *mayor eficiencia computacional*, en la medida en que aprovecha toda la información obtenida en el problema geométrico para resolver el problema normal. Eficiencia entendida en el sentido que, para un mismo coste computacional, el resultado obtenido tiene un mayor grado de precisión.
- Se trata de métodos *más robustos* porque estiman las características del contacto a partir de la definición de las áreas de interpenetración. Esta particularidad es especialmente importante cuando se trabaja con perfiles medidos, donde el promediado o alisado de estos perfiles puede distorsionar los resultados en el caso de utilizar una teoría basada en el punto teórico de contacto. Esta característica también la señalan Piotrowski y Chollet en [76].

En cuanto a la segunda hipótesis, una vez obtenida el área de contacto como una figura con una geometría no regular, se presentan dos posibles opciones:

- a. Procesar el área de contacto obtenida, teniendo en cuenta la figura *no regular*.
- b. Aproximar el área de contacto a una figura *regular*.

La elección de una u otra opción debe considerarse teniendo en cuenta la resolución del problema de contacto completo, comprendiendo tanto el problema de contacto normal como el problema de contacto tangencial. El empleo de áreas no regulares para resolver el problema tangencial lleva asociado un alto coste computacional, por lo que es habitual que en la bibliografía se usen hipótesis simplificadoras para la resolución del problema tangencial. Este coste computacional está asociado al cálculo de los parámetros de flexibilidad para las áreas de contacto no regulares. Un método de contacto que procese un área regular, permite adimensionalizar parámetros y precalcular algunas operaciones. En dicho caso, la resolución del problema de contacto aprovecha resultados precalculados. En cambio, si la forma del área de contacto se procesa tal como es, todos los cálculos deben realizarse durante la resolución del problema de contacto.

En el caso de escoger la opción *b*, la elección natural para la forma de un área de contacto es una elipse. Esto es debido a que las áreas de contacto son aproximadamente elípticas. Además, esta geometría es compatible con las hipótesis de distribución normal adoptada por Hertz. La elipse obtenida a partir de la interpenetración virtual entre superficies se llama elipse equivalente [76], a diferencia de la elipse de Hertz calculada a partir de las características del punto teórico de contacto. En cuanto a su uso para resolver el problema tangencial (como se verá en el Cap. 5), los parámetros de flexibilidad utilizados por el algoritmo FASTSIM [44] (ver Cap. 2) se encuentran ya tabulados para áreas elípticas. Como alternativa al uso de una elipse como aproximación del área de contacto, Alonso y Giménez proponen el uso de dos semielipses, de tal forma que los parámetros de flexibilidad puedan precalcularse en función de las dimensiones de estas semielipses [4].

Finalmente, en referencia a la tercera hipótesis, una vez aproximada el área de contacto a una elipse (*elipse equivalente*), se asume que la distribución de tensiones normales sigue el modelo de contacto de Hertz (ver Cap. 2). Este modelo combina un bajo coste computacional, ya que se dispone de su solución analítica, con un grado de precisión adecuado para describir la distribución de presiones normales dentro del área de contacto rueda-carril.

A continuación se presenta la descripción del procedimiento de resolución del problema geométrico de contacto, para seguidamente abordar el problema normal de contacto. En el último apartado se presentan resultados de la aplicación del método propuesto.



### 4.2.2. Problema geométrico de contacto.

La resolución del problema geométrico de contacto parte de la posición relativa de los cuerpos rígidos rueda y carril con la finalidad de hallar el número de áreas de interpenetración, su forma y posición.

Para la modelización del contacto rueda-carril se usarán tres sistemas de referencia: sistema de referencia de la vía ( $\tilde{x}\tilde{y}\tilde{z}$ ), sistema de referencia asociado al eje ferroviario ( $\bar{x}\bar{y}\bar{z}$ ) y sistema de referencia asociado a cada área de contacto  $x_c y_c z_c$ , tal como se definen en el Cap. 2.

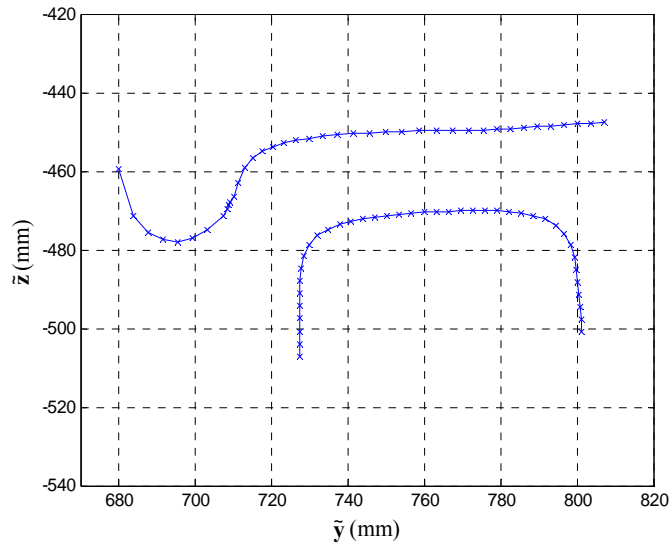
Los pasos a seguir para la resolución de la geometría en el contacto son:

- a. Definir las superficies en contacto.
- b. Establecer un método para obtener la intersección entre las superficies.
- c. Establecer las ecuaciones de intersección recta-cono.
- d. Definir las áreas de interpenetración a partir de tiras longitudinales o *strips*.
- e. Caracterizar las áreas de interpenetración.

#### a. Definición de las superficies en contacto

Las áreas de interpenetración se obtienen a partir de las superficies de la rueda y el carril y de su posición relativa. Estas superficies se definen a partir de los *perfiles* base de los cuerpos de rueda y carril. El perfil del carril se obtiene como la intersección de la superficie del carril con el plano vertical  $\tilde{y} - \tilde{z}$ . El perfil de la rueda se toma como la intersección de la superficie de la rueda con el plano  $\bar{y} - \bar{z}$ .

Ambos perfiles se definen como una serie de puntos en el plano y pueden generarse matemáticamente según su forma normalizada o bien pueden medirse para tener en cuenta cualquier desviación con respecto a su valor nominal por tolerancias de fabricación o por efecto del desgaste o deformación plástica. La Figura 4.1 representa los perfiles de rueda y carril definidos con una resolución basta (con una distancia de unos 4 mm entre puntos). En el caso de digitalizar los perfiles con el dispositivo *Miniprof* (ver sección 4.3.2), la resolución típica de los perfiles es de 0,01 mm y en cualquier caso mejor que 0,03 mm [27].



**Figura 4.1.** Definición de los perfiles de la rueda y del carril a partir de puntos.

A partir de los perfiles en 2D se generan las superficies de la rueda y del carril. La primera por revolución del perfil alrededor del eje  $\tilde{y}$  y la segunda por extrusión a lo largo del eje  $\tilde{x}$ . Según esta definición se desprecian los defectos de falta de redondez en la rueda o del desgaste ondulatorio en el carril. Esto no representa una limitación del procedimiento porque la aplicación del algoritmo de contacto será la simulación dinámica y estimación del desgaste en el rango de baja frecuencia. En el caso de querer considerar estos defectos, se deberían introducir unas funciones de corrección que afectasen a la definición de los perfiles para cada posición angular de la rueda o para cada posición longitudinal del carril.

Una vez generadas las superficies de la rueda y del carril, se supone que estos cuerpos son infinitamente rígidos y puede existir penetración entre ellos. De esta forma el problema geométrico de contacto consiste en calcular el volumen de interpenetración dada la posición relativa entre las superficies.

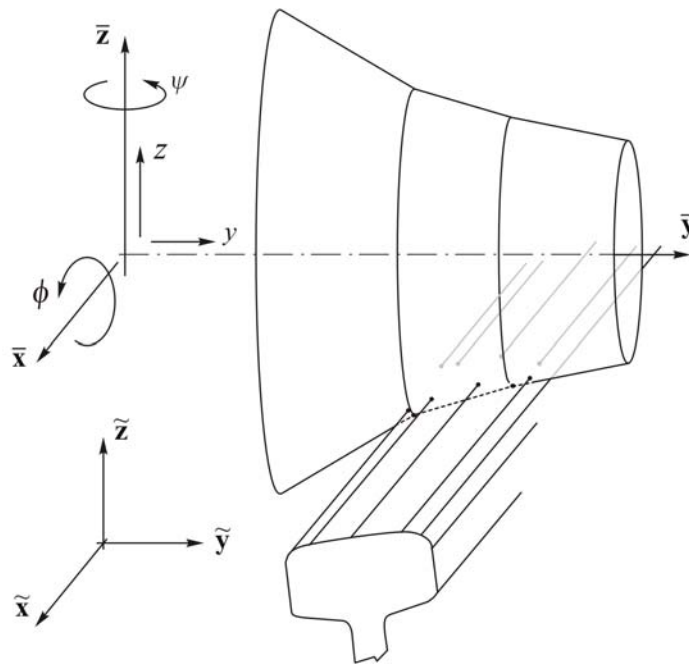
Se define *área de interpenetración* como la proyección del volumen de interpenetración en el plano tangencial al contacto (definido por los ejes  $x_c$ - $y_c$  asociados al contacto, ver Cap. 2). Esta área de interpenetración constituye el área potencial de contacto. Esta hipótesis también la adoptan Kalker [45], Kik y Piotrowski [48, 76-77] y Ayasse y Chollet [8, 76] en sus respectivos modelos de contacto.

Una vez disponibles las superficies en contacto y su posición relativa, es necesario establecer un planteamiento para la obtención de la intersección entre ambas.

### b. Planteamiento de la intersección entre superficies

Según el modelo implementado, cada uno de los segmentos que forman el perfil de la rueda en su revolución alrededor del eje  $\bar{y}$  dará lugar a un tronco de cono y cada uno de los puntos que definen el carril dará lugar a una recta longitudinal en la dirección  $\tilde{x}$ . La obtención del área de interpenetración consistirá en obtener la intersección entre las rectas longitudinales que definen la superficie del carril y los troncos de cono que definen la superficie de la rueda (ver Figura 4.2).

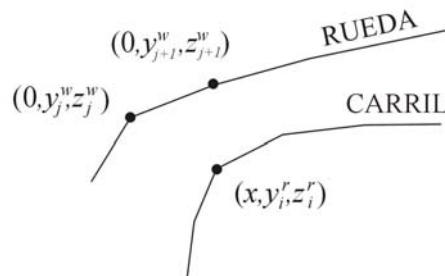
La asimilación de un carril recto incluso en tramos curvos no introduce errores excesivos considerando las dimensiones habituales de radios de curva y tamaño del área de contacto. Para un radio del trazado igual a 50 m y una elipse cuyos semiejes son del orden de 10 cm, el error en la determinación de los puntos de intersección se estima inferior al 0,01 %.



**Figura 4.2.** Sistemas de referencia y superficies base del carril y de la rueda para la resolución del problema geométrico de contacto.

El problema geométrico se reduce al cálculo elemental de la intersección en el espacio de una recta con un tronco de cono (Figura 4.3), según las siguientes características:

- Cada punto del carril en el plano  $\tilde{y}$ - $\tilde{z}$  define la recta longitudinal  $i$ . Un punto perteneciente a la recta tiene como coordenadas  $(x, y_i^r, z_i^r)$  en el sistema de referencia de la vía. El superíndice  $r$  indica que son puntos del perfil del carril. La coordenada  $x$  es un parámetro que indica la posición del punto a lo largo de la recta.
- El tronco de cono  $j$  de la rueda queda definido por dos puntos consecutivos en el perfil de la rueda. Estos puntos extremos tienen coordenadas  $(0, y_j^w, z_j^w)$  y  $(0, y_{j+1}^w, z_{j+1}^w)$  en el sistema de referencia del eje. El superíndice  $w$  indica que son puntos del perfil de la rueda. Se llama  $\zeta$  al ángulo de revolución del perfil de la rueda alrededor del eje  $\bar{y}$  que varía entre 0 y  $2\pi$ . Para un valor de  $\zeta=0$ , según el sistema de referencia del eje, el perfil se encuentra en su cota más baja tal como aparece en la Figura 4.1.
- Si se define la posición relativa de ambos cuerpos, tomando como referencia el carril, la posición de cada tronco de cono en el espacio está definida por dos translaciones  $y$  (lateral),  $z$  (vertical) según los ejes  $\tilde{y}$ ,  $\tilde{z}$ , respectivamente, y dos rotaciones  $\psi$  (lazo),  $\phi$  (balanceo). Los giros  $\psi$ ,  $\phi$  son los ángulos de Euler que definen la transformación de coordenadas entre el sistema de referencia del eje y el sistema de referencia de la vía (ver Cap. 2).



**Figura 4.3.** Geometrías elementales (recta, cono) que definen las superficies en el contacto.

### c. Formulación de la intersección recta-cono

En este punto se desarrolla el sistema de ecuaciones no lineales que permite obtener la intersección recta-cono y se define el procedimiento de resolución de este sistema de ecuaciones.

Las expresiones que definen la superficie de un tronco de cono que compone la rueda parten del segmento generatriz. Para obtener el segmento generatriz, se utiliza el parámetro  $\alpha$  (Figura 4.5) que define una transformación

lineal entre 0 (extremo  $j$ ) y 1 (extremo  $j+1$ ). Teniendo en cuenta la rotación del segmento alrededor del eje  $\bar{y}$ , la coordenada de un punto genérico de la superficie del tronco de cono en el sistema de referencia del eje es

$$\bar{\mathbf{P}}_j(\alpha, \zeta) = [T_Y(\zeta)] \begin{Bmatrix} 0 \\ \alpha y_{j+1}^w + (1-\alpha)y_j^w \\ \alpha z_{j+1}^w + (1-\alpha)z_j^w \end{Bmatrix} \quad (4.1)$$

Transformándolo al sistema de referencia de la vía, queda

$$\tilde{\mathbf{P}}_j(\alpha, \zeta) = [T_Z(\psi) T_X(\phi)] \bar{\mathbf{P}}_j(\alpha, \zeta) = [T_Z(\psi) T_X(\phi) T_Y(\zeta)] \begin{Bmatrix} 0 \\ \alpha y_{j+1}^w + (1-\alpha)y_j^w \\ \alpha z_{j+1}^w + (1-\alpha)z_j^w \end{Bmatrix} \quad (4.2)$$

siendo  $T_Z(\psi)$ ,  $T_X(\phi)$ ,  $T_Y(\zeta)$  las matrices de transformación según la secuencia de rotaciones ZXY desde el sistema de referencia de la vía (fijo) al sistema de referencia asociado al eje (móvil), definidas en el Anexo I.

El problema de intersección elemental puede plantearse considerando los desplazamientos  $y$ ,  $z$  y los giros  $\phi$ ,  $\psi$  de la rueda e igualando la posición de un punto genérico del tronco de cono  $j$  con la posición de un punto genérico de la recta  $i$ . De esta forma se establece un sistema no lineal de tres ecuaciones con tres incógnitas ( $x, \zeta, \alpha$ ):

$$\begin{Bmatrix} x \\ y_i^r \\ z_i^r \end{Bmatrix} = [T_Z(\psi) T_X(\phi) T_Y(\zeta)] \begin{Bmatrix} 0 \\ \alpha y_{j+1}^w + (1-\alpha)y_j^w \\ \alpha z_{j+1}^w + (1-\alpha)z_j^w \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 0 \\ y \\ z \end{Bmatrix} \quad (4.3)$$

La solución de este sistema de ecuaciones ofrecerá los puntos de intersección de la recta (carril) con el cono (rueda) en el espacio (Figura 4.4).

Para un rango de las variables no acotado, existen tres posibles soluciones:

- No existe solución. La recta no interseca con el cono en el espacio.
- Existe una solución doble. Esto sucede cuando la recta es tangente al cono.
- Existen dos soluciones, que serán los puntos de entrada y salida de la recta en el tronco de cono. Este es el caso general.

La resolución del sistema de ecuaciones algebraicas no lineales puede abordarse como sigue: la variable  $x$  sólo aparece en la primera ecuación. Por lo que, tomando la segunda y tercera ecuaciones se resuelven para  $\alpha$  y  $\zeta$ . Empleando

el método de sustitución y eliminando el parámetro  $\alpha$ , se llega a una expresión del tipo

$$A \cos(\zeta) + B \sin(\zeta) + C = 0 \quad (4.4)$$

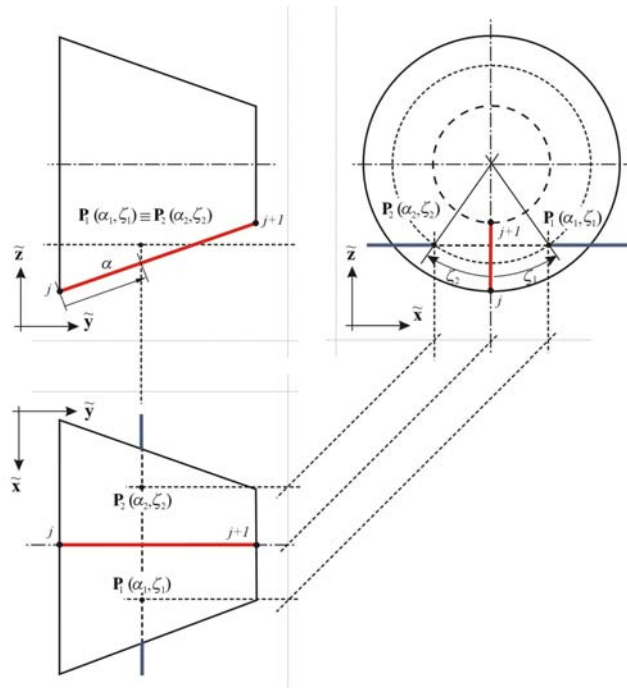
siendo

$$\begin{aligned} A &= ((y_i^r - y) \cos(\phi) + (z_i^r - z) \sin(\phi) \cos(\psi)) (z_{j+1}^w - z_j^w) + \cos(\psi) (y_{j+1}^w z_j^w - y_j^w z_{j+1}^w) \\ B &= -(z_i^r - z) \sin(\psi) (z_{j+1}^w - z_j^w) + \sin(\phi) \sin(\psi) (y_j^w z_{j+1}^w - y_{j+1}^w z_j^w) \\ C &= ((y_i^r - y) \sin(\phi) - (z_i^r - z) \cos(\phi) \cos(\psi)) (y_{j+1}^w - y_j^w) \end{aligned} \quad (4.5)$$

Resolviendo la ecuación característica (4.4) queda

$$\zeta_{1,2} = 2 \cdot \text{atan2}(-B \pm \sqrt{B^2 + A^2 - C^2}, C - A) \quad (4.6)$$

tomando el signo positivo para  $\zeta_1$ , y el signo negativo para  $\zeta_2$ .



**Figura 4.4.** Vistas diédricas de la intersección de la recta  $i$  con el tronco de cono  $j$ .

En esta ecuación se plantean las tres posibilidades mencionadas anteriormente:

- Si el discriminante es negativo, no tiene solución real. En tal caso no hay intersección de la recta con el cono (la superficie de la rueda queda por encima o por debajo de la recta del carril).
- Si el discriminante es nulo, la recta es tangente al cono y hay una solución doble, que es:

$$\zeta_1 = \zeta_2 = 2 \operatorname{atan}2(-B, C - A) \quad (4.7)$$

- En el caso general, hay dos soluciones reales que hacen referencia a los puntos de entrada y salida de la recta en el cono, que se encuentran en las posiciones angulares  $\zeta_1$  y  $\zeta_2$ .

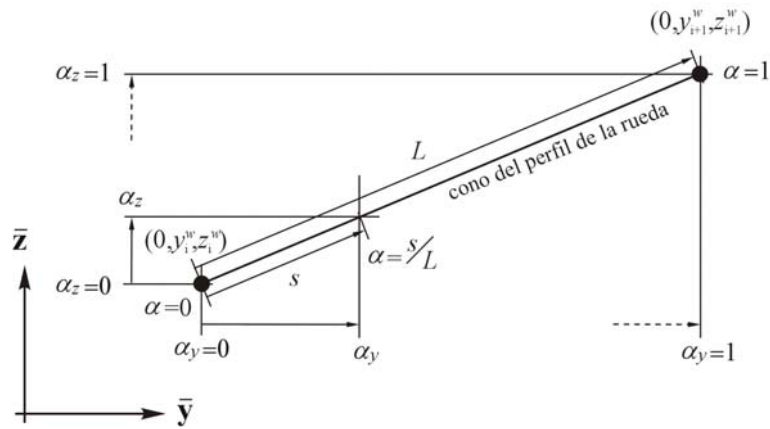
Para cada uno de los valores de  $\zeta$ , se calculará un valor de  $\alpha$ , que indicará la posición longitudinal donde la recta  $i$  atraviesa al tronco de cono  $j$ . El valor de  $\alpha$  se obtiene a partir de la segunda o tercera ecuación escalar de (4.3). Llamando  $\alpha_y$ ,  $\alpha_z$  a los valores de  $\alpha$  obtenidos a partir de la segunda y tercera ecuación, respectivamente, se tiene

$$\alpha_y = \frac{(\sin(\phi)\cos(\psi)z_j^w)\cos(\zeta) + (-\sin(\psi)z_j^w)\sin(\zeta) + ((y_i^r - y) - \cos(\phi)\cos(\psi)y_j^w)}{(-\sin(\phi)\cos(\psi)(z_{j+1}^w - z_j^w))\cos(\zeta) + (\sin(\psi)(z_{j+1}^w - z_j^w))\sin(\zeta) + (\cos(\phi)\cos(\psi)(y_{j+1}^w - y_j^w))}$$

$$\alpha_z = \frac{(-\cos(\phi)z_j^w)\cos(\zeta) + ((z_i^r - z) - y_j^w\sin(\phi))}{(\cos(\phi)(z_{j+1}^w - z_j^w))\cos(\zeta) + (\sin(\phi)(y_{j+1}^w - y_j^w))}$$

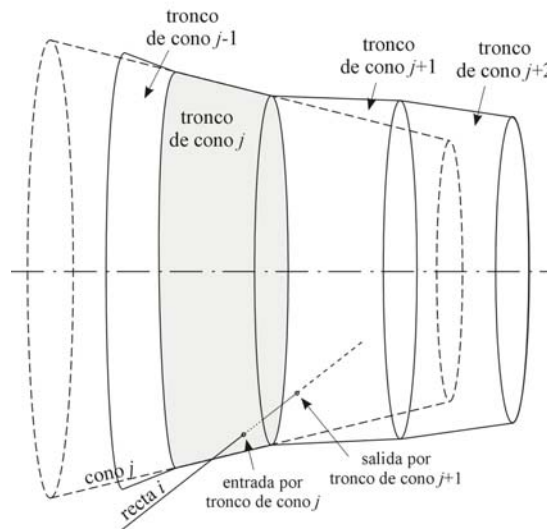
(4.8)

El valor de  $\alpha$  se puede calcular mediante cualquiera de las dos ecuaciones, excepto cuando se anule el denominador de alguna de las expresiones. La Figura 4.5 ofrece una interpretación geométrica para los valores de  $\alpha_y$  y  $\alpha_z$ . Ambos parámetros varían desde 0 en el extremo  $j$  a 1 en el extremo  $j+1$ . Observar que el valor de  $\alpha_y$  se mide en proyección horizontal y  $\alpha_z$  en proyección vertical. Por tanto, si el segmento generatriz de la rueda se encuentra en posición vertical en el sistema de referencia de la vía, el denominador de  $\alpha_y$  será nulo y deberá utilizarse la ecuación para  $\alpha_z$ . De la misma forma, si el segmento se encuentra en posición horizontal, el denominador de  $\alpha_z$  será nulo, y se deberá utilizar la ecuación para  $\alpha_y$ .



**Figura 4.5.** Transformación lineal dentro del segmento generatriz del tronco de cono  $j$ , que define la rueda.

Si tras calcular  $\alpha$  se cumple  $0 \leq \alpha \leq 1$ , la intersección de la recta  $i$  corta al tronco de cono definido por la generatriz  $j$  de la rueda. En caso contrario, aparece un corte del cono (teóricamente infinito), pero fuera de la zona definida por el segmento generatriz. Si  $\alpha < 0$ , se buscará la intersección de la recta  $i$  con el segmento generatriz  $j-1$ ; en cambio, si  $\alpha > 1$ , se buscará con el segmento generatriz  $j+1$ . Esto es debido a que en el sistema de ecuaciones (4.3) las variables no están restringidas. Esta situación es la representada en la Figura 4.6.



**Figura 4.6.** Ejemplo de la resolución de la intersección de una recta longitudinal  $i$  con dos troncos de cono adyacentes  $j, j+1$ .

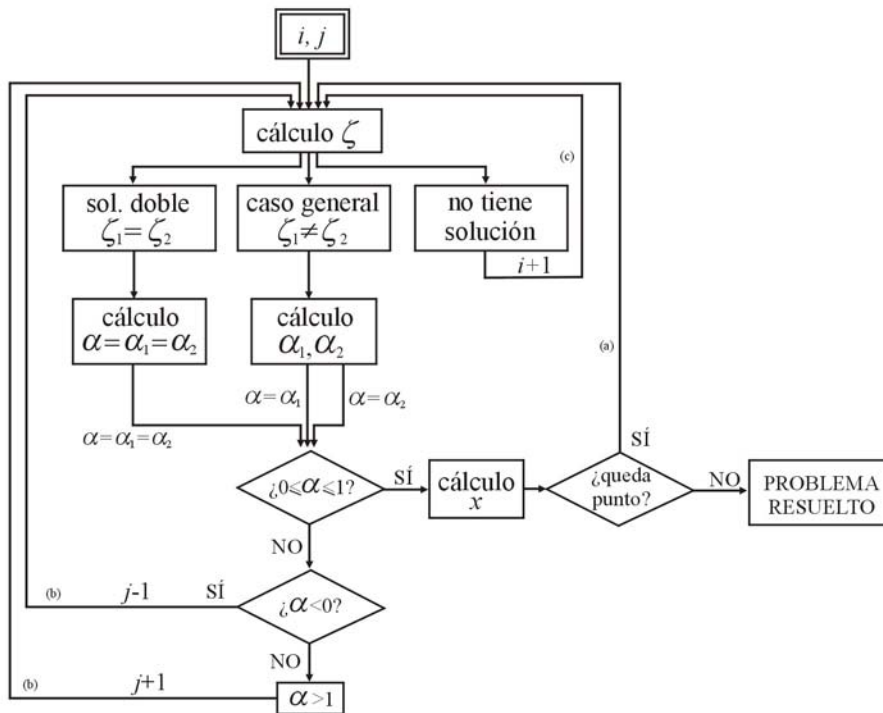
Finalmente, utilizando la primera ecuación de (4.3), se puede obtener el valor de  $x$  para cada punto de intersección de la recta  $i$  con un tronco de cono:



$$x = -\sin(\psi)\cos(\phi)(\alpha y_{j+1}^w + (1-\alpha)y_j^w) + (\cos(\psi)\sin(\zeta) + \sin(\phi)\sin(\psi)\cos(\zeta))(\alpha z_{j+1}^w + (1-\alpha)z_j^w) \tag{4.9}$$

Como resumen, el diagrama de flujo de la Figura 4.7 muestra el procedimiento seguido para encontrar la intersección entre una recta longitudinal  $i$  y un tronco de cono  $j$  o adyacentes. Las operaciones básicas son tres:

1. Cálculo de la posición angular  $\zeta$  donde la recta corta al cono según la ecuación (4.6).
2. Cálculo del parámetro  $\alpha$  que indica la posición de la intersección a lo largo del segmento generatriz según la ecuación (4.8).
3. Cálculo de la coordenada  $x$ , según el eje  $\tilde{x}$ , del punto de intersección utilizando la ecuación (4.9).



**Figura 4.7.** Diagrama de flujo del procedimiento seguido para encontrar los puntos de intersección entre una recta longitudinal  $i$  y un tronco de cono  $j$ .

La evaluación de estas tres fórmulas no es computacionalmente costosa, por lo que el problema elemental de contacto se puede resolver en un tiempo

aceptable. Cuando  $\zeta_1 \neq \zeta_2$ , se deberá recorrer al menos dos veces el bucle interno <sup>(a)</sup> para los puntos de entrada y salida de la recta en la superficie de la rueda. Aparecen otros dos bucles <sup>(b)</sup> que actualizan el valor de  $j$  si alguno de los dos puntos de entrada/salida de la recta en el cono no queda dentro del tronco de cono definido por el segmento generatriz  $j$ . En el caso de que no haya intersección para el par  $i, j$  se incrementará el valor de  $i$  <sup>(c)</sup> para recorrer el perfil del carril y buscar intersección con la rueda.

La solución de la intersección de la recta los troncos de cono son dos puntos (uno de entrada y otro de salida) de coordenadas  $(x_1, y', z')$  y  $(x_2, y', z')$ . Estos dos puntos definen una tira longitudinal o *strip*.

#### d. Definición de *strips*

La intersección de cada recta longitudinal con la superficie de la rueda da lugar a una *strip* o tira longitudinal de interpenetración [8, 76]. Para cada *strip*  $k$  se calcularán las siguientes características:

- Posición  $(x_k, y_k, z_k)$ .
- Longitud  $l_k$ .
- Conicidad  $\gamma_k$ .
- Radio de rodadura de la rueda en la *strip*  $R_k$ .
- Radio de indentación  $r_{ind_k}$  y valor de la indentación  $\delta_k$  del tronco de cono sobre el carril.

La posición de la *strip* en  $y_k, z_k$  son las coordenadas de la recta longitudinal  $i$  que define el carril  $y', z'$ . La posición  $x_k$  se calcula como la media entre las coordenadas de entrada y salida de la recta longitudinal en el cuerpo de la rueda:

$$x_k = \frac{x_{1k} + x_{2k}}{2} \quad (4.10)$$

La longitud de la *strip* se calcula como la distancia entre estos dos puntos

$$l_k = |x_{1k} - x_{2k}| \quad (4.11)$$

La conicidad de la *strip* se obtiene como la media entre la conicidad del perfil del carril (superíndice  $r$ ) y la conicidad del perfil de la rueda (superíndice  $w$ ) medidos en el sistema de referencia de la vía:

$$\gamma_k = \frac{\gamma_k^r + \gamma_k^w}{2} \quad (4.12)$$

donde cada tronco de cono (rueda) tiene conicidad constante y para la recta longitudinal (carril) se obtiene tomando las rectas longitudinales contiguas. Para la rueda, en el caso de que los puntos de entrada y salida de la recta longitudinal  $i$  no estén sobre el mismo tronco de cono  $j$ , se toma la media entre las dos conicidades.

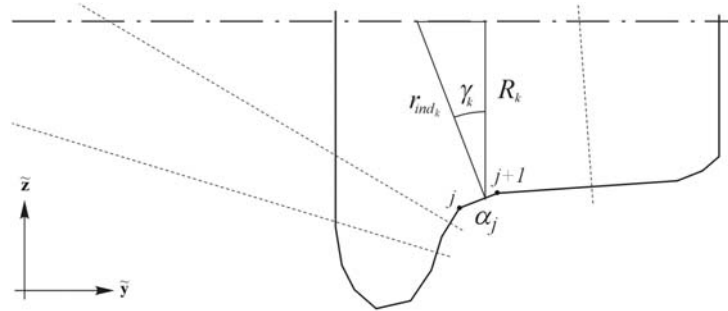
Para hallar el radio de rodadura correspondiente a la *strip* se usará el parámetro  $\alpha$  (en el caso que la intersección sea con el mismo tronco de cono) para interpolar linealmente entre los valores del radio de rodadura de los extremos del segmento generatriz del cono  $j$ :

$$R_k(\alpha) = \alpha R_{j+1} + (1 - \alpha)R_j \quad (4.13)$$

siendo  $R_j, R_{j+1}$  los radios de la rueda correspondientes a los extremos del segmento  $j$ . En el caso de que la entrada y salida de la recta longitudinal  $i$  no estén sobre el mismo cono  $j$ , se tomará la media de los dos radios de rodadura correspondientes a los puntos de entrada/salida de la recta en la superficie de la rueda calculados según la fórmula (4.13).

Para calcular la indentación de la superficie de la rueda sobre el carril se utiliza un procedimiento geométrico aproximado. Para ello se define un radio de indentación de la rueda sobre el carril [9] (ver Figura 4.8) como

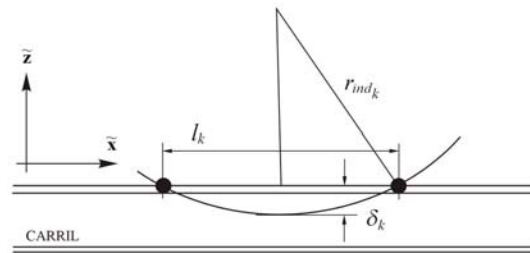
$$r_{ind_k} = \frac{R_k}{\cos(\gamma_k)} \quad (4.14)$$



**Figura 4.8.** Cálculo del radio de indentación de la rueda.

El valor de la indentación  $\delta_k$  se calcula suponiendo que la rueda realiza una indentación circular de radio  $r_{ind}$  sobre cada *strip*. Por tanto, este valor es (Figura 4.9):

$$\delta_k = r_{ind_k} - \sqrt{r_{ind_k}^2 - \left(\frac{l_k}{2}\right)^2} \quad (4.15)$$



**Figura 4.9.** Cálculo de la indentación de la rueda sobre el carril para una *strip*.

El área de interpenetración queda definida mediante el conjunto de *strips*.

### e. Caracterización del área de interpenetración

Una vez definidos los parámetros de cada una de las *strips* que forman el área de interpenetración el siguiente paso consiste en extraer los parámetros característicos de la propia área de interpenetración. Estos son:

- Conicidad del área de interpenetración  $\gamma_o$ .
- Indentación del área de interpenetración  $\delta_o$ .
- Dimensiones globales del área de interpenetración dadas por el rectángulo circunscrito de ancho  $W$  y largo  $L$ .

En primer lugar, la conicidad del área de interpenetración  $\gamma_o$  se calcula como una media ponderada de las conicidades de cada una de las *strips*, siendo  $N$  el número de *strips* del área de interpenetración:

$$\gamma_o = \frac{\sum_{k=1}^N l_k \gamma_k}{\sum_{k=1}^N l_k} \quad (4.16)$$

El valor del ángulo de conicidad del área de interpenetración define la transformación del sistema de referencia de la vía  $\tilde{\mathbf{x}}\tilde{\mathbf{y}}\tilde{\mathbf{z}}$  al sistema de referencia asociado al contacto  $\mathbf{x}_c\mathbf{y}_c\mathbf{z}_c$  mediante un giro alrededor del eje X de valor  $\gamma_o$ . El área de interpenetración se supone que está contenida en el plano  $\mathbf{x}_c\mathbf{y}_c$ .

Como indentación característica  $\delta_o$  se toma la indentación máxima entre las *strips* que forman el área de interpenetración.

En cuanto a las dimensiones del área de interpenetración, éstas se obtienen como las dimensiones del rectángulo circunscrito, orientado según los ejes  $\mathbf{x}_c\mathbf{y}_c$ .  $L$  es el largo medido sobre el eje  $\mathbf{x}_c$  y  $W$  es el ancho medido sobre  $\mathbf{y}_c$  (Figura 4.21). Como se definirá más adelante, el valor de la fuerza normal depende de las dimensiones del área de contacto y ésta se obtiene a partir del área de interpenetración. Por tanto, para asegurar una variación continua de la fuerza normal, será necesario conseguir una variación continua de estas dimensiones. Con el procedimiento descrito esta condición se cumple para el largo  $L$  pero no para el ancho  $W$ . Este último valor varía de forma discreta según las *strips* que formen parte del área de interpenetración. Una modificación del procedimiento permite conseguir esta propiedad mediante la consideración de *strips de extremo*. Éstas se calculan tal como se indica en la Figura 4.10. Para ello se toma la proyección de los perfiles de rueda y carril en el plano transversal a la vía ( $\tilde{\mathbf{y}} - \tilde{\mathbf{z}}$ ) y se supone que ambos están definidos mediante curvas poligonales.

En primer lugar, para la rueda se toma la curva generatriz en su cota más baja. A partir de la ecuación (4.2), para un punto genérico del perfil de la rueda ( $y^w z^w$ ), desarrollando la expresión y tomando la tercera componente del vector, queda

$$\tilde{\mathbf{P}}^z = \sin(\phi)y^w + \cos(\zeta)\cos(\phi)z^w + z \quad (4.17)$$

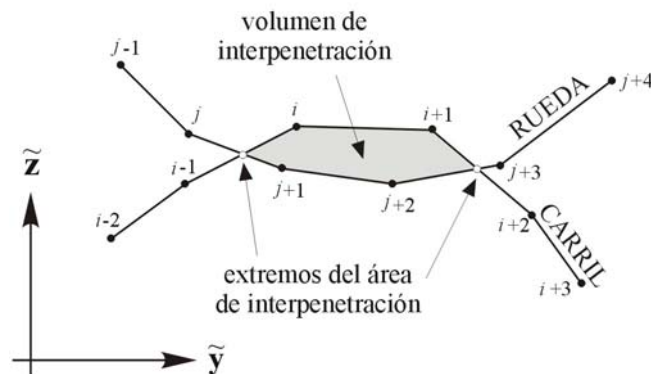
donde todos los valores son conocidos excepto el valor del ángulo  $\zeta$ . Derivando la expresión anterior e igualando a 0, se tiene que la cota más baja del perfil de la rueda, medida en el sistema de referencia de la vía, se corresponde con  $\zeta = 0$ .

En segundo lugar, para el carril se introduce un nuevo parámetro  $\beta$  que define una variación lineal de los segmentos del carril.

Teniendo en cuenta estas dos modificaciones, el sistema de ecuaciones (4.3) quedaría como

$$\begin{Bmatrix} x \\ \beta y'_{i+1} + (1-\beta)y'_i \\ \beta z'_{i+1} + (1-\beta)z'_i \end{Bmatrix} = [T_Z(\psi) T_X(\phi)] \begin{Bmatrix} 0 \\ \alpha y'_{j+1} + (1-\alpha)y'_j \\ \alpha z'_{j+1} + (1-\alpha)z'_j \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 0 \\ y \\ z \end{Bmatrix} \quad (4.18)$$

Lo que constituye un sistema lineal de tres ecuaciones, cuyas incógnitas son  $x$ ,  $\alpha$  y  $\beta$ . Tomando la segunda y tercera ecuación, se resuelve para el valor de los parámetros  $\alpha$  y  $\beta$  que debe estar entre 0 y 1. La resolución del problema requiere un proceso de iteración, ya que en un problema tridimensional completo no se conoce *a priori* el par de rectas  $i, j$  que se intersectan según su proyección en el plano transversal a la vía. Se tomará como partida los valores de  $i, j$  en los que aparece la primera/última *strip* del área de interpenetración y, en el caso de que no se cumplan las restricciones  $0 < \alpha < 1$  o  $0 < \beta < 1$ , se probará con las rectas de rueda y carril adyacentes. Cuando se obtenga la solución del sistema cumpliendo las restricciones impuestas, las coordenadas de los puntos extremos del área de interpenetración en  $\tilde{y}$  y  $\tilde{z}$  se obtienen sustituyendo en la segunda y la tercera de las ecuaciones (4.18) los valores de  $\alpha$  y  $\beta$ .

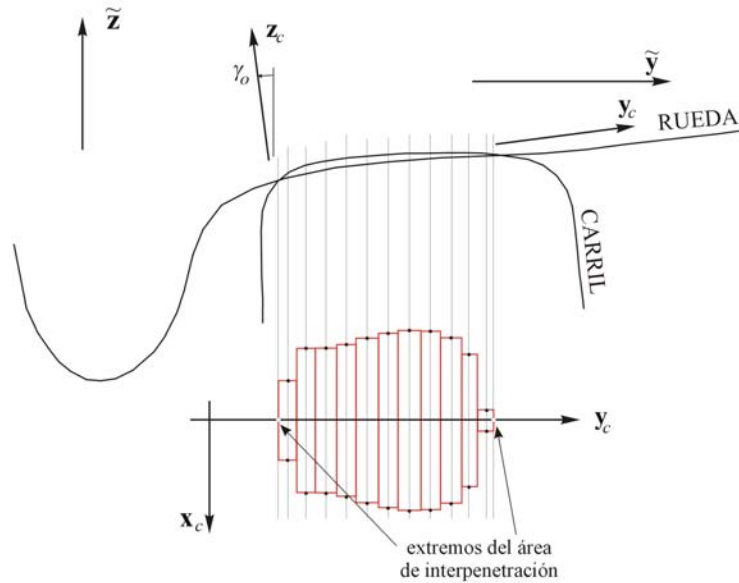


**Figura 4.10.** Obtención de los puntos extremos del área de interpenetración entre los perfiles de rueda y carril.

De esta forma, se definen las *strips de extremo* del área de interpenetración. Se trata de unas *strips* especiales, cuyas características relevantes son la posición

lateral y vertical de la strip  $y_k, z_k$ . Los valores de longitud e indentación son nulos. Para el cálculo de la conicidad el área de interpenetración según (4.16) no se tendrán en cuenta las *strips de extremo*.

El resultado de la aplicación de este método es la obtención del área de interpenetración entre los perfiles de la rueda y carril, según Figura 4.11.



**Figura 4.11.** Representación del área de interpenetración obtenida entre los perfiles de rueda y carril.

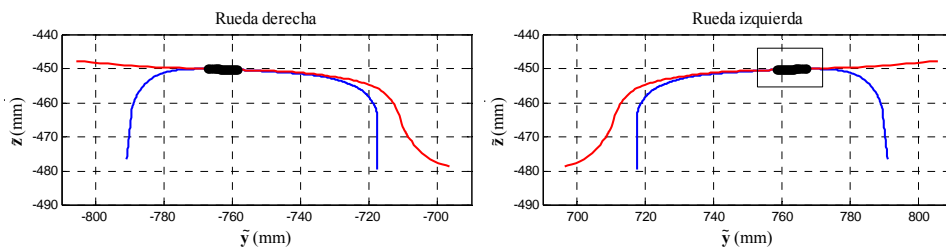
### 4.2.3. Problema normal de contacto

A partir del área de interpenetración, obtenida en el apartado anterior, se obtiene el área de contacto, la distribución de tensiones normales dentro de esta área y la fuerza total. Para ello se van a seguir los siguientes pasos:

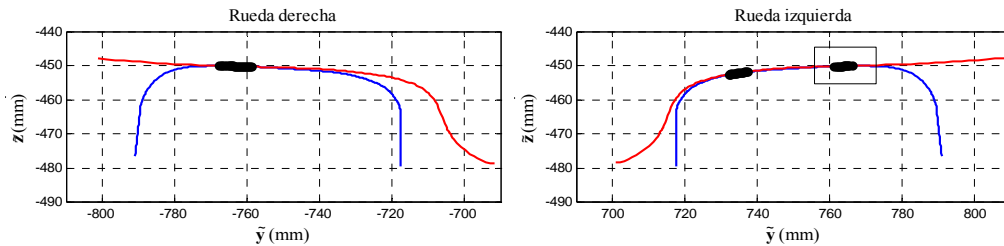
- Estimar del área de contacto a partir del área de interpenetración.
- Aplicar de una corrección de forma para tener en cuenta la deformación en las proximidades del contacto.
- Ajustar la elipse equivalente al área de contacto.
- Obtener la distribución de tensiones normales a partir del modelo de Hertz, dentro de la elipse equivalente.

En el desarrollo del presente apartado se presentan dos ejemplos de áreas de contacto cualesquiera con el fin de ilustrar el procedimiento propuesto. Ambos están obtenidos a partir de ruedas de tipo S1002 y carriles UIC60 montados con una inclinación 1:20. Los perfiles son nuevos (sin desgaste) y se han medido con el dispositivo Miniprof. Las dos áreas de contacto estudiadas son:

- (a) Para el eje centrado, área de contacto sobre la rueda izquierda (Figura 4.12).
- (b) Para un desplazamiento lateral  $y = 4,5$  mm y un ángulo de lazo  $\psi = 10$  mrad  $\approx 0,5^\circ$ . En esta situación aparece multicontacto. Además, debido al ángulo de lazo no nulo, el problema geométrico de contacto no es simétrico respecto al eje  $\tilde{y}$  y las áreas de contacto se sitúan en posiciones distintas a  $\tilde{x} = 0$ . Se estudia el contacto sobre la banda de rodadura de la rueda izquierda (Figura 4.13).



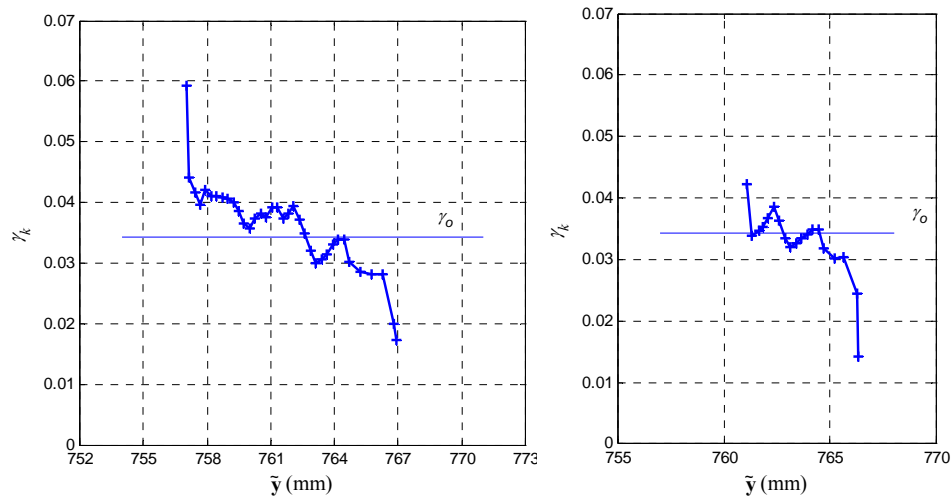
**Figura 4.12.** Caso (a): Áreas de contacto para el eje centrado. Se estudia el área de contacto sobre la rueda izquierda.



**Figura 4.13.** Caso (b): Áreas de contacto de un eje con desplazamiento lateral  $y = 4,5$  mm y ángulo de lazo  $\psi = 10$  mrad. Se estudia el área de contacto sobre la banda de rodadura de la rueda izquierda.

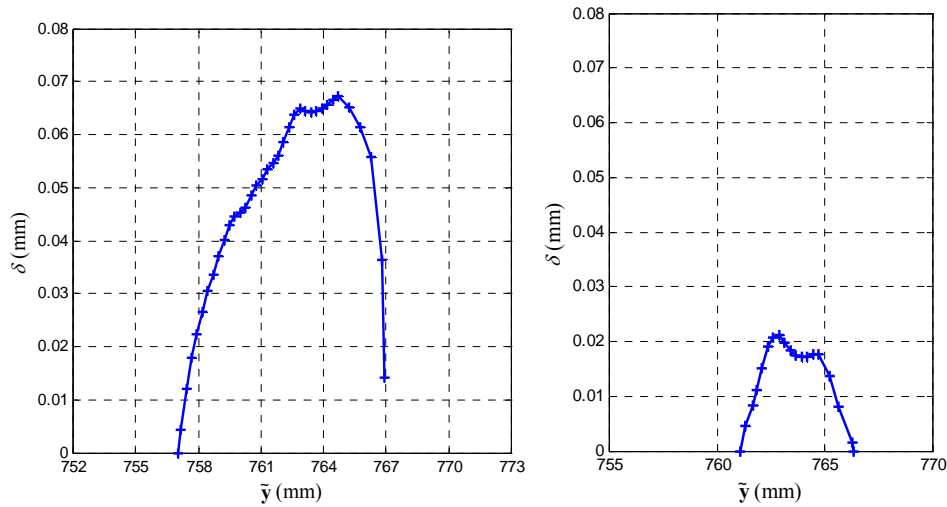
La Figura 4.14 muestra la conicidad para las *strips* obtenidas según (4.12) y la correspondiente para el área de interpenetración según (4.16), para los dos casos estudiados. Se observan oscilaciones entre una y otra *strip*, debido a que se trata de perfiles medidos. El valor de la conicidad es similar en ambos casos porque el área de contacto se sitúa aproximadamente en la misma posición sobre el carril.





**Figura 4.14.** Conicidad de las *strips* que forman el área de contacto  $\gamma_k$  y conicidad calculada para el área  $\gamma_o$ : (a) izq., (b) dcha.

En la Figura 4.15 se muestra la interpenetración o indentación entre los perfiles de rueda y carril para las dos áreas de interpenetración estudiadas. La indentación para el caso (b) es mucho menor que para el caso (a). Esto es debido a que en (b) aparece multicontacto y la carga sobre la rueda izquierda se reparte con otro punto de contacto situado cerca del radio de acuerdo de la pestaña. Como se verá más adelante, el valor de la fuerza normal depende del valor de indentación entre perfiles. Para cada uno de las dos áreas de interpenetración, el valor de  $\delta_o$  es el valor de indentación máxima.



**Figura 4.15.** Indentación entre perfiles para el área de contacto (a) izq. y (b) dcha.

Una vez presentados los dos casos que se van a estudiar, se va a proceder a describir el procedimiento de resolución del problema normal.

#### a. Estimación del área de contacto a partir del área de interpenetración

Como se ha comentado anteriormente, según la familia de *métodos basados en la interpenetración virtual* entre superficies, el *área de contacto* se estima a partir del *área de interpenetración* para una indentación de valor  $K \cdot \delta_o$ . Tomando cada una de las áreas de interpenetración de la rueda con el carril, se aplica una elevación virtual de la rueda de valor  $\delta_o (1-K)$  según la dirección dada por  $\gamma_o$ .

Se han ensayado diversos valores de  $K$  y se ha comparado la solución obtenida con geometrías de contacto de las que se dispone de la solución analítica (contacto esfera-plano y contacto cono-cilindro, ver las dos primeras secciones del apartado 4.2.4). Se ha concluido tomar un valor de  $K = 0,55$ , que es el mismo valor usado por Kik y Piotrowski [48, 76-77].

La nueva área de interpenetración se obtiene considerando superficies indeformables. Al entrar en contacto dos superficies, en la realidad, éstas se deforman reduciéndose el área de contacto (ver Figura 2.16, Cap. 2). Una vez estimada de este modo el área de contacto, se aplicará una corrección de forma para tener en cuenta esta deformación. Se tomará la misma corrección de forma propuesto por Kik y Piotrowski en [76-77].

Para cada *strip* se define una elevación siguiendo la dirección normal dada por su conicidad, de valor:

$$\Delta\delta_k = \delta_o(1-K) \cdot \cos(\gamma_o - \gamma_k) \quad (4.19)$$

En cada *strip* pueden darse uno de los siguientes casos:

- si  $\Delta\delta_k > \delta_k$  la *strip* no forma parte del área de contacto.
- en caso contrario, la *strip* forma parte del área de contacto, con una longitud corregida que valdrá

$$l_k^c = 2\sqrt{r_{ind_k}^2 - (r_{ind_k} - (\delta_k - \Delta\delta_k))^2} \quad (4.20)$$

Tal como se hizo con el cálculo del área de interpenetración, se debe definir un procedimiento con el fin de conseguir una variación continua del ancho del área de contacto. Para ello se toma la interpenetración entre superficies (Figura 4.15) y se aplica la elevación  $\Delta\delta_k$  (4.19) para cada una de las *strips* del área de interpenetración. Se buscarán los extremos del área de contacto y a partir de éstos, se utilizará un parámetro que permita definir una variación continua para las características de estos extremos.

Recorriendo el área de interpenetración desde  $k=1, \dots, N$  donde  $N$  es el número de *strips* del área de interpenetración. Se toma como  $k_1$  el valor de la primera *strip* que formaría parte del área de contacto debido a que  $\delta_{k_1} > \Delta\delta_{k_1}$ . Asumiendo que la variación de la conicidad entre *strips* contiguas es muy pequeña, y por tanto  $\Delta\delta_{k_1} \approx \Delta\delta_{k_1-1}$  se puede definir un parámetro  $\lambda_1$  que puede tomar los siguientes valores:

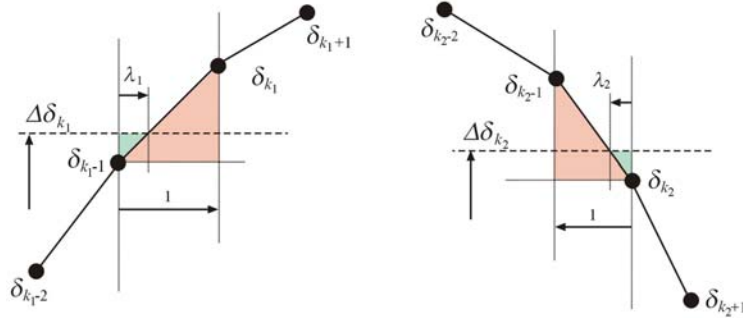
- $\lambda_1 = 0$  es el caso límite en el que la *strip* ( $k_1-1$ ) formaría parte del área de contacto, debido a que  $\delta_{k_1-1} = \Delta\delta_{k_1-1} \approx \Delta\delta_{k_1}$ .
- $\lambda_1 = 1$  es el otro caso límite en el que la *strip*  $k_1$  definiría la apertura del área de contacto, debido a que  $\delta_{k_1} = \Delta\delta_{k_1}$ .
- Para cualquier otro caso, el parámetro será  $0 < \lambda_1 < 1$ . Este valor se puede obtener por semejanza de triángulos a partir de la Figura 4.16-izq.:

$$\lambda_1 = \frac{\Delta\delta_{k_1} - \delta_{k_1-1}}{\delta_{k_1} - \delta_{k_1-1}} \quad (4.21)$$

De este modo se pueden calcular los parámetros característicos de la *strip* ( $k_1-1$ ), que será la nueva *strip de extremo* del área de contacto. De esta forma, se consigue una variación continua:

$$y_{k_1-1}^c = (1 - \lambda_1)y_{k_1-1} + \lambda_1 y_{k_1} \quad (4.22)$$

donde la longitud y la indentación de esta *strip de extremo* serán nulas:  $l_{k_1-1}^c = \delta_{k_1-1}^c = 0$ .



**Figura 4.16.** Representación gráfica de los parámetros  $\lambda_1$ ,  $\lambda_2$  a partir de la indentación entre perfiles  $\delta_k$  y el valor de la elevación  $\Delta\delta_k$  para cada *strip*.

De la misma forma, siendo  $k_2$  la primera *strip* que deja de formar parte del área de contacto (Figura 4.16-dcha.), se puede definir un parámetro  $\lambda_2$  que vale

- $\lambda_2 = 0$  cuando la *strip*  $k_2$  entra a formar parte del área de contacto porque  $\delta_{k_2} = \Delta\delta_{k_2}$
- $\lambda_2 = 1$  cuando es la *strip* ( $k_2-1$ ) la última que forma parte del área de contacto, porque  $\delta_{k_2-1} = \Delta\delta_{k_2-1} \approx \Delta\delta_{k_2}$
- $0 < \lambda_2 < 1$  en el resto de los casos, definiéndose  $\lambda_2$  como

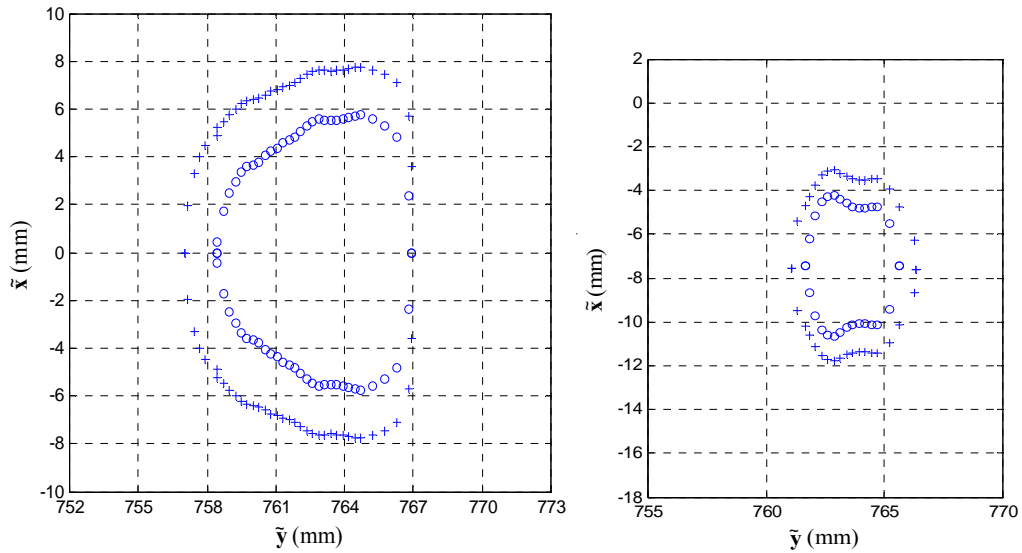
$$\lambda_2 = \frac{\Delta\delta_{k_2} - \delta_{k_2}}{\delta_{k_2-1} - \delta_{k_2}}$$

Con lo que las magnitudes características de la nueva *strip* valdrán

$$\begin{aligned} y_{k_2}^c &= (1 - \lambda_2)y_{k_2} + \lambda_1 y_{k_2-1} \\ l_{k_2}^c &= \delta_{k_2}^c = 0 \end{aligned} \quad (4.23)$$

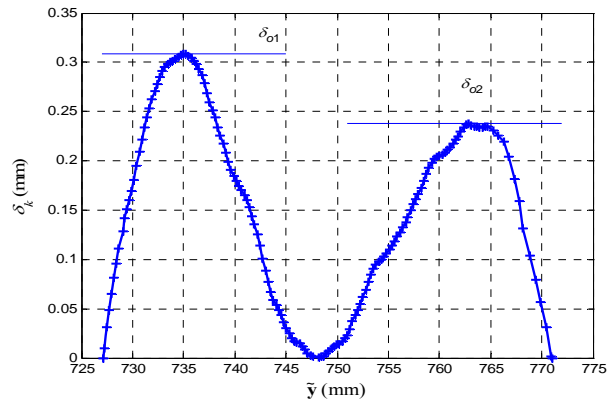
La Figura 4.17 muestra la proyección sobre el plano de la vía de las áreas de interpenetración y de contacto para los dos casos estudiados. Para el caso (b),

debido al ángulo de lazo no nulo, el área de contacto no es simétrica respecto al eje  $\tilde{y}$ .

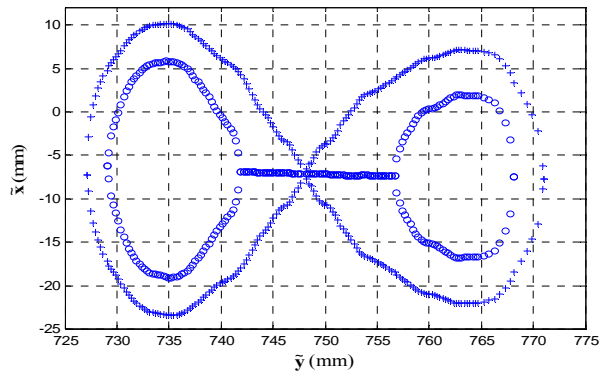


**Figura 4.17.** Áreas de interpenetración '+' y áreas de contacto 'o' estudiadas: (a) izq., (b) dcha.

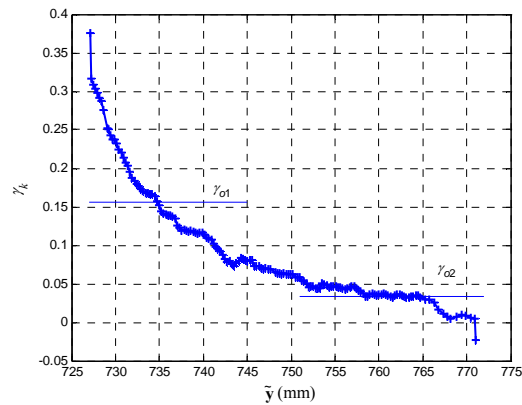
Se puede dar el caso en que la función de interpenetración  $\delta_k$  tuviese más de un máximo relativo como por ejemplo como sucede en la Figura 4.18. Según el procedimiento descrito se tomaría como  $\delta_0$  el mayor de ellos para calcular una elevación  $\Delta\delta_k$  según (4.19). En este caso, el área de interpenetración podría dar lugar a dos áreas de contacto (Figura 4.19). En tal caso, los valores de las conicidades para cada área de contacto deben recalcularse según la fórmula (4.16), tomando como  $N$  el número total de *strips* dentro de cada área de contacto.



**Figura 4.18.** Caso particular de la indentación de las *strips* en un área de interpenetración. Aparecen dos máximos relativos, que dan lugar a dos áreas de contacto.



**Figura 4.19.** Aparición de dos áreas de contacto 'o', dentro de una misma área de interpenetración '+' para la función indentación de la Figura 4.18.

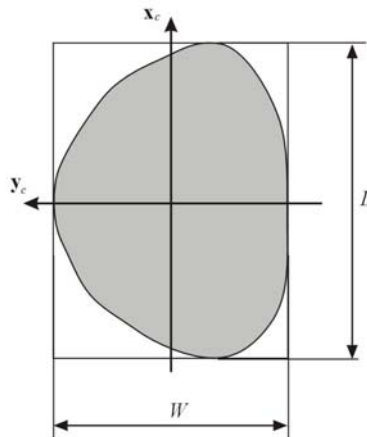


**Figura 4.20.** Valores característicos de las conicidad recalculadas para las dos áreas de contacto que aparecen dentro de la misma área de interpenetración de la Figura 4.19.

### b. Aplicación de la corrección de forma.

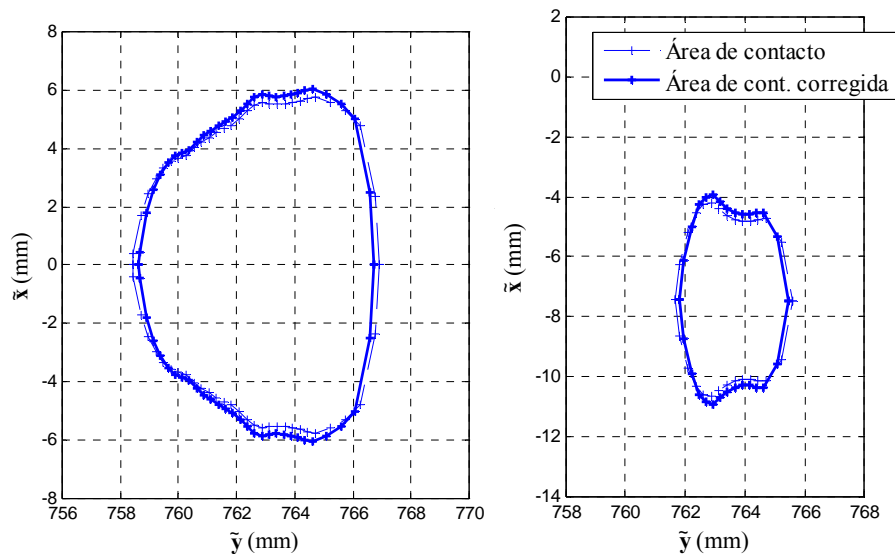
Una vez obtenidas las áreas de contacto a partir de las áreas de interpenetración se debe aplicar una corrección de forma para tener en cuenta la deformación local de las superficies en las cercanías del contacto. Esta corrección de forma no hará falta aplicarse en el caso de que el área de contacto obtenida sea circular. Se aplicará la corrección de forma propuesta por Piotrowski y Kik (ver el método de Kik y Piotrowski en el apartado 2.4.3 y las referencias [76-77]).

Según este método, el área de contacto se circunscribe con un rectángulo de dimensiones  $L$  (según eje  $x_c$ ) y  $W$  (según eje  $y_c$ ) (Figura 4.21) en el sistema de referencia asociado al contacto. Tomando el valor de la indentación máxima  $\delta_0$  y las tablas de contacto del modelo de Hertz se calculan las dimensiones corregidas  $L_c$  y  $W_c$  tal como se detalla en el Cap. 2.



**Figura 4.21.** Área de contacto genérica de longitud  $L$  y anchura  $W$ .

En la Figura 4.22 aparecen las dos áreas de contacto estudiadas, junto a su forma corregida según el criterio de Piotrowski y Kik y proyectadas en el plano de la vía  $\tilde{x} - \tilde{y}$ . Como consecuencia de la aplicación de la corrección de forma, en este caso ambas áreas de contacto se contraen según el eje  $y_c$  y se alargan según el eje  $x_c$ . Según el procedimiento utilizado, el valor de la superficie de las dos áreas de contacto se mantiene constante al realizar la corrección de forma.



**Figura 4.22.** Áreas de contacto sin y con corrección de forma: (a) izq., (b) dcha.

### c. Ajuste de la elipse equivalente.

Para obtener la distribución de presiones normales dentro del área de contacto, como se ha mencionado anteriormente, el método propuesto aproxima el área de contacto a una figura regular. Esta figura regular es una elipse, llamada *elipse equivalente*. La resolución del problema de contacto completo será consistente y utilizará esta elipse equivalente para la resolución del problema tangencial (ver Cap. 5). Por tanto, la transmisión de los esfuerzos generados en la interfase rueda-carril se supondrá que se realiza sobre esta elipse de contacto, tanto tensiones normales como tensiones tangenciales al contacto.

Una vez corregida el área de contacto se busca la *elipse equivalente*. Se imponen dos condiciones para hallar las dimensiones de los semiejes de la elipse equivalente. Estas dos condiciones son las mismas que las usadas por Kik y Piotrowski para definir la elipse equivalente con el fin de obtener los valores de los coeficientes de Kalker para un área no elíptica (ver Cap. 2 ecuación (2.89)). Resolviendo la ecuación (2.89) y particularizando para el área de contacto corregida, se tiene:

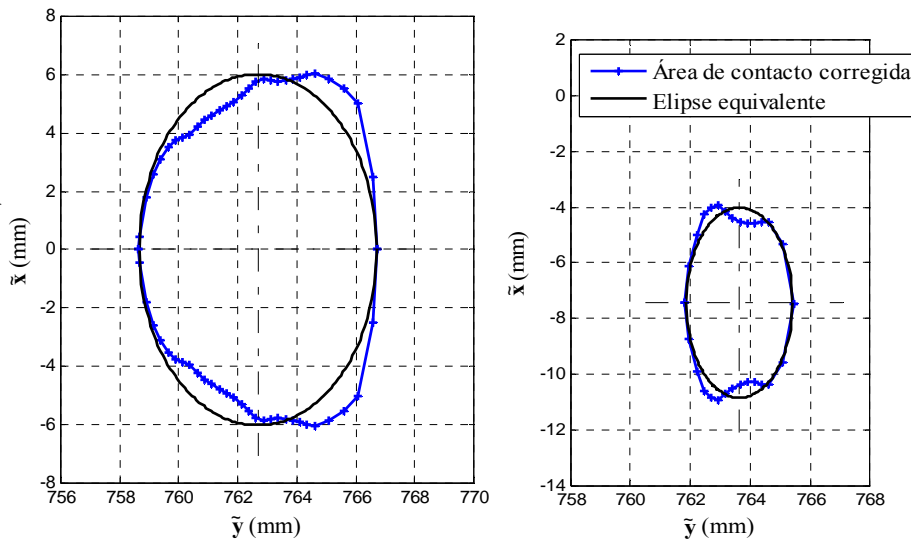
$$a_e = \sqrt{\frac{A_c L_c}{\pi W_c}} \quad b_e = \sqrt{\frac{A_c W_c}{\pi L_c}} \quad (4.24)$$



donde  $a_e$ ,  $b_e$  son los semiejes de la elipse equivalente en dirección longitudinal y lateral, respectivamente,  $A_c$  es el valor de la superficie del área de contacto corregida y  $L_c$ ,  $W_c$  son el largo y ancho del área de contacto corregida, respectivamente (definidos según la Figura 4.21).

En la referencia [90] se utiliza un criterio más simple para definir la *elipse equivalente*. Se ha comprobado que la influencia de utilizar uno u otro criterio para definir la elipse equivalente es muy pequeña en la solución del problema de contacto.

Como punto teórico de contacto se toma el centro de la elipse y se supone que en este punto se da la indentación máxima  $\delta_0$ . Además, se supone que el área de contacto es plana y tiene la conicidad correspondiente a  $\gamma_0$ . La Figura 4.23 muestra las elipses equivalentes para las dos áreas de contacto estudiadas, proyectadas en el sistema de referencia de la vía.

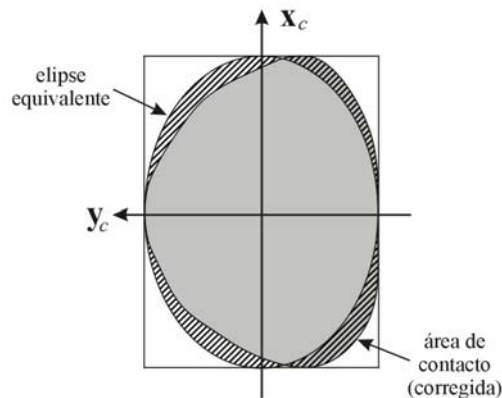


**Figura 4.23.** Áreas de contacto corregidas y elipse equivalente: (a) izq., (b) dcha.

Con el fin de evaluar la hipótesis de *eliptización* de las áreas de contacto no elípticas, se define un *parámetro de elipticidad*  $\varepsilon$ . Este parámetro tiene en cuenta la discrepancia entre el área de contacto corregida  $A_c$  y el área de la elipse equivalente  $A_e$  [90].  $\varepsilon$  se define como:

$$\varepsilon = 1 - \frac{(A_c \cup A_e) - (A_c \cap A_e)}{A_e} \quad (4.25)$$

siendo  $(A_c \cup A_e) - (A_c \cap A_e)$  el área rayada de la Figura 4.24.



**Figura 4.24.** Área de contacto y elipse equivalente.

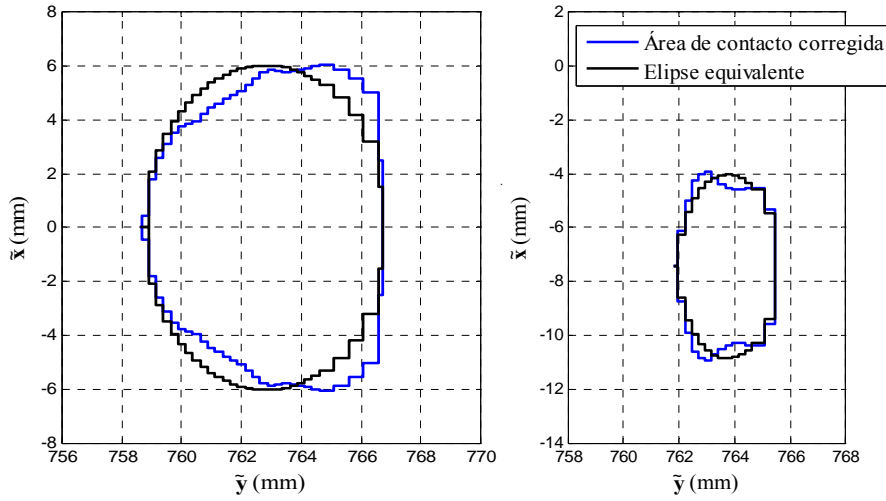
Si el parámetro de elipticidad vale 1, el área de contacto es una elipse perfecta, con los semiejes orientados según los ejes  $x_c$ - $y_c$ . Se supondrá que el error de aproximar el área de contacto a una elipse será *pequeño* si el parámetro de elipticidad toma valores *cercanos* a 1.

La Tabla 4.1 muestra los valores del parámetro de elipticidad calculados para las dos áreas estudiadas. Estos valores dan una estimación del error de asumir el área de contacto no elíptica como una elipse. Esta simplificación se hace con el fin de resolver el problema de contacto normal y tangencial con un coste computacional bajo. En el apartado 4.3 se presentan unos resultados experimentales del estudio de diversas áreas de contacto para distintos perfiles de rueda y carril con los que se comprueba la adopción de la hipótesis de *elipse equivalente*.

**Tabla 4.1.** Parámetros de elipticidad calculados para las áreas de contacto estudiadas.

	Área de contacto (a)	Área de contacto (b)
$\varepsilon$	0,85	0,88

Kalker en [46] sugiere la eliptización de las áreas de contacto para el campo de la simulación dinámica con pequeños desplazamientos. Para posiciones del eje separadas respecto a la posición de equilibrio o en general, para áreas de contacto más *distorsionadas*, se seguirá aproximando el área de contacto a una elipse, sabiendo que el error cometido sea previsiblemente mayor. No obstante, como se señala al principio de este capítulo, la hipótesis de contacto elíptico sigue siendo una de las más utilizadas en el campo de la simulación dinámica.



**Figura 4.25.** Definición del área de contacto y su correspondiente elipse equivalente según la discretización en *strips*: (a) izq., (b) dcha.

Cabe mencionar que el parámetro de elipticidad se calcula por integración numérica de las *strips* que definen el contorno del área de contacto corregida y de la elipse equivalente, según la fórmula (4.25) (ver Figura 4.25).

#### d. Distribución de tensiones normales.

Una vez aproximada el área equivalente a una elipse, se asume una distribución de presiones normales semielípticas, dada por el modelo de Hertz (Cap. 2):

$$\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 + \left(\frac{p_z(x, y)}{p_{z_0}}\right)^2 = 1 \quad (4.26)$$

siendo  $p_{z_0}$  la presión máxima según el modelo de Hertz,  $a$ ,  $b$  los valores de los semiejes de la elipse equivalente y  $x$ ,  $y$  las coordenadas de un punto dentro del área de contacto con respecto al centro, medidas en el sistema de referencia asociado al contacto.

Integrando la distribución anterior, se obtiene el valor de la fuerza normal  $F_z$ :

$$F_z = \int_{-b}^b \int_{-\bar{a}(y)}^{\bar{a}(y)} p_{z_0} \sqrt{1 - \left(\frac{x}{a}\right)^2 - \left(\frac{y}{b}\right)^2} dx dy \quad (4.27)$$

con  $\bar{a}(y) = a\sqrt{1-(y/b)^2}$ , cuyo resultado es

$$F_z = \frac{2}{3}\pi ab p_{z_0} \quad (4.28)$$

Para hallar el valor de la fuerza normal se parte de las ecuaciones ofrecidas por Hertz para el cálculo de las dimensiones de la elipse y de la indentación máxima correspondiente a una fuerza normal (ver Cap. 2):

$$\begin{aligned} a &= m \left( \frac{3}{2} F_z \frac{1-\sigma^2}{E} \frac{1}{A+B} \right)^{1/3} \\ b &= n \left( \frac{3}{2} F_z \frac{1-\sigma^2}{E} \frac{1}{A+B} \right)^{1/3} \\ \delta_o &= r \left( \left( \frac{3}{2} F_z \frac{1-\sigma^2}{E} \right)^2 (A+B) \right)^{1/3} \end{aligned} \quad (4.29)$$

siendo  $E$  el módulo de Young y  $\sigma$  el coeficiente de Poisson (considerando el mismo material para la rueda y el carril),  $A, B$  los valores combinados de curvatura longitudinal y transversal de los cuerpos en el punto de contacto (en este caso, se trataría de curvaturas equivalentes) y  $\delta_o$  la indentación máxima entre perfiles en el área de contacto.

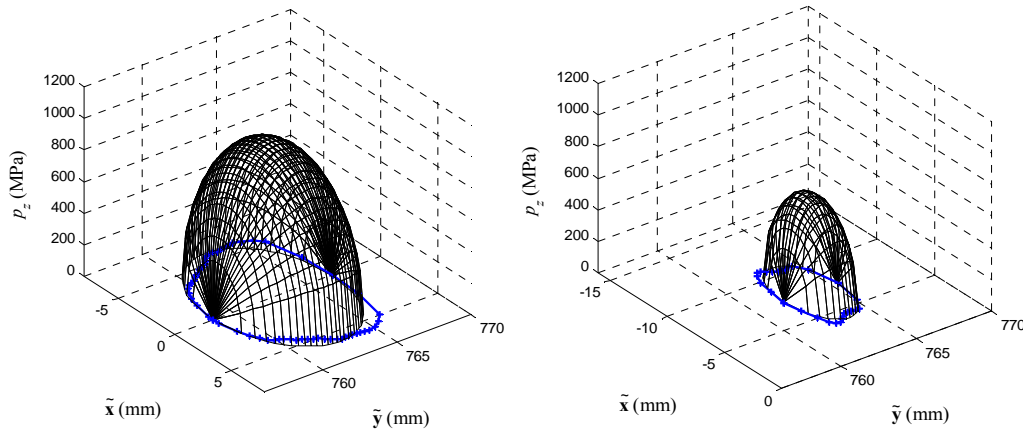
Las ecuaciones (4.29) constituyen un sistema no lineal de tres ecuaciones con cuatro incógnitas, siendo éstas los coeficientes  $m$  y  $n$  usados para el cálculo de los semiejes de la elipse de Hertz,  $r$  el coeficiente que relaciona la indentación máxima con la fuerza normal y  $(A+B)$  los valores combinados de curvaturas en el punto de contacto. Como ecuación adicional se usa la Tabla 2.1 que permite obtener el valor de los coeficientes  $m, n$  y  $r$  a partir del ratio  $m/n = b/a$ .  $\theta$  es el valor de un ángulo en grados, calculado a partir de los valores combinados de curvaturas  $A, B$  (Cap. 2).

Una vez hallados los coeficientes  $m, n$  y  $r$ , combinando la primera y la tercera ecuación de (4.29) (también podría utilizarse la ecuación para  $b$  en lugar de la ecuación para  $a$ ), se llega a la expresión

$$F_z = \frac{2}{3} \frac{\delta_o}{r} \frac{E}{1-\sigma^2} \frac{a}{m} \quad (4.30)$$

La Figura 4.26 muestra la distribución de presiones normales dentro de la elipse equivalente junto al área de contacto corregida obtenida por

interpenetración, para las áreas de contacto (a) y (b). Los valores de la fuerza normal para las dos áreas de contacto estudiadas se encuentran en la Tabla 4.2.



**Figura 4.26.** Distribución de tensiones normales en la elipse equivalente superpuesta al área de contacto corregida: (a) izq., (b) dcha.

**Tabla 4.2.** Fuerza normal ejercida por cada área de contacto.

	Área de contacto (a)	Área de contacto (b)
$F_z$ (kN)	50,00	7,95

Con estos pasos que se han descrito, se completa la resolución del problema de contacto normal.

#### 4.2.4. Resultados.

Una vez presentado el procedimiento de resolución del problema geométrico y normal para el contacto rueda-carril, en este apartado se presentan diversos resultados de la aplicación del método propuesto. Estos resultados junto a los dos ejemplos de áreas de contacto presentadas en el desarrollo del apartado anterior sirven para ilustrar las áreas de contacto obtenidas. Se presentan tres series de resultados:

- En primer lugar se obtienen las áreas de contacto para geometrías simplificadas de rueda y carril. Según estas geometrías simplificadas, los cuerpos pueden definirse como paraboloides de revolución y es válida la hipótesis de Hertz relativa a la geometría de los cuerpos en la zona de contacto. Esto implica que se dispone de una solución analítica al problema de contacto normal. Se muestran dos resultados, uno para área de contacto circular y otro para área de contacto elíptica.

- En segundo lugar se utilizan perfiles reales medidos de carriles y ruedas nuevos. En este caso no es válida la hipótesis de Hertz relativa a la geometría de los cuerpos. Se compara la solución ofrecida por el método propuesto (basado en la interpenetración virtual) con la solución que se obtendría mediante la aplicación del método de Hertz (punto teórico de contacto). Además se evalúa la continuidad de la solución del método de Hertz en caso de que cambie el punto de contacto.
- Finalmente se presentan unos resultados de la bibliografía y se reproducen los estudios con la información disponible. Esta serie de resultados se presenta para comprobar que las áreas de contacto obtenidas son del mismo orden de magnitud de las presentadas en la bibliografía.

#### **a. Análisis del contacto esfera-plano.**

Se trata del ejemplo más sencillo de geometrías de contacto. El carril se asimila a un plano horizontal y cada rueda a una esfera de radio  $r_o$ . Se aplica una fuerza normal de 50 kN para cada área de contacto.

En primer lugar se determinará el área de contacto mediante la teoría de Hertz. Debido a que las geometrías de los cuerpos en el punto de contacto se pueden definir mediante paraboloides, existe una solución analítica al problema de contacto normal, ofrecida por la teoría de Hertz. Según esta teoría, el área de contacto es circular. En este ejemplo se comprobará si el algoritmo propuesto es capaz de realizar una buena estimación del área de contacto.

Dado el valor de las curvaturas en el punto teórico de contacto, se pueden calcular los valores de las curvaturas combinadas  $A$  y  $B$  (según Cap. 2), siendo  $1/R_x^w$ ,  $1/R_y^w$ ,  $1/R_x^r$  y  $1/R_y^r$  los valores de las curvaturas de la rueda ( $w$ ) y carril ( $r$ ) en las direcciones longitudinal ( $x$ ) y transversal ( $y$ ). Los correspondientes valores numéricos aparecen en la Tabla 4.3. Con las curvaturas equivalentes  $A$  y  $B$ , la fuerza normal y las propiedades mecánicas de los materiales de la rueda y del carril, se puede obtener el tamaño de la elipse de Hertz, según se describe en el Cap. 2 (Tabla 4.4).

**Tabla 4.3.** Valores geométricos empleados en el cálculo del área de contacto por Hertz.

$r_o$	(m)	0,45
$1/R_x^w$	(1/m)	2,22
$1/R_y^w$	(1/m)	2,22
$1/R_x^r$	(1/m)	0,00
$1/R_y^r$	(1/m)	0,00
$A$	(1/m)	1,11
$B$	(1/m)	1,11

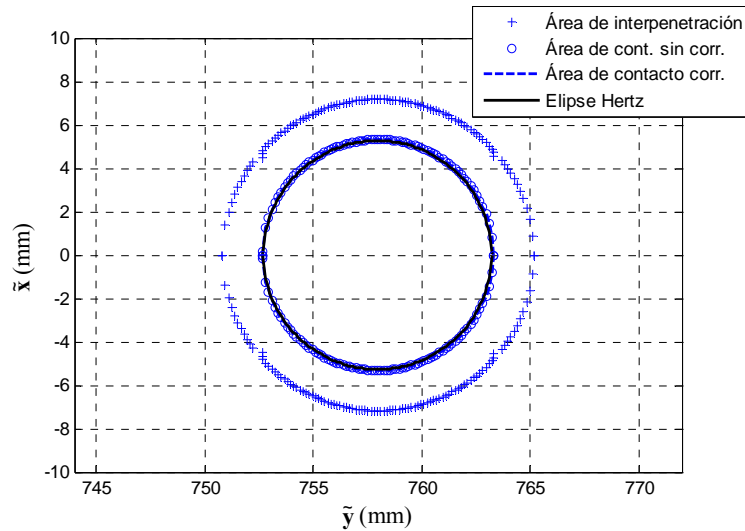
En segundo lugar, se aplica el algoritmo propuesto y se compara la solución obtenida con la solución analítica de Hertz. La Figura 4.27 muestra la posición de áreas de contacto obtenidas con los perfiles simplificados. Los perfiles se han generado con una discretización muy fina (con una resolución del orden de 0,2 mm) con el fin de minimizar errores por discretización. En este caso el área de contacto obtenida tras procesar el área de interpenetración tiene una forma circular; por tanto, no habrá una corrección de forma (o lo que es lo mismo, la corrección de forma no tendrá efecto sobre el área de contacto).

**Figura 4.27.** Áreas de contacto obtenidas para perfiles simplificados de rueda (esfera) y carril (plano).

Las dimensiones de las elipses de contacto obtenidas por ambos métodos y su representación geométrica, se muestran en la Tabla 4.4 y en la Figura 4.28. El error en la dimensión de los semiejes es del 0,95 % respecto a las dimensiones dadas por Hertz.

**Tabla 4.4.** Dimensiones de las elipses de contacto.

	Elipse de Hertz	Elipse equivalente	Error (%)
$a \cdot b$ (mm)	5,27 · 5,27	5,32 · 5,32	0,95 %



**Figura 4.28.** Área de interpenetración, área de contacto con y sin corrección y elipse de Hertz para el contacto esfera-plano.

Por tanto, según el ejemplo presentado, el método propuesto consigue ofrecer una solución adecuada al problema de contacto, en el caso de una geometría simplificada que da lugar a un área de contacto circular.

### b. Análisis del contacto cono-cilindro.

En este segundo ejemplo también se utilizan geometrías simplificadas para describir los perfiles de rueda y carril: la rueda se considera cónica de radio nominal  $r_o$  y los carriles cilíndricos de radio transversal de valor  $R_y^r$ . La fuerza normal en cada área de contacto es de 50 kN.

En primer lugar se resuelve el problema normal de contacto por la teoría de Hertz. Al igual que en el ejemplo anterior, debido a que las geometrías de los cuerpos en las cercanías del contacto se pueden definir como paraboloides, existe una solución analítica al problema de contacto normal dada por Hertz. El área de contacto obtenida es elíptica. Este ejemplo se utilizará para comprobar el efecto de la corrección de forma del área de contacto.

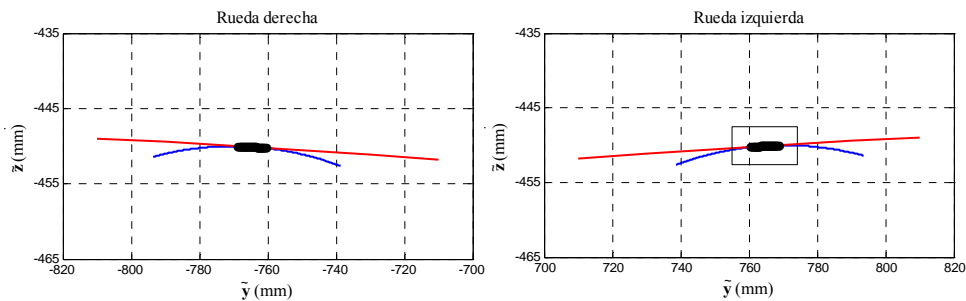
La Tabla 4.5 muestra los valores de curvatura que describen la geometría del contacto y las curvaturas combinadas. Con estos valores, la fuerza normal y las características mecánicas de los materiales de la rueda y del carril se pueden calcular las dimensiones de la elipse de Hertz (Tabla 4.6).



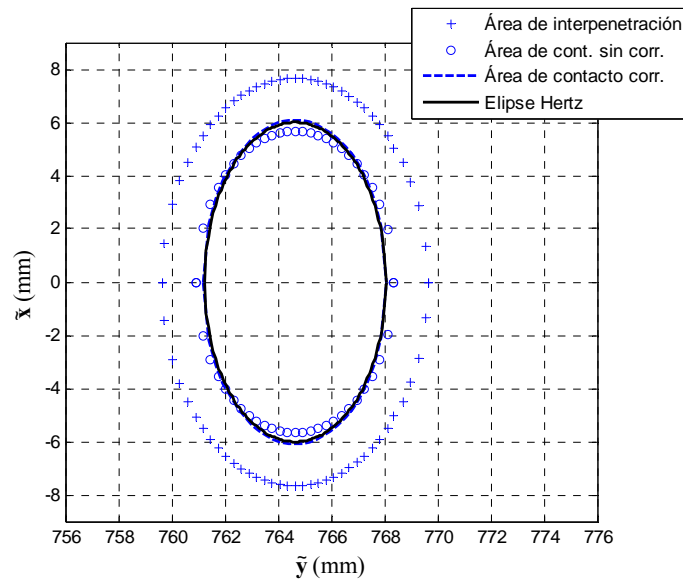
**Tabla 4.5.** Valores geométricos empleados en el cálculo del área de contacto por Hertz.

$r_o$	(m)	0,45
$R_y^r$	(m)	0,19
$1/R_x^w$	(1/m)	2,22
$1/R_y^w$	(1/m)	0,00
$1/R_x^r$	(1/m)	0,00
$1/R_y^r$	(1/m)	5,21
A	(1/m)	1,11
B	(1/m)	2,61

En segundo lugar se muestran los resultados obtenidos por el método basado en la interpenetración virtual. La Figura 4.29 muestra la posición de los perfiles y de las áreas de contacto. La Tabla 4.6 y la Figura 4.30 muestran los resultados obtenidos por el método propuesto, sin y con la corrección de forma, y comparados con la elipse de contacto de Hertz. Se puede ver la mejora en el área de contacto al aplicar la corrección de forma. El error en las dimensiones de la elipse equivalente corregida con respecto a las dimensiones de Hertz se estima en un 1,3 %, para ambos semiejes.

**Figura 4.29.** Áreas de contacto obtenidas para perfiles simplificados de rueda (cono) y carril (cilindro).**Tabla 4.6.** Dimensiones de las elipses de contacto.

	Elipse de Hertz	Elipse equivalente sin corregir	Elipse equivalente corregida	Error elipse corregida (%)
$a \cdot b$ (mm)	6,01 · 3,41	5,68 · 3,70	6,09 · 3,46	1,3 %



**Figura 4.30.** Área de interpenetración, área de contacto sin corregir y corregida y elipse de Hertz para el contacto cono-cilindro.

En este segundo ejemplo se comprueba que, para una geometría simplificada, con la aplicación del método propuesto junto a la corrección de forma utilizada, se consigue una buena estimación del área de contacto.

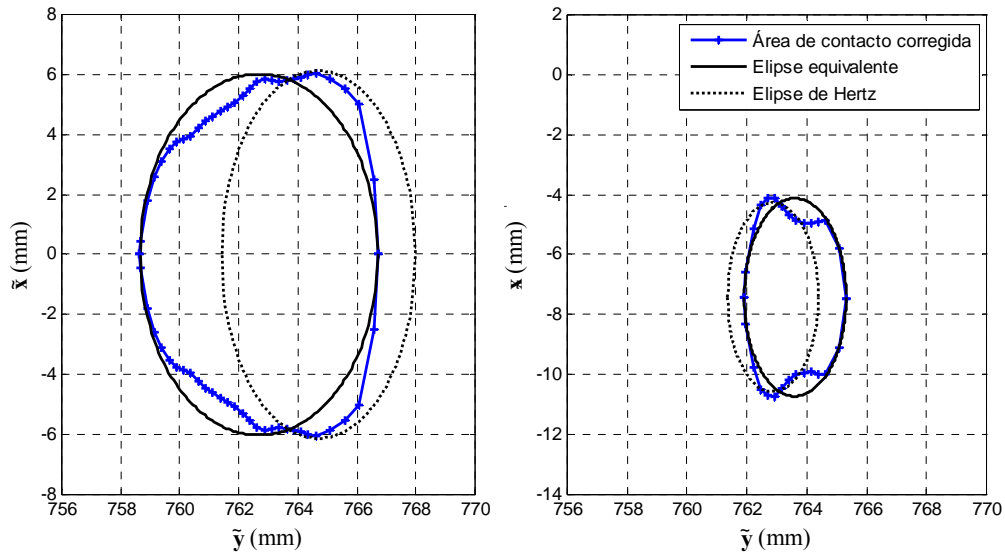
### c. Uso de perfiles reales. Comparación con el método de Hertz.

En este tercer ejemplo se utilizan las geometrías reales de la rueda y del carril como entrada al problema de contacto. Se trata de los mismos casos de contacto estudiados en el desarrollo de la sección 4.2.3, pero analizados desde el punto de vista de la teoría de Hertz. Debido a que la curvatura transversal de las superficies en el contacto es variable para perfiles reales de rueda y carril, no se cumple la hipótesis geométrica del modelo de Hertz. Se analizan dos aspectos:

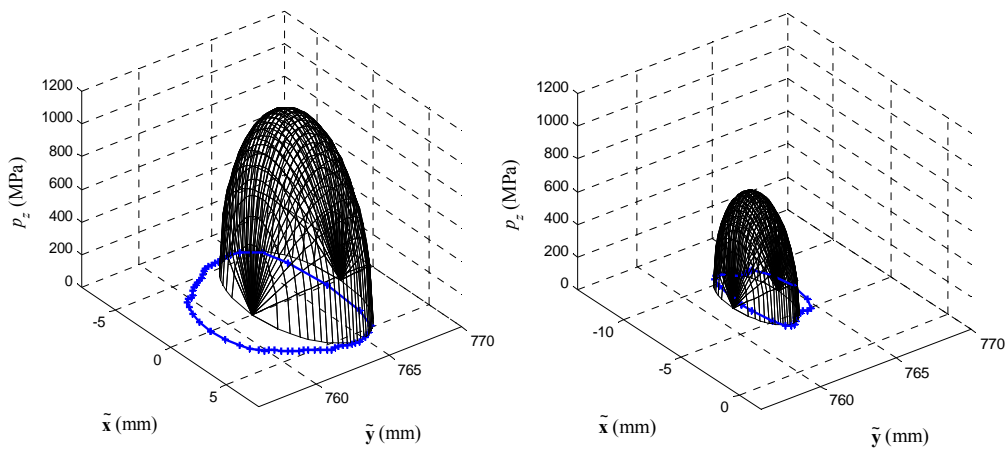
- Aplicabilidad del método de Hertz en comparación con el método propuesto para el caso de la geometría real de los perfiles de rueda y carril.
- Continuidad de la solución de Hertz en el caso de que cambie el punto teórico de contacto, para el uso de perfiles medidos.

Con respecto al primer punto, la Figura 4.31 muestra las áreas de contacto corregidas obtenidas por interpenetración virtual junto a las áreas de contacto obtenidas por Hertz (elipses de Hertz). Estas elipses de Hertz se pueden comparar con las elipses equivalentes. Debido a que la curvatura transversal de los cuerpos en la cercanía del punto de contacto no es constante, la estimación del área de

contacto realizada por Hertz no es capaz de reproducir el área de contacto. La elipse de Hertz sí que se ajusta bien en su dirección longitudinal, donde la curvatura es constante (eje  $\tilde{x}$ ), pero no en su dirección transversal (eje  $\tilde{y}$ ).



**Figura 4.31.** Comparación entre el área de contacto obtenida a través del método de interpenetración virtual, la elipse equivalente y la elipse calculada por Hertz: (a) izq., (b) dcha.



**Figura 4.32.** Distribución de presiones normales sobre la elipse de Hertz superpuesta al área de contacto corregida obtenida por interpenetración virtual: (a) izq., (b) dcha.

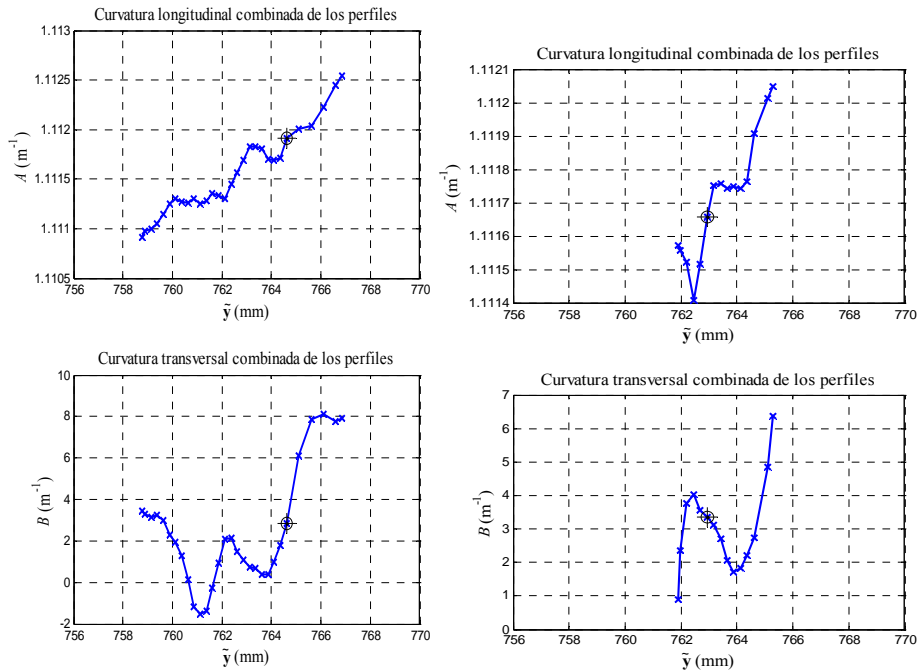
En cuanto a la distribución de tensiones normales, la Figura 4.32 muestra dicha distribución en la elipse de Hertz representada junto al área de contacto corregida obtenida por interpenetración. Se puede observar como el modelo de

contacto propuesto ofrece una mejor aproximación para la distribución de presiones normales sobre el área de contacto (Figura 4.26).

Con respecto a la continuidad de la solución se van a analizar las variaciones que aparecen en los parámetros de contacto en el caso de que cambiase el punto teórico de contacto. Según el método de Hertz, se escoge como punto teórico de contacto el de mayor indentación. Por tanto, puede aparecer un cambio en el punto teórico de contacto cuando, debido a una pequeña variación en la posición relativa de la rueda con respecto al carril, cambie la *strip* con el mayor valor de indentación (ver la indentación correspondiente a las dos áreas de contacto estudiadas en la Figura 4.15). Esta *strip* pasaría a definir el nuevo punto teórico de contacto y las características de la nueva área de contacto se obtendrían a partir de las características de la *strip*.

Por tanto, se van a analizar las variaciones en las curvaturas combinadas  $A$ ,  $B$  y en las dimensiones de los semiejes de la elipse de Hertz  $a$ ,  $b$  y cómo afectan al valor de la fuerza normal, y a su vez, se analizarán las variaciones en la conicidad del área de contacto y el efecto que tendría sobre la continuidad de la solución del problema normal.

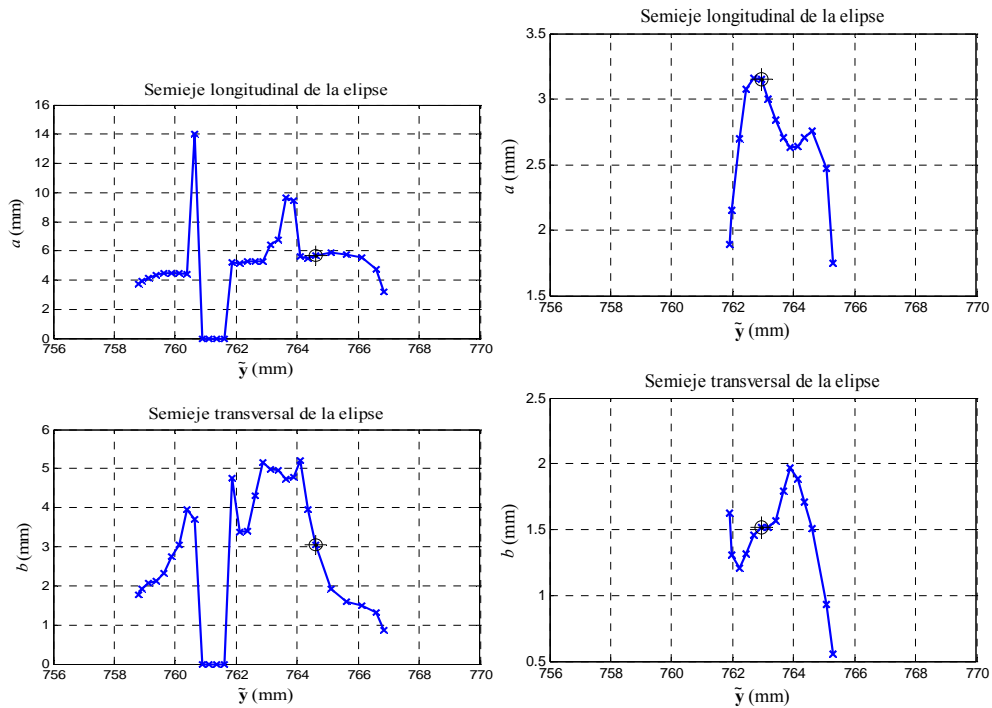
La Figura 4.33 muestra el valor de las curvaturas combinadas longitudinal y transversal ( $A$  y  $B$ , respectivamente) para las *strips* de las áreas de interpenetración de los casos de estudio ( $a$ ) y ( $b$ ). La marca indica la posición del punto teórico de contacto, definido como el punto de máxima indentación. Puesto que se trata de perfiles medidos, aparecen oscilaciones en las curvaturas en el paso de una a otra *strip*. Según la teoría de Hertz (ver Cap. 2) estas variaciones en las curvaturas equivalentes, producirán variaciones en los semiejes de la elipse de Hertz (Figura 4.34). Por tanto, según las ecuaciones de Hertz, estas variaciones darán lugar a discontinuidades en la fuerza normal (Figura 4.35). El mismo problema aparece con la conicidad: como valor característico del área de contacto se toma la conicidad del punto de máxima indentación. Según la Figura 4.14, si aparecen cambios en el punto nominal de contacto, se producirán discontinuidades en la conicidad y, por tanto, cambiará la dirección de la fuerza normal. Estas discontinuidades penalizarán la convergencia del método en su uso dentro de un programa de simulación dinámica.



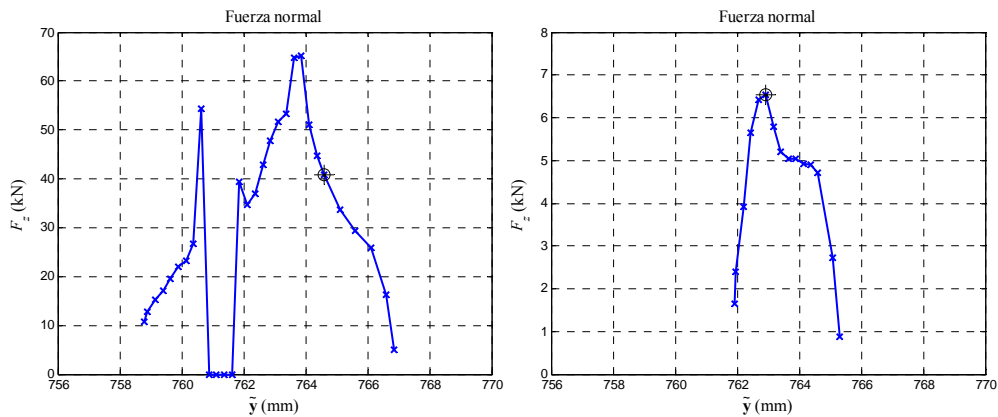
**Figura 4.33.** Curvaturas longitudinales y transversales para cada *strip*: (a) izq., (b) dcha. El punto señala la *strip* de máxima indentación.

Es interesante destacar que el contacto no es posible para valores negativos de la curvatura  $B$ . Por esta razón, las Figuras 4.34 y 4.35 no tienen solución para las *strips* donde dicho valor es negativo.

El problema presentado no aparece si se aplica el método propuesto en el que por una parte, las dimensiones de la elipse se obtienen a partir de la interpenetración entre superficies en contacto. Por otra parte, en el caso de la conicidad, ésta se calcula como un valor promediado por lo que no aparecerán discontinuidades en este valor.



**Figura 4.34.** Valor de los semiejes de la elipse de Hertz calculado según las curvaturas para cada *strip*: (a) izq., (b) dcha.



**Figura 4.35.** Valor de la fuerza normal según el modelo de Hertz en función de la *strip* que se tome como punto teórico de contacto: (a) izq., (b) dcha.

Según los resultados presentados para geometrías reales de perfiles de rueda y carril medidos, el método propuesto basado en *interpenetración virtual* presenta las siguientes ventajas frente al método de *punto teórico de contacto* de Hertz: En primer lugar realiza una mejor estimación del área de contacto y ofrece

una mejor solución a la distribución de presiones normales. En segundo lugar, proporciona una solución continua al problema de contacto normal, por lo que será más adecuado para su uso en programas de simulación dinámica.

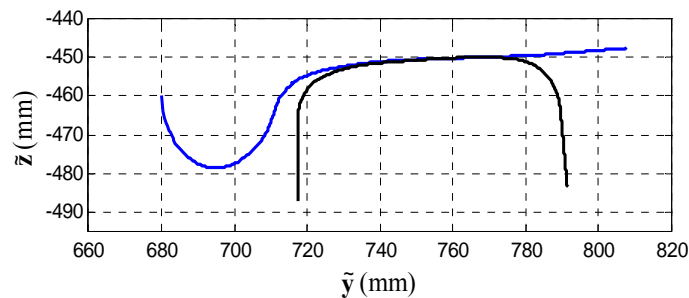
#### **d. Comparación con resultados publicados para perfiles reales.**

En este apartado se comparan distintas áreas de contacto y resultados del problema normal de contacto extraídos de la bibliografía con la solución obtenida mediante la aplicación del método propuesto.

La solución del problema de contacto depende de la geometría de los perfiles de rueda y carril. Por tanto, los resultados obtenidos según el método propuesto no son cuantitativamente comparables a los obtenidos de la bibliografía, puesto que no se dispone de información sobre los perfiles originales. Esta característica se hace patente en la estimación de las áreas de contacto, donde una pequeña variación en la definición de los perfiles puede producir áreas de contacto distintas. Sin embargo, el valor de los parámetros globales de las áreas de contacto debe ser del mismo orden de magnitud.

Se presentan dos series de soluciones: En primer lugar, se muestran unos resultados para eje centrado, donde se va aumentando la penetración entre superficies; por tanto, la fuerza normal aumenta y cambia la forma y tamaño de las áreas de contacto. En segundo lugar, dada una carga nominal por eje, éste se desplaza lateralmente según el sistema de referencia de la vía y se observa la evolución de la forma y tamaño de las áreas de contacto.

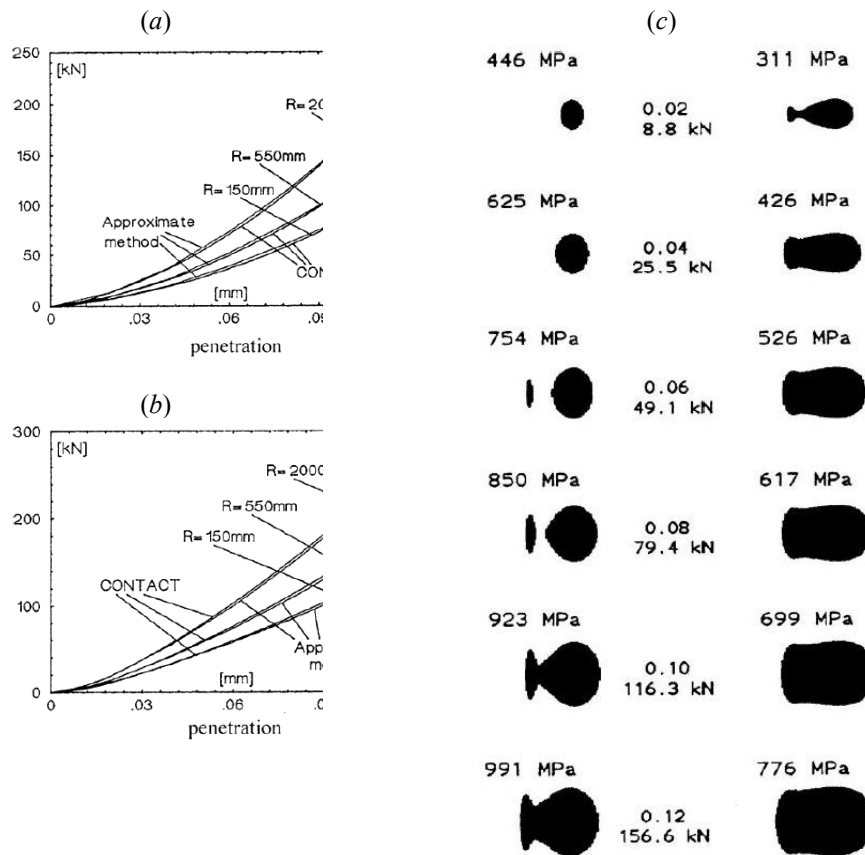
En los cálculos realizados por el autor se ha utilizado un juego de perfiles nuevos medidos consistente en una rueda tipo S1002 y un carril UIC60 montado con una inclinación de 1:20 (Figura 4.36).



**Figura 4.36.** Perfiles de rueda y carril utilizados para los cálculos. La rueda es S1002 y el carril UIC60.

La **primera serie de resultados** se ha extraído de [48] (Figura 4.37). En ella se estudia el problema normal de contacto para dos casos (Caso 1 y Caso 2). Cada uno de ellos se corresponde con un juego de perfiles medidos de rueda y de carril de los que no se ofrece información. En los gráficos de las Figuras 4.37-(a) y 4.37-(b), se calcula la fuerza normal total para cada uno de los dos casos y con distintos radios de rodadura, según la teoría de Kik-Piotrowski y se compara con la solución ofrecida por el programa CONTACT de Kalker [45]. Se suponen tres radios nominales de la rueda y se obtiene la variación de la fuerza normal total para valores crecientes de indentación entre perfiles. Por otra parte, la Figura 4.38-(a) muestra la reproducción de estos cálculos con los perfiles disponibles y según el procedimiento propuesto. Se puede comprobar como los resultados son del mismo orden de magnitud aunque los perfiles no son exactamente iguales.

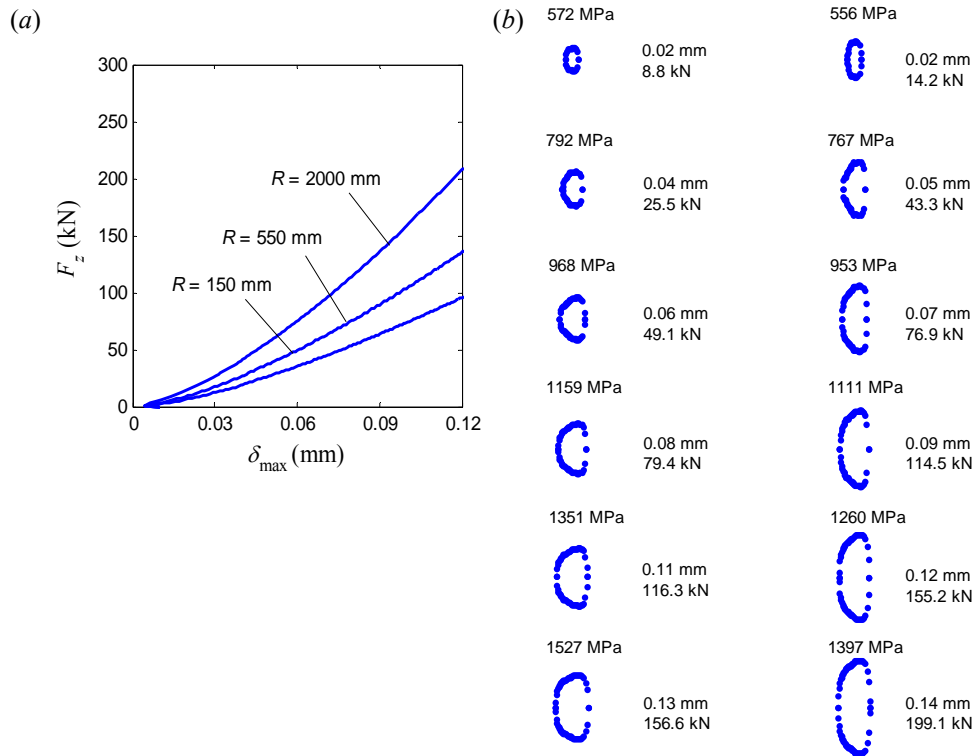




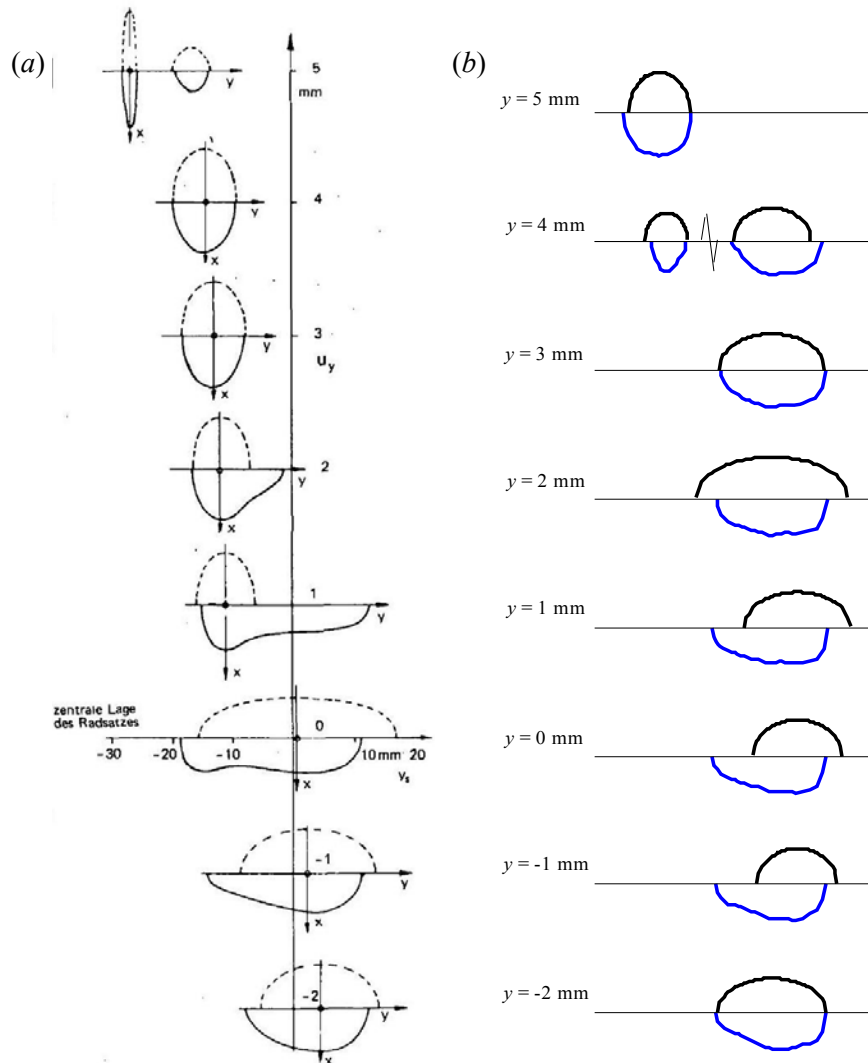
**Figura 4.37.** (a) Fuerza normal total para el caso 1 y (b) caso 2, calculada según el método de Kik-Piotrowski y según CONTACT. (c) Áreas de contacto para el Caso 1 y  $R = 0,55$  m (izq.) y Caso 2 y  $R = 1,0$  m (dcha.). Extraído de [48].

Volviendo a los cálculos de la referencia [48], en la Figura 4.37-(c) aparecen las distintas áreas de contacto obtenidas por Kik y Piotrowski para el caso 1 y  $R = 0,55$  m (columna de la izquierda) y para el caso 2 y  $R = 1$  m (columna de la derecha). Sobre cada área de contacto aparece la presión máxima calculada según el modelo de contacto de Kik-Piotrowski y a la derecha, la indentación máxima en mm y la fuerza normal en kN, también calculada según este método. Por otra parte, en la Figura 4.38-(b) se muestran los resultados obtenidos con la aplicación del método propuesto en esta Tesis para los mismos perfiles que 4.38-(a). La información se presenta en dos columnas, ambas calculadas con el mismo juego de perfiles que se dispone; en la de la izquierda tomando  $R = 0,55$  m y en la de la derecha, tomando  $R = 1$  m. Esta Tabla se ha obtenido de tal forma que la fuerza normal en cada área de contacto, calculada según el método de elipse equivalente, sea igual a la fuerza normal calculada por el método de Kik. Al igual que en la figura calculada con el método de Kik-Piotrowski, junto a cada área de

contacto aparece la indentación máxima en mm y la fuerza normal en kN (según el modelo propuesto). Las diferencias en indentación son muy pequeñas, con desviaciones máximas en torno al 10 %. Además, estas diferencias se pueden deber a la distinta definición de los perfiles en el contacto. La presión máxima no es comparable, ya que se usan distintos modelos para describir el campo de presiones normales.



**Figura 4.38.** (a) Fuerza normal total calculada según el método propuesto de elipse equivalente. (b) Áreas de contacto calculados según el procedimiento geométrico propuesto.



**Figura 4.39.** (a) Áreas de contacto no-elípticas según el método de Knothe-Le The (parte inferior) y elípticas según Hertz (parte superior) para varias posiciones del eje (rueda izquierda). Extraído de [49]. (b) Áreas de contacto obtenidas con los perfiles disponibles y con el procedimiento de contacto normal propuesto, junto a las áreas de contacto de Hertz.

En un **la segunda serie de resultados** se comparan las áreas de contacto que aparecen en la rueda derecha, al desplazar el eje lateralmente según el sistema de referencia de la vía. La carga nominal por eje se fija en 60 kN y los perfiles utilizados son S1002 para la rueda y UIC60 para el carril, que está montado con una inclinación de 1:20. La Figura 4.39-(a) muestra los resultados de las áreas de contacto obtenidas por Knothe *et al.* en [49] junto a las áreas de contacto que se

obtendrían según Hertz, para desplazamientos laterales del eje de valor 5, 4, 3, 2, 1, 0, -1 y -2 mm. Por otra parte, la Figura 4.39-(b) presenta las áreas de contacto obtenidas bajo las mismas hipótesis y con los mismos perfiles de la Figura 4.36, con el método de contacto propuesto.

Analizando estas dos series de resultados, se puede concluir que aunque existen discrepancias en las formas de las áreas de contacto, posiblemente debidas al uso de distintos perfiles medidos, las diferencias en cuanto a parámetros globales del contacto (dimensiones de la elipse equivalente y fuerza normal total) son pequeñas y las tendencias que aparecen en cuanto a número de áreas de contacto, forma y tamaño son similares.

### **4.3. Aplicación de la técnica de ultrasonidos al contacto rueda-carril. Problema normal.**

En este apartado los resultados del método propuesto para la resolución del problema normal se comparan con los resultados experimentales obtenidos por la técnica de ultrasonidos. Esta técnica experimental ha sido usada anteriormente y se describe en las referencias [16-17, 47, 103]. El uso de un método experimental constituye una herramienta de validación de los resultados obtenidos con el método numérico propuesto.

La comparación de resultados numéricos con resultados obtenidos experimentalmente representa una ventaja respecto a la validación del procedimiento numérico con otros algoritmos también numéricos. Esto es debido a que se asumen ciertas hipótesis que difícilmente se cumplen en la realidad:

- Las superficies en el contacto se generan a partir de *perfiles teóricos*. En realidad existen defectos, como falta de redondez en la rueda, desgaste ondulatorio en el carril o picaduras sobre las superficies en el contacto, de tal modo que la forma de los cuerpos puede alejarse de su forma teórica, lo que podría provocar desviaciones en los resultados.
- Se suponen *superficies suaves* (no rugosas). En cambio, las superficies reales no son suaves, sino que tienen una cierta rugosidad (del orden de  $\mu\text{m}$  [12, 64, 90, 109]). Por tanto, en un contacto real la carga se soporta de forma discreta por medio de las asperezas, por lo que las superficies en contacto y las distribuciones de presiones reales pueden diferir respecto a la solución suponiendo que las superficies sean suaves.

- Se asume un comportamiento *elástico lineal* del material. La realidad es más compleja, debido a que las presiones en la zona del contacto rueda-carril son frecuentemente mayores que 1 000 MPa (normalmente del orden de 1 500 MPa), valor situado por encima del límite elástico de la mayoría de los aceros. No obstante, el efecto de la plastificación del material se reduce debido al estado de presión hidrostática en la zona de contacto [9].

La técnica de ultrasonidos es un método no destructivo aplicado para el estudio de materiales metálicos. En particular existen aplicaciones para el análisis de uniones metálicas [58, 62-63] o del contacto rueda-carril [64, 74]. En el caso ferroviario del contacto rueda-carril, este método permite procesar las zonas de interacción entre la rueda y el carril y obtener de forma directa el número, forma y tamaño de las áreas de contacto. Una vez obtenidas las áreas de contacto, aplicando el *modelo del muelle* (modelo que es válido para el rango de frecuencias utilizado [64, 90]) y empleando una calibración adecuada, se puede obtener la distribución de tensiones normales sobre las áreas de contacto. Según la implementación del método realizada, se trata de un análisis de laboratorio en el que el contacto se reproduce entre especímenes de rueda y de carril.

#### **4.3.1. Procedimiento usado para el estudio del contacto rueda-carril mediante la técnica de ultrasonidos**

En esta sección y en el apartado 5.2 del capítulo siguiente se analiza el problema de contacto completo y la estimación del desgaste según la metodología propuesta en el Cap. 2: (1) Resolución del problema normal (requiere la resolución del problema normal para el procedimiento numérico), (2) resolución del problema tangencial y (3) estimación del desgaste.

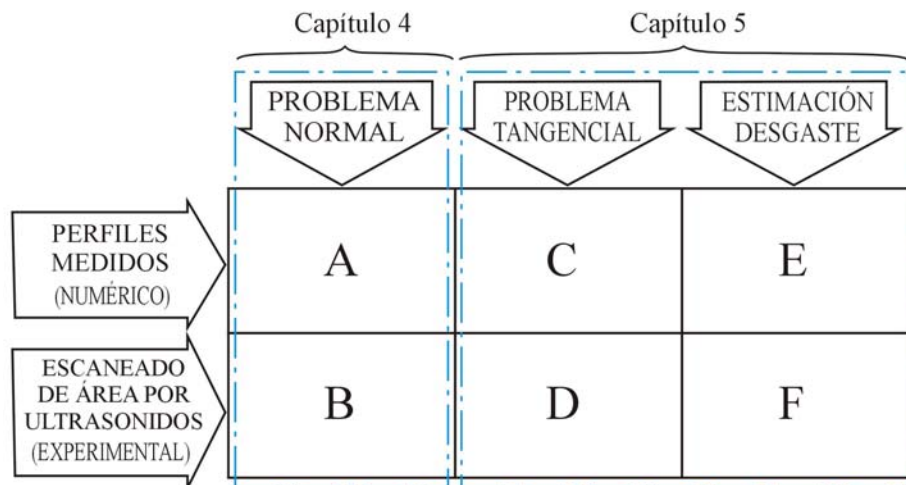
Se presentan dos series de resultados: por una parte los resultados del análisis del problema de contacto para el área de contacto obtenida numéricamente según el procedimiento propuesto en esta Tesis. Por otra parte, los resultados del problema de contacto obtenidos mediante la aplicación de la técnica experimental de ultrasonidos.

La Figura 4.40 muestra un esquema de los resultados presentados: según esta Figura, en primer lugar **A** representa la solución del problema normal de contacto mediante el procedimiento de contacto propuesto, que se contrastará con **B**, que es la solución del problema de contacto normal, aplicando la técnica experimental de ultrasonidos. Para que los datos sean comparables, se debe

reproducir en el banco de ensayos la misma posición relativa de la rueda con el carril, que la que se ofrece como entrada al procedimiento de contacto numérico.

Posteriormente, usando las distribuciones de presiones normales obtenidas en el paso anterior, se resuelve el problema tangencial y se obtienen las distribuciones de tensiones tangenciales correspondientes. **C** es la distribución de tensiones tangenciales correspondiente a las presiones normales obtenidas con el procedimiento numérico propuesto en esta Tesis y **D**, la distribución de tensiones tangenciales correspondiente a las presiones normales obtenida a partir de los datos experimentales obtenidos por ultrasonidos.

Finalmente, se realiza una estimación del desgaste con los resultados del problema normal y tangencial de los que se dispone. **E** es la estimación del desgaste realizada a partir de los datos procedentes de la aplicación del algoritmo de contacto propuesto, y **F** es la estimación del desgaste realizada a partir de los datos procedentes de la técnica de ultrasonidos.



**Figura 4.40.** Series de resultados presentados para la resolución del problema de contacto y estimación del desgaste, usando el procedimiento de contacto propuesto y la técnica experimental de ultrasonidos.

Los resultados del problema de contacto normal se presentan en esta sección del presente capítulo, mientras que los resultados del problema tangencial y de estimación del desgaste, se muestran en el apartado 5.2 del capítulo siguiente.

Se estudian dos tipos distintos de contacto: el área de contacto que aparece entre *especímenes nuevos de rueda y carril*, y el área de contacto que aparece entre *especímenes de rueda y carril con un alto nivel de desgaste*. Ambas áreas de contacto son las que aparecen para una posición centrada del eje en la vía, sin ángulo de lazo.

La Figura 4.41 muestra un esquema de los resultados del problema de contacto normal presentados en esta sección: por una parte se analizan los resultados del problema normal según el procedimiento de contacto propuesto para los perfiles nuevos ( $A_n$ ) y desgastados ( $A_w$ ) y por otra los resultados del problema normal obtenido a partir de la técnica experimental de ultrasonidos, para perfiles nuevos ( $B_n$ ) y desgastados ( $B_w$ ).

	PROBLEMA NORMAL	
	PERFILES NUEVOS	PERFILES DESGASTADOS
Modelo de contacto propuesto (NUMÉRICO)	$A_n$	$A_w$
Técnica de ultrasonidos (EXPERIMENTAL)	$B_n$	$B_w$

**Figura 4.41.** Resultados del problema normal presentados en esta sección.

### 4.3.2. Especímenes de ensayo y geometría

Los especímenes de ensayo de rueda y carril utilizados en este estudio se muestran en la Figura 4.42, que son los correspondientes a perfiles nuevos y perfiles desgastados de rueda y carril. De esta forma, se puede estudiar el efecto del desgaste sobre las superficies en contacto y, consecuentemente, sobre las áreas de contacto y sobre la distribución de presiones normales.





**Figura 4.42.** Especímenes de rueda y carril correspondientes a perfiles nuevos (arriba) y perfiles desgastados (abajo).

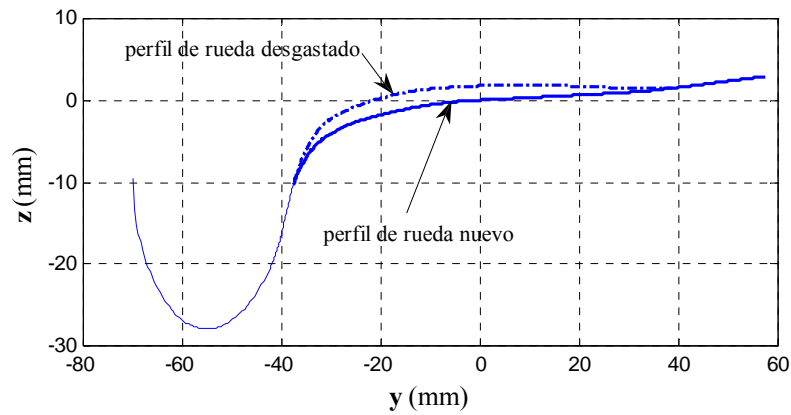
Es interesante comentar el estado en que se encuentran las superficies de los especímenes nuevos. En el caso de la rueda, el espécimen se ha cortado de una rueda recién fabricada y aún conserva las marcas de mecanizado. En el caso del carril, aparecen unas marcas que pueden ser defectos como consecuencia del proceso de laminación o defectos creados durante la manipulación del carril. Considerando el desgaste de los perfiles debido a la rodadura, habrá un periodo de rodaje inicial en que esta rugosidad tienda a reducirse (se puede tomar como referencia el valor de  $0,011 \mu\text{m}/\text{km}$  rodado de Kalker [46] o  $0,032 \mu\text{m}/\text{km}$  rodado dado por Lewis *et al.* [55]). No obstante, estas marcas podrían condicionar la aparición de ciertos patrones de desgaste o de nuevos defectos sobre las superficies de la rueda y del carril.

Como entrada para el procedimiento numérico de contacto normal, se han medido los perfiles mediante el dispositivo Miniprof [27]. La Figura 4.43 muestra el dispositivo Miniprof y los especímenes de rueda y carril medidos, cuyos datos sobre los perfiles se almacenan en un ordenador.

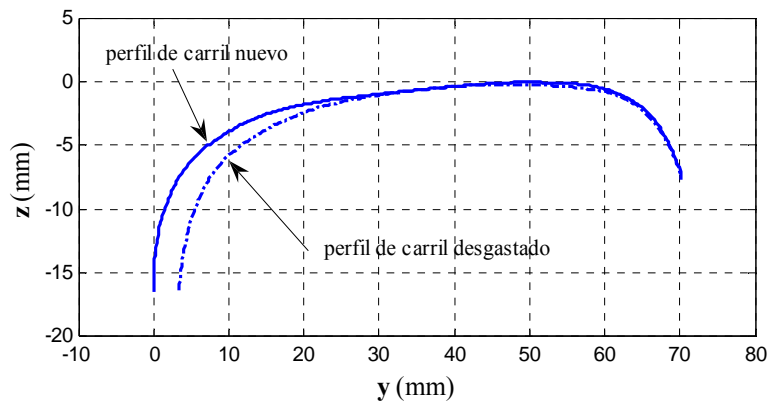


**Figura 4.43.** Izq: dispositivo Miniprof. Dcha.: especímenes cuyos perfiles transversales se han escaneado.

Ambos especímenes de rueda se corresponden con una rueda tipo S1002, mientras que los carriles, se corresponden al tipo UIC60. Los especímenes de la rueda no son completos y comprenden la banda de rodadura y el radio de acuerdo con la pestaña. La Figura 4.44 muestra los perfiles para la rueda nueva y para la rueda desgastada. Debido al desgaste, la banda de rodadura del perfil desgastado se ha redondeado, lo que produce un cambio de conicidad del punto de contacto y la aparición de una *falsa pestaña* con una conicidad negativa en la zona exterior de la banda de rodadura.



**Figura 4.44.** Comparación de los perfiles de la rueda nueva (—) y la rueda desgastada (· · ·). Aunque el contacto se realiza en la banda de rodadura, se ha generado matemáticamente el perfil de la pestaña para completar la geometría de la rueda (línea fina).



**Figura 4.45.** Comparación de los perfiles del carril nuevo (—) y del carril desgastado (· · ·).

Por otra parte, los especímenes del carril comprenden la parte superior de la cabeza del carril o *corona*. La Figura 4.45 muestra los dos perfiles del carril donde se puede observar el efecto del desgaste. El carril desgastado está ligeramente más achatado en su parte superior y presenta importantes muestras de desgaste en su cara interior, lo que produce un incremento equivalente en el ancho de vía.

En un primer análisis visual, el desgaste de los perfiles aquí estudiado tiene dos efectos:

- Sobre la *geometría de los perfiles*, debido a la pérdida de material por abrasión.

- Sobre la *rugosidad de las superficies*, debido a que se reducen las asperezas en la zona de contacto. La superficie de la rueda nueva aún conserva las marcas de mecanizado mientras que las superficies de los perfiles desgastados tienen un acabado casi especular (Figura 4.42).

La geometría de los perfiles, que en el caso de los perfiles desgastados es el resultado de su historial de funcionamiento, condiciona el número, la posición y la forma de las áreas de contacto que serán distintas para los diferentes estudios de este apartado.

El segundo efecto del desgaste es el cambio en la rugosidad de las superficies. La Tabla 4.7 muestra los valores de rugosidad media medidos en la zona donde se produce el contacto para cada uno de los especímenes. Para ello, se ha utilizado un rugosímetro de aguja que mide la geometría de la superficie en una sección de la superficie de la pieza. Se han tomado medidas tanto en sentido transversal como longitudinal. El valor de rugosidad media es similar independientemente de la dirección en la que se mida, excepto en el caso de la rueda nueva (debido a la presencia de marcas de mecanizado longitudinales). Se puede observar fácilmente como, por efecto del desgaste, la rugosidad en los perfiles desgastados es claramente menor que en los perfiles nuevos debido al efecto del desgaste.

**Tabla 4.7.** Valores de la rugosidad de la superficie de los perfiles de rueda y carril en la zona del punto de contacto.

Perfil de rueda-carril	Especimen	Valor medio de rugosidad $R_a$ ( $\mu\text{m}$ )
nuevo	rueda	2,07 (transversal) 1,80 (longitudinal)
	carril	11,15
desgastado	rueda	0,98
	carril	1,10

En cuanto a la posición relativa de los perfiles, ésta debe ser la misma que la que tendrían en la vía, según se define en el Cap. 2 (Figura 2.9). Los valores de los parámetros que define la geometría de la vía se muestran en la Tabla 4.8. La estimación del radio nominal de cada uno de los perfiles de rueda se ha realizado a partir de las medidas del perfil longitudinal de los especímenes de la rueda.

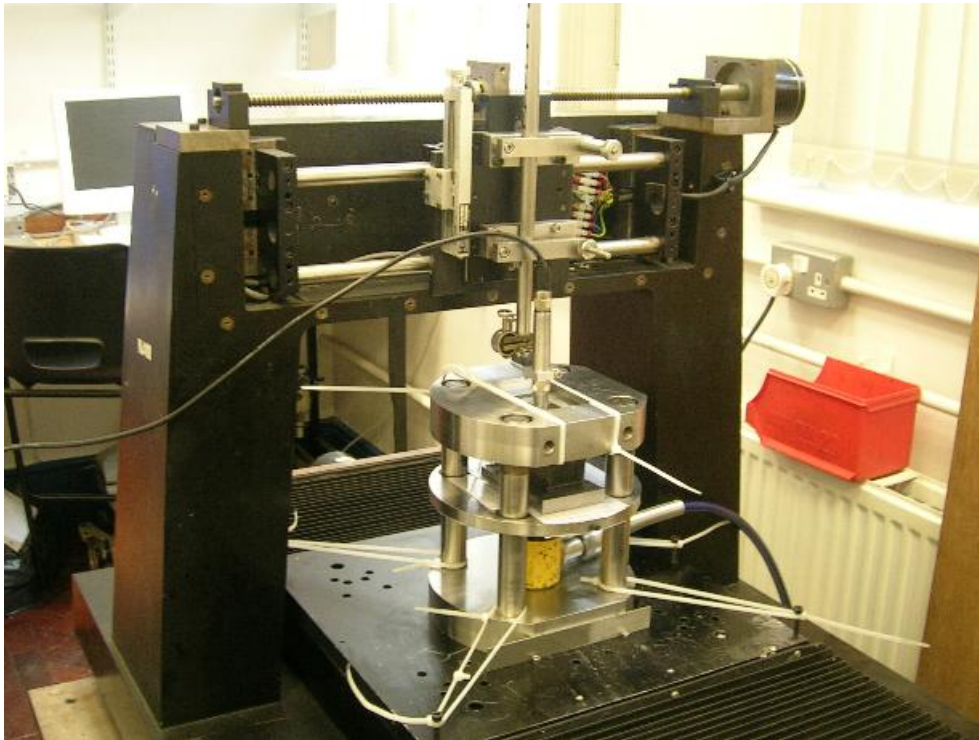
**Tabla 4.8.** Parámetros geométricos que definen la geometría transversal de la vía.

Parámetro	Valor
inclinación del carril	1:20
ancho de vía	1 435 mm
radio nominal	450 mm (nueva) 420 mm (desgastada)
distancia nominal entre puntos de contacto	1 500 mm

### 4.3.3. Método experimental

El objetivo del montaje experimental es la determinación del área de contacto y de la distribución de presiones en el contacto, empleando la técnica de ultrasonidos.

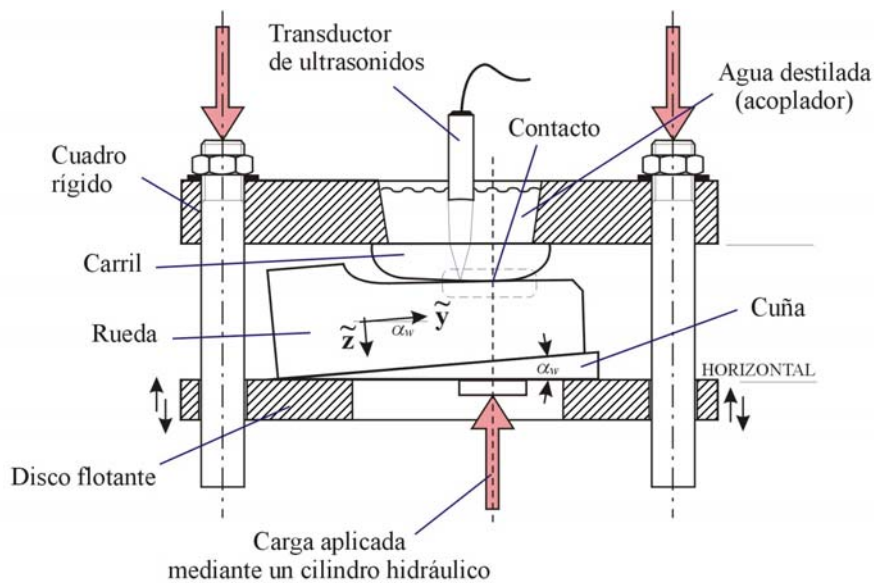
La Figura 4.46 muestra una fotografía del montaje en la que se aprecia la estructura de carga donde se colocan los perfiles, el cilindro hidráulico de carga y el transductor de ultrasonidos montado sobre el brazo móvil de una mesa X-Y.



**Figura 4.46.** Fotografía del montaje usado en el que se aprecian los distintos elementos: cilindro hidráulico de carga, cuadro rígido, disco flotante sobre el que se montan los perfiles, transductor de ultrasonidos, y mesa X-Y para escanear el área de contacto completa.

En este trabajo sólo se han medido las áreas de contacto que aparecen para una posición centrada del eje. El banco también serviría para otras posiciones no muy alejadas de la posición centrada, siempre y cuando el contacto se sitúe sobre la banda de rodadura, con el fin de que el área de contacto sea plana y se pueda enfocar por el transductor. En estas posiciones, puesto que aparece una rotación del eje ferroviario alrededor del eje  $\tilde{x}$  (coordenada  $\phi$ , ver Cap. 2), el ángulo de la cuña debería ser igual al ángulo de montaje del carril más el ángulo  $\phi$ . En la bibliografía aparecen diversos estudios destinados a analizar las áreas de contacto que aparecen en la pestaña [18-19] en los que estas hipótesis geométricas no son válidas.

La Figura 4.47 muestra un detalle del montaje empleado para posicionar y cargar los especímenes. La estructura consiste en un cuadro rígido y un disco flotante. El trozo de carril se coloca en una ranura de un plato superior del cuadro rígido, de tal forma que cierra un pequeño depósito donde se verterá el agua destilada como acoplador. Este depósito debe estar sellado para evitar que fugue agua hacia el contacto, porque distorsionaría la medida de ultrasonidos. Abajo existe un disco flotante sobre el que se coloca el trozo de rueda y que permite acomodar perfiles de distintos tamaños. Bajo el disco flotante, se encuentra un cilindro hidráulico para aplicar la fuerza entre los perfiles.

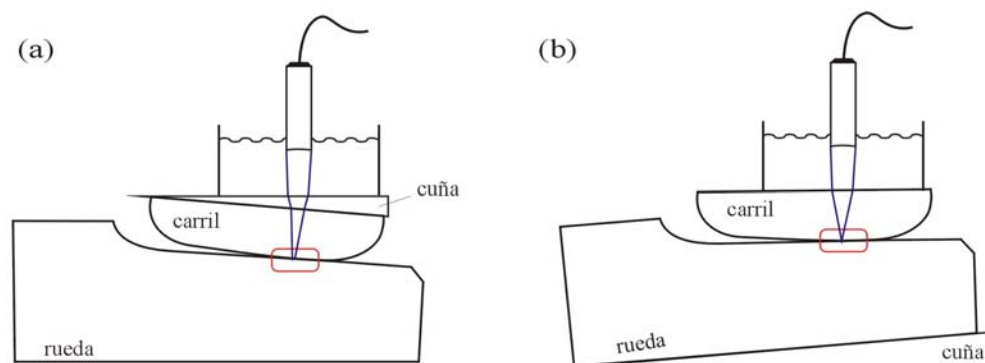


**Figura 4.47.** Detalle esquemático del montaje usado, donde los perfiles de rueda y carril se encuentran montados sobre el cuadro rígido y con una cuña para reproducir el ángulo de montaje del carril.

Como se muestra en la Figura 4.47, los especímenes de rueda y carril se posicionan en la estructura, de tal forma que el transductor de ultrasonidos quede

sobre ellos enfocando la interfase de contacto. Con la finalidad de permitir la transmisión de los ultrasonidos desde el transductor hasta el carril, se utiliza agua destilada como acoplador, ya que éstas se disiparían en el aire (el empleo de agua no destilada está desaconsejado porque las burbujas podrían dispersar la señal sonora, además de contribuir a la oxidación del acero de los especímenes). El transductor utilizado tiene una distancia focal de 76,2 mm en agua. Para enfocar el contacto, se tienen en cuenta los efectos de la refracción en la interfase entre el agua y el carril [64].

Se ha prestado especial atención a la hora de posicionar los especímenes de rueda y carril con el fin de reproducir la posición relativa tal como aparece en la vía. Para ello, se utiliza una cuña con la misma inclinación que el ángulo de montaje del carril sobre las traviesas. Además, sobre el disco flotante se ha dispuesto una rejilla para posicionar la rueda con respecto al carril. No sería aconsejable colocar la cuña bajo el espécimen del carril (Figura 4.48-(a)), tal como aparece en la vía, ya que cortaría el haz de ultrasonidos y crearía más interfases que distorsionarían la medida. Por esta razón, la cuña se coloca bajo el perfil de la rueda (Figura 4.48-(b)). Esta disposición presenta una ventaja adicional debido a que de esta forma el área de contacto se encuentra perpendicular al haz de ultrasonidos, con lo que se mejora el enfoque.

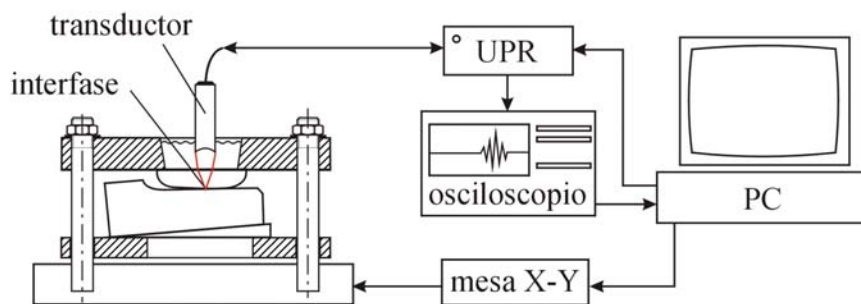


**Figura 4.48.** Dos distintas configuraciones para escanear el área de contacto mediante ultrasonidos: (a) Colocación de la cuña sobre el espécimen del carril. (b) Colocación de la cuña bajo el espécimen de la rueda.

La fuerza en el contacto se realiza mediante un cilindro hidráulico *Enerpac*. Este cilindro dispone de un manómetro calibrado que permite leer directamente la fuerza aplicada. Los valores utilizados son del orden de los que aparecen en el contacto rueda-carril (en este caso, se ha utilizado un valor de 50 kN). Puesto que la fuerza es muy elevada, para evitar que aparezcan momentos de flexión y que el disco flotante deje de estar horizontal, el punto de aplicación de la carga se ha alineado en la medida de lo posible con la zona de contacto del

espécimen de la rueda con el espécimen del carril (Figura 4.47). En cada ensayo se comprobó la horizontalidad del disco flotante mediante un nivel de burbuja.

El sistema de medida se muestra de forma esquemática en la Figura 4.49. El montaje consiste en un transductor de ultrasonidos de 10 MHz, una unidad UPR (unidad emisora y receptora de ultrasonidos), un osciloscopio digital, un PC de control y registro, una mesa X-Y para el movimiento del transductor a lo largo del área de contacto y una estructura para soportar los especímenes. El procedimiento utilizado consiste en definir una ventana que contiene el área de contacto y escanear puntos discretos de esta área de contacto, con ayuda de la mesa X-Y.



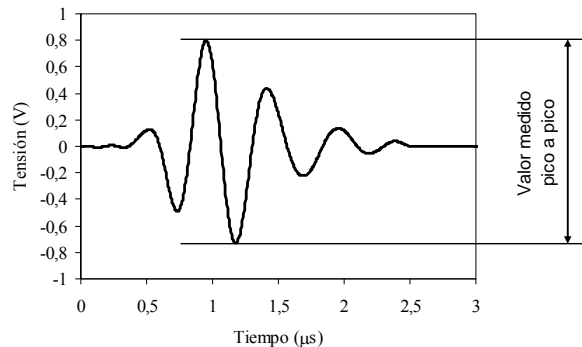
**Figura 4.49.** Esquema de los equipos usados para el escaneo de la interfase de contacto mediante ultrasonidos.

El procedimiento para escanear las áreas de contacto mediante ultrasonidos es el siguiente: el PC emite una señal de control que activa el funcionamiento de la unidad UPR para excitar eléctricamente el transductor. La señal eléctrica emitida por la unidad UPR en el dominio del tiempo tiene un aspecto como el mostrado en la Figura 4.50. Dicha señal contiene componentes en varias frecuencias, con una frecuencia central de 8,8 MHz. Como respuesta a la excitación, el transductor emite una onda de ultrasonidos. Esta onda llega a la interfase del contacto rueda-carril donde parte de esta señal se refleja y parte se transmite. El transductor captura la onda reflejada y emite una señal eléctrica que se envía de vuelta a la unidad UPR. El osciloscopio analiza esta señal y obtiene el valor pico a pico. Una vez se ha completado la medida para un punto dado, el PC registra la información y envía una señal a la mesa X-Y para situar el transductor en el siguiente punto. En este trabajo se ha usado una resolución espacial de 0,25 mm en ambas direcciones  $x$  e  $y$ , y se ha tomado el promedio de cinco mediciones del valor pico a pico de cada punto escaneado.

Puesto que la señal de ultrasonidos se atenúa parcialmente al atravesar los distintos materiales, tanto la señal emitida como la señal reflejada se disipan en el cuerpo del material del carril. Para calcular el coeficiente de reflexión, se realiza un



escaneado de referencia sobre el espécimen del carril sin que haya contacto. Como la interfase que se escanea en este caso es metal-aire, toda la señal se refleja y la señal recibida sólo disminuye por atenuación. Por tanto, dividiendo el valor de señal medido para un punto en el contacto entre el valor de referencia, se puede obtener el valor del coeficiente de reflexión.



**Figura 4.50.** Señal temporal emitida por la unidad UPR para excitar el transductor de ultrasonidos.

Es interesante mencionar que se ha utilizado un método basado en la medición del valor pico a pico de la señal, que representa una aplicación de un método en el dominio del tiempo [36]. Se ha usado este procedimiento debido a la cantidad de puntos necesaria para escanear el área de contacto completa.

El resultado del escaneado del área de contacto se convierte a rigidez interfacial utilizando el *modelo del muelle* y posteriormente, utilizando una calibración adecuada, a presión normal en el contacto.

#### 4.3.4. Resultados

En este apartado se presentan los resultados obtenidos del análisis del contacto rueda-carril según la técnica de ultrasonidos, para las dos áreas de contacto estudiadas (superficies nuevas y superficies desgastadas).

El procedimiento completo seguido para abordar el estudio del problema geométrico y normal mediante la técnica de ultrasonidos se resume en los siguientes pasos:

1. Obtención del *coeficiente de reflexión*  $R$  de la onda de ultrasonidos en las áreas de contacto estudiadas. En realidad se trata del módulo del coeficiente de reflexión  $R = |\mathbf{R}|$ , puesto que se trata de una magnitud compleja.

2. Obtención de la *rigidez interfacial*  $K$  que se define como el cambio en la presión nominal de contacto requerida para obtener un acercamiento unitario entre las superficies de contacto. Para obtener este valor se aplica el *modelo del muelle* (ver [15, 64]).
3. Obtención de la *presión normal* en la zona de contacto. La relación entre la rigidez interfacial y la presión normal es lineal, por lo que usando una calibración adecuada se puede obtener la distribución de presiones normales en el área de contacto.

A continuación se aplica el procedimiento a las dos áreas de contacto objeto de estudio: la obtenida entre perfiles nuevos y la obtenida entre perfiles desgastados. En primer lugar, se obtiene el coeficiente de reflexión para las dos áreas de contacto estudiadas. Para superficies reales, donde la carga se soporta de forma discreta por las asperezas en contacto, este valor varía entre 0 (cuando el contacto es perfecto y la onda de ultrasonidos se transmite por el material) y 1 (cuando no existe contacto, la onda se refleja por completo y es capturada por el emisor-receptor de ultrasonidos). En la Figura 4.51 se representa el coeficiente de reflexión medido para las dos áreas de contacto en el plano  $x_c$ - $y_c$ . Ambos contactos tienen un tamaño similar debido a que la fuerza normal es la misma. El área de contacto obtenida para los perfiles nuevos se observa visiblemente fragmentada, con zonas donde la señal se refleja debido a que no aparece contacto. Esta característica puede deberse a la rugosidad que tienen las superficies de los perfiles nuevos. En cambio, para el área de contacto obtenida con los perfiles desgastados, esta área presenta una distribución más uniforme.

En segundo lugar, se calcula la rigidez interfacial a partir del coeficiente de reflexión, según el *modelo del muelle*, mediante la fórmula [15]:

$$K = \frac{\omega z}{2} \sqrt{\frac{1}{R^2} - 1} \quad (4.31)$$

donde  $\omega$  es la frecuencia angular de la onda de ultrasonidos ( $\omega = 2\pi f$ ) correspondiente a una frecuencia central  $f = 8,8$  MHz y  $z$  es la impedancia acústica del acero ( $z = \rho v$ ) siendo  $\rho = 7810$  kg/m<sup>3</sup> la densidad del acero y  $v = 5900$  m/s la velocidad nominal de la onda en este material.

Drinkwater *et al.* [15] demuestra que esta fórmula se puede aplicar para valores de frecuencias de ultrasonidos de hasta 50 MHz.

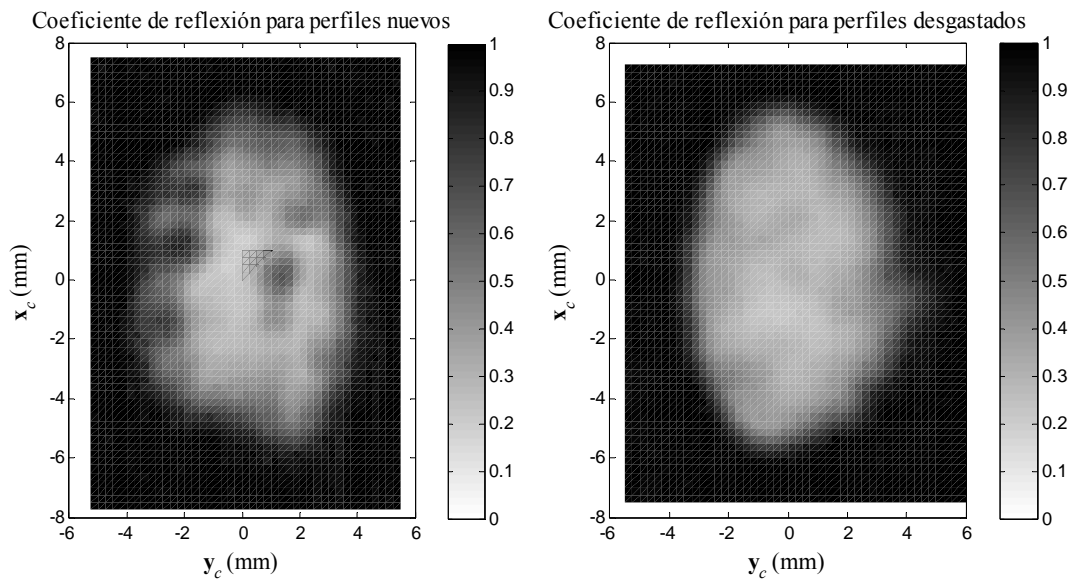
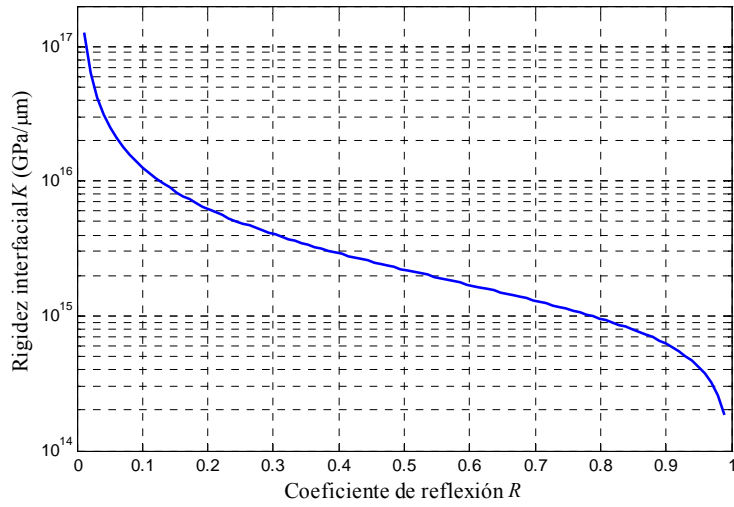


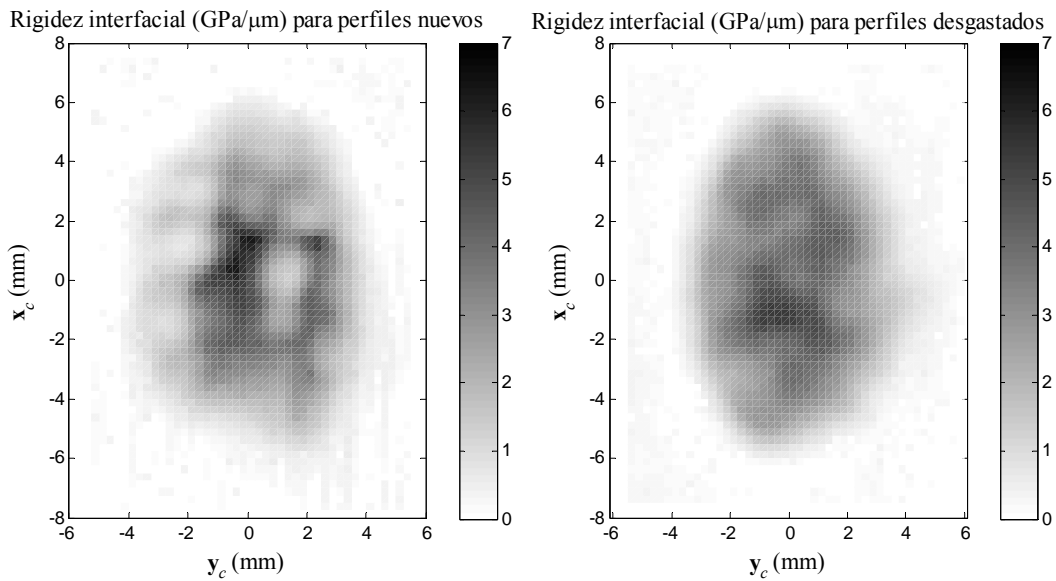
Figura 4.51. Coeficiente de reflexión medido: izq. perfiles nuevos, dcha. desgastados.

La Figura 4.52 muestra la relación no lineal existente entre el coeficiente de reflexión  $R$  y la rigidez interfacial  $K$  dada por el *modelo del muelle* para los valores utilizados. Cuando el contacto es conforme ( $R$  tiende a 0), la presión tiende a infinito.



**Figura 4.52.** Relación no lineal entre el coeficiente de reflexión  $R$  y la rigidez interfacial  $K$ , obtenida para los valores de frecuencia de la onda de ultrasonidos y del material del contacto.

En la Figura 4.53 se muestra la rigidez interfacial calculada para las dos áreas de contacto estudiadas.



**Figura 4.53.** Rigidez interfacial: izq. perfiles nuevos, dcha. desgastados.

Finalmente, se obtiene la distribución de presiones normales sobre las áreas de contacto a partir de la rigidez interfacial. La rigidez de una interfase de una

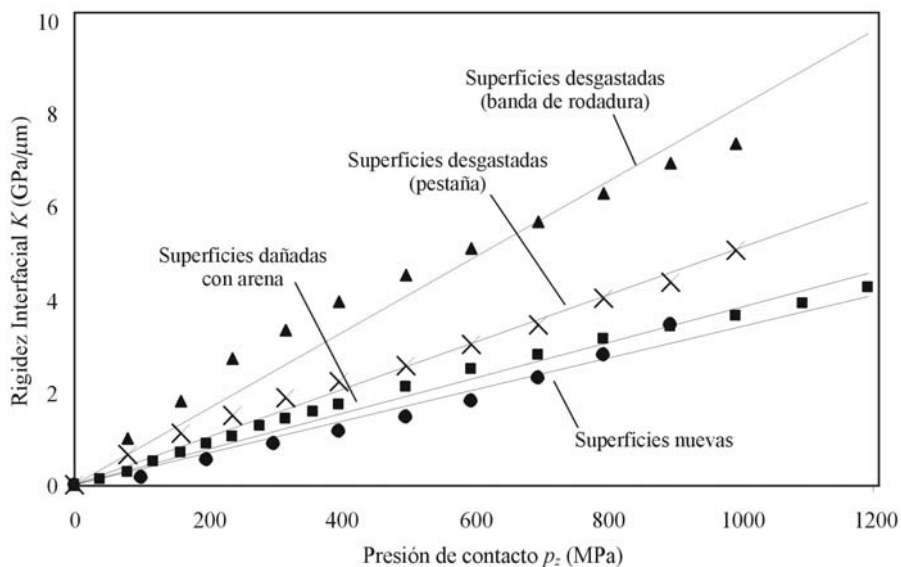
superficie rugosa depende del número, tamaño y distribución de las asperezas en el contacto. Por tanto, no hay una única relación entre la rigidez interfacial y la presión en el contacto [64]. Sin embargo, se puede realizar una calibración experimental para encontrar la relación entre estas dos variables. Además, para el rango de valores en el que varía la carga, la relación entre estas dos variables es lineal [36].

Por tanto la relación entre la presión normal  $p_z$  y la rigidez interfacial  $K$ , se puede expresar como

$$p_z = c K \quad (4.32)$$

siendo  $c$  la constante de calibración.

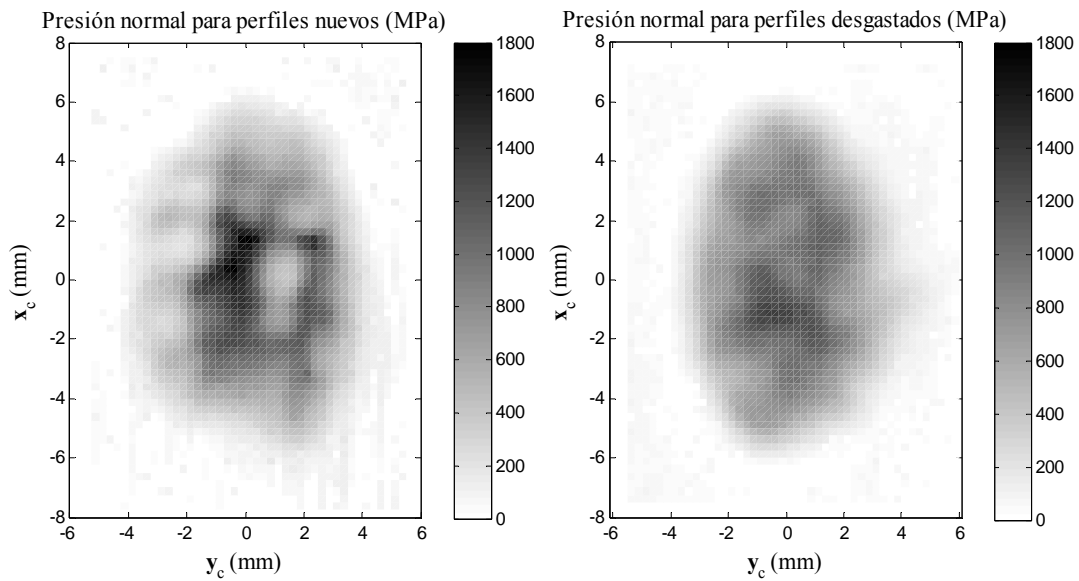
La Figura 4.54 muestra distintas curvas de calibración obtenidas experimentalmente para distintos tipos de contacto rueda-carril estudiados (extraída de [64]) donde se puede observar que la relación entre la rigidez interfacial y la presión normal es aproximadamente lineal para el rango de presiones en el que se trabaja. Las constantes de calibración según la fórmula (4.32) correspondientes a las distintas curvas de la Figura 4.54 son  $c = 291$ ,  $263$ ,  $198$  y  $123$  nm para superficies nuevas, superficies dañadas con arena, superficies desgastadas (zona de la pestaña) y superficies desgastadas (zona de la banda de rodadura), respectivamente.



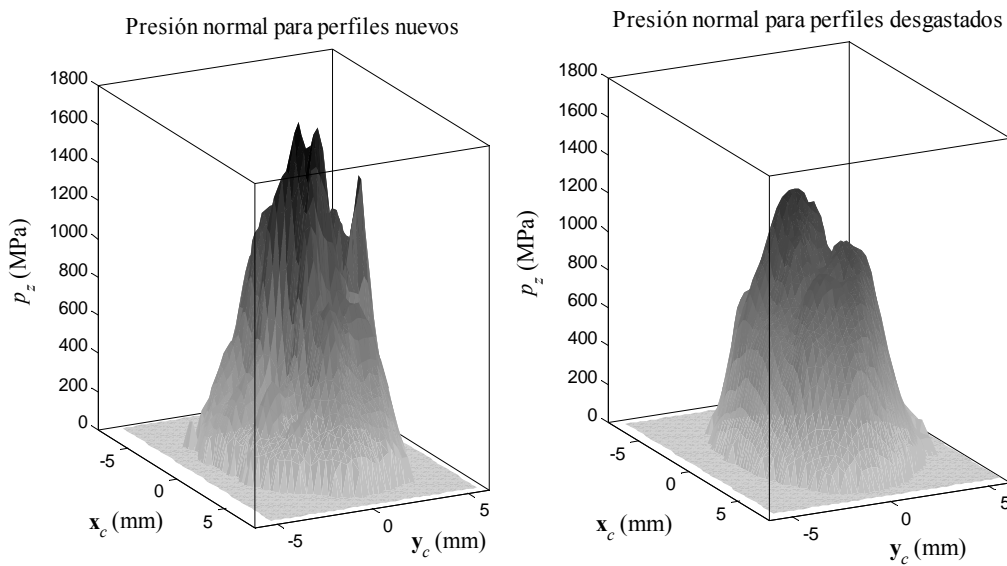
**Figura 4.54.** Distintas curvas de calibración para distintas áreas de contacto obtenidas con varios especímenes de rueda y carril. Extraído de [64].

Sabiendo que la relación entre la rigidez interfacial y la presión normal al contacto es prácticamente lineal en el rango en el que se está trabajando y conociendo la fuerza normal, se obtiene una constante de calibración de  $c = 404$  nm para las superficies usadas y  $c = 355$  nm para las superficies nuevas de los especímenes usados. Estos valores de calibración son sólo válidos para superficies con unas mismas características de rugosidad. En este punto es interesante destacar las características de las áreas de contacto obtenidas en la Figura 4.51 donde se observa que el área de contacto para superficies nuevas está visiblemente fragmentada mientras que al área de contacto para superficies desgastadas tiene una forma mucho más suave.

Las Figuras 4.55 y 4.56 muestran la presión de contacto obtenida para perfiles nuevos y desgastados, respectivamente, según la calibración determinada. En el contacto para perfiles nuevos se pueden observar unas líneas verticales oscuras (paralelas al eje  $x_c$ ) que se corresponden con las marcas de mecanizado que aún están presentes en el perfil de la rueda. Al igual que para el coeficiente de reflexión, para perfiles nuevos el área de contacto aparece visiblemente fragmentada. Este efecto se puede explicar teniendo en cuenta la rugosidad en el espécimen de rueda nuevo. Ésta reduce la conformidad entre superficies y causa una fragmentación en la distribución de presiones normales. Este resultado es consistente con trabajos publicados en la bibliografía donde se investigan áreas de contacto entre perfiles nuevos, desgastados y dañados con arena [64]. A medida que los perfiles se desgastan, el contacto se convierte en más conforme tanto a nivel de las ondulaciones del material como a nivel de las asperezas, y la distribución de presiones es más cercana a la esperada para superficies perfectamente suaves.



**Figura 4.55.** Mapa de contorno de la distribución de tensiones normales obtenidas mediante la técnica de ultrasonidos: izq. perfiles nuevos, dcha. desgastados.



**Figura 4.56.** Representación gráfica de la distribución de tensiones normales obtenidas mediante la técnica de ultrasonidos: izq. perfiles nuevos, dcha. desgastados.

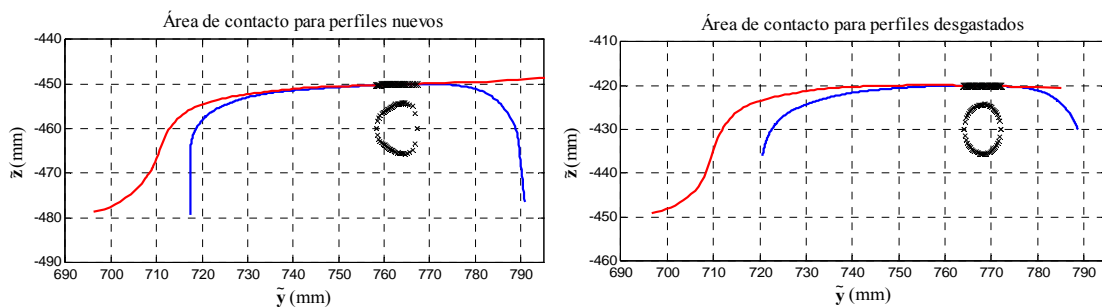
### 4.3.5. Comparación con modelos numéricos

En este apartado se comparan las áreas de contacto y distribución de presiones obtenidas por el método numérico propuesto usando el concepto de elipse equivalente, con los resultados experimentales obtenidos en el apartado anterior.

Una vez analizadas las dos áreas de contacto mediante la técnica de ultrasonidos, por otra parte se va a resolver el problema geométrico y normal de contacto de forma numérica según el procedimiento propuesto.

Para reproducir numéricamente las áreas de contacto que se han obtenido experimentalmente, se utilizan los perfiles de rueda y carril medidos a partir de los especímenes que aparecen en las Figuras 4.44 y 4.45, respectivamente. Estos perfiles se colocan en la posición centrada del eje y sin ángulo de lazo. Para resolver el problema de contacto se impone un valor de fuerza normal de 50 kN para el área de contacto y se define un procedimiento iterativo hasta conseguir que la fuerza normal sea igual al valor prefijado. Si esta solución numérica converge a la solución obtenida experimentalmente mediante la técnica de ultrasonidos, significará que el procedimiento numérico propuesto, basado en la interpenetración virtual entre superficies y en el uso de la elipse equivalente, es adecuado.

La vista frontal de los perfiles de rueda y carril y las áreas de contacto obtenidas (representadas en su vista en planta) se muestran en la Figura 4.57. El valor de la conicidad  $\gamma_0$  obtenida para el área de contacto para perfiles nuevos es de 0,034 y para perfiles desgastados, de -0,022, calculado según la fórmula (4.16). Este valor se usará para realizar la transformación entre el sistema de referencia de la vía y el sistema de referencia asociado al contacto (ver Cap. 2).

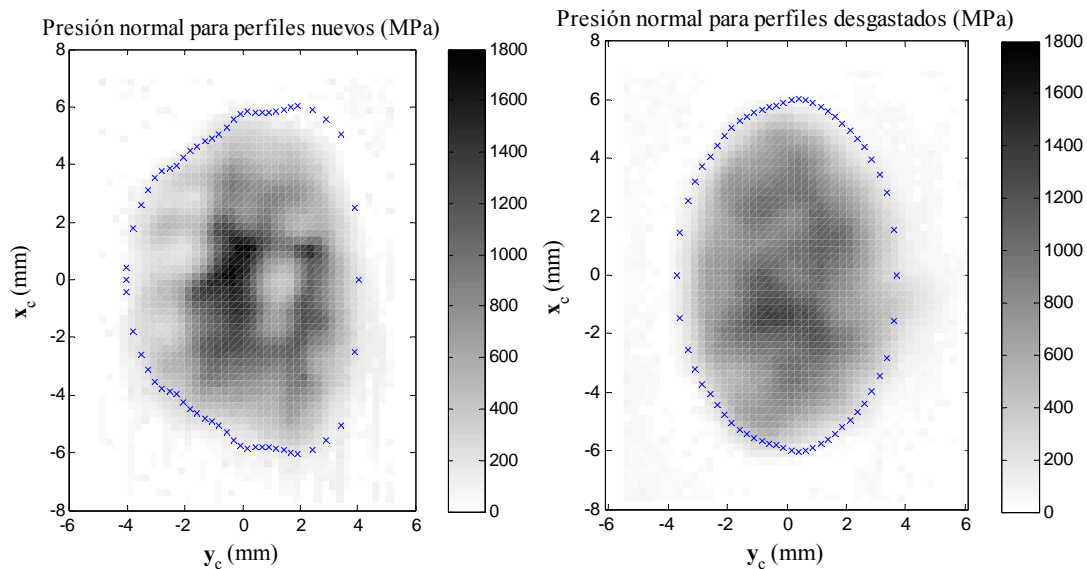


**Figura 4.57.** Áreas de contacto obtenidas para una posición centrada del eje y para una fuerza normal de 50 kN correspondiente al área de contacto: arr. perfiles nuevos, abj. desgastados.



En primer lugar se compararán la *forma y tamaño de las áreas de contacto* y, en segundo lugar, la *distribución de presiones normales* obtenidas por ambos métodos.

Con respecto a la *forma y tamaño de las áreas de contacto*, en la Figura 4.58 se superpone el área de contacto obtenida numéricamente con la distribución de presiones normales obtenida mediante la técnica de ultrasonidos. Ambos resultados se muestran en el sistema de referencia asociado al contacto. Respecto al tamaño del área de contacto se puede comprobar el buen grado de concordancia entre ambos métodos para estimar el área de contacto (Figura 4.58).

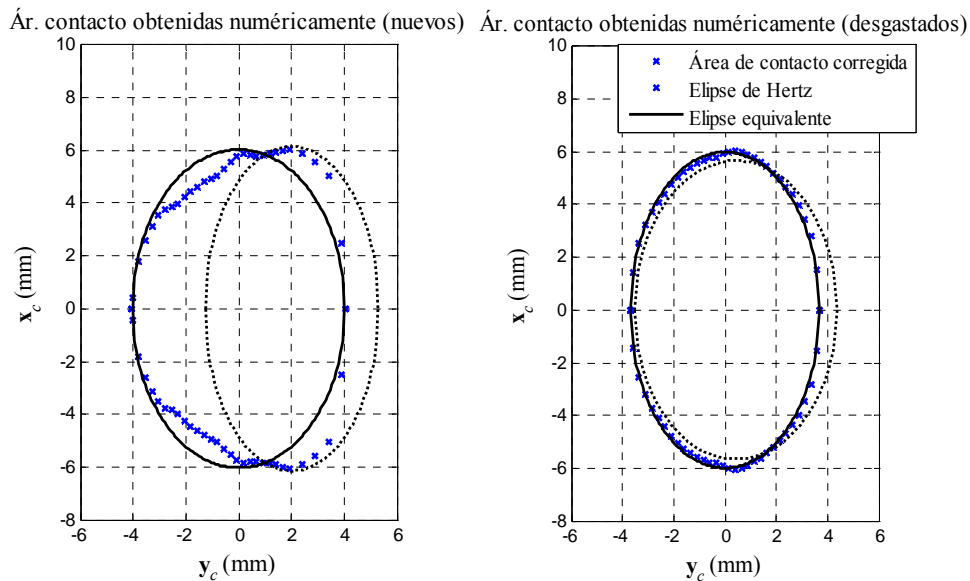


**Figura 4.58.** Representación conjunta de las áreas de contacto obtenidas mediante la técnica de ultrasonidos (presión normal no nula) y las áreas de contacto obtenidas por el método numérico propuesto ('x'): izq. perfiles nuevos, dcha. desgastados.

No obstante, respecto a la forma de las áreas de contacto se pueden apreciar pequeñas diferencias posiblemente debidas a que el problema numérico usa los perfiles de la rueda y del carril para generar las superficies de contacto (rueda axisimétrica, carril extruido), mientras que el método experimental usa directamente de las superficies de contacto de ambos especímenes con sus desviaciones respecto a la forma teórica. Por ejemplo se puede observar una pequeña falta de simetría de las áreas de contacto obtenidas experimentalmente según el eje  $y_c$ .

La Figura 4.59 muestra a modo de ejemplo las áreas de contacto obtenidas numéricamente según el procedimiento propuesto (área de contacto corregida

obtenida por interpenetración virtual y su correspondiente elipse equivalente) junto a la elipse de Hertz. Como ya se ha visto en el apartado 4.2.4 el área de contacto obtenida a partir de la elipse equivalente consigue mejorar la estimación ofrecida por Hertz que se obtiene a partir de las curvaturas del punto teórico de contacto. No obstante, la estimación ofrecida por el método de Hertz para perfiles desgastados parece tener un grado de precisión adecuado. Esto es debido al efecto del desgaste sobre la forma de los perfiles, que provoca que en las cercanías del contacto ambos perfiles tengan una curvatura constante cuando el eje está centrado.



**Figura 4.59.** Comparación de las áreas de contacto obtenidas numéricamente mediante el procedimiento propuesto (área de contacto corregida y elipse equivalente) y mediante la teoría de punto teórico de contacto de Hertz: izq. perfiles nuevos, dcha. desgastados.

En segundo lugar, se compara la *distribución de presiones normales* dentro del área de contacto. El procedimiento numérico ajusta una elipse equivalente para las áreas de contacto obtenidas, definiendo los semiejes de la elipse equivalente como  $a = L/2$  y  $b = W/2$ . Se asume una distribución de presiones normales dentro de la elipse equivalente que sigue el modelo de Hertz.

Con el fin de evaluar la adecuación de asimilar el área de contacto no-regular a una elipse, se calcula el valor del parámetro de elipticidad  $\varepsilon$  definido en (4.25). Para las áreas de contacto estudiadas este valor se muestra en la Tabla 4.9. Estos valores parecen *suficientemente elevados*, sobretudo para el caso del área de contacto obtenida para perfiles desgastados. Puesto que el área de contacto obtenida según el procedimiento numérico converge al área de contacto

obtenida experimentalmente por la técnica de ultrasonidos (Figura 4.58) parece adecuado asumir la hipótesis de *elipse equivalente*.

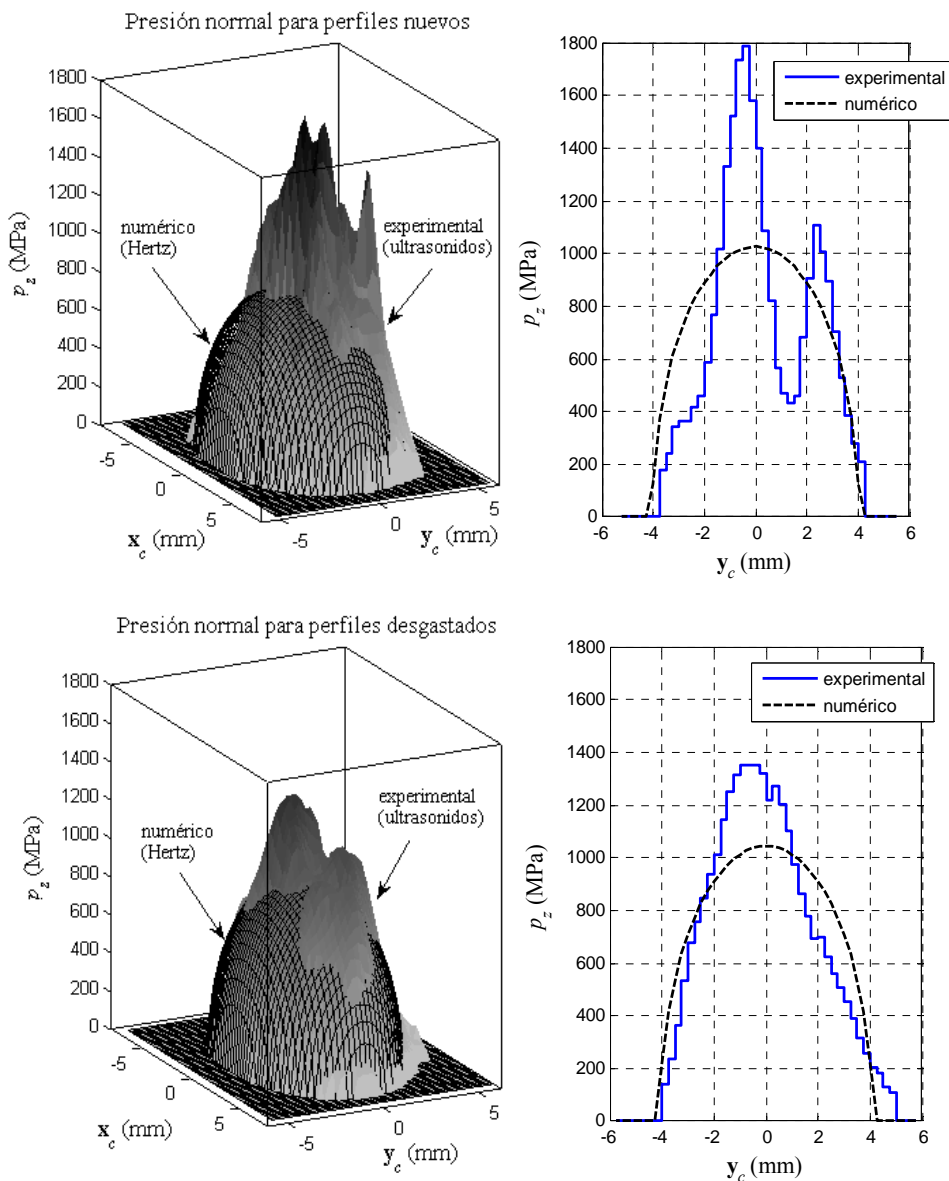
**Tabla 4.9.** Parámetros de elipticidad calculados para las áreas de contacto obtenidas numéricamente.

	$\varepsilon$
Perfiles nuevos	0,85
Perfiles desgastados	0,96

La Figura 4.60 compara la distribución obtenida a partir de datos experimentales con la distribución calculada numéricamente (a partir del modelo de Hertz dentro de la elipse equivalente). Para ambas áreas de contacto se puede observar como existen diferencias entre ambas distribuciones de presiones. La distribución obtenida numéricamente es simétrica, mientras que la distribución de presiones calculada a partir de datos experimentales tiene una forma asimétrica e irregular, con presencia de picos y valles. Mientras que el máximo de presión está alrededor de 1 000 MPa según los modelos numéricos, esta magnitud alcanza valores de 1 800 MPa para perfiles nuevos y 1 350 MPa para perfiles desgastados. Esta característica es debida a la rugosidad de las superficies reales que da lugar valores locales de presiones superiores a los valores previstos por los modelos numéricos empleados para el análisis del contacto rueda-carril, que asumen superficies suaves.

Puesto que una superficie real es rugosa, la carga se soporta de forma discreta por las asperezas en contacto, lo que causa un incremento de la presión normal con respecto al valor esperado para superficies reales (un pico); por otra parte, en las zonas donde no hay contacto entre asperezas, aparece un valle.

A medida que una superficie se desgasta y disminuye su rugosidad, los picos y los valles se alisan y la diferencia entre la distribución de presiones obtenida experimentalmente y la distribución de presiones obtenidas numéricamente tiende a disminuir. Este comportamiento se observa en la distribución de presiones obtenidas para superficies desgastadas (Figura 4.60).



**Figura 4.60.** Comparación del campo de presiones normales obtenido a través de las medidas por ultrasonidos con el campo de presiones normales según la teoría de Hertz en la elipse equivalente: arriba perfiles nuevos, abajo desgastados.

Como conclusiones, en este apartado se ha utilizado un método experimental que permite obtener las áreas de contacto y la distribución de presiones normales, con el fin de evaluar la adecuación del método numérico propuesto para el análisis del problema geométrico y normal del contacto rueda-

carril. Se han estudiado dos áreas de contacto distintas, una producida entre superficies nuevas de rueda y carril y otra producida por superficies desgastadas, con distintas características de rugosidad superficial.

En cuanto a las áreas de contacto, el procedimiento numérico propuesto es capaz de obtener dichas zonas de interacción entre las superficies de rueda y carril con una precisión muy adecuada. La única limitación que aparece es que el procedimiento numérico genera estas superficies a partir de perfiles base, por lo que no tiene en cuenta la presencia de defectos en las superficies. No obstante las diferencias encontradas son mínimas.

En cuanto a la distribución de presiones, aparecen mayores diferencias entre la obtenida a partir de datos experimentales y la obtenida numéricamente según el procedimiento propuesto. Estas diferencias se deben a la presencia de rugosidad en las superficies reales, parámetro que no se considera por los modelos de contacto empleados en simulación dinámica. No obstante, se observa que para valores bajos de rugosidad (para perfiles desgastados, por ejemplo), la distribución de presiones obtenida a partir de datos experimentales parece tender a la distribución de presiones obtenida numéricamente.

Cabe señalar que, aunque el análisis realizado en este apartado del contacto entre superficies reales no es aplicable para el campo de la simulación dinámica (porque requeriría escanear por completo todas las superficies de contacto), puede ayudar a entender los mecanismos de transmisión de esfuerzos y desgaste que aparecen en el área de contacto para superficies reales de rueda y carril.

#### **4.4. Conclusiones**

En este capítulo se ha descrito el procedimiento para resolver el problema de contacto geométrico y normal entre los perfiles rueda y carril. Se trata de un procedimiento basado en la interpenetración virtual entre perfiles que permite una mejor estimación del área de contacto que los procedimientos basados en contacto puntual.

En segundo lugar, se ha utilizado un método experimental para el análisis del contacto rueda-carril que permite validar la estimación del área de contacto realizada según el procedimiento numérico propuesto. Por otra parte, este método experimental permite conocer la distribución de presiones normales que aparece entre superficies reales de rueda y carril debido a la presencia de la rugosidad.

Debido por una parte a la precisión del método propuesto para obtener las áreas de contacto y por otra a su eficiencia computacional, el método numérico

propuesto es adecuado para su uso en aplicaciones de simulación dinámica y estimación del desgaste, en el rango de baja frecuencia (ver Cap. 6).

Finalmente cabe mencionar que parte de los resultados presentados en este capítulo han sido publicados en la referencia [90].

# 5. Problema tangencial y estimación del desgaste en el contacto rueda-carril

## 5.1. Introducción

Siguiendo el esquema planteado en el Cap. 2 para el estudio del contacto rueda-carril, en el presente capítulo se describen las aportaciones realizadas en la Tesis para la resolución del problema tangencial y estimación del desgaste, que podrían resumirse en:

- Estudio del problema tangencial y estimación del desgaste para superficies reales, usando las distribuciones de presiones normales obtenidas en el capítulo anterior a partir de la técnica experimental de ultrasonidos. Comparación con los resultados obtenidos a partir de la distribución de presiones normales obtenida con el procedimiento de contacto propuesto.
- Diseño en implementación de un modelo de contacto tangencial basado en FASTSIM con coeficiente de rozamiento variable. Parametrización de dicho modelo a partir de curvas experimentales, para considerar el estado tribológico de las superficies en contacto.

En el desarrollo del presente capítulo se presentan en primer lugar los resultados del análisis del problema tangencial y estimación del desgaste para las distribuciones de presiones normales obtenidas en el capítulo anterior (según el procedimiento numérico propuesto y el método experimental basado en la técnica de ultrasonidos).

Posteriormente, se describe la implementación del algoritmo de resolución del problema tangencial basado en FASTSIM, considerando un coeficiente de rozamiento variable. A su vez se presenta la parametrización realizada a partir de curvas de tracción medidas experimentalmente.

Finalmente se presentan las conclusiones. Parte de los resultados de este capítulo han sido publicados en las referencias [90] y [91].

## 5.2. Aplicación de la técnica de ultrasonidos al contacto rueda-carril. Problema tangencial y estimación del desgaste

El primer punto se presenta como una continuación del análisis del contacto entre superficies reales realizado en el apartado 4.3 del capítulo anterior. Como datos previos para la resolución del problema tangencial se toman los datos de las áreas de contacto y distribuciones de presiones normales del capítulo anterior. En este capítulo anterior, La Figura 4.40 ilustra un esquema de los distintos cálculos realizados para el estudio de las áreas de contacto mediante la técnica de ultrasonidos.

Por una parte, se realiza una comparación entre los resultados del problema tangencial y el desgaste para las distribuciones de presiones normales obtenidas de forma numérica (según el *procedimiento numérico* propuesto en esta Tesis), con las distribuciones de presiones normales obtenidas a partir de la *técnica experimental de ultrasonidos*. Por otra parte, se compara el efecto del desgaste sobre las superficies en el contacto con los dos juegos de especímenes utilizados: *especímenes de rueda y carril nuevos* y *especímenes de rueda y carril desgastados*. De esta forma, la Figura 5.1 muestra un esquema de los cálculos presentados en este apartado, obtenidos a partir de las distribuciones de presiones normales que se muestran también en forma de esquema en la Figura 4.41.

	PROBLEMA TANGENCIAL			ESTIMACIÓN DEL DESGASTE	
	PERFILES NUEVOS	PERFILES DESGASTADOS		PERFILES NUEVOS	PERFILES DESGASTADOS
Modelo de contacto propuesto (NUMÉRICO)	$C_n$	$C_w$	}	$E_n$	$E_w$
Técnica de ultrasonidos (EXPERIMENTAL)	$D_n$	$D_w$		$F_n$	$F_w$

**Figura 5.1.** Resultados del problema tangencial y estimación del desgaste presentados en este apartado.

El objetivo no es tanto validar la aplicación de FASTSIM a distintas soluciones del problema normal como estimar las diferencias que pueden existir en cuanto a la distribución de tensiones tangenciales y el desgaste entre los resultados puramente numéricos y aquellos que presentan parte experimental.



Se presentan tres series de resultados sobre las magnitudes asociadas al problema tangencial y estimación del desgaste:

- a. *Análisis local de las áreas de contacto* que quedan divididas en zona de adhesión y zona de deslizamiento y análisis de la distribución de las distintas magnitudes.
- b. *Análisis global de las áreas de contacto*, donde se observa la influencia del deslizamiento sobre las distintas magnitudes.
- c. *Cálculo del desgaste sobre los perfiles*. Se realizará un cálculo del desgaste sobre el perfil de la rueda.

Al igual que como se hizo en el capítulo anterior en el apartado relativo al problema geométrico y normal entre superficies reales, el análisis realizado en este apartado resulta interesante porque permite conocer el efecto de la consideración de la rugosidad de las superficies sobre el problema tangencial y la estimación del desgaste, tanto a nivel local como a nivel global. Además, se pueden evaluar las limitaciones de los procedimientos numéricos utilizados para analizar el problema tangencial y el desgaste, debido al hecho de asumir que las superficies son suaves.

### 5.2.1. Descripción del procedimiento

#### a. Hipótesis

Para el análisis del problema tangencial y la estimación del desgaste en superficies reales se han asumido las siguientes hipótesis:

1. El análisis del problema tangencial se realiza mediante el algoritmo FASTSIM. Se usa el concepto de *elipse equivalente* para el cálculo de los **parámetros de flexibilidad**.
2. El **coeficiente de rozamiento** se supone **constante**.
3. El **desgaste** se estima empleando el **índice  $T\gamma A$**  y la ley de desgaste de la *University of Sheffield* (USFD) (ver sección 2.6.3, [57]).
4. Se estudia el **desgaste sobre el perfil de la rueda**. Se asume que el desgaste se realiza de forma *regular*.

Para realizar un análisis del problema tangencial en el contacto entre los especímenes estudiados de rueda y carril, se supone que aparece un deslizamiento

relativo entre ambas superficies. Para ello se imponen unos valores de pseudodeslizamiento (longitudinal  $v_x$ , transversal  $v_y$  y *spin*  $\varphi$ ) que originan la aparición de unas tensiones tangenciales en el área de contacto y unos valores de deslizamiento en la zona cercana al borde de salida del área de contacto. Como consecuencia, aparece un desgaste de las superficies.

Por una parte, el cumplimiento de la primera hipótesis está asegurado en los datos provenientes de la aplicación del modelo numérico de resolución del problema normal, debido al uso del concepto de *elipse equivalente*; el área de contacto no-regular obtenida a partir de la *interpenetración virtual entre superficies* se asimila a una elipse y se define la distribución de presiones normales dentro de esta elipse. Por otra parte, para los datos provenientes de medidas experimentales, se utiliza el concepto de *elipse equivalente* para la obtención de los *parámetros de flexibilidad* (ver Cap. 2). Para los datos experimentales, la aplicación del algoritmo FASTSIM se realizará en todo el dominio (no-regular) definido por la distribución de presiones normales.

En cuanto a la segunda hipótesis, este primer estudio del problema tangencial asume un valor de coeficiente de rozamiento constante con  $\mu = 0,4$ . Se toma esta hipótesis para simplificar el problema y comprobar el efecto de considerar la rugosidad de las superficies en contacto.

En referencia a la tercera hipótesis, la estimación del desgaste se realiza a partir de la energía disipada en el contacto, usando la ley de desgaste de la *University of Sheffield* (USFD) (ver Cap. 2). Esta ley de desgaste está obtenida para superficies secas y limpias; por tanto, no se considerará la presencia de contaminantes en la interfase de contacto.

Finalmente, en referencia a la cuarta hipótesis se estudia el desgaste sobre el perfil de la rueda y se asume que éste es *regular* [10]. Como consecuencia, la rueda se considera siempre circular y el desgaste se distribuye uniformemente alrededor de esta circunferencia [89]. Se trata de una hipótesis general empleada en el cálculo de la *evolución de los perfiles*.

Una vez presentadas las hipótesis, se pasará a describir la aplicación del algoritmo FASTSIM a las áreas de contacto obtenidas a partir de datos experimentales.

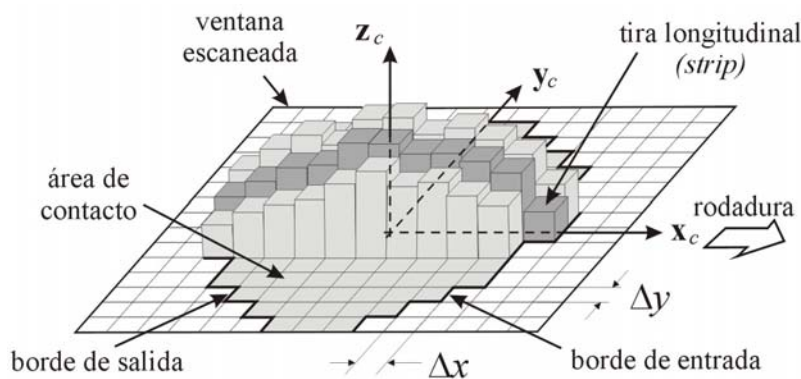
### b. Resolución del problema tangencial mediante FASTSIM

Para la aplicación del algoritmo FASTSIM se usarán dos conjuntos de datos de entrada:

- La distribución normal de Hertz dentro de la elipse equivalente (solución numérica).
- La distribución normal obtenida a partir de la técnica de ultrasonidos (experimental).

En la aplicación del algoritmo FASTSIM se usará la distribución de presiones normales proporcionada por el problema de contacto normal, en lugar de utilizar la distribución parabólica propuesta por Kalker (ver Cap. 2, [44]):

Para resolver el problema tangencial y obtener la estimación del desgaste se usa la misma discretización que la empleada en las medidas experimentales. Ésta se compone de una cuadrícula de elementos que cubren toda la ventana escaneada (Figura 5.2), siendo el tamaño de cada elemento  $\Delta x \cdot \Delta y$ .



**Figura 5.2.** Discretización del área de contacto proveniente de las medidas por ultrasonidos.

Según la discretización utilizada, se definen unas tiras longitudinales o *strips* siguiendo la dirección del eje  $x_c$  (cabe recordar que la dirección y el sentido de rodadura son los señalados por el eje  $x_c$ ). Estas tiras tienen una longitud variable y un espesor  $\Delta y$ . A diferencia de la discretización usada por FASTSIM, no todas las tiras tienen el mismo número de elementos.

Para la obtención de los *parámetros de flexibilidad*  $L$  para las áreas de contacto obtenidas a partir de las medidas experimentales, se utiliza el concepto de *elipse equivalente* definido en el Cap. 4. Los valores de los semiejes de la elipse equivalente que permiten calcular los parámetros de flexibilidad según la expresión (2.71), se obtienen a partir de la ecuación (4.24).

El algoritmo FASTSIM, tal como se describe en el Cap. 2, se aplicará para cada una de las tiras longitudinales desde el borde de entrada hasta el borde de salida. En función del valor que tome la presión normal de contacto en cada elemento pueden darse tres casos:

- $p_z^{ij} = 0$ : el elemento no pertenece al área de contacto.
- $\sqrt{(p_x^{ij})^2 + (p_y^{ij})^2} < \mu p_z^{ij}$ : el elemento está en adhesión. (5.1)
- $\sqrt{(p_x^{ij})^2 + (p_y^{ij})^2} = \mu p_z^{ij}$ : el elemento está deslizamiento.

siendo  $p_z$  la presión normal al contacto (según la dirección  $\mathbf{z}_c$ ), y  $p_x$ ,  $p_y$  las componentes de la tensión tangencial según los ejes  $\mathbf{x}_c$ ,  $\mathbf{y}_c$ . Los índices  $i, j$  son las coordenadas del elemento dentro de la ventana escaneada.

Tras la resolución del problema tangencial, el área de contacto queda dividida en zonas de adhesión y de deslizamiento. En la zona de adhesión el deslizamiento es nulo; en la zona de deslizamiento el valor de deslizamiento se puede calcular según la fórmula (2.79).

### c. Estimación del desgaste

El desgaste se modela mediante el criterio de la disipación energética en el contacto (ver Cap. 2, [25, 102, 105]). Ésta se calcula mediante el índice  $T\gamma/A$  que representa el producto de las fuerzas (o tensiones) tangenciales al contacto por el valor del deslizamiento.

Como ley de desgaste que relaciona la disipación energética con la tasa de desgaste se usará la ley enunciada por la *University of Sheffield* (USFD) para superficies secas (ver Cap. 2, Tabla 2.3 y [57]). Según esta ley, se distinguen tres regímenes en función de los mecanismos que intervienen en el desgaste: *suave*, *severo* y *catastrófico*. La energía disipada se calcula con el índice  $T\gamma/A$ , que representa el producto de las tensiones tangenciales ( $T/A$ ) por el valor del deslizamiento adimensional ( $\gamma$ ). La tasa de desgaste indica la masa de material perdido ( $\mu\text{g}$ ) por unidad de longitud rodada (m) y por unidad de área ( $\text{mm}^2$ ). Esta ley se implementa de forma *local* para cada uno de los elementos que forman el área de contacto.

### 5.2.2. Resultados

En este apartado se presentan tres series de resultados: a. *Análisis local de las áreas de contacto*, b. *Análisis global de las áreas de contacto* y c. *Cálculo del desgaste sobre el perfil de la rueda*.

A su vez, para los resultados a. y b. se consideran tres escenarios de simulación: uno para *deslizamiento bajo*, otro para *deslizamiento moderado* y otro para *deslizamiento alto* en los que se emplean distintos valores de pseudodeslizamiento longitudinal, manteniendo constante el deslizamiento transversal y el término de *spin*. En la Tabla 5.1 se definen estos tres escenarios, siendo  $v_x$  el deslizamiento longitudinal,  $v_y$  el deslizamiento transversal y  $\varphi$  el término de *spin*.

**Tabla 5.1.** Escenarios de simulación considerados.

	Deslizamiento bajo	Deslizamiento moderado	Deslizamiento alto
$v_x$	0,05 %	0,30 %	1,00 %
$v_y$	0,00 %	0,00 %	0,00 %
$\varphi$ (1/m)	5,00 %	5,00 %	5,00 %

El valor de *spin* utilizado se ha estimado aproximadamente como el correspondiente a la conicidad nominal de los perfiles. Estos tres escenarios se han definido de tal forma que la zona de deslizamiento dentro del área de contacto represente aproximadamente un 7 % para *deslizamiento bajo*, un 50 % para *deslizamiento moderado*, y un 98 % para *deslizamiento alto*.

#### a. Análisis local de las áreas de contacto

En esta primera serie de resultados se analiza la distribución de las distintas magnitudes asociadas al contacto tangencial y el desgaste dentro de las áreas de contacto estudiadas.

Para cada una de las dos áreas de contacto estudiadas (la obtenida a partir de perfiles *nuevos* y la obtenida a partir de perfiles *desgastados*) y para cada uno de los datos de origen (los procedentes del *modelo numérico* de contacto y los procedentes de los *datos experimentales*) se analizarán las siguientes magnitudes:

- Distribución de las zonas de adhesión y deslizamiento.
- Distribución de las tensiones tangenciales en dirección longitudinal ( $p_x$ ).
- Distribución del deslizamiento adimensional en sentido longitudinal ( $\gamma_x$ ).

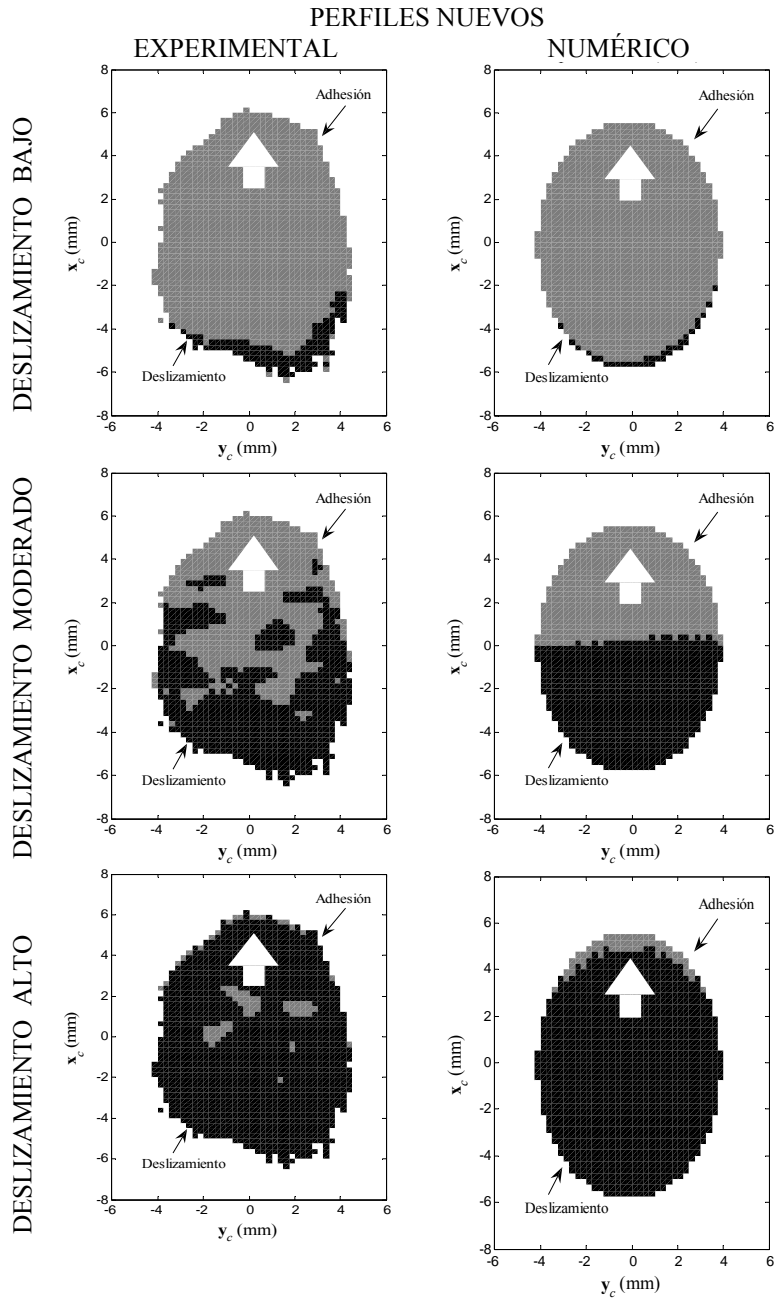
- Distribución de la energía disipada en el contacto por unidad de área ( $T\gamma/A_{i,j}$ ).

Puesto que el efecto del pseudodeslizamiento longitudinal es dominante (sobre todo para *deslizamiento moderado* y *deslizamiento alto*), en las correspondientes gráficas se han representado las tensiones tangenciales en dirección longitudinal y los valores de deslizamiento en dirección longitudinal en lugar del módulo de la tensión tangencial y el módulo del deslizamiento. No obstante, los valores en sentido transversal se han tenido en cuenta para calcular el índice  $T\gamma/A$  de forma local.

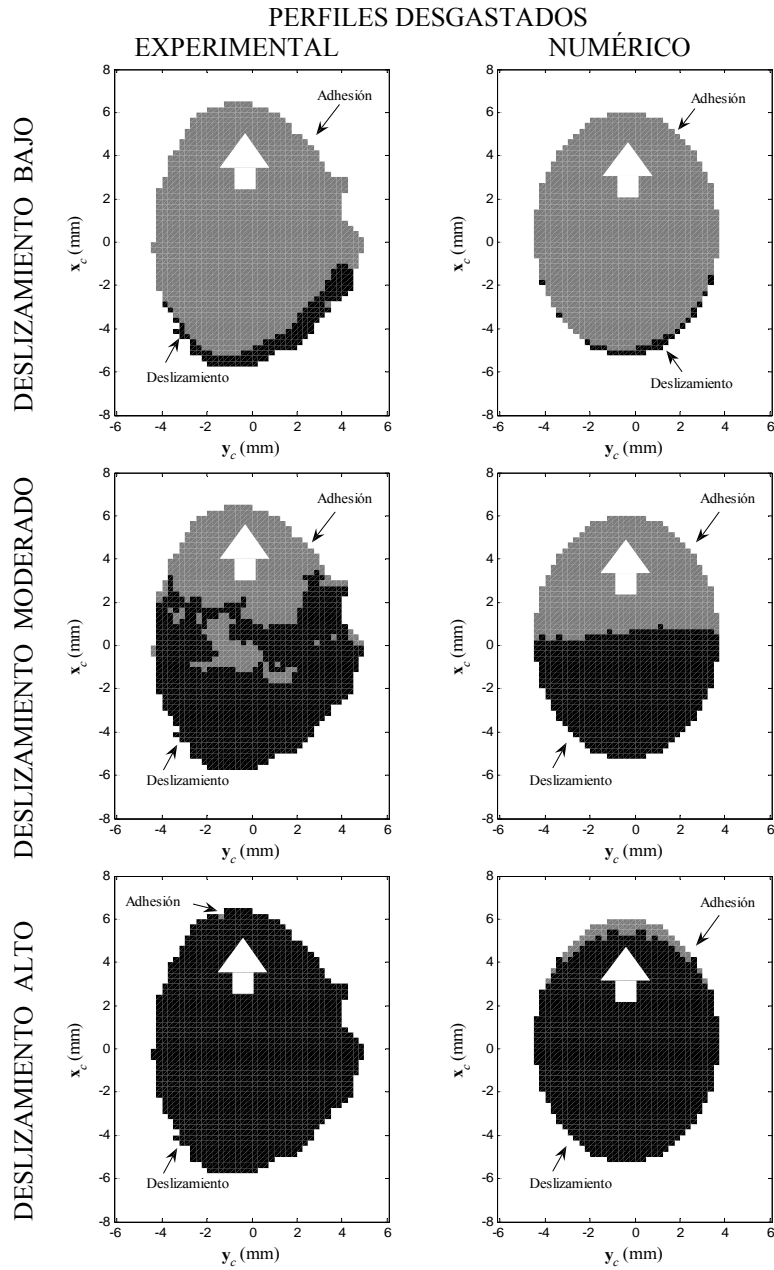
**Distribución de las zonas de adhesión y deslizamiento:** Las Figuras 5.3 y 5.4 muestran la distribución de las zonas de adhesión (en color claro) y deslizamiento (en color oscuro) para las dos áreas de contacto. En todos los casos la zona de adhesión se sitúa en el borde de entrada según el sentido de rodadura (marcado con una flecha blanca), y la zona de deslizamiento, en el borde de salida.

Para las áreas de contacto analizadas numéricamente, el límite entre estas dos zonas lo forma una línea bien definida. Estas zonas presentarían una distribución simétrica según el eje  $x_c$  para un valor de *spin* nulo. En cambio, para las áreas de contacto obtenidas a partir de datos experimentales aparecen zonas de deslizamiento rodeadas de zonas de adhesión y viceversa. Esto se debe a la distribución de presiones normales obtenida por ultrasonidos que no es suave, sino que está formada por una serie de picos y valles. En los elementos del área de contacto donde el valor de presión normal es elevado (picos), la tensión tangencial no llega a saturarse según la ecuación (5.1). Por el contrario, en los elementos donde la presión normal es reducida (valles), aparece deslizamiento ya que la tensión tangencial satura. Este resultado es lógico debido a la fragmentación que aparece en las áreas de contacto obtenidas a partir de medidas experimentales.

**Distribución de las tensiones tangenciales en dirección longitudinal  $p_x$ :** En la Figura 5.5 se muestra la distribución de tensiones tangenciales en dirección longitudinal, para las áreas de contacto estudiadas y bajo los tres escenarios de simulación. Esta distribución se calcula a partir de los valores cinemáticos de los pseudodeslizamientos dados por los tres escenarios de simulación y a partir de las distribuciones de tensiones normales aplicando el algoritmo FASTSIM (ver Cap. 2).



**Figura 5.3.** Zona de adhesión y deslizamiento para el área de contacto de **perfiles nuevos** para los tres escenarios.



**Figura 5.4.** Zonas de adhesión y deslizamiento para área de contacto de **perfiles desgastados** para los tres escenarios.



Los resultados a partir de las distribuciones de presiones normales calculadas según el procedimiento numérico son suaves en ambas zonas. Para los resultados procedentes de las distribuciones de presiones normales obtenidas a partir de datos experimentales, la distribución es suave en la zona de adhesión, pero abrupta en la zona de deslizamiento, donde las tensiones tangenciales siguen la forma dictada por las presiones normales.

En los escenarios de deslizamiento moderado y alto existen diferencias entre las distribuciones de tensiones tangenciales (comparando datos numéricos con datos experimentales), sobretodo en el caso de perfiles nuevos.

**Distribución del deslizamiento adimensional en dirección longitudinal  $\gamma_x$ :** Esta distribución se muestra en la Figura 5.6. El valor del deslizamiento se calcula por diferencias finitas según la fórmula (2.79) (ver Cap. 2):

$$\gamma(x, y) = \frac{L}{\Delta x} \left[ \mathbf{p}_t(x - \Delta x, y) - \mathbf{p}_t^{adh}(x - \Delta x, y) \right]$$

El valor del deslizamiento es nulo en las zonas de adhesión y adopta valores no nulos en la zona de deslizamiento. Por tanto, las diferencias al considerar los datos procedentes del modelo numérico o de las medidas experimentales, se aprecian en los escenarios de deslizamiento moderado y alto. Al igual que en el resto de magnitudes estudiadas, la distribución del deslizamiento (en la zona de deslizamiento) para los datos procedentes de medidas experimentales tiene una forma mucho más abrupta que la distribución calculada a partir de los datos procedentes del modelo numérico. Esta característica aparece sobretodo para los perfiles nuevos en el escenario de deslizamiento alto.

**Distribución de la energía disipada en el área de contacto por unidad de área  $T\gamma/A_{i,j}$ :** Esta distribución se representa en la Figura 5.7. Con los subíndices  $i, j$  se indica que se trata de una magnitud local, calculada para el elemento  $i, j$  del área de contacto. Se calcula según la fórmula (2.136):

$$\frac{T\gamma}{A_{i,j}} = p_{x_{i,j}} \gamma_{x_{i,j}} + p_{y_{i,j}} \gamma_{y_{i,j}}$$

Como se calcula a partir del deslizamiento adimensional, esta magnitud es nula en la zona de adhesión y adopta valores no nulos en la zona de deslizamiento.

Este valor se utiliza como indicador de desgaste. Mediante la correlación obtenida por la *University of Sheffield* (ver Cap. 2, Tabla 2.3 y [57]) a partir del valor de  $T\gamma/A_{i,j}$ , se calcula la **tasa de desgaste**  $W_{Ri,j}$  (masa perdida en  $\mu\text{g}$  por unidad

de área en  $\text{mm}^2$  y por distancia rodada en m) correspondiente para el elemento del área de contacto. Según esta modelo de desgaste, sólo aparece pérdida de material en la zona de deslizamiento. Por comodidad, se reproduce el contenido de la Tabla 2.3 en la Tabla 5.2.

**Tabla 5.2.** (Procedente de la Tabla 2.3) Tasas de desgaste de la USFD. Extraído de [57].

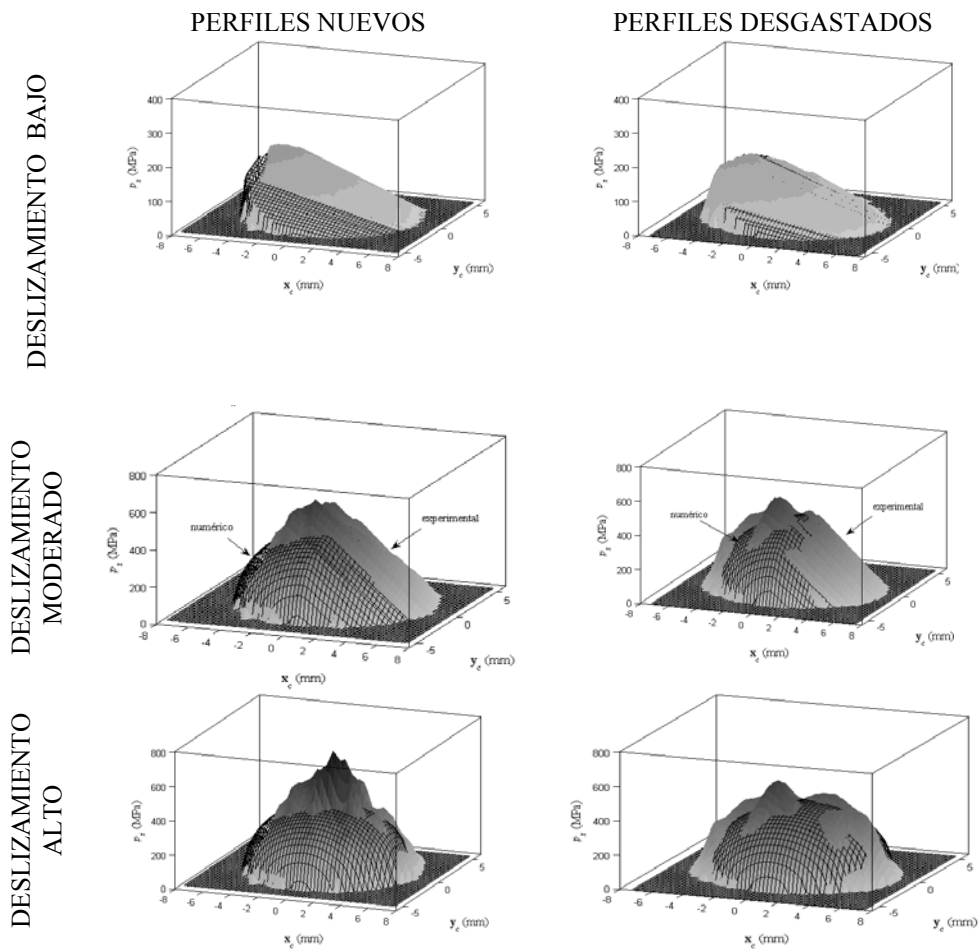
Régimen	$T\gamma/A$ ( $\text{N}/\text{mm}^2$ )	Tasa de desgaste ( $W_R$ ) ( $\mu\text{g}/\text{m rodado}/\text{mm}^2$ )
Suave ( $K_1$ )	$T\gamma/A \leq 10,4$	$5,3 T\gamma/A$
Severo ( $K_2$ )	$10,4 < T\gamma/A \leq 77,2$	55,0
Catastrófico ( $K_3$ )	$77,2 < T\gamma/A$	$55,0 + 61,9 (T\gamma/A - 77,2)$

En cuanto a los regímenes de desgaste en los que se encuentran las áreas de contacto analizadas, en los tres escenarios considerados, excepto algunos picos en el escenario de deslizamiento alto, los valores del índice  $T\gamma/A$  se encuentran dentro del régimen de desgaste *suave* (por debajo del umbral de  $10,4 \text{ N}/\text{mm}^2$ ). Por tanto, la distribución de la tasa de desgaste será proporcional a la disipación energética siguiendo la ley de la Tabla 5.2. De esta forma, los gráficos de la distribución de la **tasa de desgaste** serán proporcionales a la distribución de la disipación energética en el área de contacto. Los picos en la zona de desgaste *severo* representan un porcentaje del área de contacto inferior al 1 %.

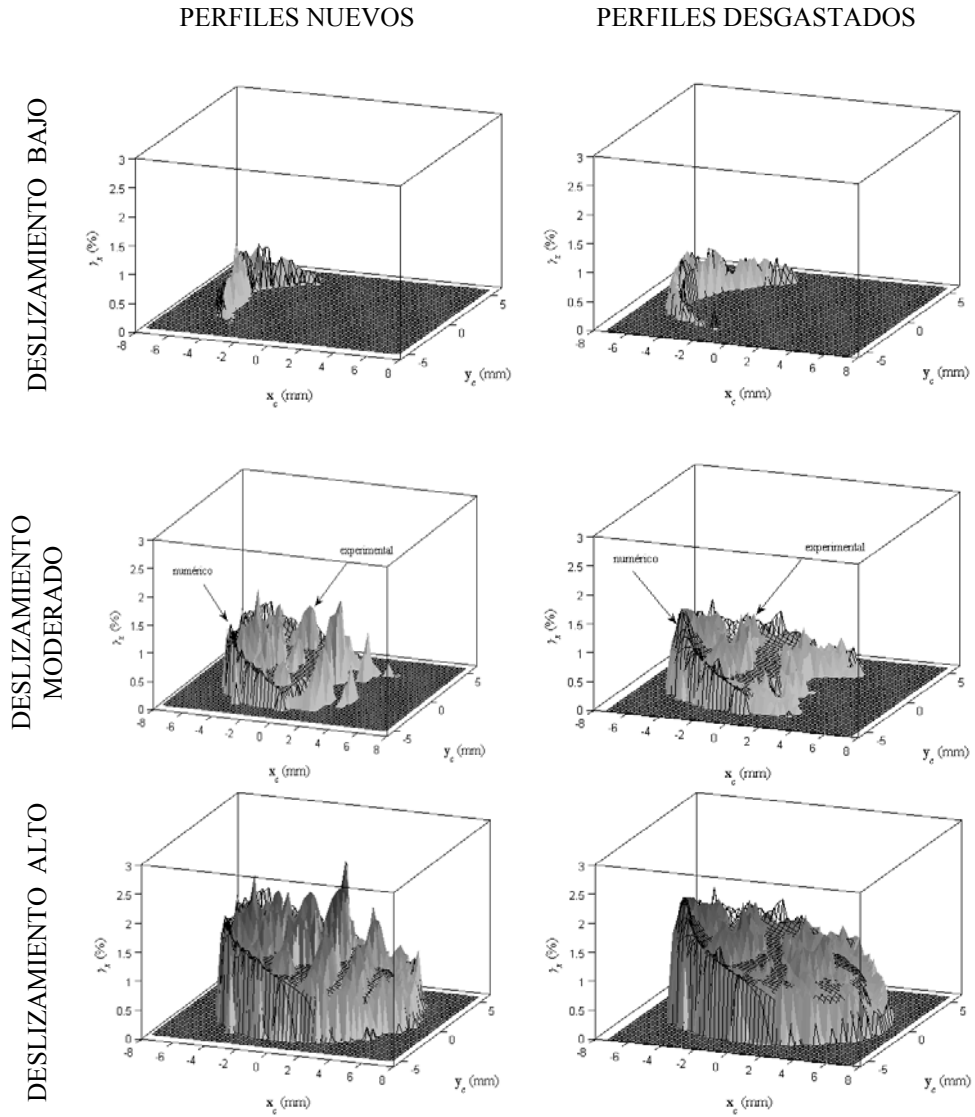
Comparando la distribución obtenida a partir de datos experimentales con la obtenida a partir del modelo numérico, la primera (experimental) tiene una forma mucho más irregular, con valores de pico que superan tres veces el valor dado por la distribución obtenida a partir de datos numéricos. Esta última (numérica) es más suave y representa un valor medio de la distribución obtenida a partir de datos experimentales. Estos resultados son válidos tanto para disipación energética como para desgaste. Por tanto, el desgaste producido por perfiles reales en los que se considera la presencia de la *rugosidad*, será previsiblemente mayor de forma local, que el calculado mediante la estimación proporcionada por los modelos numéricos.

Desde el punto de vista de los tres escenarios considerados. En el escenario de deslizamiento bajo, debido a que la zona de deslizamiento es muy pequeña, apenas existen diferencias entre los resultados presentados. En cambio, para deslizamiento moderado y alto, las distribuciones obtenidas a partir de datos experimentales muestran valores locales de tasa de desgaste mucho mayores en contaste con la distribución obtenida a partir de la distribución de presiones normales del modelo numérico. Los valores y el número de estos picos en las distribuciones de disipación energética (correspondientes a picos de desgaste) son mayores para el caso de perfiles nuevos. Este resultado es debido a la mayor rugosidad que aparece en los perfiles nuevos donde la interfase no es conforme

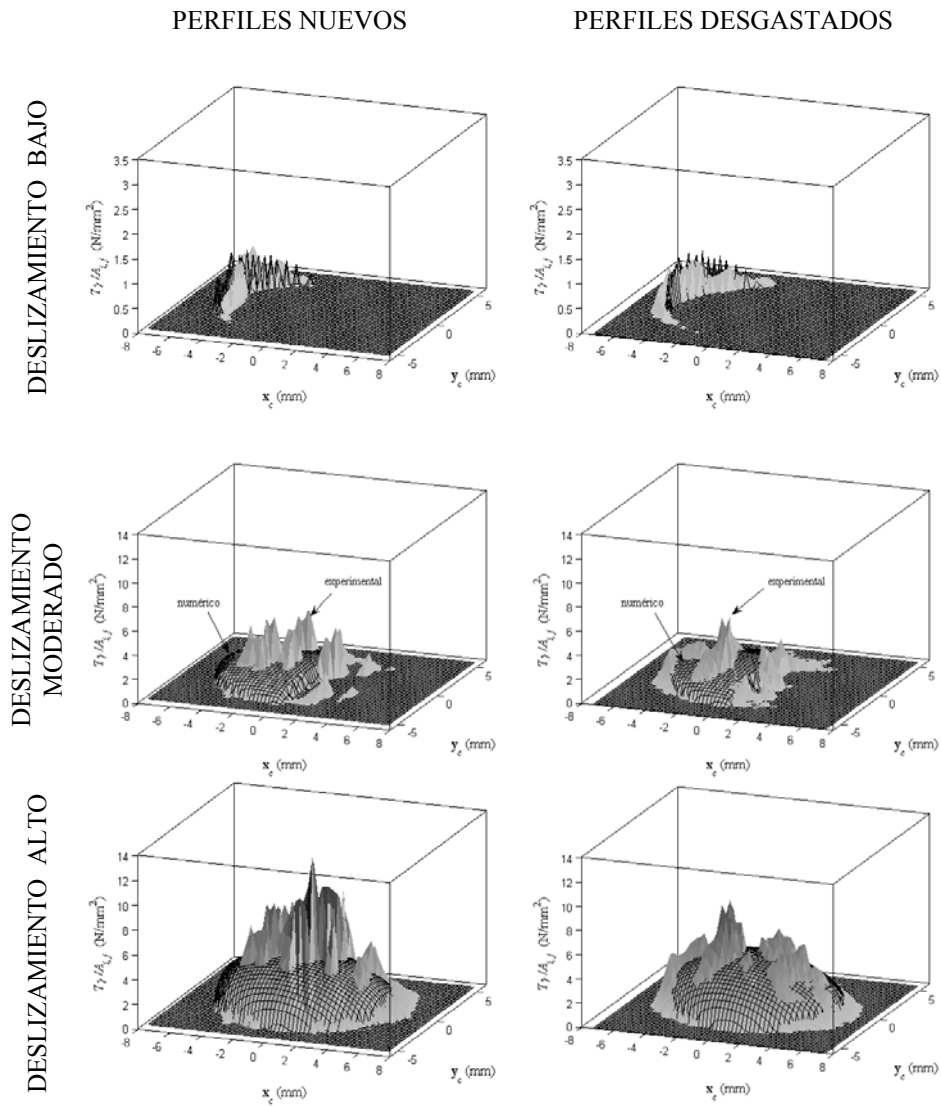
debido a que no se ha producido desgaste de los perfiles originales. La aplicación de la técnica de ultrasonidos en este punto permite conocer los puntos en los que será probable que aparezcan unas altas tasas de desgaste, basándose en los valores de rugosidad inicial. Este aspecto proporciona información valiosa para predecir cuál será la geometría final de los perfiles una vez desgastados.



**Figura 5.5.** Distribución de tensiones tangenciales en dirección longitudinal obtenida a partir del modelo numérico o a partir de los datos experimentales: izq. **perfiles nuevos**, dcha. **desgastados**. Cálculos para los tres escenarios considerados.



**Figura 5.6.** Deslizamiento en el área de contacto en dirección longitudinal obtenida a partir del modelo numérico o a partir de los datos experimentales: izq. **perfiles nuevos**, dcha. **desgastados**. Cálculos para los tres escenarios considerados.



**Figura 5.7.** Distribución del índice  $T\gamma/A_{ij}$  en el área de contacto para **perfiles nuevos** (izquierda) y **perfiles desgastados** (derecha) obtenida a partir del modelo numérico o a partir de los datos experimentales. Cálculos para los tres escenarios considerados.

En general, considerando la serie de resultados presentados que analizan las áreas de contacto de forma local, se puede afirmar que localmente aparecen diferencias en la estimación de las distintas magnitudes, según se parta del modelo numérico propuesto para el análisis del contacto rueda-carril (o en general, de los modelos numéricos usados en el campo de la simulación dinámica) o se utilice una técnica que tenga en cuenta la *rugosidad* de las superficies (en este caso, la técnica de ultrasonidos). Sin embargo el uso generalizado de esta técnica requeriría escanear por completo las superficies de la rueda y del carril, lo que no sería aplicable en para la aplicación de la simulación dinámica.

### **b. Análisis global de las áreas de contacto**

En esta segunda serie de resultados se analiza la evolución de las magnitudes globales asociadas a las distribuciones calculadas en la sección anterior observando como evolucionan con la variación del pseudodeslizamiento longitudinal. Estas magnitudes globales se calculan integrando las distribuciones obtenidas sobre las áreas de contacto. Concretamente, las magnitudes analizadas en esta sección y su obtención se detallan a continuación:

- El porcentaje de la zona de deslizamiento sobre el área total de contacto (%). Se calcula integrando el área de deslizamiento.
- La fuerza de tracción  $F_x$  (kN). Se calcula integrando la distribución de tensiones tangenciales en dirección longitudinal  $p_x$ .
- La disipación energética en el área de contacto por unidad de área a través del índice  $T\gamma/A$  (N/mm<sup>2</sup>). Se calcula como el promedio del valor de  $T\gamma/A_{i,j}$  en la zona de deslizamiento (donde es no nula). Este valor está relacionado con el desgaste.

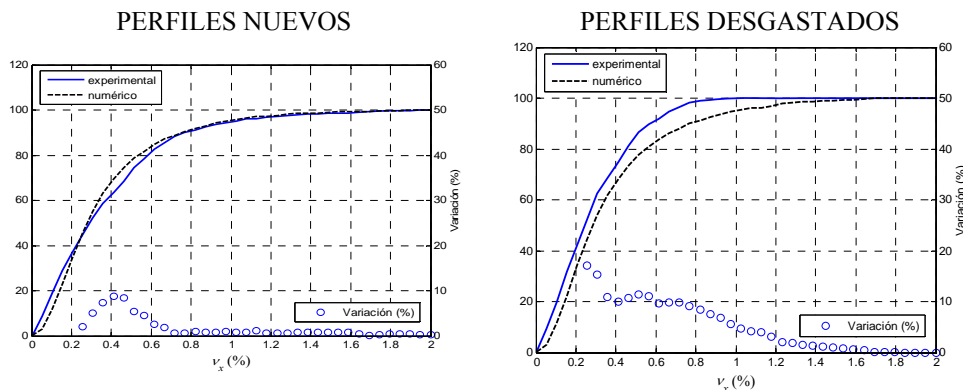
El rango del análisis del *pseudodeslizamiento longitudinal* ( $v_x$ ) varía desde un mínimo del 0 % (caso límite en el que toda el área de contacto está en adhesión) hasta un máximo de 2 % (donde toda el área de contacto está en deslizamiento) tomando un total de 40 cálculos. Los valores de *pseudodeslizamiento lateral* y *spin*, por otra lado, se mantienen constantes ( $v_y = 0,0$  %,  $\varphi = 5,0$  (1/m) %). Este rango incluye los tres escenarios considerados en la sección anterior.

Los valores obtenidos a partir del modelo de contacto numérico se comparan con los valores obtenidos a partir de las medidas experimentales. En las mismas gráficas también se presenta la variación porcentual entre estas dos

estimaciones en un eje secundario en los gráficos, tomando como referencia los valores obtenidos a partir del modelo de contacto numérico.

Cabe destacar que estas magnitudes, para valores bajos de pseudodeslizamiento, tendrán posiblemente asociado un error de discretización. Esto es debido a que el tamaño de la zona de deslizamiento será pequeño para valores de deslizamiento bajo. En este caso el tamaño del elemento (impuesto por la técnica experimental de ultrasonidos) puede ser grande en comparación al área de deslizamiento.

La variación del **porcentaje de la zona de deslizamiento respecto al área de contacto** en función del pseudodeslizamiento longitudinal se muestra en la Figura 5.8. Este valor aumenta desde 0 % (toda el área está en adhesión) hasta el 100 % (toda el área está en deslizamiento).

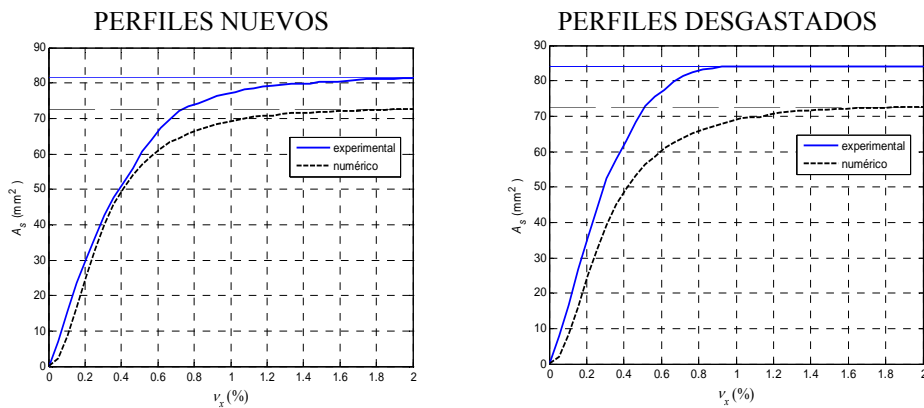


**Figura 5.8.** Porcentaje de la zona de deslizamiento en la zona de contacto para **perfiles nuevos** (izquierda) y **perfiles desgastados** (derecha) en función del pseudodeslizamiento longitudinal.

El porcentaje de la zona de deslizamiento respecto al área de contacto sigue la misma tendencia para perfiles nuevos y desgastados, considerando los dos tipos de datos de origen. Si consideramos que el área de contacto se encuentra *saturada* cuando el porcentaje de la zona de deslizamiento sobre el área total es superior al 98 %, para perfiles nuevos la saturación se alcanza para un pseudodeslizamiento de 1,3 % (según los dos tipos de datos de origen), mientras que para perfiles desgastados, satura con un valor de  $v_x = 0,7$  % para los datos experimentales y  $v_x = 1,2$  % para datos numéricos. Esta discrepancia para el área de contacto que aparece entre perfiles desgastados producirá una variación mayor de las magnitudes globales estudiadas.

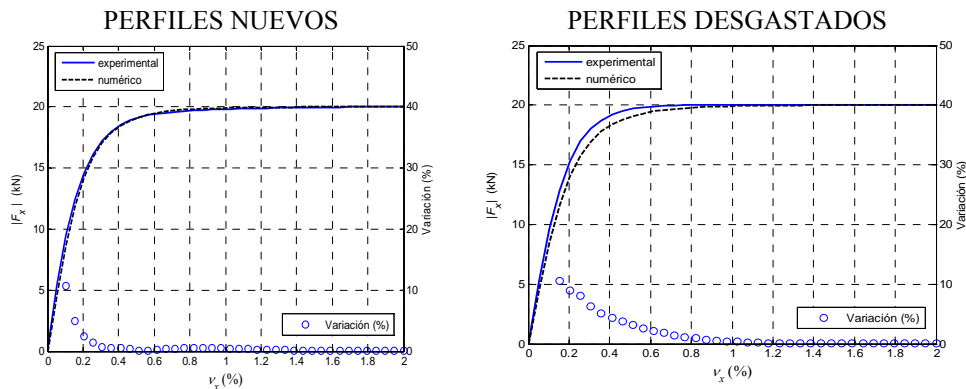
Con el fin de justificar resultados posteriores, la Figura 5.9 muestra el valor de la zona de deslizamiento en función del pseudodeslizamiento longitudinal. En él

se observa como el valor de la zona de deslizamiento aumenta hasta cubrir toda el área de contacto. Para los casos estudiados, el área de contacto para los datos experimentales es mayor que el área de contacto para los datos procedentes del modelo numérico.



**Figura 5.9.** Valor de la superficie de la zona de deslizamiento para **perfiles nuevos** (izquierda) y **perfiles desgastados** (derecha) en función del pseudodeslizamiento longitudinal.

En segundo lugar, se muestra la evolución de la **fuerza de tracción** en función del pseudodeslizamiento longitudinal (Figura 5.10). Este valor varía desde 0 kN hasta el valor de saturación de 20 kN (correspondiente a un coeficiente de rozamiento  $\mu = 0,4$  y una fuerza normal de 50 kN).



**Figura 5.10.** Fuerza de tracción para **perfiles nuevos** (izquierda) y **perfiles desgastados** (derecha) en función del pseudodeslizamiento longitudinal.

La variación entre la estimación de  $F_x$  a partir de datos experimentales y la estimación a partir del modelo numérico es muy pequeña en ambos casos. Para valores de pseudodeslizamiento pequeños la variación entre los datos experimentales y numéricos es inferior a un 10 %, mientras que para valores de



pseudodeslizamiento superiores a 0,7 %, el error es del orden del 1 %. Como se ha mencionado anteriormente, posiblemente el error para valores bajos de pseudodeslizamiento sea debido al error de discretización.

Esta fuerza de tracción está relacionada con el campo de la simulación dinámica. Por tanto, el empleo de la distribución de presiones normales obtenida bajo la hipótesis de superficies *suaves* (según los procedimientos numéricos empleados en el campo de la simulación dinámica) será adecuado para estimar las fuerzas tangenciales al contacto que aparecen entre superficies de rueda y carril *con rugosidad* (no *suaves*) (según los datos obtenidos con el uso de la técnica de ultrasonidos).

Finalmente, en la Figura 5.11 se representa la evolución de la **energía disipada por unidad de área** a través del índice  $T\gamma/A$ , promediado sobre la zona de deslizamiento. Este valor está relacionado con la tasa de desgaste según la ley USFD (ver Cap. 2, [57]).

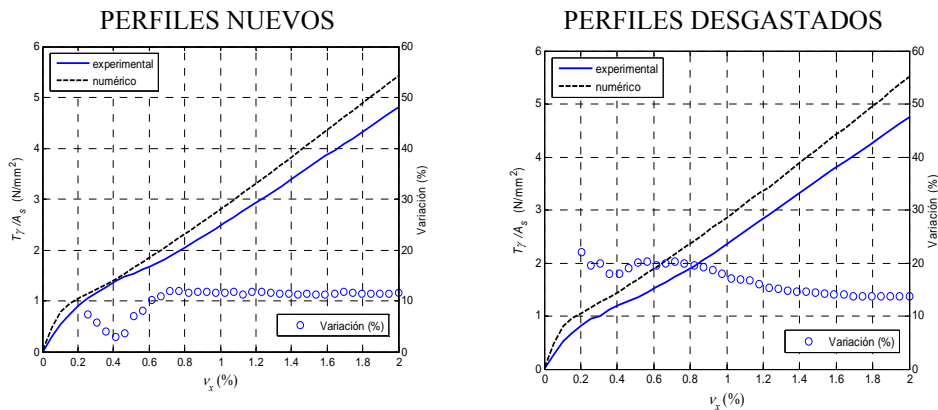
Siendo  $A_s$  es el valor de la superficie de la zona de deslizamiento, este valor se calcula como

$$\frac{T\gamma}{A_s} = \frac{1}{A_s} \left( \sum_{A_s} \frac{T\gamma}{A_{i,j}} \right) \Delta x \Delta y \quad (5.2)$$

donde el subíndice  $s$  indica que el índice  $T\gamma/A$  está promediado en la zona de deslizamiento.

Se propone esta definición del índice de desgaste para obtener un valor del índice de desgaste global  $T\gamma/A$  que represente de forma más adecuada el estado de disipación energética en el área de contacto, ya que esta disipación energética se realiza en la zona de deslizamiento.

En la Figura 5.11 se aprecia como existe una variación entre un 10 y un 20 % entre la estimación de  $T\gamma/A_s$  obtenida a partir de los datos experimentales con la estimación obtenida a partir de datos numéricos; esta variación es mayor para el caso de perfiles desgastados. Este resultado sugiere que el uso de modelos numéricos (que consideran las superficies *suaves*) para la estimación del desgaste en áreas de contacto entre superficies *reales* (con *rugosidad*, no *suaves*) puede tener cierto grado de incertidumbre.



**Figura 5.11.** Energía disipada por unidad de área en las áreas de contacto para **perfiles nuevos** (izquierda) y **perfiles desgastados** (derecha) en función del pseudodeslizamiento longitudinal.

Considerando ahora ambas áreas de contacto (perfiles nuevos y desgastados), los valores del índice  $T\gamma/A$  promediados sobre la zona de deslizamiento son mayores para los datos numéricos. Esto es debido a que el valor de la superficie de la zona de deslizamiento es menor para el caso de datos numéricos con respecto a los datos experimentales (Figura 5.9), lo que produce un valor promedio en la zona de deslizamiento más elevado.

Según la ley de desgaste USFD para superficies secas (ver Cap. 2, [57]), puesto que los valores obtenidos para el índice de desgaste son mucho menores que el umbral de  $10,4 \text{ N/mm}^2$  (ver Tabla 2.3), las áreas de contacto se encuentran en el régimen de desgaste *suave*. Por tanto, la tasa de desgaste será proporcional al índice  $T\gamma/A$  representado en la Figura 5.11. A esta misma conclusión se llega con el análisis local de las áreas de contacto (ver Figura 5.7).

Según los resultados presentados en esta sección, se puede concluir que el análisis del problema tangencial y el desgaste de las áreas de contacto obtenidas numéricamente ofrece una buena estimación de las fuerzas tangenciales en comparación con el resultado obtenido para las áreas de contacto obtenidas experimentalmente, donde se tiene en cuenta el efecto de la *rugosidad*. En cambio, existe mayor incertidumbre en la estimación del desgaste empleando modelos numéricos que asumen que las superficies son *suaves*.

### c. Cálculo del desgaste sobre el perfil de la rueda

Finalmente, en esta tercera serie de resultados se calcula el desgaste sobre el perfil de la rueda. Este valor se obtiene como la profundidad de desgaste en cada elemento por distancia rodada.

Asumiendo que la rueda está rodando en la misma posición respecto al carril, se usa el factor  $\Delta x / (2 \pi R)$  para promediar el daño de cada elemento del área de contacto en la circunferencia completa de radio  $R$ , siendo  $\Delta x$  la longitud del elemento [10].

El desgaste causado en cada elemento por unidad de distancia rodada se calcula como

$$D_i = W_{R_i} \frac{1}{\rho} \frac{\Delta x}{2 \pi R} \quad (5.3)$$

donde  $\rho$  es la densidad del material.

Para obtener el desgaste sobre el perfil de la rueda, se acumulan los valores de desgaste de los elementos pertenecientes a una misma tira longitudinal o *strip* del área de contacto. Puesto que el área de contacto se encuentra en la banda de rodadura y la conicidad es baja, se toma el mismo valor de radio  $R$  para todos los elementos del área de contacto.

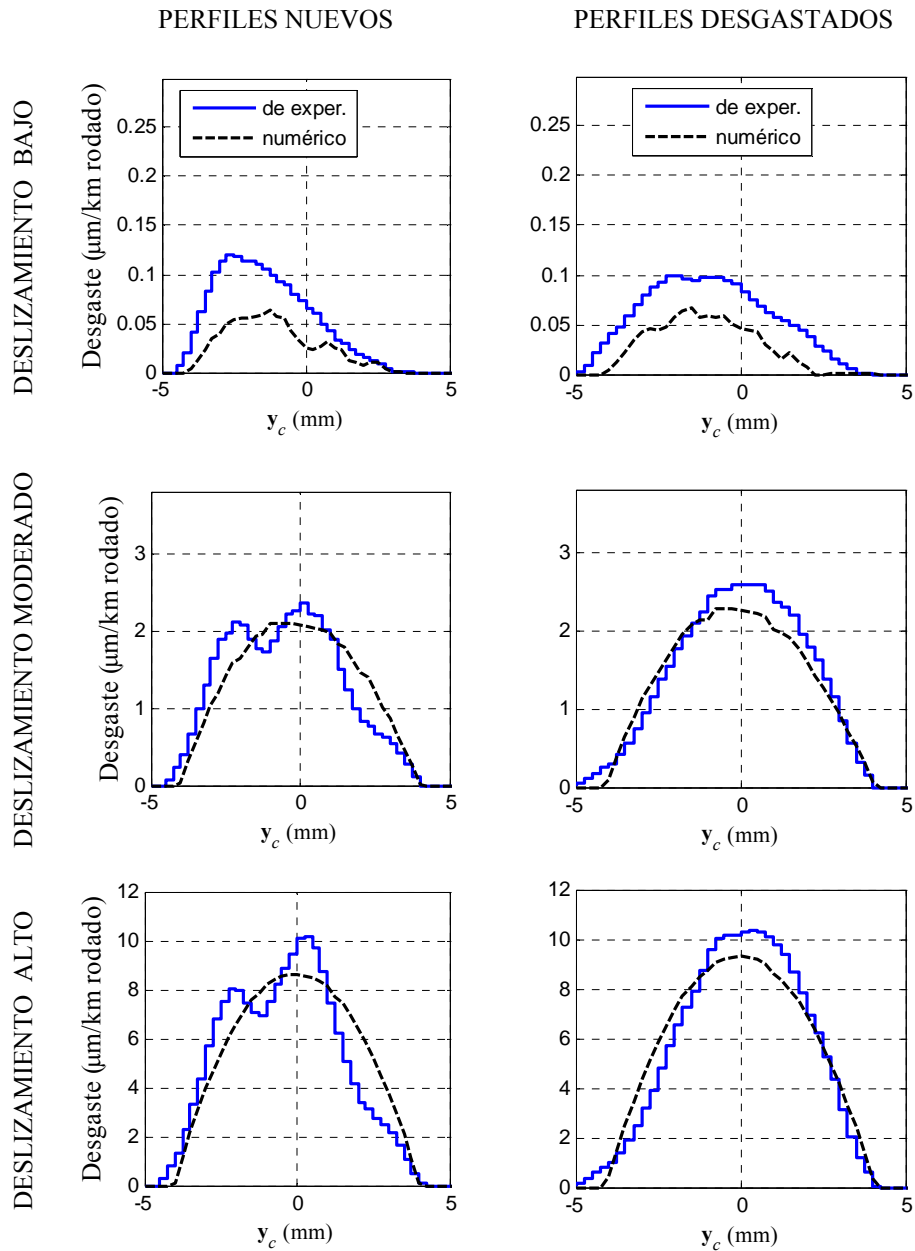
En esta serie de resultados se utilizan los mismos escenarios de la Tabla 5.1. Por tanto, se realizan tres estimaciones de desgaste sobre el perfil de la rueda para *deslizamiento bajo, moderado y alto*.

La Figura 5.12 muestra el desgaste estimado para las áreas de contacto entre perfiles nuevos y perfiles desgastados para cada uno de los escenarios considerados.

Considerando las dos áreas de contacto y los tres escenarios (sobre todo para el escenario de deslizamiento bajo), la profundidad de desgaste estimada a partir de datos experimentales es ligeramente mayor que la estimada para datos procedentes del procedimiento numérico de contacto (en torno a un 10 %). Este resultado puede ser debido al efecto de la rugosidad en la superficie que crea patrones de desgaste más agresivos. Por tanto, al utilizar un modelo numérico para analizar el contacto, se deberá considerar que existe un cierto grado de incertidumbre en la estimación del desgaste debido al asumir que las superficies son *suaves*.

En cuanto a la forma, la profundidad de desgaste calculada a partir de los datos del modelo numérico tiene una forma más suave y simétrica. El escenario de deslizamiento bajo es una excepción debido a que el efecto relativo del *spin* es más importante debido al valor bajo del pseudodeslizamiento longitudinal. Para la estimación realizada para los datos procedentes de medidas experimentales, esta forma es más irregular, y se aprecian picos y valles como consecuencia del efecto de la rugosidad. No obstante, las herramientas de estimación del desgaste realizan

un alisado de esta profundidad de desgaste antes de transferirla al perfil de la rueda. Esto es debido a que en la realidad esta forma tiende a alisarse y repartirse transversalmente sobre el perfil [10, 37].



**Figura 5.12.** Desgaste en los perfiles, calculado para los dos contactos estudiados, y bajo los tres escenarios considerados para: izq. **perfiles nuevos** y dcha. **perfiles desgastados**.

Finalmente, es interesante comentar la no linealidad de la profundidad del desgaste comparando los tres escenarios (nótese la distinta escala del eje de ordenadas en la Figura 5.12). Por un lado cuando  $v_x$  en *deslizamiento moderado* es 6 veces mayor que en *deslizamiento bajo*, el desgaste sobre el perfil de la rueda es unas 30 veces mayor. Por otro lado, cuando  $v_x$  es tres veces mayor en *deslizamiento alto* con respecto al deslizamiento moderado, el desgaste sobre el perfil de la rueda es sólo 5 veces mayor. Este efecto es debido a la saturación del área de contacto que pasa de estar prácticamente en adhesión a estar en deslizamiento.

Como conclusiones de este apartado cabe señalar que comparando las distribuciones de tensiones tangenciales y estimación del desgaste obtenidas a partir de datos experimentales procedentes de la técnica de ultrasonidos con las correspondientes distribuciones obtenidas con la aplicación del procedimiento numérico de contacto, aunque a nivel local existen diferencias importantes, a nivel global estas diferencias son menores. Estas diferencias se deben al efecto de la rugosidad en las superficies en contacto, y son menos importantes en el caso de perfiles desgastados, debido a que tienen niveles de rugosidad más bajos.

A nivel global el error en el cálculo de las fuerzas tangenciales al contacto se puede estimar entre un 10 % (para pseudodeslizamiento bajo) y un 1 % (para pseudodeslizamiento alto), mientras que el error en la estimación del desgaste puede estimarse en torno a un 10-20 %.

### **5.3. Inclusión de coeficiente de rozamiento variable en FASTSIM**

El objetivo de este segundo bloque del capítulo es la modelización del problema tangencial mediante un coeficiente de rozamiento variable y su posterior parametrización para la reproducción de curvas de tracción medidas experimentalmente.

En primer lugar se presentan las razones para la consideración de un coeficiente de rozamiento variable en el algoritmo de resolución del problema tangencial de contacto.

En segundo lugar se describen las modificaciones introducidas en el algoritmo FASTSIM para considerar un coeficiente de rozamiento variable. Posteriormente, se presenta el procedimiento de identificación de los parámetros de

fricción a partir de curvas de tracción medidas experimentalmente en una máquina de doble disco. Usando este procedimiento, se identifican los parámetros requeridos por FASTSIM con coeficiente de rozamiento variable a partir de curvas de tracción medidas para superficies secas y en presencia de diversos contaminantes.

En tercer lugar se realiza un análisis del desgaste para puntos medidos en la máquina de doble disco. A su vez, se comenta el efecto sobre el desgaste de la presencia de un contaminante en la interfase de contacto.

Finalmente se efectúa la aplicación al contacto rueda-carril. Para ello se utilizan los parámetros identificados en las curvas experimentales en la máquina de doble disco. Tras presentar la modelización para la geometría de contacto rueda-carril, se muestran dos ejemplos de aplicación.

### **5.3.1. Necesidad de la inclusión de un coeficiente de rozamiento variable**

Hoy en día el uso de las herramientas de simulación en lugar del ensayo experimental representa una tendencia creciente para demostrar la seguridad en la explotación y la aceptabilidad de nuevos diseños de vehículos ferroviarios [28]. Para ello es necesario disponer de modelos de contacto que sean capaces de describir fielmente el comportamiento del contacto rueda-carril.

Entre las teorías desarrolladas para analizar el contacto rueda-carril, Kalker ha realizado la mayor aportación al modelado del problema tangencial [34]. Kalker desarrolló la teoría simplificada para el contacto con rodadura FASTSIM [44] donde se procesa el área de contacto para obtener la distribución de tensiones tangenciales dentro de ésta. Este algoritmo se escribió inicialmente para coeficiente de rozamiento constante. Sin embargo, este caso nunca es cierto. El coeficiente de rozamiento es la consecuencia de las condiciones de contacto y no debe utilizarse como valor de entrada al algoritmo. Todos los datos experimentales indican que existe una variación del coeficiente de rozamiento como resultado en cambios en las condiciones ambientales. Entre los ejemplos de trabajos experimentales cabría citar los resultados de Ohyama [70] quien usa una máquina de contacto con rodadura de gran tamaño y alta velocidad para estudiar las discrepancias entre la parte teórica y la parte experimental. Magel y Liu [61] con la ayuda de un tribómetro de contacto con rodadura también estudian la relación entre curvas experimentales medidas en vía con la teoría. Esta situación es la que idealmente se necesita introducir en las simulaciones.

Además, algunos modelos numéricos para resolver el problema de contacto se han adaptado para conseguir una mejor concordancia con medidas experimentales. Ertz y Bucher [26] introdujeron algunas modificaciones al algoritmo de Shen, Hedrick y Elkins [99]. Knothe y Theiler [53] y Bucher *et al.* [11] realizaron algunos cálculos de curvas de tracción considerando la rugosidad de las superficies para analizar su efecto sobre la forma de las curvas. Polach [81-82] consideró algunos coeficientes en su modelo de contacto para mejorar la conformidad con medidas experimentales.

El cálculo del problema tangencial con coeficiente de rozamiento variable ha sido tratado por Nielsen y Theiler [69] quienes desarrollaron un modelo basado en la teoría de elasticidad *exacta*. Posteriormente Giménez *et al.* [34] y Piotrowski [78] desarrollaron una extensión de FASTSIM para incluir el efecto del coeficiente de rozamiento variable.

Finalmente cabe señalar que algunas aplicaciones como el estudio del ruido de *squeal* o el desgaste ondulatorio requieren un modelo adecuado que reproduzca la forma de la curva de tracción con la pendiente negativa en condiciones de saturación [22, 68, 110]. Por tanto, los modelos actuales que emplean un coeficiente de rozamiento constante no son válidos para estas aplicaciones y nuevos modelos como los mencionados anteriormente son necesarios para considerar el efecto del coeficiente de rozamiento variable.

### 5.3.2. Identificación de parámetros a partir de curvas experimentales

El objetivo de esta sección es por una parte describir las modificaciones introducidas en FASTSIM para considerar un coeficiente de rozamiento variable y, por otra parte, obtener los parámetros de fricción que permiten reproducir la forma de las curvas de tracción medidas experimentalmente.

En esta sección se incluyen los siguientes puntos:

- a. *Modificación de FASTSIM para considerar un coeficiente de rozamiento variable.* Para ello se describen las modificaciones introducidas en FASTSIM con el fin de considerar un coeficiente de rozamiento variable y el algoritmo de resolución del problema de contacto tangencial bajo esta hipótesis.
- b. *Identificación de parámetros a partir de curvas experimentales.* En este punto se describe la aportación realizada para identificar los parámetros de fricción que describen el comportamiento local de una partícula en el área

de contacto, a partir de curvas de tracción medidas experimentalmente para el área de contacto.

- c. *Modelado de la geometría del contacto de doble disco*, donde se presentan las características del contacto normal y tangencial entre dos discos de ejes paralelos con el fin de obtener parámetros necesarios para la resolución del problema tangencial mediante FASTSIM.
- d. *Obtención de los parámetros de fricción a partir de curvas de tracción experimentales*. En este punto se utilizan curvas de tracción medidas experimentalmente para la identificación de los parámetros de fricción necesarios para modelizar el comportamiento tangencial.

#### **a. Modificación de FASTSIM para considerar un coeficiente de rozamiento variable**

En este punto se introducen modificaciones para en el algoritmo FASTSIM para considerar un coeficiente de rozamiento variable. El método propuesto está basado en el algoritmo FASTSIM desarrollado por Kalker [44] y en las modificaciones introducidas por Giménez *et al.* [34] y por Piotrowski [78].

El algoritmo FASTSIM original desarrollado por Kalker emplea un coeficiente de rozamiento constante para el cálculo del problema tangencial. La inclusión de un coeficiente de rozamiento variable implica el empleo de una *función de fricción* que expresa la relación local entre el valor del deslizamiento y el coeficiente de rozamiento de una partícula perteneciente al área de contacto.

Adicionalmente a la introducción del coeficiente de rozamiento variable, se considera un coeficiente de reducción de la pendiente inicial, para expresar las desviaciones en la estimación de la rigidez tangencial del contacto con respecto al valor obtenido para superficies *escrupulosamente limpias* [61]. Esta opción aparece contemplada por Kalker [44-46] mediante un factor de escalado de los coeficientes de Kalker para expresar desviaciones con respecto a los valores teóricos de estos coeficientes. Es necesario incluir este factor de reducción de la pendiente inicial como variable dentro de la identificación de parámetros con el fin de reproducir la forma de las curvas medidas experimentalmente.

El objetivo de estas modificaciones es capaz de reproducir las curvas de tracción medidas experimentalmente [7, 30, 59] bajo distintas condiciones de las superficies en el contacto.

Según la modelización presentada en esta Tesis, el coeficiente de rozamiento será función de:



1. El valor del **deslizamiento adimensional** local. Esta relación se expresará mediante la definición de una función de fricción  $\mu(\gamma)$ .
2. La **contaminación en la interfase del contacto**: para ello se considerarán distintos modelos para las funciones de fricción  $\mu(\gamma)$  que permitan reproducir el comportamiento medido con la presencia de distintos contaminantes, como por ejemplo, agua, aceite, hojas, etc.
3. La **presión en el contacto**: se tendrá en cuenta el efecto de la presión normal en los parámetros que definen las funciones de fricción.

### ***a.1. Ecuaciones para la inclusión de coeficiente de rozamiento variable en FASTSIM***

En este punto se presentan las ecuaciones utilizadas para resolver el problema de contacto tangencial mediante FASTSIM, considerando un coeficiente de rozamiento variable.

En primer lugar se considerará la dependencia del coeficiente de rozamiento con el deslizamiento relativo entre un punto perteneciente a la superficie de la rueda y un punto perteneciente a la superficie del carril. A tal fin se define una función que depende del deslizamiento adimensional  $\gamma$ :

$$\mu = \mu(\gamma) \quad (5.4)$$

La función  $\mu(\gamma)$  se conoce como *función de fricción*. Para poder evaluar esta función es necesario calcular el módulo del deslizamiento adimensional  $\gamma = |\gamma|$ .

Para la aplicación del algoritmo FASTSIM se parte de la ecuación cinemática para el caso estacionario en la que se considera la relación lineal entre tensiones y desplazamientos (ecuación (2.65) del Cap. 2):

$$\gamma(x, y) = \mathbf{w}(x, y) - L \frac{\partial}{\partial x} \mathbf{p}_t(x, y) \quad (5.5)$$

En la resolución del problema tangencial mediante FASTSIM, el área de contacto queda dividida en zonas de adhesión y zonas de deslizamiento (en general pueden aparecer más de una zona de adhesión/deslizamiento como sucede en los resultados del apartado 5.2).

Por una parte, en las zonas de **adhesión** el deslizamiento es nulo, por lo que las ecuaciones (5.4) y (5.5), respectivamente, quedan:

$$\mu_o = \mu(0) \quad (5.6)$$

$$\mathbf{0} = \mathbf{w}(x, y) - L \frac{\partial}{\partial x} \mathbf{p}_t(x, y) \quad (5.7)$$

$$\text{donde se cumple la desigualdad: } |\mathbf{p}_t(x, y)| \leq \mu(\gamma) p_z(x, y) \quad (5.8)$$

Para resolver el problema tangencial en estas zonas, bastará con integrar la ecuación (5.7) compuesta por dos ecuaciones escalares a lo largo del área de contacto. De esta forma se obtiene el valor del campo de tensiones tangenciales según la dirección longitudinal ( $p_x$ ) y según la dirección transversal ( $p_y$ ).

Por otra parte, en las zonas de **deslizamiento**, se cumple la saturación de las tensiones tangenciales, expresado mediante la relación:

$$|\mathbf{p}_t(x, y)| = \mu(\gamma) p_z(x, y) \quad (5.9)$$

En este caso la solución del problema de contacto tangencial requiere resolver un sistema no lineal de cuatro ecuaciones (ecuación (5.4), (5.9) y las dos ecuaciones escalares (5.5)), con cuatro incógnitas (deslizamiento adimensional  $\gamma$ , coeficiente de rozamiento  $\mu$ , y tensiones tangenciales al contacto  $p_x, p_y$ ). Para obtener el valor del coeficiente de rozamiento  $\mu$  mediante la función de fricción (5.4) y comprobar la hipótesis de deslizamiento (5.9) es necesario hallar el valor del deslizamiento  $\gamma$ .

Para calcular el deslizamiento a partir de la ecuación (5.5), existen dos posibilidades:

1. Calcular la derivada de forma numérica, u
2. Obtener una expresión analítica de la derivada y evaluar esta función.

La *primera alternativa* es análoga a la descrita en el Cap. 2, donde se obtiene el deslizamiento a partir del incremento de tensiones tangenciales calculadas con respecto a las tensiones tangenciales en condiciones de adhesión, utilizando la ecuación (2.79). Esta alternativa ofrece la ventaja que no se necesita conocer la función analítica que describe la distribución de tensiones tangenciales.

La *segunda alternativa* utiliza la expresión analítica de la derivada de las tensiones tangenciales, de tal forma que para calcular los deslizamientos se evalúa una fórmula.

Esta segunda alternativa tiene un coste computacional menor. Además, se ha comprobado que el cálculo de la derivada analítica proporciona resultados más suaves que el cálculo por diferencias finitas, debido a que no depende de la discretización empleada.

Sin embargo, este procedimiento no se puede aplicar en el caso de que no se disponga de la función analítica que describe la distribución de tensiones normales, como por ejemplo en el caso de que esta distribución se haya obtenido a partir de datos experimentales (apartado 5.2). Por tanto, siempre que se disponga de la expresión analítica de  $\mathbf{p}_t(x,y)$  se seguirá esta opción.

Para la obtención del deslizamiento según la segunda alternativa se utilizará la fórmula deducida por Giménez *et al.* en [34]. Combinando las ecuaciones (5.5), (5.4) y (5.9) y asumiendo ciertas hipótesis (ver Cap. 2) se llega a la expresión (2.116):

$$\gamma(x,y) = |\gamma(x,y)| = -\mathbf{w}(x,y) \cdot \begin{Bmatrix} \cos(\alpha_1) \\ \sin(\alpha_1) \end{Bmatrix} + L \left( \mu(\gamma) \frac{\partial p_z(x,y)}{\partial x} \right) \quad (5.10)$$

donde  $\alpha_1$  es el ángulo entre el vector de tensión tangencial y la dirección  $\mathbf{x}$  calculado según (2.115).

En la fórmula (5.10) se sustituyen las expresiones de  $\mu(\gamma)$  y de la derivada de  $p_z(x,y)$  según los modelos utilizados en la función de fricción y en la distribución de presiones normales, respectivamente.

Por tanto, la resolución del problema tangencial en la zona de deslizamiento pasa por resolver la fórmula (5.10) y posteriormente sustituir el valor de  $\gamma$  obtenido en la ecuación (5.4) para obtener el coeficiente de rozamiento  $\mu$ .

### ***a.2. Algoritmo de resolución***

Una vez presentadas las ecuaciones utilizadas, se expone el procedimiento seguido en esta Tesis para resolver el problema tangencial mediante FASTSIM considerando un valor de coeficiente de rozamiento variable.

Según el algoritmo FASTSIM [44] para resolver el problema tangencial, se integra la ecuación (5.5) en el área de contacto. Según este algoritmo el área de contacto se divide en tiras longitudinales o *strips* y cada *strip* en elementos. Se toma igual número de *strips* en el área de contacto que número de elementos por *strip*. La integración se hace elemento a elemento siguiendo una *strip*, desde el borde de entrada al borde de salida (según el sentido contrario del eje  $\mathbf{x}_c$ ). Como condición de contorno se impone que en el borde de entrada la tensión tangencial es conocida (se toma  $\mathbf{p}_t = \mathbf{0}$ ) (ver Cap. 2, Figura 2.24).

Como hipótesis inicial, se supone que existe adhesión ( $\gamma = \mathbf{0}$ ), por lo que la ecuación (5.5) para obtener las tensiones tangenciales en el punto  $(x-\Delta x, y)$  a partir

del punto  $(x,y)$  se puede escribir como (ver deducción de la ecuación (2.72) en Cap. 2):

$$\mathbf{p}_t^{adh}(x - \Delta x, y) = \mathbf{p}_t(x, y) - \frac{1}{L} \mathbf{w}(x, y) \Delta x \quad (5.11)$$

donde el superíndice *adh* indica que se calcula bajo hipótesis de adhesión. Esta ecuación permite calcular el valor de la tensión tangencial en un elemento, a partir de la tensión tangencial en el elemento anterior  $\mathbf{p}_t(x,y)$  y el valor del deslizamiento rígido  $\mathbf{w}(x,y)$ , en condiciones de adhesión.

En este punto se comprueba la hipótesis de adhesión (5.8). Con el fin de conseguir una solución suave en el campo de tensiones tangenciales y evitar que aparezca una discontinuidad en el paso de la zona de adhesión a la zona de deslizamiento se adopta la solución ofrecida por Giménez *et al.* ([34], ver Cap. 2). Ésta consiste en asumir un deslizamiento ficticio en la zona de adhesión  $\gamma^*(x-\Delta x, y)$  calculado según (5.10) y con esta valor obtener el coeficiente de rozamiento correspondiente

$$\mu(x - \Delta x, y) = \mu(\gamma^*(x - \Delta x, y)) \quad (5.12)$$

Con esta modificación, la condición de adhesión se establece como

$$|\mathbf{p}_t^{adh}(x - \Delta x, y)| < \mu(\gamma^*(x - \Delta x, y)) p_z(x - \Delta x, y) \quad (5.13)$$

Si se cumple la hipótesis de adhesión, se toma  $\mathbf{p}_t(x - \Delta x, y) = \mathbf{p}_t^{adh}(x - \Delta x, y)$ . En caso contrario, el punto  $(x-\Delta x, y)$  se encuentra en deslizamiento, y el valor del deslizamiento es

$$\gamma(x - \Delta x, y) = \gamma^*(x - \Delta x, y) \quad (5.14)$$

y la tensión tangencial se calcula como (ver Cap. 2):

$$p_k(x - \Delta x, y) = \mu(\gamma(x - \Delta x, y)) p_z(x - \Delta x, y) \frac{p_k^{adh}(x - \Delta x, y)}{|\mathbf{p}_t^{adh}(x - \Delta x, y)|} \quad (5.15)$$

siendo  $k = x$  (longitudinal),  $y$  (transversal).

Aplicando este algoritmo se consigue resolver el problema tangencial para un área de contacto, considerando un coeficiente de rozamiento variable que es función del deslizamiento adimensional.

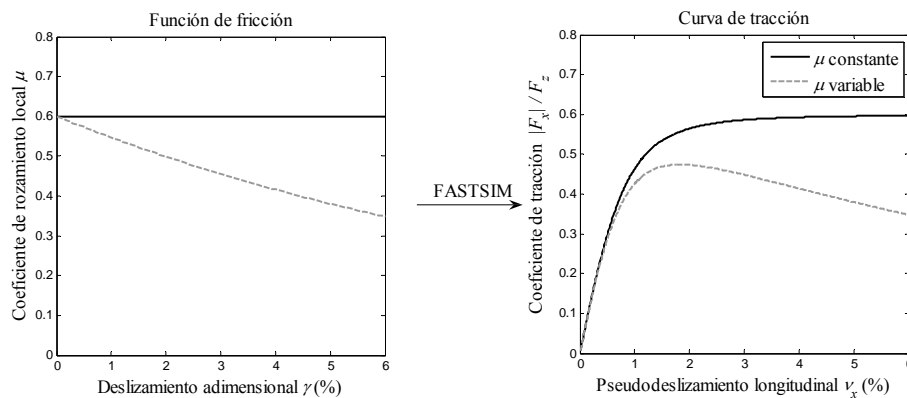
### a.3. Función de fricción y curva de tracción

Una vez descritas las ecuaciones para incluir un coeficiente de rozamiento variable en FASTSIM y presentado el algoritmo seguido, se van a tratar con más profundidad los conceptos de *función de fricción* y *curva de tracción*.

La *función de fricción* o *ley de fricción* describe la relación entre el deslizamiento adimensional  $\gamma$  y el coeficiente de rozamiento  $\mu$  como una función. Esta función se expresa genéricamente en (5.4). Esta relación se expresa localmente para un punto que pertenece al área de contacto.

La *curva de tracción* (en inglés *creep curve*) expresa la relación entre la fuerza tangencial y el pseudodeslizamiento. En general se suele representar el cociente  $|F_x|/F_z$  frente a  $v_x$  o  $|F_y|/F_z$  frente a  $v_y$ , siendo  $F_x$  la fuerza longitudinal o de tracción,  $F_y$  la fuerza transversal o lateral y  $F_z$  la fuerza normal al contacto. El cociente  $|F_x|/F_z$  se conoce como *coeficiente de tracción*. La curva de tracción se obtiene como resultado de resolver el problema tangencial, mediante FASTSIM en este caso, para valores crecientes de pseudodeslizamiento. La curva de tracción relaciones valores globales del área de contacto y se puede medir experimentalmente.

La Figura 5.13 presenta dos funciones de fricción distintas (una para coeficiente de rozamiento constante y otra para coeficiente de rozamiento variable) y sus correspondientes curvas de tracción, obtenidas tras la aplicación del algoritmo FASTSIM.



**Figura 5.13.** Funciones de fricción y sus correspondientes curvas de tracción.

Analizando una curva de tracción genérica, se pueden distinguir tres zonas: una *zona lineal* para valores bajos de pseudodeslizamiento, una *zona de transición* para valores intermedios de pseudodeslizamiento y una *zona de saturación* para valores altos de pseudodeslizamiento. En la primer zona, la relación entre el

coeficiente de tracción y el pseudodeslizamiento es lineal. Se corresponde con el área de contacto en adhesión o parcialmente en adhesión, donde la relación entre tensiones y desplazamientos según el algoritmo FASTSIM es lineal. En cambio, en la tercera zona la forma de la curva de tracción se asemeja a la función de fricción. Este comportamiento se debe a que el área de contacto está completamente saturada, y el comportamiento bajo tensiones tangenciales está dictado por la correspondiente función de fricción. Esta característica también la señalan Nielsen y Theiler [69] y Piotrowski [78].

En las curvas de tracción de la Figura 5.13-derecha, la primera zona llega hasta aproximadamente  $v_x = 0,7\%$ , la segunda zona entre  $0,7\%$  y  $2\%$  y la tercera, a partir de  $2\%$ .

Un aspecto importante a destacar es que las funciones de fricción no pueden medirse directamente [69], mientras que las curvas de tracción pueden obtenerse experimentalmente para un par de superficies en deslizamiento [61, 67, 81-82].

Por tanto, para disponer de las funciones de fricción que representan el coeficiente de rozamiento variable, es necesario estimar diversos parámetros en función de la tribología del contacto [34, 78, 81-82]. En la presente Tesis se propone un método para identificar los parámetros que definen dichas funciones a partir de las mediciones experimentales de las curvas de tracción y que ha sido publicado en la referencia [91].

#### ***a.4. Funciones de fricción utilizadas***

Con el fin de poder reproducir las distintas formas de las curvas de tracción medidas experimentalmente se van a considerar tres distintos **modelos** para las **funciones de fricción**. Estos tres modelos son:

- $f_{1a}(\gamma)$ , basado en una *ley exponencial* que depende de *tres parámetros*: un coeficiente de rozamiento estático  $\mu_o$ , un parámetro  $\alpha$  que expresa la relación entre el coeficiente de rozamiento límite y el coeficiente de rozamiento estático, y un parámetro  $\beta$  relacionado con la curvatura de la función de fricción:

$$f_{1a}(\gamma) = \mu_o \left[ \alpha + (1 - \alpha)e^{-\beta\gamma} \right] \quad (5.16)$$

Autores como Polach [82] y Piotrowski [78] emplean esta función.

- $f_{1b}(\gamma)$ , una *aproximación lineal* de  $f_{1a}$  mediante una función definida a trozos. También depende de *tres parámetros*: un valor estático para el

coeficiente de rozamiento  $\mu_s$ , un valor dinámico del coeficiente de rozamiento (o valor límite)  $\mu_d$  y un valor umbral de deslizamiento (o de codo)  $\gamma_c$ :

$$f_{1b}(\gamma) = \begin{cases} \mu_s - \frac{\mu_s - \mu_d}{\gamma_c} \gamma & \text{si } 0 \leq \gamma \leq \gamma_c \\ \mu_d & \text{si } \gamma_c < \gamma \end{cases} \quad (5.17)$$

Esta función ha sido empleada por Giménez *et al.* en [34].

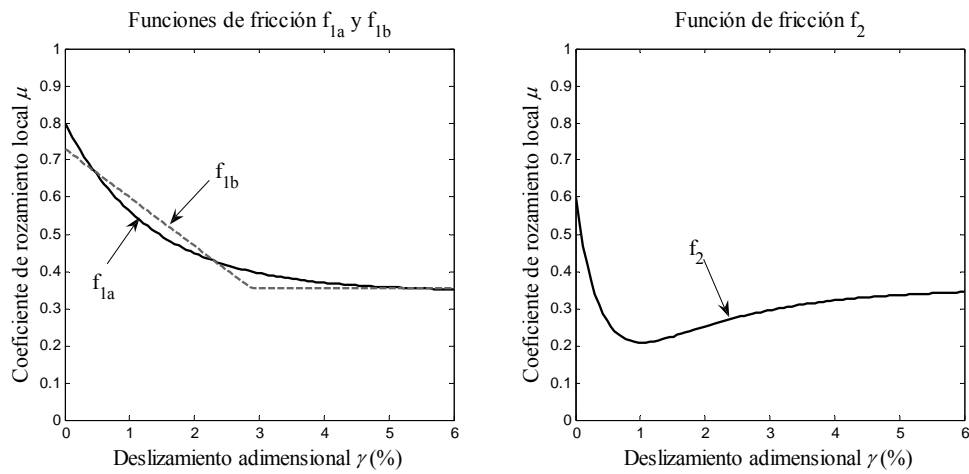
- $f_2(\gamma)$ , una *función exponencial* que depende de *cuatro parámetros*: un valor estático para el coeficiente de rozamiento  $\mu_s$ , un valor dinámico del coeficiente de rozamiento (o valor límite)  $\mu_d$  y unos valores correspondiente a su decremento  $\alpha$  y  $\beta$ , respecto al valor estático y al valor dinámico, respectivamente:

$$f_2(\gamma) = \mu_s e^{-\alpha\gamma} + \mu_d (1 - e^{-\beta\gamma}) \quad (5.18)$$

En todos los modelos de funciones de fricción se tendrá en cuenta que el valor del coeficiente de rozamiento estático será mayor o igual al valor del coeficiente de rozamiento dinámico [109].

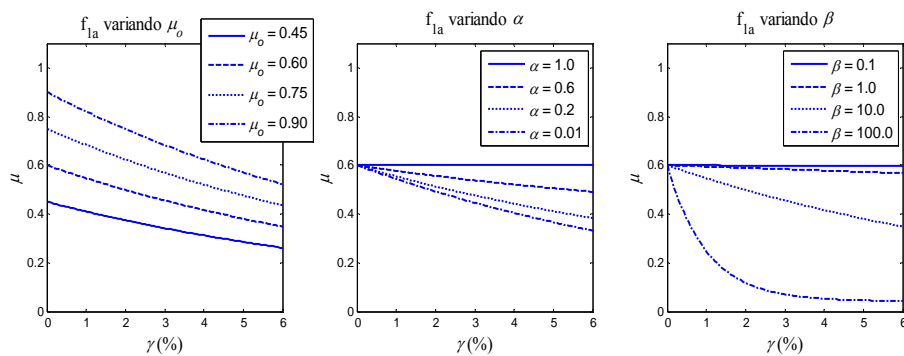
Los distintos modelos de las funciones de fricción definidas para valores genéricos de sus parámetros se han representado en la Figura 5.14. En el gráfico de la izquierda se puede comprobar como la función  $f_{1b}$  aproxima la función  $f_{1a}$ . Ambos modelos se utilizarán en las mismas condiciones con el fin de evaluar las diferencias entre ellos.

En cuando a la función de fricción  $f_2$ , su definición se debe a la necesidad de reproducir una determinada forma de las curvas de tracción. Bajo ciertas condiciones, experimentalmente se miden curvas de tracción con una pendiente positiva en el rango de deslizamiento elevado [7, 30, 59]. Por tanto, teniendo en cuenta que para valores de deslizamiento elevado la curva de tracción se asemeja a la función de fricción, se necesitaría una función de fricción creciente en este rango. Según la restricción anterior, esta característica no se puede conseguir con las funciones  $f_{1a}$  y  $f_{1b}$ . Debido a la inclusión de un cuarto parámetro, la función de fricción  $f_2$  permite reproducir este tipo de curvas medidas experimentalmente. De esta forma, se consigue mayor flexibilidad a la hora de conseguir una determinada forma en las curvas de tracción (Figura 5.14-derecha).



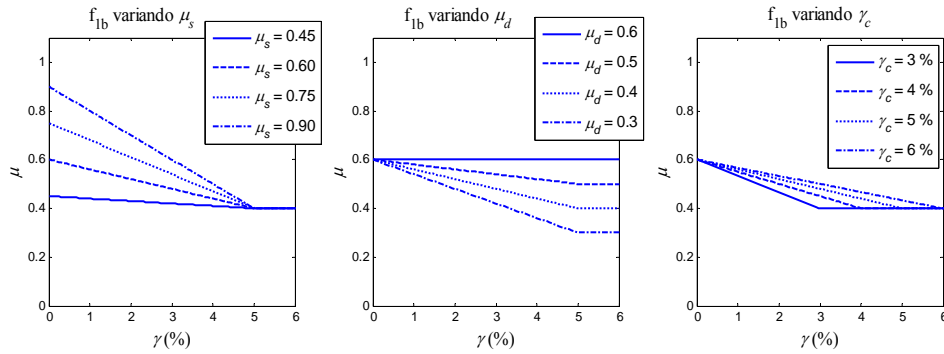
**Figura 5.14.** Modelos utilizados para las funciones de fricción  $f_{1a}$  y  $f_{1b}$  (izquierda) y  $f_2$  (derecha).

A modo de ejemplo, en las Figuras 5.15, 5.16 y 5.17 se muestran distintas funciones de fricción obtenidas a partir de los modelos  $f_{1a}$ ,  $f_{1b}$  y  $f_2$ , respectivamente, variando los parámetros de las que dependen. En todas ellas, se cumple la restricción que el coeficiente de rozamiento estático (para deslizamiento nulo) es mayor o igual al coeficiente de rozamiento dinámico (tomando el límite para valores de deslizamiento elevado).

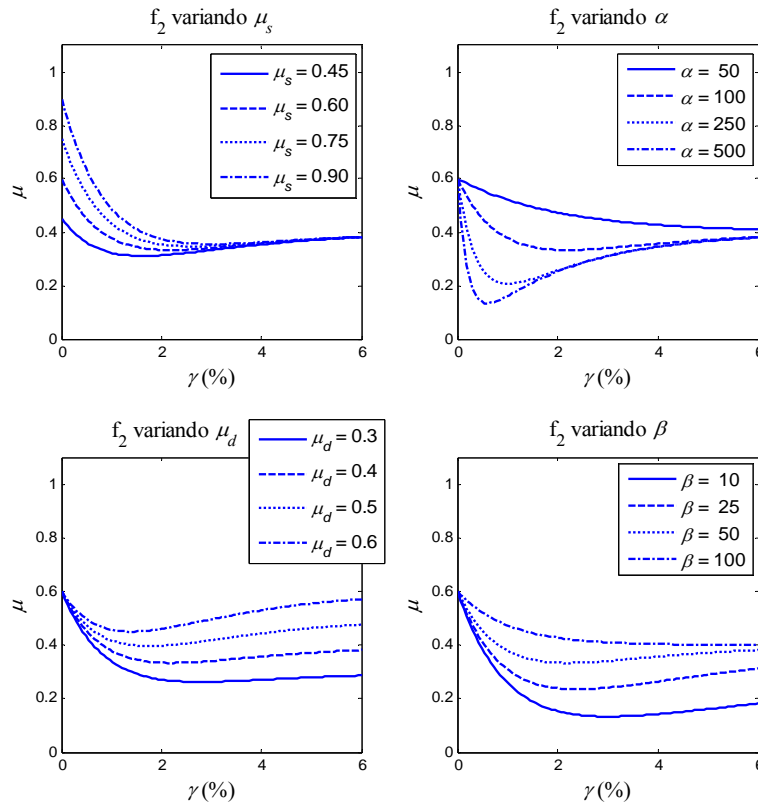


**Figura 5.15.** Distintas funciones de fricción obtenidas variando los parámetros que definen el modelo  $f_{1a}$  a partir de la función base  $\mu_o = 0,6$ ,  $\alpha = 0,07$  y  $\beta = 10,0$ .





**Figura 5.16.** Distintas funciones de fricción obtenidas variando los parámetros que definen el modelo  $f_{1b}$  a partir de la función base  $\mu_s = 0,6$ ,  $\mu_d = 0,4$  y  $\gamma_c = 5,0\%$ .

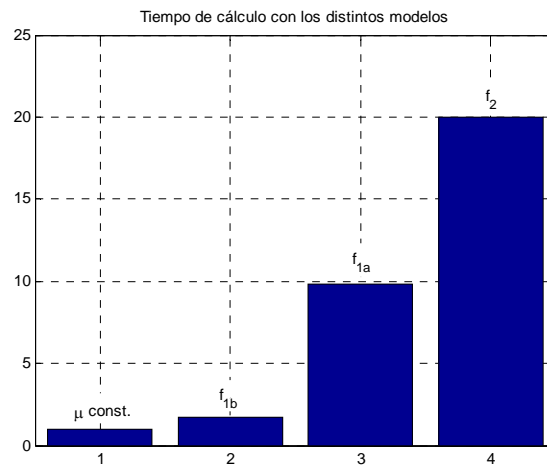


**Figura 5.17.** Distintas funciones de fricción obtenidas variando los parámetros que definen el modelo  $f_2$  a partir de la función base  $\mu_s = 0,6$ ,  $\alpha = 100,0$ ,  $\mu_d = 0,4$  y  $\beta = 50,0$ .

Finalmente en este punto se evalúa el coste computacional asociado a cada una de las funciones. La Figura 5.18 muestra una comparativa de los tiempos de cálculo empleados en resolver el problema de contacto tangencial mediante

FASTSIM para un área de contacto. Tomando como referencia (valor 1) el tiempo de cálculo para coeficiente de rozamiento variable usando la función  $f_{1b}$  es de 1,7, mientras que para  $f_{1a}$ , es de 10. En cambio para  $f_2$ , el tiempo de cálculo es aproximadamente 20. De estas valoraciones aproximadas se puede deducir:

- En primer lugar, se usará, a ser posible, el modelo de la función de fricción más sencillo para ajustar una curva de tracción experimental: será preferible usar  $f_{1a}$ - $f_{1b}$  (dependen de 3 parámetros) antes que  $f_2$  (depende de 4 parámetros) aunque ambos sean capaces de reproducir la misma forma de la curva de tracción. Pero será necesario recurrir a  $f_2$  en curvas de tracción que tengan una pendiente positiva en el rango de pseudodeslizamiento elevado, como en el caso del aceite u hojas secas o mojadas (Figura 5.28) o de los mejoradores de fricción (Figura 5.33), por ejemplo.
- En segundo lugar, cuando la curva de tracción se pueda reproducir con  $f_{1a}$ - $f_{1b}$ , se usará  $f_{1b}$  debido a que existe una solución explícita para obtener los deslizamientos y el tiempo de cálculo es menor.



**Figura 5.18.** Tiempo de cálculo empleado por los distintos modelos.

### ***a.5. Cálculo del deslizamiento usando las funciones de fricción***

En este punto se desarrollan las expresiones para obtener el valor del módulo del vector deslizamiento adimensional (o simplemente *deslizamiento*) a partir de las funciones de fricción propuestas. Estas expresiones son válidas en la zona de deslizamiento, aunque también se utilizarán para calcular el deslizamiento ficticio  $\gamma^*$  dentro de la zona de adhesión y, según (5.12), el valor correspondiente del coeficiente de rozamiento.

Para obtener la expresión del deslizamiento, se parte de la fórmula (5.10) y se sustituye la definición de cada modelo de función de fricción en la expresión de  $\mu(\gamma)$ .

- Para  $f_{1a}$ , se tiene

$$\gamma = \left[ -\mathbf{w} \cdot \begin{Bmatrix} \cos(\alpha_1) \\ \sin(\alpha_1) \end{Bmatrix} + L \alpha \mu_o \frac{\partial p_z}{\partial x} \right] + \left[ L \frac{\partial p_z}{\partial x} (1 - \alpha) \mu_o \right] e^{-\beta \gamma} \quad (5.19)$$

- Para  $f_{1b}$  se analizan los dos tramos por separado.

En primer lugar, para  $0 \leq \gamma \leq \gamma_c$ , sustituyendo la expresión de  $f_{1b}(\gamma)$ , despejando el valor de  $\gamma$  y reordenando, queda

$$\gamma = \frac{-\mathbf{w} \cdot \begin{Bmatrix} \cos(\alpha_1) \\ \sin(\alpha_1) \end{Bmatrix} + L \left( \mu_s \frac{\partial p_z}{\partial x} \right)}{1 + L \left( \frac{\mu_s - \mu_d}{\gamma_c} \frac{\partial p_z}{\partial x} \right)} \quad (5.20.a)$$

En segundo lugar, para  $\gamma > \gamma_c$ :

$$\gamma = -\mathbf{w} \cdot \begin{Bmatrix} \cos(\alpha_1) \\ \sin(\alpha_1) \end{Bmatrix} + L \left( \mu_d \frac{\partial p_z}{\partial x} \right) \quad (5.20.b)$$

- Finalmente para  $f_2$ , queda

$$\gamma = \left[ -\mathbf{w} \cdot \begin{Bmatrix} \cos(\alpha_1) \\ \sin(\alpha_1) \end{Bmatrix} + L \mu_d \frac{\partial p_z}{\partial x} \right] + L \mu_s \frac{\partial p_z}{\partial x} e^{-\alpha \gamma} - L \mu_d \frac{\partial p_z}{\partial x} e^{-\beta \gamma} \quad (5.21)$$

Es interesante destacar que las expresiones usando el modelo  $f_{1b}$  (5.20) proporcionan una solución explícita para obtener el valor del deslizamiento. En cambio, en las expresiones (5.19) y (5.21) correspondientes a los modelos  $f_{1a}$  y  $f_2$ , respectivamente, el valor del deslizamiento  $\gamma$  se debe obtener por iteración. Por tanto, el coste computacional asociado al empleo del modelo  $f_{1b}$  será menor que el asociado a los otros dos modelos.

### ***a.6. Reducción de la pendiente inicial en las curvas de tracción***

Otro aspecto relacionado con la modelización en FASTSIM para la reproducción de curvas de tracción medidas experimentalmente es la reducción de la pendiente inicial. Esta reducción es considerada por Kalker a través del factor de

reducción de los coeficientes de Kalker en el algoritmo FASTSIM original [44] para expresar desviaciones con respecto a sus valores teóricos.

Como se ha mencionado anteriormente, para valores de deslizamiento pequeños la relación entre fuerzas tangenciales y deslizamiento (o desplazamientos debidos a deformaciones elásticas) es lineal (ecuación (2.61) y []). Esta característica es debida a que el área de contacto está en adhesión y no aparece saturación de las tensiones tangenciales. El valor de esta pendiente depende del parámetro de flexibilidad  $L$  (ecuación (2.61)) (la expresión de la pendiente inicial en función del parámetro de flexibilidad  $L$  se deduce más adelante para la geometría de doble disco y para la geometría rueda-carril). Dicho valor de  $L$ , según Kalker [44, 46] depende del tamaño y de la geometría del área de contacto y de las propiedades del material, y es únicamente válido para superficies *escrupulosamente limpias* [61] y *suaves* (sin rugosidad) [11, 26, 99, 53].

Por una parte, la Figura 5.19-a) muestra un esquema del contacto tangencial modelado con FASTSIM, para superficies limpias y suaves. De acuerdo con la teoría elástica *simplificada* expresada mediante la ecuación (2.61) ([41, 44]), la rigidez del contacto tangencial vale  $1/L$  (cuya *flexibilidad* es  $L$ ). La misma Figura muestra el modelo reológico utilizado.

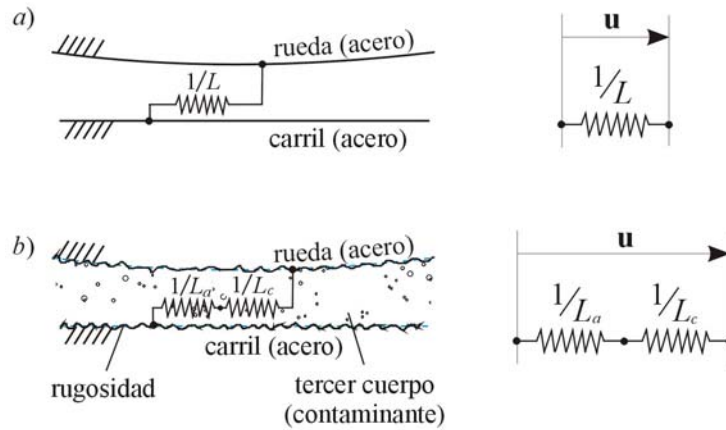
Por otra parte, la Figura 5.19-b) muestra un caso real que considera el efecto de la rugosidad y la presencia de un tercer cuerpo en la interfase en contacto (contaminante [33]). Estos dos efectos pueden modelizarse como dos muelles en serie, donde la rigidez equivalente (inversa de la flexibilidad) se ve reducida con respecto al caso ideal:

- El efecto de la rugosidad sobre la rigidez se tiene en cuenta con un valor reducido de la rigidez ( $1/L_a < 1/L$ ) o con un factor de escalado  $k_a$  para reducir el valor de la rigidez del contacto tangencial metal-metal (el subíndice  $a$  se refiere al inglés *asperity*, traducido como aspereza o rugosidad).
- El efecto de la presencia del contaminante (como tercer cuerpo) sobre la rigidez se tiene también en cuenta con un valor reducido de la rigidez ( $1/L_c < 1/L$ ) o con un factor de escalado  $k_c$  para reducir el valor de la rigidez del contacto tangencial metal-metal (el subíndice  $c$  se refiere a contaminante).

La flexibilidad equivalente puede calcularse como en [46]:

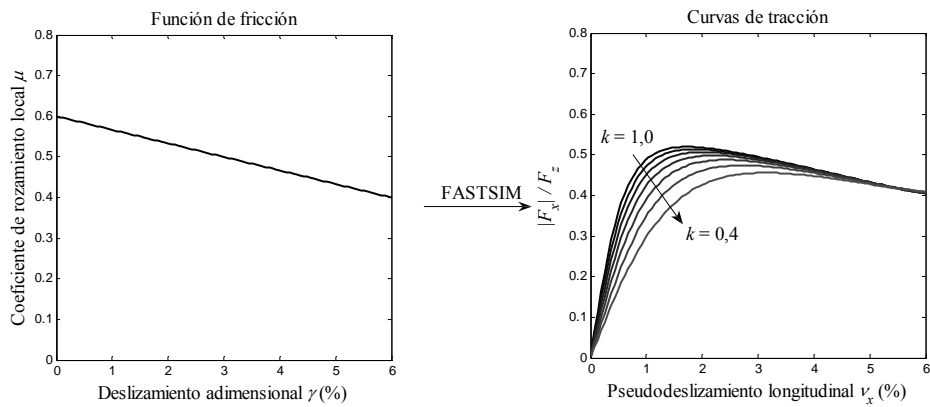
$$L^* = L_a + L_c = \frac{L}{k_a} + \frac{L}{k_c} = \frac{L}{k} \quad (5.22)$$

De este modo estos dos efectos se calcula a través de un coeficiente  $k$  donde  $0 < k \leq 1$  que se calcula como  $1/k = 1/k_a + 1/k_c$ . Este factor se identificará a partir de las curvas de tracción medidas experimentalmente.



**Figura 5.19.** Representación esquemática y modelo reológico del contacto tangencial para a) superficies *suaves* y limpias y b) superficies rugosas y con presencia de contaminante.

A modo de ejemplo, para observar el ejemplo de la reducción de la pendiente inicial en las curvas de tracción, la Figura 5.20 muestra distintas curvas de tracción obtenidas mediante FASTSIM correspondientes a una misma función de fricción y para distintos valores de reducción de la pendiente inicial.



**Figura 5.20.** Curvas de tracción correspondientes a una misma función de fricción, obtenidas para distintos valores de reducción de la pendiente inicial.

## b. Identificación de parámetros a partir de curvas experimentales

Una vez descritos los distintos aspectos relacionados con el modelado de FASTSIM para considerar el efecto de un coeficiente variable y para ser capaz de reproducir las curvas de tracción medidas experimentalmente, en este punto se describe el método propuesto para obtener las funciones de fricción a partir de medidas experimentales de curvas de tracción.

Las curvas de tracción se han obtenido bajo condiciones de laboratorio. En la literatura se usan principalmente dos procedimientos distintos para medir las características del contacto tangencial y desgaste en laboratorio: *pin* sobre disco (*pin-on-disc*) [40, 71] y máquina de doble disco (*twin-disc*) [56, 57]. En esta Tesis, los datos experimentales se tomaron a partir de medidas en máquinas de doble disco debido a que la geometría del contacto y las condiciones de rodadura y deslizamiento son más aproximadas a las del contacto real rueda/carril.

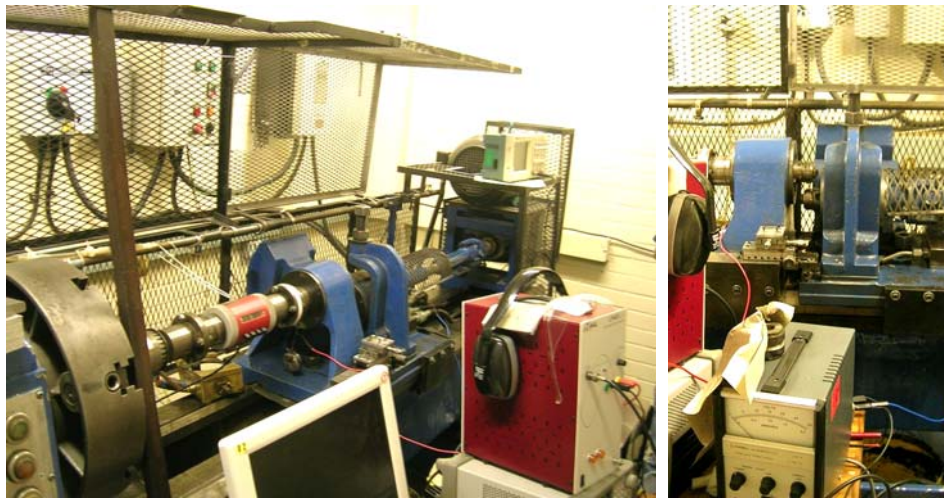
En primer lugar se describe la máquina de doble disco empleada para la medición de las curvas experimentales y datos de desgaste. Posteriormente, se describe el procedimiento propuesto para identificar los parámetros que definen las funciones de fricción (*parámetros de fricción*) y la *reducción de pendiente* a partir de las curvas de tracción medidas.

### b.1. Máquina de doble disco

Los datos experimentales se obtuvieron con la máquina de doble disco SUROS (acrónimo en inglés de *Sheffield University Rolling Sliding* que significa máquina de rodadura-deslizamiento de la Universidad de Sheffield) perteneciente al departamento de Materiales de la Universidad de Sheffield. En [29] se ofrece una descripción detallada de la máquina. Los discos se someten a carga mediante

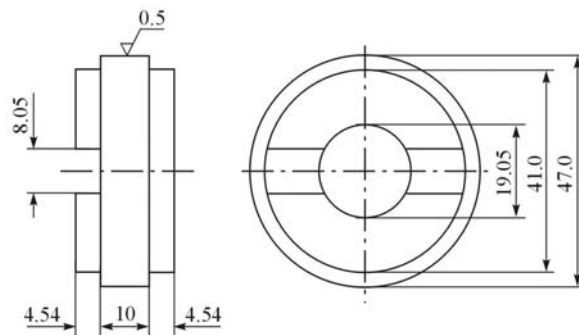
un cilindro hidráulico y están conducidos a una velocidad de rotación controlada por motores eléctricos independientes con el objetivo de conseguir el valor deseado de deslizamiento. El aporte de líquido (agua, aceite, modificador de fricción) se aplica en el disco superior, que simula el carril, antes de que se carguen los discos. El aporte de sólidos (hojas, arena) se realiza por medio de una tolva. La Figura 5.21 muestra unas fotografías de la máquina SUROS.

Los discos se mecanizan a partir de un espécimen de carril y de rueda con un diámetro de 47 mm y un espesor de 10 mm [29]. La Figura 5.22 muestra un esquema de los discos usados en la máquina SUROS. La Figura 5.23 presenta dos fotografías de los discos obtenidos a partir de especímenes de carril y de rueda.



**Figura 5.21.** Vista general de la máquina de doble disco SUROS (izquierda). Detalle de los dos discos (derecha).

Cada punto de la curva de tracción se obtiene con un par nuevo de discos de rueda y carril. La curva de tracción se mide mediante un método estacionario, por tanto, cuando se alcanza una respuesta estabilizada, se mide el valor de par y se calcula el coeficiente de tracción, como relación entre la fuerza tangencial y la fuerza normal. Una explicación detallada sobre el procedimiento de medida se puede encontrar en [30].



**Figura 5.22.** Dimensiones de los discos usados en la máquina SUROS.



**Figura 5.23.** Obtención de los especímenes para la máquina SUROS a partir del carril y de la rueda. Extraído de [30].

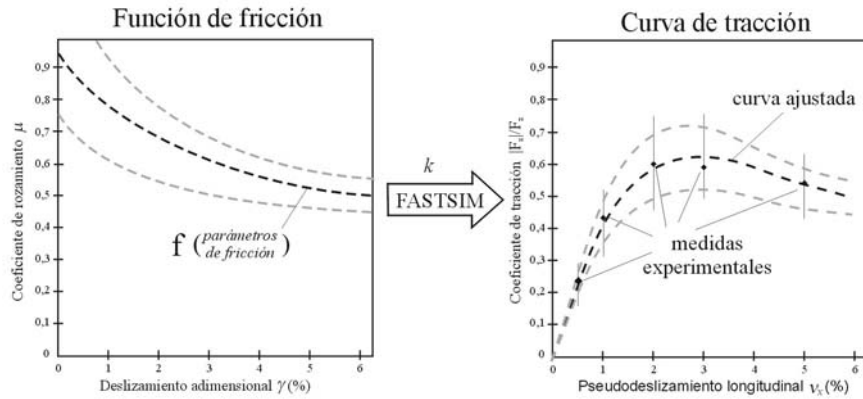
### ***b.2. Procedimiento de identificación de parámetros***

Como se ha mencionado anteriormente, la curva de tracción se puede obtener de forma directa a partir de la función de fricción mediante la aplicación del algoritmo FASTSIM. En cambio, encontrar la correspondiente función de fricción para una curva de tracción dada no es posible [69]. En este apartado se propone un procedimiento para encontrar una función de fricción que genera una curva de tracción *suficientemente igual* a la deseada.

Para un modelo de función de fricción dado, que depende de los *parámetros de fricción*, y para los distintos valores de *reducción de la pendiente inicial*, se genera un conjunto de curvas de tracción (ver Figuras 5.15, 5.16 o 5.17 según se trate del modelo  $f_{1a}$ ,  $f_{1b}$  o  $f_2$ , respectivamente, unido a la reducción de la pendiente inicial, Figura 5.20) y se selecciona aquella que mejor aproxima la curva de tracción definida a través de medidas experimentales. Este procedimiento se representa esquemáticamente en la Figura 5.24. Los *parámetros de fricción* y la



*reducción de la pendiente inicial* buscados son los correspondientes a la curva de tracción generada que más se acerca a la curva de tracción medida.



**Figura 5.24.** Esquema del procedimiento seguido para ajustar las curvas de tracción obtenidas experimentalmente.

Por tanto, el procedimiento propuesto trata de obtener los *parámetros de fricción* y la *reducción de pendiente inicial* que, empleados en el algoritmo FASTSIM para coeficiente de rozamiento variable, permitan obtener unas curvas de tracción que se ajusten *razonablemente bien* a los puntos medidos.

Considerando que la curva de tracción medida experimentalmente consta de  $N$  puntos, se puede definir una expresión para cuantificar el error en la aproximación realizada. Siendo  $e_i$  la diferencia entre el valor del punto  $i$  de la curva de tracción obtenida experimentalmente y el valor correspondiente para la curva de tracción ajustada, la expresión del error relativo sería

$$\varepsilon(\%) = \frac{1}{\mu_{ref}} \frac{\sum_{i=1}^N |e_i|}{N} \cdot 100 \quad (5.23)$$

donde  $\mu_{ref}$  es un valor de referencia que se usa para adimensionalizar el resultado. Como  $\mu_{ref}$  se toma el valor del coeficiente de tracción correspondiente al punto medido de mayor deslizamiento en la curva de tracción.

### c. Modelado de la geometría del contacto de doble disco

En este punto se obtienen las variables necesarias para la aplicación del algoritmo FASTSIM en un área de contacto formada en el contacto de doble disco. Estas variables son:

- *Dimensiones del área de contacto.*

- *Valor máximo de la presión normal* según el modelo de Hertz.
- *Parámetro de flexibilidad* para caracterizar el contacto tangencial.

Adicionalmente se calculará el valor de la *pendiente inicial* de la curva de tracción en función de las variables anteriores con el fin de aplicar el valor de reducción para tener en cuenta el estado superficial en el contacto.

Finalmente se investigará el efecto de la presión sobre las variables consideradas.

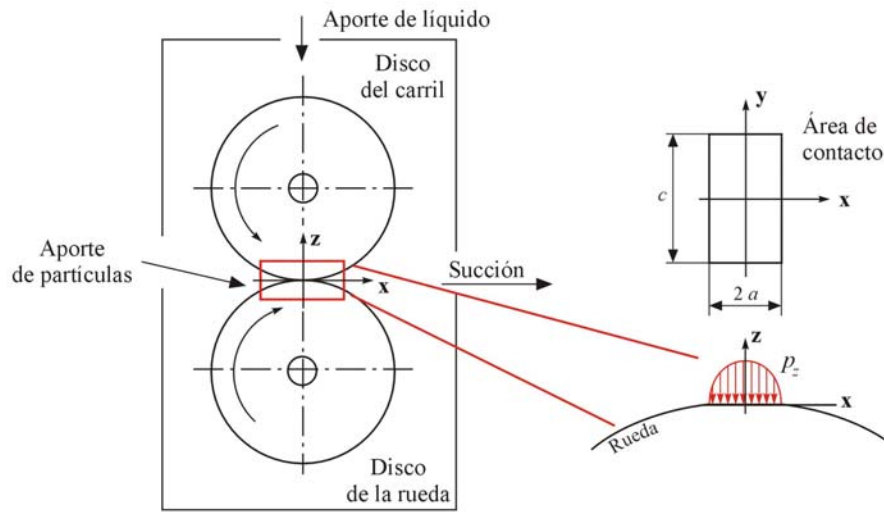
El problema de contacto con la geometría de doble disco se modela bajo las siguientes **hipótesis**:

- El problema normal se considera como un contacto bidimensional de cuerpos cilíndricos que están rodando alrededor de sus ejes principales. El contacto se produce a lo largo de un rectángulo de ancho  $c$  y longitud  $2 \cdot a$  donde  $c \gg 2 a$  (Figura 5.25).  $c$  es un parámetro geométrico dado por la anchura de los discos. Para la geometría de los discos empleados, la relación  $c/a$  está en el orden de 30 a 50.

La teoría de Hertz considera ese caso como el límite de un contacto elíptico en el que  $b$  es mucho mayor que  $a$  [41], siendo  $a$  y  $b$  los semi-ejes de la elipse de contacto a lo largo de las direcciones longitudinal y transversal, respectivamente.

- Para el problema tangencial, se usa el algoritmo FASTSIM con coeficiente de rozamiento variable, tal como se ha descrito en el apartado anterior. El valor del parámetro de flexibilidad  $L$  en la ecuación (2.61) se obtiene para el caso límite de una elipse donde  $b$  es mucho mayor que  $a$ .

Una vez se ha obtenido la pendiente teórica de la curva de tracción para pequeños deslizamientos (que depende del valor teórico  $L$ ), este valor de la pendiente se reduce usando un factor  $k$ , tal como se ha descrito anteriormente.



**Figura 5.25.** Esquema de la máquina de ensayos SUROS y del área de contacto generado por los dos cilindros.

**El análisis del problema normal** de contacto mediante la teoría bidimensional de Hertz se presenta en el Cap. 2 ([41]). Según la fórmula (2.21) se puede obtener la dimensión  $a$  del área de contacto en función de la fuerza normal, la geometría del contacto y las propiedades mecánicas de los materiales de la rueda y del carril:

$$a^2 = \frac{4 F_z R^*}{\pi c E^*}$$

siendo  $R^*$  la curvatura combinada de los dos cilindros calculada según (2.22) y  $E^*$  el módulo de Young combinado de los materiales en el contacto calculado según (2.23).

El valor máximo de la distribución de presiones de Hertz, en función de la fuerza normal y las características geométricas y mecánicas de los materiales, se puede obtener a partir de la ecuación (2.24) (ver Cap. 2):

$$p_{z_o}^2 = \frac{F_z E^*}{\pi c R^*}$$

**Considerando ahora el problema tangencial**, éste se modela con FASTSIM para el caso particular de una única tira longitudinal o *strip* de anchura  $c$ . Puesto que el problema es bidimensional, las magnitudes  $\mathbf{u}_t$  (desplazamientos tangenciales debidos a deformaciones elásticas) y  $\mathbf{p}_t$  (tensiones tangenciales) son independientes

de la variable  $y$  y sólo se estudian las magnitudes longitudinales. Además, no existe pseudodeslizamiento lateral  $v_y$ , ni spin  $\varphi$ , por tanto, el deslizamiento rígido a partir de la expresión (2.64) vale  $w_x = v_x$ . Además se considerará un único parámetro de flexibilidad, que será el correspondiente a la dirección longitudinal.

Para obtener el valor del parámetro de flexibilidad en dirección longitudinal  $L = L_1$  correspondiente el área de contacto, se procede igual que en [44] (ver Cap. 2). En primer lugar se supone que toda el área se encuentra en adhesión y se obtiene el valor de la fuerza tangencial total. Esta fuerza se iguala a la expresión obtenida mediante la teoría lineal de Kalker [45] y a partir de esta ecuación, se obtiene el parámetro de flexibilidad.

Asumiendo adhesión e integrando la ecuación (2.67) particularizada para el caso bidimensional, se tiene

$$p_x(x) = \int_a^x \frac{v_x}{L_1} dx = \frac{v_x}{L_1}(x-a) \quad (5.24)$$

Esta distribución de tensión tangencial se integra dentro del área de contacto rectangular para obtener la fuerza total de tracción:

$$F_x = \int_{-c/2}^{c/2} \int_{-a}^a \frac{v_x}{L_1}(x-a) dx dy = \frac{-2a^2c}{L_1} v_x \quad (5.25)$$

Por otra parte, a partir de la solución de la fuerza longitudinal ofrecida por la teoría lineal de Kalker en (2.70) ([45], ver Cap. 2) y tomando el límite cuando  $b \rightarrow c/2$ , se tiene

$$F_x = -c_{11} G a \frac{c}{2} v_x \quad (5.26)$$

donde  $c_{11}$  es el valor del coeficiente de Kalker [45] para la dirección longitudinal calculado para el caso límite cuando  $b \gg a$ , y  $G$  es el módulo de elasticidad transversal combinado para los materiales en contacto calculado según (2.8).

Igualando (5.25) y (5.26) y despejando, se obtiene el valor del parámetro de flexibilidad usado para modelizar el contacto de doble disco con FASTSIM:

$$L_1 = \frac{4a}{c_{11} G} \quad (5.27)$$

Por último, en cuanto a la pendiente inicial en las curvas de tracción, ésta se puede identificar a partir de la ecuación (5.25). Por tanto, tomando el valor absoluto, la pendiente inicial, valdría

$$s_o = -\frac{2a^2c}{L_1} \quad (5.28)$$

Considerando el efecto de la reducción de la pendiente inicial mediante un factor  $k$  ( $k \leq 1$ ) quedaría

$$s_o^* = k s_o = -k \frac{2a^2c}{L_1} \quad (5.29.a)$$

o bien

$$s_o^* = k s_o = -\frac{2a^2c}{L_1/k} = -\frac{2a^2c}{L_1^*} \quad (5.29.b)$$

siendo  $s_o^*$  el valor reducido de la pendiente inicial de la curva de tracción o bien  $L_1^*$  el valor *mayorado* del parámetro de flexibilidad. De la misma forma, el efecto de esta reducción de pendiente, usando la ecuación (5.27), también se puede expresar como una reducción de los coeficientes de Kalker  $c_{11}^* = k c_{11}$ .

Una vez obtenido el valor de las variables, **se va a analizar el efecto de la presión normal** sobre éstas.

Respecto al problema normal, se puede obtener la relación entre la semi-longitud del área de contacto  $a$  y la máxima presión según la distribución de Hertz  $p_{z_o}$ . Combinando las ecuaciones (2.21) y (2.24) y despejando el valor de  $a$  se llega a la expresión

$$a = \frac{2R^*}{E^*} p_{z_o} \quad (5.30)$$

Según esta fórmula, al aumentar el valor de la presión, aumenta de forma proporcional el tamaño del área de contacto.

Considerando ahora el problema tangencial, sustituyendo la ecuación (5.30) en (5.27), se tiene

$$L_1 = \frac{8}{c_{11}} \frac{R^*}{G E^*} p_{z_o} \quad (5.31)$$

Según esta relación, al aumentar el valor de la presión, aumenta de forma proporcional el valor de la flexibilidad, por lo que disminuye de forma inversamente proporcional el valor de la rigidez tangencial del contacto.

También se puede analizar el efecto de la presión sobre la pendiente inicial  $s_o$ . Tomando la ecuación (5.28) y sustituyendo las expresiones del tamaño

del área de contacto en función de la presión máxima (5.30) y la expresión del parámetro de flexibilidad (5.31) se tiene el valor de la pendiente inicial en función de la presión máxima

$$s_o = -c_{11} c G \frac{R^*}{E^*} p_{z_o} \quad (5.32)$$

Ecuación que expresa que al aumentar la presión, aumenta de forma proporcional el valor de la pendiente inicial de la curva de tracción, calculada bajo condiciones ideales (para superficies limpias y suaves).

Resulta interesante comentar que las relaciones presentadas para la semilongitud del área contacto  $a$  (5.30), el parámetro de flexibilidad  $L_1$  (5.31) y el valor de la pendiente inicial de la curva de tracción (5.32) dependen linealmente del valor de presión normal máxima de Hertz  $p_{z_o}$ .

#### **d. Obtención de los parámetros de fricción a partir de curvas de tracción experimentales**

En este punto se utilizan curvas de tracción experimentales para identificar los parámetros necesarios por el algoritmo FASTSIM con coeficiente de rozamiento variable según las modificaciones introducidas.

Las curvas de tracción se toman de artículos publicados [7, 30, 59].

Los parámetros identificados a partir de las curvas experimentales son los **parámetros de fricción** requeridos por el modelo de función de fricción empleada en cada caso y el valor de la **reducción de la pendiente inicial**.

Se van a usar distintas curvas de tracción para investigar los siguientes efectos:

- *Efecto del contaminante en las superficies de contacto:* se utilizan curvas de tracción medidas para superficies limpias, superficies mojadas, con presencia de aceite, con presencia de hojas secas y con presencia de hojas mojadas. En esta primera serie de resultados las curvas están medidas para un valor de presión máximo de Hertz (en adelante valor de presión) de 1 500 MPa.
- *Efecto de la presión sobre los contaminantes:* se comparan las curvas medidas para 1 500 MPa con unas nuevas curvas medidas para 900 MPa con la presencia de distintos contaminantes.

- *Efecto de los modificadores de fricción*: se compara el efecto de dos modificadores de fricción usados como mejoradores de fricción.

En función de la *forma* de la curva de tracción para valores de deslizamiento elevados se empleará uno u otro modelo de función de fricción. Este requerimiento es debido a la peculiaridad de las curvas de tracción, donde la zona para un deslizamiento elevado se tiende a la forma de la función de fricción (ver punto 5.3.2.a.3).

Para curvas de tracción que tengan un comportamiento decreciente en el rango de pseudodeslizamiento elevado, se podrá emplear cualquiera de las tres funciones de fricción presentadas en el punto 5.3.2.a.3. En cambio, para curvas que describan un comportamiento creciente en todo el rango de pseudodeslizamiento, únicamente se podrá emplear el modelo de función de fricción  $f_2$  debido a que es el único que es capaz de reproducir esta forma. Se aplicará un criterio de economía por lo que se emplearán los modelos de funciones de fricción con menor número de parámetros que sean capaces de ajustar la curva de tracción experimental.

#### ***d.1. Efecto de la contaminación de la superficie***

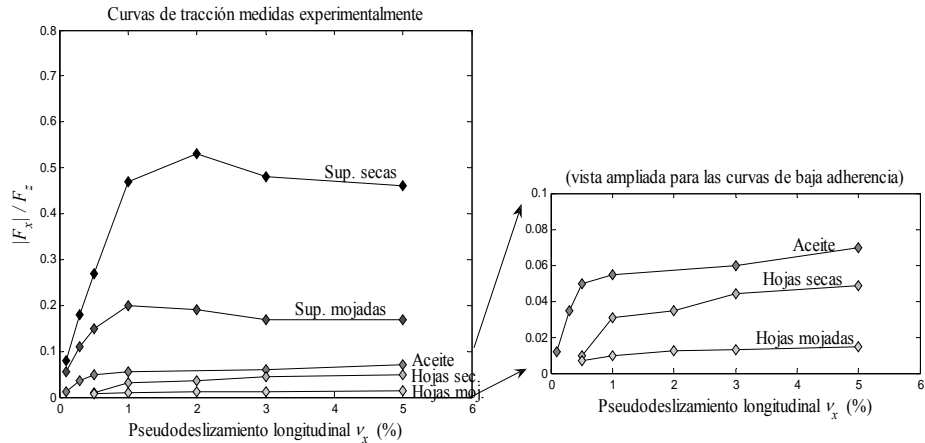
Las curvas de tracción medidas para discos secos se comparan con las curvas de tracción medidas con la aplicación de contaminantes, como agua, aceite, hojas secas y hojas mojadas. Las curvas para superficies secas y con aceite se han tomado de la referencia [59] mientras que las curvas para superficies mojadas, hojas secas y hojas mojadas se han tomado de [30]. Los puntos se han medido para una presión máxima de Hertz de 1 500 MPa sobre los discos, que es un valor característico del contacto real rueda/carril, y para una velocidad de rotación de 400 rpm (que corresponde con una velocidad lineal en la superficie aproximadamente de 1 m/s). Los puntos se han medido en el rango de 0,1 a 6,0 % de deslizamiento.

Las curvas de tracción experimentales se muestran en la Figura 5.26. Estas curvas están compuestas por una serie de puntos medidos, que definen la tendencia de la curva.

A la vista de las curvas experimentales, se pueden distinguir dos familias de curvas:

- Curvas de *alta adherencia*: donde el coeficiente de tracción está entre 0,1 y 0,6. Estas curvas presentan un tramo creciente con un máximo y un tramo decreciente más allá de este valor. Este grupo lo forman las curvas para superficies secas y superficies mojadas.

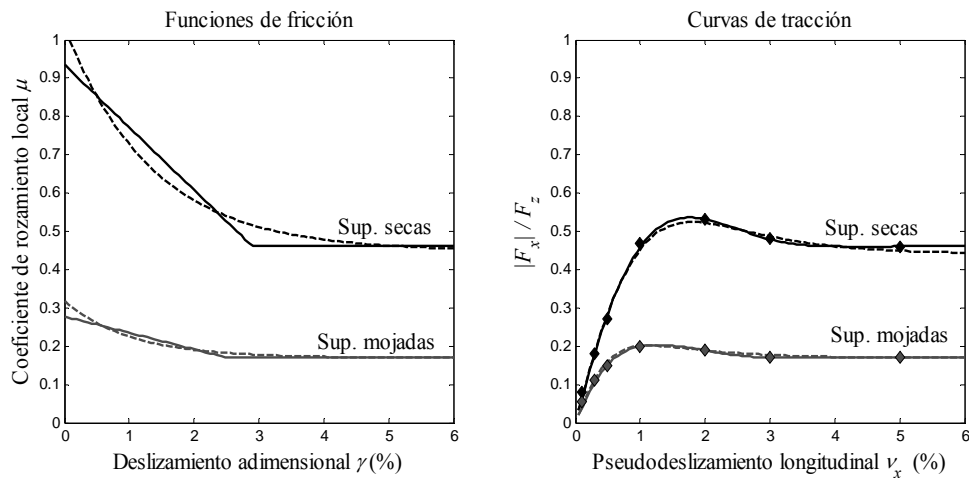
- Curvas de *baja adherencia*: el coeficiente de tracción para el rango de pseudodeslizamiento medido es inferior a 0,1. Estas curvas muestran una ligera tendencia creciente en todo el rango considerado. Este grupo lo forman las curvas medidas con presencia de aceite y con presencia de hojas secas y mojadas.



**Figura 5.26.** Curvas de tracción obtenidas en la máquina SUROS. El gráfico de la derecha representa una vista ampliada para las curvas de baja adherencia.

Las curvas de **alta adherencia** se ajustan usando los modelos  $f_{1a}$  y  $f_{1b}$  junto a la reducción de pendiente inicial. Las funciones de fricción obtenidas y sus correspondientes curvas de tracción se muestran en la Figura 5.27. Visualmente se puede comprobar que el ajuste resulta satisfactorio con los dos modelos de funciones de fricción empleados.





**Figura 5.27.** Funciones de fricción identificadas y curvas de tracción ajustadas a los datos experimentales para superficies secas y mojadas. Líneas de puntos (--) para  $f_{1a}$  y líneas continuas (—) para  $f_{1b}$ .

Los valores de reducción de pendiente inicial, los parámetros de fricción y el error calculado se presentan en la Tabla 5.3. Se puede definir una equivalencia entre el valor de rozamiento estático de ambos modelos, siendo  $\mu_o \approx \mu_s$ , y entre el valor de rozamiento dinámico, siendo  $\alpha \mu_o \approx \mu_d$ . Tanto para estos valores como para el coeficiente de reducción de la pendiente inicial  $k$ , se puede comprobar como el ajuste realizado por ambos modelos es muy similar para cada uno de los estados superficiales considerados.

Para superficies secas, el coeficiente  $k$  vale 1,0, el coeficiente de rozamiento estático 1,0 y el coeficiente de rozamiento dinámico 0,45, aproximadamente, para los dos modelos utilizados y según la equivalencia definida. El valor del coeficiente  $k$  es ligeramente superior a 1,0 probablemente debido a la dispersión en el proceso de medida de los puntos y al procedimiento de ajuste. Un valor de  $k = 1,0$  significa que la pendiente inicial de la curva de tracción coincide con el valor teórico, calculado para superficies *escrupulosamente limpias* y *suaves* (sin rugosidad).

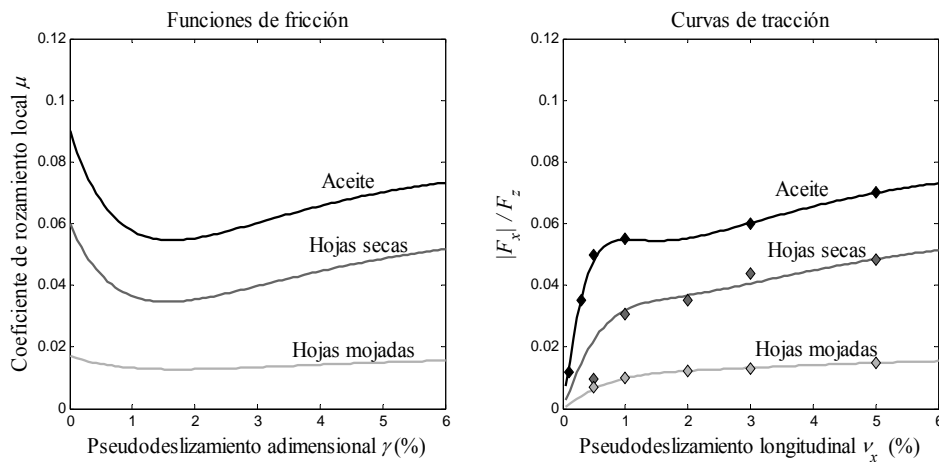
Para superficies mojadas, el coeficiente  $k$  vale 0,69, el coeficiente de rozamiento estático 0,3 y el coeficiente de rozamiento dinámico 0,17, aproximadamente, según la correspondencia entre los dos modelos. Con respecto a los valores obtenidos para superficies secas se observa una reducción de la rigidez tangencial al contacto (factor de reducción  $k$ ) y una reducción de ambos coeficientes de rozamiento. Estas dos características también se pueden apreciar en la Figura 5.27, reflejadas en la reducción de la pendiente inicial en los valores más bajos de las funciones de fricción para superficies mojadas.

En cuanto al error cometido en los ajustes, en cualquiera de los casos es inferior al 2 %.

**Tabla 5.3.** Parámetros identificados y error estimado en las curvas para superficies secas y superficies mojadas sometidas a 1 500 MPa. Uso de las funciones  $f_{1a}$  (izq.) y  $f_{1b}$  (dcha.).

	Función exponencial $f_{1a}$			Aproximación lineal $f_{1b}$	
	Superficies secas	Superficies mojadas		Superficies secas	Superficies mojadas
$k$	1,07	0,72	$k$	1,06	0,65
$\mu_0$	1,03	0,32	$\mu_s$	0,94	0,28
$\alpha$	0,43	0,53	$\mu_d$	0,46	0,17
$\beta$	74,29	97,05	$\gamma_c$ (%)	2,89	2,50
$\varepsilon$ (%)	1,95	1,42	$\varepsilon$ (%)	1,46	0,36

En cuanto a las curvas de **baja adherencia** debido a que tienen una pendiente positiva en el rango de un pseudodeslizamiento elevado y para cumplir con la restricción que el coeficiente de rozamiento estático sea mayor o igual que el dinámico, se ajustan usando el modelo  $f_2$ . Las funciones de fricción y las correspondientes curvas de tracción se presentan en la Figura 5.28.



**Figura 5.28.** Funciones de fricción identificadas y curvas de tracción ajustadas a los datos experimentales para superficies con aceite y hojas secas y húmedas. Se ha empleado la función  $f_2$ .

Es interesante comentar la forma de las funciones de fricción, que recuerda la forma de la curva de Stribeck [109]. De este modo las hojas secas o mojadas se comportan como un lubricante, con comportamiento newtoniano, al igual que el aceite. El caso de hojas mojadas podría también modelizarse como coeficiente de

rozamiento constante debido a que la variación en el coeficiente de rozamiento es muy pequeña en el rango estudiado.

El resultado de la identificación de parámetros para las curvas de baja adherencia se muestra en la Tabla 5.4.

Para los tres contaminantes utilizados, se reduce en gran medida el valor de la rigidez tangencial ( $k$ ), sobretodo para el caso de hojas secas o mojadas. En cuanto al coeficiente de rozamiento, también es muy bajo. En los tres casos, pero sobretodo en el caso de hojas mojadas, se podría modelizar el comportamiento tangencial mediante coeficiente de rozamiento constante. En cuanto al error, éste es inferior al 2,0 % (en el caso de hojas secas, vale 2,01 %). Por tanto, el ajuste realizado mediante la función exponencial  $f_2$  es adecuado en los tres casos.

**Tabla 5.4.** Parámetros identificados y error estimado en las curvas de baja adherencia con presencia de aceite, hojas secas y hojas húmedas sometidas a 1 500 MPa. Uso de la función de fricción  $f_2$ .

	Función exponencial $f_2$		
	Aceite	Hojas secas	Hojas mojadas
$k$	0,24	0,09	0,02
$\mu_s$	0,09	0,06	0,02
$\alpha$	107,78	111,43	80,00
$\mu_d$	0,08	0,06	0,02
$\beta$	41,11	32,86	40,00
$\varepsilon$ (%)	0,77	2,01	0,48

### ***d.2. Efecto de la presión sobre los contaminantes***

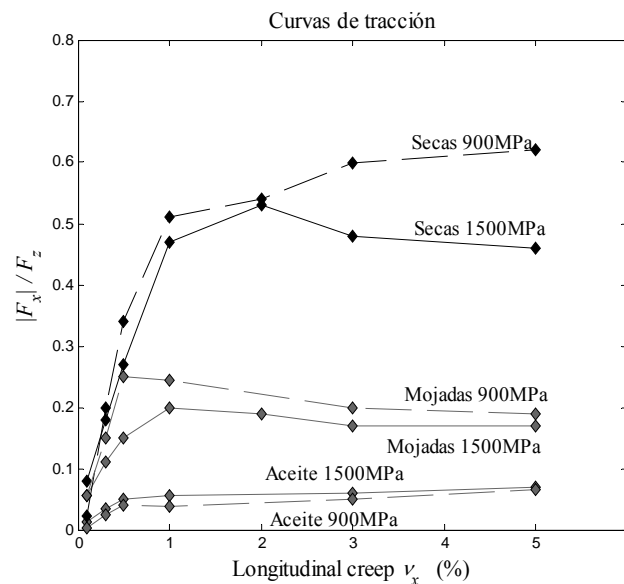
En este punto se analiza el efecto de la presión con la presencia de contaminantes. Para ello se consideran curvas de tracción medidas para dos niveles de presión máxima de Hertz (900 y 1 500 MPa), con la presencia de distintos contaminantes. El objetivo es analizar el efecto de la presión sobre los parámetros de fricción y reducción de la pendiente inicial identificados a partir de las curvas.

Las curvas medidas para una presión máxima de Hertz de 1 500 MPa se han tomado del punto anterior mientras que para las curvas medidas para 900 MPa se han extraído de [59].

En primer lugar se identifican los parámetros que definen las funciones de fricción y la reducción de pendiente inicial a partir de las curvas de tracción medidas a un nivel de presión máxima de 900 MPa y se comparan con las curvas de tracción para 1 500 MPa del punto anterior. En segundo lugar, analizando estas diferencias y según la modelización realizada en el punto 5.3.2.c se define un

procedimiento para incluir el efecto de la presión sobre los parámetros identificados.

Las **curvas de tracción** analizadas en este apartado se muestran en la Figura 5.29. Considerando las curvas medidas para 900 MPa, en superficies mojadas y en presencia de aceite, se aprecia la misma forma que en las respectivas curvas para 1 500 MPa. En cambio, para el caso de superficies secas, no aparece el máximo en la curva de tracción seguido de un comportamiento decreciente. Únicamente se midió un punto para cada valor de pseudodeslizamiento considerado; por tanto, puede ser el punto de deslizamiento correspondiente al valor máximo de la curva no se haya medido.



**Figura 5.29.** Curvas de tracción medidas experimentalmente para superficies secas, mojadas y con presencia de aceite para los dos niveles de presión considerados. Las curvas para 1 500 MPa son las mismas que la Figura 5.26.

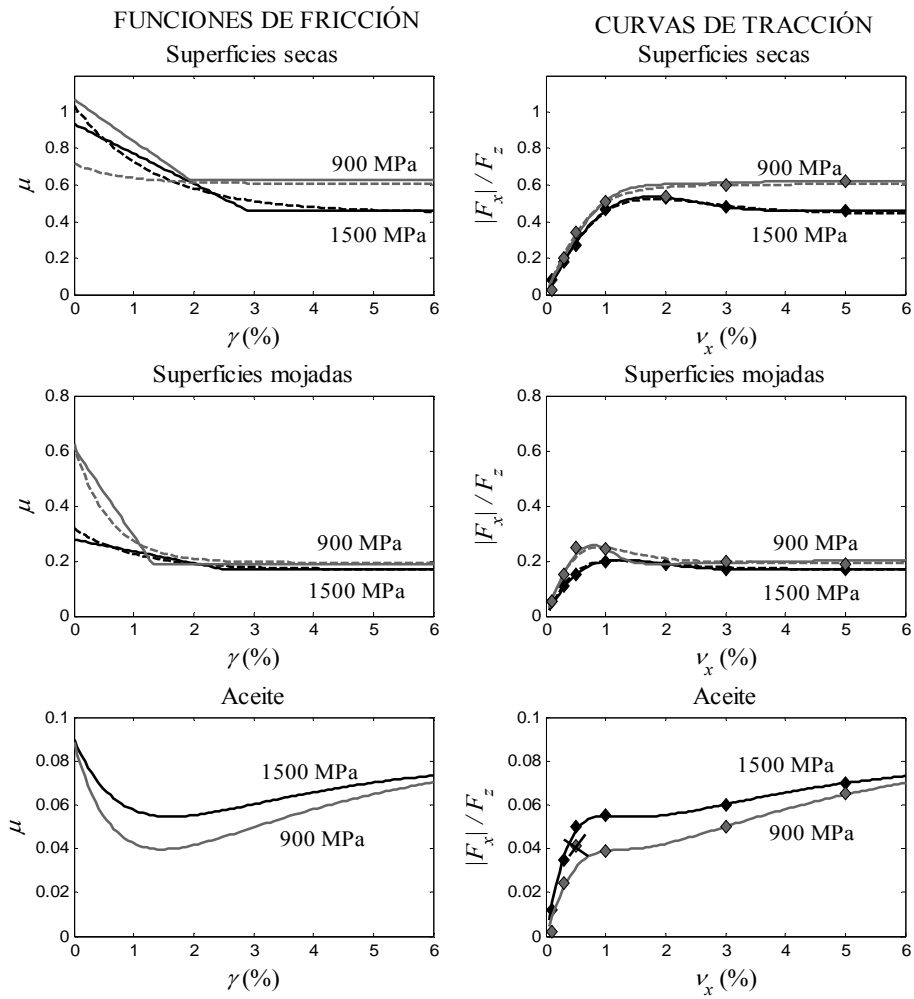
En cuanto al efecto de la presión sobre las curvas de tracción parece ser distinto cuando las mediciones se hacen para superficies secas o mojadas o para las mediciones hechas con aporte de aceite. Para condiciones secas y mojadas, aparece un incremento en el coeficiente de tracción al disminuir la presión, lo que es consistente con datos anteriores [70, 111], pero en el caso del aceite, esta tendencia se invierte. Según Lewis *et al.* [59] podría tratarse de un efecto real o como resultado de la dispersión en las medidas, por lo que se requiere más trabajo experimental al respecto. En cualquier caso en esta Tesis se utilizan curvas de tracción publicadas anteriormente para su aplicación en el campo de la Mecánica

de Contacto y de la Dinámica Vehicular y no es el objetivo analizar las tendencias que muestran estas curvas.

Para el ajuste de las curvas experimentales se usarán los modelos de funciones de fricción  $f_{1a}$ - $f_{1b}$  en el caso de superficies secas y mojadas y  $f_2$  en el caso de presencia de aceite (debido a la forma creciente de la curva).

Las funciones de fricción obtenidas y las correspondientes curvas de tracción calculadas junto a las curvas de tracción medidas experimentalmente, para los dos niveles de presión, se presentan en la Figura 5.30 (para realizar el ajuste, el tercer punto de la curva de aceite para 900 MPa representa un valor anómalo se ha eliminado). Los parámetros de las correspondientes curvas de fricción, la reducción de la pendiente inicial y el error calculado se detallan en las Tablas 5.5 y 5.6.

Para los tres estados superficiales se reduce el valor de la pendiente inicial ( $k$ ), sobretodo en el caso del aceite. En cuanto a los coeficientes de rozamiento, para superficies mojadas y secas estos valores aumentan al disminuir la presión, mientras que para el caso del aceite, la tendencia es la opuesta. El error en el ajuste de las curvas de tracción experimentales medidas a 900 MPa es sensiblemente superior al del ajuste de las curvas medidas a 500 MPa, pero en cualquier caso, inferior al 5 %.



**Figura 5.30.** Funciones de fricción identificadas y curvas de tracción ajustadas para superficies secas, mojadas o en presencia de aceite para los dos niveles de presión estudiados. Para superficies secas y mojadas, las líneas de puntos (--) son para  $f_{1a}$  y las líneas continuas (—) para  $f_{1b}$ . Con presencia de aceite se usa la función  $f_2$ .

**Tabla 5.5.** Parámetros identificados y error estimado en las curvas para superficies secas y mojadas sometidas a 900 MPa. Uso de las funciones  $f_{1a}$  (izq.) y  $f_{1b}$  (dcha.).

	Función exponencial $f_{1a}$			Aproximación lineal $f_{1b}$	
	Superficies secas	Superficies mojadas		Superficies secas	Superficies mojadas
$k$	0,78	0,61	$k$	0,72	0,59
$\mu_o$	0,72	0,62	$\mu_s$	1,06	0,61
$\alpha$	0,84	0,31	$\mu_d$	0,62	0,19
$\beta$	129,41	170,59	$\gamma_c$ (%)	1,94	1,31
$\varepsilon$ (%)	2,15	4,25	$\varepsilon$ (%)	3,37	4,30

**Tabla 5.6.** Parámetros identificados para la curva medida con presencia de aceite sometida a 900 MPa. Uso de la función  $f_2$ .

	Función exponencial $f_2$
	Aceite
$k$	0,08
$\mu_s$	0,09
$\alpha$	140,00
$\mu_d$	0,09
$\beta$	26,29
$\varepsilon$ (%)	0,69

Una vez identificados los valores de los parámetros de fricción y reducción de la pendiente inicial para los dos niveles de presión considerados, se va a proponer un método para tener en cuenta el **efecto de la presión normal** sobre dichos parámetros.

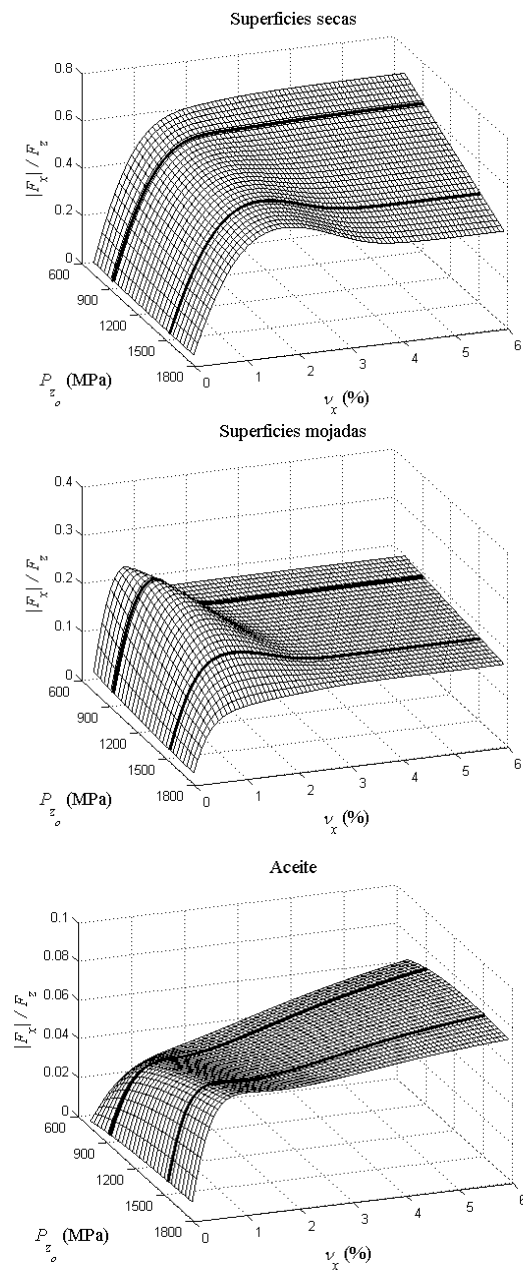
Considerando la modelización del contacto para la geometría de doble disco realizada en el punto 5.3.2.c, se llega a la conclusión que las variables semilongitud del área de contacto  $a$ , parámetro de flexibilidad  $L_1$  y reducción de la pendiente inicial  $s_o$  dependen linealmente del valor de la presión máxima de Hertz. Teniendo en cuenta esta característica y puesto que las diferencias entre las curvas de tracción para los dos niveles de presión analizados son pequeñas (ver Figura 5.30) se propone realizar una transformación lineal para estimar los parámetros de fricción y la reducción de la pendiente inicial para valores intermedios de presión. Debido a que no se dispone de más datos, se propone asimismo aplicar una extrapolación para valores de presión fuera del rango entre 900 y 1 500 MPa.

Mediante este procedimiento, se pueden obtener diferentes funciones de fricción y los valores de reducción de la pendiente inicial para cada valor de presión máxima de Hertz en cada área de contacto analizada, mediante una transformación lineal para los parámetros de fricción y la reducción de pendiente inicial entre los valores correspondientes a los niveles de presión de 900 y 1 500 MPa.

A partir de las funciones de fricción y los correspondientes valores de reducción de la pendiente inicial, aplicando FASTSIM se calculan las curvas de tracción.

La Figura 5.31 muestra un ejemplo de las curvas de tracción obtenidas para distintos valores de presión máxima, calculadas a partir de las funciones de fricción y de la reducción de pendiente inicial, cuyos valores se han obtenido interpolando (o extrapolando) entre los valores de las curvas de 900 y 1 500 MPa. Se han calculado para el área de contacto que aparece entre los dos discos de la máquina SUROS. Para superficies secas y mojadas se ha usado el modelo de función de fricción  $f_{1b}$ . Para superficies con aceite se ha utilizado el modelo  $f_2$ .





**Figura 5.31.** Curvas de tracción calculadas para diferentes valores de presión para superficies secas, mojadas o con presencia de aceite. Las curvas para 900 y 1 500 MPa se representan con una línea más gruesa.

### ***d.3. Uso de modificadores de fricción***

El tercer caso estudiado se corresponde con el uso de *modificadores de fricción*. El objetivo de este punto es obtener los parámetros que definen las funciones de fricción y la reducción de pendiente inicial, para el uso de modificadores de fricción.

Los modificadores de fricción son sustancias formadas por compuestos sólidos secos que se mezclan con agua y se depositan sobre la cabeza del carril de forma líquida. Cuando el agua se evapora, una capa fina remanente mantiene un nivel óptimo de fricción [20].

El objetivo de estas sustancias es [7, 21]:

- Eliminar la pendiente negativa de la curva de tracción para altos deslizamientos, que es responsable de las inestabilidades de rodadura-deslizamiento (*roll-slip*). Estas inestabilidades pueden provocar la generación de ruido de *squeal* o desgaste ondulatorio sobre la superficie del carril.

El tipo de modificadores de fricción que consigue esta característica se conoce como *modificadores de fricción de alta característica positiva* (o con sus siglas en inglés *HPF* de *high positive friction modifiers*).

- Mejorar la adhesión. Estos modificadores se conocen como *mejoradores de adhesión* o *mejoradores de tracción* (en inglés *adhesion enhancers* o *traction enhancers*).
- Reducir el efecto de la *fatiga de contacto por rodadura* (*Rolling contact fatigue*).
- Reducir las tasas de desgaste.

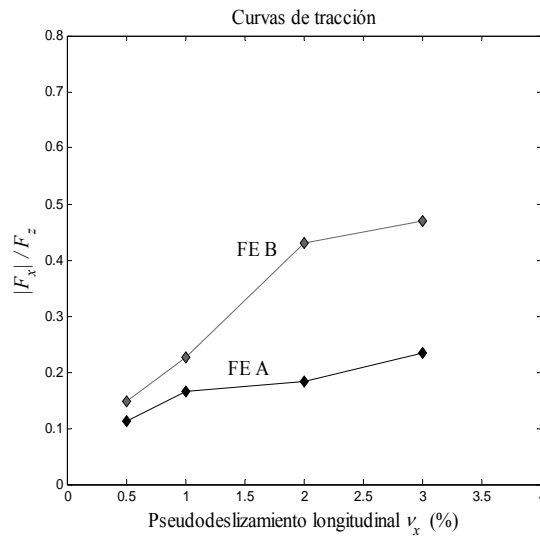
Para el ajuste de las curvas de tracción se han tomado los datos de [7] donde los *modificadores de fricción* se usan como *mejoradores de adhesión*. Estos mejoradores de fricción se usan para facilitar las operaciones de tracción y el frenado bajo condiciones de baja adherencia. En dicho estudio se ensayan dos tipos de mejoradores de adhesión, a los que se referirá como *FE* (del inglés *friction enhancers*): FE tipo *A* y FE tipo *B*.

- FE *A* se ha probado de forma satisfactoria en un depósito de trenes en Japón para superar problemas de adhesión relacionados con la lluvia.

- FE B está siendo usado de forma extensiva en otoño, en la época de caída de hojas, en las redes de Gran Bretaña y Países Bajos para mitigar los problemas de adhesión debido a la presencia de hojas y pequeñas cantidades de agua.

Las curvas de tracción se obtuvieron para una velocidad media de giro de los especímenes a 400 rpm (que corresponde aproximadamente a una velocidad en la superficie de contacto de 1 m/s) con un valor de presión máxima de Hertz de 1200 MPa. Estos mejoradores de fricción se aplicaron sobre las superficies secas de rueda y carril. En este caso únicamente se dispone de medidas para un nivel de presión, por lo que no se permite conocer el efecto de la presión sobre los mejoradores de fricción.

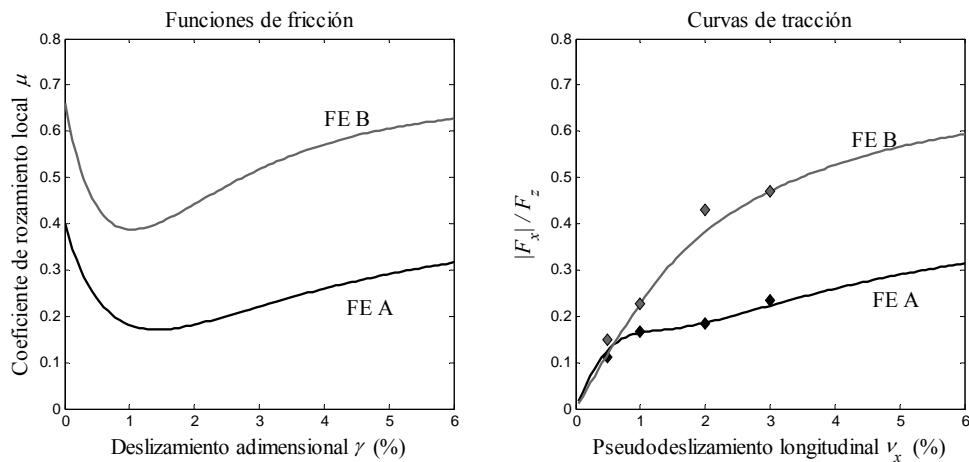
En la Figura 5.32 se muestran las curvas de tracción medidas para los dos mejoradores de fricción estudiados. En los dos casos, la forma de las curvas es creciente en todo el rango estudiado, igual que sucede en la familia de curvas de *baja adherencia* del punto 5.3.2.d.1 (curvas medidas para la presencia de aceite o de hojas secas o mojadas). Este valor positivo de la pendiente que aparece en la curva de tracción para un lubricante (considerando el caso del aceite, o el caso de las hojas como lubricante natural) impide que se generen los efectos negativos asociados a la inestabilidad de rodadura-deslizamiento. Por esta razón, el aceite fue usado inicialmente para mejorar el contacto rueda-carril [20]. Sin embargo, debido al bajo coeficiente de tracción (en el caso del aceite, el máximo coeficiente de tracción medido es de 0,08) se pueden comprometer las operaciones de tracción y frenado. Esta contrapartida no aparece con el uso de mejoradores de fricción, cuyo valor de coeficiente de tracción alcanza valores mucho más elevados (entre 0,2 y 0,5).



**Figura 5.32.** Curvas de tracción medidas experimentalmente para los mejoradores de fricción.

Debido a que la pendiente de la curva de tracción es positiva en todo el rango medido, se usa el modelo  $f_2$  para el ajuste. La Figura 5.33 muestra las funciones de fricción y las curvas de tracción ajustadas para los datos experimentales. La Tabla 5.7 ofrece el valor de los parámetros de fricción identificados y la reducción de pendiente inicial, así como el error calculado.

Analizando los datos de la Tabla 5.7, aparece una reducción de la pendiente inicial en los dos casos, con  $k$  que vale 0,44 para FE A y 0,32 para FE B. En cuanto a los valores de los coeficientes de rozamiento estático y dinámico identificados, para el FE A, éstos valen 0,40 y para el FE B, 0,66. Estos resultados parecen sugerir que se utilice un modelo de coeficiente de rozamiento variable; sin embargo, la forma de las curvas de tracción no queda muy bien definida y para poder extraer conclusiones haga falta disponer de más puntos que definan la curva de tracción medida experimentalmente. Según el ajuste realizado, el error relativo es inferior al 3 % en ambos casos, aspecto que indica que el ajuste realizado es adecuado.



**Figura 5.33.** Funciones de fricción y curvas de tracción para el caso de los mejoradores de adherencia (FE).

**Tabla 5.7.** Parámetros identificados para el uso de los *mejoradores de adherencia* (FE) usando la función de fricción  $f_2$ .

	Función exponencial $f_2$	
	FE A	FE B
$k$	0,44	0,32
$\mu_s$	0,40	0,66
$\alpha$	150,00	164,00
$\mu_d$	0,40	0,66
$\beta$	26,00	50,00
$\varepsilon$ (%)	1,63	2,60

Como **conclusiones** de este apartado (apartado 5.3.2.d), cabría señalar en primer lugar que en función de la forma de la curva de tracción medida experimentalmente, se debe seleccionar uno u otro modelo de función de fricción. De esta forma se consigue un ajuste adecuado. Los errores cuantificados en los resultados presentados en ningún caso superan el umbral del 5 %.

En segundo lugar, una vez identificados los parámetros de fricción correspondientes al modelo de función de fricción utilizado y el valor de reducción de la pendiente inicial, se dispone de los datos necesarios para modelizar el contacto tangencial en las situaciones estudiadas.

Finalmente, para el caso de superficies secas, mojadas y con aceite, se ofrece un procedimiento para tener en cuenta el efecto de la presión sobre el comportamiento tangencial.

### 5.3.3. Análisis del desgaste en la máquina de doble disco

En este apartado se analizan las repercusiones sobre el desgaste de los distintos estados superficiales en la interfase de contacto, debido a la presencia de contaminantes.

Se parte de los resultados de identificación de parámetros para modelizar el problema tangencial con coeficiente de rozamiento variable del apartado anterior. Además, se dispone de datos de desgaste medidos en la máquina de doble disco.

Por una parte se presenta el análisis del problema de **contacto tangencial** para el área de contacto que aparece en la máquina de doble disco, según la geometría de los discos usados en la máquina SUROS (Figura 5.22), para un valor de presión máxima de Hertz de 1 500 MPa.

Por otra parte se efectúa una **estimación del desgaste**. Para ello se usa un modelo *basado en la transferencia de energía* (ver Cap. 2) con el uso de la ley de desgaste de la *University of Sheffield-USFD* (ver Cap. 2, Tabla 2.3 y [57]). Cabe recordar que esta ley se ha obtenido a partir de ensayos en la máquina de doble disco para el contacto entre superficies secas.

Se van a presentar dos **cálculos** realizados:

- Análisis local de las magnitudes asociadas al problema tangencial y estimación del desgaste
- Análisis global de las magnitudes asociadas al problema tangencial y estimación del desgaste.

Con el fin de considerar el estado superficial, en cada cálculo se utilizarán **cuatro modelos** (o estados superficiales):

- (1) Modelo de coeficiente de rozamiento constante  $\mu = 0,4$  y sin factor de reducción de la pendiente inicial ( $k = 1$ ).
- (2) Modelo de coeficiente de rozamiento variable identificado a partir de las curvas de tracción para *superficies secas*.
- (3) *idem* para *superficies mojadas*.
- (4) *idem* para superficies con *aceite*.

En el caso (1) se usa un valor comúnmente empleado en la bibliografía para modelizar el contacto rueda-carril (ver valores en apartado 5.3.4.b). En el resto

de casos se usan los valores de los parámetros de fricción y reducción de la pendiente inicial identificados en el apartado 5.3.2.d.

El objetivo de emplear estos modelos es comparar por una parte el resultado que se obtendría según la hipótesis clásica de considerar un coeficiente de rozamiento constante igual a 0,4, con el resultado obtenido para la modelización con un coeficiente de rozamiento variable según la presencia de contaminante.

Además, se utilizan tres distintos **escenarios** de simulación en función del valor del pseudodeslizamiento longitudinal en el área de contacto:

- (a)  $v_x = 0,5\%$ : la mayoría del área de contacto está en adhesión. Esta situación se corresponde con la zona lineal de la curva de tracción.
- (b)  $v_x = 2,0\%$ : caso general, con zonas de adhesión y deslizamiento. Este punto se encuentra cercano al óptimo de adhesión (máximo de la curva de tracción) para superficies secas y mojadas (ver Figura 5.27) y cerca del mínimo de lubricación hidrodinámica según la función de fricción identificada para las superficies con aceite (ver Figura 5.28).
- (c)  $v_x = 5,0\%$ : la mayoría del área está en deslizamiento. La curva de tracción se encuentra prácticamente saturada para el valor del coeficiente de rozamiento dinámico.

#### **a. Análisis local de las magnitudes asociadas al problema tangencial y estimación del desgaste**

A nivel local, se analizan las siguientes magnitudes asociadas al problema tangencial y estimación del desgaste:

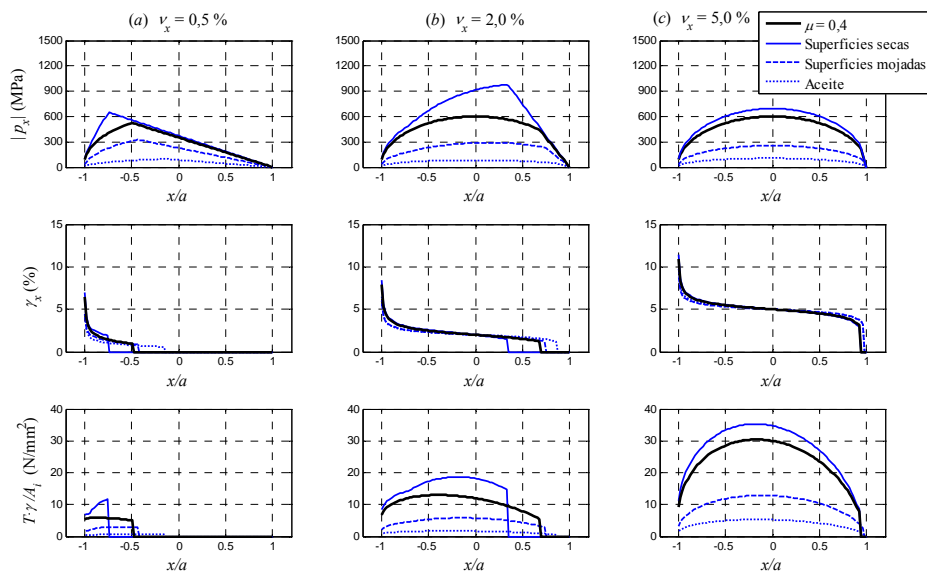
- Distribución de tensiones tangenciales
- Distribución del deslizamiento adimensional
- Distribución del índice  $T\gamma/A$
- Distribución de la tasa de desgaste  $W_R$ .

Debido a que se trata de la geometría de doble disco, el problema es bidimensional, por lo que la distribución de tensiones tangenciales y deslizamiento sólo aparecen en dirección longitudinal. Por tanto, el índice de desgaste  $T\gamma/A$  a nivel local, se calcula como el producto de la tensión tangencial por el deslizamiento adimensional (ambos no nulos únicamente en dirección longitudinal):

$$\frac{T\gamma}{A_i} = \frac{T\gamma}{A}(x_i) = |p_x(x_i)\gamma_x(x_i)| \quad (5.33)$$

El subíndice  $i$  hace referencia al elemento del área de contacto donde se calcular el valor de este índice. Este valor, según la ley USFD, está relacionado con la tasa de desgaste.

La Figura 5.34 muestra la solución del problema tangencial para los cuatro modelos y bajo los tres escenarios, donde se representa la distribución de tensiones tangenciales ( $p_x$ ), el deslizamiento adimensional ( $\gamma_x$ ) y la correspondiente energía disipada en cada elemento ( $T\gamma/A_i$ ).



**Figura 5.34.** Distribuciones de tensiones tangenciales, deslizamiento adimensional e índice de desgaste en el área de contacto para los modelos considerados bajo los tres distintos escenarios.

Analizando en primer lugar la distribución de tensiones tangenciales, se observa como existen diferencias en cuanto a la distribución de las zonas de adhesión (donde  $p_x$  sigue una recta) y deslizamiento (donde  $p_x$  sigue la forma dada



por  $\mu p_z$  según el modelo de Hertz). A su vez, el valor alcanzado por  $p_x$  es distinto según el modelo que se use.

Tomando la zona de adhesión, según la ecuación (5.24) la pendiente de esta recta esta dada por el término  $v_x/L_1$  que está afectado por el coeficiente  $k$ . Por tanto, al disminuir  $k$  (y aumentar la reducción de la pendiente inicial), disminuye la rigidez tangencial del contacto y las tensiones tangenciales crecen más lentamente. Según esta característica, la distribución para  $\mu = 0,4$  y para superficies secas tienen el mismo comportamiento y son las más rígidas, seguidas de las superficies mojadas y con presencia de aceite, en los tres escenarios.

En cuando a la zona de deslizamiento, el punto en que empieza a deslizar depende de cuando  $p_x$  corta la curva definida por  $\mu p_z$ . Este punto aparece en primer lugar para superficies con aceite y siguiendo este orden para superficies mojadas, para  $\mu = 0,4$  y para superficies secas, en los tres escenarios. Esta característica también se aprecia en los gráficos para la distribución del deslizamiento  $\gamma_x$  ya que este punto se corresponde cuando la distribución de  $\gamma_x$  deja de ser nula. A partir de este punto cada modelo sigue la correspondiente curva  $\mu p_z$  sabiendo que el valor de  $\mu = \mu(\gamma)$  es función del deslizamiento. Considerando la curva de saturación  $\mu(\gamma) p_z$  ésta tiene un valor más alto para superficies secas, seguido de  $\mu = 0,4$ , superficies mojadas y con presencia de aceite, en los tres escenarios.

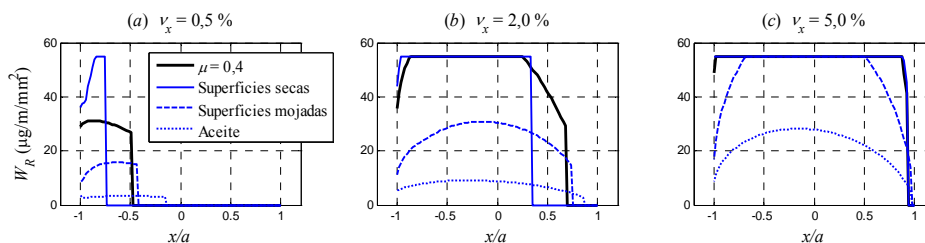
Es interesante analizar las distribuciones de  $p_x$  en la zona de deslizamiento (dadas por el producto  $\mu(\gamma) p_z$ ) para los modelos de coeficiente de rozamiento variable. Se toma como ejemplo el caso del contacto tangencial entre superficies secas. Para valores *pequeños* de deslizamiento, el valor de  $\mu(\gamma)$  es grande en comparación con el valor obtenido para valores de deslizamiento *más elevados*. Así, comparando la distribución obtenida en el escenario para  $v_x = 2,0 \%$ , la curva de saturación  $\mu(\gamma) p_z$  tiene un valor más alto que la obtenida para el escenario de  $v_x = 2,0 \%$  que da lugar a valores de deslizamiento más elevados.

Analizando ahora la distribución del deslizamiento en el área de contacto, apenas existen diferencias en cuanto al modelo usado. En cambio, sí que depende del valor del pseudodeslizamiento longitudinal dado por cada escenario. El valor medio de la distribución  $\gamma_x$  para cada escenario, se encuentra más o menos centrado en el valor de pseudodeslizamiento utilizado. Por ejemplo, en el escenario para  $v_x = 2,0 \%$ , la distribución  $\gamma_x$  está centrada alrededor de un valor de deslizamiento del  $2,0 \%$ . Por tanto, estos dos conceptos se encuentran de alguna forma relacionados. Cabe recordar que el pseudodeslizamiento asociado al área de contacto es un parámetro cinemático del punto teórico de contacto mientras que el deslizamiento depende del análisis de la deformación tangencial de la superficie y

aparece cuando la deformación en un punto de la superficie no es capaz de absorber la diferencia de velocidades entre los dos cuerpos en contacto.

En tercer lugar se va a analizar la distribución del índice de desgaste  $T\gamma/A$  en el área de contacto. El gráfico correspondiente a  $T\gamma/A$  se calcula como el producto de los gráficos para  $p_x$  y  $\gamma_x$ . Al igual como sucede con la distribución de  $p_x$ , los valores más elevados se corresponden con la distribución para superficies secas, seguido de  $\mu=0,4$ , superficies mojadas y superficies con aceite. Según los regímenes considerados por la ley USFD (ver Tabla 2.3, Cap. 2), para valores de  $T\gamma/A > 10,4 \text{ N/mm}^2$  aparece la transición del régimen de *desgaste suave* a régimen de *desgaste severo*. Esta transición está asociada al efecto de la saturación del área de contacto. Aplicando esta ley a todos los modelos considerados, aparece una transición al régimen severo en un tramo pequeño para superficies secas en el escenario (a), en gran parte de la zona de deslizamiento para superficies secas y  $\mu = 0,4$  en el escenario (b) y para prácticamente la totalidad del área de contacto con superficies secas y con  $\mu = 0,4$  y parte de la zona de deslizamiento para superficies mojadas en el escenario (c).

En la Figura 5.35 se representa la distribución de tasa de desgaste  $W_R$  calculada a partir del índice de desgaste  $T\gamma/A$  según la ley USFD. En la zona correspondiente al régimen de desgaste suave, la tasa de desgaste es proporcional al índice de desgaste, mientras que en la zona de desgaste severo, la tasa de desgaste satura en un valor de  $55 \text{ } \mu\text{g/m/mm}^2$ .



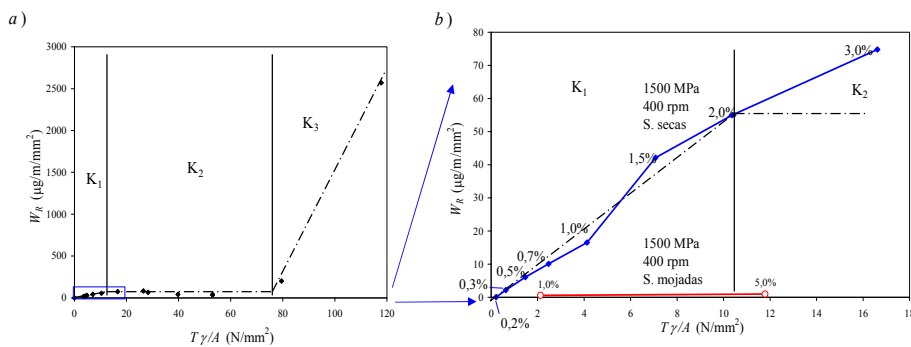
**Figura 5.35.** Tasa de desgaste calculada aplicando la ley USFD.

Aunque las leyes de desgaste se obtienen generalmente sólo para condiciones de superficies secas, se usan en presencia de una contaminante en la superficie, lo que está más allá del alcance de su validación inicial [40]. En este apartado, la ley de desgaste USFD se usa como referencia para mostrar la estimación del desgaste asumiendo que las superficies están secas y limpias.

Cabe destacar que en la Figura 5.35 se ha aplicado la ley de desgaste USFD (obtenida para contacto entre superficies secas) a los cuatro modelos de estado superficial considerados (superficies secas,  $\mu = 0,4$ , superficies mojadas y

superficies con presencia de aceite). Para analizar el efecto de aplicar la ley USFD en estos casos, se van a presentar diversos datos experimentales.

La Figura 5.36 muestra medidas de desgaste tomadas bajo ciertas condiciones en la máquina de doble disco. En *a*) se presenta la relación entre el índice de desgaste  $T\gamma/A$  y la tasa de desgaste  $W_R$  para diversos puntos medidos en la máquina de doble disco, junto al ajuste realizado según la ley USFD. Se pueden distinguir sus tres regímenes dados por  $K_1$  (*suave*),  $K_2$  (*severo*) y  $K_3$  (*catastrófico*). En *b*) se muestra una vista ampliada del régimen de desgaste suave y la transición al régimen severo, donde aparecen los valores de pseudodeslizamiento correspondientes a cada punto. En esta gráfica se distinguen los puntos medidos para condiciones de superficies secas (ajustados mediante la ley USFD) junto a un par de puntos medidos para condiciones de superficies mojadas. Se puede fácilmente observar que estos dos puntos medidos en condiciones de superficies mojadas presentan una tasa de desgaste mucho menor que los puntos medidos en condiciones de superficies secas y por tanto no se ajustan a la ley USFD.



**Figura 5.36.** *a*) Ley de desgaste USFD. *b*) Vista ampliada con los puntos medidos para superficies secas y para superficies mojadas. Los valores en el gráfico indican el pseudodeslizamiento longitudinal (%). Adaptado de [57].

Por tanto, la estimación de tasa de desgaste realizada, usando la ley USFD, para superficies en contacto que no estén secas no dará resultados adecuados. Como corroboran los datos experimentales, para superficies mojadas la tasa de desgaste será mucho inferior que la estimada mediante la ley USFD. Previsiblemente, para superficies con aceite la tasa de desgaste correspondiente será incluso menor.

Según este razonamiento en la Figura 5.35 serían válidas las estimaciones de tasa de desgaste realizadas para superficies secas y para  $\mu = 0,4$  (ya que es un valor que representa superficies secas). En cambio, no serán válidas las estimaciones para superficies mojadas o con presencia de aceite.

También resulta interesante comentar el efecto del estado superficial sobre el cálculo del índice de desgaste  $T\gamma/A$ . Este aspecto se observa en la Figura 5.36-*b*) comparando los valores del índice de desgaste para superficies secas con superficies mojadas. Los puntos para superficies mojadas se han medido para valores de pseudodeslizamiento  $\nu_x = 1,0\%$  y  $\nu_x = 5,0\%$ . Considerando ahora los puntos para superficies secas, tomando los puntos medidos con los mismos valores de pseudodeslizamiento, éstos tienen valores de índice de desgaste mucho mayores (el punto para  $\nu_x = 5,0\%$  en condiciones secas quedaría fuera del rango). Este aspecto también se aprecia en los cálculos numéricos de la Figura 5.34, donde en el gráfico para la distribución  $T\gamma/A$ , ésta adopta valores más bajos con la aplicación de un contaminante en la interfase de contacto.

En esta Tesis se propone el uso de una ley de desgaste para superficies secas estimada a partir de los puntos medidos en esta condición (ver Figura 5.36-*b*). Usando estos dos puntos se puede ajustar una función lineal sin término independiente (Tabla 5.8). Esta ley representa una estimación para el desgaste obtenido para áreas de contacto con superficies mojadas para pequeños valores de  $T\gamma/A$  y para un valor de pseudodeslizamiento hasta un 5 %.

**Tabla 5.8.** Ley de desgaste propuesta para superficies de contacto mojadas.

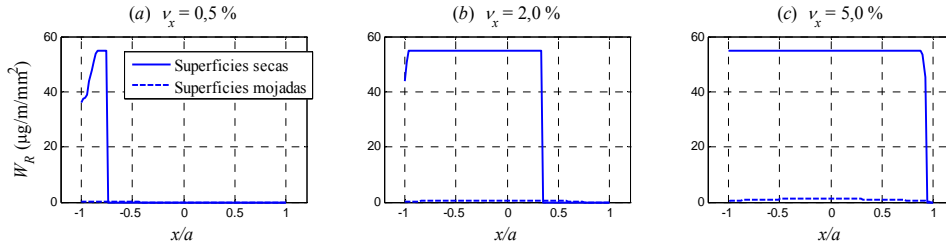
Régimen	$T\gamma/A$ (N/mm <sup>2</sup> )	$W_R$ (μg/m/mm <sup>2</sup> )
$K_1$ ( <i>suave</i> )	$T\gamma/A \leq 14,0$	$0,09 T\gamma/A$

Debido a que sólo aparecen dos puntos, se considera un único régimen (*suave*). Esta definición se debería completar con la medición de más puntos en condiciones de superficies mojadas, pero en cualquier caso representa una estimación más realista que el caso de utilizar la curva USFD de la Tabla 2.3.

Para el caso de superficies con aceite no se dispone de datos medidos, por lo que no se puede definir una ley de desgaste correspondiente a este estado superficial. Puesto que el nivel de tensiones es más bajo y se establece un régimen hidrodinámico para valores altos de deslizamiento, lo que minimiza el desgaste [109], posiblemente el uso de la ley de desgaste propuesta para superficies mojadas (Tabla 5.8) dé una mejor estimación para la presencia de aceite que la ley USFD (Tabla 2.3).

Tomando la definición de la ley de desgaste propuesta (Tabla 5.8) se ha calculado la tasa de desgaste para superficies mojadas en los tres escenarios, que se ha representado junto a la tasa de desgaste para superficies secas (Figura 5.37). Se puede comparar esta estimación con la realizada en la Figura 5.35 considerando la ley USFD. El valor de tasa de desgaste alcanzado, con la ley de desgaste propuesta,

es de  $1,16 \mu\text{g}/\text{mm}/\text{mm}^2$  frente a valores que llegaban a  $55,0 \mu\text{g}/\text{mm}/\text{mm}^2$  según la ley USFD en el escenario (c).



**Figura 5.37.** Tasa de desgaste calculada para superficies secas según la ley USFD y para superficies mojadas según la ley propuesta.

### b. Análisis global de las magnitudes asociadas al problema tangencial y estimación del desgaste

Una vez realizado un análisis a nivel local de las áreas de contacto se va a realizar un análisis global. Para ello se va a obtener el valor equivalente del índice de desgaste  $T\gamma/A$  a nivel global y se calculará la correspondiente tasa de desgaste  $W_R$  global usando las leyes de desgaste correspondientes.

Se empleará por una parte de ley de desgaste USFD (Tabla 2.3) obtenida a partir de datos experimentales en condiciones secas y, por otra parte, la ley de desgaste propuesta para superficies mojadas (Tabla 5.2).

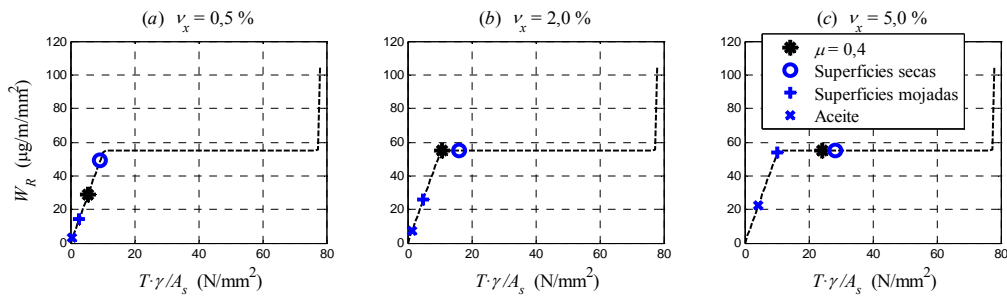
A partir del índice de desgaste  $T\gamma/A$  definido a nivel local, se puede calcular un indicador global que represente la energía disipada en el área de contacto. Puesto que según el modelo de desgaste utilizado sólo se produce desgaste en la zona de deslizamiento, se define el indicador global promediado sobre esta zona. Este índice se denota como  $T\gamma/A_s$  y se define en la fórmula (5.34), donde  $N$  es el número de elementos en el área de contacto,  $\Delta x$  es la longitud de cada elemento y  $A_s$  es el área de deslizamiento por unidad de anchura de los discos.

$$\frac{T\gamma}{A_s} = \frac{1}{A_s} \sum_{i=1}^N \frac{T\gamma}{A_i} \Delta x \quad (5.34)$$

donde el subíndice  $s$  se refiere a la zona de deslizamiento, en inglés *slip*.

Mediante la fórmula (5.34) se puede obtener el valor global de  $T\gamma/A_s$  y usando la ley USFD la tasa de desgaste global. De esta forma se consiguen valores globales que son representativos de los mecanismos de desgaste que pueden aparecer en la zona de deslizamiento.

En primer lugar se aplica la ley USFD para el cálculo de la tasa de desgaste correspondiente a los cuatro estados superficiales. La Figura 5.38 muestra los valores de desgaste global representados sobre la ley USFD para los cuatro estados superficiales y en los tres escenarios.



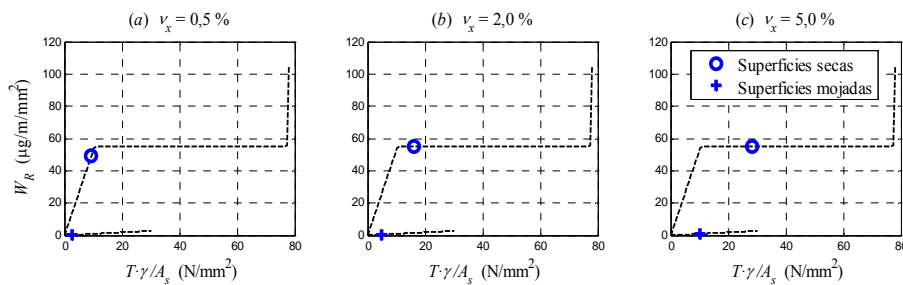
**Figura 5.38.** Valor global de  $T\gamma/A_s$  calculado para  $\mu = 0,4$  y para los tres estados superficiales y representados sobre la ley de desgaste USFD.

Analizando la Figura 5.38 se pueden extraer conclusiones similares a las de la distribución  $T\gamma/A_i$  de la Figura 5.34. En el escenario (a), los cuatro estados superficiales se encuentran en la zona de desgaste suave. En el escenario (b), el área de contacto con superficies secas se encuentra en el régimen de desgaste severo y con  $\mu = 0,4$ , en la transición de desgaste suave a severo. Finalmente en el escenario (c), las áreas de contacto con superficies secas y con  $\mu = 0,4$  están en la zona de desgaste severo, mientras que con superficies mojadas está justo en la transición y con superficies con aceite se mantiene en la zona de desgaste suave.

De esta forma se comprueba como la consideración de un distinto estado superficial a través de la introducción de un distinto valor del coeficiente de rozamiento (para  $\mu$  constante o  $\mu$  variable) hace que el punto correspondiente al área de contacto se sitúe en un lugar distinto de la curva correspondiente a la ley de desgaste.

Sin embargo, esta estimación no es correcta debido a que se necesita una nueva ley de desgaste obtenida para el correspondiente estado tribológico de las superficies. Esta nueva ley debe obtenerse a partir del ensayo con las superficies en las mismas condiciones que las que se quiere modelizar.

Por esta razón, en segundo lugar, se realizan los mismos cálculos, pero utilizando la ley USFD para las áreas de contacto con superficies secas y la ley de desgaste propuesta (Tabla 5.2) para las áreas de contacto con superficies mojadas. Estos valores se representan en la Figura 5.39.



**Figura 5.39.** Valor global de  $T\gamma/A_s$  calculado para superficies secas y mojadas. Para superficies secas se ha representado sobre la ley USFD; para superficies mojadas se ha representado sobre la ley propuesta.

En la Figura 5.39 se puede observar como los puntos correspondientes a las áreas de contacto se encuentran en la misma abscisa (índice de desgaste) que en la Figura 5.38, pero el valor de la ordenada (tasa de desgaste) es distinto, debido a que se usan leyes diferentes para estimar el desgaste en los dos estados superficiales. La tasa de desgaste obtenida para superficies mojadas es mucho menor (del orden de unas 60 veces) que la estimada inicialmente con la ley USFD.

Una vez presentada la modelización del problema tangencial con coeficiente de rozamiento variable, identificados los parámetros que caracterizan el problema tangencial a partir de curvas experimentales y presentado un análisis del desgaste para el contacto en la máquina de doble disco, se va a realizar la aplicación a la geometría del contacto rueda-carril.

### 5.3.4. Aplicación al contacto rueda-carril

Este apartado tiene un doble objetivo. El primer objetivo es realizar una aplicación del algoritmo FASTSIM con coeficiente de rozamiento variable al contacto rueda-carril, usando las funciones de fricción y reducción de la pendiente inicial identificados a partir de curvas experimentales. Además se comprobará como afecta la modelización del problema tangencial al desgaste a través del índice de desgaste  $T\gamma/A$ .

El segundo objetivo es efectuar una comparación entre los resultados del problema de contacto obtenidos con coeficiente de rozamiento constante con los resultados obtenidos con coeficiente de rozamiento variable. Para los cálculos con coeficiente de rozamiento constante se usará un valor nominal característico del contacto rueda carril; para el coeficiente de rozamiento variable se emplearán las funciones de fricción y la reducción de pendiente inicial identificados en el punto 5.3.2.d.

Se incluyen dos secciones: en primer lugar se describirá el modelado para la geometría del contacto rueda-carril. En segundo lugar, se presentan dos ejemplos de aplicación.

### a. Modelado de la geometría del contacto rueda-carril

En este punto se presenta la modelización del contacto para el caso rueda-carril. Debido a la geometría del contacto, el problema es tridimensional. Las ecuaciones derivadas para la modelización del problema tangencial considerando un coeficiente de rozamiento variable, se particularizan para el caso del contacto rueda-carril.

El contacto rueda-carril se analiza bajo las siguientes **hipótesis**:

- El *problema geométrico* y *problema normal* se resuelve según el método propuesto en el Cap. 4. Se trata de un método basado en la interpenetración virtual entre superficies en el que se ajusta una elipse equivalente a cada una de las áreas de contacto obtenidas. Los semiejes de la elipse de contacto son  $a$  y  $b$  según las direcciones longitudinal y lateral, respectivamente. La distribución de presiones normales sigue el modelo de Hertz.
- El *problema tangencial* se resuelve mediante el algoritmo *FASTSIM* con *coeficiente de rozamiento variable* según las modificaciones propuestas en el punto 5.3.2.a. Puesto que el problema es tridimensional, se tienen en cuenta los valores de *pseudodeslizamiento longitudinal*, *transversal* y término de *spin* (según (2.64)) y los parámetros de flexibilidad  $L_1$ ,  $L_2$  y  $L_3$  (según la ecuación (2.71), [44]). Los parámetros que definen las *funciones de fricción* identificados para la dirección longitudinal se utilizan también para la dirección lateral.
- Para expresar la dependencia respecto a la *presión* de las funciones de fricción, al igual que para la geometría de doble disco, se supone una variación lineal de los parámetros de fricción y el valor de la reducción de la pendiente inicial.
- En la *estimación del desgaste* se usa el índice  $T\gamma/A$  correspondiente al área de contacto elíptica. Para calcular este valor se deben obtener las componentes del vector de deslizamiento adimensional  $\gamma$ . Como ley de desgaste se usa la ley USFD obtenida para superficies secas (Tabla 2.3) y la ley propuesta para superficies mojadas (Tabla 5.8).

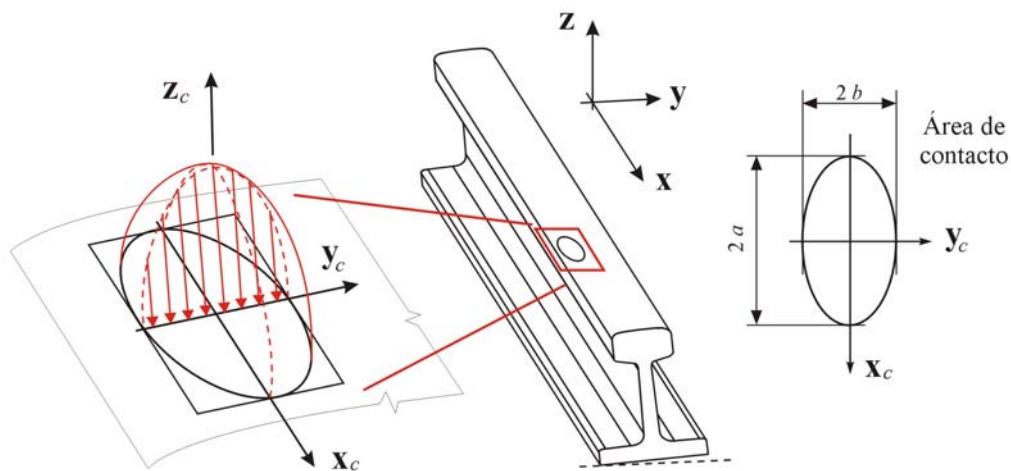


### *a.1. Problema geométrico y normal de contacto*

Debido a la definición de las superficies de rueda y carril y al movimiento relativo que aparece entre los cuerpos, la resolución del problema de contacto geométrico es más compleja que en el caso de la geometría de doble disco. Para la resolución del problema geométrico y normal se sigue el procedimiento propuesto en el Cap. 4.

La Figura 5.40 muestra un esquema contacto rueda-carril, donde el área de contacto se aproxima a una elipse equivalente y se asume una distribución de Hertz dentro de esta elipse. Como solución del problema de contacto geométrico y normal se obtiene:

- Número de áreas de contacto
- Posición y conicidad de las áreas de contacto
- Dimensiones de  $a, b$  de los semiejes de la elipse equivalente para cada área de contacto
- Valor de la fuerza normal y valor de la presión máxima para cada área de contacto



**Figura 5.40.** Representación esquemática de la geometría del contacto rueda-carril, con el área de contacto elíptica de dimensiones  $2a \cdot 2b$  y la distribución normal de presiones dentro de esta área.

### ***a.2. Problema tangencial de contacto***

La solución del problema tangencial, para cada área de contacto y resuelto el problema normal, se obtiene con la aplicación del algoritmo FASTSIM con coeficiente de rozamiento variable, según las modificaciones introducidas en el punto 5.3.2.a.

Los valores de los parámetros de flexibilidad  $L_1$ ,  $L_2$  y  $L_3$  se obtienen a partir de la fórmula (2.71) en función de las dimensiones de la elipse equivalente y de las características mecánicas de los materiales en la interfase.

En la modelización del contacto tangencial para la geometría rueda-carril se supone que el deslizamiento longitudinal es mucho mayor que el deslizamiento lateral, por tanto, los parámetros identificados para la dirección longitudinal se asumen también válidos para la dirección lateral. Según Polach [82] esta hipótesis se puede aceptar debido a que estos parámetros influyen principalmente en la dirección longitudinal donde ocurren los mayores valores de deslizamiento. Esta hipótesis implica que:

- Las funciones de fricción identificadas a partir de curvas de tracción experimentales obtenidas en la dirección longitudinal, se suponen válidas en cualquier dirección (se asume isotropía [78]).
- Para calcular el valor del deslizamiento según la fórmula genérica (5.10) o bien mediante las ecuaciones (5.19), (5.20) o (5.21) derivadas para el uso con las funciones de fricción  $f_{1a}$ ,  $f_{1b}$  o  $f_2$ , respectivamente, se toma  $L = L_1$ .
- La reducción de la pendiente inicial (dada por el coeficiente  $k$  según la ecuación (5.22)) obtenida a partir de identificación de las curvas de tracción medidas se supone que es válida en cualquier dirección.

### ***a.3. Reducción de la pendiente inicial***

En el punto 5.3.2.b se realiza una identificación de los parámetros de fricción y de la reducción de la pendiente inicial a partir de curvas experimentales obtenidas con el contacto de doble disco.

Con respecto a la geometría del contacto de doble disco, el contacto rueda-carril representa un caso más completo, debido principalmente a la geometría tridimensional. Además del pseudodeslizamiento longitudinal, aparece un término de pseudodeslizamiento lateral y un término de *spin* y la tensión tangencial es un vector con componentes en dirección longitudinal y en dirección lateral.

En este punto se van a obtener las expresiones de los valores de la pendiente inicial en función de los valores de los pseudodeslizamientos con el fin de poder aplicar el factor de reducción  $k$ .

Realizando la integral de las distribuciones de tensiones tangenciales en un área de contacto elíptica y asumiendo que el área está en adhesión, la expresión de las fuerzas tangenciales es del tipo

$$\begin{aligned} F_x &= s_{xx} V_x \\ F_y &= s_{yy} V_y + s_{y\varphi} \varphi \end{aligned} \quad (5.35)$$

Identificando términos a partir de la expresión (2.69) obtenida en el Cap. 2, se tiene que el valor de los coeficientes de los valores de pseudodeslizamiento, son

$$s_{xx} = \frac{-8a^2b}{3L_1} \quad s_{yy} = \frac{-8a^2b}{3L_2} \quad s_{y\varphi} = \frac{-\pi a^3b}{4L_3} \quad (5.36)$$

donde  $s_{xx}$ ,  $s_{yy}$ ,  $s_{y\varphi}$  son los valores de las pendientes de las curvas de tracción obtenidas para la fuerza longitudinal en función del pseudodeslizamiento longitudinal, para la fuerza lateral en función del pseudodeslizamiento lateral y para la fuerza lateral en función del *spin*, respectivamente.

Si se incluye el efecto de la reducción de la pendiente inicial debido a la presencia de contaminantes y/o rugosidad en las superficies en el contacto, los valores de las pendientes reducidas serían

$$\begin{aligned} s_{xx}^* &= -k \frac{8a^2b}{3L_1} = -\frac{8a^2b}{3L_1^*} \\ s_{yy}^* &= -k \frac{8a^2b}{3L_2} = -\frac{8a^2b}{3L_2^*} \\ s_{y\varphi}^* &= -k \frac{\pi a^3b}{4L_3} = -\frac{\pi a^3b}{4L_3^*} \end{aligned} \quad (5.37)$$

Estas expresiones son análogas a las obtenidas en el caso de la geometría del contacto de doble disco en la expresión (5.29). De la misma forma que para el caso de doble disco, este factor de reducción se puede considerar dentro de los parámetros de flexibilidad  $L^*$  (como factor de mayoración) o a través de la fórmula (2.71), como factor de reducción de los coeficientes de Kalker  $c_{ij}^*$ .

#### a.4. Variación con la presión

Respecto a la dependencia de los parámetros de fricción y la reducción de la pendiente inicial se continúa asumiendo una variación lineal con respecto al valor de presión máxima de Hertz en el área de contacto. Esta hipótesis se fundamenta en los siguientes resultados:

- En primer lugar, con respecto al **problema geométrico y normal**, las relaciones son más complejas que en el caso del contacto de doble disco. Más aún si se considera que la geometría del contacto rueda-carril no cumple las hipótesis de Hertz (ver Cap. 4) y se usa el procedimiento de elipse equivalente, donde las dimensiones de la elipse se ajustan usando un criterio geométrico (ver Cap. 4). En este caso no se dispone de relaciones explícitas.

Para obtener la relación que existe de forma aproximada entre el tamaño del área de contacto y la presión máxima de Hertz se ha tomado el área de contacto que aparece entre los perfiles de rueda y carril para la posición centrada del eje. Se ha ido incrementando la indentación de la rueda sobre el carril y se han anotado los siguientes valores: indentación máxima  $\delta_o$ , fuerza normal  $F_z$ , dimensiones de los semiejes de la elipse equivalente  $a$ ,  $b$  y presión máxima de Hertz  $p_{z_o}$ . Los resultados se representan en las Figuras 5.41-5.44.

Es interesante comentar la Figura 5.44 donde se correlacionan las dimensiones de la elipse equivalente  $a$ ,  $b$  con el valor de presión máxima de Hertz  $p_{z_o}$ . Esta relación es el resultado de un cálculo numérico del problema de interpenetración y el posterior ajuste de la elipse equivalente. Se puede observar como esta relación es aproximadamente lineal.

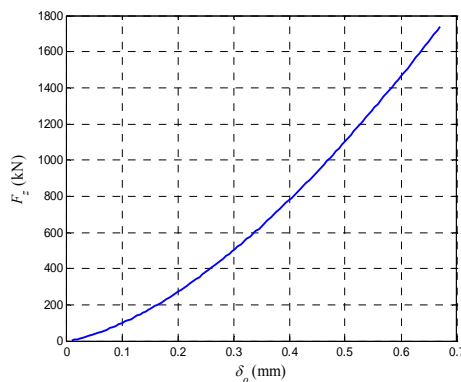
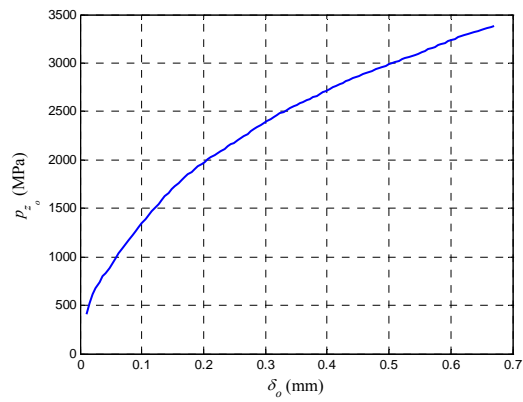
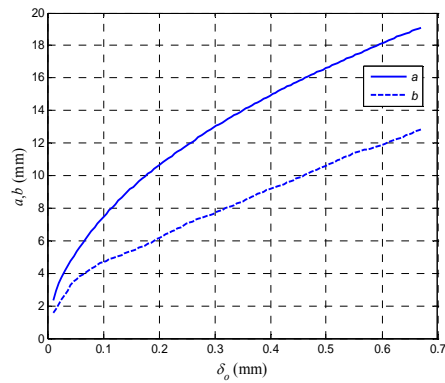


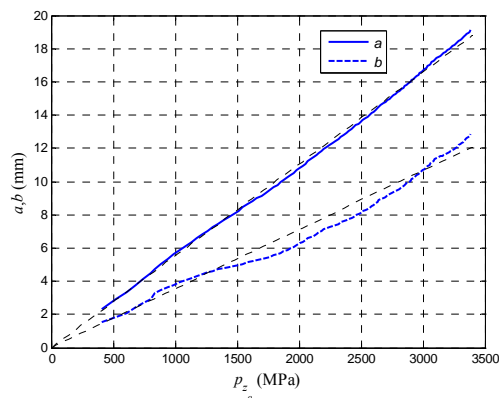
Figura 5.41. Fuerza normal en función de la indentación máxima.



**Figura 5.42.** Presión máxima sobre el área de contacto en función de la indentación máxima.



**Figura 5.43.** Dimensiones del área de contacto (elíptica) en función de la indentación máxima.



**Figura 5.44.** Dimensiones del área de contacto elíptica en función de la presión máxima.

- En segundo lugar, con respecto al **problema tangencial**, tomando la definición de los parámetros de flexibilidad de la fórmula (2.71), se puede observar como la relación existente entre los parámetros  $L_1$  y  $L_2$  y las dimensiones del área de contacto es lineal, por tanto y según el punto anterior, también son lineales con respecto a la presión máxima. Para  $L_3$  esta relación no es lineal, pero su influencia sobre el valor de las tensiones tangenciales es mucho menor que los otros dos [5].

$$L_1 = \left( \frac{8}{3c_{11}G} \right) a \quad L_2 = \left( \frac{8}{3c_{22}G} \right) a \quad L_3 = \left( \frac{\pi}{4c_{23}G} \right) a \sqrt{a/b} \quad (5.38)$$

- Finalmente, con respecto a la **pendiente inicial**, considerando las fórmulas (5.36) y (5.37) se puede observar que esta relación deja de ser lineal.

No obstante, considerando que las diferencias entre las curvas de tracción medidas en la máquina de doble disco para 900 y 1 500 MPa son pequeñas (punto 5.3.2.d.2), se seguirá suponiendo una variación lineal.

### a.5. Estimación del desgaste

Para calcular el valor del índice  $T\gamma/A$  calculado localmente se necesitan conocer las componentes del vector deslizamiento. Según las modificaciones introducidas en FASTSIM para considerar el efecto de un coeficiente de rozamiento variable, se puede calcular el valor del módulo del vector deslizamiento a partir la fórmula (5.10), pero no sus componentes.

A partir de las ecuaciones (2.79) (ver Cap. 2) que permiten obtener los componentes del vector deslizamiento considerando un coeficiente de rozamiento constante, se puede obtener el ángulo que forma el vector deslizamiento con respecto al eje longitudinal como

$$\tan(\alpha_2(x, y)) = \frac{\gamma_y(x, y)}{\gamma_x(x, y)} = \frac{L_2 p_y(x - \Delta x, y) - p_y^{adh}(x - \Delta x, y)}{L_1 p_x(x - \Delta x, y) - p_x^{adh}(x - \Delta x, y)} \quad (5.39)$$

Una vez conocido el valor del módulo del vector y el ángulo se pueden calcular sus componentes. Llamando  $i, j$  a cada uno de los elementos que forman el área de contacto, el valor del índice  $T\gamma/A$  evaluado localmente se puede calcular como

$$\frac{T\gamma}{A}_{i,j} = \frac{T\gamma}{A}(x_i, y_j) = \left| \mathbf{p}_{i,j} \cdot \boldsymbol{\gamma}_{i,j} \right| = \left| p_{x_i,j} (\gamma_{i,j} \cos(\alpha_{2,i,j})) + p_{y_i,j} (\gamma_{i,j} \sin(\alpha_{2,i,j})) \right| \quad (5.40)$$

A partir de este valor, y con la ley de desgaste correspondiente, se puede obtener la tasa de desgaste  $W_R$  local.

### **b. Ejemplos de aplicación al contacto rueda-carril**

En este punto se presentan dos ejemplos para mostrar el efecto de considerar el estado tribológico de las superficies en las fuerzas de interacción rueda-carril y en el cálculo del desgaste. Estos ejemplos incluyen los resultados de un eje en vía recta bajo fuerzas de tracción elevadas y el estudio cuasiestático de un vehículo ferroviario al trazar una curva. Los resultados del procedimiento clásico de considerar un coeficiente de *rozamiento constante estimado a partir de un valor nominal* del contacto rueda carril se comparan con los resultados obtenidos para coeficiente de *rozamiento variable* que representan diferentes estados superficiales, donde los *parámetros que definen el comportamiento tangencial se han identificado a partir de medidas experimentales* (punto 5.3.2.d).

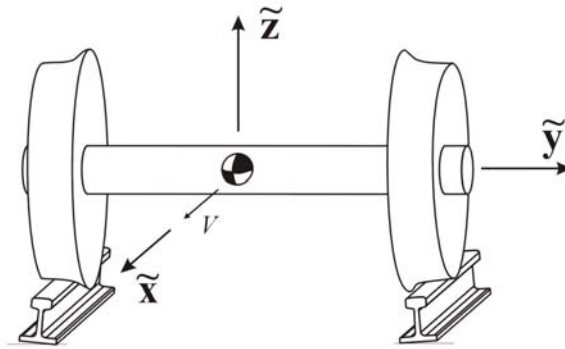
Aunque el coeficiente de rozamiento es un parámetro muy importante para describir el problema tangencial de contacto y la estimación del desgaste, este valor no siempre se ofrece en los artículos publicados. Cuando sí que se ofrece, la bibliografía presenta una gran diversidad de valores. Para superficies secas de contacto metal-metal este valor se encuentra entre 0,25 y 0,5 usado en aplicaciones de simulación dinámica o estimación del desgaste. Se pueden citar algunos ejemplos como los trabajos de Sinclair [101] con valores entre 0,24 y 0,4 para áreas de contacto en la banda de rodadura, Shabana *et al.* [95] donde se usa un valor de 0,5, Enblom *et al.* [23] con 0,3, Simson *et al.* [100] donde se usan distintos valores entre 0,38 y 0,5 y Tunna *et al.* [105], Matsumoto *et al.* [67] y Vuong y Meehan [108] donde se toma 0,4. Estos valores también aparecen en [72]. En este trabajo, para los cálculos realizados con un valor del coeficiente de rozamiento constante, se toma un valor nominal de  $\mu = 0,4$ .

#### ***b.1. Ejemplo 1: aplicación en vía recta***

El objetivo de este ejemplo es investigar el efecto de los contaminantes sobre las fuerzas tangenciales y sobre la estimación del desgaste mediante el modelado del problema tangencial con coeficiente de rozamiento variable. Para ello se analizan las fuerzas en el contacto de un eje centrado rodando en un tramo de vía recta sometido a unas fuerzas de tracción elevadas (Figura 5.45). Los datos usados en la simulación se detallan en la Tabla 5.9. El eje lleva una velocidad constante con un valor impuesto de pseudodeslizamiento longitudinal (para simular la fuerza de tracción) y de spin (para considerar el efecto de la conicidad del área de contacto). El valor del pseudodeslizamiento longitudinal se toma cercano al

máximo de la curva de tracción para superficies secas. Los perfiles de rueda y carril se miden a partir de perfiles nuevos tipo S1002 (rueda) y UIC60 (carril).

En este ejemplo, la posición relativa del eje con respecto a la vía está impuesta y no depende de las fuerzas en el contacto rueda-carril.



**Figura 5.45.** Ejemplo 1: eje centrado rodando en un tramo de vía recta.

**Tabla 5.9.** Datos usados en la simulación.

Velocidad longitudinal	90 km/h
Ancho de vía	1 435 mm
Radio de la rueda	450 mm
Distancia entre puntos de contacto	1 500 mm
Perfil de la rueda (nuevo, medido)	S1002
Perfil del carril (nuevo, medido)	UIC60
Ángulo de montaje del carril	1:20
Masa del eje	1 500 kg
Peso por eje	120 kN
Pseudodeslizamiento longitudinal $v_x$	1,20 %
Pseudodeslizamiento lateral $v_y$	0,00 %
Spin $\varphi$ (1/m)	6,55 %

Se consideran tres *estados superficiales* de las superficies de contacto: (a) superficies secas, (b) superficies mojadas y (c) problema de contacto modelado con coeficiente de rozamiento constante con  $\mu = 0,4$ . Los estados superficiales (a) y (b) consideran un coeficiente de rozamiento variable con los parámetros de fricción y reducción de la pendiente inicial identificados en el apartado 5.3.2.c. Se tiene en cuenta la dependencia de estos parámetros con la presión.

Como resultado del problema normal, aparecen dos áreas de contacto, una para cada rueda, entre el eje y los carriles, y dispuestas simétricamente respecto al eje de la vía (Figura 5.46). Sólo se analiza una de ellas. El área de contacto no-regular obtenida por interpenetración, la elipse equivalente y la distribución de presiones normales se muestran en la Figura 5.47. La fuerza normal, presión



máxima según el modelo de Hertz y los valores de los semiejes de la elipse equivalente se muestran en la Tabla 5.10.

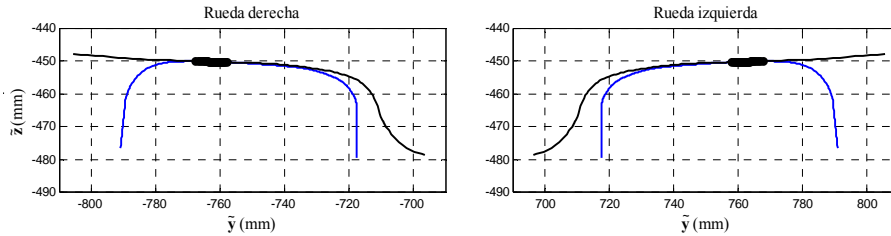


Figura 5.46. Geometría del contacto y áreas de contacto.

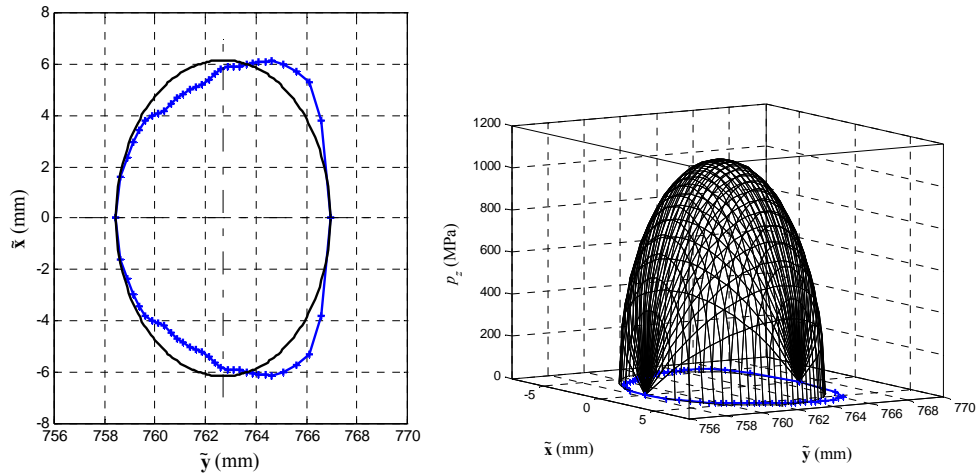
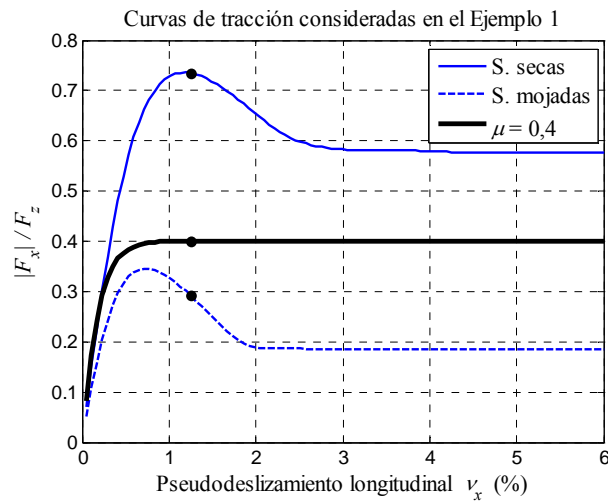


Figura 5.47. Resultado del problema normal de contacto.

Tabla 5.10. Resultados del problema normal.

$F_z$	59,35 kN
$p_{z_0}$	1 085,00 MPa
$a$	6,16 mm
$b$	4,24 mm

Una vez resuelto el problema normal, se procede a resolver el problema tangencial. Con el fin de ilustrar las diferencias entre los tres estados superficiales calculan las correspondientes curvas de tracción para valores de pseudodeslizamiento entre 0 y 6 %. Estas curvas se muestran en la Figura 5.48. El punto en las curvas indica la posición en estudio.

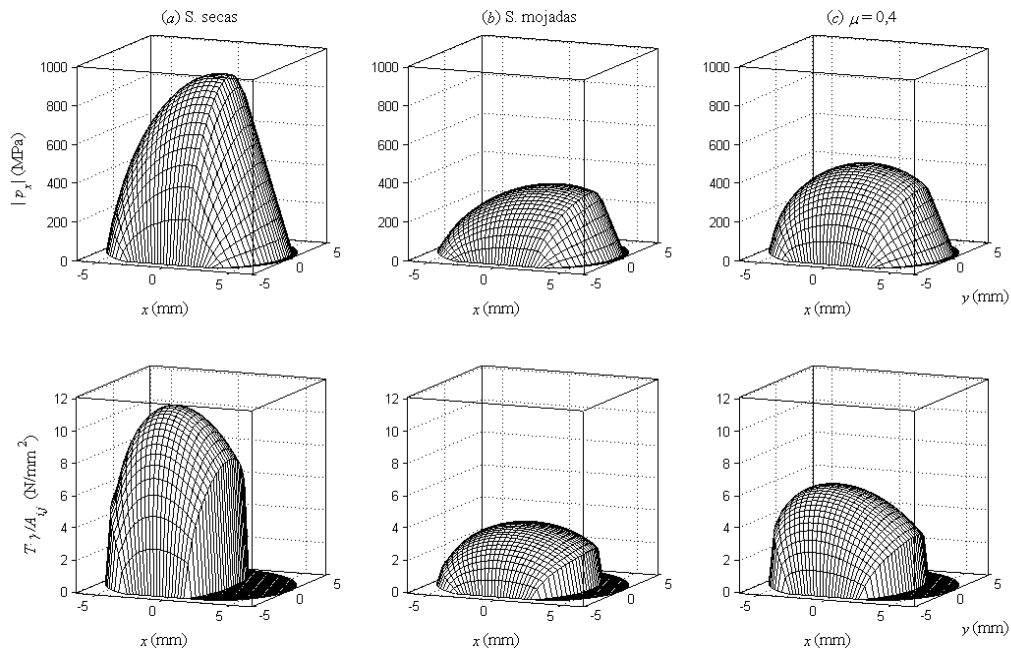


**Figura 5.48.** Curvas de tracción correspondientes a los tres estados superficiales considerados en el ejemplo 1.

Para la obtención de estas curvas se ha tenido en cuenta el valor de presión máxima de la Tabla 5.10 que sirve para interpolar los valores de los parámetros de fricción y reducción de pendiente inicial entre los valores identificados para los niveles de presión de 900 y 1 500 MPa en el punto 5.3.2.d.2. Para valores distintos de presión máxima en el área de contacto, se deben recalcular los valores de los parámetros de fricción y reducción de pendiente inicial.

Para evaluar las diferencias entre las tres condiciones, en la Figura 5.49 se representa la distribución de tensiones longitudinales y la energía disipada en el área de contacto.

Debido a que no aparece pseudodeslizamiento lateral, las tensiones tangenciales en dirección lateral se deben al efecto del *spin*. Por tanto, este valor será muy pequeño en comparación con el valor de las tensiones en dirección longitudinal. Por esta razón se ha representado la distribución  $p_x$  en el área de contacto. No obstante, las tensiones tangenciales en dirección lateral se han tenido en cuenta para el cálculo del índice de desgaste  $T\gamma/A$ .



**Figura 5.49.** Distribución de presión  $p_x$  y  $T_x/A_y$  sobre el área de contacto bajo las tres condiciones.

En ambos gráficos se distingue la zona de adhesión donde (la distribución de tensiones es lineal y la energía disipada es nula) de la zona de deslizamiento. Integrando la distribución de tensiones tangenciales en dirección longitudinal

Analizando en primer lugar la distribución de tensiones tangenciales, el valor más alto se alcanza para superficies secas, seguido de  $\mu = 0,4$  y finalmente para superficies mojadas. Este valor se corresponde con el máximo de distribución  $\mu p_z$  que aparece en la zona de deslizamiento (recordar que  $\mu = \mu(\gamma)$  en los estados superficiales (a) y (b)). Puesto que la distribución de presiones normales es la misma en los tres casos, las diferencias se deben al valor del coeficiente de rozamiento local.

En segundo lugar se analiza la distribución del índice de desgaste en el área de contacto. Esta magnitud es nula en la zona de adhesión. Al igual como en el caso de la distribución de tensiones tangenciales, el máximo se da para superficies secas, seguido de  $\mu = 0,4$  y finalmente para superficies mojadas. En el caso de aplicar la ley USFD, para los tres estados superficiales la zona de adhesión se encontraría en el régimen de desgaste suave.

La fuerza de tracción  $F_x$  se obtiene integrando la distribución de tensiones tangenciales en dirección longitudinal. El índice de desgaste se obtiene como un

promedio del índice de desgaste local sobre el área de deslizamiento, empleado la fórmula

$$\frac{T\gamma}{A_s} = \frac{1}{A_s} \sum_{j=1}^N \left( \sum_{i=1}^N \frac{T\gamma}{A_{i,j}} \Delta x_j \right) \Delta y \quad (5.41)$$

expresión análoga a (5.34) donde  $A_s$  es el valor del área de deslizamiento y  $\Delta x$ ,  $\Delta y$  las dimensiones de cada elemento  $i, j$  del área de contacto. El subíndice  $s$  se refiere a la zona de deslizamiento, en inglés *slip*

Los valores de la fuerza de tracción y del índice de desgaste  $T\gamma/A_s$  se muestran en la Tabla 5.11. Para los mismos valores de pseudodeslizamiento, tomando como referencia el resultado obtenido para superficies secas, la fuerza de tracción obtenida bajo la hipótesis de  $\mu = 0,4$  es un 46 % inferior y para superficies mojadas, un 59 % inferior. En cuanto a la disipación energética, relacionada con el índice  $T\gamma/A_s$  y a través de la ley de desgaste con la tasa de desgaste, es un 48 % inferior para  $\mu = 0,4$  y un 68 % para superficies mojadas.

Tabla 5.11. Resultados del problema tangencial.

	(a) Superficies secas	(b) Superficies mojadas	(c) $\mu = 0,4$
$ F_x $ (kN)	43,83	17,86	23,55
$T\gamma/A_s$ (N/mm <sup>2</sup> )	7,56	2,42	3,93

Para calcular el desgaste a partir del índice  $T\gamma/A_s$  se utiliza la ley de desgaste USFD para superficies secas (Tabla 2.3). También se considera la ley de desgaste propuesta para superficies mojadas (Tabla 5.8). En la Figura 5.50 se representan sobre la curva USFD los valores de desgaste correspondientes a los tres estados considerados. El área de contacto sobre superficies mojadas se representa también sobre su correspondiente ley de desgaste. Analizando esta Figura se pueden extraer una serie de conclusiones:

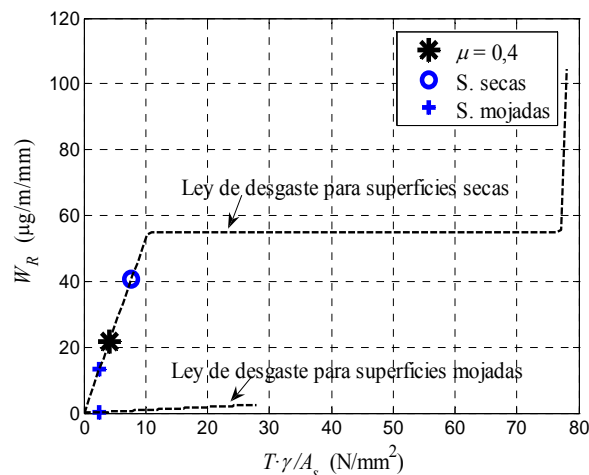
- En primer lugar, para una misma área de contacto se obtienen tres distintas estimaciones de desgaste (usando una misma ley de desgaste). En el caso de modelizar el contacto con  $\mu = 0,4$ , para las condiciones cinemáticas consideradas, se subestima el desgaste que se obtendría con superficies secas. En cambio, se sobreestima el desgaste que se obtendría para superficies mojadas. Pero se debe considerar que esta ley de desgaste no es válida para áreas de contacto en condiciones distintas a la de superficies secas.

- En segundo lugar, considerando la curva correspondiente a superficies mojadas propuesta en esta Tesis, el desgaste es aún mucho menor que el estimado inicialmente.

En cualquiera de las situaciones el área de contacto se encuentra en el régimen de desgaste *suave* según la ley USFD.

La comparación del caso (a) con (c) da una idea del error cometido en el modelado del problema de contacto. Para la cinemática considerada, el error cometido asumiendo un coeficiente de rozamiento constante ( $\mu = 0,4$ ) cuando las superficies están secas es del 46 % en fuerzas y 48 % en energía disipada (usando la ley USFD y tomando como referencia los valores para superficies secas).

La comparación de los casos (a) con (b) representa el error cometido cuando se asume un estado de contaminación de la superficie distinto (se podría considerar también error de modelado). Si las superficies están mojadas, pero se asumen secas, el error alcanza un 145 % en fuerzas y un 212 % en energía disipada (usando la ley USFD y tomando el área de contacto entre superficies mojadas como referencia). En cambio, teniendo en cuenta que la ley USFD no es válida para superficies mojadas, el desgaste estimado mediante esta ley puede ser varias órdenes de magnitud mayores que el obtenido con la correspondiente ley para superficies mojadas (Tabla 5.8).



**Figura 5.50.** Distintas situaciones de desgaste para las tres condiciones consideradas. El punto correspondiente a superficies mojadas se representa en la ley de desgaste para superficies secas y en la ley de desgaste para superficies mojadas.

Finalmente, en cuanto a la distinta modelización del estado superficial de las superficies en el contacto cabe destacar que en un programa de simulación

dinámica, el error en fuerzas afectará al movimiento del eje sobre la vía y, a su vez, al desgaste acumulado sobre los perfiles de rueda y carril.

### ***b.2. Ejemplo 2: aplicación en curva cuasiestática***

El objetivo de este ejemplo es investigar el efecto de considerar un coeficiente de rozamiento constante/variable sobre las fuerzas de interacción rueda/carril y sobre la posición de equilibrio alcanzada.

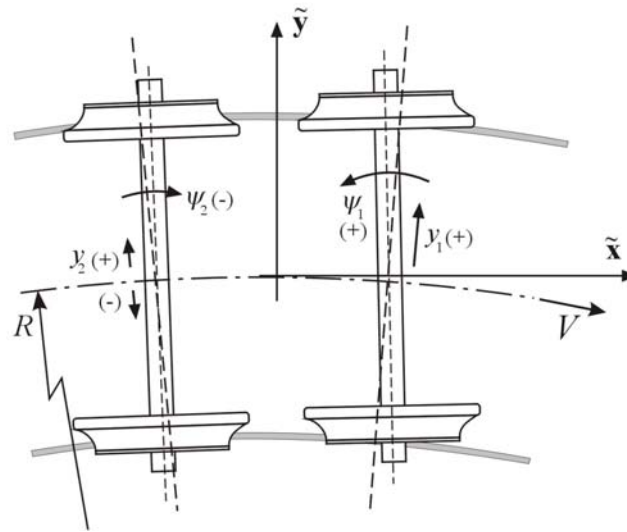
En este segundo ejemplo se estudia el comportamiento cuasiestático de un vehículo completo trazando una curva. Se trata de un caso especial en el estudio global del comportamiento de un vehículo ferroviario. El resultado de este tipo de análisis es la posición cuasiestática y las fuerzas de la suspensión resultantes [83]. La posición cuasiestática es la posición de equilibrio de cada uno de los cuerpos que componen el vehículo cuando atraviesa una curva.

Las superficies en el contacto se asumen secas. Se usan dos *modelos*: (a) un modelo para coeficiente de rozamiento variable y (b) un modelo para coeficiente de rozamiento constante. En primer lugar, el modelo para coeficiente de rozamiento variable y superficies secas toma los parámetros de fricción y reducción de la pendiente inicial identificados en el punto 5.3.2.d con su dependencia con la presión. En segundo lugar, para coeficiente de rozamiento constante, se toma un valor nominal de  $\mu = 0,4$  y sin reducción de pendiente inicial.

**Tabla 5.12.** Datos usados en la simulación (ejemplo 2).

Radio de la curva	2 000 m
Altura de peralte	100 mm
Aceleración no compensada	0,31 m/s <sup>2</sup>
Empate del bogie	2 560 mm
Masa del bogie	3 300 kg
Masa de la caja	36 000 kg
Rigidez de la suspensión primaria ( $k_x$ )	32 MN/m

Para la simulación de este segundo ejemplo, además de los datos de la Tabla 5.9, se usan los datos de la Tabla 5.12. El vehículo está compuesto por dos bogies de tipo B (dos ejes por bogie) y traza una curva peraltada de radio constante con defecto de peralte. Se usa un conjunto de cuatro coordenadas para modelizar el movimiento de cada eje en la vía (ver Cap. 2). Estas coordenadas son: desplazamiento lateral  $y$ , desplazamiento vertical  $z$ , ángulo de balanceo  $\phi$  y ángulo de lazo  $\psi$ . En este apartado se analizan únicamente los ejes del primer bogie. La Figura 5.51 muestra una representación esquemática de los ejes del primer bogie y su posición relativa con respecto a la vía, mostrando las coordenadas  $y$  y  $\psi$ .



**Figura 5.51.** Ejemplo 2: vehículo trazando una curva. Se analizan los resultados para los ejes del primer bogie.

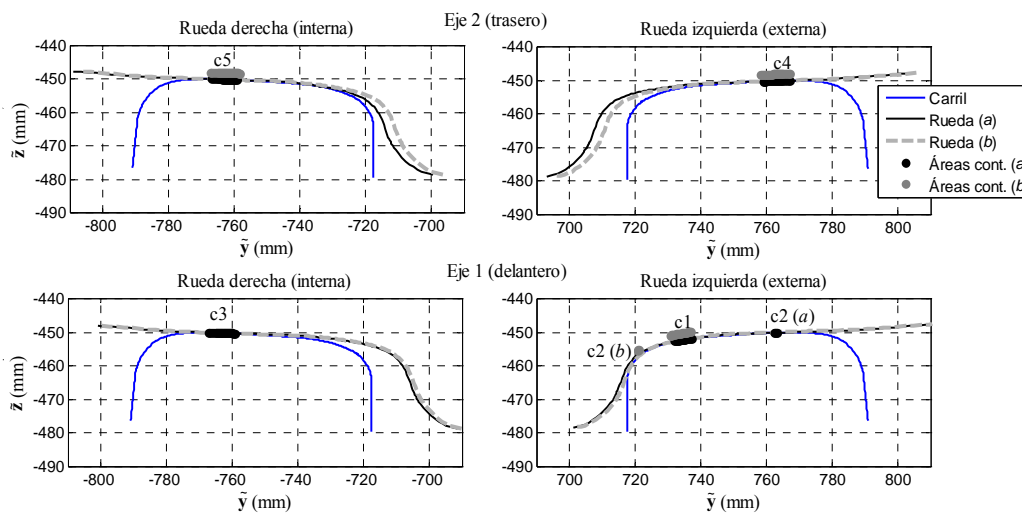
En la Tabla 5.13 se muestra la solución para del problema de posición de los dos ejes para los dos modelos. En ambos casos, el eje delantero se mueve hacia fuera de la curva con un ángulo de ataque (o de lazo) positivo mientras que el eje trasero se desplaza ligeramente hacia dentro de la curva con un ángulo de ataque negativo. Este es el comportamiento esperado para el bogie delantero del vehículo [65, 105]. Sin embargo, las diferencias entre las posiciones adoptadas por los ejes bajo las dos hipótesis son perceptibles. Puesto que el coeficiente de rozamiento es mayor para el caso (a) que para (b) (ver la función de fricción correspondiente en la Figura 5.27), el eje delantero de (a) tiene un desplazamiento menor que en (b). Este eje (el primer eje) es el que se encarga principalmente del guiado del bogie en curva [65-67, 105]. El eje trasero en el caso (a) está situado más hacia dentro de la curva que en el caso (b) y con un mayor ángulo de lazo negativo. Esta posición es consecuencia del equilibrio de fuerzas aplicado al vehículo completo.

Cabe señalar que las distintas posiciones alcanzadas por los ejes según los dos modelos de coeficiente de rozamiento considerados son la solución de un problema de equilibrio dinámico. Esta solución depende, entre otros parámetros, de la geometría del contacto, configuración de la suspensión, reparto de masas en el vehículo, geometría de la vía, velocidad de circulación, etc., por tanto los resultados presentados en este punto se comentan a modo de ejemplo.

**Tabla 5.13.** Posiciones de los ejes (bogie delantero).

	(a) Superficies secas	(b) $\mu = 0,4$	% incremento respecto a caso (a)
Eje delantero	$y_1 = 4,83$ mm	$y_1 = 5,87$ mm	21,35 %
	$\psi_1 = 0,20$ mrad	$\psi_1 = 0,52$ mrad	160,00 %
Eje trasero	$y_2 = -3,19$ mm	$y_2 = -0,14$ mm	-95,61 %
	$\psi_2 = -0,59$ mrad	$\psi_2 = -0,43$ mrad	-27,12 %

La Figura 5.52 representa la posición relativa de los perfiles de las ruedas y de los carriles junto a las áreas de contacto que aparecen en los ejes del primer bogie según los dos modelos considerados.



**Figura 5.52.** Vista frontal de la posición de los dos ejes del bogie delantero del vehículo. Las dos posiciones cuasiestáticas y las correspondientes áreas de contacto: (a) coeficiente de rozamiento variable, (b) coeficiente de rozamiento constante.

Según los datos considerados en este ejemplo, el eje delantero en el caso (a) se apoya sobre tres áreas de contacto, donde dos aparecen en la rueda externa (ambos en la banda de rodadura). En el caso (b), donde el desplazamiento lateral es mayor, también aparecen tres áreas de contacto en el eje y dos en la rueda externa (pero uno de ellos situado en la banda de rodadura, y otro en la zona cercana de la pestaña de la rueda). En ambas situaciones sobre la rueda externa aparece un reparto de carga, donde se tiene un área de contacto principal (que soporta la mayoría de la carga) y un área secundaria.

Las principales características de las áreas de contacto se resumen en la Tabla 5.14. Tomando únicamente las áreas de contacto que aparecen en el primer eje, en las Figuras 5.53, 5.54 y 5.55 se representa la distribución de tensiones tangenciales  $p_t$ , la distribución de deslizamiento  $\gamma$  y la distribución del índice de



desgaste  $T\gamma/A_{ij}$  en estas áreas de contacto. En este ejemplo se debe considerar que realmente no se trata de las mismas áreas de contacto las obtenidas con el modelo (a) que con el modelo (b) debido a que la posición relativa del eje con respecto a la vía es distinta, consecuencia del resultado de la posición de equilibrio.

Las mayores diferencias aparecen sobre el área de contacto c1 (primaria sobre la rueda externa) y en segundo lugar sobre el área de contacto c2 (secundaria sobre la rueda externa). Esta área de contacto c2 tiene una forma muy distorsionada, siendo la relación  $a/b$  del orden de 5 para el modelo (a) y del orden de 10 para el modelo (b) (ver Tabla 5.14). Las diferencias en el área de contacto situada en la rueda interna (c3) son mínimas según los dos modelos considerados.

En primer lugar se pueden comentar las diferencias que aparecen en las zonas de adhesión/deslizamiento. La zona de adhesión se corresponde en el gráfico de tensiones tangenciales (Figura 5.53) con la zona donde esta distribución es lineal y en el gráfico de deslizamiento (Figura 5.54) con la zona en el que el deslizamiento es nulo. Para el área de contacto c1 el área de adhesión es mayor para el modelo (a) que para (b). Esta diferencia se debe al que el coeficiente de rozamiento según el modelo (a) es mayor, lo que aumenta el límite de deslizamiento. Para el área de contacto c2 en el modelo (a) se encuentra completamente en adhesión mientras que con el caso (b) se encuentra completamente en deslizamiento. La justificación de estos dos comportamientos se puede dar en relación a la posición del área de contacto: para (a) el área de contacto se encuentra en la banda de rodadura, por lo que los valores de pseudodeslizamiento son el mismo orden que para el área de contacto principal c1, mientras que en (b) el área de contacto secundaria se encuentra en la zona de la base de la pestaña donde los valores de los pseudodeslizamientos son mucho más elevados.

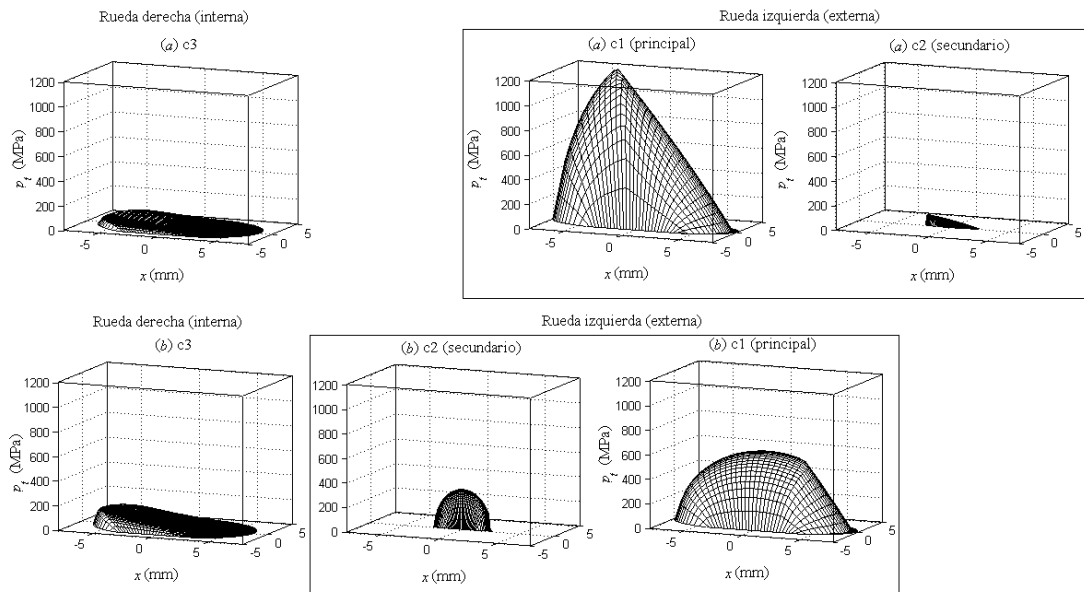
En segundo lugar, en cuanto a la distribución de presiones tangenciales (Figura 5.53), para el área de contacto c1 el valor máximo de la tensión tangencial es un 50 % menor en el modelo (b) respecto al modelo (a). Esta característica es debida al distinto valor considerado del coeficiente de rozamiento a través de la función de fricción. Para el área de contacto c2, según el modelo (a) la distribución de presiones tangenciales tiene valores muy pequeños, por lo que su influencia será pequeña en la dinámica del eje; según el modelo (b) el valor de tensiones es un poco más elevado con un valor máximo importante, pero sobre un área de contacto muy pequeña, en comparación con c1 o c3.

En tercer lugar, con respecto al deslizamiento (Figura 5.54) los valores calculados son del mismo orden dentro de la zona de deslizamiento de cada área de contacto, para c1 y c2.

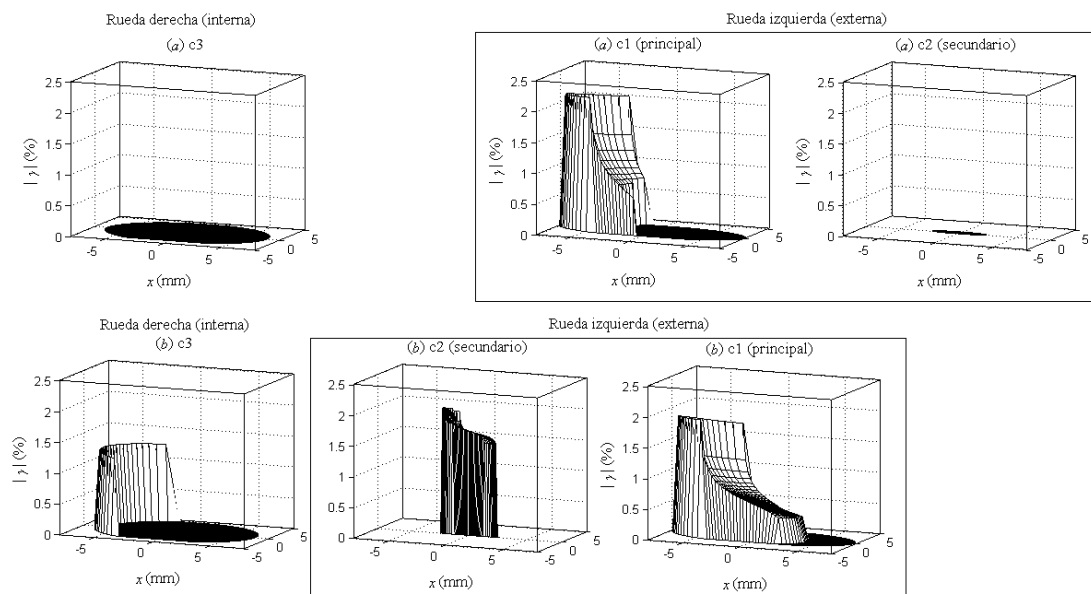
Finalmente, considerando la distribución del índice de desgaste  $T\gamma/A$  (Figura 5.55), para el área de contacto c1 éstos valores alcanzan un máximo un 50 % menor para el caso (b) con respecto al caso (a). Considerando el área de contacto c2 en el caso (a) esta distribución es nula (puesto que se encuentra en adhesión), pero en el caso (b) toma valores de  $T\gamma/A$  un 25 % mayores que el área de contacto principal según el mismo modelo.

**Tabla 5.14.** Resumen de los resultados del problema de contacto (\* un valor nulo de  $T\gamma/A_s$  significa que el área de contacto completa se encuentra en adhesión. \*\*Se comparan las áreas de contacto en la misma posición; para las dimensiones  $a, b$  se compara el área de la elipse).

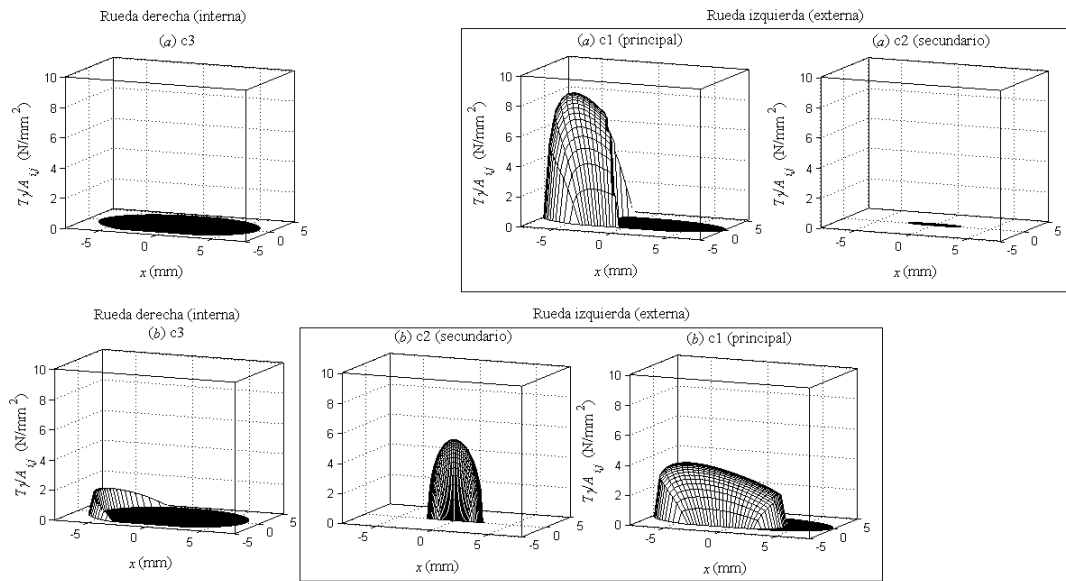
				(a)	(b)	%
				superficies	$\mu = 0,4$	incremento
				secas		respecto a (a)**
Eje delantero	Izquierda	Área de contacto 1 (principal)	$a \cdot b$ (mm)	7,27 · 2,39	7,13 · 2,74	12,43
			$p_{z0}$ (MPa)	1626,82	1494,82	-8,11
			$F_x$ (kN)	31,45	21,22	-32,53
			$F_y$ (kN)	8,19	6,13	-25,15
			$T\gamma/A_s$ (N/mm <sup>2</sup> )*	6,53	2,69	-58,81
		Área de contacto 2 (secundaria)	$a \cdot b$ (mm)	2,12 · 0,43	2,32 · 0,18	--
			$p_{z0}$ (MPa)	599,38	802,81	--
			$F_x$ (kN)	0,08	0,28	--
			$F_y$ (kN)	0,08	0,02	--
			$T\gamma/A_s$ (N/mm <sup>2</sup> )*	0,00	3,68	--
	Derecha	Área de contacto 3	$a \cdot b$ (mm)	6,29 · 3,86	6,23 · 3,90	0,07
			$p_{z0}$ (MPa)	1145,88	1130,10	-1,38
			$F_x$ (kN)	0,23	-0,45	-295,65
			$F_y$ (kN)	0,38	3,03	697,37
$T\gamma/A_s$ (N/mm <sup>2</sup> )*			0,00	1,24	--	
Eje trasero	Izquierda	Área de contacto 4	$a \cdot b$ (mm)	6,07 · 4,24	6,30 · 4,28	4,77
			$p_{z0}$ (MPa)	1207,29	1113,30	-7,79
			$F_x$ (kN)	-5,28	-3,83	-27,46
			$F_y$ (kN)	-3,39	-2,32	-31,56
			$T\gamma/A_s$ (N/mm <sup>2</sup> )*	3,51	1,23	-64,96
	Derecha	Área de contacto 5	$a \cdot b$ (mm)	6,27 · 3,66	6,03 · 4,20	10,36
			$p_{z0}$ (MPa)	1160,43	1058,08	-8,82
			$F_x$ (kN)	5,69	3,54	-37,79
			$F_y$ (kN)	-5,21	-4,7	-9,79
			$T\gamma/A_s$ (N/mm <sup>2</sup> )*	3,25	1,07	-67,08



**Figura 5.53.** Tensiones tangenciales sobre las áreas de contacto del primer eje: arriba (a) superficies secas, abajo (b)  $\mu = 0,4$ .



**Figura 5.54.** Deslizamiento adimensional sobre las áreas de contacto del primer eje: arriba (a) superficies secas, abajo (b)  $\mu = 0,4$ .



**Figura 5.55.** Energía disipada en el contacto  $T\gamma/A_{ij}$  sobre las áreas de contacto del primer eje: arriba (a) superficies secas, abajo (b)  $\mu = 0,4$ .

Como conclusiones en este ejemplo se puede mencionar que con el uso de un modelo distinto del coeficiente de rozamiento, se obtiene una distinta estimación de las fuerzas en la interfase rueda-carril, y por tanto una distinta posición de equilibrio del vehículo ferroviario en curva. Esta peculiaridad no aparecía en el ejemplo 1 (punto anterior) debido a que la posición relativa del eje con el carril estaba impuesta. En el ejemplo presentado y según las características del modelo de contacto utilizado, analizando los ejes del primer bogie aparece una distinta configuración de las áreas de contacto de cada uno de los ejes con la vía. Tomando la distribución de las magnitudes asociadas al problema tangencial para estas áreas de contacto, se obtiene una distinta estimación del índice  $T\gamma/A$  en las áreas de contacto. Por tanto la estimación del desgaste sobre los perfiles será distinta.

Por tanto, los resultados presentados en este ejemplo muestran que la consideración de un coeficiente de rozamiento variable a través de una función de fricción, frente a la consideración de un coeficiente de rozamiento constante, da lugar a un distinto movimiento de los ejes en la vía (aunque siguiendo la misma tendencia) y, especialmente, a distintos patrones de desgaste en los perfiles de la rueda y del carril.

## 5.4. Conclusiones

En este capítulo en primer lugar se ha realizado un estudio del problema tangencial y estimación del desgaste para el contacto entre superficies *reales* (*rugosas*), usando datos del problema normal obtenidos a partir de la técnica experimental de ultrasonidos. Estos resultados se han comparado con los resultados obtenidos a partir del modelo numérico de contacto propuesto en esta Tesis que supone que las superficies son suaves.

En segundo lugar se han introducido unas modificaciones en FASTSIM para incluir el efecto del coeficiente de rozamiento variable. Se ha propuesto un procedimiento para identificar parámetros de comportamiento tangencial a partir de curvas de tracción medidas experimentalmente en la máquina de doble disco. De esta forma se consigue reproducir la forma de las curvas de tracción medidas experimentalmente. Estas curvas se han medido con presencia de distintos contaminantes en la interfase rueda-carril. Utilizando dicho procedimiento se han identificado los parámetros de fricción y valor de la reducción de pendiente inicial necesarios para describir el comportamiento tangencial en el contacto bajo distintos estados superficiales. También se han utilizado datos de desgaste tomados en la máquina de doble disco y se ha analizado el efecto de la presencia de contaminantes en la interfase de contacto. Posteriormente se ha realizado una aplicación del algoritmo FASTSIM con coeficiente de rozamiento variable y de la estimación del desgaste en el caso de la geometría rueda-carril.

En cuanto al estudio del **problema tangencial y estimación del desgaste** para los datos experimentales obtenidos **a partir de la técnica de ultrasonidos** se pueden citar las siguientes conclusiones:

- En el análisis local de las áreas de contacto aparecen diferencias en la estimación de las distintas magnitudes debido a la presencia de la rugosidad en las superficies en contacto. Estas diferencias son menores en las áreas de contacto que aparecen entre perfiles de rueda y carril desgastados.
- En el análisis global de las áreas de contacto estas diferencias son menores, pudiéndose estimar un error en el cálculo de las fuerzas tangenciales al contacto entre un 10 % (para pseudodeslizamiento bajo) y un 1 % (para pseudodeslizamiento alto), mientras que el error en la estimación del desgaste puede cuantificarse en torno a un 10-20 %.

- El uso de los datos del problema normal procedentes de la técnica de ultrasonidos permite evaluar el efecto de la rugosidad superficial sobre la transmisión de esfuerzos tangenciales y sobre el desgaste en las superficies en contacto. De esta forma se pueden conocer las limitaciones de los modelos de contacto numéricos usados en el campo de la simulación dinámica, que suponen que las superficies son *suaves*.
- Sin embargo, por una parte, la aplicación de la técnica de ultrasonidos requeriría escanear por completo las superficies en el contacto (rueda y carril). Además, por otra parte, la consideración de la rugosidad superficial en el modelo de contacto, implicaría un coste computacional que no sería compatible con los requerimientos de un problema de simulación dinámica.
- Según estos puntos se puede concluir que la técnica de ultrasonidos representa una herramienta de gran utilidad para el estudio del contacto entre superficies *reales* aunque no tenga una aplicación en el campo de la simulación dinámica.

En cuanto a la **inclusión de un coeficiente de rozamiento variable en FASTSIM para reproducir curvas de tracción medidas experimentalmente**, se pueden extraer las siguientes conclusiones:

- La consideración de un coeficiente de rozamiento constante es una aproximación en la modelización del contacto tangencial. El coeficiente de rozamiento es consecuencia de las condiciones en el contacto y no un valor de entrada en el algoritmo de contacto.
- La introducción de un coeficiente de rozamiento variable dentro del algoritmo de resolución del contacto tangencial (en este caso FASTSIM) es condición necesaria para reproducir las tendencias observadas en curvas de tracción medidas experimentalmente.
- Adicionalmente se debe utilizar un factor de reducción de la pendiente inicial (reflejado por Kalker [44, 46] mediante el factor de reducción de los coeficientes de Kalker). Este valor expresa la reducción de la rigidez transversal del contacto debido a desviaciones respecto a la situación ideal.
- Con el fin de modelizar el comportamiento en fricción de los puntos pertenecientes al área de contacto se deben incluir funciones o leyes de fricción. Con la aplicación del algoritmo de resolución del problema tangencial, estas funciones de fricción deben ser capaces de reproducir las tendencias que aparecen en las curvas de tracción medidas

experimentalmente. Además se debe considerar el coste computacional asociado al uso de cada función de fricción.

- Los parámetros que definen las funciones de fricción y la reducción de la pendiente inicial se identifican a partir de curvas de tracción medidas experimentalmente mediante un procedimiento propuesto en esta Tesis. El uso de estos parámetros proporciona una mejor aproximación a la solución del problema tangencial que la obtenida a partir de valores estimados o de la consideración de un único valor para el coeficiente de rozamiento.
- Se ha considerado el efecto de la presión sobre los parámetros que definen las funciones de fricción y el factor de reducción de la pendiente inicial. La consideración de la dependencia con la presión propuesta en esta Tesis no implica un incremento en el coste computacional.
- Para la estimación del desgaste se debe disponer de leyes de desgaste que relacionen el valor de una magnitud física asociada al problema de contacto con valores asociados al desgaste. Los coeficientes que definen estas leyes se deben obtener experimentalmente en las mismas condiciones para las que se van a aplicar.
- Se necesita más trabajo experimental con el fin de considerar la presencia de distintos contaminantes en la interfase y bajo distintas condiciones de contacto (presión, velocidad de rodadura, temperatura ambiente).

Finalmente cabe mencionar que parte de los resultados presentados en este capítulo han sido publicados en las referencias [90] y [91].





## **6. Aplicación a la simulación dinámica**

### **6.1. Introducción**

En este capítulo se va a aplicar el modelo de contacto presentado en los Cap. 4 y 5 de esta Tesis a la simulación dinámica. A su vez, se realizará un cálculo del desgaste del perfil de la rueda como consecuencia de la energía por fricción disipada en el contacto. Para ello se ha implementado un programa de integración dinámica con la correspondiente modelización del vehículo ferroviario y del circuito. Se han usado las ecuaciones del movimiento obtenidas en el Cap. 3.

En la Figura 6.1 se presenta un esquema de la herramienta de predicción de desgaste implementada. A partir de los datos de entrada se define, entre otros aspectos, la geometría de los perfiles de rueda y carril. En este momento se realiza un análisis dinámico en el que se integran las ecuaciones del movimiento. Estas ecuaciones del movimiento incluyen la aportación de las fuerzas en el contacto rueda-carril. Tras la resolución de la interacción rueda-carril se realiza una estimación de la profundidad de desgaste en el perfil del carril; la rutina de estimación del desgaste tiene acceso a las distribuciones de las distintas magnitudes asociadas al contacto. Una vez resuelto el análisis dinámico para el instante de tiempo dado se guardan los datos necesarios. En caso de que se deban actualizar los perfiles, se procede a esta operación y se actualizan los datos relativos a la geometría de los perfiles. En caso contrario, la profundidad de desgaste estimada en este instante se acumulará en el vector de profundidad de desgaste hasta que se proceda a la actualización de los perfiles. Este procedimiento se repite hasta que se alcance la distancia final.



**Figura 6.1.** Diagrama de flujo de la herramienta de predicción de desgaste implementada. Adaptado de [86].

Se van a presentar distintos cálculos para comprobar la influencia de dos aspectos en la modelización del problema tangencial y estimación del desgaste. Estos dos aspectos son:

- *Modelo usado en el coeficiente de rozamiento:* comparativa entre el empleo de un coeficiente de rozamiento variable frente a un coeficiente de rozamiento constante.
- *Algoritmo de desgaste empleado:* evaluación del desgaste de forma local, frente a evaluación del desgaste de forma global.

En cuanto a la influencia del **modelo del coeficiente de rozamiento**, la consideración de un coeficiente de rozamiento variable puede mejorar la estimación en los resultados obtenidos en cuanto a la distribución de tensiones dentro de las áreas de contacto, valores de las fuerzas de interacción rueda-carril, movimiento de los ejes (y del resto de cuerpos) que componen el vehículo y estimación del desgaste. Esto es debido a que se trata de un modelo que es capaz de describir con mayor grado de precisión el comportamiento tangencial en el contacto rueda-carril. En lugar de considerar un coeficiente de rozamiento de valor conocido y constante, estimado por diversos métodos, se utilizan funciones de fricción medidas en condiciones de laboratorio (ver Cap. 5 y [91]). De esta forma se consigue reproducir la forma de la curva de tracción medida experimentalmente ([34, 68, 78, 81]). Según este nuevo procedimiento, el valor del coeficiente de rozamiento en cada punto del área de contacto no es un dato de entrada sino que se obtiene como resultado de las condiciones que aparezcan localmente, como son el estado tribológico de las superficies o la presencia de contaminantes en la interfase rueda-carril, el valor del deslizamiento o el nivel de presiones en el área de contacto.

La distinta modelización del problema tangencial tendrá dos efectos: por un lado condicionará el cálculo de las fuerzas tangenciales al contacto de forma que, en su aplicación en un programa de simulación dinámica, cambiará la respuesta del vehículo ferroviario al trazar un determinado circuito. Por otro lado, también tendrá influencia en la estimación del desgaste debido a que, dada una ley de desgaste, variará el valor de energía disipada en el área de contacto.

Además, la consideración de un distinto estado tribológico a partir de una función de fricción diferente, implica el uso de una ley de desgaste obtenida en las mismas condiciones que las que se pretende modelizar el desgaste (ver Cap. 5 y [91]). Quost *et al.* en [89] mencionan que la elección del coeficiente de rozamiento tiene un impacto muy importante sobre la estimación del desgaste.

En los cálculos presentados en este capítulo se supondrá que las superficies en el contacto se encuentran secas y limpias. En esta condición se dispone de leyes de desgaste adecuadas ([57]).

En cuanto al **algoritmo de desgaste** utilizado (de forma local o de forma global), existen diversos trabajos como los realizados por Quost *et al.* [89] y Pombo *et al.* [87] donde se comparan los resultados de desgaste obtenidos según los distintos algoritmos. Sin embargo en ambos trabajos se asume un coeficiente de rozamiento constante. Además en estos casos se usan programas comerciales de simulación dinámica (Vampire en los dos artículos) junto a rutinas externas para la evaluación del desgaste. Como conclusiones en estos trabajos cabe mencionar que los resultados obtenidos según ambas metodologías son muy parecidos, pero que el hecho de estimar el desgaste de forma local incrementa en gran medida el tiempo de cálculo. Este incremento es debido a que se usan programas comerciales de simulación dinámica en los que no se tiene acceso a las distribuciones locales de las magnitudes asociadas al problema de contacto; por tanto, se deben recalcular estas magnitudes en rutinas externas al programa.

Cabe destacar otros trabajos que realizan un cálculo de desgaste de los perfiles junto a una simulación dinámica. Todos ellos también asumen un coeficiente de rozamiento constante y emplean programas comerciales de simulación dinámica, junto a rutinas externas o utilidades a medida para la evaluación del desgaste. Además de los ya mencionados se pueden citar los trabajos de Lewis *et al.* [55] con el empleo del paquete ADAMS/Rail, Enblom y Berg [23] con Gensys y Pombo *et al.* [86] quienes utilizan el software Vampire.

Con respecto a los trabajos presentes en la bibliografía, en este capítulo se van a incluir unos cálculos con coeficiente de rozamiento variable. Para ello se ha implementado un programa de simulación propio, en el que se ha incluido el

algoritmo de resolución del problema tangencial según el modelo descrito en el Cap. 5. En este programa la rutina de evaluación del desgaste está integrada en la rutina de resolución del problema tangencial, por tanto no se espera un incremento tan grande en tiempo de CPU en función del algoritmo de desgaste empleado.

El uso de un programa de simulación dinámica comercial por una parte no permite evaluar el algoritmo de resolución del problema tangencial con coeficiente de rozamiento variable propuesto en esta Tesis. Por otra parte, no ofrece el acceso a la información calculada internamente durante la resolución del problema de contacto, como la distribución de tensiones tangenciales o los deslizamientos en el área de contacto.

## 6.2. Datos de entrada de las simulaciones

En este apartado se presentan los valores utilizados en las simulaciones realizadas en este capítulo.

### 6.2.1. Características del vehículo

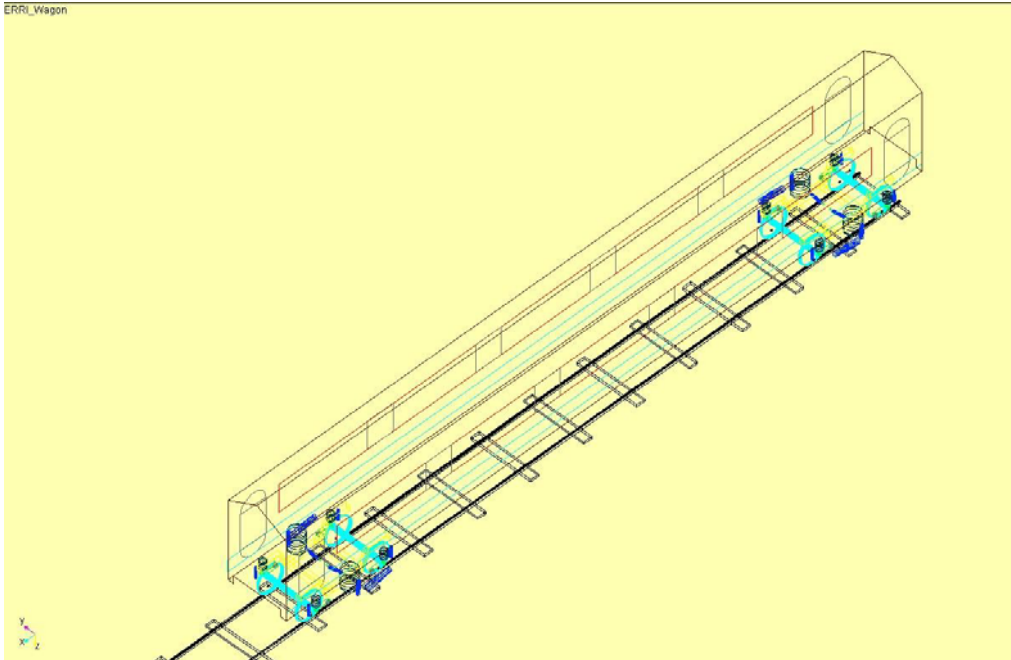
En los cálculos realizados se usa un vehículo de cuatro ejes y dos bogies basado en el ERRI-wagon. Estas características se han extraído del modelo disponible en el programa ADAMS/Rail [1]. La Tabla 6.1 muestra las principales características de este vehículo (el vehículo completo se encuentra definido en el Anexo IV). Se considera que el vehículo circula por el circuito a una velocidad constante y que todos los ejes del coche son portantes.

**Tabla 6.1.** Características del vehículo empleado en la simulación.

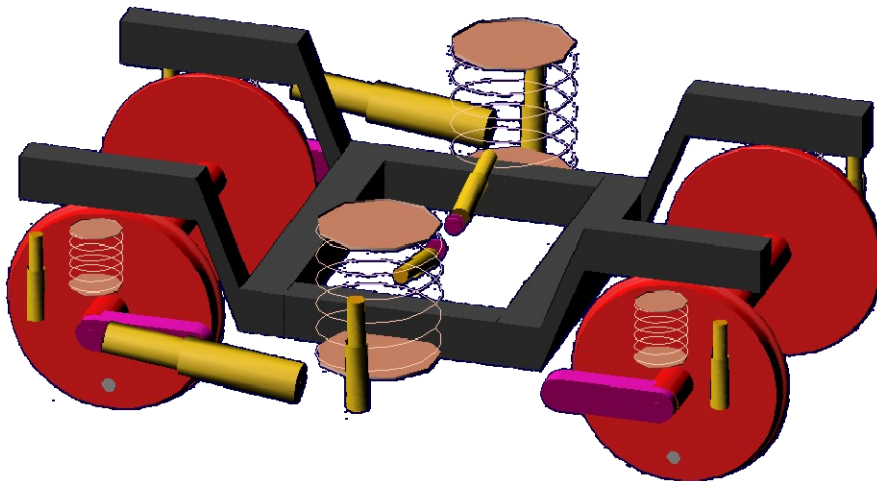
<b>Dimensiones generales</b>	
Radio nominal	450 mm
Empate	2 560 mm
Distancia entre pivotes de los bogies	18 000 mm
<b>Propiedades inerciales</b>	
Masa del eje	1 500 kg
Carga por eje	108 kN
<b>Suspensión primaria</b>	
Rigidez longitudinal	31,39 MN/m
Rigidez transversal	3,88 MN/m
<b>Suspensión secundaria</b>	
Rigidez longitudinal	160 kN/m
Rigidez transversal	160 kN/m

Este vehículo está formado por un total de 7 sólidos (4 de ellos son ejes), considerados rígidos. En el modelo se considera un total de 31 grados de libertad

según la definición realizada en el Cap. 3. Las Figuras 6.2 y 6.3 muestran esquemas del vehículo completo y del bogie del ERRI-wagon, respectivamente.



**Figura 6.2.** Esquema del vehículo utilizado en la simulación (extraído del programa ADAMS/Rail). Extraído de [1].



**Figura 6.3.** Esquema del bogie utilizado en la simulación (extraído del programa ADAMS/Rail). Extraído de [1].

### 6.2.2. Geometría transversal de la vía

Las características que definen la geometría transversal de la vía se muestran en la Tabla 6.2. Los perfiles de rueda y carril se corresponden con perfiles nuevos. Estos perfiles se han medido con el dispositivo Miniprof [27] y se han representado gráficamente en la Figura 5.46. Los carriles se consideran rígidos.

**Tabla 6.2.** Geometría transversal de la vía.

Ancho de vía	1 435 mm
Distancia nominal entre puntos de contacto	1 500 mm
Perfil de la rueda	S1002
Perfil del carril	UIC60
Inclinación del carril	1:20

### 6.2.3. Características del circuito

El circuito de prueba utilizado se ha extraído de la referencia [55] y está compuesto por los siguientes tramos:

- 950 m de tramo recto.
- 240 m de curva de transición (de recta a curva peraltada).
- 1 440 m de curva peraltada de radio constante (curva a derechas).
- 260 m de curva de transición (de curva peraltada a recta).
- 1 110 m de tramo final recto.

La longitud total del circuito es de 4 km. La velocidad de circulación es de 220 km/h. El radio de la curva es de 5 000 m con el peralte correspondiente para que la curva se trace con aceleración no compensada nula. Se asume que el circuito no presenta irregularidades.

Se trata de un circuito muy sencillo con el objetivo de poder identificar la influencia de las distintas variables consideradas en los cálculos realizados. Además, el circuito es no simétrico, con una única curva a derechas, para poder observar el efecto de la curva sobre el desgaste en los perfiles de las ruedas de los distintos ejes.

### 6.3. Análisis del contacto rueda-carril y estimación del desgaste

En este apartado se definen las características del modelo de contacto utilizado y del procedimiento empleado para estimar el desgaste.

#### 6.3.1. Problema de contacto rueda-carril

El modelado del contacto rueda-carril se va a realizar de la siguiente forma:

- Problema **geométrico y normal**: se resolverá según el método propuesto en el Cap. 4 de esta Tesis, basado en la interpenetración virtual entre superficies y en el uso de la elipse equivalente.
- Problema **tangencial**: se obtendrán resultados correspondientes a la modelización del contacto tangencial con coeficiente de rozamiento constante y con coeficiente de rozamiento variable.

Para obtener los resultados considerando *coeficiente de rozamiento constante* se aplicará el algoritmo FASTSIM desarrollado por Kalker [44]. Este algoritmo procesa el área de contacto que queda dividida en zonas de adhesión y zonas de deslizamiento según el valor límite de tracción definido por la tribología del contacto. Se tomará un valor de  $\mu = 0,46$  y sin reducción de los coeficientes de Kalker. Este valor del coeficiente de rozamiento se ha tomado de la referencia [102] a partir de datos experimentales para superficies de contacto secas.

Para obtener los resultados considerando *coeficiente de rozamiento variable* se utilizará el procedimiento definido en el Cap. 5 a partir del algoritmo FASTSIM de Kalker. La tribología entre las superficies en el contacto se considera a través de una función de fricción y de la reducción de la pendiente inicial. Los valores que definen la función de fricción y la reducción de la pendiente inicial se han identificado a partir de curvas de tracción experimentales, medidas sobre máquinas de doble disco para condiciones de superficies secas. Se utilizará como función de fricción la *aproximación lineal*  $f_{1b}$  definida en el Cap. 5 (ecuación (5.17)). Se tendrá en cuenta la dependencia de los parámetros de fricción con respecto a la presión en el área de contacto según se describe en el punto 5.3.2.d.2.

En ambos casos, las áreas de contacto se dividirán en una matriz de 30x30 elementos. Además, se ha considerado la inclusión de un cuarto parámetro de flexibilidad  $L_4$  según sugieren Alonso *et al.* en [5] (ver Cap. 2) para

mejorar el cálculo del *spin*. No obstante se ha comprobado que, para los cálculos realizados, la influencia de la consideración de este parámetro es despreciable.

Para el cálculo del deslizamiento según el modelo de coeficiente de rozamiento variable se utilizará la fórmula (2.116) deducida por Giménez *et al.* en [34]. Con el fin de que los resultados sean directamente comparables, con la hipótesis de coeficiente de rozamiento constante se usará la misma fórmula, particularizada para  $\mu(\gamma) = \mu = \text{cte}$ :

$$\gamma(x, y) = -\mathbf{w} \cdot \left\{ \begin{array}{l} \cos(\alpha_1(x - \Delta x, y)) \\ \sin(\alpha_1(x - \Delta x, y)) \end{array} \right\} + L \left[ \mu \frac{\partial p_z(x, y)}{\partial x} \right] \quad (6.1)$$

### 6.3.2. Estimación del desgaste

En este apartado se indican la ley de desgaste y los algoritmos de desgaste (ver Cap. 2) utilizados en los cálculos realizados en el capítulo.

#### a. Ley de desgaste

En cuando a la ley de desgaste, se considerará que el desgaste es proporcional a la energía disipada en las áreas de contacto. Se utilizará el criterio de la USFD obtenido para superficies secas (ver Tabla 2.3).

#### b. Algoritmo de desgaste

Se utilizarán dos algoritmos de desgaste distintos en función de la forma en que se evalúa la energía disipada en las áreas de contacto: de forma local o de forma global (ver Cap. 2).

Por un lado, para la evaluación del desgaste de forma **local**, se calcula el índice de desgaste  $T\gamma/A$  en los elementos que forman el área de contacto. En este caso  $T/A$  representa las tensiones en el contacto y  $\gamma$  el deslizamiento local. Para ello, se utiliza la misma discretización empleada por el algoritmo de resolución del problema tangencial. Retomando la fórmula (2.136) y aplicándola según la discretización del área de contacto, se tiene:

$$\frac{T\gamma}{A}_{i,j} = \frac{T\gamma}{A}(x_i, y_j) = |\mathbf{p}_{i,j} \cdot \boldsymbol{\gamma}_{i,j}| = |p_{x_i,j} \gamma_{x_i,j} + p_{y_i,j} \gamma_{y_i,j}| \quad (6.2)$$

donde  $T\gamma/A_{i,j}$  se refiere al valor del índice de desgaste local y  $\mathbf{p}_{i,j}$ ,  $\boldsymbol{\gamma}_{i,j}$  son los valores de la tensión tangencial y deslizamiento local, respectivamente, en el elemento  $i, j$  dentro del área de contacto.



A partir de este valor, y según la ley USFD (Tabla 2.3), se obtiene la correspondiente tasa de desgaste  $W_{Rij}$  para el elemento  $i, j$ .

Por otro lado, para la evaluación del desgaste de forma **global**, el índice de desgaste  $T\gamma/A$  se puede obtener directamente a partir de las fuerzas tangenciales y de los valores de los pseudodeslizamientos del área de contacto.  $T$  representa las acciones (fuerzas y momentos) tangenciales al contacto,  $\gamma$  los valores de pseudodeslizamiento en el punto nominal de contacto y  $A$  el área de contacto, según se describe en el Cap. 2. Retomando la expresión (2.135) se tiene:

$$\frac{T\gamma}{A} = \frac{|F_x v_x + F_y v_y + M_{sp} \phi|}{A} \quad (6.3)$$

siendo  $F_x$  la fuerza longitudinal,  $F_y$  la fuerza transversal (o lateral) (ambas tangenciales al contacto) y  $M_{sp}$  el momento de *spin* y  $v_x, v_y, \phi$  los valores de los pseudodeslizamientos longitudinal, lateral y término de *spin*, respectivamente. Todas estas magnitudes están medidas en el sistema de referencia asociado al contacto (ver Cap. 2). Puesto que el problema normal está basado en la hipótesis de *ellipse equivalente*, el valor de la superficie de contacto se calcula  $A = \pi \cdot a \cdot b$ , siendo  $a, b$  los valores de los semiejes de la elipse equivalente de contacto.

Usando el valor global del índice de desgaste  $T\gamma/A$ , mediante la aplicación de la ley USFD (Tabla 2.3), se obtiene la tasa de desgaste global  $W_R$  para el área de contacto.

Cabe destacar las diferencias presentes en el cálculo del índice de desgaste global ( $T\gamma/A$ ) según se realice un promedio sobre la zona de deslizamiento o sobre el área de contacto. La utilización de uno u otro valor de superficie depende de la aplicación para la que se quiera utilizar este índice:

- Si se realiza un *promediado sobre el valor de la zona de deslizamiento* (como en la sección 5.3.3, fórmula (5.34) o en la sección 5.3.4, fórmula (5.41)) se obtiene un valor medio del índice de desgaste en la zona donde se produce el desgaste. De esta forma, el valor obtenido ofrece una idea de los mecanismos de desgaste que pueden darse en dicha área o de los regímenes de desgaste que localmente pueden darse (según la referencia [57]).

Con este valor del índice de desgaste  $T\gamma/A$  promediado se obtiene la tasa de desgaste global  $W_R$  (según la ley de desgaste apropiada) correspondiente a la zona de deslizamiento por distancia rodada y por unidad de área ( $\mu\text{g}/\text{m}/\text{mm}^2$ ). Para obtener la pérdida de masa por distancia rodada, se

debería multiplicar por el área de la zona de deslizamiento según la fórmula:

$$M_w = \overbrace{f_w \left( \frac{T\gamma}{A_s} \right)}^{w_R} \cdot A_s \quad (6.4)$$

siendo  $M_w$  la pérdida de masa por distancia rodada ( $\mu\text{g}/\text{m}$ ) y  $f_w$  la correspondiente ley de desgaste.

La utilización de esta fórmula presenta el inconveniente que se necesita conocer el valor de la superficie de deslizamiento para cada área de contacto (valor que normalmente no se computa en la rutina de resolución del problema tangencial ni tampoco se ofrece como resultado).

- Si en cambio se realiza un *promediado sobre el valor del área de contacto* (como por ejemplo según la fórmula (6.3)) se obtiene un valor medio de disipación energética en el área de contacto. Este valor no ofrece un significado físico debido a que se están promediando magnitudes en el área de contacto que sólo son no nulas en la zona de deslizamiento.

Para estimar el valor de la pérdida de masa por distancia rodada se multiplica la correspondiente tasa de desgaste promediada en el área de contacto por el área de contacto, según la fórmula:

$$M_w = \overbrace{f_w \left( \frac{T\gamma}{A} \right)}^{w_R} \cdot A \quad (6.5)$$

Dicha fórmula representa una aproximación a la anterior, pero ofrece la ventaja que permite obtener una estimación de la pérdida de masa por distancia rodada conociendo el valor del área de contacto; valor que sí se calcula en las rutinas de resolución del problema de contacto, más aún si se trata de una elipse (definida por los valores de los semiejes  $a$ ,  $b$ ).

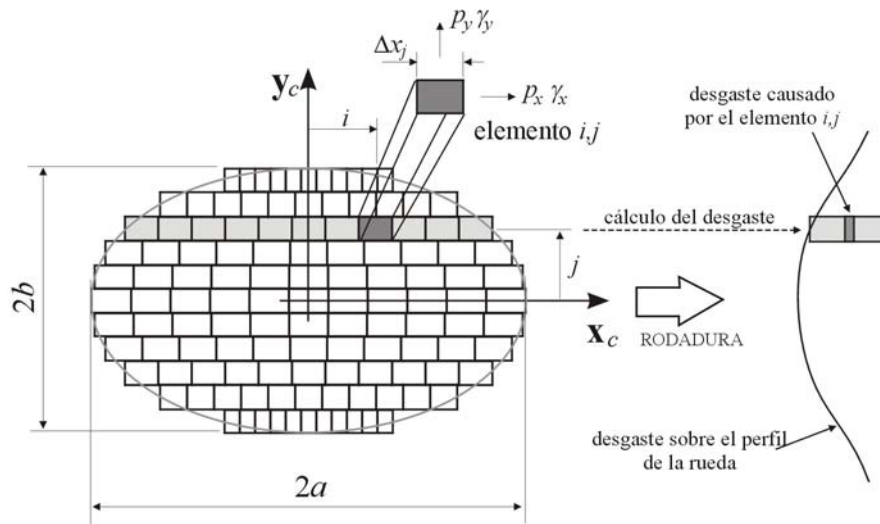
Por tanto para la estimación del desgaste de forma global, se usarán fórmulas que realicen un promediado del índice de desgaste en el área de contacto  $A$ .

### c. Obtención de la profundidad de desgaste

La ley de desgaste utilizada está basada en ensayos realizados en la máquina de doble disco SUROS (*Sheffield University Rolling Sliding*). Este modelo se utiliza para simular únicamente la formación de *desgaste regular* [10],

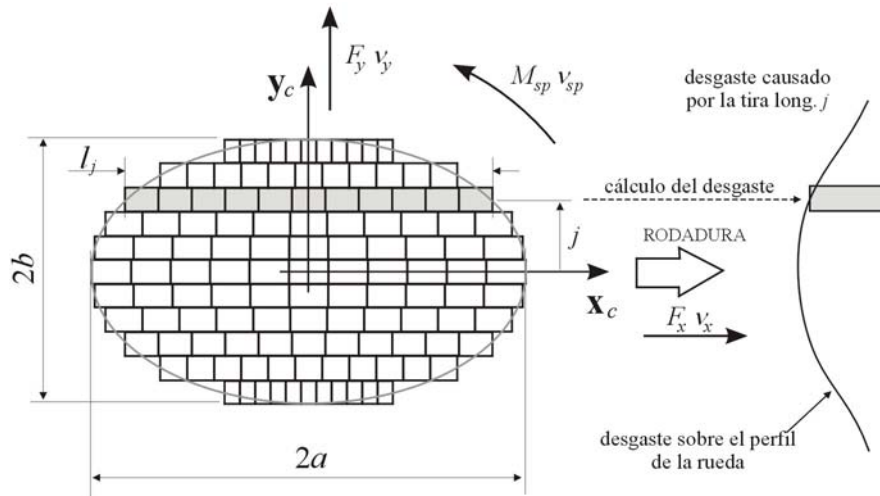
esto es, la variación del perfil transversal y no la formación de patrones de desgaste a lo largo de la dirección circunferencial. Por tanto, el desgaste que se produce en un determinado instante de tiempo y para una determinada posición de la rueda, se distribuye a lo largo de la circunferencia completa de la rueda. Este desgaste se acumula según las tiras longitudinales en las que se divide el área de contacto para resolver el problema tangencial.

- Para el cálculo de desgaste de forma **local**, se utiliza un factor  $\Delta x_j / (2\pi R_j)$  que reparte el desgaste de un elemento de longitud  $\Delta x_j$  en la correspondiente circunferencia de la rueda, de longitud  $2\pi R_j$ , siendo  $R_j$  el radio de rodadura correspondiente a dicho elemento (ver Figura 6.4).



**Figura 6.4.** Esquema de la implementación del algoritmo de desgaste de forma local.

- Para el cálculo del desgaste de forma **global**, se utiliza un factor  $l_j / (2\pi R)$ , siendo  $l_j$  la longitud de la tira longitudinal o *strip* y  $R$  el valor del radio de rodadura correspondiente al área de contacto (ver Figura 6.5).



**Figura 6.5.** Esquema de la implementación del algoritmo de desgaste de forma global.

La profundidad de desgaste causada por la tira longitudinal  $j$  sobre el perfil de la rueda, siendo  $\rho$  la densidad del material y  $V \Delta t$  la distancia recorrida, se puede obtener como:

$$D_j = \frac{1}{\rho} (V \Delta t) \frac{\Delta x_j}{2\pi R_j} \sum_{i=1}^N W_{R_i,j} \quad (6.6)$$

$$D_j = \frac{1}{\rho} (V \Delta t) \frac{l_j}{2\pi R_j} W_R \quad (6.7)$$

Se utilizará la fórmula (6.6) para la evaluación de forma local (siendo  $N$  el número de elementos de la tira longitudinal) y la fórmula (6.7) para la evaluación de forma global.

#### d. Actualización del desgaste y suavizado

Según el procedimiento descrito, para cada instante de integración se va acumulando el desgaste causado por cada una de las tiras longitudinales de las áreas de contacto, sobre cada una de las ruedas. Existen dos criterios para actualizar este desgaste sobre los perfiles de las ruedas que componen el vehículo:

- Por una parte, en función de la longitud rodada por el vehículo. Quost *et al.* [89] señalan una distancia de 50 km para actualizar los perfiles.

- Por otra, en función de la máxima profundidad de desgaste acumulada. Braghin *et al.* [10] proponen actualizar los perfiles cuando esta profundidad alcance 0,1 mm.

Una vez obtenida la profundidad de desgaste se aplica un suavizado con el fin de alisar la distribución de desgaste obtenida, que físicamente no se podría producir. Braghin *et al.* [10] proponen el siguiente procedimiento: en primer lugar aplicar un suavizado por media móvil aplicada a la profundidad de desgaste, en segundo lugar se actualizan los perfiles y finalmente se suavizan los perfiles mediante splines cúbicos. Por otra parte Quost *et al.* [89] no definen ninguna técnica de suavizado puesto que el objetivo es comparar distintas leyes de desgaste.

Puesto que en este capítulo las simulaciones se harán sobre un circuito relativamente corto (4 km), no se ha optado por actualizar los perfiles de las ruedas. Con el fin de comparar los resultados con los que aparecen en la bibliografía se realizará un suavizado por media móvil aplicado a la profundidad de desgaste obtenida.

#### 6.4. Cálculos realizados

El objetivo de los cálculos presentados es investigar el efecto de considerar el coeficiente de rozamiento variable (frente a coeficiente de rozamiento constante) y el efecto del algoritmo de desgaste empleado (local/global) sobre el desgaste estimado en los perfiles de la rueda. Además, se comparará el tiempo de cálculo empleado en cada uno de los ensayos. Por tanto, se van a realizar 4 ensayos, tal como muestra la Tabla 6.3.

**Tabla 6.3.** Cálculos realizados

	$\mu$ constante	$\mu$ variable (superficies secas)
Algoritmo de desgaste local	Ensayo 1	Ensayo 3
Algoritmo de desgaste global	Ensayo 2	Ensayo 4

#### 6.5. Resultados

En este apartado se presentan los resultados de las simulaciones realizadas. En primer lugar se analizará el resultado de la simulación dinámica del vehículo al atravesar el circuito. Se tomará el movimiento de los ejes del primer bogie. Se compararán las soluciones obtenidas mediante los dos modelos de coeficiente de

rozamiento utilizados ( $\mu$  constante frente a  $\mu$  variable). En segundo lugar, se analizarán las estimaciones de desgaste obtenidas según los dos modelos de coeficiente de rozamiento y según los dos algoritmos de desgaste (local, global).

### 6.5.1. Movimiento de los ejes

En esta sección se analiza el movimiento cuando el vehículo traza el circuito. Este circuito está compuesto por un tramo inicial de vía recta, seguido de una curva peraltada de radio constante y de un tramo recto final. Entre los tramos de vía recta y de curva peraltada se sitúan unas curvas de transición.

Para obtener el movimiento del vehículo en el circuito se parte con condiciones iniciales nulas que se corresponde con la posición de equilibrio de los cuerpos que componen el vehículo. Puesto que no existe excitación en el tramo de vía recta, los cuerpos siguen en esta posición hasta llegar a la curva de transición. En este punto se genera un transitorio de entrada en curva con unas oscilaciones que pueden abarcar parte de la curva de transición o hasta entrada la curva de radio constante. En este tramo las oscilaciones se amortiguan y el vehículo alcanza una posición cuasiestática en curva, que depende del equilibrio entre las fuerzas externas (fuerzas de inercia y fuerzas en el contacto rueda-carril). Esta situación se mantiene hasta la transición de salida de la curva donde se produce de nuevo un movimiento transitorio que puede abarcar la curva de transición o parte del tramo recto final. En cualquiera de los casos se llega al tramo recto final con unas condiciones cinemáticas no nulas. Dependiendo principalmente de las características de la suspensión se produce un movimiento oscilatorio que, en ausencia de excitación y si el vehículo es estable a esa velocidad, se amortigua hasta alcanzar de nuevo la posición de equilibrio.

Puesto que el objetivo de la simulación es el análisis del desgaste en los perfiles causado por el contacto rueda-carril se analiza el movimiento de éstos. En un vehículo como el analizado, formado por dos bogies de tipo B (dos ejes cada bogie), por una parte los ejes delanteros de cada bogie siguen el mismo movimiento y, por otra parte, los ejes traseros. Por tanto, se analizará el movimiento de los ejes del primer bogie.

En las Figuras 6.6 y 6.7 se muestra el desplazamiento lateral y el ángulo de lazo, respectivamente, de los ejes del primer bogie al trazar el circuito. En estos gráficos se observan las características mencionadas anteriormente. Las oscilaciones en ambas curvas de transición se amortiguan en un corto espacio de tiempo. En cambio, en el tramo recto final, debido a las condiciones cinemáticas iniciales, se produce un movimiento oscilatorio amortiguado. Puesto que el

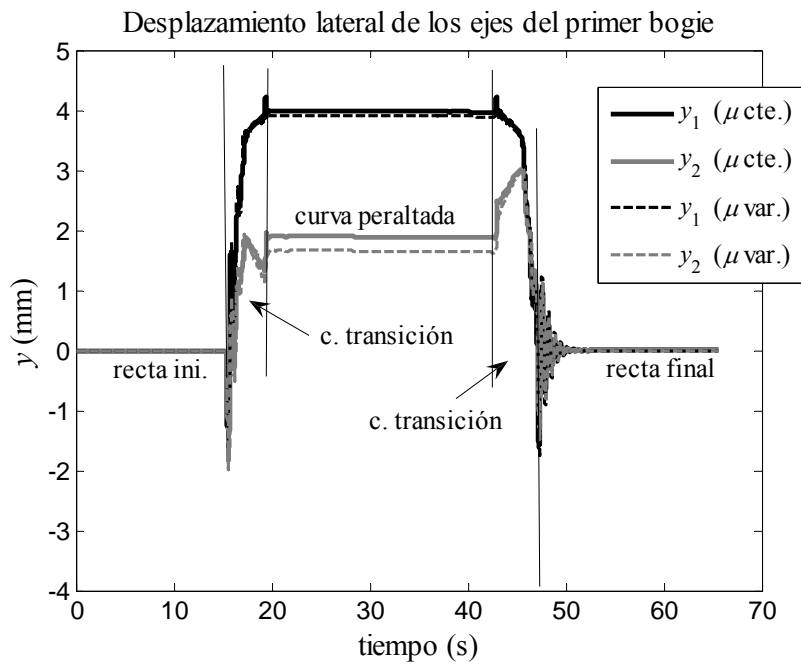
vehículo está circulando a alta velocidad (220 km/h) este transitorio se amortigua lentamente hasta alcanzar la posición de equilibrio (ver Figura 6.8) [32].

Al analizar el movimiento de los ejes se compara el efecto de las dos distintas modelizaciones del coeficiente de rozamiento. Cabe destacar que los parámetros que definen ambos modelos para el coeficiente de rozamiento representan el contacto entre superficies secas y para el modelo con coeficiente de rozamiento variable, la función de fricción se ha obtenido a partir de datos experimentales (ver Cap. 5).

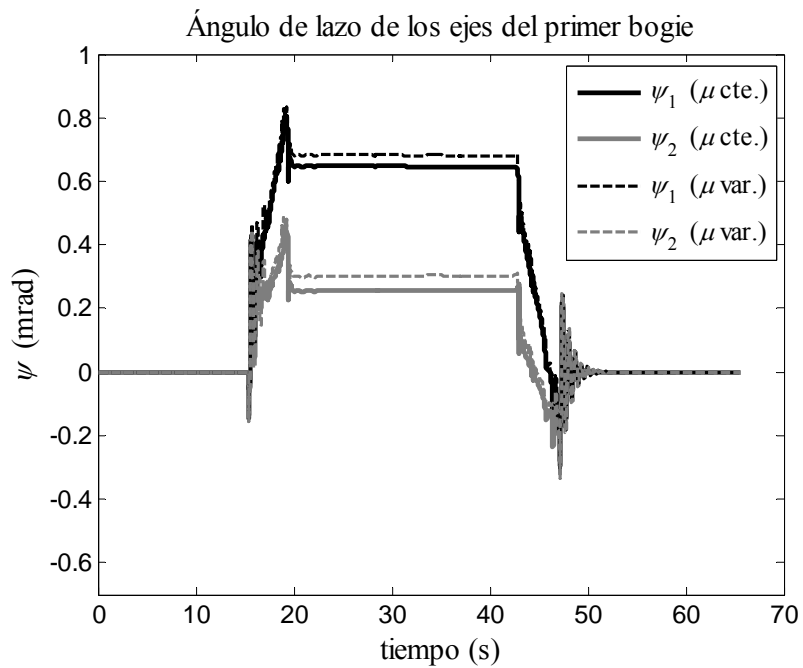
Durante el trazado del circuito de vía completo se observan sobretodo diferencias en la posición cuasiestática en la que los ejes trazan la curva peraltada de radio constante. También existen diferencias en los transitorios que aparecen en el inicio de las curvas de transición y en el transitorio que aparece en el inicio del tramo recto final.

En cuanto a la **curva peraltada**, analizando el comportamiento de los dos ejes del primer bogie, el primer eje tiene un desplazamiento lateral del orden de unos 4 mm, mucho mayor que el segundo eje cuyo desplazamiento es inferior a 2 mm. En cuanto al ángulo de lazo también es positivo para ambos ejes, tomando el primer eje valores del orden de 0,7 mrad mucho mayores que el segundo, con valores de 0,30 mrad. Este es el comportamiento típico de los ejes montados en un bogie con un primer eje que adopta una posición mucho más *agresiva* mientras que el segundo eje adopta una posición más centrada [67, 105], aunque los valores concretos dependen de las características de la suspensión y del trazado de la curva.

Comparando ahora el efecto de la consideración de un diferente modelo de coeficiente de rozamiento, para  $\mu$  constante el desplazamiento lateral de los ejes es mayor. Posiblemente este comportamiento sea debido a que el valor del coeficiente de rozamiento según el modelo de  $\mu$  variable sea mayor que para  $\mu$  constante y por tanto las fuerzas tangenciales limiten más el desplazamiento lateral del eje al trazar la curva. En cuando al ángulo de lazo, en los dos casos es positivo, aunque con un valor pequeño, siendo ligeramente mayor con el modelo de  $\mu$  variable.



**Figura 6.6.** Evolución del desplazamiento lateral de los ejes del primer bogie al trazar el circuito.



**Figura 6.7.** Evolución del ángulo de lazo de los ejes del primer bogie al trazar el circuito.



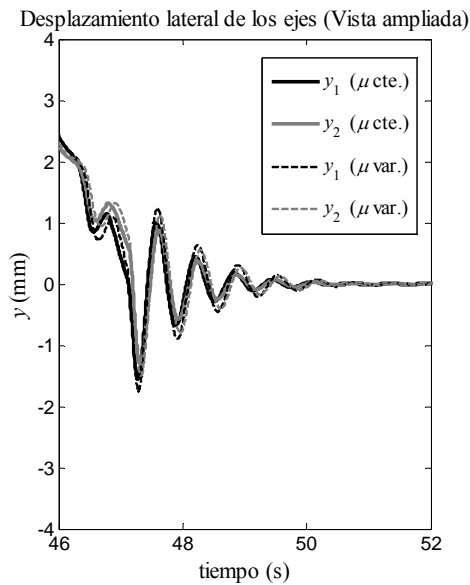
En la Tabla 6.4 se muestran los valores de los desplazamientos laterales y ángulos de lazo para los ejes del primer bogie. Las diferencias entre ambos métodos alcanzan valores del 20 %. En [91] se han obtenido discrepancias de hasta el 100 % en los valores de las coordenadas de los ejes.

**Tabla 6.4.** Valores de los desplazamientos laterales  $y$  y de los ángulos de lazo  $\psi$  obtenidos para los ejes del primer bogie en la posición cuasiestática en curva, según los dos modelos considerados.

	$\mu$ constante	$\mu$ variable	% $\Delta$ respecto $\mu$ variable
Eje delantero	$y_1 = 3,98$ mm	$y_1 = 3,90$ mm	2 %
	$\psi_1 = 0,65$ mrad	$\psi_1 = 0,68$ mrad	5 %
Eje trasero	$y_2 = 1,89$ mm	$y_2 = 1,65$ mm	14 %
	$\psi_2 = 0,25$ mrad	$\psi_2 = 0,30$ mrad	17 %

Es interesante señalar que aunque los valores obtenidos para las posiciones de los ejes en los distintos cálculos sean distintos (porque dependen de muchos parámetros como la geometría del contacto, el diseño de la suspensión, la geometría del circuito y la velocidad de circulación) siguen las mismas tendencias.

Por otra parte, la Figura 6.8 muestra una vista ampliada del transitorio de salida de la curva. Se observa que el movimiento obtenido para  $\mu$  constante se amortigua ligeramente más rápido que para  $\mu$  variable. Este comportamiento se puede deber a que aparece más disipación energética en el caso de  $\mu$  constante debido a un mayor porcentaje de las áreas de contacto se encuentren en deslizamiento. No obstante esta característica puede darse únicamente para el caso estudiado y permite extraer conclusiones generales.



**Figura 6.8.** Vista ampliada del transitorio que aparece en el tramo de recta final.

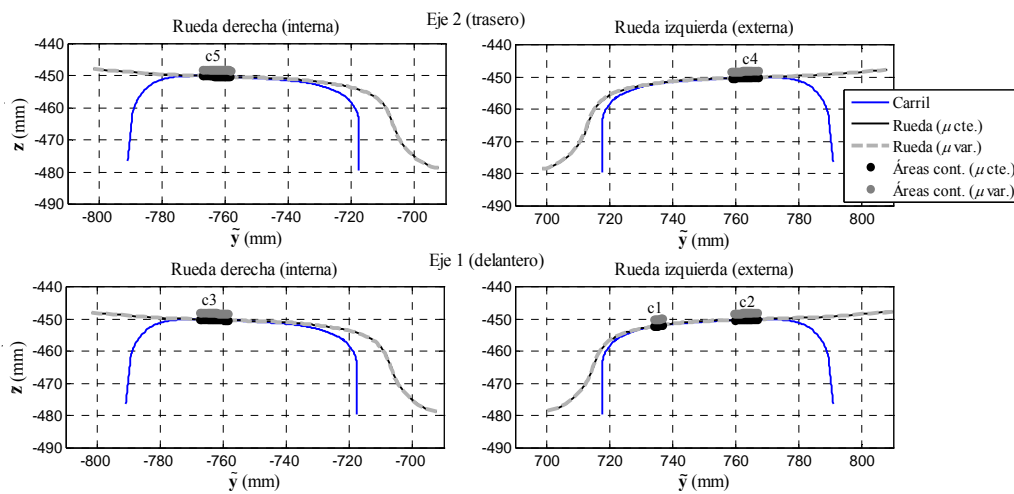
Una vez analizado el movimiento de los ejes en el circuito, se va a analizar la configuración de las áreas de contacto. Se van a considerar dos casos extremos: la configuración para un tramo de vía recta y la configuración en el caso de que esté trazando la curva de forma cuasiestática.

En primer lugar se analizar la posición cuasiestática en curva. En la Figura 6.9 se muestra la posición de las áreas de contacto obtenida para los dos ejes del primer bogie, según los dos modelos empleados para el coeficiente de rozamiento. Aunque existen diferencias, la configuración de las áreas de contacto es análoga en los dos casos.

- El eje delantero en ambos casos tiene un desplazamiento lateral elevado que provoca la aparición en la rueda externa de dos áreas de contacto, una sobre la banda de rodadura (área de contacto c2, que actúa como área de contacto principal, soportando la mayor parte de la carga) y otra sobre la base de la pestaña (área de contacto c1). En la rueda interna aparece un solo punto de contacto sobre la banda de rodadura (c3).
- El eje trasero experimenta un desplazamiento lateral mucho menor, que produce que la configuración de las áreas de contacto sea muy similar a la de un eje centrado (ver Figura 6.10). Existe un área de contacto sobre la

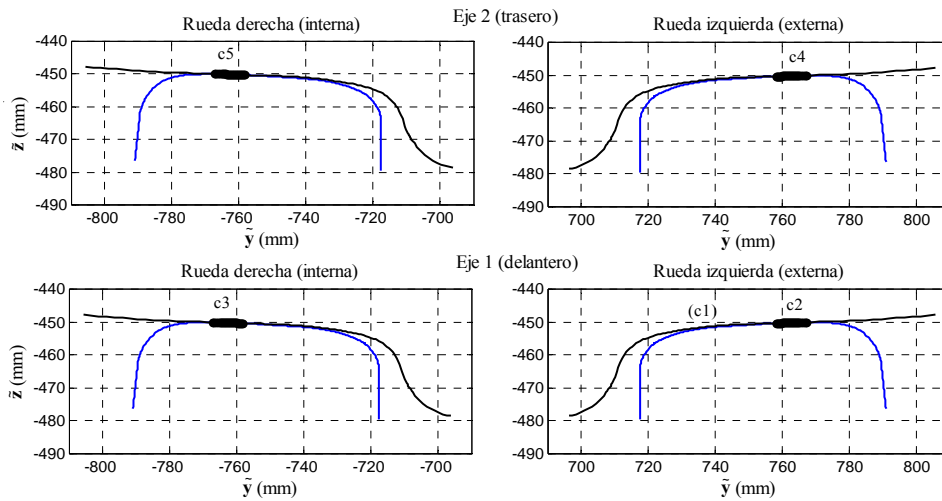
banda de rodadura de cada rueda (c4 en la rueda externa y c5 en la rueda interna), ambas prácticamente simétricas.

Se puede comprobar que aunque la posición del eje sea distinta según el distinto modelo de coeficiente de rozamiento empleado, en este caso se obtiene una misma configuración de las áreas de contacto según los dos modelos considerados. Es interesante también mencionar el caso del segundo eje (trasero). Aunque su posición está apartada de la posición centrada y sin ángulo de lazo, la configuración de las áreas de contacto es la misma que para un eje centrado, dando lugar a dos áreas de contacto prácticamente simétricas.



**Figura 6.9.** Vista frontal de la posición cuasiestática de los ejes del primer bogie con sus correspondientes áreas de contacto al trazar la curva para los dos modelos del coeficiente de rozamiento considerados.

En segundo lugar, con el objeto de comparar con la posición cuasiestática en curva, la Figura 6.10 muestra la configuración de los ejes. Esta situación tiene lugar en el tramo de recta inicial y, tras el transitorio de salida de la curva, en el tramo de recta final. En el primer eje no aparece el área de contacto sobre la base de la pestaña (c1), pero las otras dos áreas de contacto prácticamente se mantienen en la misma posición sobre los perfiles. En el segundo eje, como ya se ha mencionado, la situación en curva cuasiestática es muy parecida a la de un eje centrado, por lo que se mantienen las dos áreas de contacto.



**Figura 6.10.** Vista frontal de la posición centrada de los ejes del primer bogie con sus correspondientes áreas de contacto.

### 6.5.2. Estimación del desgaste

Una vez investigado el efecto de la consideración de un distinto modelo de coeficiente de rozamiento sobre el movimiento de los ejes, en esta segunda sección se analiza la repercusión sobre la estimación de la profundidad del desgaste sobre el perfil de la rueda.

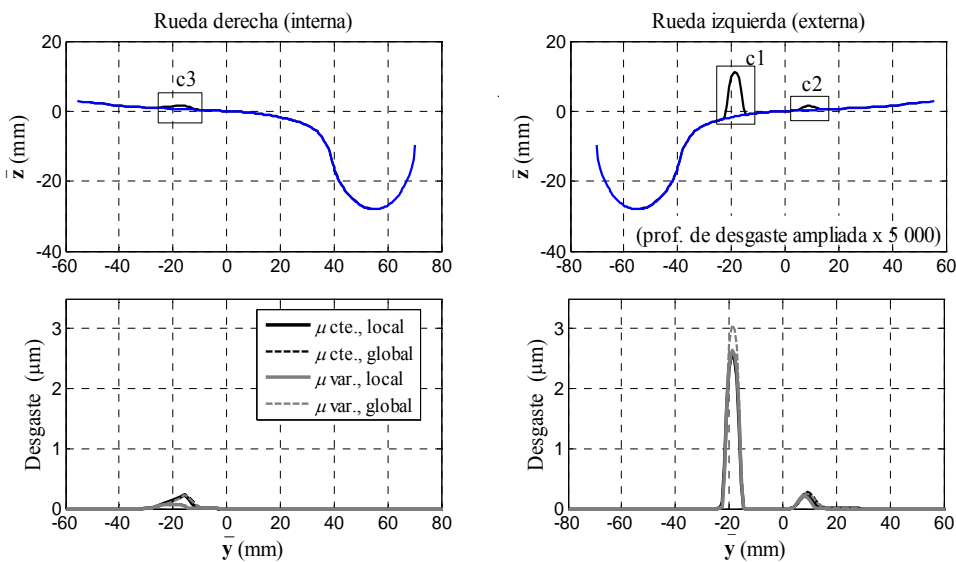
En cuanto a la estimación del desgaste, se van a analizar los resultados desde tres puntos de vista:

- Análisis general de la profundidad de desgaste producida al trazar el circuito completo
- Análisis general de la evolución de la profundidad de desgaste a medida que se traza el circuito
- Análisis particular de las distintas estimaciones de profundidad de desgaste obtenidas en los distintos ensayos.

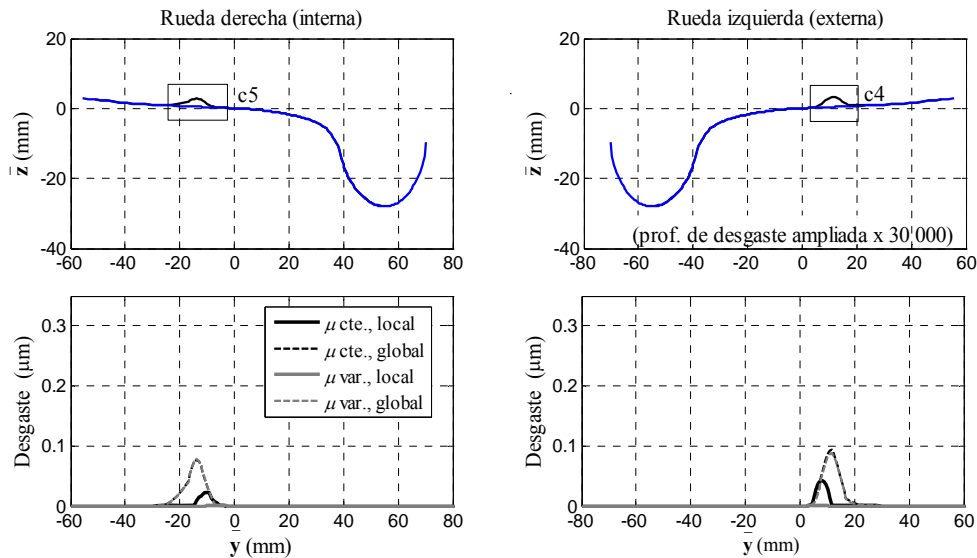
#### a. Análisis general de la profundidad de desgaste

En **primer lugar** se va a analizar el desgaste producido en los perfiles de las ruedas en el circuito completo. Las Figuras 6.11 y 6.12 muestran la estimación del desgaste sobre las ruedas de los dos ejes del primer bogie al trazar el circuito. A *rasgos generales*, por una parte se puede observar como la profundidad de desgaste es del orden de 50 veces mayor en el eje delantero que en el trasero. Esto es debido

al mayor desplazamiento lateral que sufre este eje al trazar la curva, lo que produce unos valores de pseudodeslizamiento mayores y, por tanto, mayor disipación energética en las áreas de contacto y mayor tasa de desgaste. Considerando ahora el primer eje, la profundidad de desgaste sobre la rueda es del orden de 10 veces mayor en la zona cercana a la pestaña (área de contacto c1) que en la zona situada en la banda de rodadura (áreas de contacto c2 y c3). Esta mayor profundidad de desgaste se debe a que los valores de pseudodeslizamientos en la zona de la pestaña son mucho mayores (alejados de la condición de rodadura sin deslizamiento) lo que produce que gran parte del área de contacto esté en deslizamiento y que la disipación energética sea mayor.



**Figura 6.11.** Profundidad de desgaste acumulada en las ruedas del primer eje al trazar el circuito.



**Figura 6.12.** Profundidad de desgaste acumulada en las ruedas del segundo eje al trazar el circuito.

Por otra parte, también es interesante destacar que los patrones en la profundidad de desgaste sobre los perfiles de las ruedas se corresponden con la posición de las áreas de contacto que aparecen en la posición en recta y al trazar la curva cuasiestática (ver Figuras 6.9 y 6.10). Esta característica se debe a la geometría de los perfiles en el contacto rueda-carril (sobre todo si son nuevos), donde las áreas de contacto ocupan posiciones discretas sobre los perfiles de la rueda y del carril. Esta característica también se puede observar en [89].

Los resultados de la profundidad de desgaste calculados se pueden comparar con los ofrecidos por Lewis *et al.* [55] de donde se ha tomado el circuito empleado en este capítulo. En esta referencia se muestra únicamente un área de contacto que aparece sobre la banda de rodadura de la rueda. Debido a las características de la suspensión del vehículo modelizado en dicho trabajo, puede ser que el eje delantero se coloque de tal forma que aparezca una única área de contacto sobre la rueda externa. En cuanto a los valores absolutos de profundidad de desgaste, en [55] se obtienen unos valores del orden de  $0,032 \mu\text{m}/\text{km}$  en el área de contacto situada en la banda de rodadura, mientras que en el presente trabajo, del orden de  $0,064 \mu\text{m}/\text{km}$  para las áreas de contacto situadas sobre la banda de rodadura y de  $0,625 \mu\text{m}/\text{km}$  para las áreas de contacto situadas sobre la base de la pestaña de la rueda. Se debe tener en cuenta que los resultados no son directamente comparables debido a que ambos vehículos pueden tener un distinto diseño de la suspensión primaria que puede producir una distinta posición de los ejes en curva.

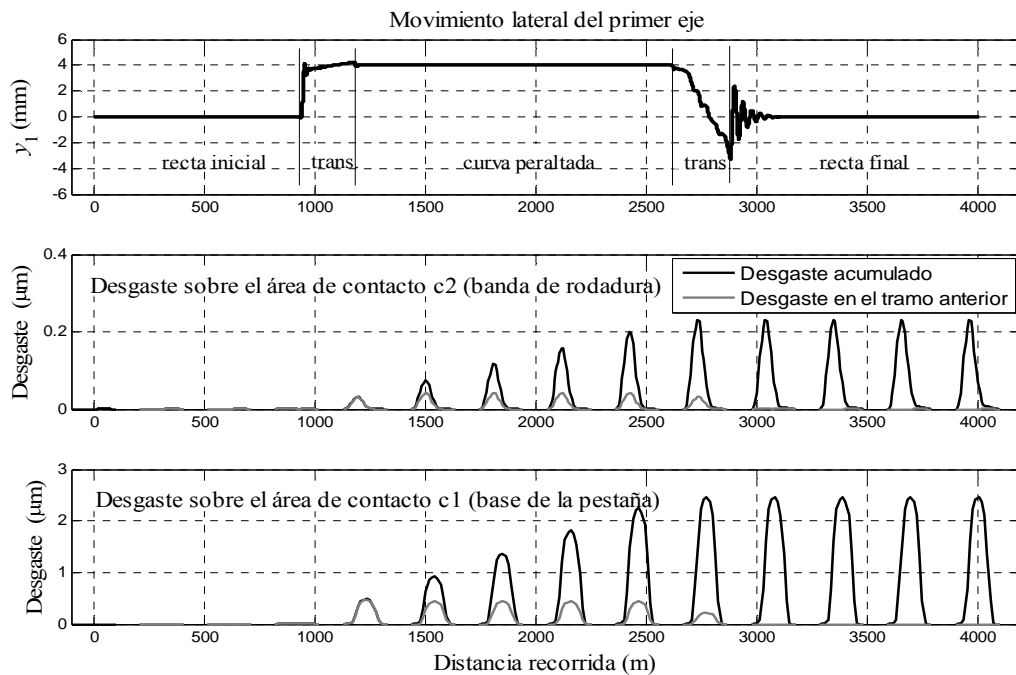
Considerando otros autores, Kalker [46] calcula un desgaste del orden de  $0,011 \mu\text{m}/\text{km}$  (valor ligeramente inferior puesto que está calculado para vía recta); Enblom y Berg [23] obtienen valores entre  $0,017 \mu\text{m}/\text{km}$  (en recta, para áreas de contacto en la banda de rodadura) y  $0,833 \mu\text{m}/\text{km}$  (en curva de radio 600 m, para áreas de contacto en la pestaña); y finalmente Quost *et al.* en [89] con valores de tasa de profundidad de desgaste entre  $0,938$  y  $1,563 \mu\text{m}/\text{km}$  (tanto para áreas de contacto en la banda de rodadura y en la base de la pestaña de la rueda, respectivamente). Por tanto, los valores de desgaste obtenidos en los cálculos realizados tienen un orden de magnitud correcto y parecen razonables según los valores ofrecidos en la bibliografía.

Por otra parte, en otros trabajos como Pombo *et al.* [86] y Pombo *et al.* [87] no se ofrecen los valores absolutos de profundidad de desgaste, sino que se toma como 100 % el valor máximo de desgaste en la rueda y la profundidad de desgaste se define de forma relativa a este valor máximo.

### **b. Análisis general de la evolución de la profundidad**

En **segundo lugar**, se va a analizar la *evolución de la profundidad de desgaste* que aparece en los perfiles de las ruedas a medida que se traza el circuito. Se va a tomar la rueda izquierda del primer eje, debido a que es la que tiene un valor más elevado de desgaste. Se analizará por separado la profundidad de desgaste en la banda de rodadura de la rueda (asociada al área de contacto c2) y la de la base de la pestaña (asociada al área de contacto c1).

En la Figura 6.13 se muestra la evolución de la profundidad de desgaste asociada a las dos áreas de contacto para intervalos de 285 m, tanto para el valor de desgaste acumulado, como para el valor de desgaste producido en cada intervalo. En esta figura se observa como prácticamente todo el desgaste se produce en los tramos que no se corresponden con vía recta (por esta razón el valor de tasa de desgaste ofrecido por Kalker en [46] es tan bajo en comparación a los presentados en esta Tesis). Esta característica se produce tanto en la banda de rodadura (área de contacto c2) como en la zona de la base de la pestaña (área de contacto c1). Este mismo comportamiento se produce también en la rueda izquierda y en las áreas de contacto en el segundo eje.



**Figura 6.13.** Evolución de la profundidad de desgaste creada por las áreas de contacto de la rueda izquierda (externa) del primer eje.

En los tramos de vía recta se produce un desgaste mucho menor, aun considerando el transitorio que aparece en la salida de la curva de transición. Este resultado también se muestra en [55]. Por tanto, el resultado obtenido para la profundidad de desgaste en los perfiles de las ruedas dependerá en su mayor parte de la posición en la que los ejes tracen la curva peraltada y los tramos de transición.

### c. Análisis particular de la profundidad de desgaste

En **tercer lugar**, se van a analizar las *diferencias* existentes en la *estimación de la profundidad de desgaste* según los distintos ensayos. Tomando como referencia las Figuras 6.11 y 6.12 se van a examinar con más detalle las profundidades de desgaste producidas por las siguientes áreas de contacto:

- Área de contacto del eje delantero situada sobre la base de la pestaña en la rueda externa (c1): debido a la posición que adoptan los ejes en curva, es el área de contacto con mayores valores de velocidades de pseudodeslizamiento y fuerzas tangenciales al contacto.
- Área de contacto del eje delantero situada sobre la banda de rodadura en la rueda externa (c2): aparecen niveles elevados de disipación energética, pero sin llegar a los valores en la zona de la pestaña. En cuanto al desgaste,



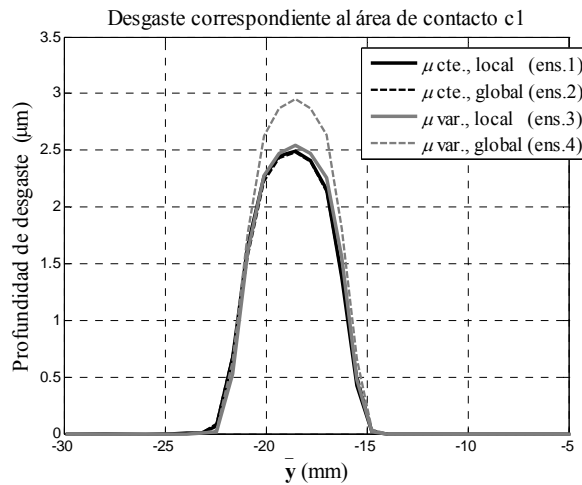
la situación sería similar en al área de contacto en la banda de rodadura de la rueda derecha (c3). Esta área de contacto aparece en todo el trazado del circuito de la vía, pero con valores más elevados de pseudodeslizamiento (y por tanto fuerzas tangenciales) en las curvas de transición y en el trazado de vía en curva debido a que el eje se desplaza de su posición centrada.

- Área de contacto del eje trasero: se estudia un área de contacto situada en el eje trasero del primer bogie. Debido a que este eje adopta una posición cercana a la de equilibrio, la situación será similar en las dos áreas de contacto situadas sobre las bandas de rodadura de ambas ruedas (c4, c5). Se toma el área de contacto en la rueda externa (c4). Esta área aparece durante el trazado del circuito de la vía completo, con valores de disipación energética ligeramente mayores en el trazado de la vía en curva debido a que el segundo eje se desplaza ligeramente de su posición centrada.

Para justificar las diferencias que aparecen según los distintos ensayos realizados, se van a tomar como referencia las distribuciones de las magnitudes asociadas al problema tangencial y estimación del desgaste de las áreas de contacto en la posición cuasiestática en curva. En esta configuración es donde se produce la mayor profundidad de desgaste (ver Figura 6.13) y en este tramo el contacto rueda-carril se efectúa en todas las zonas de desgaste que aparecen sobre los perfiles de las ruedas una vez se ha trazado el circuito de la vía completo (ver Figuras 6.11 y 6.12).

### ***c.1. Área de contacto c1***

Esta área de contacto se sitúa sobre la rueda externa del primer eje, en la zona de la base de la pestaña, tal como muestra la Figura 6.11. Aparece únicamente durante el trazado de las curvas de transición y de la curva peraltada. Las estimaciones en la profundidad de desgaste sobre el perfil de la rueda se muestran en la Figura 6.14.

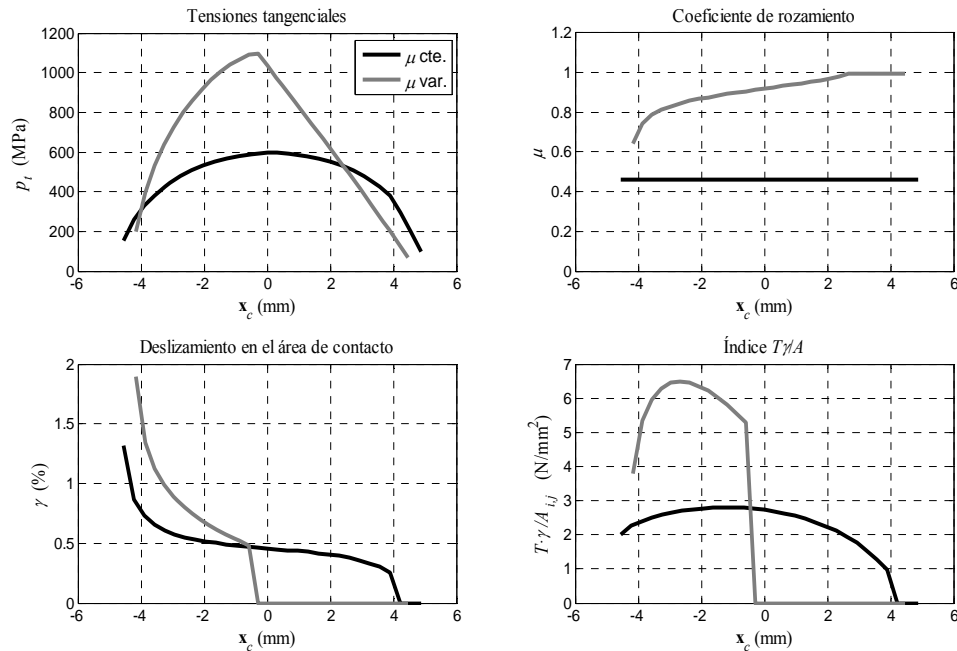


**Figura 6.14.** vista ampliada de la profundidad de desgaste sobre el perfil de la rueda correspondiente al área de contacto c1.

En esta área de contacto las diferencias considerando un modelo de  $\mu$  constante o  $\mu$  variable son mínimas (considerando el análisis local), con un valor ligeramente superior para  $\mu$  variable. Estas diferencias se deben a que se ha utilizado distintas funciones de fricción para modelizar el comportamiento de las partículas del área de contacto. En general habrá diferencias entre estos dos modelos.

Considerando el modelo de  $\mu$  constante, las estimaciones de profundidad de desgaste obtenidas según un algoritmo local o global coinciden. A esta consecuencia también llegan Quost *et al.* [87] y Pombo *et al.* [89]. Esta característica se debe a que el análisis global realizado sobre el área de contacto es representativo de la distribución de las distintas magnitudes sobre el área de contacto.

En cambio, considerando el modelo de  $\mu$  variable, la estimación realizada aplicando el algoritmo global ofrece valores de desgaste un 15 % mayores respecto a la estimación local. Esta característica, a diferencia del resultado para  $\mu$  constante, se debe a que la aplicación global del algoritmo de desgaste no ofrece un valor representativo de las magnitudes en el área de contacto. Para justificar esta diferencia se estudiarán las distribuciones de las magnitudes asociadas al contacto tangencial dentro del área de contacto (Figura 6.15).



**Figura 6.15.** Variación de las magnitudes locales en la *strip* central del área de contacto c1: tensión tangencial  $p_t$ , coeficiente de rozamiento local  $\mu$ , deslizamiento adimensional  $\gamma$  e índice de desgaste  $T\gamma/A$  calculado localmente, obtenidas para  $\mu$  constante y variable.

En la Figura 6.15 se representa la distribución de tensiones tangenciales, coeficiente de rozamiento, deslizamiento adimensional e índice  $T\gamma/A$  para una *strip* central del área de contacto c1 considerando los dos modelos para  $\mu$ . Con el fin de obtener una buena estimación del desgaste en el área de contacto se deben analizar estas magnitudes (algoritmo global) o bien usar parámetros globales que las representen correctamente.

Con el fin de comparar los dos algoritmos (local/global) se van a obtener parámetros globales a partir de estas distribuciones y se contrastarán con los valores de las magnitudes globales usadas en la fórmula (6.3).

La Figura 6.16 muestra los valores de las magnitudes globales asociadas a la estimación del desgaste según se han empleado en los distintos ensayos. Estos valores se han calculado como:

- **Tensión tangencial media** (fuerza tangencial total): en los ensayos 1 y 3 (donde se ha empleado un algoritmo *local*) se calcula el valor medio de la distribución de tensiones tangenciales en el área de contacto:

$$p_t^{medio} = \frac{\Delta y}{A} \sum_{j=1}^N \left( \sum_{i=1}^N \left( \sqrt{p_{x_i,j}^2 + p_{y_i,j}^2} \right) \Delta x_j \right) \quad (6.8)$$

siendo  $A$  el valor del área de contacto y  $N \cdot N$  el número de elementos del área de contacto.

Por otra parte, para los ensayos 2 y 4 (donde se ha empleado un algoritmo *global*), el valor medio de las tensiones tangenciales se calculado como

$$p_t^{medio} = \frac{1}{A} \sqrt{F_x^2 + F_y^2} \quad (6.9)$$

Como se puede comprobar, las fórmulas (6.8) y (6.9) son equivalentes por lo que los valores obtenidos son los mismos según ambos algoritmos. Este aspecto se puede comprobar en la gráfica de la Figura 6.16.

- **Deslizamiento en el área de contacto:** En los ensayos 1 y 3 (algoritmo *local*) este valor se calcula como el valor medio del deslizamiento en el área de contacto, según la expresión

$$\gamma^{medio} = \frac{\Delta y}{A} \sum_{j=1}^N \left( \sum_{i=1}^N \left( \sqrt{\gamma_{x_i,j}^2 + \gamma_{y_i,j}^2} \right) \Delta x_j \right) \quad (6.10)$$

En cambio, en los ensayos 2 y 4 (algoritmo *global*) este valor se *estima* como el valor de pseudodeslizamiento en el punto nominal de contacto

$$\gamma^{medio} \approx \sqrt{v_x^2 + v_y^2} \quad (6.11)$$

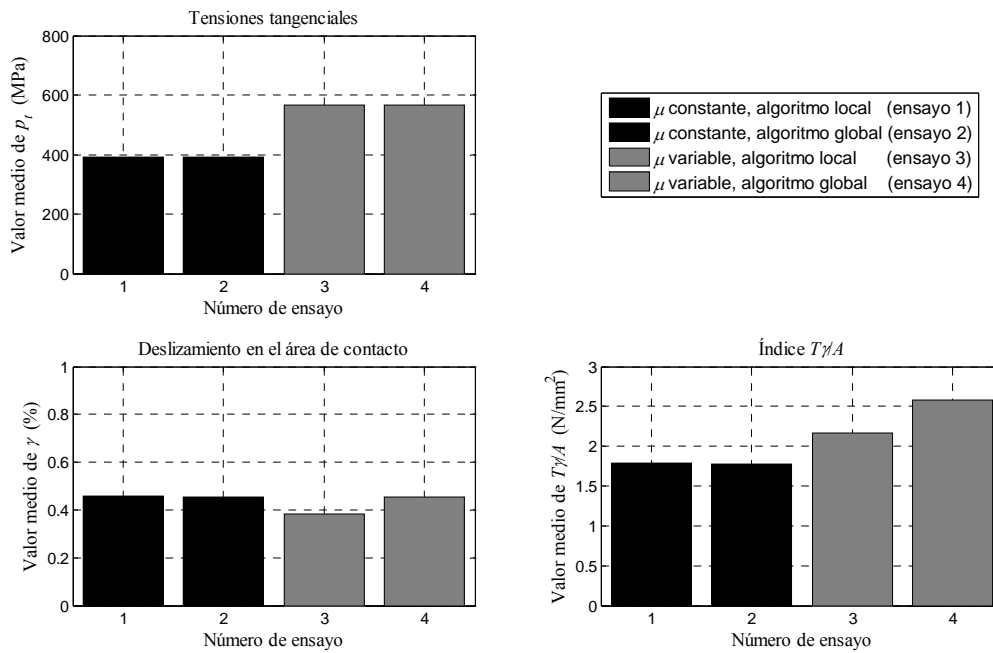
Estos dos valores no *necesariamente* coinciden. Por tanto, al estimar el valor de deslizamiento característico a partir de los valores de pseudodeslizamiento se puede cometer un error.

En el ejemplo analizado usando el modelo de  $\mu$  variable, el error con el que se estima el deslizamiento en el área de contacto a partir de los valores de pseudodeslizamiento es de un 20 % (ver Figura 6.16).

- **Índice  $T\gamma/A$ :** En cualquiera de los dos casos (*local/global*) este índice se estima como el producto del valor medio de la tensión tangencial por el valor de deslizamiento en el área de contacto.

Debido a que la estimación realizada para el deslizamiento en el área de contacto para  $\mu$  variable y algoritmo *global* no es buena, aparece también un error en la estimación del índice  $T\gamma/A$  (para  $\mu$  variable) de un 20 %.

Este error en la estimación del índice de desgaste produce un error que, en este caso, mayor la profundidad de desgaste del perfil de la rueda. Como se ha comentado anteriormente, el error cometido en la profundidad de desgaste al aplicar un algoritmo global con  $\mu$  variable está alrededor del 15 %.

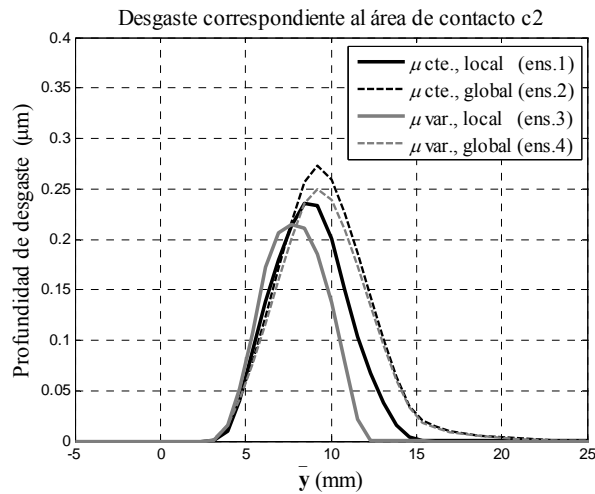


**Figura 6.16.** Valores globales asociados a las magnitudes tangenciales en el área de contacto c1.

Una vez analizada el área de contacto c1 se va a pasar al área de contacto c2.

### c.2. Área de contacto c2

Esta área de contacto se sitúa sobre la banda de rodadura de la rueda externa del primer eje. Aunque a diferencia del área de contacto c1 esta área de contacto aparece durante todo el circuito, los niveles de desgaste alcanzados son mucho menores respecto a aquél caso.



**Figura 6.17.** Vista ampliada de la profundidad de desgaste correspondiente al área de contacto c2.

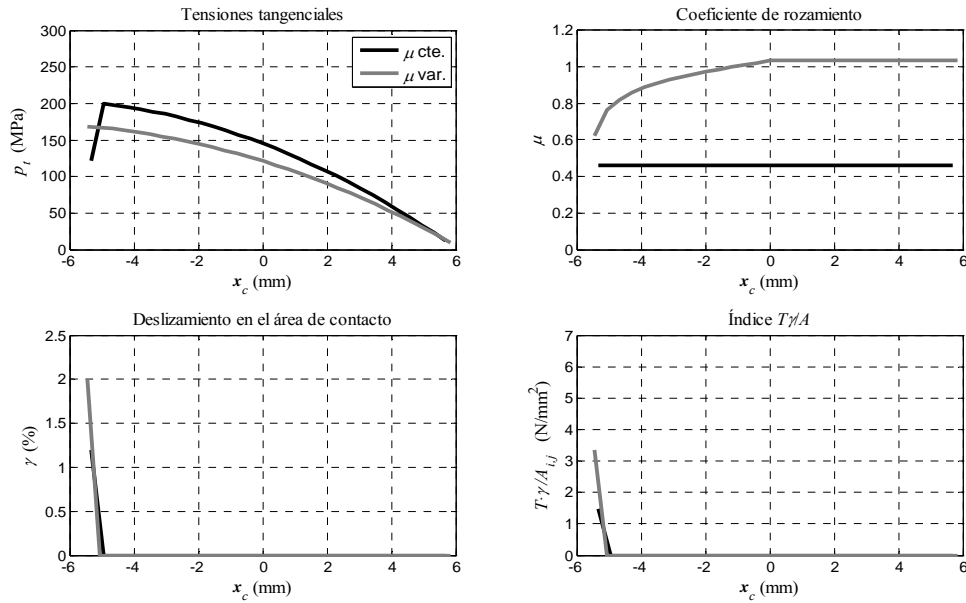
Considerando los 4 ensayos realizados, cada uno de ellos ofrece una distinta estimación de la profundidad de desgaste. Tomando como referencia la profundidad de desgaste obtenida para  $\mu$  constante y aplicando un algoritmo global, las distintas estimaciones ofrecen valores entre un -10 % y un +15 %. En este caso sí que aparecen diferencias en la estimación de profundidad de desgaste usando un valor de  $\mu$  constante.

Las diferencias existentes entre las estimaciones ofrecidas por los modelos de  $\mu$  constante y  $\mu$  variable se deben a que se han utilizado distintas funciones de fricción. Como se ha comentado para c1, en general existirán diferencias entre los resultados ofrecidos por uno y otro modelo.

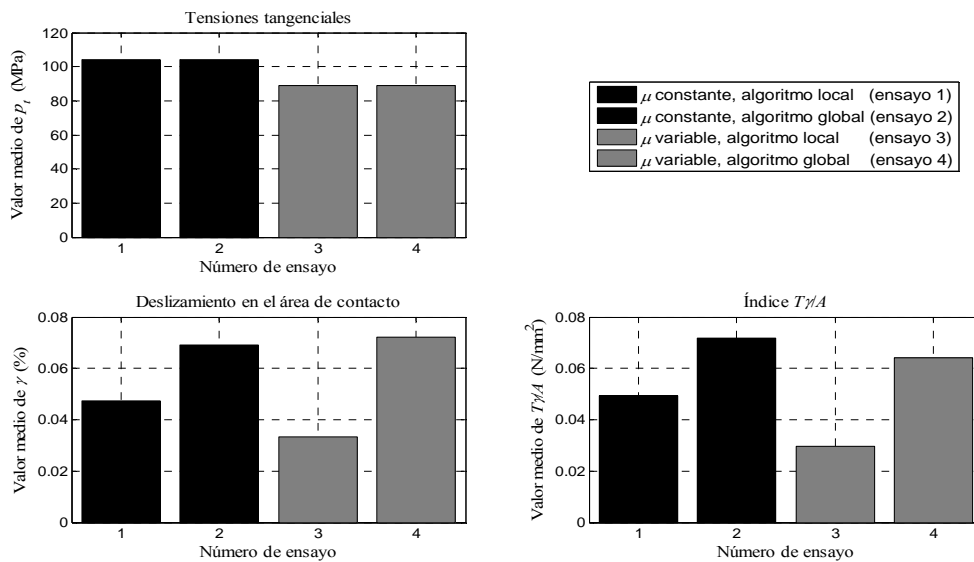
Comparando ahora las estimaciones obtenidas según un algoritmo local/global para cada uno de los modelos, se va a proceder como en el área de contacto c1. La Figura 6.18 muestra la distribución de las distintas magnitudes asociadas al problema tangencial y estimación del desgaste en las áreas de contacto. Por otra parte, la Figura 6.19 muestra los parámetros globales calculados para el área de contacto c2 según los distintos ensayos.

Al igual que en el caso anterior, no aparecen diferencias en los valores de la tensión tangencial media en el área de contacto para cada modelo de  $\mu$  considerado; en cambio, sí que hay grandes diferencias entre el valor medio de deslizamiento obtenido de forma *local* según la fórmula (6.10) y el estimado de forma *global* según la fórmula (6.11). Estas diferencias son del orden del 45 % para  $\mu$  constante y del 115 % para  $\mu$  variable. Por esta razón se obtienen diferencias

entre el índice de desgaste  $T\gamma/A$  del mismo orden de magnitud que provocan distintas estimaciones de profundidad de desgaste.



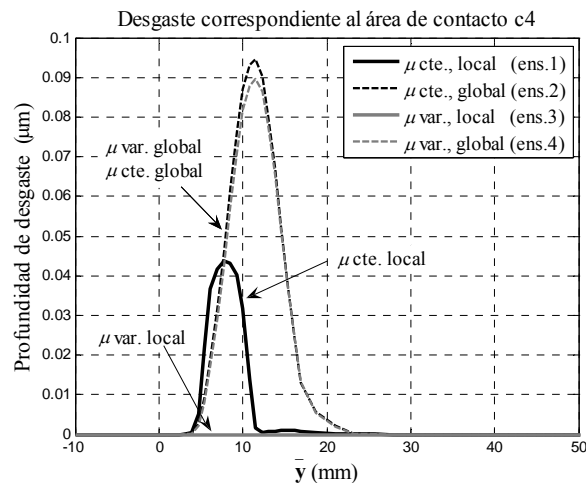
**Figura 6.18.** Variación de las magnitudes locales en la *strip* central del área de contacto c2: tensión tangencial  $p_t$ , coeficiente de rozamiento local  $\mu$ , deslizamiento adimensional  $\gamma$  e índice de desgaste  $T\gamma/A$  calculado localmente, obtenidas para  $\mu$  constante y variable.



**Figura 6.19.** Valores globales asociados a las magnitudes tangenciales en el área de contacto c2.

### c.3. Área de contacto c4

En último lugar analizamos las diferencias en la profundidad de desgaste obtenidas para el área de contacto c4. Esta área de contacto aparece en la banda de rodadura de la rueda izquierda del segundo eje durante el trazado del circuito de la vía completo. Las distintas profundidades de desgaste obtenidas en los distintos ensayos se muestran en la Figura 6.20.

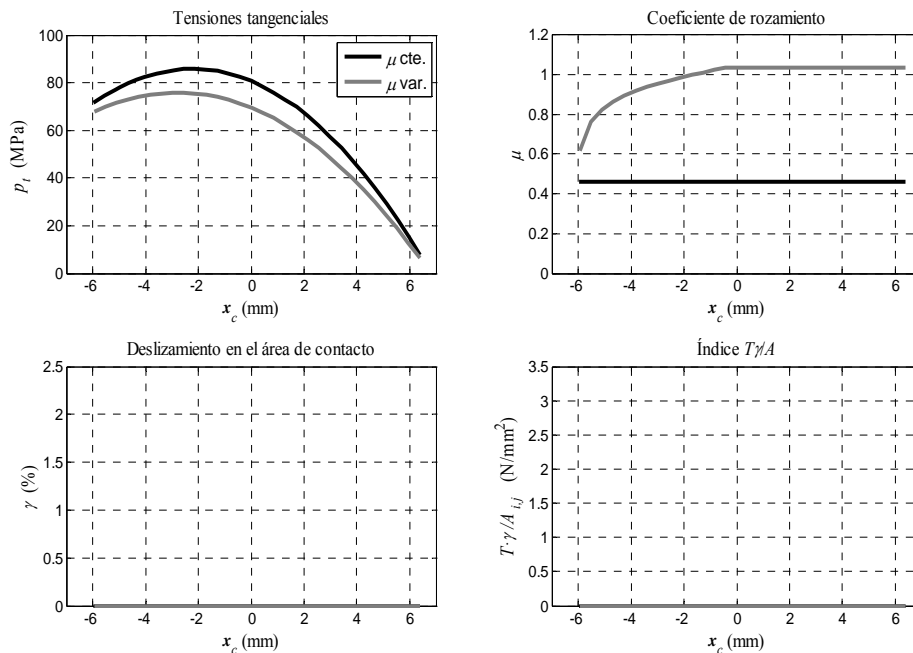


**Figura 6.20.** Vista ampliada de la profundidad de desgaste correspondiente al área de contacto c4.

Analizando los resultados de la Figura 6.20 se observan en este caso grandes diferencias en cuanto a los resultados de los 4 ensayos. Se analizarán las diferencias de aplicar un algoritmo de desgaste local/global para un modelo de  $\mu$  considerado.

Como en los puntos anteriores, se analizan las distribuciones de las magnitudes asociadas al problema tangencial y estimación del desgaste en el área de contacto c4 en la posición cuasiestática en curva (Figura 6.21). Por otra parte, se obtienen los parámetros globales para cada uno de los ensayos con el fin de justificar las diferencias en la estimación de la profundidad de desgaste (Figura 6.22).



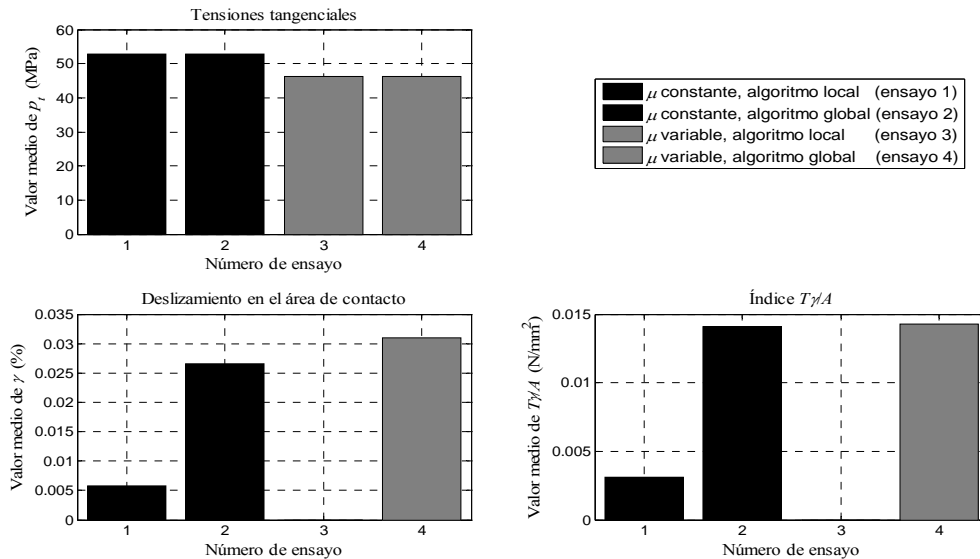


**Figura 6.21.** Variación de las magnitudes locales en la *strip* central del área de contacto c4: tensión tangencial  $p_t$ , coeficiente de rozamiento local  $\mu$ , deslizamiento adimensional  $\gamma$  e índice de desgaste  $T\gamma/A$  calculado localmente, obtenidas para  $\mu$  constante y variable. Puesto que toda el área de contacto está en adhesión, los valores del deslizamiento  $\gamma$  y del índice de desgaste  $T\gamma/A$  son nulos.

Analizando en primer lugar el caso de  $\mu$  constante, el área de contacto se encuentra prácticamente por completo en adhesión. Por tanto, el valor del deslizamiento medio calculado de forma local según la fórmula (6.10) es prácticamente nulo. En cambio, aplicando un algoritmo local según la fórmula (6.11) este valor se estima a partir de los valores de pseudodeslizamiento. Sucede prácticamente lo mismo para  $\mu$  variable, pero con la excepción de que toda el área de contacto se encuentra en adhesión, por tanto el valor del deslizamiento medio calculado localmente es cero.

En ambos casos, aunque el área de contacto está sometida a unos valores de pseudodeslizamiento, la deformación de los materiales de la rueda y del carril es capaz de absorber este valor, de tal forma que las áreas de contacto se encuentran práctica o completamente en adhesión. Según el modelo de desgaste utilizado, basado en la *disipación energética*, no aparece desgaste (o prácticamente no aparece en el caso de  $\mu$  constante). En cambio, si se usa un algoritmo global, donde este valor de deslizamiento global se estima a partir del pseudodeslizamiento en el

punto teórico de contacto, se obtienen ciertos valores de desgaste. Estas conclusiones se pueden observar en la Figura 6.22.



**Figura 6.22.** Valores globales asociados a las magnitudes tangenciales en el área de contacto c4.

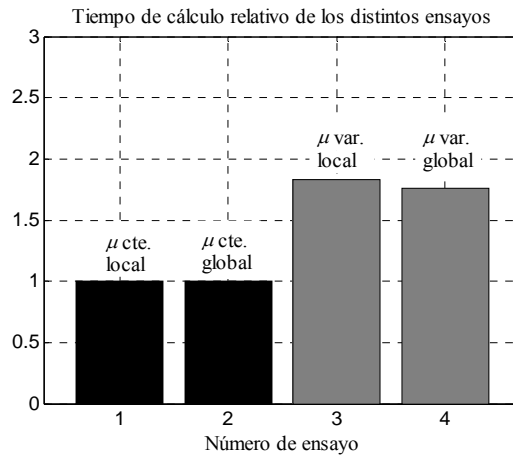
Por tanto, los resultados de desgaste obtenidos empleando un algoritmo global, cuando las áreas de contacto estén en condiciones de adhesión, darán valores de desgaste mucho mayores a los que realmente aparecen. Esta conclusión es independiente de si se usa un modelo de  $\mu$  constante o de  $\mu$  variable.

No obstante, se puede considerar que los valores de desgaste obtenidos usando un algoritmo global (en general para áreas de contacto en adhesión) aunque ofrezcan valores que sobreestimen la profundidad de desgaste, son muy pequeños.

### 6.5.3. Tiempo de cálculo de la simulación

Una vez analizado el efecto de las distintas modelizaciones usadas sobre la dinámica de los ejes y sobre la estimación del desgaste, se va a comparar el coste computacional asociado a cada una de las simulaciones realizadas.

El tiempo de cálculo relativo de la simulación dinámica se muestra en la Figura 6.23.



**Figura 6.23.** Comparación de los tiempos de cálculo relativos de los distintos ensayos.

Considerando los cuatro ensayos realizados, existen dos factores principales que afectan al distinto coste computacional de la simulación:

- En cuanto a la *modelización del coeficiente de rozamiento*, el incremento de tiempo de cálculo es un 75-80 % mayor en el caso de emplear un modelo de  $\mu$  variable, considerando el tiempo total de simulación.

Esta relación se puede comparar con la relación entre tiempos de cálculos de una ejecución de FASTSIM para un área de contacto, según la Figura 5.18 (Cap. 5). En esta Figura se observa como el uso del modelo de  $\mu$  variable usado supone un tiempo de cálculo de unas 1,7 veces mayor para una ejecución simple de FASTSIM.

Aunque en este caso se mantiene la relación en tiempos de cálculo asumiendo  $\mu$  variable con respecto a  $\mu$  contante, podría existir una discrepancia en el caso de problemas de convergencia en la integración de las ecuaciones del movimiento.

En ambos casos se usa la función de fricción definida a trozos  $f_{1b}$  según la expresión (5.17).

- En cuanto al *algoritmo de desgaste empleado*, el uso de un algoritmo local frente a un algoritmo global supone un incremento de tiempo de cálculo despreciable (ver Figura 6.23).

Esto es debido a que en esta Tesis se ha implementado un programa de simulación dinámica según las ecuaciones del movimiento desarrolladas en el Cap. 3. En él, las rutinas de desgaste tienen acceso a los valores de las distribuciones de las magnitudes asociadas al problema tangencial. Esta

característica no se da si se usan programas de simulación comercial como ADAMS/Rail [55], VAMPIRE [89] o GENSYs [86-87].

El distinto coste computacional según el algoritmo de desgaste estará asociado básicamente a la evaluación de la fórmula (6.6) o (6.7). Las diferencias que aparecen entre la evaluación local o global del desgaste son despreciables.

## 6.6. Conclusiones

Una vez analizados los distintos resultados de las simulaciones realizadas, se pasa a presentar las conclusiones de este capítulo.

En este capítulo se han realizado cuatro ensayos de simulación dinámica del paso de un vehículo ferroviario por un circuito sencillo. Se han utilizado dos modelos para el coeficiente de rozamiento ( $\mu$  constante frente a  $\mu$  variable) y dos algoritmos de desgaste (local frente a global). Se ha analizado la repercusión de los distintos modelos y algoritmos sobre el movimiento de los ejes, el desgaste de las ruedas de los ejes del primer bogie y sobre el tiempo de cálculo empleado. De estos análisis se pueden extraer las siguientes conclusiones:

- En primer lugar, con respecto a la *modelización del coeficiente de rozamiento* ( $\mu$ ) se dispone de los resultados obtenidos con un modelo de  $\mu$  constante, frente a los resultados obtenidos para  $\mu$  variable.

El uso de un coeficiente de rozamiento ( $\mu$ ) constante supone una aproximación para la modelización del comportamiento tangencial de una partícula en el área de contacto. Por tanto es aconsejable usar modelos de  $\mu$  variable, donde los parámetros que definen la función de fricción se han obtenido experimentalmente.

En cuando a la **aplicación a la simulación dinámica** el uso de un modelo de  $\mu$  constante frente a  $\mu$  variable presenta errores del orden de 10-20 %

En cuanto a la **estimación del desgaste** esta influencia es aún mayor. Los resultados obtenidos con el uso de un modelo de  $\mu$  constante constituyen una aproximación a los que se obtendrían con  $\mu$  variable, debido a que la estimación del desgaste se obtiene a partir del comportamiento de cada partícula del área de contacto.

Sin embargo, el uso de un modelo de  $\mu$  variable supone un incremento del **tiempo de cálculo** del 120 %. No obstante este incremento de tiempo es asumible teniendo en cuenta la precisión ganada en los resultados.

- En segundo lugar, con respecto al *algoritmo de desgaste* existen dos alternativas: la evaluación local o la evolución global.

El uso de un algoritmo local evalúa las magnitudes asociadas al problema de contacto tangencial y obtiene un valor adecuado del índice de desgaste. En cambio, el uso de un algoritmo global se basa en la evaluación de magnitudes globales asociadas al problema de contacto. El índice de desgaste calculado a partir de estas magnitudes no ofrece garantías de que represente la situación que haya en el área de contacto. Por tanto, se aconseja el uso de un algoritmo de desgaste *local*.

Además, la rutina de evaluación de desgaste debe ir íntimamente ligada a la rutina de resolución del problema tangencial, de tal forma que sea capaz de utilizar la información calculada en esta última y la estimación del desgaste de forma local no implique un incremento en el tiempo de cálculo.

- Por tanto, con respecto al uso de programas de simulación dinámica comerciales para la obtención de la profundidad de desgaste en los perfiles, éstos deberían incluir modelos de resolución del problema tangencial considerando un coeficiente de rozamiento variable.

Además, como se ha mencionado anteriormente, la rutina de estimación de desgaste se debe integrar junto a la rutina de resolución del problema tangencial para que la aplicación de un algoritmo local no implique un incremento en tiempo de cálculo.



## 7. Conclusiones

En este capítulo se recogen las principales conclusiones expuestas en los capítulos anteriores, destacando especialmente aquellas relacionadas con el objetivo fundamental de la Tesis: el diseño e implementación de un modelo de contacto rueda-carril para aplicaciones de simulación dinámica de vehículos ferroviarios en el rango de baja frecuencia y la estimación del desgaste correspondiente en los perfiles de rueda y carril.

- Se ha desarrollado un modelo de resolución del problema de contacto geométrico y normal. Este modelo utiliza un enfoque de *contacto elástico* y forma parte de la familia de métodos *basados en la interpenetración virtual entre superficies*. Para la obtención de la distribución de presiones normales se define una *elipse equivalente* sobre la que se asume la distribución de Hertz. Se trata de un modelo de contacto *no-herciano* que consigue mejorar la estimación del área de contacto y la distribución de presiones dentro de ella respecto a la ofrecida por la teoría de Hertz, manteniendo el coste computacional.
- Se ha utilizado una *técnica experimental de ultrasonidos* para obtener la forma y tamaño de las áreas de contacto. Estos resultados se han comparado con la solución ofrecida por el procedimiento numérico propuesto, mostrando una buena concordancia. El uso de la técnica de ultrasonidos ha permitido, además, evaluar el efecto de la rugosidad de las superficies reales, que causa niveles de tensiones y de tasas de desgaste localmente muy elevadas, con respecto a la solución numérica considerando superficies suaves. La metodología desarrollada y los resultados obtenidos se han publicado en la revista *Wear* [90].
- Se ha resuelto el problema tangencial en el área de contacto asimilada a una elipse equivalente. Se ha utilizado el algoritmo FASTSIM donde se han introducido modificaciones para considerar un coeficiente de rozamiento variable que es función del deslizamiento adimensional en el área de contacto. Con el fin de reproducir el comportamiento de las curvas de tracción bajo distintos estados tribológicos se han utilizado diversos modelos de *funciones de fricción*. El coeficiente de rozamiento se obtiene a partir de las condiciones en el propio contacto. Con el uso de este procedimiento se consigue reproducir la forma de las curvas de tracción obtenidas experimentalmente. De esta forma se ha obtenido un modelo adecuado para el estudio de fenómenos de inestabilidad asociados a la

saturación del área de contacto, como son el estudio de la generación de ruido de *squeal* o de *desgaste ondulatorio*.

- Se ha caracterizado el comportamiento tangencial definiendo un procedimiento para identificar los parámetros de fricción y reducción de la pendiente inicial a partir de curvas de tracción medidas experimentalmente. Estas curvas se han obtenido en la máquina SUROS de doble disco bajo condiciones de laboratorio. El modelo de contacto, considerando coeficiente de rozamiento variable y empleando los valores de los parámetros identificados, se ha aplicado al contacto rueda-carril y los resultados se han comparado con los obtenidos con un valor de coeficiente de rozamiento constante. Además, se ha realizado un análisis del desgaste considerando distintos estados tribológicos. Trabajos futuros basados en experimentación deberán definir *parámetros de fricción* y *leyes de desgaste* adecuadas para las distintas condiciones en las que se puede encontrar la interfase rueda-carril. Parte de este trabajo se ha publicado en la revista *Wear* [91].
- Finalmente, se han desarrollado las ecuaciones del movimiento y se ha realizado una aplicación del modelo de contacto en el campo de la simulación dinámica. Para ello se ha implementado un programa de integración temporal numérica como el utilizado en el trabajo publicado en la revista *Vehicle System Dynamics* [13]. Se han comparado las soluciones del problema de simulación y de la estimación del desgaste así como del tiempo de cálculo, en función del modelo de coeficiente de rozamiento usado (coeficiente de rozamiento constante frente a coeficiente de rozamiento variable) y del algoritmo de desgaste empleado (local o global). A partir de estos resultados se llega a dos conclusiones:
  - En primer lugar, se recomienda el uso de un modelo de contacto con coeficiente de rozamiento variable con el fin de reproducir más fielmente las condiciones que existen en el contacto rueda-carril (aunque para ello se debe asumir un incremento del tiempo de cálculo de aproximadamente un 70 %).
  - En segundo lugar, con respecto al algoritmo de evaluación del desgaste, se recomienda el uso de un algoritmo local donde la rutina de evaluación del desgaste debe ir integrada junto a la rutina de resolución del problema de contacto. El uso de un algoritmo global puede ofrecer resultados erróneos, sobretodo cuando el área de contacto se encuentra prácticamente en adhesión.



# Bibliografía

- [1] MSC. ADAMS/Rail v. 2005 R2. Getting Started
- [2] A. Alonso, J.G. Giménez. A new method for the solution of the normal contact problem in the dynamic simulation of railway vehicles. *Vehicle System Dynamics* 43 (2005) 149-160
- [3] A. Alonso, J.G. Giménez. Some new contributions to the resolution of the normal wheel-rail contact problem. *Vehicle System Dynamics* 44, Supplement (2006), 230-239
- [4] A. Alonso, J.G. Giménez, Tangential problem solution for non-elliptical contact areas with the FastSim algorithm. *Vehicle System Dynamics* 45 (4) (2007) 341-357
- [5] A. Alonso, J.G. Giménez, L.M. Martín. Spin moment calculation and its importance in railway dynamics. *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part F: Journal of Rail and Rapid Transit* 223 (2009) 453-460
- [6] J. F. Archard. Contact and rubbing of flat surfaces. *Journal of Applied Physics* 24 (1953) 981-988
- [7] O. Arias-Cuevas, Z. Li, R. Lewis, E.A. Gallardo-Hernandez. Rolling-sliding laboratory tests of friction modifiers in dry and wet wheel-rail contacts. *Wear* 268 (2010) 543-551
- [8] J.B. Ayasse, H. Chollet. Determination of the wheel rail contact patch in semi-Hertzian conditions. *Vehicle System Dynamics* 43 (2005) 161-172
- [9] J.B. Ayasse, H. Chollet: Chapter 4 Wheel-rail contact. In: S. Iwnicki, Editor: *Handbook of Railway Vehicle Dynamics*. CRC Press, Taylor & Francis Group, Boca Raton London New York, 2006
- [10] F. Braghin, R. Lewis, R.S. Dwyer-Joyce, S. Bruni, A mathematical model to predict railway wheel profile evolution due to wear. *Wear* 261 (2006) 1253-1264
- [11] F. Bucher, K. Knothe, A. Theiler. Normal and tangential contact problem of surfaces with measured roughness, *Wear* 253 (2002) 204-218
- [12] F. Bucher, A.I. Dmitriev, M. Ertz, K. Knothe, V.L. Popov, S.G. Psakhie, E.V. Shilko. Multiscale simulation of dry friction in wheel/rail contact. *Wear* 261 (2006) 874-884
- [13] J. Carballeira, L. Baeza, A. Rovira, E. García. Technical characteristics and dynamic modelling of Talgo trains. *Vehicle System Dynamics* 46-Supplement (2008) 301-316
- [14] F. W. Carter. On the Action of a Locomotive Driving Wheel. *Proceedings of the Royal Society of London. Series A, Containing Papers of a Mathematical and Physical Character*, 112 (1926) 151-157
- [15] B.W. Drinkwater, R.S. Dwyer-Joyce, P. Cawley. A study of the interaction between ultrasound and a partially contacting solid-solid interface. *Proceedings of the Royal*

- Society. London. Series A: Mathematical, Physician and Engineering Sciences 452 (1996), 2613-2628
- [16] R.S. Dwyer-Joyce, B.W. Drinkwater, Analysis of contact pressure using ultrasonic reflection. *Experimental Mechanics*, in: Proceedings of the 11<sup>th</sup> Annual Conference on Experimental Mechanics, Balkema, Rotterdam (1988) 747-754.
- [17] R.S. Dwyer-Joyce, B.W. Drinkwater, A.M. Quinn. The use of ultrasound in the investigation of rough surface interfaces. *Journal of Tribology* 123 (2001) 8-16.
- [18] R.S. Dwyer-Joyce, C. Yao, R. Lewis. Feasibility study for an ultrasonic sensor for monitoring wheel flange contact, in: Proceedings of the 2008 IEEE/ASME Joint Rail Conference (JCR2008), Wilmington, Delaware, April 22-23, 2008
- [19] R.S. Dwyer-Joyce, C. Yao, R. Lewis. An ultrasound sensor for monitoring wheel flange contact, in: Proceedings of the 8<sup>th</sup> International Conference on Contact Mechanics and Wear of Rail/Wheel Systems (CM2009), Firenze, Italy, September 15-18, 2009
- [20] D.T. Eadie, J. Kalousek. *Railway Age* (June 2001) 48-50
- [21] D.T. Eadie, J. Kalousek, K.C. Chiddick. The role of high positive friction (HPF) modifier in the control of short pitch corrugations and related phenomena. *Wear* 253 (2002) 185-192
- [22] D.T. Eadie, M. Santoro, J. Kalousek. Railway noise and the effect of top of rail liquid friction modifiers: changes in sound and vibration spectral distributions in curves. *Wear* 258 (2005) 1148-1155
- [23] R. Enblom, M. Berg. Simulation of railway wheel profile development due to wear-influence of disc braking and contact environment. *Wear* 258 (2005) 1055-1063
- [24] R. Enblom, M. Berg. Impact of non-elliptic contact modelling in wheel wear simulation. *Wear* 265 (2008) 1532-1541
- [25] R. Enblom. Deterioration mechanisms in the wheel-rail interface with focus on wear prediction: a literature review. *Vehicle System Dynamics*, 47 (2009) 661-700
- [26] M. Ertz, F. Bucher. Improved creep force model for wheel/rail contact considering roughness and temperature, *Vehicle System Dynamics*. Supplement 37 (2002) 314-325
- [27] C. Esveld, L. Gronskov. Miniprof wheel and rail measurement, in: Proceedings of the 2<sup>nd</sup> Mini Conference on Contact Mechanics and Wear of Rail/Wheel Systems, Budapest, July 29-31, 1996
- [28] J. Evans, M. Berg. Challenges in simulation of rail vehicle dynamics. *Vehicle System Dynamics* 47 (2009) 1023-1048
- [29] D.I. Fletcher, J.H. Beynon, Development of a machine for closely controlled rolling contact fatigue and wear testing. *Journal of Testing and Evaluation* 28 (2000) 267-275
- [30] E.A. Gallardo-Hernandez, R. Lewis. Twin disc assessment of wheel/rail adhesion. *Wear* 265 (2008) 1309-1316

- 
- [31] J. García-de-Jalón, E. Bayo. Kinematic and Dynamic Simulation of Multibody Systems: The Real-Time challenge. Springer-Verlag, New-York, 1994
- [32] V.K. Garg, R.V. Dukkipati. Dynamics of Railway Vehicle Systems. Academic Press, New York, 1984
- [33] M. Godet. The third-body approach: a mechanical point of view. *Wear* 100 (1984) 437-452
- [34] J.G. Giménez, A. Alonso, E. Gomez. Introduction of a friction coefficient dependent on the slip in the FastSim algorithm. *Vehicle System Dynamics* 43 (2005) 233-244
- [35] H. Hertz. Ueber die Berührung fester elastischer Körper. *Journal für die reine und angewandte Mathematik* 1882 (1882) 156–171
- [36] K. Hodgson, R.S. Dwyer-Joyce, B.W. Drinkwater. Ultrasound as an experimental tool for investigating engineering contacts, in: *Proceedings of the 9<sup>th</sup> Nordic Symposium on Tribology*, 2000
- [37] S. Iwnicki. Simulation of wheel-rail contact forces. *Fatigue & Fracture Engineering Materials & Structures* 26 (2003) 887-900
- [38] S. Iwnicki. The effect of profiles on wheel and rail damage. *International Journal of Vehicle Structures & Systems* 1 (2009) 99-104
- [39] T. Jendel. Prediction of wheel and rail wear - a pilot study, ISRN KTH/FKT/FR-99/03-SE, Division of Railway Technology, Department of Vehicle Engineering, Royal Institute of Technology, Stockholm, 1999
- [40] T. Jendel. Prediction of wheel profile wear - comparisons with field measurements. *Wear* 253 (2002) 89-99
- [41] K.L. Johnson, *Contact Mechanics*, Cambridge University Press, Cambridge, 1987.
- [42] J.J. Kalker. On the rolling contact of two elastic bodies in the presence of dry friction. Thesis Delft, 1967.
- [43] J.J. Kalker. Survey of wheel-rail rolling contact theory. *Vehicle System Dynamics* 5 (1979) 317-358
- [44] J.J. Kalker. A Fast Algorithm for the Simplified Theory of Rolling Contact, *Vehicle System Dynamics* 11 (1982) 1-13
- [45] J.J. Kalker. *Three-Dimensional Elastic Bodies in Rolling Contact*, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht Boston London, 1990
- [46] J.J. Kalker. Wheel-rail rolling contact theory. *Wear* 144 (1991) 243-261
- [47] K. Kendall, D. Tabor. An ultrasonic study of the area of contact between stationary and sliding surfaces. *Proceedings of the Royal Society, Series A*, 323 (1971), 321-340
- [48] W. Kik, J. Piotrowski. A fast, approximate method to calculate normal load at contact between wheel and rail and creep forces during rolling, in: *Proceedings of the 2<sup>nd</sup> Mini Conference on Contact Mechanics and Wear of Wheel/Rail Systems*, Budapest, July 29-31, 1996

- 
- [49] K. Knothe, H. Le-The. Ermittlung der Normalspannungsverteilung beim Kontakt von Rad und Schiene. *Forschung im Ingenieurwesen* 49 (1983) 79-85
- [50] K. Knothe, H. Le-The. A contribution to the calculation of the contact stress distribution between two elastic bodies of revolution with non-elliptical contact area. *Computers & Structures* 18 (1984) 1025-1033
- [51] K. Knothe, H. Le-The. A method for the analysis of the tangential stresses and the wear distribution between two elastic bodies of revolution in rolling contact. *International Journal of Solids and Structures* 21 (1985) 889-906
- [52] K. Knothe, S.L. Grassie. Modelling of railway track and vehicle/track interaction at high frequencies. *Vehicle System Dynamics*, 22 (1993) 209-262
- [53] K. Knothe, A. Theiler. Normal and tangential contact problem with rough surfaces, in: *Proceedings of the 2<sup>nd</sup> Mini-Conference on Contact Mechanics and Wear of Rail/Wheel Systems*, Budapest, July 29-31, 1996
- [54] K. Knothe. History of wheel/rail contact mechanics: from Redtenbacher to Kalker. *Vehicle System Dynamics* 46 (2008) 9-26
- [55] R. Lewis, M. Cavalletti, R.S. Dwyer-Joyce, A. Ward, S. Bruni, K. Bel Knani, P. Bologna. Wheel Wear Predictions with ADAMS/Rail, in: *Proceedings of the 1<sup>st</sup> MSC.ADAMS European User Conference*, London, 13-14 November, 2002
- [56] R. Lewis, U. Olofsson. Mapping rail wear regimes and transitions. *Wear* 257 (2004) 721-729
- [57] R. Lewis, R.S. Dwyer-Joyce. Wear mechanisms and transitions in railway wheel steels. *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part J: Journal of Engineering Tribology* 218(6) (2004) 467-478
- [58] R. Lewis, M.B. Marshall, R.S. Dwyer-Joyce, Measurement of Interface Pressure in Interference Fits. *Proc. IMechE* 219, Part C: *J Mech. Eng. Science*, (2005) 127-139.
- [59] R. Lewis, E.A. Gallardo-Hernandez, T. Hilton, T. Armitage. Effect of oil and water mixtures on adhesion in the wheel/rail contact. *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, part F: Journal of Rail Rapid Transit* 223 (2009) 275-283
- [60] A.E.H. Love. The stress produced in a semi-infinite solid by pressure on part of the boundary. *Philosophical Transactions of the Royal Society of London. Series A*, 228 (1929) 377-420
- [61] E. Magel, Y. Liu. Study of friction - Measurement analysis and practical implications for the wheel/rail contact, in: *Proceedings of the 8<sup>th</sup> International Conference on Contact Mechanics and Wear of Rail/Wheel Systems*, Firenze, Italy, September 15-18, 2009
- [62] M.B. Marshall, R. Lewis, R.S. Dwyer-Joyce. An ultrasonic approach for contact stress mapping in machine joints and concentrated contacts. *Journal of Strain Analysis for Engineering Design* 39 (2004) 339-350.
- [63] M.B. Marshall, R. Lewis, R.S. Dwyer-Joyce. Characterisation of contact pressure distribution in bolted joints. *Strain* 42 (2006) 31-43

- [64] M.B. Marshall, R. Lewis, R.S. Dwyer-Joyce, U. Olofsson, S. Björklund. Experimental characterization of wheel-rail contact patch evolution. *Journal of Tribology Transactions of the ASME* 128 (3) (2006) 493-504
- [65] A. Matsumoto, Y. Sato, M. Tanimoto, Y. Oka, E. Miyauchi. Experimental and theoretical study on the dynamic performance of steering bogie in sharp curve. *Vehicle System Dynamics, Supplement* 28 (1998), 559-575
- [66] A. Matsumoto, Y. Sato, H. Onoa, Y. Wang, M. Yamamoto, M. Tanimoto, Y. Okad. Creep force characteristics between rail and wheel on scaled model. *Wear* 253 (2002) 199–203
- [67] A. Matsumoto, Y. Sato, H. Ohno, Y. Suda, Y. Michitsuji, M. Komiyama, N. Miyajima, M. Tanimoto, Y. Kishimoto, Y. Sato, T. Nakai. Curving performance evaluation for active-bogie-steering bogie with multibody dynamics simulation and experiment on test stand. *Vehicle System Dynamics* 46 Supp. (2008) 191-199
- [68] A.D. Monk-Steel, D.J. Thompson, F.G. De Beer, M.H.A. Janssens. An investigation into the influence of longitudinal creepage on railway squeal noise due to lateral creepage. *Journal of Sound and Vibration* 293 (2006) 766-776.
- [69] J.B. Nielsen, A. Theiler. Tangential contact problem with friction coefficients depending on sliding velocity, in: *Proceedings of the 2<sup>nd</sup> Mini-Conference on Contact Mechanics and Wear of Rail/Wheel Systems*. Budapest (1996) 44-51
- [70] T. Ohyama. Tribological studies on adhesion phenomena between wheel and rail at high speeds. *Wear* 144 (1991) 263-275.
- [71] U. Olofsson, T. Telliskivi. Wear, friction and plastic deformation of two rail steels - full-scale test and laboratory study, *Wear* 254 (2003) 80-93
- [72] U. Olofsson, R. Lewis: Chapter 5 Tribology of the wheel-rail contact. In: S. Iwnicki, Editor: *Handbook of Railway Vehicle Dynamics*. CRC Press, Taylor & Francis Group, Boca Raton London New York, 2006
- [73] M. Pau, F. Aymerich, F. Ginesu. Distribution of contact pressure in wheel-rail contact area. *Wear* 253 (2002) 265-274
- [74] M. Pau. Estimation of real contact area in a wheel-rail system by means of ultrasonic waves. *Tribology International* 36 (2003) 687-690
- [75] T.G. Pearce, N.D. Sherratt. Prediction of wheel profile wear. *Wear* 144 (1991) 343-351
- [76] J. Piotrowski, H. Chollet. Wheel–rail contact models for vehicle system dynamics including multi-point contact. *Vehicle System Dynamics* 43 (2005) 455-483
- [77] J. Piotrowski, W. Kik. A simplified model of wheel/rail contact mechanics for non-Hertzian problems and its application in rail vehicle dynamic simulations. *Vehicle System Dynamics* 46 (2008) 27-48
- [78] J. Piotrowski. Kalker's algorithm Fastsim solves tangential contact problems with slip-dependent friction and friction anisotropy. *Vehicle System Dynamics* 48 (2010) 869-889

- 
- [79] O. Polach. Solution of wheel-rail contact forces suitable for calculation of rail vehicle dynamic, in: Proceedings of the 2<sup>nd</sup> International Conference on Railway Bogies, Budapest, September 14-16, 1992, 10-17
- [80] O. Polach. A fast wheel-rail forces calculation computer code. *Vehicle System Dynamics*, Suppl. 33 (1999) 728-739
- [81] O. Polach. Influence of locomotive tractive effort on the forces between wheel and rail. *Vehicle System Dynamics* 25 (2001) 7-22
- [82] O. Polach. Creep forces in simulations of traction vehicles running on adhesion limit. *Wear* 258 (2005) 992-1000
- [83] O. Polach, M. Berg, S. Iwnicki: Chapter 12 Simulation. In: S. Iwnicki, Editor: *Handbook of Railway Vehicle Dynamics*. CRC Press, Taylor & Francis Group, Boca Raton London New York, 2006
- [84] J. Pombo, J. Ambrósio, M. Silva. A new wheel-rail contact model for railway dynamics. *Vehicle System Dynamics* 45 (2007) 165-189
- [85] J. Pombo, J. Ambrósio. Application of a wheel-rail contact model to railway dynamics in small radius curved tracks. *Multibody System Dynamics* 19 (2008) 91-114
- [86] J. Pombo, J. Ambrósio, M. Pereira, R. Lewis, R.S. Dwyer-Joyce, C. Ariaudo, N. Kuka. A study on wear evaluation of railway wheels based on multibody dynamics and wear computation. *Multibody System Dynamics* 24 (2010) 347-366
- [87] J. Pombo, J. Ambrósio, M. Pereira, R. Lewis, R.S. Dwyer-Joyce, C. Ariaudo, N. Kuka. Development of a wear prediction tool for steel railway wheels using three alternative wear functions. *Wear* 271 (2011) 238-245
- [88] X. Quost, M. Sebes, A. Eddhahak, J.B. Ayasse, H. Chollet, P.E. Gautier, F. Thouverez. Assessment of a semi-Hertzian method for determination of wheel-rail contact patch. *Vehicle System Dynamics* 44 (2006), 789-814
- [89] X. Quost, N. Tassini, R. Lewis, R. Dwyer-Joyce, C. Ariaudo, N. Kuka. Predicting railway wheel wear starting from multi-body analysis: a preliminary study, in: Proceedings of 2008 IEEE/ASME Joint Rail Conference (JCR 2008) Wilmington, Delaware, April 22-23, 2008
- [90] A. Rovira, A. Roda, M.B. Marshall, H. Brunskill, R. Lewis. Experimental and numerical modelling of wheel-rail contact and wear. *Wear* 271 (2011) 911-924
- [91] A. Rovira, A. Roda, R. Lewis, M.B. Marshall. Application of Fastsim with variable coefficient of friction using twin disc experimental measurements. *Wear* (2011), doi:10.1016/j.wear.2011.08.019
- [92] J. Santamaría, E.G. Vadillo, J. Gómez. A comprehensive method for the elastic calculation of the two-point wheel-rail contact. *Vehicle System Dynamics* 44 (2006) 240-250
- [93] J. Santamaría, E.G. Vadillo, O. Oyarzabal. Wheel-rail wear index prediction considering multiple contact patches. *Wear* 267 (2009) 1100-1104

- [94] M. Sebes, J.B. Ayasse, H. Chollet, P. Pouligny and B. Pirat. Application of a semi-Hertzian method to the simulation of vehicles in high-speed switches. *Vehicle System Dynamics* 44, Supp (2006) 341-348
- [95] A.A. Shabana, K.E. Zaazaa, J.L. Escalona, J.R. Sany. Development of elastic force model for wheel/rail contact problems. *Journal of Sound and Vibration* 269 (2004) 295-325
- [96] A.A. Shabana. *Dynamics of Multibody Systems*. Cambridge University Press, Cambridge 2005
- [97] A.A. Shabana, K.E. Zaazaa, H. Sugiyama. *Railroad Vehicle Dynamics, A Computational Approach*. CRC Press, Taylor & Francis Group, Boca Raton London New York, 2008
- [98] P. Shackleton, S. Iwnicki. Comparison of wheel-rail contact codes for railway vehicle simulation: an introduction to the Manchester Contact Benchmark and initial results. *Vehicle System Dynamics* 46 (2008) 129-149
- [99] Z.Y. Shen, J.K. Hedrick, J.A. Elkins. A comparison of alternative creep force models for rail vehicle dynamics analysis. *Proceedings of the 8<sup>th</sup> IAVSD Symposium held at MIT, Cambridge (MA), USA, Aug 1983*. 591-605
- [100] S.A. Simson, C. Cole, Simulation of curving at low speed under high traction for passive steering locomotives. *Vehicle System Dynamics* 46 (2008) 1107-1121
- [101] J. Sinclair. Friction Modifiers, in vehicle track interaction: identifying and implementing solutions. IMechE Seminar, February 17th, 2004
- [102] N. Tassini, X. Quost, R. Lewis, R. Dwyer-Joyce, C. Ariaudo, N. Kuka. A numerical model of twin disc test arrangement for the evaluation of railway wheel wear prediction methods. *Wear* 268 (2010) 660-667
- [103] A.G. Tattersall. The ultrasonic pulse-echo technique as applied to adhesion testing. *Journal of Physics D: Applied Physics* 6 (1973), 819-832.
- [104] T. Telliskivi. Contact mechanics analysis of measured wheel-rail profiles using the finite element method. *Journal of Rail and Rapid Transit* 215 (2001) 65-72
- [105] J. Tunna, J. Sinclair, J. Perez. A review of wheel wear and rolling contact fatigue. *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part F: Journal of Rail and Rapid Transit* 221 (2007) 271-289
- [106] P.J. Vermeulen, K.L. Johnson. Contact of nonspherical elastic bodies transmitting tangential forces. *Journal of Applied Mechanics* 31 (1964) 338-340
- [107] E.A.H. Vollebregt. Survey of programs on contact mechanics developed by J.J. Kalker. *Vehicle System Dynamics* 46 (2008) 85-92
- [108] T.T. Vuong, P.A. Meehan, Wear transitions in a wear coefficient model. *Wear* 266 (2009) 898-906
- [109] J. Williams. *Engineering Tribology*, Cambridge University Press, Cambridge. 2005
- [110] G. Xie, P.D. Allen, S.D. Iwnicki, A. Alonso, D.J. Thompson, C.J.C. Jones, Z.Y. Huang. Introduction of falling friction coefficients into curving calculations for studying curve squeal noise. *Vehicle System Dynamics* 44 (2006) 261-271

- [111] W. Zhang, J. Chen, X. Wu, X. Jin. Wheel/rail adhesion and analysis by using full scale roller rig. *Wear* 253 (2002) 82–88
- [112] I. Zobory. Prediction of wheel/rail profile wear. *Vehicle System Dynamics* 28 (1997) 221-259.



## Anexo I. Expresión de las matrices de transformación

En este Anexo se recogen las expresiones de las matrices de transformación utilizadas en capítulos anteriores. Estas matrices de transformación se obtienen según la correspondiente secuencia de ángulos de Euler [96].

Las matrices que expresan la transformación como consecuencia de un giro alrededor de un único eje, según los ejes X, Y o Z, son:

$$\mathbf{T}_X(\alpha) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) \\ 0 & \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{bmatrix} \quad (\text{AI.1})$$

$$\mathbf{T}_Y(\alpha) = \begin{bmatrix} \cos(\alpha) & 0 & \sin(\alpha) \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin(\alpha) & 0 & \cos(\alpha) \end{bmatrix} \quad (\text{AI.2})$$

$$\mathbf{T}_Z(\alpha) = \begin{bmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) & 0 \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (\text{AI.3})$$

La expresión de la matriz de transformación asociada a los giros de la vía, considerando la secuencia de rotaciones Z-X-Y desde el sistema de referencia absoluto al sistema de referencia asociado a la vía es:

$$\begin{aligned} \mathbf{T}_i(\phi_x, \phi_y, \phi_z) &= [\mathbf{T}_Z(\phi_z)\mathbf{T}_X(\phi_x)\mathbf{T}_Y(\phi_y)] = \\ &= \begin{bmatrix} \cos(\phi_y)\cos(\phi_z) - \sin(\phi_x)\sin(\phi_y)\sin(\phi_z) & -\sin(\phi_z)\cos(\phi_x) & \cos(\phi_z)\sin(\phi_y) + \cos(\phi_y)\sin(\phi_x)\sin(\phi_z) \\ \cos(\phi_y)\sin(\phi_z) + \cos(\phi_z)\sin(\phi_x)\sin(\phi_y) & \cos(\phi_x)\cos(\phi_z) & \sin(\phi_y)\sin(\phi_z) - \cos(\phi_y)\cos(\phi_z)\sin(\phi_x) \\ -\cos(\phi_x)\sin(\phi_y) & \sin(\phi_x) & \cos(\phi_x)\cos(\phi_y) \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (\text{AI.4})$$

De la misma forma se puede obtener la matriz de transformación asociada a los giros del cuerpo, considerando la secuencia de rotaciones Z-X-Y desde el sistema de referencia de la vía al sistema de referencia del cuerpo:

$$\begin{aligned} \mathbf{T}_b(\phi \theta \psi) &= [\mathbf{T}_z(\psi) \mathbf{T}_x(\phi) \mathbf{T}_y(\theta)] = \\ &= \begin{bmatrix} \cos(\theta)\cos(\psi) - \sin(\phi)\sin(\theta)\sin(\psi) & -\cos(\phi)\sin(\psi) & \sin(\theta)\cos(\psi) + \sin(\phi)\cos(\theta)\sin(\psi) \\ \cos(\theta)\sin(\psi) + \sin(\phi)\sin(\theta)\cos(\psi) & \cos(\phi)\cos(\psi) & \sin(\theta)\sin(\psi) - \sin(\phi)\cos(\theta)\cos(\psi) \\ -\cos(\phi)\sin(\theta) & \sin(\phi) & \cos(\phi)\cos(\theta) \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (\text{AI.5})$$

En el caso de que el cuerpo sea un eje ferroviario, el giro de los ejes se considera impuesto y la coordenada  $\theta$  no aporta información respecto de la superficie de un sólido de revolución alrededor del eje  $\bar{y}$ ; por lo que, el sistema de referencia de un eje ferroviario tendrá su eje  $\bar{x}$  coincidente con  $\mathbf{x}_l$  (ver Figura 3.4). Por tanto, la expresión de la matriz de transformación en este caso, es:

$$\mathbf{T}_b^{\text{eje}}(\phi \psi) = [\mathbf{T}_z(\psi) \mathbf{T}_x(\phi)] = \begin{bmatrix} \cos(\psi) & -\cos(\phi)\sin(\psi) & \sin(\phi)\sin(\psi) \\ \sin(\psi) & \cos(\phi)\cos(\psi) & -\sin(\phi)\cos(\psi) \\ 0 & \sin(\phi) & \cos(\phi) \end{bmatrix} \quad (\text{AI.6})$$

Finalmente, la expresión de la transformación asociada a la conicidad del área de contacto, es:

$$\mathbf{T}_c(\gamma_o) = \mathbf{T}_x(\gamma_o) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\gamma_o) & -\sin(\gamma_o) \\ 0 & \sin(\gamma_o) & \cos(\gamma_o) \end{bmatrix} \quad (\text{AI.7})$$

donde  $\gamma_o$  es la conicidad calculada para cada área de contacto, según el modelo de contacto empleado.

## Anexo II. Derivación de las matrices de transformación

En este Anexo se presentan unas propiedades de la derivación de las matrices de transformación que se han usado en los capítulos anteriores que ayudan a simplificar las expresiones.

### Producto de una matriz de transformación por su derivada.

Siendo  $\mathbf{T}$  una matriz de transformación cualquiera, se cumplen las siguientes propiedades [96]:

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{T}} \mathbf{T}^T &= \underline{\underline{\boldsymbol{\omega}}} \\ \mathbf{T}^T \dot{\mathbf{T}} &= \overline{\underline{\boldsymbol{\omega}}}\end{aligned}\tag{AII.1}$$

donde  $\underline{\underline{\boldsymbol{\omega}}}$  y  $\overline{\underline{\boldsymbol{\omega}}}$  son matrices antisimétricas construidas a partir del vector  $\boldsymbol{\omega}$ , llamado *vector de velocidad angular*. La primera de ellas está expresada en el sistema de referencia global (fijo), mientras que la segunda, en el sistema de referencia local (móvil).

La matriz antisimétrica  $\underline{\underline{\boldsymbol{\omega}}}$  correspondiente al vector  $\boldsymbol{\omega}$  tiene la expresión:

$$\underline{\underline{\boldsymbol{\omega}}} = \begin{bmatrix} 0 & -\omega_3 & \omega_2 \\ \omega_3 & 0 & -\omega_1 \\ -\omega_2 & \omega_1 & 0 \end{bmatrix}\tag{AII.2}$$

A partir de la primera ecuación de (AII.1), postmultiplicando por la matriz de transformación  $\mathbf{T}$  (donde  $\mathbf{T}^T \mathbf{T} = \mathbf{T} \mathbf{T}^T = \mathbf{I}$ ), se llega a la expresión:

$$\dot{\mathbf{T}} = \underline{\underline{\boldsymbol{\omega}}} \mathbf{T}\tag{AII.3}$$

que permite obtener la derivada de una matriz de transformación.

Tomando ahora la segunda ecuación de (AII.1) y premultiplicando por la matriz  $\mathbf{T}$ , se obtiene la expresión:

$$\dot{\mathbf{T}} = \mathbf{T} \overline{\underline{\boldsymbol{\omega}}}\tag{AII.4}$$

Considerando la transformación de coordenadas de vectores dados en forma de matrices antisimétricas según [96]:

$$\begin{aligned}\underline{\underline{\omega}} &= \mathbf{T} \underline{\underline{\bar{\omega}}} \mathbf{T}^T \\ \underline{\underline{\bar{\omega}}} &= \mathbf{T}^T \underline{\underline{\omega}} \mathbf{T}\end{aligned}\quad (\text{AII.5})$$

sustituyendo la expresión de  $\underline{\underline{\omega}}$  de (AII.5) en (AII.3) se llega a la expresión de (AII.4):

$$\dot{\mathbf{T}} = \underline{\underline{\omega}} \mathbf{T} = \mathbf{T} \underline{\underline{\bar{\omega}}} \overbrace{\mathbf{T}^T \mathbf{T}}^I = \mathbf{T} \underline{\underline{\bar{\omega}}}\quad (\text{AII.6})$$

Además, en cuanto al uso de matrices antisimétricas, se puede expresar el **producto vectorial de dos vectores de dimensión 3** por el producto de la correspondiente matriz antisimétrica por el otro vector [96]. Siendo  $\mathbf{u}$ ,  $\mathbf{v}$  dos vectores de dimensión 3, se cumple:

$$\mathbf{u} \times \mathbf{v} = \underline{\underline{\mathbf{u}}} \mathbf{v}\quad (\text{AII.7})$$

donde  $\underline{\underline{\mathbf{u}}}$  es la matriz antisimétrica correspondiente al vector  $\mathbf{u}$ .

En el caso modelado en esta Tesis en el que existe una primera transformación asociada a los giros de la vía y una segunda transformación asociada a los giros del cuerpo, si  $\mathbf{T}_t$  es la matriz de transformación asociada a los giros de la vía (Figura 3.3), según la primera ecuación de (AII.1), se tendría:

$$\dot{\mathbf{T}}_t \mathbf{T}_t^T = \underline{\underline{\Omega}}_t\quad (\text{AII.8})$$

donde el resultado  $\underline{\underline{\Omega}}_t$  es la matriz antisimétrica correspondiente a la velocidad angular de arrastre del sistema de referencia de la vía  $\Omega_t$  expresado en el sistema de referencia global.

Por otro lado, según la segunda ecuación de (AII.1) se puede escribir:

$$\mathbf{T}_t^T \dot{\mathbf{T}}_t = \underline{\underline{\tilde{\Omega}}}_t\quad (\text{AII.9})$$

donde  $\underline{\underline{\tilde{\Omega}}}_t$  es la matriz antisimétrica correspondiente al vector velocidad angular de arrastre de la vía  $\tilde{\Omega}_t$  expresado en el sistema de referencia de la vía.

Las expresiones de los vectores velocidad angular correspondientes a las matrices antisimétricas de las ecuaciones (AII.8) y (AII.9) son:

$$\mathbf{\Omega}_t = \begin{bmatrix} \cos(\phi_z)\dot{\phi}_x - \cos(\phi_x)\sin(\phi_z)\dot{\phi}_y \\ \sin(\phi_z)\dot{\phi}_x + \cos(\phi_x)\cos(\phi_z)\dot{\phi}_y \\ \sin(\phi_x)\dot{\phi}_y + \dot{\phi}_z \end{bmatrix} \quad (\text{AII.10})$$

$$\tilde{\mathbf{\Omega}}_t = \begin{bmatrix} \cos(\phi_y)\dot{\phi}_x - \cos(\phi_x)\sin(\phi_y)\dot{\phi}_z \\ \dot{\phi}_y + \sin(\phi_x)\dot{\phi}_z \\ \sin(\phi_y)\dot{\phi}_x + \cos(\phi_x)\cos(\phi_y)\dot{\phi}_z \end{bmatrix} \quad (\text{AII.11})$$

Del mismo modo, para la transformación asociada a los giros del cuerpo, se tiene:

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{T}}_b \mathbf{T}_b^T &= \underline{\underline{\tilde{\mathbf{\Omega}}_b}} \\ \mathbf{T}_b^T \dot{\mathbf{T}}_b &= \underline{\underline{\bar{\mathbf{\Omega}}_b}} \end{aligned} \quad (\text{AII.12})$$

donde  $\underline{\underline{\tilde{\mathbf{\Omega}}_b}}$ ,  $\underline{\underline{\bar{\mathbf{\Omega}}_b}}$  son las matrices antisimétricas correspondientes a los vectores velocidad angular relativa del cuerpo con respecto a la vía expresados en el sistema de referencia de la vía  $\underline{\underline{\tilde{\mathbf{\Omega}}_b}}$ , o del cuerpo  $\underline{\underline{\bar{\mathbf{\Omega}}_b}}$ , respectivamente.

Las expresiones de los vectores de velocidad angular correspondientes a las matrices antisimétricas de (AII.12) son:

$$\underline{\underline{\tilde{\mathbf{\Omega}}_b}} = \begin{bmatrix} \cos(\psi)\dot{\phi} - \cos(\phi)\sin(\psi)\dot{\theta} \\ \sin(\psi)\dot{\phi} + \cos(\phi)\cos(\psi)\dot{\theta} \\ \sin(\phi)\dot{\theta} + \dot{\psi} \end{bmatrix} \quad (\text{AII.13})$$

$$\underline{\underline{\bar{\mathbf{\Omega}}_b}} = \begin{bmatrix} \cos(\theta)\dot{\phi} - \cos(\phi)\sin(\theta)\dot{\psi} \\ \dot{\theta} + \sin(\phi)\dot{\psi} \\ \sin(\theta)\dot{\phi} + \cos(\phi)\cos(\theta)\dot{\psi} \end{bmatrix} \quad (\text{AII.14})$$

Se puede comprobar como las expresiones de  $\underline{\underline{\tilde{\mathbf{\Omega}}_b}}$  y  $\underline{\underline{\bar{\mathbf{\Omega}}_b}}$  son análogas a las de  $\mathbf{\Omega}_t$ ,  $\tilde{\mathbf{\Omega}}_t$ , cambiando los giros del cuerpo por los giros de la vía.

En segundo lugar se presentan las expresiones de las **derivadas de las matrices de transformación**  $\mathbf{T}_t$  y  $\mathbf{T}_b$  calculadas analíticamente.

Puesto que ambas transformaciones describen una secuencia de tres giros (que son a su vez función del tiempo) las expresiones de las derivadas con respecto

al tiempo de las matrices de transformación son complejas. Por tanto se ha optado por derivar cada una de las columnas y plantear estos vectores como el producto de una matriz  $\mathbf{H}_i$  por el vector  $\dot{\Phi}_i$ , separando entre giros y primeras derivadas de los giros.

Así la derivada de la matriz de transformación  $\mathbf{T}_t$  se expresa como:

$$\dot{\mathbf{T}}_t = \left[ \dot{\mathbf{T}}_t^{(1)} \quad \dot{\mathbf{T}}_t^{(2)} \quad \dot{\mathbf{T}}_t^{(3)} \right] = \left[ \left\{ \mathbf{H}_{t_1} \dot{\Phi}_t \right\} \left\{ \mathbf{H}_{t_2} \dot{\Phi}_t \right\} \left\{ \mathbf{H}_{t_3} \dot{\Phi}_t \right\} \right] \quad (\text{AII.15})$$

siendo  $\dot{\mathbf{T}}_t^{(i)}$  la columna  $i$  de la matriz  $\dot{\mathbf{T}}_t$ .

Calculando analíticamente la derivada y agrupando se obtiene el valor las matrices  $\mathbf{H}_{t_1}$ ,  $\mathbf{H}_{t_2}$  y  $\mathbf{H}_{t_3}$  que dependen exclusivamente de los ángulos de Euler de la transformación. Las expresiones de estas matrices son:

$$\mathbf{H}_{t_1} = \begin{bmatrix} -\cos(\phi_x)\sin(\phi_y)\sin(\phi_z) & -\sin(\phi_x)\cos(\phi_y)\sin(\phi_z) - \sin(\phi_y)\cos(\phi_z) & -\sin(\phi_x)\sin(\phi_y)\cos(\phi_z) - \cos(\phi_y)\sin(\phi_z) \\ \cos(\phi_x)\sin(\phi_y)\cos(\phi_z) & -\sin(\phi_x)\sin(\phi_z) + \sin(\phi_x)\cos(\phi_y)\cos(\phi_z) & \cos(\phi_y)\cos(\phi_z) - \sin(\phi_x)\sin(\phi_y)\sin(\phi_z) \\ \sin(\phi_x)\sin(\phi_y) & -\cos(\phi_x)\cos(\phi_y) & 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{H}_{t_2} = \begin{bmatrix} \sin(\phi_x)\sin(\phi_z) & 0 & -\cos(\phi_x)\cos(\phi_z) \\ -\sin(\phi_x)\cos(\phi_z) & 0 & -\cos(\phi_x)\sin(\phi_z) \\ \cos(\phi_x) & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{AII.16})$$

$$\mathbf{H}_{t_3} = \begin{bmatrix} \cos(\phi_x)\cos(\phi_y)\sin(\phi_z) & -\sin(\phi_x)\sin(\phi_y)\sin(\phi_z) + \cos(\phi_y)\cos(\phi_z) & -\sin(\phi_y)\sin(\phi_z) + \sin(\phi_x)\cos(\phi_y)\cos(\phi_z) \\ -\cos(\phi_x)\cos(\phi_y)\cos(\phi_z) & \sin(\phi_x)\sin(\phi_y)\cos(\phi_z) + \cos(\phi_y)\sin(\phi_z) & \sin(\phi_y)\cos(\phi_z) + \sin(\phi_x)\cos(\phi_y)\sin(\phi_z) \\ -\sin(\phi_x)\cos(\phi_y) & -\cos(\phi_x)\sin(\phi_y) & 0 \end{bmatrix}$$

Tomando la matriz de transformación asociada a los giros del cuerpo ( $\mathbf{T}_b$ ), puesto que se utiliza la misma secuencia de rotaciones, se podrían obtener las matrices  $\mathbf{H}_{b_1}$ ,  $\mathbf{H}_{b_2}$  y  $\mathbf{H}_{b_3}$  cambiando  $\phi_x$  por  $\phi$ ,  $\phi_y$  por  $\theta$  y  $\phi_z$  por  $\psi$ . De esta forma se obtendría la expresión de la matriz  $\dot{\mathbf{T}}_b$ .

Finalmente se presentan unas simplificaciones que se pueden aplicar cuando se tiene el producto de la **derivada parcial de una matriz de transformación por la matriz de transformación transpuesta**.

Esta situación se da en la obtención de la fuerza generalizada correspondiente a una fuerza genérica, donde aparecen las matrices  $\left( \frac{\partial \mathbf{T}_b}{\partial \phi} \mathbf{T}_b^T \right)$ ,

$$\left( \frac{\partial \mathbf{T}_b}{\partial \theta} \mathbf{T}_b^T \right) \text{ y } \left( \frac{\partial \mathbf{T}_b}{\partial \psi} \mathbf{T}_b^T \right).$$

Las derivadas de la matriz de transformación  $\mathbf{T}_b$  (AI.5) con respecto a las coordenadas de rotación valen:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{T}_b}{\partial \phi} &= \begin{bmatrix} -\cos(\phi)\sin(\theta)\sin(\psi) & \sin(\phi)\sin(\psi) & \cos(\phi)\cos(\theta)\sin(\psi) \\ \cos(\phi)\sin(\theta)\cos(\psi) & -\sin(\phi)\cos(\psi) & -\cos(\phi)\cos(\theta)\cos(\psi) \\ \sin(\phi)\sin(\theta) & \cos(\phi) & -\sin(\phi)\cos(\theta) \end{bmatrix} \\ \frac{\partial \mathbf{T}_b}{\partial \theta} &= \begin{bmatrix} -\sin(\theta)\cos(\psi) - \sin(\phi)\cos(\theta)\sin(\psi) & 0 & \cos(\theta)\cos(\psi) - \sin(\phi)\sin(\theta)\sin(\psi) \\ -\sin(\theta)\sin(\psi) + \sin(\phi)\cos(\theta)\cos(\psi) & 0 & \cos(\theta)\sin(\psi) + \sin(\phi)\sin(\theta)\cos(\psi) \\ -\cos(\phi)\cos(\theta) & 0 & -\cos(\phi)\sin(\theta) \end{bmatrix} \quad (\text{AII.17}) \\ \frac{\partial \mathbf{T}_b}{\partial \psi} &= \begin{bmatrix} -\cos(\theta)\sin(\psi) - \sin(\phi)\sin(\theta)\cos(\psi) & -\cos(\phi)\cos(\psi) & -\sin(\theta)\sin(\psi) + \sin(\phi)\cos(\theta)\cos(\psi) \\ \cos(\theta)\cos(\psi) - \sin(\phi)\sin(\theta)\sin(\psi) & -\cos(\phi)\sin(\psi) & \sin(\theta)\cos(\psi) + \sin(\phi)\cos(\theta)\sin(\psi) \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

A partir de estas matrices, se pueden obtener las expresiones de las matrices buscadas:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{T}_b}{\partial \phi} \mathbf{T}_b^T &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & \sin(\psi) \\ 0 & 0 & -\cos(\psi) \\ -\sin(\psi) & \cos(\psi) & 0 \end{bmatrix} \\ \frac{\partial \mathbf{T}_b}{\partial \theta} \mathbf{T}_b^T &= \begin{bmatrix} 0 & -\sin(\phi) & \cos(\phi)\cos(\psi) \\ \sin(\phi) & 0 & \cos(\phi)\sin(\psi) \\ -\cos(\phi)\cos(\psi) & -\cos(\phi)\sin(\psi) & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{AII.18}) \\ \frac{\partial \mathbf{T}_b}{\partial \psi} \mathbf{T}_b^T &= \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$





## Anexo III. Expresión de las matrices $\mathbf{G}$

En este Anexo se recogen las expresiones de las matrices  $\mathbf{G}$  según las define Shabana en [96]. Estas matrices relacionan el vector que ordena las derivadas de los ángulos de Euler con respecto al tiempo con la velocidad angular del sistema de referencia con respecto a otro sistema de referencia.

Tratando en primer lugar la **transformación asociada a los giros de la vía**, teniendo en cuenta la secuencia de rotaciones Z-X-Y, la velocidad angular del sistema de referencia de la vía en el sistema de referencia absoluto se calcula como (ver Figura 3.3):

$$\mathbf{\Omega}_t = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\phi}_z \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} \cos(\phi_z) & -\sin(\phi_z) & 0 \\ \sin(\phi_z) & \cos(\phi_z) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{\phi}_x \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} \cos(\phi_z) & -\sin(\phi_z) & 0 \\ \sin(\phi_z) & \cos(\phi_z) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\phi_x) & -\sin(\phi_x) \\ 0 & \sin(\phi_x) & \cos(\phi_x) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ \dot{\phi}_y \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (\text{AIII.1})$$

Desarrollando y agrupando términos, queda:

$$\mathbf{\Omega}_t = \mathbf{G}_t \dot{\mathbf{\Phi}}_t \quad (\text{AIII.2})$$

siendo  $\dot{\mathbf{\Phi}}_t = \{\dot{\phi}_x \ \dot{\phi}_y \ \dot{\phi}_z\}^T$ . Esta matriz expresa la relación entre las primeras derivadas temporales de los ángulos de Euler (vector  $\dot{\mathbf{\Phi}}_t$ ) y el vector de velocidad angular del sistema de referencia de la vía ( $\mathbf{\Omega}_t$ ), expresado en el sistema de referencia global [96, pág. 65].  $\mathbf{G}_t$  depende únicamente de estos ángulos de Euler:

$$\mathbf{G}_t = \begin{bmatrix} \cos(\phi_z) & -\cos(\phi_x)\sin(\phi_z) & 0 \\ \sin(\phi_z) & \cos(\phi_x)\cos(\phi_z) & 0 \\ 0 & \sin(\phi_x) & 1 \end{bmatrix} \quad (\text{AIII.3})$$

Se puede comprobar como la matriz antisimétrica correspondiente al vector  $\mathbf{\Omega}_t$  cumple la propiedad expresada en la ecuación (AII.8):

$$\dot{\mathbf{T}}_t \mathbf{T}_t^T = \underline{\underline{\mathbf{\Omega}_t}}$$

A partir de la ecuación (AIII.2) se puede realizar la transformación al sistema de referencia de la vía:

$$\mathbf{T}_t^T \boldsymbol{\Omega}_t = \mathbf{T}_t^T (\mathbf{G}_t \dot{\boldsymbol{\Phi}}_t) \rightarrow \tilde{\boldsymbol{\Omega}}_t = (\mathbf{T}_t^T \mathbf{G}_t) \dot{\boldsymbol{\Phi}}_t = \tilde{\mathbf{G}}_t \dot{\boldsymbol{\Phi}}_t \quad (\text{AIII.4})$$

donde  $\tilde{\boldsymbol{\Omega}}_t$  es el vector de velocidad angular del sistema de referencia de la vía, expresado en el sistema de referencia de la vía.

La matriz  $\tilde{\mathbf{G}}_t$ , según la secuencia de rotaciones considerada, tiene la expresión:

$$\tilde{\mathbf{G}}_t = \mathbf{T}_t^T \mathbf{G}_t = \begin{bmatrix} \cos(\phi_y) & 0 & -\cos(\phi_x)\sin(\phi_y) \\ 0 & 1 & \sin(\phi_x) \\ \sin(\phi_y) & 0 & \cos(\phi_x)\cos(\phi_y) \end{bmatrix} \quad (\text{AIII.5})$$

De la misma forma, se puede verificar que se cumple la propiedad (AII.9) escribiendo la correspondiente matriz antisimétrica:

$$\mathbf{T}_t^T \dot{\mathbf{T}}_t = \underline{\underline{\tilde{\boldsymbol{\Omega}}_t}}$$

Una vez obtenidas las expresiones de las matrices  $\mathbf{G}$  asociadas a los giros de la vía se procede a calcular las distintas expresiones de las derivadas con respecto al tiempo de estas matrices  $\mathbf{G}$ .

La expresión de la derivada con respecto al tiempo de la matriz  $\mathbf{G}_t$ , aplicando la regla de la cadena, es:

$$\dot{\mathbf{G}}_t = \frac{d\mathbf{G}_t}{dt} = \begin{bmatrix} -\sin(\phi_z)\dot{\phi}_z & \sin(\phi_x)\sin(\phi_z)\dot{\phi}_x - \cos(\phi_x)\cos(\phi_z)\dot{\phi}_z & 0 \\ \cos(\phi_z)\dot{\phi}_z & -\sin(\phi_x)\cos(\phi_z)\dot{\phi}_x - \cos(\phi_x)\sin(\phi_z)\dot{\phi}_z & 0 \\ 0 & \cos(\phi_x)\dot{\phi}_x & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{AIII.6})$$

A su vez, también se define la matriz  $\tilde{\mathbf{G}}_t$  calculada como  $\mathbf{T}_t^T \dot{\mathbf{G}}_t$ , cuya expresión es:

$$\tilde{\mathbf{G}}_t = \mathbf{T}_t^T \dot{\mathbf{G}}_t = \begin{bmatrix} \sin(\phi_x)\sin(\phi_y)\dot{\phi}_z & -\sin(\phi_y)\dot{\phi}_x - \cos(\phi_x)\cos(\phi_y)\dot{\phi}_z & 0 \\ \cos(\phi_x)\dot{\phi}_z & 0 & 0 \\ -\sin(\phi_x)\cos(\phi_y)\dot{\phi}_z & \cos(\phi_y)\dot{\phi}_x - \cos(\phi_x)\sin(\phi_y)\dot{\phi}_z & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{AIII.7})$$

En segundo lugar, con respecto a la **transformación asociada a los giros del cuerpo** teniendo en cuenta la secuencia de rotaciones Z-X-Y, la velocidad angular relativa del sistema de referencia del cuerpo expresada en el sistema de referencia de la vía se calcula como (ver Figura 3.4):

$$\tilde{\omega}_b = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\psi} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} \cos(\psi) & -\sin(\psi) & 0 \\ \sin(\psi) & \cos(\psi) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{\phi} \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} \cos(\psi) & -\sin(\psi) & 0 \\ \sin(\psi) & \cos(\psi) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\phi) & -\sin(\phi) \\ 0 & \sin(\phi) & \cos(\phi) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ \dot{\theta} \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (\text{AIII.8})$$

Desarrollando y agrupando términos, queda:

$$\tilde{\omega}_b = \tilde{\mathbf{G}}_b \dot{\Phi}_b \quad (\text{AIII.9})$$

donde  $\dot{\Phi}_b$  es el vector de las derivadas con respecto al tiempo de los ángulos de Euler que expresan la transformación asociada a los giros del cuerpo ( $\dot{\Phi}_b = \{\dot{\phi} \ \dot{\theta} \ \dot{\psi}\}^T$ ) que son coordenadas del problema. La expresión de la matriz  $\tilde{\mathbf{G}}_b$  es:

$$\tilde{\mathbf{G}}_b = \begin{bmatrix} \cos(\psi) & -\cos(\phi)\sin(\psi) & 0 \\ \sin(\psi) & \cos(\phi)\cos(\psi) & 0 \\ 0 & \sin(\phi) & 1 \end{bmatrix} \quad (\text{AIII.10})$$

Con la tilde  $\sim$  se denota que está referida al sistema de referencia de la vía. La velocidad angular relativa del cuerpo (AIII.9) expresada en el sistema de referencia global se calcula como:

$$\omega_b = \mathbf{T}_t \tilde{\omega}_b = \mathbf{T}_t \tilde{\mathbf{G}}_b \dot{\Phi}_b \quad (\text{AIII.11})$$

donde la matriz  $\mathbf{T}_t \tilde{\mathbf{G}}_b$  depende de los giros de la vía y de los giros del cuerpo.

La relación (AIII.9) también se puede expresar en el sistema de referencia del cuerpo. Efectuando la transformación mediante la matriz  $\mathbf{T}_b$ :

$$\mathbf{T}_b^T \tilde{\Omega}_b = \mathbf{T}_b^T (\tilde{\mathbf{G}}_b \dot{\Phi}_b) \rightarrow \bar{\Omega}_b = (\mathbf{T}_b^T \tilde{\mathbf{G}}_b) \dot{\Phi}_b = \bar{\mathbf{G}}_b \dot{\Phi}_b \quad (\text{AIII.12})$$

donde la matriz  $\bar{\mathbf{G}}_b$  tiene la expresión:

$$\bar{\mathbf{G}}_b = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & 0 & -\cos(\phi)\sin(\theta) \\ 0 & 1 & \sin(\phi) \\ \sin(\theta) & 0 & \cos(\phi)\cos(\theta) \end{bmatrix} \quad (\text{AIII.13})$$

Las expresiones de velocidad angular del sistema de referencia del cuerpo  $\tilde{\Omega}_b$  y  $\bar{\Omega}_b$  cumplen las ecuaciones (AII.12).

Para obtener la derivada de la matriz  $\tilde{\mathbf{G}}_b$  con respecto al tiempo se calcula por partes, para así obtener las derivadas parciales de esta matriz con respecto a las coordenadas de rotación. Por tanto, la derivada de esta matriz se puede expresar como:

$$\dot{\tilde{\mathbf{G}}}_b = \frac{d\tilde{\mathbf{G}}_b}{dt} = \frac{\partial\tilde{\mathbf{G}}_b}{\partial\phi}\dot{\phi} + \frac{\partial\tilde{\mathbf{G}}_b}{\partial\theta}\dot{\theta} + \frac{\partial\tilde{\mathbf{G}}_b}{\partial\psi}\dot{\psi} \quad (\text{AIII.14})$$

Con las derivadas parciales que valen:

$$\frac{\partial\tilde{\mathbf{G}}_b}{\partial\phi} = \begin{bmatrix} 0 & \sin(\phi)\sin(\psi) & 0 \\ 0 & -\sin(\phi)\cos(\psi) & 0 \\ 0 & \cos(\phi) & 0 \end{bmatrix}$$

$$\frac{\partial\tilde{\mathbf{G}}_b}{\partial\theta} = \mathbf{0} \quad (\text{AIII.15})$$

$$\frac{\partial\tilde{\mathbf{G}}_b}{\partial\psi} = \begin{bmatrix} -\sin(\psi) & -\cos(\phi)\cos(\psi) & 0 \\ \cos(\psi) & -\cos(\phi)\sin(\psi) & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Sustituyendo estas matrices en (AIII.14), se obtiene:

$$\dot{\tilde{\mathbf{G}}}_b = \begin{bmatrix} -\sin(\psi)\dot{\psi} & -\cos(\psi)\cos(\phi)\dot{\psi} + \sin(\psi)\sin(\phi)\dot{\phi} & 0 \\ \cos(\psi)\dot{\psi} & -\sin(\psi)\cos(\phi)\dot{\psi} - \cos(\psi)\sin(\phi)\dot{\phi} & 0 \\ 0 & \cos(\phi)\dot{\phi} & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{AIII.16})$$

Esta expresión coincide con  $\dot{\mathbf{G}}_t$  (AIII.6), cambiando los giros de la vía por los giros del cuerpo.

Finalmente, es necesario calcular las derivadas parciales de la matriz  $\overline{\mathbf{G}}_b$  con respecto a las coordenadas asociadas a los giros del cuerpo. A partir de la ecuación (AIII.13), se puede obtener:

$$\begin{aligned}\frac{\partial \overline{\mathbf{G}}_b}{\partial \phi} &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & \sin(\phi)\sin(\theta) \\ 0 & 0 & \cos(\phi) \\ 0 & 0 & -\sin(\phi)\cos(\theta) \end{bmatrix} \\ \frac{\partial \overline{\mathbf{G}}_b}{\partial \theta} &= \begin{bmatrix} -\sin(\theta) & 0 & -\cos(\phi)\cos(\theta) \\ 0 & 0 & 0 \\ \cos(\theta) & 0 & -\cos(\phi)\sin(\theta) \end{bmatrix} & \text{(AIII.17)} \\ \frac{\partial \overline{\mathbf{G}}_b}{\partial \psi} &= \mathbf{0}\end{aligned}$$



## Anexo IV. Características del vehículo empleado en la simulación dinámica

En este anexo se detallan las características del vehículo empleado en la simulación dinámica del Cap. 6. Este vehículo está basado en el ERRI-wagon. Estos datos completan los ofrecidos en la Tabla 6.1.

<b>Dimensiones generales</b>	
Ancho de vía <sup>(1)</sup>	1 435 mm
Empate	2 560 mm
Distancia entre pivotes de los bogies	19 000 mm

<sup>(1)</sup> Aunque no forme parte del vehículo se incluye esta característica que define la geometría del contacto.

<b>Geometría del contacto</b>	
Radio nominal	450 mm
Distancia nominal entre puntos de contacto	1 500 mm
Inclinación de montaje del carril	1:20
Perfil de la rueda	S1002*
Perfil del carril <sup>(1)</sup>	UIC60*

\* Los perfiles de rueda y carril se han medido a partir de perfiles nuevos.

<sup>(1)</sup> Aunque no forme parte del vehículo se incluye esta característica que define la geometría del contacto.

<b>Propiedades mecánicas de los materiales en el contacto</b>	
Módulo de Young (rueda y carril)	$2,1 \cdot 10^{11}$ N/m <sup>2</sup>
Coefficiente de Poisson (rueda y carril)	0,3

<b>Posiciones de los centros de masas de los cuerpos*</b>			
	$x_G$ (m)	$y_G$ (m)	$z_G$ (m)
Caja	0,00	0,00	1,80
Bogie 1	9,50	0,00	0,46
Bogie 2	-9,50	0,00	0,46
Eje 1	10,78	0,00	0,45
Eje 2	8,22	0,00	0,45
Eje 3	-8,22	0,00	0,45
Eje 4	-10,78	0,00	0,45

\* Las posiciones de los centros de masas de los cuerpos se miden respecto a un sistema de referencia centrado en la caja y situado a la altura del plano de la vía.

<b>Propiedades inerciales*</b>				
	$m$ (kg)	$I_x$ (kg m <sup>2</sup> )	$I_y$ (kg m <sup>2</sup> )	$I_z$ (kg m <sup>2</sup> )
Caja	32 000	56 800	1 970 000	1 970 000
Bogie	2 615	1 722	1 476	3 067
Eje	1 503	810	112	810

\* Todos los bogies y ejes tienen las mismas propiedades inerciales.

<b>Posición de los puntos de anclaje de los resortes lineales*</b>								
<b>Suspensión primaria</b>								
		$x_A$ (m)	$y_A$ (m)	$z_A$ (m)		$x_B$ (m)	$y_B$ (m)	$z_B$ (m)
Resorte 1	Eje 1	0,00	-1,00	0,22	Bogie 1	1,28	-1,00	0,48
Resorte 2	Eje 1	0,00	1,00	0,22	Bogie 1	1,28	1,00	0,48
Resorte 3	Eje 2	0,00	-1,00	0,22	Bogie 1	-1,28	-1,00	0,48
Resorte 4	Eje 2	0,00	1,00	0,22	Bogie 1	-1,28	1,00	0,48
Resorte 5	Eje 3	0,00	-1,00	0,22	Bogie 2	1,28	-1,00	0,48
Resorte 6	Eje 3	0,00	1,00	0,22	Bogie 2	1,28	1,00	0,48
Resorte 7	Eje 4	0,00	-1,00	0,22	Bogie 2	-1,28	-1,00	0,48
Resorte 8	Eje 4	0,00	1,00	0,22	Bogie 2	-1,28	1,00	0,48

\* Esta posición coincide con la de los puntos de anclaje de los amortiguadores lineales de la suspensión primaria.

<b>Posición de los puntos de anclaje de los resortes lineales*</b>								
<b>Suspensión secundaria</b>								
		$x_A$ (m)	$y_A$ (m)	$z_A$ (m)		$x_B$ (m)	$y_B$ (m)	$z_B$ (m)
Resorte 9	Bogie 1	0,00	-1,00	0,065	Caja	9,50	-1,00	-0,67
Resorte 10	Bogie 1	0,00	1,00	0,065	Caja	9,50	1,00	-0,67
Resorte 11	Bogie 2	0,00	-1,00	0,065	Caja	-9,50	-1,00	-0,67
Resorte 12	Bogie 2	0,00	1,00	0,065	Caja	-9,50	1,00	-0,67

\* Esta posición coincide con la de los puntos de anclaje de los amortiguadores lineales de la suspensión secundaria.



<b>Propiedades elásticas de los resortes lineales</b>			
<b>Suspensión primaria</b>			
	$k_x$ (MN/m)	$k_y$ (MN/m)	$k_z$ (MN/m)
Resorte 1	31,39	3,88	0,975
Resorte 2	31,39	3,88	0,975
Resorte 3	31,39	3,88	0,975
Resorte 4	31,39	3,88	0,975
Resorte 5	31,39	3,88	0,975
Resorte 6	31,39	3,88	0,975
Resorte 7	31,39	3,88	0,975
Resorte 8	31,39	3,88	0,975

<b>Propiedades elásticas de los resortes lineales</b>			
<b>Suspensión secundaria</b>			
	$k_x$ (kN/m)	$k_y$ (kN/m)	$k_z$ (kN/m)
Resorte 9	160	160	530
Resorte 10	160	160	530
Resorte 11	160	160	530
Resorte 12	160	160	530

<b>Propiedades disipativas de los amortiguadores lineales</b>			
<b>Suspensión primaria</b>			
	$c_x$ (kN s/m)	$c_y$ (kN s/m)	$c_z$ (kN s/m)
Amortiguador 1	10,00	0,00	10,80
Amortiguador 2	10,00	0,00	10,80
Amortiguador 3	10,00	0,00	10,80
Amortiguador 4	10,00	0,00	10,80
Amortiguador 5	10,00	0,00	10,80
Amortiguador 6	10,00	0,00	10,80
Amortiguador 7	10,00	0,00	10,80
Amortiguador 8	10,00	0,00	10,80

<b>Propiedades disipativas de los amortiguadores lineales</b>			
<b>Suspensión secundaria</b>			
	$c_x$ (kN s/m)	$c_y$ (kN s/m)	$c_z$ (kN s/m)
Amortiguador 9	10,00	35,00	15,00
Amortiguador 10	10,00	35,00	15,00
Amortiguador 11	10,00	35,00	15,00
Amortiguador 12	10,00	35,00	15,00



## Anexo V. Artículos publicados en relación a la Tesis

En este Anexo en primer lugar se enumeran los artículos publicados en relación a la Tesis. A continuación se incluyen dichos artículos. Con el fin de no incurrir en problemas por *copyright*, de acuerdo a las condiciones de publicación de las distintas revistas, se presentan las versiones *pre-print* de estos artículos.

**A. Rovira**, A. Roda, R. Lewis, M.B. Marshall.

Application of Fastsim with variable coefficient of friction using twin disc experimental measurements.

Wear (2011), doi:10.1016/j.wear.2011.08.019

**A. Rovira**, A. Roda, M.B. Marshall, H. Brunskill, R. Lewis.

Experimental and numerical modelling of wheel-rail contact and wear.

Wear 271 (2011) 911-924

J. Carballeira, L. Baeza, **A. Rovira**, E. García.

Technical characteristics and dynamic modelling of Talgo trains.

Vehicle System Dynamics 46-Supplement (2008) 301-316



# Application of Fastsim with variable coefficient of friction using twin disc experimental measurements

A. Rovira<sup>1\*</sup>, A. Roda<sup>1</sup>, R. Lewis<sup>2</sup>, M.B. Marshall<sup>2</sup>

<sup>1</sup>Universitat Politècnica de Valencia, CITV, C. Vera s/n, E46022 Valencia, Spain

<sup>2</sup>University of Sheffield, Dep. of Mechanical Engineering, Mappin Street, S1 3JD Sheffield, UK

\*Corresponding author: Tel. +34 96 387 7007 Ext. 76263, fax: +34 96 387 7629. E-mail address: [anrocar@mcm.upv.es](mailto:anrocar@mcm.upv.es) (A. Rovira).

## Abstract

In the field of railway simulation, it is a general assumption to consider the coefficient of friction as a known and constant value. This hypothesis is clearly not correct as friction is a consequence of the operating conditions (an output, not an input) and many factors can cause friction coefficient to change.

In this paper, numerical algorithms based on the simplified theory of Kalker (Fastsim) and capable of modelling variable friction are studied and improved to match experimental measurements. Experimental creep curves from twin disc measurements are used to extract the friction parameters required by the numerical algorithms. Different friction functions are tested to correlate the effect of the contaminants and the pressure on the coefficient of friction.

Finally, two examples are shown to highlight the differences between modelling the wheel-rail contact with variable or constant coefficient of friction and their implications in the estimation of the interaction forces and wear.

KEYWORDS: Rail-wheel tribology, contact mechanics, rolling-sliding, creep forces, slip-dependent friction, wear modelling

## 1 Introduction

Today the use of simulation tools instead of testing is an increasing trend to demonstrate running safety and acceptability of new designs of railway vehicles [1]. Therefore, an appropriate model of the wheel-rail contact is crucial to get realistic results.

Among the theories developed to analyse the wheel-rail contact, Kalker has made the biggest contribution to the modelling of the tangential problem [2]. He evolved the simplified theory of rolling contact Fastsim [3] which processes the area of contact to get the tangential stress distribution within the contact patch. This algorithm was originally written for a constant value of the coefficient of friction (hereinafter COF). This, however, is never the case. Friction is a consequence of contact conditions and should not be used as an input to a model. All experimental data indicates varying friction with different contact conditions and as a result of changing environmental conditions. Examples of experimental work include Ohyama [4] who used a high speed large-sized rolling machine to study the discrepancies between theory and measurements. Magel *et al.* [5] with the aid of a rolling contact tribometer also studied the relation of some on-track measured curves with the theory. In this work he was able to measure creep curves at specific points on the track. This is ideally what is needed to feed into simulations.

Furthermore, some existing numerical models to solve the contact problem were adapted to get a better agreement with experimental measurements. Ertz *et al.* [6] introduced some modifications to the Shen, Hedrick and Elkins algorithm [7]. Knothe *et al.* [8] and Bucher *et al.* [9] conducted some creep curve calculations taking surface

roughness into account and their effect on the shape of the curves. Polach [10-11] considered some coefficients in his wheel-rail contact theories to improve the conformity with experimental measurements. The calculation of the tangential problem with variable COF was treated by Nielsen *et al.* [12] who developed a model based on the exact theory of elasticity. Subsequently, Giménez *et al.* [2] and Piotrowski [13], developed an extension for Fastsim to model variable COF. In these three studies a friction function (or friction law) was included to describe the tangential behaviour of an element of the contact area.

Some applications such as the study of squeal noise or corrugation phenomena require a suitable model of the shape of the creep curve with the slope at saturated conditions [14-16]. Therefore current models dealing with constant COF are not valid for these applications and new models as the mentioned before to model variable COF must be used.

In this paper, the extension of Fastsim to model the tangential contact with variable COF is used. Experimental curves coming from twin disc measurements are used to extract the friction parameters that define the friction functions. Furthermore, as a novelty in the use of the Fastsim algorithm with variable COF, a reduction in the initial slope is considered which is also identified from experimental creep curves. Thus, the Fastsim algorithm with variable COF and slope reduction is able to accurately reproduce the wheel rail tangential problem.

The paper is organised as follows: first of all, the general background of the consideration of variable friction in the Fastsim algorithm is presented; some definitions and the need of the slope reduction are also stated. This is followed with a description of the experimental method to measure the creep curves and the model of the twin disc contact. Afterwards, the algorithm used to identify the friction parameters and slope reduction is described. Subsequently, using some experimental creep curves, the parameters are identified for different surface contaminants and contact pressure. Then, this is applied to the actual wheel-rail geometry and two numerical examples are presented.

## 2 Background

### 2.1 Fastsim algorithm with variable coefficient of friction

In this section, the Fastsim algorithm developed by Kalker [3] is reviewed and the modifications required to consider the effect of the variable COF made by Giménez *et al.* [2] and Piotrowski [13] are described.

Taking the kinematic equation for the stationary state it is possible to calculate the non-dimensional relative slip  $\boldsymbol{\gamma} = \{\gamma_x; \gamma_y\}$  as a function of the rigid slip  $\mathbf{w} = \{v_x - \varphi y; v_y + \varphi x\}$  and the displacements due to elastic deformations  $\mathbf{u} = \{u_x; u_y\}$ , being  $v_x, v_y$  and  $\varphi$  the creepages.

$$\boldsymbol{\gamma} = \mathbf{w} - \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x} \quad (1)$$

Fastsim is based on the simplified theory of elasticity where the relation between the displacement due to elastic deformation of one point  $\mathbf{u}(x,y)$  only depends on the

tangential traction of this point  $\mathbf{p}(x,y) = \{p_x(x,y); p_y(x,y)\}$ , being  $L$  the *flexibility coefficient*:

$$\mathbf{u}(x,y) = L\mathbf{p}(x,y) \quad (2)$$

Combining both equations and assuming that the tangential tractions are known, it is possible to obtain the non-dimensional slip as

$$\gamma(x,y) = \mathbf{w}(x,y) - L \frac{\partial}{\partial x} \mathbf{p}(x,y) \quad (3)$$

There are two possibilities to compute the derivative in eq (3): to calculate it numerically, using finite differences, or to obtain the analytic expression of the derivative and evaluate this expression. The first one has the advantage that the function that describes the pressure distribution does not need to be known (this is the case if the normal pressure distribution is measured experimentally [17]). In the case that this expression is available, it has been shown that this second option provides smoother results for a rough discretisation. Furthermore, if there is an expression for the derivative, the algorithm is faster. This second option is used by Giménez *et al.* [2]. and Piotrowski [13], and is the option implemented in this work.

The solution of the tangential problem is obtained with the integration of equation (3) within the area of contact. This formula is used together with Coulomb's law to define the adhesion/slip regions. A value of the COF is assumed that depends on the relative slip  $\gamma$ :

$$\mu = \mu(\gamma) \quad (4)$$

To evaluate the slip, different methods are used by the authors. On the one hand, Giménez *et al.* [2] developed an approximate formula to calculate the modulus of the slip:

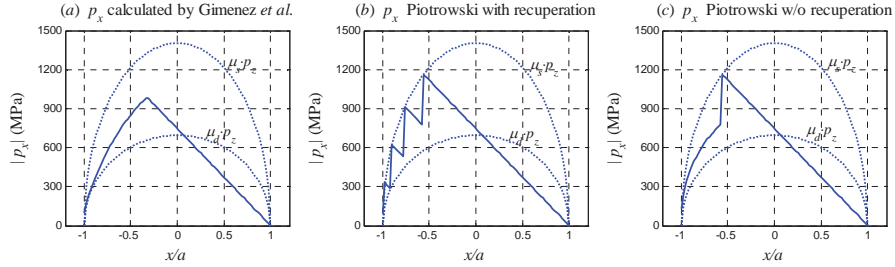
$$\gamma(x,y) = |\gamma(x,y)| = -\mathbf{w} \cdot \begin{Bmatrix} \cos(\alpha_1) \\ \sin(\alpha_1) \end{Bmatrix} + L \left( \frac{\partial \mu(\gamma)}{\partial \gamma} p_z(x,y) + \mu(\gamma) \frac{\partial p_z(x,y)}{\partial x} \right) \quad (5)$$

where  $\alpha_1$  is the angle between the tangential stress vector and the  $x$ -direction. Substituting the analytical expressions of  $\mu(\gamma)$ ,  $p_z(x,y)$  and their derivatives in the previous equation and iterating the formula, the modulus of the slip can be calculated. Fig. 1 (a) shows the tangential traction on a strip of the area calculated with this method.

On the other hand, Piotrowski [13] used the *frictional power density* to calculate the slip. In his paper, two families of methods are distinguished depending on how the COF in the slip area is recovered from (4): the methods with recuperation of static friction and the methods without recuperation of static friction. Piotrowski discards the former because it leads to a stick-slip instability in the contact area and there is no experimental evidence of this behaviour. Fig. 1 (b) and (c) show the results of the tangential traction calculated following the two methods from Piotrowski.

This work follows the algorithm developed by Giménez *et al.* [2] because it gets smoother results with a small number of elements. Nevertheless, the same process of

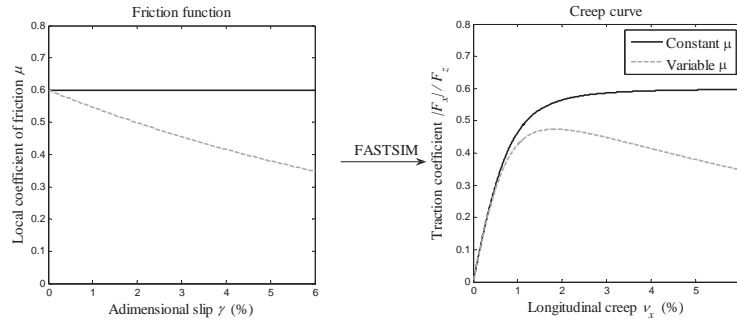
parameter identification could be applied for the method without recuperation described by Piotrowski [12].



**Fig. 1.** Pressure distribution  $p_x$  calculated for a strip under different hypothesis.  $\mu_s$  and  $\mu_d$  are the static and the dynamic value of the COF, respectively.

## 2.2 Friction functions

The friction function, or friction law, describes the relation between the non-dimensional slip and the coefficient of friction (4). This relation is expressed locally for a point that belongs to the area of contact. Fig. 2 illustrates a diagram of a friction law with a constant COF and with a variable COF as a function of the slip  $\gamma$  and their corresponding creep curves. This law cannot be directly measured, but can be estimated based on the tribology of the contact surfaces or identified from experimental measurements, as done in this paper.



**Fig. 2.** Friction functions and their corresponding creep curves.

Analysing the creep curves (Fig. 2-right), two regions can be distinguished. The first region (below 0.7% approximately) shows a linear behaviour with a constant slope. This is due to the fact that the area is in adhesion, and the relation between the displacements and the stresses is linear (see equation (2)). This region is followed by the saturation of the area of contact. The second region corresponds with high values of creepage. In this region, the creep curves resemble their corresponding friction functions [12,13].



Three different models for the friction function are used in this paper:

- $f_{1a}(\gamma)$ , an exponential law that depends on three parameters: a static coefficient of friction  $\mu_o$ , a ratio of limit friction coefficient  $\alpha$ , and a parameter  $\beta$  related to the curvature of the friction function. This function is used in [11,13].

$$f_{1a}(\gamma) = \mu_o \left[ \alpha + (1 - \alpha)e^{-\beta\gamma} \right] \quad (6)$$

- $f_{1b}(\gamma)$ , a piecewise linear approximation for the previous formula. It also depends on three parameters: a static value of COF  $\mu_s$ , a dynamic value  $\mu_d$  and a threshold  $\gamma_c$  as used in [2].

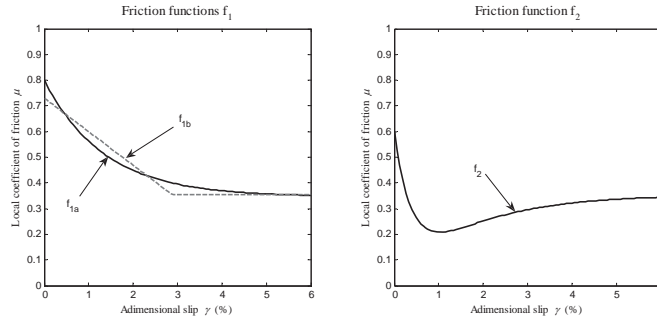
$$f_{1b}(\gamma) = \begin{cases} \mu_s - \frac{\mu_s - \mu_d}{\gamma_c} \gamma & \text{if } 0 \leq \gamma \leq \gamma_c \\ \mu_d & \text{if } \gamma_c < \gamma \end{cases} \quad (7)$$

- $f_2(\gamma)$ , an exponential function which depends on four parameters: a static value for the COF  $\mu_s$ , a dynamic one  $\mu_d$  and their corresponding decaying rates  $\alpha$  and  $\beta$ , respectively.

$$f_2(\gamma) = \mu_s e^{-\alpha\gamma} + \mu_d (1 - e^{-\beta\gamma}) \quad (8)$$

The shape of the friction functions for standard values of their parameters is shown in Fig. 3. On the plot on the left it can be seen how  $f_{1b}$  approximates  $f_{1a}$ . Both models will be tested under the same conditions to evaluate the differences between them. If there is a good correspondence between both functions,  $\mu_o \approx \mu_s$  and  $\alpha \cdot \mu_o \approx \mu_d$ . On the right of Fig. 3 the friction function  $f_2$  is plotted. It has an extra parameter to allow more flexibility when defining a friction function. The analytical derivative of those functions can easily be obtained for the inclusion in eq (5) to calculate the slip.

In the definition of the creep curves, the static COF is constrained to be greater or equal than the dynamic COF [18]. The examples on Fig. 3 meet this requirement regardless the shape of the curve for high values of slip.  $f_{1a}$  and  $f_{1b}$  are used to model the typical case of a decreasing creep curve after saturation. To model an increasing creep curve after saturation,  $f_2$  must be used.



**Fig. 3.** Models for the friction functions  $f_{1a}$  and  $f_{1b}$  (left) and  $f_2$  (right).

## 2.3 Reduction of the initial slope

The initial slope depends on the flexibility coefficient  $L$  (equation (2)). According to Kalker, this coefficient depends on the size and geometry of the contact and on the material properties [3], and is valid for *scrupulously clean* [5] and smooth surfaces [6-9] (with no asperities). Fig 4-*a*) shows the tangential contact modelled by FastSim, for clean and smooth surfaces. The value of the tangential stiffness is  $1/L$ .

On the other hand, Fig. 4-*b*) shows a real case where the effect of surface roughness (asperities) and the presence of a third body (contaminant) are considered. These two effects can be modelled as two serial springs, where the equivalent stiffness (inverse of the flexibility) is reduced with respect to the case with no asperities and clean surfaces:

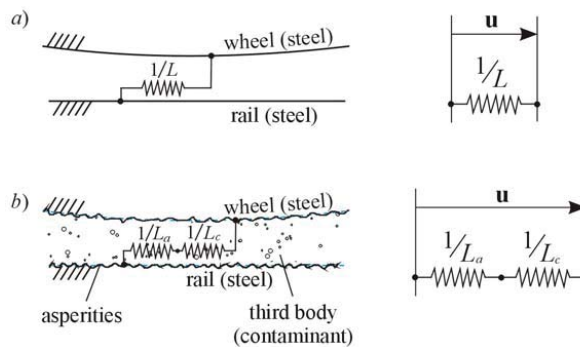
- The asperities are taken into account with a reduced value of stiffness ( $1/L_a < 1/L$ ) or with a scaling factor  $k_a$  which reduces the stiffness of the steel-steel contact (the subindex  $a$  stands for asperity)
- The effect of contamination is also accounted with a reduced value of stiffness ( $1/L_c < 1/L$ ) or with a scaling factor  $k_c$  to reduce the stiffness of the steel-steel contact (the subindex  $c$  stands for contamination), as in the previous case.

The equivalent flexibility can be computed as in [19]:

$$L^* = L_a + L_c = \frac{L}{k_a} + \frac{L}{k_c} = \frac{L}{k} \quad (9)$$

where  $0 < k \leq 1$  and it is calculated as  $1/k = 1/k_a + 1/k_c$ .

These two effects are considered with a scaling factor  $k$ , which reduces the value of the theoretical stiffness.



**Fig. 4.** Schematic and rheological model of the tangential contact for *a*) smooth and clean surfaces and *b*) rough and contaminated surfaces.

## 3 The twin disc contact

In this section the experimental procedure to obtain the creep curves used to extract the friction parameters and the wear data to construct the wear laws is briefly described.

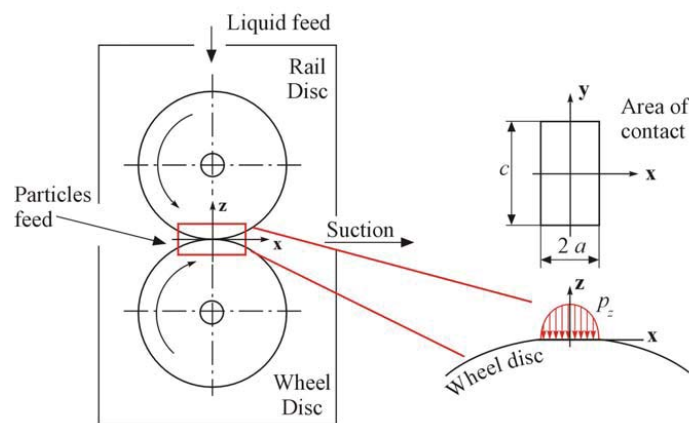
Data was acquired in a twin-disc machine where the contact geometry and the rolling-sliding conditions are close to the actual in the wheel/rail contact. In the contact patch between the two rolling discs, there is an adhesion region in the leading edge, and a slip region in the trailing edge like in the wheel-rail contact. Furthermore, the normal pressure, the creepage (only longitudinal) and the shear stress are similar to the ones present in the wheel-rail contact.

Secondly, the hypotheses used to model the twin-disc contact problem are stated. This allows characterising the twin-disc contact and using the parameters identified from experimental measurements.

### 3.1 SUROS twin-disc rig

The experimental data was obtained in the SUROS (Sheffield University Rolling Sliding) twin-disc rig. A detailed description of roller rig is given in [20]. Fig. 5 shows a schematic representation of the test discs running on the roller rig. The discs are hydraulically loaded together and driven at controlled rotational speed by independent electric motors in order to get the desired value of creepage. The liquid feed (water, oil, friction modifier) is applied on the upper disc (rail) before the discs are loaded together. The contaminant based on particles (leaves, sand) is applied at the contact with the aid of a chute.

Discs were cut from rail and wheel tyres with a diameter 47.0 mm and a width of 10 mm [20]. Each point of the creep curve was obtained with a new pair of wheel and rail discs. The curve is measured with a steady state method, so when the response is stabilised, the value of the torque is measured and the traction coefficient is calculated. A comprehensive explanation about the experimental procedure can be found in [21].



**Fig. 5.** Schematic diagram of the twin disc roller rig and area of contact generated by the two cylinders.

### 3.2 Modelling of the twin disc geometry

The twin disc contact is modelled under the following hypotheses:

- The normal problem is considered as a two dimensional contact of cylindrical bodies which are rolling along their main axes. The contact is made over a long strip of width  $c$  and length  $2 \cdot a$  where  $c \gg 2 a$  (Fig. 5-right). Hertz theory considers this case as the limit of an elliptical contact when  $b$  is allowed to become large compared with  $a$ , being  $a$  and  $b$  the semi axes of the contact ellipse along the longitudinal and tangential directions [22].
- For the tangential problem, the Fastsim algorithm with variable COF is used. The value of the flexibility coefficient corresponding to the longitudinal direction,  $L_1$ , in equation (2) is obtained from the limit case of an ellipse where  $b$  is much larger than  $a$ . Using the solution of the exact problem [23] for an elliptical area of contact, in the limit of an ellipse where  $b$  is much greater than  $a$  and  $b \rightarrow c/2$ , the value of the elasticity parameter  $L_1$  can be expressed as:

$$L_1 = \frac{4a}{c_{11} G} \quad (10)$$

where  $G$  is the combined shear modulus for the wheel ( $w$ ) and rail ( $r$ ) materials ( $1/G = 1/2 (1/G_w + 1/G_r)$ ) and  $c_{11}$  is the longitudinal coefficient of Kalker for the ratio of semiaxes  $b/a$ .

- Once obtained the theoretical gradient for small creepages which depends on  $L_1$ , this value is reduced using a factor  $k$ . This factor is chosen to fit the experimental data.

## 4 Parameter identification from the creep curve

As explained before, it is straightforward to obtain the creep curve from a friction function by the application of Fastsim [12]. To work the opposite way, i.e. to find the corresponding friction function for a given creep curve, is not possible. The approach used to do this is to find a friction function that generates a creep curve *sufficiently equal* to the desired one.

For a given friction model that depends on friction parameters and for a slope reduction, a full spectrum of creep curves are generated and it is chosen the creep curve that better approximates the experimental measurements. A relative error is calculated as the average error divided by a reference value:

$$\varepsilon(\%) = \frac{1}{\mu_{ref}} \frac{\sum_{i=1}^N |e_i|}{N} \cdot 100 \quad (11)$$

where  $|e_i|$  is the difference between the measured and calculated value of the creep curve,  $N$  is the number of points measured for each creep curve and  $\mu_{ref}$  is the reference value of the coefficient of friction. For the value of  $\mu_{ref}$  the traction coefficient for the point measured with the greatest creepage is taken. This error gives a qualitative idea of how good is the curve fit.

## 5 Results for the twin disc geometry

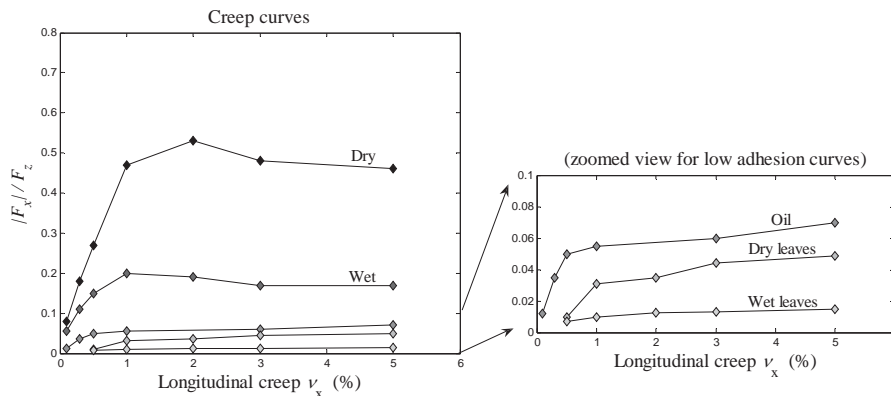
In this section, using experimental creep curves measured with the SUROS test rig, friction parameters are identified. Data is taken from previous publications ([21, 24 and 25]). Firstly, the effect of surface contamination is studied. Second, the effect of the pressure on surface contamination is analysed, comparing creep curves for two different levels of pressure. Third, the effect of two different friction modifiers used as friction enhancers is investigated. Finally, a wear analysis for the twin disc contact is performed.

### 5.1 Effect of surface contamination

Creep curves are measured for dry discs and compared with the creep curves with the application of contaminants, such as water, oil, dry leaves and wet leaves. Dry and oil curves are taken from [24]. Wet, dry leaves and wet leaves curves are taken from [21]. Points are measured for a maximum pressure of 1500 MPa on the discs, which is a typical of the actual wheel/rail contact, and for a nominal rotational velocity of 400 rpm (which corresponds to a surface velocity of about 1 m/s). Data is collected for a range between 0.1 and 6% of creepage.

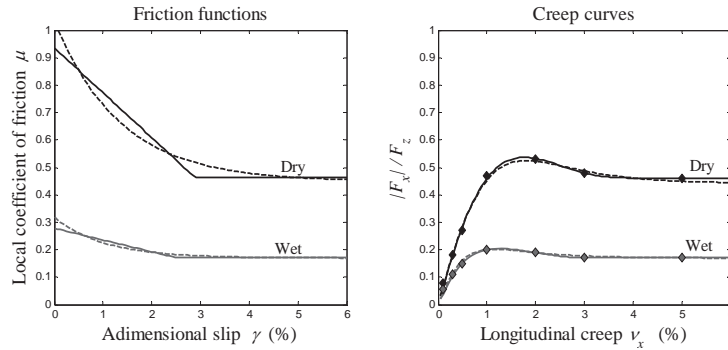
The experimental creep curves are shown in Fig. 6. Two families of curves can be distinguished:

- High adhesion curves: the traction coefficient is between 0.1 and 0.6. These curves exhibit a maximum and a falling traction coefficient beyond this value. This group is composed of the curves for dry and wet discs.
- Low adhesion curves: the traction coefficient for the range of creepage is less than 0.1. These curves show a slightly increasing shape for the whole range of creepage. This group is composed of the creep curves obtained for contamination with oil and with dry and wet leaves.



**Fig. 6.** Creep curves obtained on the SUROS roller rig. The right plot represents a zoomed view with the creep characteristic for the low adhesion curves.

High adhesion curves are fitted using the models  $f_{1a}$  and  $f_{1b}$  together with the slope reduction. They are characterised by a static value of the COF and a transition towards a dynamic COF. The friction functions and their corresponding creep curves are depicted in Fig. 7. The fit given by both models (exponential and piecewise functions) are very similar, which suggests that the use of the piecewise function is adequate. The values of the slope reduction, friction parameters and relative error are presented in Table 1. For dry curves the coefficient  $k$  is approximately equal to 1.00. This means that the Kalker theory predicts well the contact rigidity and there is no slope reduction. This value is slightly greater than 1.00 and this is probably due to scatter in the measurement process. On the other hand, for wet surfaces the slope is multiplied by a factor approximately equal to 0.7. The values of the static and dynamic values of the COF can be seen on the Table. The relative error is less than 2%.

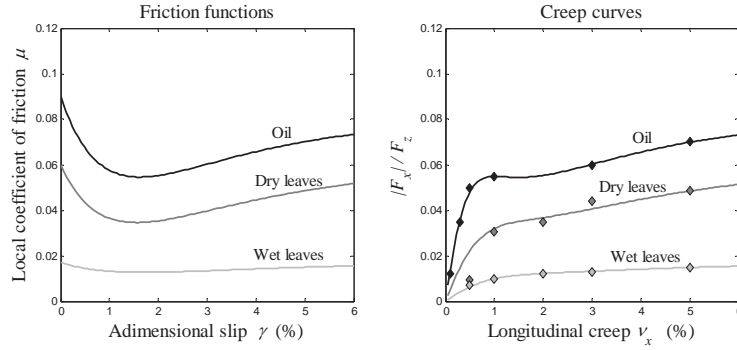


**Fig. 7.** Friction functions and creep curves for the high adhesion curves. Dash lines for  $f_{1a}$  and solid lines for  $f_{1b}$ .

**Table 1.** Parameters identified for the high adhesion curves for 1500 MPa using  $f_{1a}$  and  $f_{1b}$ .

	Exponential function ( $f_{1a}$ )			Piecewise function ( $f_{1b}$ )	
	Dry	Wet		Dry	Wet
$k$	1.07	0.72	$k$	1.06	0.65
$\mu_0$	1.03	0.32	$\mu_s$	0.94	0.28
$\alpha$	0.43	0.53	$\mu_d$	0.46	0.17
$\beta$	74.29	97.05	$\gamma_c$ (%)	2.89	2.50
$\varepsilon$ (%)	1.95	1.42	$\varepsilon$ (%)	1.46	0.36

Low adhesion curves are fitted using the friction function  $f_2$ . The friction functions and corresponding creep curves are depicted in Fig. 8. It is interesting to comment the shape of the friction functions, which resembles the Stribeck curve [18]. Dry leaves and wet leaves, behave as lubricants like the oil, but with a smaller COF. The friction function for wet leaves could also be modelled with a constant COF, due to the small variation of the creep curve in the range studied. The result of the parameter identification for the low adhesion curves is presented in Table 2. The relative error in the curve fit is less than 1%.



**Fig. 8.** Friction functions and creep curves for 1500 MPa for the surfaces contaminated with oil, dry leaves and wet leaves.

**Table 2.** Parameters identified for the low adhesion curves for 1500 MPa using the function  $f_2$ .

	Exponential function ( $f_2$ )		
	Oil	Dry leaves	Wet leaves
$k$	0.24	0.09	0.02
$\mu_s$	0.09	0.06	0.02
$\alpha$	107.78	111.43	80.00
$\mu_d$	0.08	0.06	0.02
$\beta$	41.11	32.86	40.00
$\varepsilon$ (%)	0.77	2.01	0.48

The proposed method to identify the friction parameters from given creep curves is also applied for constant COF. The corresponding friction function is  $f(\gamma) = \mu$ . Table 3 shows the results of the slope reduction  $k$  and coefficient of friction  $\mu$  for the surface conditions considered in this section and for 1500 MPa. As it is expected, the relative error is high compared to the error calculated for the different frictions functions used for variable COF (except for the case of dry leaves, where the error for constant COF is less than for variable COF).

**Table 3.** Parameters identified for 1500 MPa for constant  $\mu$ .

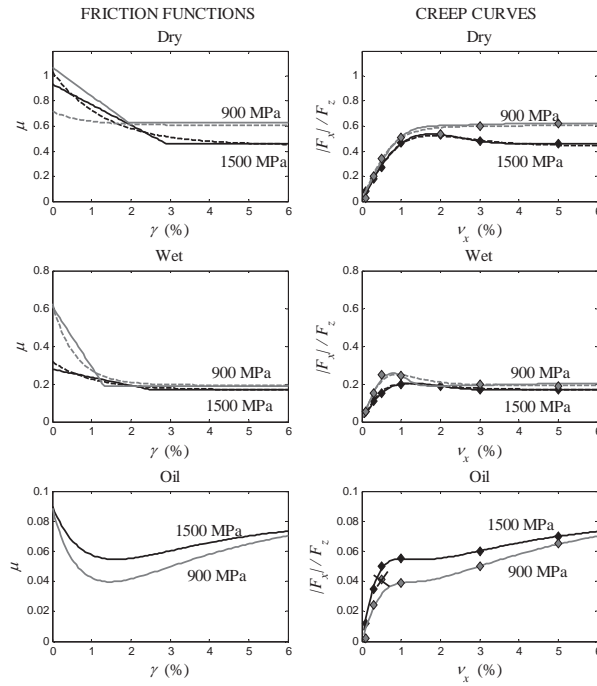
	Constant $\mu$				
	Dry	Wet	Oil	Dry leaves	Wet leaves
$k$	1.12	0.84	0.22	0.04	0.02
$\mu$	0.49	0.17	0.06	0.05	0.02
$\varepsilon$ (%)	5.88	5.86	4.32	1.74	5.32

## 5.2 Effect of the pressure on the contaminants

In this section the effect of the pressure on the creep curves is analysed. Two levels of pressure are considered for dry surfaces and with the presence of water and oil. The creep curves collected for a maximum Hertzian pressure of 1500 MPa are taken from the previous section; the creep curves for 900 MPa are extracted from [24].

For the high adhesion family (dry and wet) the friction models  $f_{1a}$  and  $f_{1b}$  will be used; on the other hand, for the low adhesion family (oil),  $f_2$  will be used. The friction functions and corresponding creep curves are depicted in Fig. 9; the parameters of the

curve fit are stated in Tables 4 and 5. The creep curve for dry contacts for 900 MPa does not exhibit the typical shape with the maximum and the falling friction. Only one test was carried for each slip condition so it is possible the creep curve rises and then falls, but this may have been missed.



**Fig. 9.** Friction functions and creep curves fitted for dry, water and oil conditions for the two levels of pressure considered. For dry and wet, dash lines are for  $f_{1a}$  and solid lines for  $f_{1b}$  (the third point of the curve for oil at 900 MPa is eliminated).

**Table 4.** Parameters identified for Dry and Wet curves for 900 MPa using  $f_{1a}$  and  $f_{1b}$ .

	Exponential function ( $f_{1a}$ )			Piecewise function ( $f_{1b}$ )	
	Dry	Wet		Dry	Wet
$k$	0.78	0.61	$k$	0.72	0.59
$\mu_o$	0.72	0.62	$\mu_s$	1.06	0.61
$\alpha$	0.84	0.31	$\mu_d$	0.62	0.19
$\beta$	129.41	170.59	$\gamma_c$ (%)	1.94	1.31
$\varepsilon$ (%)	2.15	4.25	$\varepsilon$ (%)	3.37	4.30



**Table 5.** Parameters identified for Oil for 900 MPa using  $f_2$ .

Exp. F. ( $f_2$ )	
Oil	
$k$	0.08
$\mu_s$	0.09
$\alpha$	140.00
$\mu_d$	0.09
$\beta$	26.29
$\varepsilon$ (%)	0.69

As in the previous section, the slope reduction  $k$  and the constant coefficient of friction  $\mu$  are identified for a model of constant COF and for a pressure of 900 MPa (Table 6). The relative error is greater than the one calculated for variable COF.

**Table 6.** Parameters identified for 900 MPa for constant  $\mu$ .

	Constant $\mu$		
	Dry	Wet	Oil
$k$	0.67	0.61	0.08
$\mu$	0.61	0.20	0.06
$\varepsilon$ (%)	4.10	13.02	10.34

The variation of the pressure, for the other magnitudes kept constant, has two effects on the contact: on the normal problem, an increment on the pressure creates a variation on the size of the contact; on the tangential problem, the values of the friction parameters and slope reduction are different.

Regarding the normal problem, the relation between the semi-length of the area of contact and the maximum Hertzian pressure can be obtained [22]:

$$a = 2 p_{z_o} \frac{R^*}{E^*} \quad (12)$$

where  $R^*$  is the combined curvature of the two discs ( $1/R^* = 1/R_w + 1/R_r$ ),  $E^*$  the combined Young's modulus of the wheel and rail materials ( $1/E^* = (1-\sigma^2)/E_w + (1-\sigma^2)/E_r$ ) and  $\sigma$  the Poisson's ratio.

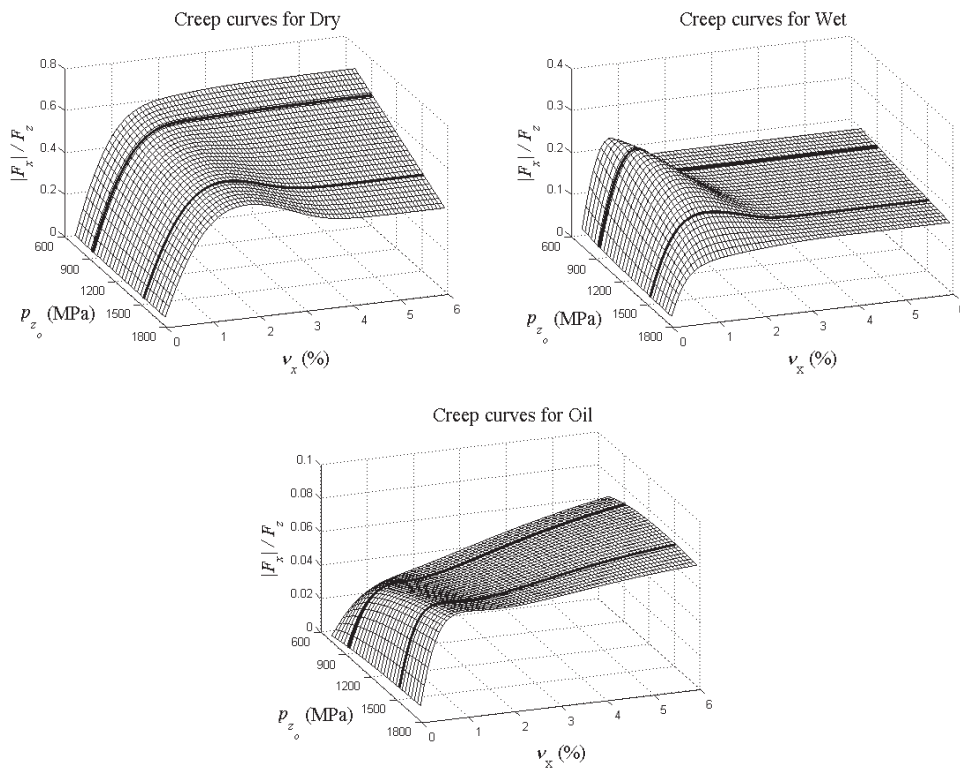
Considering now the tangential problem, substituting equation (12) into (10), the flexibility coefficient for the longitudinal direction can be expressed as

$$L_1 = \frac{8 p_{z_o} R^*}{c_{11} G E^*} \quad (13)$$

As both relations depend linearly on the maximum Hertzian pressure  $p_{z_o}$  and the differences between the creep curves for the two levels of pressure are relatively small, a linear transformation can be done to estimate the friction parameters and the slope reduction for the desired pressure. The results of the numerical calculations performed by Bucher *et al.* [26] also show a linear relation between the traction coefficient and the pressure.

Using this technique, the different creep curves can be obtained for each value of maximum Hertzian pressure, with a linear transformation for the parameters of the friction function between 900 and 1500 MPa.

Fig. 10 shows the calculated creep curves for different values of pressure. They represent the surface plots for the creep curves which depend on two parameters: the maximum Hertzian pressure and the creepage. For a given value of maximum Hertzian pressure on the contact, the corresponding creep curve is taken as the slice of the surface plot for the value of the pressure. Similar surface plots can also be represented for the friction functions.



**Fig. 10.** Creep curves calculated for different values of pressure for Dry, Wet and Oil conditions. The curves for 900 and 1500 MPa are plotted with a thicker line. For Dry and Wet it is used the friction function  $f_{1b}$ ; for Oil, the friction function  $f_2$ .

### 5.3 Use of friction enhancers

The third case studied corresponds to the use of friction enhancers which are one kind of the generic family of friction modifiers. Friction modifiers are used in the wheel/rail interface to improve one or more of these characteristics [25,27]:

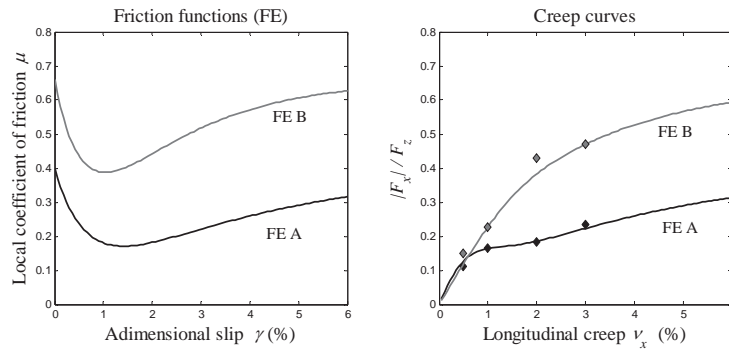
- Eliminate the negative slope of the traction curve that is responsible for contact roll-slip instabilities, which may lead to the generation of squeal noise or corrugation (high positive friction modifiers).

- Improve the adhesion (adhesion enhancers or traction enhancers).
- Reduce rolling contact fatigue.
- Reduce wear rate.

Friction modifiers are composed of engineered dry composite solids that are mixed with water and deposited on top of the rail in liquid form. When the water evaporates, the remaining thin dry film maintains an optimal intermediate level of friction [28].

In this section data is taken from [25] where the friction modifiers are used as adhesion enhancers (FE) to facilitate the traction and braking operation under poor adhesion conditions. Two friction modifiers are used, named FE A and FE B. FE A has been successfully tested in a train depot in Japan to overcome adhesion problems related to rainfall. FE B has extensively been used in autumn on the Dutch and British railways networks to mitigate adhesion problems mostly due to leaves and small amounts of water.

The creep curves are measured at 400 rpm (which corresponds to a surface speed about 1 m/s) with a maximum Hertzian pressure of 1200 MPa (there are no measurements taken for another level of pressure to allow interpolation as done in the previous section). FEs are applied in dry conditions on the wheel and rail discs. Both measured creep curves exhibit a positive slope throughout the creep range, therefore, the friction function  $f_2$  is used.



**Fig. 11.** Friction functions and creep curves for the adhesion enhancers.

The result of the parameter identification is shown in Fig. 11 and in Table 7. The shape of the friction functions for the FEs is quite similar to the one obtained for the oil. In fact, the positive characteristic given by a lubricant also reduces negative effects associated to the roll-slip instability and it was originally used to improve the wheel/rail contact. Nevertheless the low traction coefficient achieved with a lubricant (below 0.2) can compromise traction or braking operations. This does not happen with the use of a FE [28], which has a traction coefficient about 0.2 for FE A and 0.45 for FE B.

**Table 7.** Parameters identified for the friction function  $f_2$  for the use of the tested friction enhancers on dry surfaces.

	Exponential function ( $f_2$ )	
	FE A	FE B
$k$	0.44	0.32
$\mu_s$	0.40	0.66
$\alpha$	150.00	164.00
$\mu_d$	0.40	0.66
$\beta$	26.00	50.00
$\varepsilon$ (%)	1.63	2.60

The slope reduction and friction parameters are also calculated for the case of constant COF (Table 8). As in the previous sections, the relative error calculated with the constant COF approach is greater than the relative error calculated for variable COF.

**Table 8.** Parameters identified for constant  $\mu$ .

	Constant $\mu$	
	FE A	FE B
$k$	0.34	0.36
$\mu$	0.21	0.55
$\varepsilon$ (%)	5.20	3.88

## 5.4 Wear analysis

In this section the implications of the presence of contaminants on wear are analysed. The data of section 5.1 for dry, wet and oil surfaces is used. Wear is estimated from the energy dissipation in the contact patch. The latter is calculated with the index  $T\gamma/A$ . The University of Sheffield (USFD) wear law [29] is used to relate the energy dissipated and the amount of material removed.

The USFD law is based on twin disc experimental data and expresses wear as mass of worn material ( $\mu\text{g}$ ) per distance rolled (m) per contact area ( $\text{mm}^2$ ), following the equations in Table 9 and the plot in Fig. 12-(a). This function is obtained for R8T wheel and 900A rail materials in dry conditions. It is possible to take account of contaminants in the wheel/rail contact by simply changing the friction coefficient. This option may work fine for dynamic modelling. For application to wear modelling, this will change the  $T\gamma$  value and therefore the wear rate by moving to a new point on the wear law. Nevertheless, a new wear law is needed. Fig. 12-(b) shows how the USFD law fits the trend for dry contacts. Wet contacts, however, do not follow the same curve (see the two points for wet contacts on Fig. 12-(b)).

Although wear laws are generally obtained only for dry conditions they are used in the presence of a surface contaminant, which is beyond the extend of their initial validation [30]. In this work the USFD wear law is used as a reference to show the estimation of wear assuming that the surfaces are dry and clean.

**Table 9.** Wear regimes and coefficients for R8T wheel and 900A rail materials for dry contacts.

Regime	$T\gamma/A$ (N/mm <sup>2</sup> )	Wear Rate ( $\mu\text{g}/\text{m}/\text{mm}^2$ )
$K_1$ (mild)	$T\gamma/A \leq 10.4$	$5.3 T\gamma/A$
$K_2$ (severe)	$10.4 < T\gamma/A \leq 77.2$	55.0
$K_3$ (catastrophic)	$77.2 < T\gamma/A$	$55.0 + 61.9 (T\gamma/A - 77.2)$

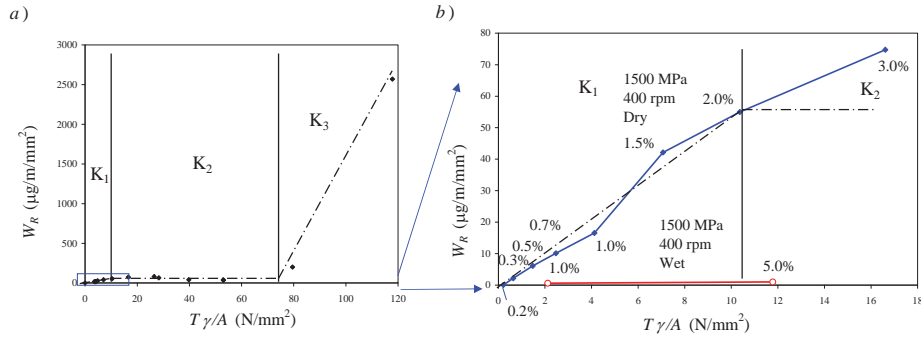
The energy dissipated in each element of the contact is calculated as the product of the tangential traction times the non-dimensional slip:

$$\left. \frac{T\gamma}{A} \right|_i = \frac{T\gamma}{A}(x_i) = p_x(x_i)\gamma_x(x_i) \quad (14)$$

A global value of the energy dissipated in the contact can be calculated as stated in (15), where  $N$  is the number of elements of the contact patch,  $\Delta x$  is the length of each element and  $A_s$  is the area of slip per unit width. This value gives a global idea of the energy dissipated in the contact patch and the mechanisms involved in the wheel or rail wear.

$$\frac{T\gamma}{A_s} = \frac{1}{A_s} \sum_{i=1}^N \left. \frac{T\gamma}{A} \right|_i \Delta x \quad (15)$$

The USFD law can be implemented both locally and globally, considering the local stresses and slip within the contact patch or the global forces and creepages in the nominal point of contact [31]. In this paper the  $T\gamma/A$  index and the USFD wear law are used in both ways.



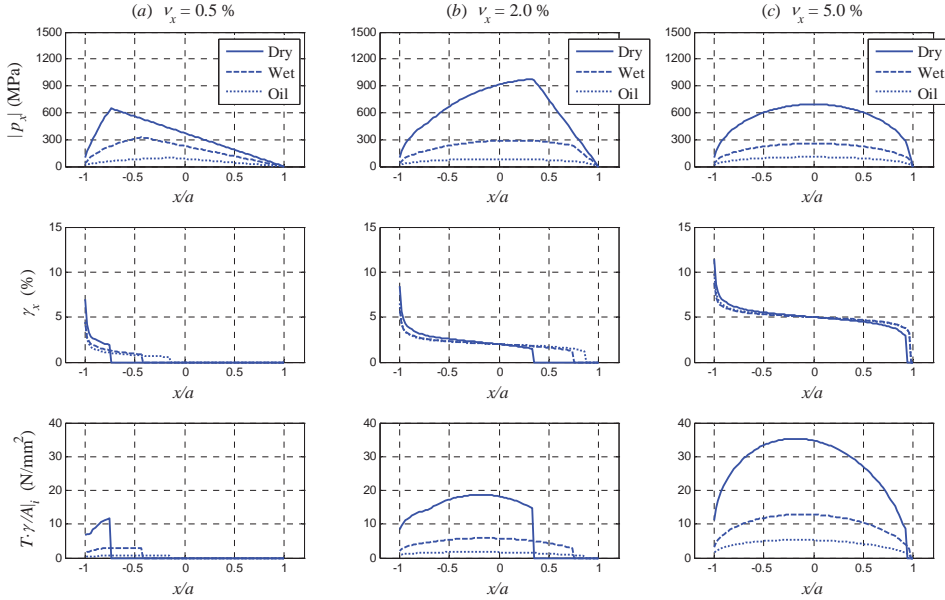
**Fig. 12.** (a) USFD wear function. (b) zoomed view of the USFD with points measured for dry and wet condition. The values on the plot are the longitudinal creepage (%).

The tangential problem is studied under three different scenarios:

- (a)  $v_x = 0.5\%$ : most of the area of contact is in adhesion. This corresponds to the linear region of the creep curve.
- (b)  $v_x = 2.0\%$ : general case, with adhesion and slip regions. This condition is close to the adhesion optimum (maximum) for dry and wet curves and close to the minimum of the hydrodynamic lubrication for oil curves.

- (c)  $v_x = 5.0\%$ : most of the area is in slip. The creep curve is saturated for the static value of COF.

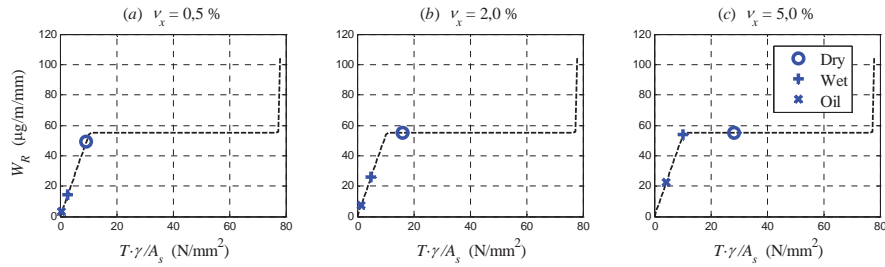
Fig. 13 shows the tangential traction ( $p_x$ ), the slip ( $\gamma_x$ ) and the dissipated energy in each element ( $T\gamma/A_i$ ). For the same kinematic condition, depending on the friction parameters (dry, wet or oil) the tangential traction is different. With the presence of a lubricant the tangential traction is reduced while keeping the slip more or less constant. This produces a decrease in the energy dissipated. In (a), the dissipated energy for dry contacts is about four times greater than for wet and twenty times greater than oil. This difference is reduced when the creepage is increased. In (c), the dissipated energy for dry contacts is three times greater than for wet and seven times greater than oil. The absolute value for dry contacts reaches a maximum of approximately 11.7 N/mm<sup>2</sup> for (a), 18.6 for (b) and 35.3 for (c).



**Fig. 13.** Tangential tractions, slip and energy dissipated in the contact for dry, wet and oil conditions and for three different kinematic scenarios.

The global  $T\gamma/A$  for each contact patch for dry, wet and oil conditions are calculated and plotted on the USFD wear law for dry contacts (Fig. 14). Firstly, the results for dry contacts are discussed. The points are located in the mild and severe regimes, as it is expected for tread wear in wheel-rail contact [29]. In (a), the global  $T\gamma/A$  lies in the mild regime; although most of the area is in this regime some elements are in the severe regime. For a greater value of creepage (b), the global  $T\gamma/A$  moves to the severe regime. As seen in Fig. 13, the local distribution  $T\gamma/A_i$  is greater than 10.4 N/mm<sup>2</sup> in most of the slip region. This change of regime is associated to the adhesion to slip transition. At this point, the slip area represents approximately 70% of the contact area. In the following case (c), the contact is in the same regime, with a slip area that reaches 96% of the contact area.

Secondly, the case of wet and oil contacts can be analysed. In those plots, the same wear law for dry contacts is supposed to be valid. Although this is generally assumed, it consists a very pessimistic scenario because with lubrication, the wear rate is greatly reduced [29], see Fig. 12-(b). With this assumption, all the contacts are in the mild regime except the wet contact for the scenario (c), which is just in the transition from mild to severe regimes.



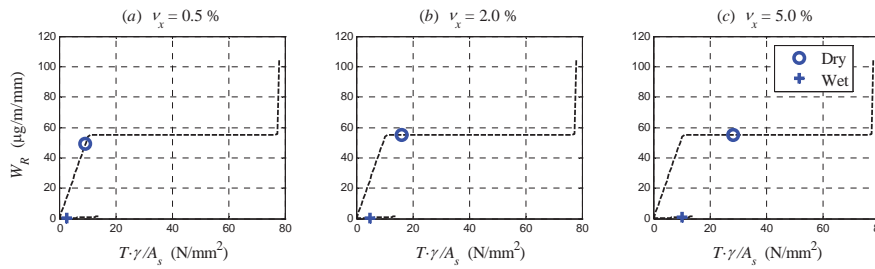
**Fig. 14.** Global wear index for the three contacts for dry, wet and oil. The points are located on the USFD wear law for dry contacts.

The wear estimation can be improved for wet contacts. A linear function with no offset can be fitted to the two points measured in Fig. 12-(b). This is only an approximation for the wear obtained for wet contacts for small values of  $T\gamma/A$  and is valid for a range  $0 < T\gamma/A < 14 \text{ N/mm}^2$  (see Table 10). Only *mild* regime is considered. Although it represents an improvement over the USFD for dry contacts, more laboratory testing would be required to get a better definition of the wear law.

**Table 10.** Wear law for R8T wheel and 900A rail materials for wet contacts.

Regime	$T\gamma/A$ (N/mm <sup>2</sup> )	Wear Rate (µg/m/mm <sup>2</sup> )
$K_1$ ( <i>mild</i> )	$T\gamma/A \leq 14.0$	$0.09 T\gamma/A$

Fig. 15 shows the dry and wet contacts plotted on their corresponding wear laws. Considering this new curve for wet contacts, in the three scenarios the wet contact lies in the *mild* regime, with a much smaller wear rate than the one predicted in Fig 14. As there is no wear law for contacts with oil, those contacts are not plotted.



**Fig. 15.** Global wear index for dry and wet contacts, located on their corresponding wear law.

## 6 Application to wheel-rail contact

In this section the Fastsim algorithm with variable coefficient of friction is adapted for the geometry of the wheel-rail contact. Due to the geometry of the surfaces in the contact, it is a three-dimensional problem and represents a further step than the twin disc case.

Based on the adapted model, two examples are presented in order to demonstrate the use of the formulations and parameters identified in this paper. These examples include the results of a wheelset on tangent track under high traction forces and the quasistatic behaviour of a vehicle traversing a curve. Magnitudes as pressure distribution within the contact patch, wheel-rail interaction forces and wear estimation are compared for both constant and variable coefficient of friction hypotheses.

### 6.1 Modelling of the wheel-rail geometry

The wheel-rail contact is analysed under the following hypotheses:

- The normal problem is solved using the equivalent ellipse method. The area of contact is obtained from the interpenetration of the wheel and rail profiles [32]. An equivalent ellipse is fitted to this contact patch [17] with semi-axes  $a$  and  $b$ . The normal pressure distribution follows the Hertz model [22] (Fig. 16).
- For the tangential problem, the Fastsim algorithm with variable COF is used taking into account the flexibility coefficients  $L_1$ ,  $L_2$  and  $L_3$  [3].
- The parameters which define the friction functions, identified for the longitudinal direction, are assumed to be valid for the lateral direction too. According to [11], this assumption can be accepted because those parameters influence mainly in the longitudinal direction where the maximum creep occurs.
- To calculate the  $T\gamma/A$  corresponding to the elliptical area of contact, it is required to know the components of the slip vector. From equation (1), using  $L_1$  for the equation for  $x$  and  $L_2$  for the equation for  $y$  and calculating the derivative numerically (see the deduction of this formula in [33]), the expression for  $\gamma_x$  and  $\gamma_y$  is obtained. Dividing both formulas, it is possible to obtain the following relation which gives the ratio between the components of the slip vector:

$$\frac{\gamma_y}{\gamma_x} = \frac{L_2}{L_1} \frac{p_y - p_y^{adh}}{p_x - p_x^{adh}} \quad (16)$$

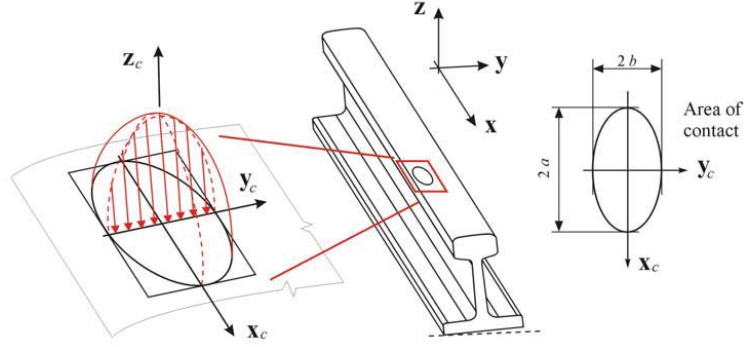
where the superindex  $adh$  is referred to the tangential stress under adhesion condition. Therefore, the angle of the slip vector  $\alpha_2$  is

$$\alpha_2 = \tan^{-1} \left( \frac{L_2}{L_1} \frac{p_y - p_y^{adh}}{p_x - p_x^{adh}} \right) \quad (17)$$



and the  $T\gamma/A$  index for the element  $i,j$  of the contact patch can be calculated as

$$\frac{T\gamma}{A}\bigg|_{i,j} = \frac{T\gamma}{A}(x_i, y_j) = \mathbf{p}_{i,j} \cdot \boldsymbol{\gamma}_{i,j} = p_{x_{i,j}} \cdot (\gamma_{i,j} \cos(\alpha_{2_{i,j}})) + p_{y_{i,j}} \cdot (\gamma_{i,j} \sin(\alpha_{2_{i,j}})) \quad (18)$$



**Fig. 16.** Schematic representation of the wheel-rail geometry, with the elliptical area of contact of dimensions  $2a \cdot 2b$  and the normal pressure distribution.

## 6.2 Examples and numerical results

The objective of this section is to compare the results obtained with the classic approach of constant COF with the approach of variable COF (which depends on the relative slip and on the pressure on the contact). On the one hand, the value of the constant COF is taken from the literature. On the other hand, for variable COF, the friction functions and the corresponding parameters identified from the experimental creep curves are used (Section 5).

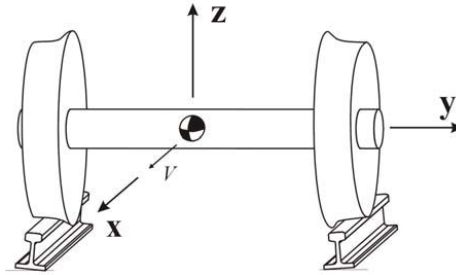
Two examples are presented to show the implication of the consideration of the surface condition (presence/absence of a contaminant and its dependence on the pressure) on the wheel-rail interaction forces and wear.

Although the COF is a very important parameter to describe the tangential problem its value is not always offered in published papers. When given, the value of constant COF for dry steel-steel contacts is between 0.25 and 0.5 for applications of vehicle simulation or wear estimation. Some examples can be cited as Sinclair [34] with values between 0.24 and 0.4 for tread contacts, Shabana *et al.* [35] who use 0.5, Enblom *et al.* [36] with 0.3, Tunna *et al.* [37] with 0.4, Simson *et al.* [38] test different values between 0.38 and 0.5, Matsumoto *et al.* [39] with 0.4 and Vuong *et al.* [40] takes 0.4. These values are stated in [41]. In this work a value of 0.4 for constant COF is taken with no slope reduction ( $k=1$ ). All these values represent the dry surface condition. Those values are not very different from the values identified for dry surfaces in Tables 3 and 6 (for pressures of 1500 MPa and 900 MPa, respectively).

### 6.2.1. Example 1: Tangent track under high traction forces

In this first example, a centred wheelset on a tangent track is analysed under high traction forces (Fig. 17). The wheelset is travelling at a constant velocity with a

prescribed value of longitudinal creepage (which simulates the traction force) and spin (to consider the conicity of the contact). The longitudinal creepage is taken close to the maximum of the creep curve for dry surfaces. The data used for the simulation is detailed in Table 11. The wheel and rail profiles are measured from new profiles. In this example, the relative position of the wheelset respect to the track is prescribed and does not depend on the wheel-rail forces. The objective of this example is to investigate the effect of contaminants on the tangential forces and on the wear estimation and the effect of the modelling with constant or variable COF.



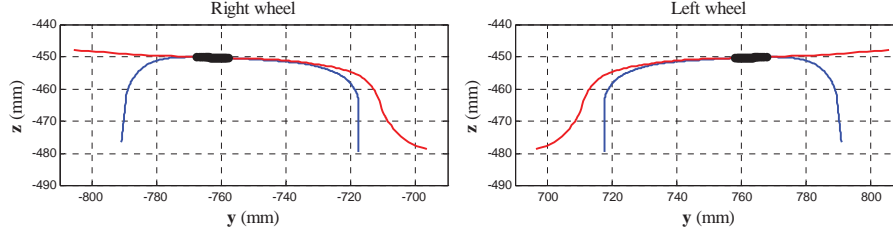
**Fig. 17.** Example 1: a wheelset centred on a tangent track.

Three different scenarios are considered: (a) dry surfaces, (b) wet surfaces and (c) tangential problem modelled for constant COF  $\mu = 0.4$ . (a) and (b) consider a variable COF with the friction parameters and slope reduction identified in Section 5.

**Table 11.** Data used for the simulation.

Velocity	90 km/h
Gauge	1435 mm
Radius of the wheel	450 mm
Distance between contact points	1500 mm
Wheel profile	S1002
Rail profile	UIC60
Rail slant	1:20
Wheelset mass	1500 kg
Weight per axle	120 kN
Longitudinal creepage $v_x$	1.2 %
Lateral creepage $v_y$	0.0 %
Spin $\varphi$ (1/m)	6.55 %

As a result of the normal problem, there are two areas of contact between the wheelset and the rail, one for each wheel and symmetric (Fig. 18). The dimensions of the areas of contact and the maximum pressure are stated in Table 12. The maximum Hertzian pressure is used to interpolate the friction parameters and slope reduction as explained in section 5.2.

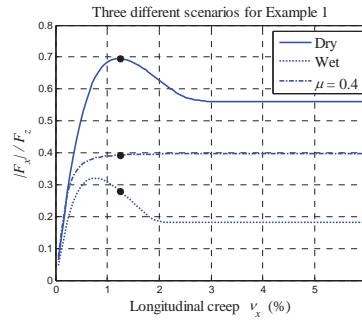


**Fig. 18.** Geometry of the contact and contact areas for Example 1.

**Table 12.** Results of the normal problem.

$p_{z_0}$	1121.14 MPa
$a$	5.95 mm
$b$	4.26 mm

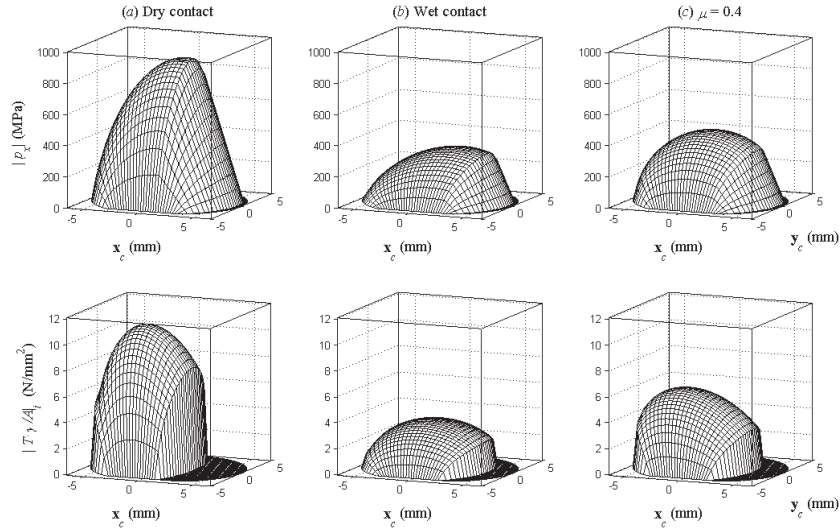
Once solved the normal problem, the creep curves are calculated for the three scenarios (Fig 19) where the longitudinal creepage is in the range 0-6%. For dry and wet conditions, using the value of the maximum Hertzian pressure ( $p_{z_0}$ ) of Table 12, the values of the friction parameters and slope reduction are interpolated as explained in Section 5.2 (between the values identified for the two levels of pressure, 900 MPa and 1500 MPa). Then, the creep curves for dry and wet are calculated applying FastSim with variable COF and slope reduction; on the other hand, the creep curve for  $\mu = 0.4$  is calculated applying FastSim (with no slope reduction and no pressure dependence). The differences in the three curves illustrate the differences among the three scenarios. The dot in the curves indicates the position under study.



**Fig. 19.** Creep curves corresponding to the three scenarios. The black point represents the kinematic condition studied.

To evaluate the three scenarios, in Fig. 20 the longitudinal stress distribution and the energy dissipation distribution ( $T\gamma/A_i$ ) within the area of contact are plotted. In the condition studied in this example, close to the adhesion optimum for dry surfaces (see Fig. 19), the longitudinal stress is much greater than the lateral stress created by the spin. In order to get a clear shape of the tangential stress distribution, only the longitudinal component is represented. Nevertheless, the effect of spin is considered in the calculation of the energy dissipation ( $T\gamma/A_i$ ) in Fig. 20, through the lateral stress in equation (18).

In both magnitudes the adhesion region is easy to distinguish (where the pressure distribution is linear and the  $T\gamma/A_i$  is zero). Integrating those magnitudes, the total force and the global energy dissipated ( $T\gamma/A$ ) can be obtained (Table 13).

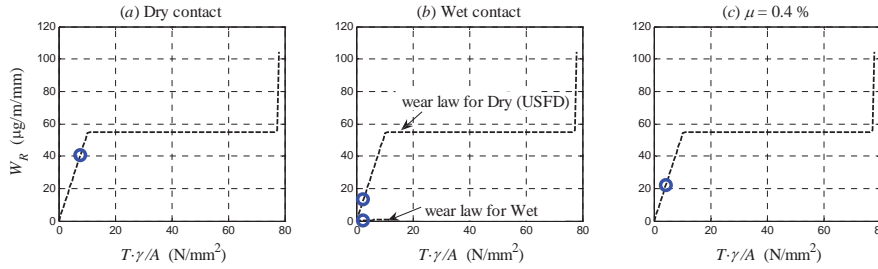


**Fig. 20.** Pressure distribution ( $p_x$ ) and  $T\gamma/A$  distribution on the contact area under the three scenarios.

**Table 13.** Results of the tangential problem.

	Dry	Wet	$\mu = 0.4$
$F_x$ (kN)	41.42	17.00	23.24
$T\gamma/A$	7.90	2.56	3.99

Fig. 21 plots on the USFD wear law the global energy dissipated in the three contacts studied. (a) and (c) are plotted on the wear law for dry contacts. To illustrate the effect of the consideration of a different wear law, the contact (b) is plotted on the wear law for dry contacts (Table 9) and on the wear law for wet ones (Table 10). In both cases the contact is in the mild regime but the associated wear rate greatly changes. In this case the effect of the contaminant is taken into account in the computation of the  $T\gamma/A$  which represents the position on the x-axis and in the wear law considered, which represents the position in the y-axis.



**Fig. 21.** Global energy dissipated in the contact.

The comparison of (a) with (c) gives an idea of the error made in the contact modelling of the system. For the considered kinematics, the error assuming a constant COF  $\mu = 0.4$  when the surfaces are actually dry is about 45% in forces and in energy dissipated (taking the dry contact as a reference).

The comparison of (a) with (b) represents the error made assuming a different surface contamination. If the surfaces were wet, but assumed dry, the error reach 144% in forces and 200% in energy dissipated (taking the wet contact as a reference). Furthermore, if the estimated wear law for wet contacts is used, the estimated error in wear can reach values up to 250%.

The error in forces would affect the motion of the wheelset over the track in a dynamic simulation (and, therefore, the accumulated damage on the wheel/rail profiles).

### 6.2.2. Example 2: Vehicle traversing a curve

In this second example the quasistatic behaviour of a full vehicle traversing a curve is studied. This case is a special case in the overall study of the behaviour of a rail vehicle. The purpose of this kind of analysis is to predict the steady-state attitude and the resulting wheel-rail and suspension forces [41]. The quasistatic position is an equilibrium position of the bogies of the vehicle when traversing a curve. The objective of this example is to investigate the effect of the constant/variable COF on the wheel/rail interaction forces and equilibrium position of the wheelsets in the track.

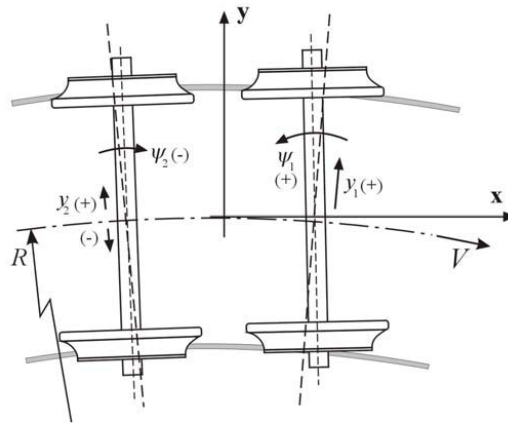
The surfaces in the contact are assumed to be dry. Two different contact models are tested: (a) a model of variable COF and (b) a model for constant COF. Firstly, the method for variable COF and dry surfaces takes the friction parameters and slope reduction identified from experimental data detailed in Section 5; those parameters are dependent on the pressure. Secondly, for constant COF, a constant value of  $\mu=0.4$  and no slope reduction are chosen.

**Table 14.** Data used for the simulation (example 2).

Velocity	90 km/h
Radius of the curve	2 000 m
Cant	100 mm
Non-balanced acceleration	0.31 m/s <sup>2</sup>
Bogie wheelbase	2 560 mm
Bogie mass	3 300 kg
Carbody mass	36 000 kg
Stiffness of primary susp. ( $k_x$ )	32 MN/m

For the calculation, the same data from the previous example is used along with data from Table 14. The vehicle is composed of two bogies of type B (two wheelsets), and it negotiates a canted curve of constant radius with cant deficiency. A typical set of four coordinates is used to model the motion of the wheelset in the track [42], which are: lateral displacement  $y$ , vertical displacement  $z$ , roll angle  $\phi$  and yaw angle  $\psi$ . Fig. 22 shows a schematic representation of the wheelsets of the front bogie and its attitude, showing the coordinates  $y$  and  $\psi$ . Only the results for the wheelsets of the leading bogie are presented.

Table 15 and Fig. 23 show the results of the quasistatic problem for the wheelsets of the leading bogie under the two hypotheses. For both cases, the leading wheelset moves outside the curve and develops a positive angle of attack ( $\psi > 0$ ) whereas the trailing wheelset stays in a position close to the centre of the track and develops a negative angle of attack. This is the expected behaviour for the leading bogie. However, the differences between the wheelsets attitudes for the two cases studied are noticeable. As the friction is greater for (a), the leading wheelset has a smaller lateral displacement  $y$  than (b), which is near flanging. This same behaviour is experienced by the angle of attack  $\psi$ . The trailing wheelset moves inside the curve for (a), and stays in the centred position for (b); in both scenarios the angle of attack is negative.



**Fig. 22.** Example 2: a vehicle traversing a curve (wheelsets of the leading bogie).

**Table 15.** Wheelsets attitudes.

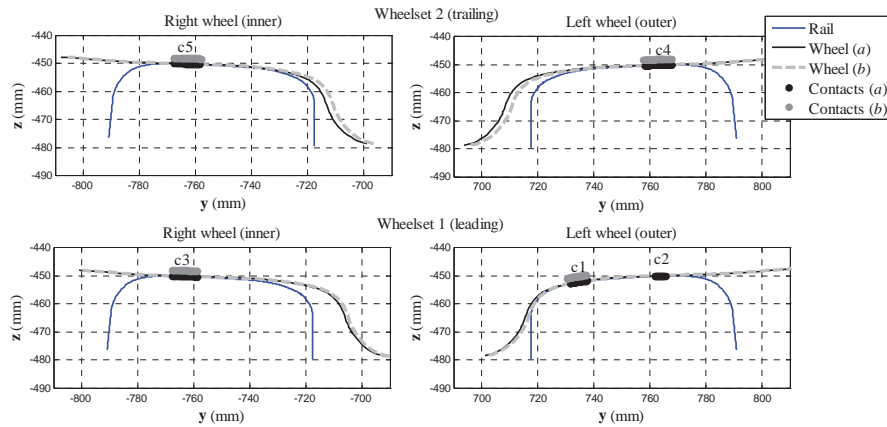
	(a) Dry surfaces	(b) $\mu=0.4$	% $\Delta$ respect dry
Leading wheelset	$y_1 = 4.73$ mm	$y_1 = 5.82$ mm	23 %
	$\psi_1 = 0.26$ mrad	$\psi_1 = 0.52$ mrad	100 %
Trailing wheelset	$y_2 = -2.39$ mm	$y_2 = 0.04$ mm	100 %
	$\psi_2 = -0.59$ mrad	$\psi_2 = -0.44$ mrad	25 %

The result of this simulation could describe a generic case of a railroad vehicle traversing a curve. Fig. 23 represents the contact patches generated in the wheel-rail contact for the wheelsets of the leading bogie. Their main characteristics are summarized in Table 16. The number and shape of contact patches depend on the relative position of the wheelset in the track and it is very sensitive to the wheel-rail relative position.

For the parameters used in the calculation, in this case the leading wheelset for (a) develops three contact patches (two on the outer side and one on the inner side) whereas for (b), there are only two (one at each side). This configuration is the result of the relative position of the wheelset respect to the track, which is the solution of the equilibrium position of the solids of the vehicle to the applied external forces (kinematics and wheel-rail contact forces).

The wheelset attitude in (a) is a situation where the load is being transferred from one contact patch to the other. In (b), where the lateral displacement is greater, the load has completely been transferred to the contact patch near the wheel flange fillet. This different contact configuration will affect the wear estimation.

For the trailing wheelset the configuration is very close to a centred wheelset. Even though the lateral displacement is different for (a) and (b), the configuration of the contact is very close.

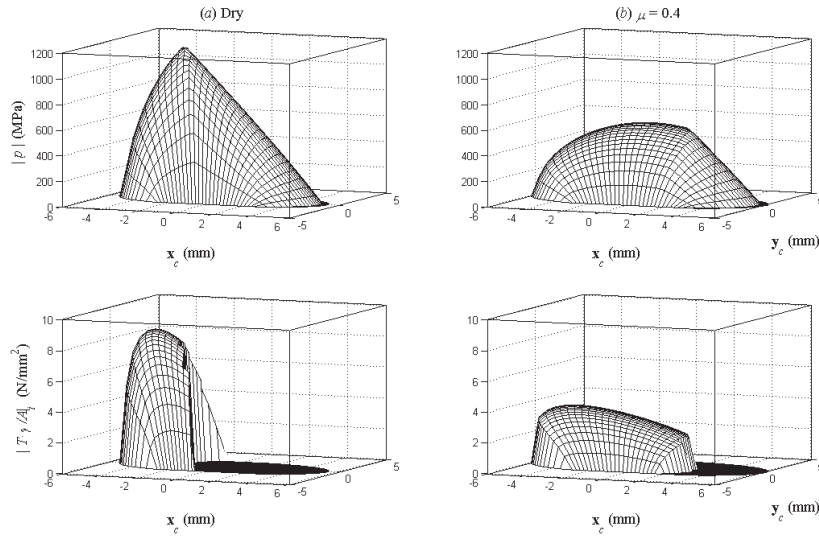


**Fig. 23.** Schematic representation of the attitude of the two wheelsets of the leading bogie of the vehicle. The two quasistatic positions and contact patches are plotted together for (a) variable COF and (b) constant COF.

**Table 16.** Summary of the results of the contact (\*a null value of  $T\gamma/A$  means that the whole contact patch is in adhesion).

				(a) dry surfaces	(b) $\mu=0.4$	$\Delta$ respect dry (%)
Leading wheelset	Left	Contact 1	$a \cdot b$ (mm)	6.33 · 2.62	6.41 · 3.04	--
			$p_{z0}$ (MPa)	1615.0	1497.0	-7.3
			$F_x$ (kN)	27.8	20.9	-24.8
		$F_y$ (kN)	6.6	5.7	-14.2	
		$T\gamma/A$ (N/mm <sup>2</sup> )*	6.8	2.8	-58.7	
		$a \cdot b$ (mm)	2.51 · 1.39	--	--	
	Contact 2	$p_{z0}$ (MPa)	546.0	--	--	
		$F_x$ (kN)	0.2	--	--	
		$F_y$ (kN)	0.2	--	--	
	Right	Contact 3	$T\gamma/A$ (N/mm <sup>2</sup> )*	0.0	--	--
			$a \cdot b$ (mm)	5.93 · 3.98	5.90 · 4.04	--
		$p_{z0}$ (MPa)	1158.0	1137.0	-1.8	
$F_x$ (kN)		0.3	-0.4	-231.0		
$F_y$ (kN)		0.7	2.9	286.5		

Trailing wheelset	Left	Contact 4	$T\gamma/A$ (N/mm <sup>2</sup> )*	0.0	1.3	--
			$a \cdot b$ (mm)	6.07 · 4.24	6.00 · 4.49	--
			$p_{z0}$ (MPa)	1160.0	1101.00	-5.1
			$F_x$ (kN)	-4.5	-3.6	-19.4
			$F_y$ (kN)	-3.2	-2.3	-26.7
	$T\gamma/A$ (N/mm <sup>2</sup> )*	3.4	1.2	-63.0		
	Right	Contact 5	$a \cdot b$ (mm)	5.84 · 4.02	5.77 · 4.33	--
			$p_{z0}$ (MPa)	1123.00	1059.0	-5.7
			$F_x$ (kN)	5.0	3.3	-32.3
			$F_y$ (kN)	-4.8	-4.6	-4.8
$T\gamma/A$ (N/mm <sup>2</sup> )*			3.3	1.1	-66.3	



**Fig. 24.** Tangential pressure and the local  $T\gamma/A$  distributions on the contact 1.

Finally, contact 1 obtained for the two hypotheses is compared. Fig 24 represents the tangential stress distribution and the energy dissipated in the contact patch as a wear indicator. Although the maximum normal pressure is very close for both cases, the maximum tangential pressure is 24% smaller for case (b). This is because the COF is less for (b) than for (a). Furthermore, the energy dissipated is different for both patches. The wear estimation offered by the constant COF is 58% less than variable the COF. In both scenarios, the whole contact patch is in the mild regime.

The results of this example show that the consideration of different friction functions to model the tangential problem leads to different motion of the wheelsets on the track (although they follow the same trend) and, especially, different wear patterns on the wheel and rail profiles.

## 7 Discussion

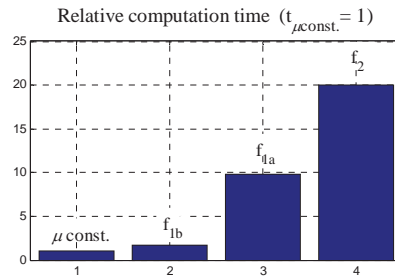
In this work, numerical methods to model the tangential problem with variable friction have been studied. An improvement has been added to fit experimental friction data, which is the inclusion of the reduction of the initial slope. Different friction functions have been tested and the friction parameters that define those functions have been identified from experimental measurements.



When studying a contact subjected to shear forces there is a lot of scatter, especially in the presence of contaminants. However, the experimental creep curves taken from published references seem consistent compared with previous work and reproduce the expected behaviour for variable friction. Therefore, the parameters identified from these curves are expected to offer a better simulation than a simple estimation or just the consideration of a single value for the coefficient of friction. In this line, more experimental measurements are required to improve the accuracy in the estimation of the friction parameters, covering different surface contaminants and contact conditions (pressure, rolling velocity, room temperature).

Different friction functions have been tested: two friction functions depending on three parameters (exponential function  $f_{1a}$  and piecewise function  $f_{1b}$ ) and a friction function depending on four parameters  $f_2$ . When possible, the function with a smaller number of parameters has been used: i.e in the case of dry contacts, a friction function with three parameters was enough, but for the case of oil, a friction function depending on an extra parameter was required. This was done for the sake of efficiency.

Fig. 25 shows the relative computation time for the different friction functions; it corresponds to the computation time of a Fastsim run (with  $30 \times 30$  divisions of the area of contact), using the friction functions considered in this paper. The differences are due to the procedure required to solve the system of non-linear equations. The computation time for  $f_2$  is much greater than for any function  $f_1$ . Comparing  $f_{1a}$  and  $f_{1b}$ , in Section 5 it has been shown that both functions produce very similar results and can be used in the same conditions. However  $f_{1b}$  involves a much lower computational cost because it is a linear approximation of a non-linear function. Therefore, when three friction parameters are required it is advisable to use  $f_{1b}$ . With this function, the computational cost of variable coefficient of friction compared to constant coefficient of friction is only 1.7 times greater, whereas it is 10 times greater for  $f_{1a}$  and 20 times greater for  $f_2$ . The function  $f_2$  when used to model lubricated contacts reproduces the Stribeck curve.



**Fig. 25.** Relative computation time with the different algorithms, taking  $t_{\mu const.} = 1$ .

In the case of dry surfaces or in the presence of water or oil in the interface, the effect of the pressure on the friction parameters and slope reduction has been investigated. Although the measurements are consistent, possibly more experimental work is required to establish a clear relation between the pressure and the shear behaviour. Nevertheless, the consideration of the dependence of the friction on the pressure does not involve an increase in computational cost and the results presented in this work can be used as a first approximation.

For the twin disc geometry, the implication of the surface contamination on wear has also been shown. The available USFD wear law is only valid for dry contacts, so for the presence of a surface contaminant, a new wear law is needed. Furthermore, the consideration of a different contaminant changes the value of the COF which gives new estimation of the tangential forces and slip. As an example, lubrication greatly reduces the energy dissipation in the contact patch. Furthermore, the use of USFD for dry contacts would overestimate the wear rate for the presence of oil.

Another aspect to highlight is the adaptation from the geometry of the twin disc (which is a two-dimensional problem) to the geometry of the wheel rail contact (which is a full 3D problem). Special care has been taken in order to ensure that the values extracted from the experimental measurements can be applied to the wheel-rail contact.

Finally, two examples have been presented for the wheel-rail geometry. The results show the differences between the classic approach using constant COF and the modelling of variable COF. Both approaches offer different estimation in the interaction forces and wear.

As a future work, this algorithm of Fastsim with variable coefficient of friction and slope reduction must be tested in the field of dynamic simulation. Constant and variable friction approaches can be compared. For the case of variable friction, different conditions of the wheel-rail interface can be modelled such as dry surfaces, moisture on the wheel tread and the presence of oil in a flange contact. On the experimental field, more testing is required to evaluate the effect of the contaminants on the wear rate.

## 8 Conclusions

- Different tangential contact models considering Fastsim with variable COF have been studied. An improvement in the slope reduction for small creepages has been considered to be able to reproduce experimental measurements.
- Different friction functions have been used to model the local behaviour of a point in the contact. A new friction function, which resembles the Stribeck curve, has been defined to model increasing creep curves after saturation. Depending on the shape of the creep curve, an adequate friction function, using the minimum number of parameters, has been chosen. Their application and their computational cost have been presented.
- A new procedure has been presented to extract the friction parameters and slope reduction from twin disc experimental measurements.
- The parameters extracted from the twin disc geometry for a steel-steel contact with a surface condition (presence/absence of a contaminant and its dependence on the pressure) have been adapted to be used with the wheel-rail geometry, with the same steel-steel contact and surface condition.
- The effect of the contaminants on wear estimation is analysed. The available wear laws are valid for dry conditions in the interface. More experimental work is required to define suitable wear laws for non-dry contacts.

- Two examples have been presented to compare the solution between the classic approach (constant friction) and a variable friction approach. The difference can reach values greater than 200% in contact forces and 60% in wear estimation for dry contacts.

## Acknowledgments

This research was supported by Universitat Politècnica de Valencia (Spain).

## References

- [1] J. Evans, M. Berg, Challenges in simulation of rail vehicle dynamics. *Vehicle System Dynamics* 47 (2009) 1023-1048.
- [2] J.G. Giménez, A. Alonso, E. Gomez, Introduction of a friction coefficient dependent on the slip in the FastSim algorithm. *Vehicle System Dynamics* 43 (2005) 233-244.
- [3] J.J. Kalker, A fast algorithm for the simplified theory of rolling contact. *Vehicle System Dynamics* 11 (1982) 1-13.
- [4] T. Ohyama, Tribological studies on adhesion phenomena between wheel and rail at high speeds. *Wear* 144 (1991) 263-275
- [5] E. Magel, Y. Liu, Study of friction - Measurement analysis and practical implications for the wheel/rail contact. 8th International Conference on Contact Mechanics and Wear of Rail/Wheel Systems, Firenze, Italy, September 15-18, 2009.
- [6] M. Ertz, F. Bucher, Improved creep force model for wheel/rail contact considering roughness and temperature, *Vehicle System Dynamics. Supplement* 37 (2002) 314-325.
- [7] Z.Y. Shen, J.K. Hedrick, J.A. Elkins, A comparison of alternative creep force models for rail vehicle dynamics analysis. Proceedings of the 8<sup>th</sup> IAVSD Symposium held at MIT, Cambridge (MA), Aug 1983. 591-605.
- [8] K. Knothe, A. Theiler, Normal and tangential contact problem with rough surfaces. 2<sup>nd</sup> Mini-Conference on Contact Mechanics and Wear of Rail/Wheel Systems, Budapest, July 29-31, 1996.
- [9] F. Bucher, K. Knothe, A. Theiler, Normal and tangential contact problem of surfaces with measured roughness, *Wear* 253 (2002) 204-218.
- [10] O. Polach, Influence of locomotive tractive effort on the forces between wheel and rail. *Vehicle System Dynamics* 25 (2001) 7-22.
- [11] O. Polach, Creep forces in simulations of traction vehicles running on adhesion limit. *Wear* 258 (2005) 992-1000.
- [12] J.B. Nielsen, A. Theiler, Tangential contact problem with friction coefficients depending on sliding velocity. Proceedings of Second Mini-Conference on Contact Mechanics and Wear of Rail/Wheel Systems. Budapest (1996) 44-51.
- [13] J. Piotrowski, Kalker's algorithm fastsim solves tangential contact problems with slip-dependent friction and friction anisotropy. *Vehicle System Dynamics* 48 (2010) 869-889.
- [14] D.T. Eadie, M. Santoro, J. Kalousek, Railway noise and the effect of top of rail liquid friction modifiers: changes in sound and vibration spectral distributions in curves. *Wear* 258 (2005) 1148-1155.
- [15] A.D. Monk-Steel, D.J. Thompson, F.G. De Beer, M.H.A. Janssens, An investigation into the influence of longitudinal creepage on railway squeal noise due to lateral creepage. *Journal of Sound and Vibration* 293 (2006) 766-776.
- [16] G. Xie, P.D. Allen, S.D. Iwnicki, A. Alonso, D.J. Thompson, C.J.C. Jones, Z.Y. Huang, Introduction of falling friction coefficients into curving calculations for studying curve squeal noise. *Vehicle System Dynamics* 44 (2006) 261-271.
- [17] A. Rovira, A. Roda, M.B. Marshall, H. Brunskill, R. Lewis, Experimental and numerical modelling of wheel-rail contact and wear, *Wear* 271 (2011) 911-924
- [18] J. Williams, *Engineering Tribology*, Cambridge University Press, Cambridge, 2005.

- [19] J.J. Kalker, Survey of wheel-rail rolling contact theory. *Vehicle System Dynamics* 5 (1979) 317-358.
- [20] D.I. Fletcher, J.H. Beynon, Development of a machine for closely controlled rolling contact fatigue and wear testing. *Journal of Testing and Evaluation* 28 (2000) 267-275.
- [21] E.A. Gallardo-Hernandez, R. Lewis, Twin disc assessment of wheel/rail adhesion. *Wear* 265 (2008) 1309-1316.
- [22] K.L. Johnson, *Contact Mechanics*. Cambridge University Press, Cambridge, 1987.
- [23] J.J. Kalker, *Three-Dimensional Elastic Bodies in Rolling Contact*, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht/Boston/London, 1990.
- [24] R. Lewis, E.A. Gallardo-Hernandez, T. Hilton, T. Armitage, Effect of oil and water mixtures on adhesion in the wheel/rail contact. *Proc. IMechE part F: Journal of Rail Rapid Transit* 223 (2009) 275-283.
- [25] O. Arias-Cuevas, Z. Li, R. Lewis, E.A. Gallardo-Hernandez, Rolling-sliding laboratory tests of friction modifiers in dry and wet wheel-rail contacts. *Wear* 268 (2010) 543-551.
- [26] F. Bucher, A.I. Dmitriev, M. Ertz, K. Knothe, V.L. Popov, S.G. Psakhie, E.V. Shilko, Multiscale simulation of dry friction in wheel/rail contact. *Wear* 261 (2006) 874-884.
- [27] D.T. Eadie, J. Kalousek, K.C. Chiddick, The role of high positive friction (HPF) modifier in the control of short pitch corrugations and related phenomena. *Wear* 253 (2002) 185-192.
- [28] D.T. Eadie, J. Kalousek. *Railway Age* (June 2001) 48-50.
- [29] R. Lewis, R.S. Dwyer-Joyce, Wear mechanisms and transitions in railway wheel steels. *Proc. IMechE part J: Journal of Engineering Tribology* 218 (6) (2004) 467-478.
- [30] T. Jendel, Prediction of wheel profile wear – comparisons with field measurements. *Wear* 253 (2002) 89-99.
- [31] N. Tassini, X. Quost, R. Lewis, R. Dwyer-Joyce, C. Ariaudo, N. Kuka, A numerical model of twin disc test arrangement for the evaluation of railway wheel wear prediction methods. *Wear* 268 (2010) 660-667.
- [32] W. Kik, J. Piotrowski, A fast, approximate method to calculate normal load at contact between wheel and rail and creep forces during rolling. *Proceedings of the Second Mini-Conference on Contact Mechanics and Wear of Wheel/Rail Systems*, ed. Zabory, TU Budapest (1996).
- [33] F. Braghin, R. Lewis, R.S. Dwyer-Joyce, S. Bruni, A mathematical model to predict railway wheel profile evolution due to wear. *Wear* 261 (2006) 1253-1264.
- [34] J. Sinclair, Friction Modifiers, in vehicle track interaction: identifying and implementing solutions. *IMechE Seminar*, February 17th, 2004.
- [35] A.A. Shabana, K.E. Zaazaa, J.L. Escalona, J.R. Sany, Development of elastic force model for wheel/rail contact problems. *Journal of Sound and Vibration* 269 (2004) 295-325.
- [36] R. Enblom, M. Berg, Simulation of railway wheel profile development due to wear – influence of disc braking and contact environment. *Wear* 258 (2005) 1055-1063.
- [37] J. Tunna, J. Sinclair, J. Perez, A review of wheel wear and rolling contact fatigue. *Proc. IMechE Vol. 221 Part F: J. Rail and Rapid Transit* (2007) 271-289.
- [38] S.A. Simson, C. Cole, Simulation of curving at low speed under high traction for passive steering locomotives. *Vehicle System Dynamics* 46 (2008) 1107-1121.
- [39] A. Matsumoto, Y. Sato, H. Ohno, Y. Suda, Y. Michitsuji, M. Komiyama, N. Miyajima, M. Tanimoto, Y. Kishimoto, Y. Sato, T. Nakai, Curving performance evaluation for active-bogie-steering bogie with multibody dynamics simulation and experiment on test stand. *Vehicle System Dynamics* 46 Supp. (2008) 191-199.
- [40] T.T. Vuong, P.A. Meehan, Wear transitions in a wear coefficient model. *Wear* 266 (2009) 898-906.
- [41] S. Iwnicki, *Handbook of Railway Vehicle Dynamics*, CRC/Taylor & Francis, 2006.
- [42] V.K. Garg, R.V. Dukkipati, *Dynamics of Railway Vehicle Systems*, Academic Press Canada, 1984.

# Experimental and numerical modelling of wheel-rail contact and wear

A. Rovira<sup>1\*</sup>, A. Roda<sup>1</sup>, M.B. Marshall<sup>2</sup>, H. Brunskill<sup>2</sup>, R. Lewis<sup>2</sup>

<sup>1</sup>Universidad Politecnica de Valencia, Dpto. de Ingenieria Mecanica. C. Vera s/n. E46022 Valencia. Spain

<sup>2</sup>University of Sheffield, Dep. of Mechanical Engineering. Mappin Street, S1 3JD Sheffield, UK

\*Corresponding author: Tel. +34 96 387 7007 Ext. 76263, fax: +34 96 387 7629. E-mail address: [anrocar@mcm.upv.es](mailto:anrocar@mcm.upv.es) (A. Rovira).

## Abstract

In the field of simulation of railroad vehicles, there are many numerical models to estimate the interaction forces between the wheel and rail. The main advantage of these models is that they can be used together with multi-body dynamics software to calculate the motion of a vehicle in real time. However, the result of these contact models is usually post-processed to estimate wear on the profiles and some hypotheses assumed by the contact models may be inadequate for wear analysis. This is the case when considering surface roughness, which is not introduced in the numerical models and makes wear prediction imprecise. In this work an experimental method based on the measurement of ultrasonic reflection is used to solve the contact problem, together with a FASTSIM (simplified theory of rolling contact) algorithm. This technique is suitable to deal with rough surfaces and gives a better approximation of the material behaviour. Wear is estimated by means of the energy dissipation approach ( $T \cdot \gamma$ ). Two different contacts are investigated, using wheel and rail profiles coming from unused and worn specimens. In order to obtain realistic results, special care is taken when locating the specimens to reproduce the same contact that appears between the wheel and the rail in the track.

KEYWORDS: Wheel-rail contact; surface roughness; ultrasound; wear modelling

## 1 Introduction

The likelihood of railway wheel wear occurring is rising, this is as a result of new specifications imposed on railway wheels that are leading to an increase in the severity of the wheel/rail contact conditions [1].

It is important that the wheel wear process can be modelled, as this enables improvements to be made to wheel design and materials in order to keep wear at a minimum. Excessive wear needs to be avoided as this can affect the dynamic behaviour of the railway vehicles, which will reduce the ride comfort, augment the cost for maintenance and replacement of wheels, increase the vehicle-track interaction forces that may have an impact upon the potential for derailment, and reduce the integrity of the wheel material [2]. There will also be negative effects on the track, increasing maintenance cost of rails and the infrastructure. Understanding of the wear rates will also help with planning regrinding schedules.

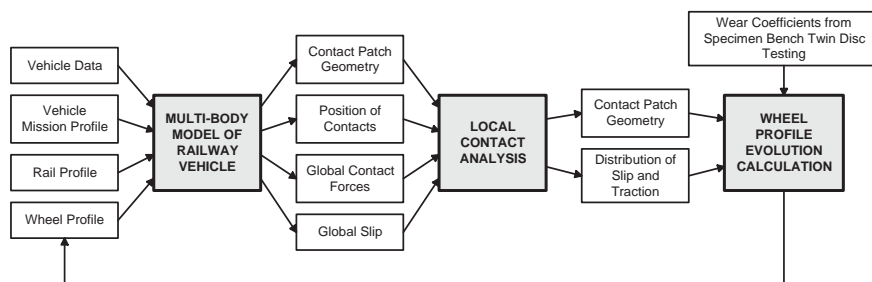


Fig. 1. Typical Wheel Wear Modelling Methodology.

Design tools have been developed that integrate vehicle dynamics and wear modelling to predict the evolution of wheel profiles [2-7]. These tools all have the same basic structure as outlined in

Fig. 1, although different multi-body dynamics software packages are used as well as local contact analysis formulations and wear models.

All three modelling elements have their own drawbacks. Of particular concern are the contact mechanics methods used and the approach to wear modelling. Telliskivi and Olofsson [8,9] studied different contact mechanics methods used in wear simulations, and concluded that they significantly affected the accuracy. Further, the outputs from the numerical simulations of contacts do not take the roughness into consideration, which could be a significant cause of inaccuracy. In this work the limitations of this part of the wear modelling procedure are investigated by comparing numerical contact outputs with experimentally measured contact pressure distributions.

A non-destructive technique is used to explore the wheel-rail contact. As in a previous paper [10], the ultrasound technique is applied. A piece of rail and a piece of wheel are pressed together to get a contact. For a given normal force and known surface characteristics, the normal stress distribution can be calculated. This distribution together with creepage hypothesis is the input for the tangential problem, where the FASTSIM algorithm is used [11,12].

Wear is estimated through the energy dissipation in the contact patch (T-gamma approach). From the energy dissipation and depending on the wear regime [6], wear rate (mass loss) in the wheel and the rail is calculated. Finally, assuming that the wheel is rolling along the  $x$  axis, the damage on the profiles (mm per rolled metre) is obtained. Those magnitudes calculated for a real engineering surface are compared with the predicted values given by the numerical models generally used in railroad simulation.

## 2 Wheel-Rail Wear and Contact Modelling

The calculation of the forces arising in the wheel-rail contact, along with the estimation of wear, is divided into three steps (Fig. 2). First of all, the problem of a wheel normally loaded against a rail is solved, and the geometry of the contact patch and the associated normal pressure distribution is determined. There are a number of different ways of doing this, including experimental, analytical and numerical techniques. In this study, the normal problem will be solved in two different ways; using an experimental ultrasonic technique (Section 2.1), as well as by numerical methods (Section 2.2). The numerical approach applied here is typical of that applied by many researchers [2-7]. Measured contact profiles are loaded together and the area of interpenetration calculated. Following on from this an equivalent ellipse is fitted, and an assumed Hertzian contact determined.

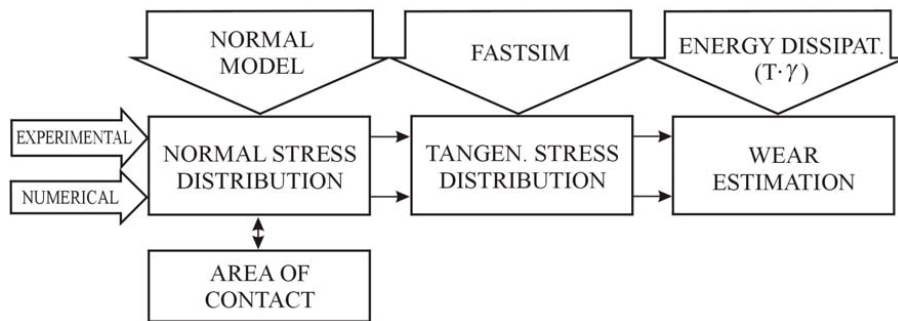


Fig. 2. Procedure followed to calculate the wheel-rail forces and wear estimation.

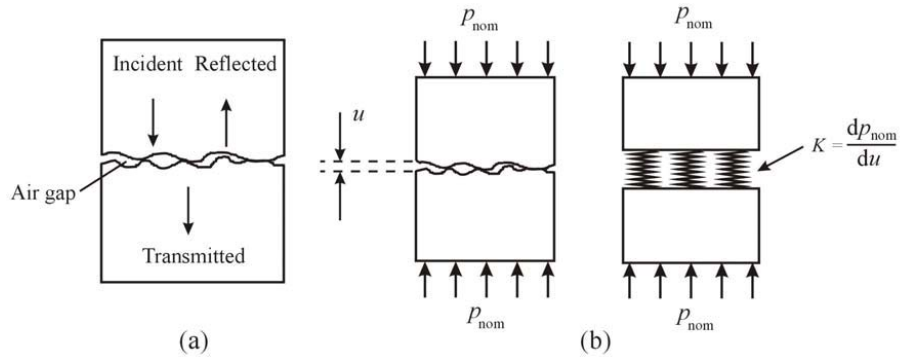
The determined normal contact condition together with the kinematic situation under investigation is used to solve the tangential problem. In this case, the FASTSIM algorithm [11] as developed by Kalker (section 2.3) is used. Two different calculations are performed; one using the experimentally generated wheel rail contact data, with the other using the numerical results. The stress fields and the adhesion/slip areas will be compared for both calculations.

Finally, with the normal and tangential stress fields in conjunction with the kinematic information, wear of the profiles is estimated. When estimating the wear, an energy dissipation criterion will be used in the contact patches (see for example [4,6]), and is detailed in Section 6.

## 2.1 Ultrasound theory

Ultrasound (sound greater in frequency than 20 kHz) is widely used in the field of non-destructive testing to inspect components for the presence of cracks and other subsurface defects. More recently, the measurement of ultrasonic reflection from a rough surface contact has been used to determine contact pressure [10,13,14]. This technique has been applied to map the contact pressure distribution in a variety of machine element contacts, such as interference fits [15] and bolted joints [16], and has proven to be a successful non-intrusive technique.

The technique is based on the reflection of ultrasonic waves from a partially contacting interface (Fig. 3a). When viewed on a micro-scale real engineering surfaces consist of micro-asperities. If two surfaces are pressed together, asperities join together to form discrete junctions surrounded by air gaps. When an ultrasonic wave is incident at such an interface, provided that it is long in wavelength compared to the scale of the asperities, the interface as whole behaves as a reflector [17]. The ultrasonic signal is transmitted through the asperity contacts and reflected by the air gaps. In this way, a reflection coefficient can be defined for an interface, and is the fraction of ultrasound incident that is reflected from it [17].



**Fig. 3.** Ultrasound and interfaces: (a) incident, transmitted and reflected waves. (b) Spring model representation.

Kendall and Tabor [18] investigated this case, and proposed that the behaviour of the asperity contacts in response to the sound wave is analogous to that of a spring (Fig. 3b). The interface when described using the spring model has a stiffness  $K$  (expressed per unit area), which is defined as the change in nominal contact pressure  $p_{nom}$  required to cause unit approach  $u$  of the mean lines of separation of the two surfaces. The reflection coefficient was related to the interfacial stiffness, and for two similar materials in contact reduces to:

$$|R| = \frac{1}{\sqrt{1 + (2K / \omega z)^2}} \quad (1)$$

where  $\omega$  is the angular frequency ( $= 2\pi f$ ) of the ultrasonic wave, and  $z$  the acoustic impedance (the product of wave speed and density for the material). Drinkwater et al. [13] investigated the applicability of the spring model, and showed that the interfacial stiffness was strongly dependent on the interface load, and that the model could be applied successfully up to frequencies of 50 MHz. It was also noted that the interfacial stiffness is not only a function of the applied contact pressure, but also a function of the size, number, and distribution of the asperity contacts. Therefore, there is no single relation between stiffness and contact pressure, and a specific calibration is required for the contacting pair under investigation [19,20].

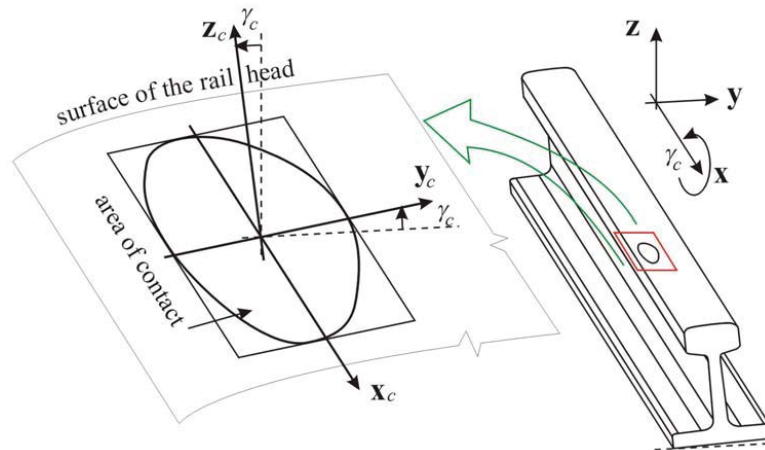
## 2.2 Contact Modelling and Reference Frames

Different numerical approaches exist to estimate the normal force for a given contact patch [21]. Hertz model [22] is a very fast and simple way to estimate the normal force in a contact. It is widely used in the field of railway simulation due to its simplicity [23,24]. The geometry of the bodies in the vicinity of the contact must be described by second degree polynomials. As a consequence, the contact area is an ellipse with semi-axes  $a$  and  $b$  in the rolling (longitudinal) and lateral directions, respectively. The values of  $a$  and  $b$  depend on the local curvatures of the bodies in the point of contact.

Together with its simplicity, the main advantage of the Hertz method is that if the hypotheses are completely fulfilled, there is an analytical solution for the contact problem. However, if the assumptions are not fulfilled, the result may not be precise. One of the biggest limitations is the shape of the contact area. It must be elliptic, and its shape depends on the local values of the curvatures of the two bodies in the point of contact. Two alternatives appear to overcome this drawback; the approximation of a non-elliptic contact zone by a set of ellipses as used by Pascal & Sauvage [25], and a method based on virtual interpenetration (Kik & Piotrowsky [26,27] and Ayasse & Chollet [28,29])

The numerical method used in this paper to solve the normal contact problem is based on the virtual interpenetration. The profiles in the interface are allowed to interpenetrate, and the interaction force is a function of the indentation between the profiles. The area of contact is obtained from the interpenetration area as explained in [26]. In this work, an ellipse is fitted in the contact area and the normal force is calculated for this ellipse using the Hertz theory. This is known as the equivalent ellipse method. The computational effort using this method is very low which is very important in the field of railway simulation.

There is a fundamental difference between the contact ellipse calculated using Hertz and the equivalent ellipse. The former uses the radii of curvatures at the geometrical point of contact as the input data. As the wheel and rail profiles come from the digitalisation of real ones, interpolation and smoothing strongly influence the local geometry. Therefore, the calculated radii of curvatures at a point are biased by these procedures. Nevertheless, the global geometry is not influenced and, consequently, the equivalent ellipse method is little affected [21].



**Fig. 4.** Reference frames used: track reference frame ( $xyz$ ) and contact reference frame ( $x_c y_c z_c$ ).

To model the contact patches two frames of reference are used: one associated to the track, and another associated to the contact, as seen on Fig. 4. In the track reference frame  $xyz$ ,  $x$  is the longitudinal axis, indicating the forward direction,  $y$  is parallel to the plane of the track and to the right, and  $z$  is vertical and upwards. The  $x$ - and  $y$ -axes define the plane of the track.



There is a contact reference frame associated to each contact. It is defined from the track reference frame through a rotation around the longitudinal axis of the track of value  $\gamma_c$ .  $\gamma_c$  is the average value of the conicity for the whole contact patch. The area of contact is placed inside a rectangle aligned with the  $\mathbf{x}_c$ - and  $\mathbf{y}_c$ - axes. The centre of the rectangle is taken as the origin of the reference frame.

### 2.3 *Fastsim*

The FASTSIM algorithm [11,12] is used to solve the tangential problem. It was developed by Kalker as a linear version of the full theory of elasticity implemented in CONTACT [30]. The basic idea of FASTSIM is that the relation between elastic displacements  $\mathbf{u}$  and stresses  $\mathbf{p}$  in the contact plane is linear, where  $L$  is called the flexibility coefficient:

$$\mathbf{u} = L\mathbf{p} \quad (2)$$

The problem is solved in two steps: First of all, the value of the flexibility coefficient for each area of contact is obtained. Secondly, for a given normal stress distribution and creepages in the contact, the algorithm is applied and the tangential stress distribution is determined.

In the first step, the whole area of contact is supposed to be in adhesion (this might be a restriction in the applicability of FASTSIM). The tangential pressure distribution is integrated, giving the values of  $F_x$  and  $F_y$  in the longitudinal and lateral directions, respectively. These values are equated to the solution of the full elastic problem given by CONTACT, and the value of the flexibility coefficient can be solved.

Solving the full elastic problem requires a high computational cost. If a regular figure is assumed, the magnitudes can be non-dimensionalised and the results can be tabulated. The natural choice for the shape of the area of contact is an ellipse. Given the ratio between the semiaxes of the ellipse  $a/b$  the problem is solved by interpolating in a table. Some other authors propose different regular figures to fit non-elliptic patches [31].

Kalker distinguishes three flexibility coefficients for an elliptic area ( $L_1$ ,  $L_2$  and  $L_3$ ) in order to express the linear relation in longitudinal and lateral displacements and spin rotation, respectively:

$$L_1 = \frac{8a}{3c_{11}G} \quad L_2 = \frac{8a}{3c_{22}G} \quad L_3 = \frac{\pi a \sqrt{a/b}}{4c_{23}G} \quad (3)$$

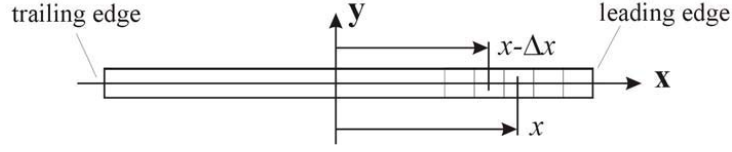
where  $c_{ij}$  are the values of Kalker's coefficients for an elliptic area, and  $G$  the shear modulus of the material. The values of  $c_{ij}$  can be obtained from [30].

In the second step, the tangential stress distribution is calculated. Two inputs are required by FASTSIM: the normal stress distribution  $p_z$  and the creepages (longitudinal ( $\nu_x$ ), lateral ( $\nu_y$ ) and spin ( $\varphi$ )). The normal stress distribution is usually calculated with Hertz's model.

For a given element in the contact area, the kinematic equation for the stationary state is:

$$\frac{\mathbf{s}(x, y)}{V} = \begin{Bmatrix} \nu_x - \varphi \cdot y \\ \nu_y + \varphi \cdot x \end{Bmatrix} - \frac{\partial \mathbf{u}(x, y)}{\partial x} \quad (4)$$

where  $\mathbf{s}$  is the slip in the contact area,  $V$  the longitudinal velocity of the vehicle and  $\nu_x$ ,  $\nu_y$  and  $\varphi$  the longitudinal, lateral and spin creepages, respectively.



**Fig. 5.** Longitudinal strip of the contact area.

The area of contact is partitioned into slices parallel to the  $x$  axis (or longitudinal strips) as shown in Fig. 5. The algorithm FASTSIM divides each strip into the same number of elements of length  $\Delta x$ . Using the relation (2) and the values of the flexibility coefficients, the previous equation yields:

$$\frac{\mathbf{s}(x, y) \Delta x}{V L} = \begin{Bmatrix} \frac{v_x}{L_1} - \frac{\varphi \cdot y}{L_3} \\ \frac{v_y}{L_2} + \frac{\varphi \cdot x}{L_3} \end{Bmatrix} \Delta x + [\mathbf{p}(x - \Delta x, y) - \mathbf{p}(x, y)] \quad (5)$$

Assuming adhesion ( $\mathbf{s} = \mathbf{0}$ ) the tangential stress on an element can be calculated as:

$$\mathbf{p}^A(x - \Delta x, y) = \mathbf{p}(x, y) - \begin{Bmatrix} \frac{v_x}{L_1} - \frac{\varphi \cdot y}{L_3} \\ \frac{v_y}{L_2} + \frac{\varphi \cdot x}{L_3} \end{Bmatrix} \Delta x \quad (6)$$

This formula is recursively applied, starting from the leading edge, where the tangential stress is assumed to be zero, to the trailing edge. The superindex 'A' indicates that is calculated under adhesion. This hypothesis is checked using the Coulomb's law, where the coefficient of friction  $\mu$  is considered a constant and known value

$$\sqrt{(p_x^A(x - \Delta x, y))^2 + (p_y^A(x - \Delta x, y))^2} \leq \mu p_z(x - \Delta x, y) \quad (7)$$

where  $p_z$  is the normal pressure on the cell  $(x - \Delta x, y)$ . Otherwise the surfaces must slip and the tractive force follows the curve  $\mu p_z(x, y)$ . In the case of slip, the stress at the point  $(x - \Delta x, y)$  equals:

$$p_k^S = \mu p_z \frac{p_k^A}{|\mathbf{p}^A|} \quad (8)$$

with  $k = x$  (longitudinal),  $y$  (lateral), and the superindex 'S' stands for slip. Therefore, the tangential pressure at a cell is  $\mathbf{p} = \mathbf{p}^A$  if there is adhesion or  $\mathbf{p} = \mathbf{p}^S$  if there is slip.

The non-dimensional slip is defined as

$$\gamma(x, y) = \frac{\mathbf{s}(x, y)}{V} \quad (9)$$

In the case of adhesion  $\gamma = \mathbf{0}$ .  $\gamma$  can be calculated in the slip zone, using eqs. (5) and (6), as:

$$\gamma(x - \Delta x, y) = \frac{\mathbf{s}(x - \Delta x, y)}{V} = \frac{L}{\Delta x} (\mathbf{p}^S(x - \Delta x, y) - \mathbf{p}^A(x - \Delta x, y)) \quad (10)$$

where  $L = L_1$  for the equation in  $x$ , and  $L = L_2$  for the equation in  $y$ .

The energy dissipated in the contact per unit area is used as a wear indicator. It is calculated for each element as

$$\left(\frac{T\gamma}{A}\right)(x, y) = \mathbf{p}(x, y) \cdot \boldsymbol{\gamma}(x, y) = p_x(x, y) \gamma_x(x, y) + p_y(x, y) \gamma_y(x, y) \quad (11)$$

For each value of  $T\gamma/A$  the corresponding wear rate ( $W_R$ ) is calculated in ( $\mu\text{g}/\text{m}/\text{mm}^2$ ). This is achieved using the wear coefficients presented in Table 1, obtained for R8T wheel and 900A rail materials and extracted from [32]. Three regimes are possible, namely *mild*, *severe* and *catastrophic* regimes.

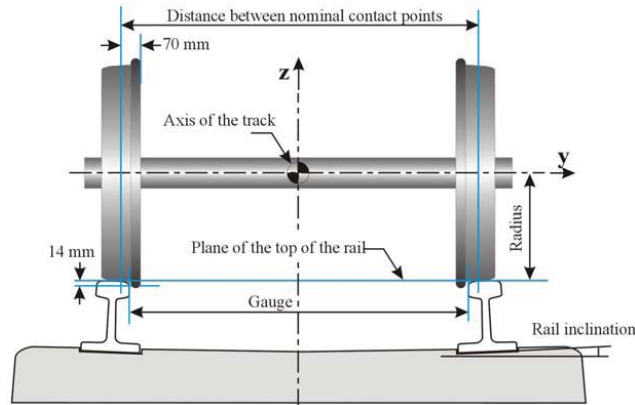
**Table 1.** Wear regimes and coefficients for R8T wheel and 900A rail materials.

Regime	$T\gamma/A$ ( $\text{N}/\text{mm}^2$ )	Wear Rate ( $W_R$ ) ( $\mu\text{g}/\text{m}/\text{mm}^2$ )
$K_1$ ( <i>mild</i> )	$T\gamma/A \leq 10.4$	$5.3 T\gamma/A$
$K_2$ ( <i>severe</i> )	$10.4 < T\gamma/A \leq 77.2$	55.0
$K_3$ ( <i>catastrophic</i> )	$77.2 < T\gamma/A$	$55.0 + 61.9 (T\gamma/A - 77.2)$

### 3 Test Specimens and Geometry

#### 3.1 Wheel and rail relative position

The study of the wheel-rail contact is a complex problem because of the nonlinearity of the profiles. For a given set of wheel and rail profiles, the number, position, size and shape of the contact area depends on the relative position of the wheel-set with respect to the rail [24].



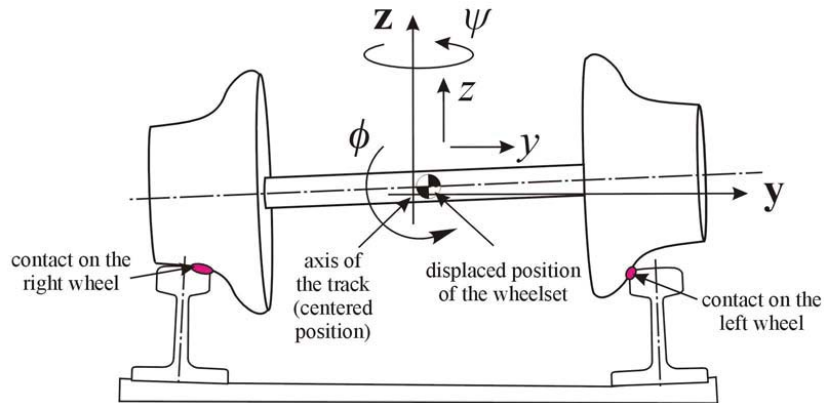
**Fig. 6.** Position of the wheel-set centred on the track.

Fig. 6 shows the wheel/rail contact with respect to the frame of reference of the track. It corresponds to the centred position of the wheel-set. The rail is tilted at an angle equal to the rail slant of the sleeper. Both rail profiles are separated by a distance equal to the gauge, measured at a distance 14 mm below the top plane of the rails (this distance may be incremented for worn rails). The nominal contact point of the wheel is set at 70 mm from the inner face. Taking this point as an origin, both wheel profiles are mounted at fixed distance. The geometric parameters used to set the profiles in the track are specified in Table 2.

**Table 2.** Geometric parameters that define the contact geometry.

Parameter	Value
Rail inclination	1:20
Gauge	1435 mm
Radius	450 mm (new) 420 mm (worn)
Distance between contact points	1500 mm

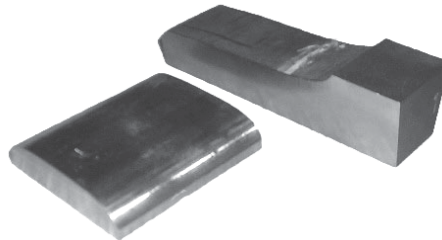
As shown in Fig 7, the position of the wheel-set with respect to the track is modelled with a set of four coordinates: lateral ( $y$ ) and vertical displacement ( $z$ ) of the centre of mass of the wheel-set, and roll ( $\phi$ ) and yaw ( $\psi$ ) angles (rotation around the longitudinal and vertical axes respectively). Lateral and vertical displacements are measured in the track reference frame  $xyz$ . Yaw and roll rotations are the Euler angles in the sequence Z-X. This is a typical choice in railroad simulation.



**Fig. 7.** Coordinates and contact patches on an arbitrary position of the wheel-set respect to the track.

### 3.2 Specimens

Two pairs of profiles were used to analyse new and worn wheel/rail contacts; the new profiles were in a factory as machined condition, and the worn profiles taken from heavily worn in service components (these are the same specimens used previously in [10]). As shown in Fig. 8, the specimens were cut from actual wheel and rail sections. The rail specimen contained the head of the profile, whereas the wheel specimen was cut containing the tread and the flange fillet.



**Fig. 8.** Rail and wheel specimens for new profiles.

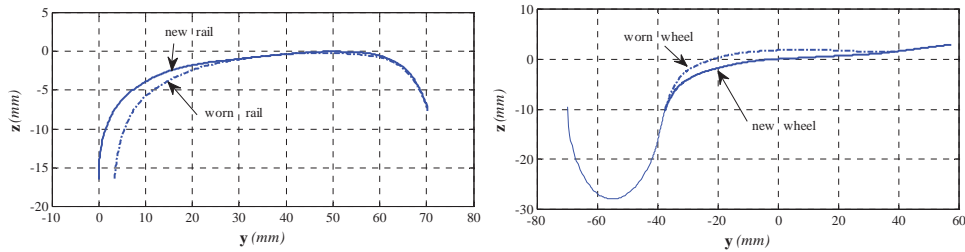
Surface roughness values were measured from the samples and are stated in Table 3. The new set of profiles is still complete with machining marks (turning), giving a rough surface. A combined roughness has been calculated for each pair, and unsurprisingly the lower value is found for the worn components. In this case, wear has especially reduced the worn rail roughness.

**Table 3.** Wheel-rail specimen surface roughness values.

Wheel-rail	Specimen component	Mean surface roughness $R_a$ ( $\mu\text{m}$ )
New	Wheel ( $w$ )	2.07 (transversal) 1.80 (longitudinal)
	Rail ( $r$ )	11.15
Worn	Wheel ( $w$ )	0.98
	Rail ( $r$ )	1.10

### 3.3 Profiles

As shown in Figure 9, the wheel and rail profiles for the new and worn sets have been digitised using a Miniprof device. Clearly visible in the Figure, is the effect wear has had on the profile of the worn specimens. In the case of the worn rail, wear has reduced the width of the head giving a wider gauge and allowing for a greater lateral displacement of the wheel-set without flanging. The rail crown is also visibly flattened. For the worn wheel, its profile is hollowed, giving a lower conicity on the tread and a *false flange* on the outer face. These effects are critical, as the shape of the profiles will condition the position and the shape of the contact area.

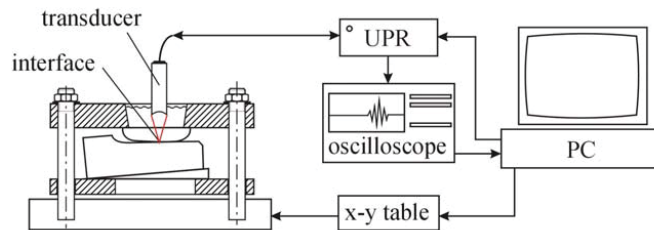


**Fig. 9.** Comparison of new and worn profiles. The flange and back face of the wheel are plotted as a reference (thin line)

## 4 Experimental Method and Results

### 4.1 Apparatus, Specimen Alignment and Methodology

The experimental set-up is shown schematically in Fig. 10, and consisted of a 10 MHz focusing transducer, a UPR (ultrasonic pulser-receiver), a digital oscilloscope, a control PC, a scanning table (automated with x, and y-stepper motors) and a load frame.



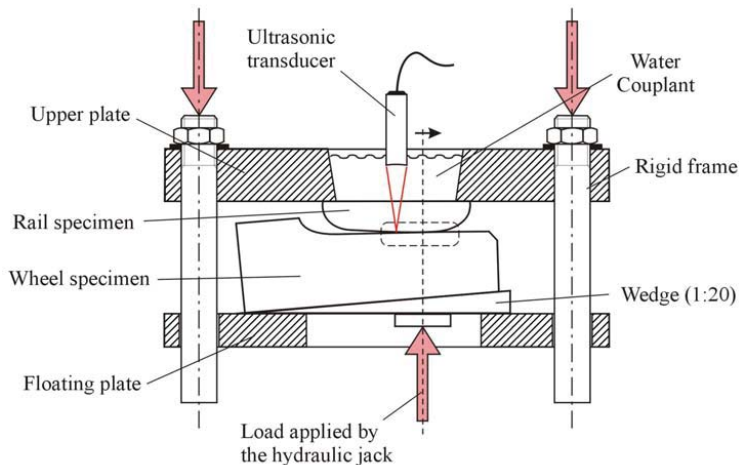
**Fig. 10.** Schematic of the ultrasonic pulsing receiving apparatus and scanning system.

As shown in the Figure, the wheel and rail specimens are loaded together in the frame, and the ultrasonic transducer positioned in a distilled water bath above them (air bubbles in the water would scatter the sound signal). The transducer has a known focal length of 76.2 mm in water, and is positioned in the water bath so as to focus the ultrasonic signal onto the interface of

interest. It should be noted that this is achieved by taking into consideration refraction effects at the boundary between the upper surface of the rail specimen and the water bath [10]. Further to this function, the water also couples the ultrasound to the specimens; as ultrasonic sound waves are rapidly attenuated in air.

A control signal is emitted from the PC, and in turn triggers the UPR to electrically excite the transducer. In response to the excitation, the transducer emits an ultrasonic sound wave; it also receives back the reflected signal from the interface. The signal emitted by the transducer is a multi-frequency waveform with a centre frequency of 8.8 MHz. Both the emitted and reflected sound signals are displayed on the oscilloscope and the averaged peak to peak amplitude of the reflected signal downloaded. Upon completion of the measurement at a given point, the PC controlled scanning table moves the transducer to the next point in a pre-determined sequence until the complete interface is scanned. In this work, a scanning increment of 0.25 mm was used in both the x and y directions, and five averages of the peak to peak amplitude were recorded at each point.

As well as being partially transmitted through the interface, the emitted ultrasonic signal is also attenuated by the material bulk. In order to calculate the reflection coefficient, these two effects must be de-coupled. A reference scan is taken without the wheel specimen present. As the interface is now metal-air, the entire signal is reflected, and the returned signal is only diminished by attenuation. Therefore, by dividing a given data point by its corresponding reference value, reflection coefficients can be calculated. Scans of reflection coefficient were then converted to interfacial stiffness, and finally contact pressure using a calibration appropriate to the interface under examination [10].



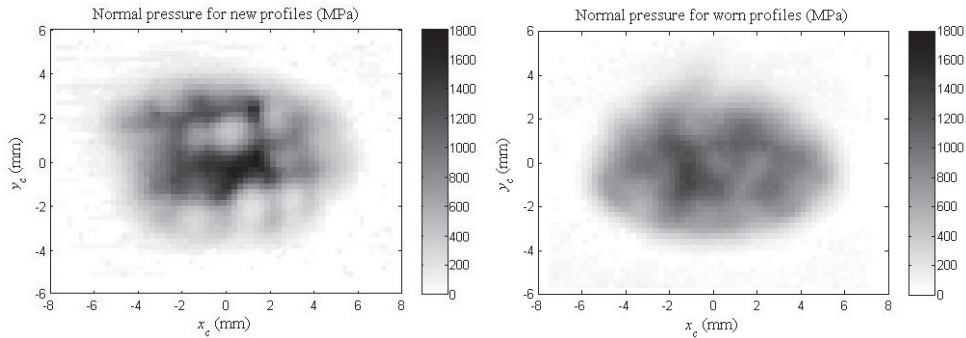
**Fig. 11.** Experimental set-up.

Fig. 11 shows a more detailed view of the previously described load frame. When compared to previous studies [10], greater emphasis was placed on re-creating actual wheel/rail contact conditions. The frame consists of an upper fixed plate, and a lower actuated floating plate. The rail specimen is located in a groove on the upper plate, and the wheel specimen on the floating plate. Profiles were set in the test rig in the same position as they are on the track when the train is in operation. The relative position of the wheel with respect to the rail is given by the set of coordinates  $\{y, z, \phi, \psi\}$  (Section 3.1, Fig. 7). A grid was marked on the floating plate, and was used to set the lateral displacement  $y$  and the yaw rotation  $\psi$  for the contact. Rotation around the  $x$  axis was set by the wedge; this value comprised of the roll angle of the wheel-set  $\phi$  and the rail slant  $\phi_r$ . It should also be noted that in this study only the centred position of the wheel-set is studied ( $y = \phi = \psi = 0$ ), and therefore the angle of the wedge is  $\alpha_w = \phi_r$ . With the specimens

positioned, load was then applied to the specimens in line with the contact, so as not to cause rotation of the specimens (this was checked using an orbit surface level on the floating plate).

## 4.2 Ultrasonic Results

Fig. 12 shows the ultrasonically measured contact pressure distributions for the new and worn profiles. These scans were taken for a load of 50 kN. Integration of the measured pressure profiles was performed, and gave an error of less than 5% when compared to the known applied load highlighting the validity of the technique. Both the contact patches are globally similar in size. However, the result recorded from the new profiles is visibly fragmented, and has higher peak pressure values when compared to the worn profiles (1800 MPa as opposed to 1350 MPa).

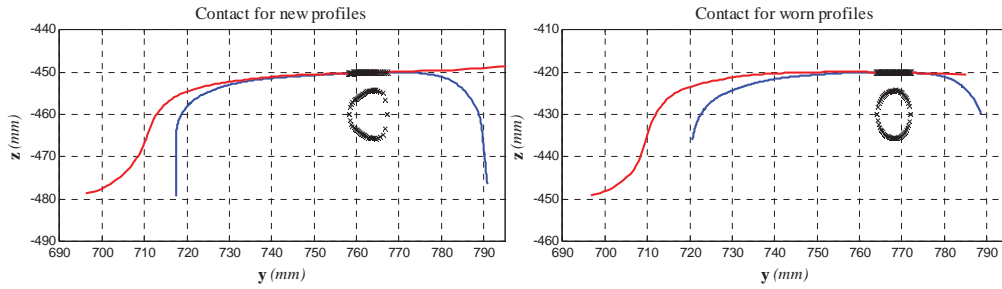


**Fig. 12.** Normal stress distributions obtained with the ultrasound technique for new (left) and worn (right) profiles.

This effect is best explained by considering the roughness of the long range waviness and machining marks present on the new wheel specimen. They reduce interface conformity and cause a fragmentation of the pressure distribution. This result is consistent with previous studies where new, worn, and sand damaged wheel/rail specimens have been considered [10]. As the wheel and rail wears, the contact becomes more conformal, both on a long range and an asperity scale, and the stress distribution is closer to the one expected for perfectly smooth surfaces.

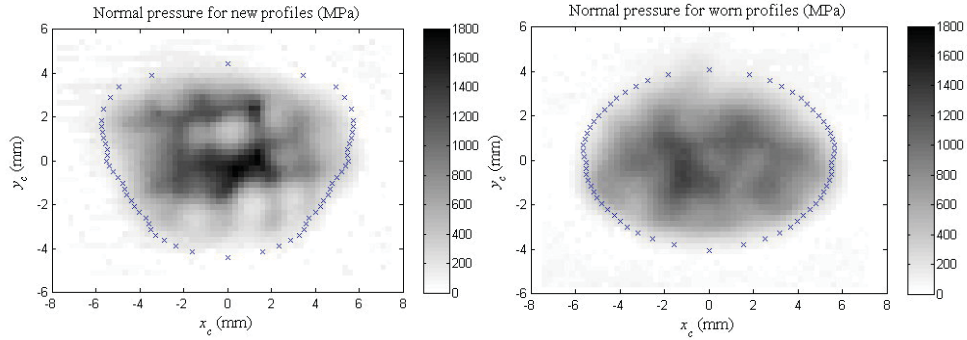
## 5 Contact Modelling

In this section the normal problem is solved numerically following the procedure detailed in Section 2.2. The input values for the contact problem are the coordinates  $y$ ,  $\phi$  and  $\psi$  (for the centred wheel-set) and the normal force ( $F_N = 50$  kN in this case). For a given set of coordinates  $\{y, z, \phi, \psi\}$  the interpenetration area is calculated as in [24], and a value of the indentation,  $\delta$ , obtained. The contact area is then estimated using the interpenetration area via the relation  $\delta_0 = k \cdot \delta$  (a value of  $k = 0.55$  as in [26] is used). An ellipse is fitted to the determined area of contact, with the geometrical semi-axes  $a$  and  $b$  defined. The tangential problem is then calculated for the equivalent ellipse by applying FASTSIM. The use of the equivalent ellipse method represents a major advantage in the application of FASTSIM, as the values of the flexibility coefficients are tabulated (2) resulting in a reduction in the computer processing power required.



**Fig. 13.** Areas of contact obtained numerically for new (left) and worn (right) profiles.

Fig. 13 shows the areas of contact obtained numerically using the interpenetration method, plotted on the track reference system. The plan view of the contact in the  $x$ - $y$  axes is also plotted in the same scale. The profiles used to solve the contact problem are the ones in Fig. 9. The wheel is generated from the revolution of the profile around the main wheel-set axis, whereas the rail is generated as a longitudinal extrusion.



**Fig. 14.** Areas of contact for new (left) and worn (right) profiles in the contact reference frame. The 'x' is the area of contact calculated numerically.

In Fig. 14, the area of contact obtained numerically is plotted together with the normal stress distribution obtained experimentally, in the contact reference frame. The numerical problem is solved taking as an input the 2D profiles in the interface. This might explain the small differences between the contact patch obtained experimentally using the ultrasound technique and the contact patch obtained numerically.

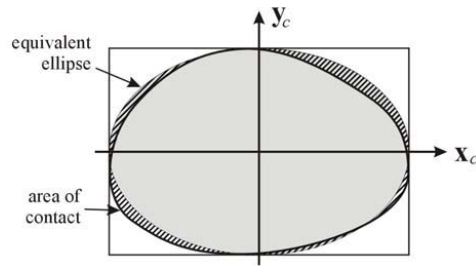
The shapes of both areas of contact seem to be *close* to an ellipse, especially for the worn profiles. To evaluate this characteristic a parameter of ellipticity is defined. The area of contact is framed inside a rectangle with its axis parallel to the coordinate system of the contact (see section 2.2). Then, an ellipse is fitted to the rectangle, with  $2\cdot a$  and  $2\cdot b$  the dimensions of the ellipse in the longitudinal and lateral directions, respectively.

With  $A_c$  being the value of the area of contact and  $A_e$  the area of the equivalent ellipse, the parameter of ellipticity  $\varepsilon$  is defined as:

$$\varepsilon = 1 - \frac{(A_c \cup A_e) - (A_c \cap A_e)}{A_e} \quad (12)$$

The numerator of the fraction represents the difference between the area of contact and the fitted ellipse (striped area in Fig. 15). This value is divided by the area of the equivalent ellipse to get a non-dimensional parameter. The parameter of ellipticity  $\varepsilon$  equals 1 for a perfect ellipse.





**Fig. 15.** Area of contact and equivalent ellipse.

If the value of the parameter  $\varepsilon$  is sufficiently large, the area of contact can be considered an ellipse and be calculated using Hertzian hypotheses. Otherwise, non-Hertzian methods should be used with the increase in computational time. In any case, Kalker in [12] suggests ellipsisation of the contact area for the application of vehicle simulation.

The characteristic parameters of the contact patches are detailed in Table 4. The area of contact is greater for the experimental results (5% greater for new profiles and 15% for worn ones). This is calculated adding the elements with positive pressure. Each element represents a discrete position in the scanning window; therefore, the pressure in each element is an average value. Consequently, the size of the area of contact is an estimate and depends on the resolution taken in the scanning window (scanning step). For a smaller scanning step, the size of the area of contact is expected to be closer to the size of the area of contact obtained numerically up until the resolution of the ultrasonic transducer is reached.

Table 4 also shows the semi-axes of the equivalent ellipse. With these values, the parameters of ellipticity are calculated for the numerical/experimental and new/worn contacts.  $\varepsilon$  is greater for the worn contact, because the shape of the contact patch is closer to an ellipse. This is also seen in Fig. 14. A prove of the validity of the assumption of the equivalent ellipse is the agreement shown in Fig. 14. The procedure used to find the area of contact which exerts a normal force equal to 50 kN involves iteration. If the solution of the numerical models converges to the area of contact obtained from the ultrasound measurements, the assumptions taken are valid.

**Table 4.** Characteristic parameters for the contact patches for new (a) and worn profiles (b).

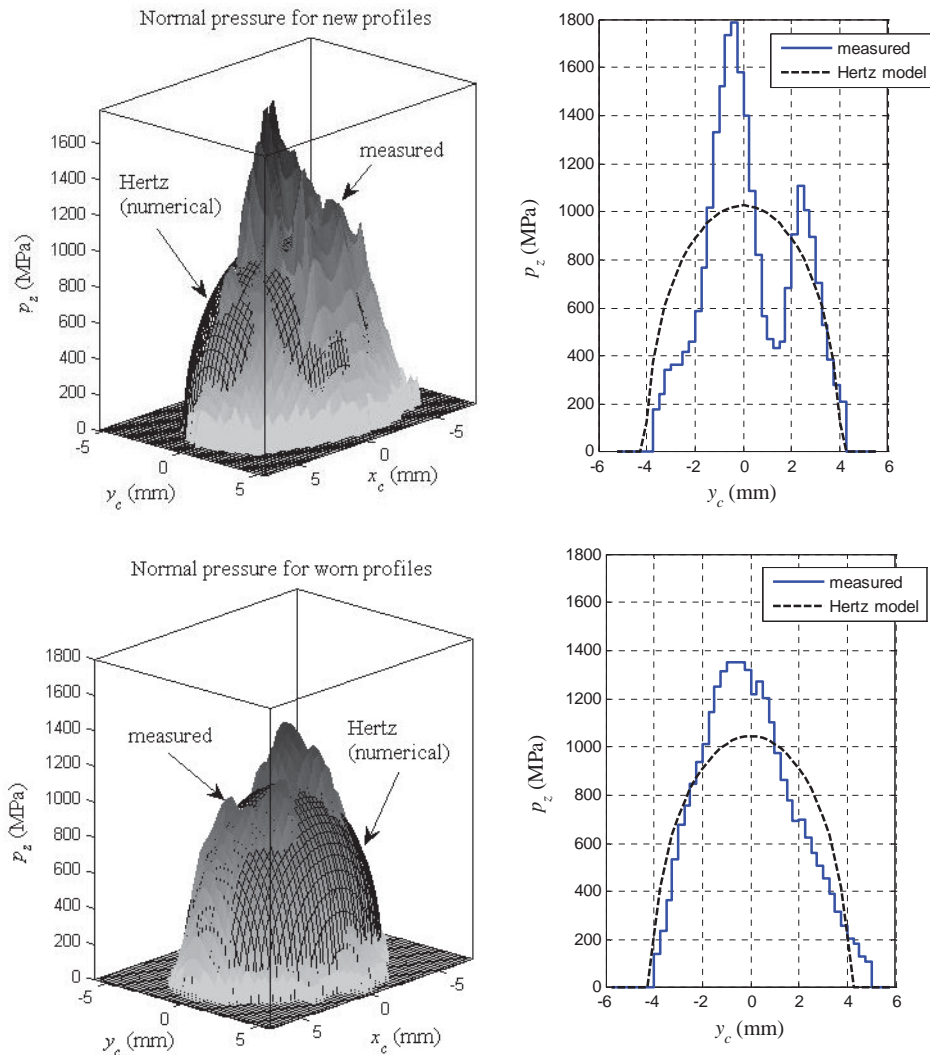
(a) New profiles		NUMERICAL (Interpenetration)	EXPERIMENTAL (Ultrasound tech.)
AREA OF CONTACT	Area of contact $A_c$ (mm <sup>2</sup> )	77.96	81.62*
	Semiaxes eq. ellipse ( $a \cdot b$ ) (mm)	5.75 · 4.03	6.25 · 4.125
	Param. of ellipticity $\varepsilon$	0.84	0.84
	Max. pressure $p_{max}$ (MPa)	1030**	1800
(b) Worn profiles		NUMERICAL (Interpenetration)	EXPERIMENTAL (Ultrasound tech.)
AREA OF CONTACT	Area of contact $A_c$ (mm <sup>2</sup> )	70.73	84.13*
	Semiaxes eq. ellipse ( $a \cdot b$ ) (mm)	5.65 · 4.09	6.00 · 4.25
	Param. of ellipticity $\varepsilon$	0.96	0.89
	Max. pressure $p_{max}$ (MPa)	1033**	1350

\* Estimated value adding the elements with positive pressure

\*\* Value calculated for the equivalent ellipse using the Hertz theory.

The normal stress distribution for the contact patch obtained numerically is calculated using the Hertz model for the equivalent ellipse. This is plotted together with the normal stress distribution obtained experimentally for new and worn contacts (Fig. 16). The maximum pressure obtained by means of ultrasonic measurements is greater than Hertz maximum pressure

(74% for new profiles, and 30% for worn profiles). This is probably caused by the rough surface topography not considered by Hertz. This effect is less important for worn contacts where the profiles become more conformal. Furthermore, there is a lack of symmetry comparing the measurements with the Hertzian distribution. This might be produced because the profiles do not have a constant radius of curvature around the point of contact.



**Fig. 16.** Comparison of the normal stress distribution obtained through ultrasonic measurements and predicted by the Hertz theory for new profiles (up) and worn profiles (down).

## 6 Tangential problem and wear analysis

Once calculated the solution of the normal problem and prescribing some kinematic conditions, the tangential problem can be solved. For each wheel-rail pair, two different inputs will be used:

- The normal stress distribution given by Hertz model,
- and the normal stress distribution coming from ultrasound measurements.

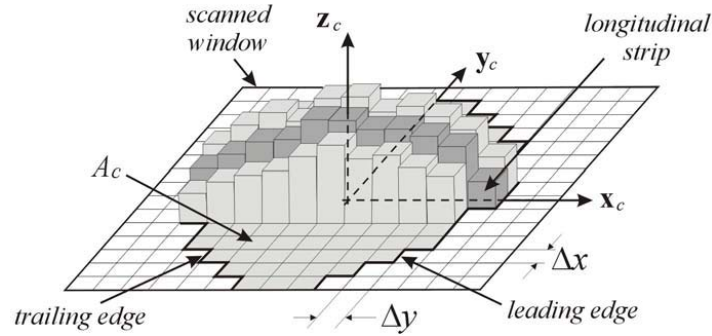
FASTSIM is applied to the data coming from the experimental measurements. It will allow investigating the effect of surface roughness on the tangential stress distribution and wear.

For the normal stress distribution coming from ultrasound measurements, an alternative input is used. The elastic coefficients  $L_i$  are calculated for the equivalent ellipse, using the equations (3). This error is assumed to be small because the parameter of ellipticity  $\varepsilon$  is close to 1.

To calculate the tangential problem and carry out wear analysis, the same discretisation of the experimental measurements is used. It is composed of a grid of elements, with each element of size  $\Delta x \cdot \Delta y$  (Fig. 17). Therefore, not all the strips have the same number of elements. A longitudinal strip is made by a row of elements aligned with the  $\mathbf{x}_c$  axis. Three cases are possible:

- The element does not belong to the contact area  $p_z^{ij} = 0$
- The element is in adhesion  $\sqrt{(p_x^{ij})^2 + (p_y^{ij})^2} < \mu p_z^{ij}$
- The element is in slip  $\sqrt{(p_x^{ij})^2 + (p_y^{ij})^2} = \mu p_z^{ij}$

where  $i, j$  are the coordinates of the element in the scanning window. If an element  $ij$  does not belong to the contact area,  $p_x^{ij}$  and  $p_y^{ij}$  are zero.  $p_x^{ij}$  and  $p_y^{ij}$  are the tangential stresses in the longitudinal direction and in the lateral direction, respectively.



**Fig. 17.** Discretisation of the area of contact coming from ultrasound measurements.

Wear is modelled using the criterion of energy dissipation. It is assumed that wear rate is related to work done at wheel-rail contact [6]. The values of energy dissipated per unit area ( $T\gamma/A$ ) are correlated with the wear rate (mass loss per unit area and rolled metre) (see Table 1 for wear coefficients).

For both new and worn set of profiles and with the normal stress distribution coming from ultrasound measurements and obtained numerically, three different calculations are performed. First of all, the solution of the tangential problem and wear estimation in the contact patch are presented, for both new and worn profiles. Each magnitude is mapped in the contact patch to compare the results for the data coming from ultrasound measurements with the results for the Hertz distribution. Secondly, those parameters are integrated for the contact area and its evolution is plotted for increasing values of creepage. Finally, assuming that the wheel is rolling following the  $\mathbf{x}$  axis and the relative position of the wheel respect to the rail is kept constant, damage on the profiles are calculated under three defined scenarios. For all the calculations, the coefficient of friction is supposed to be known and constant in the whole area of contact. A value  $\mu = 0.4$  is used.

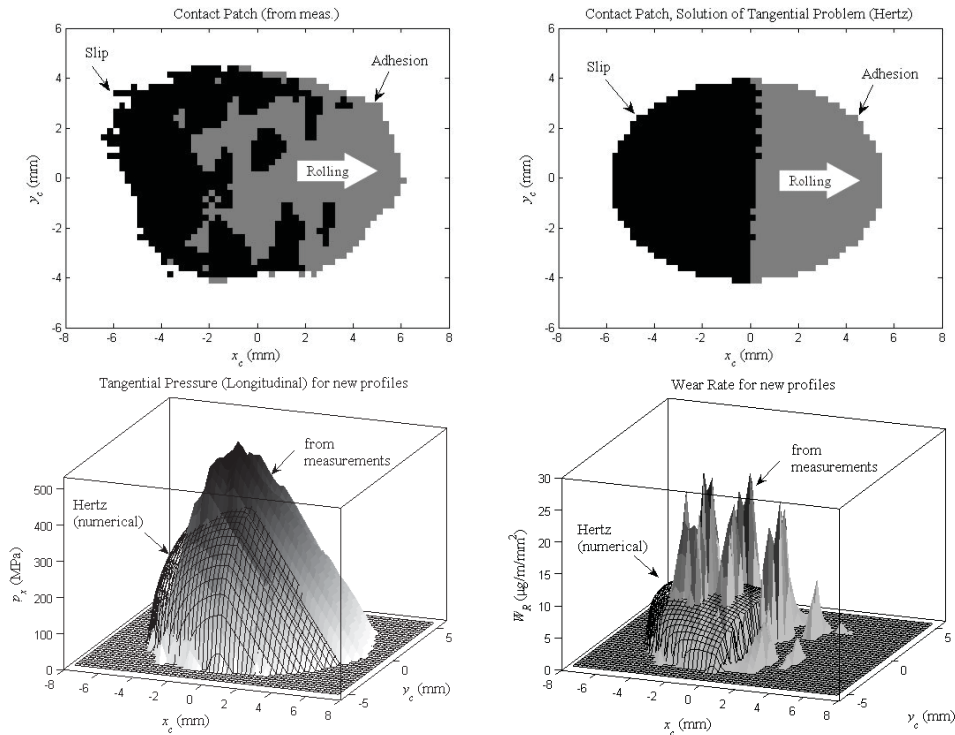
## 6.1 Results for moderate creepage

A first set of results is presented for *moderate* creepage: a value for longitudinal creepage ( $v_x$ ) of 0.3 % is assumed. As the relative position of the wheel with respect to the rail corresponds to the centre position, with no yaw angle, no lateral creepage is expected ( $v_y = 0.0$  %). Finally, the spin creepage is the corresponding to the wheel conicity ( $\phi = 5.0$  (1/m) %).

As a solution of the tangential problem and wear analysis the following magnitudes are plotted for each element in the contact patch (Figs. 18 and 19 for new and worn profiles, respectively):

- Adhesion and slip regions
- Tangential stress distribution in the longitudinal direction  $p_x$  (MPa)
- Wear rate  $W_R$  ( $\mu\text{g}/\text{m}/\text{mm}^2$ )

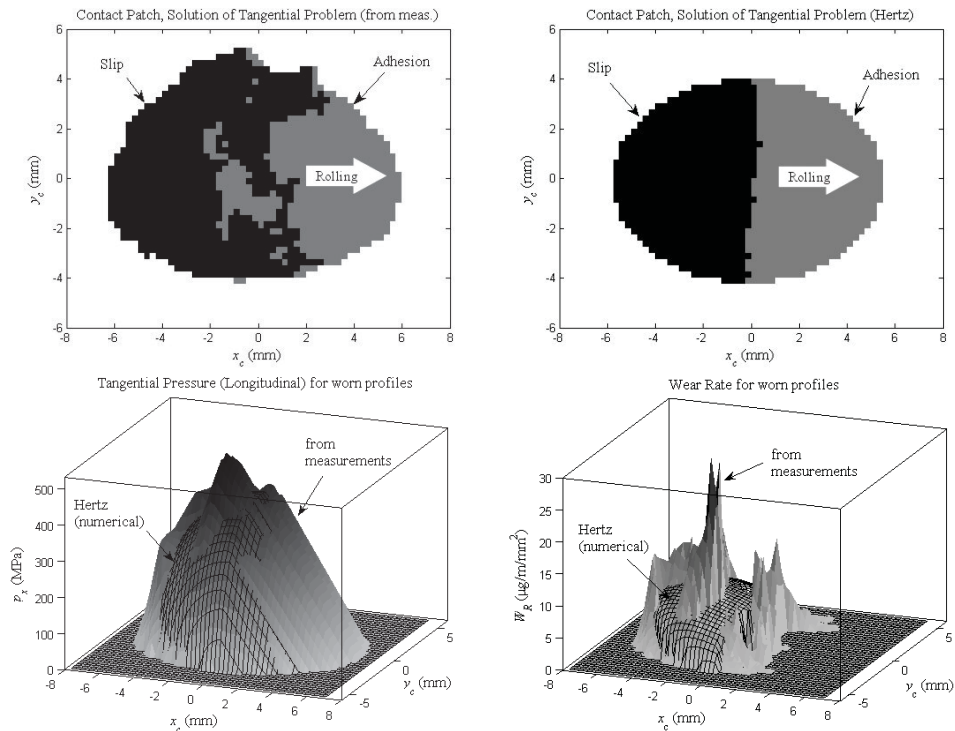
As a result of the application of FASTSIM, the leading edge is in adhesion and the trailing edge is in slip. The frontier is smooth for the Hertzian pressure distribution. For the ultrasound measurements, this line is irregular and shows some overlapping patches of adhesion in the slip area. There is a correspondence between the normal stress distribution and the fragmentation of the adhesion/slip regions: where there is a high peak in the normal pressure (Fig. 16), due to Coulomb's law, it allows higher traction forces; saturation is not reached and those elements are in adhesion. Conversely, when there is a valley in the normal stress distribution, no high values of traction are allowed and those elements are under slip condition.



**Fig. 18.** Surface plots of different parameters from the tangential problem from data coming from ultrasound measurements and from the Hertz model, for new profiles and moderate creepage ( $v_x = 0.3$  %).

For the longitudinal stress surface plot ( $p_x$ ), the shape obtained is quite smooth for both situations, coming from ultrasound measurements and from the Hertz model, for worn and new profiles. On the one hand, in the adhesion region the stress shows a monotonic increase since it

reaches the saturation given by the value  $\mu p_{ij}$ . This peak value is about 27 % greater for the distribution coming from the measured contact patches than for the distribution coming from Hertz calculation (for both new and worn profiles). On the other hand, in the slip region, the tangential stress field is proportional to the normal stress distribution, and it shows the same peaks that appeared in the normal stress distribution. It makes the tangential stress distribution coming from measurements to have a less regular shape; this was expected due to the fragmentation of the contact patch.



**Fig. 19.** Surface plots of different parameters from the tangential problem from data coming from ultrasound measurements and from the Hertz model, for worn profiles and moderate creepage ( $\nu_x = 0.3 \%$ ).

To represent the damage on the contact patch, the wear rate is mapped. In the adhesion region (composed by the leading edge and the high peaks of the normal stress distribution), according to the wear criterion, there is no wear; it only appears in the slip zone (trailing edge of the contact patch, and valleys in the normal stress distribution). Locally, there is a big difference between the expected wear for the measured data and the data generated with Hertz model. This suggests that the application of Hertz to a contact may not predict local effects of wear in the profiles. For the data coming from ultrasound measurements there are high wear peaks with values up to  $30.0 \mu\text{g}/\text{m}/\text{mm}^2$  surrounded by valleys with no wear rate (there is adhesion). Those peaks will cause a high local wear on the wheel and rail profiles. For data coming from Hertz model, there is a smooth distribution of wear rate with the maximum around  $9 \mu\text{g}/\text{m}/\text{mm}^2$ . This pattern appears for both new (Fig. 18) and worn profiles (Fig. 19), being more severe for new profiles.

This observation highlights a benefit of the ultrasonic technique. When the surfaces are new and unworn, the interface is not yet conformal as running in has not occurred. The application of the technique at this point allows judgments to be made as to where the initial high rates of wear are likely to occur, based on the initial surface topography. This then provides valuable information

for predicting the evolution of the contact patch. Although for the worn in contact some points of high wear rate remain, on average values are reduced, meaning the Hertzian approach offers a far closer approximation of the contact conditions.

However, the widespread use of the experimental technique would require the scanning of each individual wheel/rail contact and to this end is not realistic. Although, the experimental results presented in this paper may help to understand the actual wear mechanisms present for real wheel and rail surfaces during the running-in phase, and the shape of contact that ultimately prevails for a given initial surface finish.

It is also interesting to point out that, for the *moderate creepage* scenario, despite the high peaks appeared for data coming from measurements, the entire contact patch for the new and worn contacts and calculated from the Hertz model and from ultrasound measurements is in the mild regime so wear rate is proportional to the energy dissipated in the contact. For greater values of creepage, the full contact patch would be in slip, and a transition from mild to severe regime is expected. The values of the high peaks of wear rates would saturate with a value of  $55.0 \mu\text{g}/\text{m}/\text{mm}^2$ .

## 6.2 Global parameters of contact for range of increasing creepage values

In this section, the distributions of the magnitudes calculated before are integrated over the contact patch. These global magnitudes give an overall idea about the contact area, but in order to get accurate results, the magnitudes must be considered locally.

A global value for the energy dissipated in the contact patch is calculated averaging the local  $T\gamma/A$  from (11) in the slip region, being  $A_s$  the slip region and  $\Delta x, \Delta y$  the dimensions of each element of the contact patch.

$$\frac{T\gamma}{A} = \frac{1}{A_s} \left( \sum_{A_s} \frac{T\gamma}{A}(x, y) \right) \Delta x \Delta y \quad (13)$$

This value can also be used to calculate a global wear rate using the wear law in Table 1.

Lateral and spin creepages are kept constant ( $\nu_y = 0.0 \%$ ,  $\varphi = 5 (1/\text{m}) \%$ ) while longitudinal creepage is changed, simulating a range of increasing values of traction effort. The value for the measured contact is compared with the expected value calculated with the Hertz model. The relative variation between them is also presented (plotted on secondary axes). Results are presented in Fig. 20-left for new profiles and Fig. 20-right for worn ones.

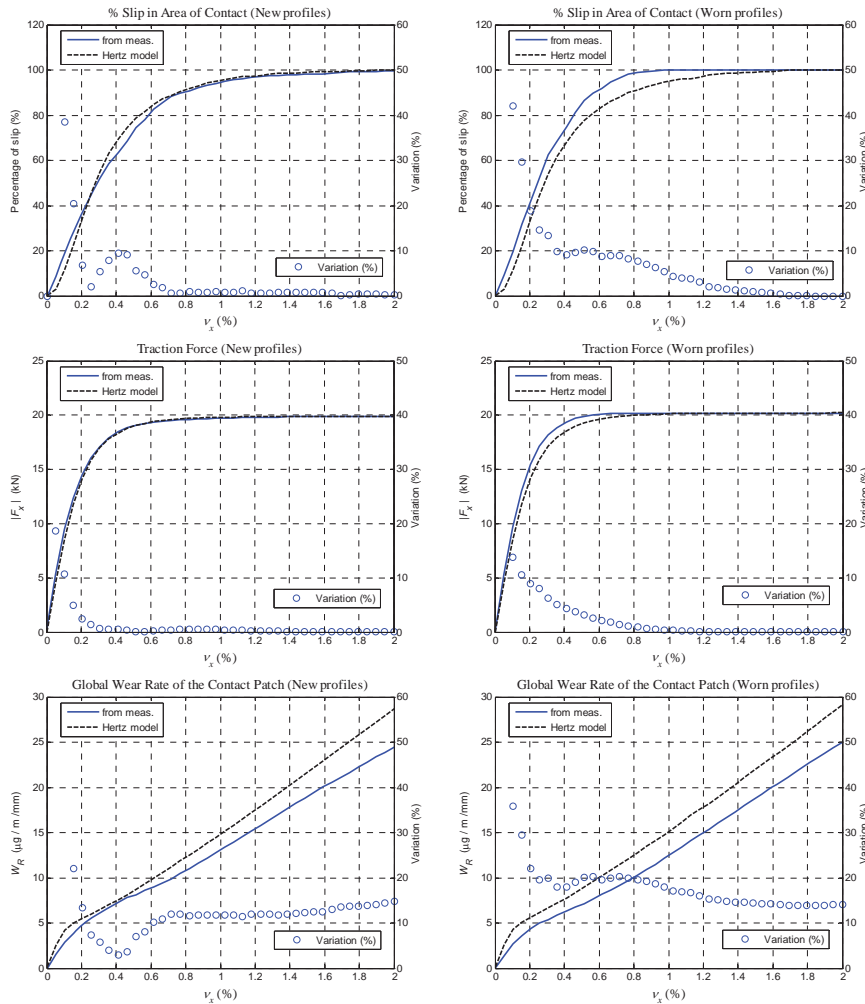
The magnitudes plotted are:

- Percentage of the slip region over the total area of contact (%)
- Traction force  $F_x$  (kN)
- Global wear rate  $W_R$  ( $\mu\text{g}/\text{m}/\text{mm}^2$ ), which is calculated as an average of the local wear rate over the slip region.

The first plot shows the influence of the increasing creepage on the size of the slip region. It is interesting to point out that for small creepages (0.2-0.3 %), the slip region is very small and the discretisation of the contact patch may not be adequate because the size of the elements may be too big compared to the size of the slip region. This might explain the differences between the two methods for very low creepages. Above this threshold, the curves show the same tendency, and the differences between them decrease for increasing values of creepage. For  $\nu_x > 1.0 \%$  the variation is less than 5 %. Beyond  $\nu_x = 1.4 \%$  this difference is negligible.

Analysing the traction force, the curves show a good agreement using Hertz vs. measured data. This suggests that the Hertz theory is suitable for simulation. For a creepage greater than 0.4 %, the difference is estimated to be less than 5%. This difference vanishes for increasing creepage.

The last plot is relative to the global wear in the contact patch. The value of  $(T\gamma/A \Delta x \Delta y)$  for each cell is summed for the area of contact and averaged over the slip region. When the previous curves are saturated, these ones have a linear behaviour with the creepage, due to the linear increase of the non-dimensional slip  $\gamma$  for the constant value of  $T$ . For the maximum longitudinal creep of 2 %, the maximum expected wear rate is 25-30  $\mu\text{g}/\text{m}/\text{mm}^2$  which means that all the range is in the mild regime (Table 1). For increased loads and, therefore, stresses in the contact patch, a transition to the severe regime is expected. That would result in a horizontal line in the plot. It is interesting to point out that for the studied contact patches, the predicted global wear rate is greater for the Hertzian model. The variation between the estimated wear for Hertz and for measured data, for both new and worn contacts, is estimated between 10-15% for creepages greater than 1.2 %.



**Fig. 20.** Comparison of the values for global parameters of the contact area for increasing creepage for new profiles (left) and worn profiles (right).

### 6.3 Calculation of damage in the profiles for low, moderate and high creepage

Finally, in this section, the damage on the profiles is estimated as the wear depth created in each cell per rolled metre. Assuming that the wheel is rolling in the same position respect to the rail, it is used the factor  $\Delta x / (2 \pi R)$  to average the damage of each element of the contact area in the whole circumference of wheel running radius  $R$ , being  $\Delta x$  the length of the cell (equal for all elements of the contact patch). The damage caused in each cell is calculated as

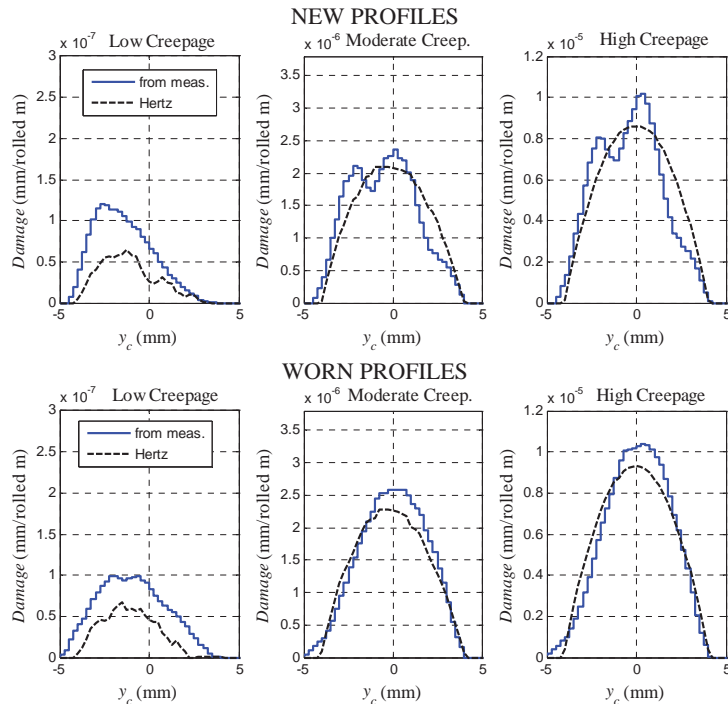
$$D_{cell} = W_R \frac{1}{\rho} \frac{\Delta x}{2\pi R} \quad (14)$$

where  $\rho$  is the density of the material. The summation of the averaged damage of all the elements in a strip gives the estimated damage for each strip of the profile. As the contact is in the wheel tread, it is taken an average radius  $R$  for the entire contact patch.

Three situations are studied for each contact: one with low creepage, another with moderate creepage and finally with high creepage. The different scenarios used to calculate wear are listed in Table 5. The contact area under a slip condition is calculated to be about 7 % for low creepage, 50 % for moderate creepage and 98 % for high creepage, both for worn and new profiles. In Fig. 21 the accumulated damage for the two sets of profiles and the three scenarios is shown.

**Table 5.** Scenarios for wear calculation.

	Low Creepage	Moderate Creepage	High Creepage
$V_x$	0.05 %	0.3 %	1.0 %
$V_y$	0.0 %	0.0 %	0.0 %
$\phi$ (1/m)	5.0 %	5.0 %	5.0 %



**Fig. 21.** Damage produced by the contact patch on the profile in mm per rolled metre for low, moderate and high creepage conditions (note that the scale is different for each plot).



It is interesting to analyse the shape obtained for measured distributions compared to hertzian distributions. For the hertzian pressure distribution the expected damage follows a smooth curve whereas for the pressure distribution coming from measurements, damage on the profile has a more irregular shape. This is the consequence of the local effects of wear rate on the contact patch, caused by the presence of asperities. This damage pattern can only be obtained with data coming from ultrasound measurements. For worn profiles, the prediction of damage given by Hertz is closer to the shape obtained for the measured data. This is due to the effect of the asperities, which are worn out. As a general conclusion, the estimation of damage for the profiles offered by the ultrasound measurement is slightly greater than the one expected for the hertzian case.

It is worth commenting on the shape of the damage predicted for the hertzian distribution under the low creepage scenario. As the size of the elements is too big compared to the size of the slip region, there are a few elements in the slip region and no smooth solution is obtained as in the other two scenarios.

Another characteristic to highlight is the nonlinearity of the creepage with the accumulated damage (note the different order of magnitude for each scenario). This is associated to the saturation of the contact patch (see Fig. 20, upper plots): for low creepage, only approximately 10% of the area is in slip; in the next step, for moderate creepage, 50% of the area is in slip and finally for high creepage, above 95% of the contact patch is in slip. After full saturation and for greater values of slip, the transition from mild to severe regime in the contact patches is expected.

Finally, it is interesting to comment on the effect of spin. While longitudinal creepage is increased, spin is kept constant. Therefore its relative influence is only noticed in the low creepage scenario which makes the damage distribution non-symmetrical.

## 7 Conclusions

In this paper, a methodology to study the wheel-rail contact for real surfaces has been proposed. Two techniques have been used: one experimental using the measurement of the ultrasonic reflection, and another numerical based on the Hertz model. The tangential problem was calculated using FASTSIM for data coming from both procedures. The results were compared and the main points discussed are:

- When two rough surfaces are pressed together, the load is supported by the asperities in contact. This effect is observed in the normal stress distribution obtained experimentally, which has high peaks corresponding to roughness within the contact. This is not found in the distribution obtained numerically, because the surfaces are assumed to be smooth. The numerical method gives better results for worn contacts than for the new ones, because the asperities are partially worn out.
- To study the tangential problem a kinematic state is prescribed. The contact patch is divided into adhesion and slip regions. For a real surface these regions are fragmented and do not show a smooth frontier.
- Data coming from experimental measurements reproduce the real contact where the load is discretely supported by asperities (in both new and worn profiles). Therefore, the wear distribution obtained from experimental measurements is a non-continuous function showing high peaks of wear rate. However, the modelisation with Hertz theory predicts a smooth wear rate distribution. Thus, care must be taken when analysing some wear estimations coming from a numerical model which does not take into account the effect of surface roughness.

- Although analysing the contact locally there is a big deviation between measured data and Hertz theory, the difference of the average magnitudes of the contact patches was found to be small. This means that the numerical method is suitable for simulation as it is typically used, but special care must be taken when analysing wear.
- The wear life of a component highly depends on its initial topography, and the wear mechanisms of the surface will similarly vary. Therefore, different initial conditions for the same running environment of the component would influence its overall life.
- Finally, there is a strong limitation on the use of the experimental method. To use this method each contact patch must be scanned with a good resolution and it requires a lot of time. Nevertheless, the use of experimental data is useful to understand the mechanisms involved in the contact of rough surfaces and wear.

## Acknowledgements

The corresponding author gratefully acknowledges the cooperation of C. Hardwick and Portec Rail Inc. for supplying the Miniprof device. This research was supported by Universitat Politècnica de Valencia (Spain).

## References

- [1] M. Stanca, A. Stefanini, R. Gallo, Development of an integrated design methodology for a new generation of high performance rail wheelsets. Proceedings of the 16th European MDI User Conference, Berchtesgaden, Germany, 14-15 November 2001.
- [2] T. Jendel, Prediction of wheel profile wear - comparisons with field measurements. *Wear* 253 (2002) 89-99.
- [3] R.H. Fries, C.G. Dávila, Wheel wear predictions for tangent track running. Transactions of the ASME, Journal of Dynamic Systems, Measurement and Control 109 (1987) 397-404.
- [4] T.G. Pearce, N.D. Sherratt, Prediction of wheel profile wear. *Wear* 144 (1991) 343-351.
- [5] I. Zobory, Prediction of wheel/rail profile wear, *Vehicle System Dynamics* 28 (1997) 221-259.
- [6] F. Braghin, R. Lewis, R.S. Dwyer-Joyce, S. Bruni, A mathematical model to predict railway wheel profile evolution due to wear. *Wear* 261 (2006) 1253-1264.
- [7] J. Pombo, X. Quost, N. Tassini, J. Ambrósio, M. Pereira, C. Ariado, N. Kuka, R. Lewis, R.S. Dwyer-Joyce, Development of a computational tool to predict the wear on the wheels of railway vehicles, accepted for presentation at 21st International Symposium on Dynamics of Vehicles on Roads and Tracks (IAVSD 2009), KTH, Stockholm, Sweden, 17-21 August, 2009.
- [8] T. Telliskivi, U. Olofsson, Contact mechanics analysis of measured wheel-rail profiles using the Finite Element Method. *Journal of Rail and Rapid Transit, Proceedings of the IMechE, Part F*, 215 (2001) 65-72.
- [9] U. Olofsson, T. Telliskivi, Wear, friction and plastic deformation of two rail steels - full-scale test and laboratory study, *Wear* 254 (2003) 80-93.
- [10] M.B. Marshall, R. Lewis, R.S. Dwyer-Joyce, U. Olofsson, S. Björklund, Experimental characterization of wheel-rail contact patch evolution. *Journal of Tribology Transactions of the ASME* 128 (3) (2006) 493-504.
- [11] J.J. Kalker, A Fast Algorithm for the Simplified Theory of Rolling Contact, *Vehicle System Dynamics* 11 (1982) 1-13.
- [12] J.J. Kalker, Wheel-rail rolling contact theory. *Wear* 144 (1991) 243-261.

- [13] B.W. Drinkwater, R.S. Dwyer-Joyce, P.Cawley, A study of the interaction between ultrasound and a partially contacting solid-solid interface. *Proc. R. Soc. London. Series A: Mathematical, Physican and Engineering Sciences* 452 (1996), 2613-2628.
- [14] R.S. Dwyer-Joyce, B.W. Drinkwater, A.M. Quinn, The use of ultrasound in the investigation of rough surface interfaces. *Journal of Tribology* 123 (2001) 8-16.
- [15] R. Lewis, M.B. Marshall, R.S. Dwyer-Joyce, Measurement of Interface Pressure in Interference Fits. *Proc. IMechE* 219, Part C: *J Mech. Eng. Science*, (2005) 127-139.
- [16] M.B. Marshall, R. Lewis, R.S. Dwyer-Joyce, Characterisation of Contact Pressure Distribution in Bolted Joints. *Strain* 42 (2006) 31-43
- [17] A.G. Tattersall, The ultrasonic pulse-echo technique as applied to adhesion testing. *J. Phys. D: Appl. Phys* 6 (1973), 819-832.
- [18] K. Kendall, D. Tabor, An ultrasonic study of the area of contact between stationary and sliding surfaces. *Proceedings of the Royal Society, Series A*, 323 (1971), 321-340.
- [19] R.S. Dwyer-Joyce, B.W. Drinkwater, Analysis of contact pressure using ultrasonic reflection. *Experimental Mechanics, Proceedings of 11th Annual Conference on Experimental Mechanics, Balkema, Rotterdam* (1988) 747-754.
- [20] T. Arakawa, A study of the transmission of elastic waves by a periodic array of cracks. *Mater. Eval.* 41 (1983), 714-719.
- [21] J. Piotrowski, H. Chollet, Wheel-rail contact models for vehicle system dynamics including multi-point contact. *Vehicle System Dynamics* 43 (2005) 455-483.
- [22] K.L. Johnson, *Contact Mechanics*, Cambridge University Press (1987).
- [23] A.A. Shabana, K.E. Zaazaa, J.L. Escalona, J.R. Sany, Development of elastic force model for wheel/rail contact problems. *Journal of Sound and Vibration* 269 (2004) 295-325.
- [24] J. Santamaria, E.G. Vadillo, J. Gomez, A comprehensive method for the elastic calculation of the two-point wheel-rail contact. *Vehicle System Dynamics* 44 (2006) 240-250.
- [25] J.P. Pascal, G. Sauvage, New method for reducing the multicontact wheel/rail problem to one equivalent contact patch. *Proc. of 12<sup>th</sup> IAVSD Symposium. Lyon, Aug 26-30 (1991)* 475-489.
- [26] W. Kik, J. Piotrowski, A fast, approximate method to calculate normal load at contact between wheel and rail and creep forces during rolling. *Proceedins of the Second Mini Conference on Contact Mechanics and Wear of Wheel/Rail System, Ed. Zabory, TU Budapest* (1996).
- [27] J. Piotrowski, W. Kik, A simplified model of wheel/rail contact mechanics for non-Hertzian problems and its application in rail vehicle dynamic simulations. *Vehicle System Dynamics* 46 (2008) 27-48.
- [28] J.B. Ayasse, H. Chollet, Determination of the wheel rail contact patch in semi-Hertzian conditions. *Vehicle System Dynamics* 43 (2005) 161-172.
- [29] M. Sebes, J.B. Ayasse, H. Chollet, P. Pouligny and B. Pirat, Application of a semi-Hertzian method to the simulation of vehicles in high-speed switches. *Vehicle System Dynamics* 44, Supp (2006) 341-348.
- [30] J.J. Kalker, *Three-Dimensional Elastic Bodies in Rolling Contact*, Kluwer Academic Publishers. Dordrecht/Boston/London (1990)
- [31] A. Alonso, J.G. Giménez, Tangential problem solution for non-elliptical contact areas with the FastSim algorithm. *Vehicle System Dynamics* 45 (4) (2007) 341-357.
- [32] R. Lewis, R.S. Dwyer-Joyce, Wear mechanisms and transitions in railway wheel steels. *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part J: Journal of Engineering Tribology* 218(6) (2004) 467-478.



## Technical characteristics and dynamic modeling of Talgo trains

J. CARBALLEIRA<sup>†,1</sup>, L. BAEZA<sup>†</sup>, A. ROVIRA<sup>†</sup> AND E. GARCÍA<sup>‡</sup>

(Received 00 Month 200x; In final form 00 Month 200x)

One main characteristic of Talgo trains from the very beginning in 1942 is the use of single-axle running gears with independently rotating wheels and non-active steering systems. This feature has allowed the use of other technical solutions that are usually more difficult to implement in conventional rolling stock, such as the lower coach floor, the automatic variable gauge system or the natural tilting technology. The present paper deals with the singularities in the modeling of the dynamic behavior of Talgo trains, due to their particular characteristics.

*Keywords:* independently rotating wheels, steering mechanism, Talgo train

### 1 INTRODUCTION

The Talgo train makes use of a variety of unconventional technologies and so is rather difficult to classify. It is a usual example in literature when dealing with issues such as independently rotating wheels, single-axle running gears, natural tilting, non-active steering or articulated trains, but it cannot be restricted to any one category.

These main features make the modelling of this train through a simulation commercial software rather tedious. The articulated configuration couples the dynamics of the whole set, and as a result all the vehicles in the set must be simultaneously considered in the model [1]. The steering and weightbearer mechanisms (see section 2) introduce a lot more degrees of freedom when modelled by means of a multibody compatible code. The single-axle truck, with the elevated secondary suspension, is a non-conventional element that must be implemented by the user.

The main objectives of this paper are to describe the main technical characteristics of Talgo trains and the development of a specific model which can overcome these difficulties and give some insight into the dynamic behavior of the train. Its particular characteristics will be studied and different assumptions will be made in order to simplify the model. The aim is to obtain an accurate numerical model with a low computational cost.

A careful selection of the coordinates should be done in order to build a model with a low number of degrees of freedom. Defining coordinates at the couplings between vehicles rather than using reference point coordinates turns out to be very efficient. Furthermore, from the passive steering systems new constraint equations will appear, relating the angle of attack of the trucks to the lateral displacements and yaw rotations of the adjacent carriages, but avoiding the definition of new coordinates to model the steering mechanisms.

Some numerical simulations have been performed to study the curving performance of this train. The numerical results show a good correlation with the expected behavior.

---

*This article includes a word (Talgo) that is or is asserted to be a proprietary term or trade mark. Its inclusion does not imply it has acquired for legal purposes a non-proprietary or general significance, nor is any other judgement implied concerning its legal status.*

<sup>1</sup>Corresponding author: J. Carballeira. Dpto de Ingeniería Mecánica. Universidad Politécnica de Valencia. Camino de Vera s.n., E46022 Valencia, Spain. Tel.: +34 - 963 879 623; E-mail: jacarmo@mcm.upv.es

<sup>†</sup>Department of Mechanical Engineering, Technical University of Valencia, Spain.

<sup>‡</sup>Patentes TALGO,S.A. Madrid, Spain.

## 2 TALGO TRAIN

The Talgo train concept originated from a simple idea: a long chain of tricycles tracks the path described by the first one when their front wheel is hooked on the rear axle of the next tricycle. This idea was exploited by Alejandro Goicoechea to develop a new wheelset back in the forties. In this wheelset, the wheels were mounted free on the bases of isosceles triangle frames that were linked together, so that the wheelset was naturally guided along the track, avoiding the high friction appearing in rigid wheelsets when negotiating a curve (figure 1). The objective was to reduce wheelset weight. In addition, an increase in the critical speed of the vehicle is obtained, as it has been stated in many publications afterwards [2]. In fact, as it was shown in [3] through a linearized model, a minor influence of velocity on stability appears for this kind of train with respect to conventional ones.



Figure 1. Triangle frames

The problem with the initial frame consisting of triangles was that it made the train unable to run on both directions. There was no fore-aft symmetry. So, in the sixties, a single-axle truck between cars with a passive steering mechanism was developed for the third generation of Talgo trains (figure 2(a)). A mechanism similar to this is still in use and consists of a bar linkage based on a Watt mechanism that links the ends of the single-axle to the adjacent coaches. The fixed joints are attached to the coaches and the center of the coupler bar is connected to the axle-boxes by a revolution joint. When negotiating a curve, due to the relative rotation at the coupling between coaches, a widening takes place between the fixed ends of the steering mechanism on the outside of the curve, whereas the opposite effect occurs on the inside (figure 2(b)). This asymmetric movement maintains the axles along the radial direction of the curve. The use of this steering mechanism requires the coaches to be articulated.

Thanks to the reduced space taken up by the axles between the cars, the secondary suspension plane was elevated above the center of gravity for the fourth generation, thus allowing the Talgo trains for natural tilting back in the seventies. This suspension consists of two airsprings at the top of two cylindrical columns resting on a yoke frame in which the independent wheels are mounted (figure 3).

The articulation between coaches due to the steering mechanism couples the dynamics of the whole set, consequently longitudinal and lateral dampers together with bumpstops are used in order to avoid the transmission along the train of any perturbation appearing in any part of it (see also figure 3). A detailed analysis of the dynamic behavior of the train must be performed to make a correct selection of these elements.

Cars are also linked through a traction coupling and through the weightbearer mechanism (figure 4). The weightbearer mechanism performs two main tasks: it enables the end of each car to be suspended on

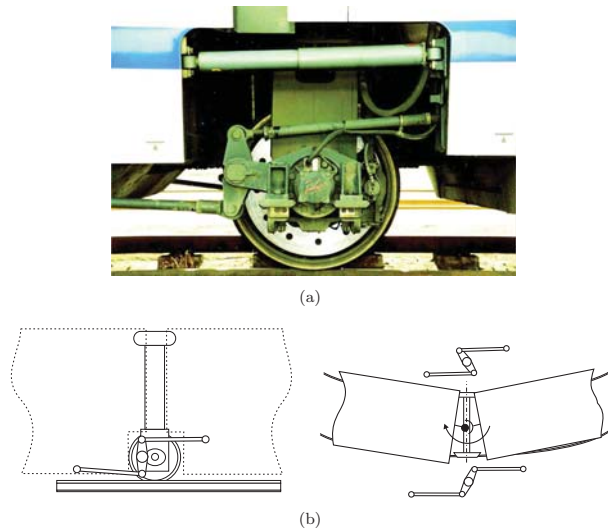


Figure 2. Talgo passive steering mechanism: (a) Coupler bar connected to axle-box and (b) Mechanism operation

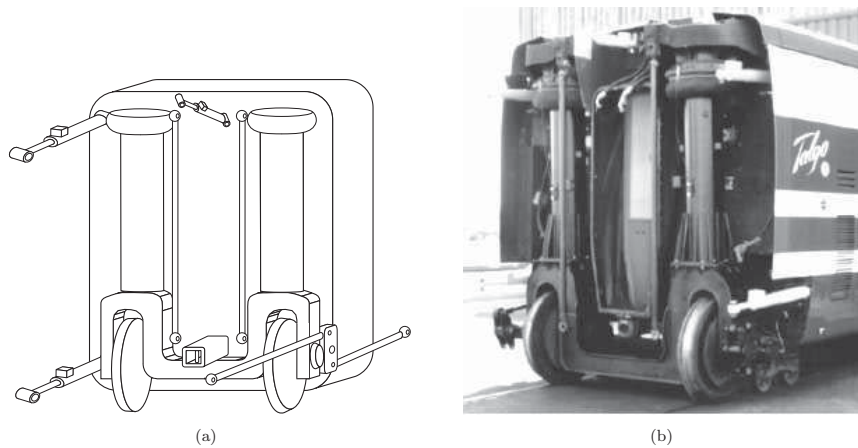


Figure 3. Talgo truck

the following one and it permits relative rotations between carbodies [4]. Each car rests on the following one, but also on its corresponding truck through the secondary suspension.

Other features of Talgo trains are the use of aluminium in order to keep a low axle-load and the lower coach floor thanks to the axles location, between the coaches rather than under them as is normally the case. The lower floor is specially interesting for the access of disabled people, and also to get a low center of gravity.

All these technologies have been successfully combined to develop a high speed train, the Talgo 350 (figure 5). The main difference with respect to previous generations of Talgo trains is the use of a primary suspension.

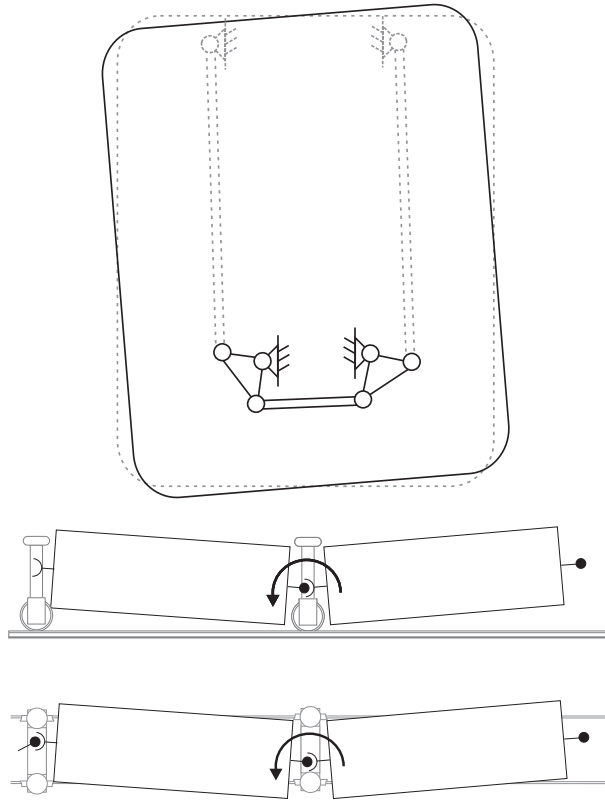


Figure 4. The weightbearer mechanism.

### 3 TRAIN MODEL

The model proposed in this paper is based on two main assumptions:

- The weightbearer mechanism and couplings between carbodies can be modeled as a spherical joint. Relative rotations are allowed, but the displacements of two points on each car located at the coupling are constrained to be the same.
- The steering mechanism achieves ‘perfect guidance’ of the axles. The yaw rotation of the trucks is related to the yaw rotation of the adjacent cars. New constraint equations appear to take this relation into account.

The first assumption substantially simplifies the model. It allows for the use of natural coordinates [5,6]. The basic idea is to treat the whole set as an open-loop chain mechanism where natural coordinates define its motion. Natural coordinates make use of certain points of interest of the mechanism, called basic points, to describe the motion of the whole mechanism. The spherical joints modeled between cars are clear candidates for consideration as basic points. If natural coordinates are defined at these joints and then shared by contiguous carbodies, they contribute to define the position of both, significantly simplifying the definition of constraint equations and reducing the number of variables, when compared to reference point coordinates. They should also allow for a more simple formulation and an easier postprocessing of results. The lateral and vertical displacements of these joints, together with the roll rotation of the carbodies, perfectly describe the low-frequency dynamics of the train, and so less variables are necessary





Figure 5. Talgo 350

when compared to reference point coordinates.

The use of these coordinates also permit an easier formulation of the constraint equations appearing from the second assumption, as the yaw rotation of the carbodies,  $\beta_j$ , can be defined as a function of the lateral displacements of the couplings with respect to the track plane,  $y_j$ , so additional variables are unnecessary (figure 6).

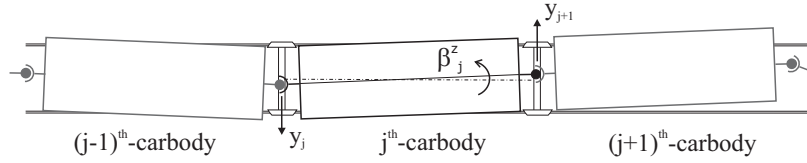


Figure 6. Carbody yaw as a function of the lateral displacement of the couplings.

Thus, the yaw rotation  $\psi_j$  of the trucks (except the end ones) can be calculated from the yaw rotations of the contiguous carbodies,  $\beta_{j-1}$  and  $\beta_j$  as follows

$$\psi_j = \frac{\beta_j^z + \beta_{j-1}^z}{2} = \frac{1}{2} \left( \frac{y_{j+1} - y_j}{a_j} + \frac{y_j - y_{j-1}}{a_{j-1}} \right) \quad (1)$$

where  $a_j$  is the longitudinal distance between couplings. From this relation, a set of holonomic and scleronomic constraints is derived. The associated constraint function is

$$\Gamma_j^\psi (y_{j+1}, y_j, y_{j-1}, \psi_j) = \frac{1}{2} \left( \frac{y_{j+1} - y_j}{a_j} + \frac{y_j - y_{j-1}}{a_{j-1}} \right) + \psi_{0j} - \psi_j \quad (2)$$

where  $\psi_{0j}$  is the mean of the yaw rotations of the contiguous carbodies due to the geometry of the track. This variable is different from zero for a transition curve or even for a constant radius curve if the lengths of the cars in the set are not the same.

The whole train can be assembled in a recursive way, and as many cars as needed for the analysis can be easily included. The only issue to bear in mind is that the end trucks are steered in a different manner [4]. The yaw rotation of the end trucks is forced to be the same as the next truck with respect to the end

carbody but with the opposite sign, in order to obtain a radial position. This is achieved through an auxiliary mechanism that transfers the relative rotation between the carbodies to the end truck (figure 7). Constraint equations for end trucks are slightly different (3).

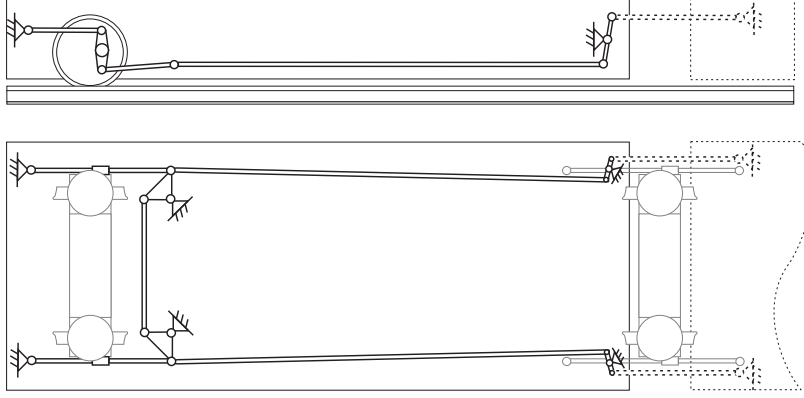


Figure 7. Steering mechanisms for end trucks.

$$\begin{aligned}\Gamma_1^\psi(y_3, y_2, y_1, \psi_1) &= \left( \frac{3}{2} \frac{y_2 - y_1}{a_1} - \frac{1}{2} \frac{y_3 - y_2}{a_2} \right) + \psi_{01} - \psi_1 \\ \Gamma_N^\psi(y_N, y_{N-1}, y_{N-2}, \psi_N) &= \left( \frac{3}{2} \frac{y_N - y_{N-1}}{a_{N-1}} - \frac{1}{2} \frac{y_{N-1} - y_{N-2}}{a_{N-2}} \right) + \psi_{0N} - \psi_N\end{aligned}\quad (3)$$

## 4 EQUATIONS OF MOTION

### 4.1 Kinematic analysis

Three coordinate systems are used to define system motion (figure 8): the global reference frame  $(x^0, y^0, z^0)$ ; a body reference frame associated with the truck  $(u_j, w_j)$ , the origin of which coincides with its center of mass in the central position,  $H_j$ , whereas axis  $u_j$  coincides with the lateral symmetry axis of the wheelset and axis  $w_j$  is normal to the track and upwards; and another reference frame associated with the coupling  $(x_j, y_j, z_j)$ , which moves with velocity  $V$  along the track and has its origin at the coupling in the central position,  $E_j$ , whereas the  $x_j$ -coordinate is chosen in the longitudinal direction, the  $y_j$ -coordinate in the lateral direction parallel to the track plane with the positive direction to the left-hand side and the  $z_j$ -coordinate normal to the track and upwards. Additional coordinates needed are  $\theta_j$  and  $\psi_j$ , which define the roll and yaw rotations of the trucks, and  $\phi_j$ , the roll rotation of the carbodies.

As a first approach, rigid contact is assumed. The parasitic motions of the lateral displacement and the rotation about the vertical axis,  $u_j$  and  $\psi_j$ , are chosen as independent coordinates. The vertical displacement and the rotation around the longitudinal axis,  $w_j$  and  $\theta_j$ , can be obtained as a function of these parasitic motions. So, the classical approach is followed, but considering that the yaw rotation of the truck is very small thanks to the steering mechanism, its influence is neglected. The holonomic and scleronomic constraints arising can be written as

$$\begin{aligned}w_j &= \Gamma^w(u_j) \\ \theta_j &= \Gamma^\theta(u_j)\end{aligned}\quad (4)$$

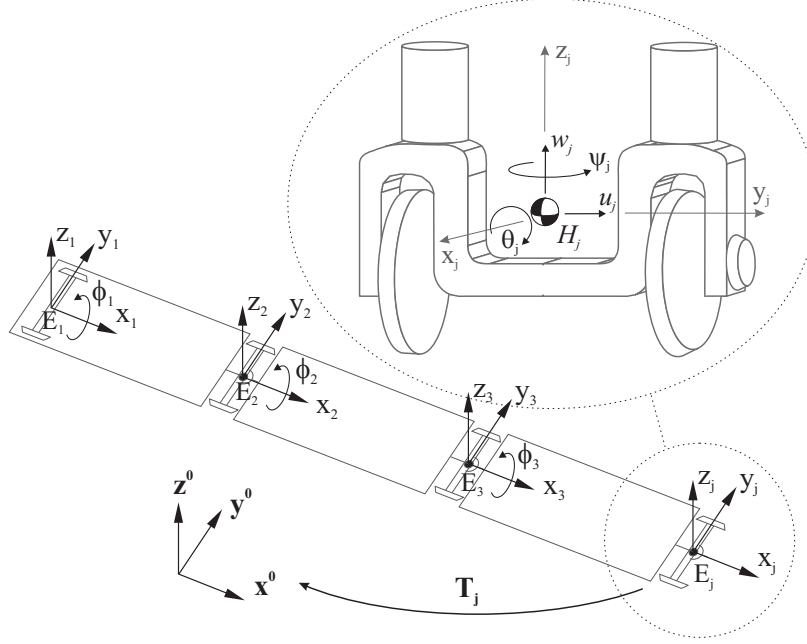


Figure 8. Model coordinates.

These constraint equations (4) were written using the Akima interpolation method [7], after solving the geometrical contact problem for real wheel and rail profiles.

When dealing with independently rotating wheels, a different rotational speed occurs for both wheels and so additional coordinates should be considered. However, as a first approach to the problem, it will be assumed that the difference is very small and so the different rotational angle of the wheels will not be taken into account.

In order to obtain the kinematic relations in the problem, a constant driving speed of the train  $V$  will be considered. The velocity of the carbody  $j$ -th can be calculated by means of the velocities of its two couplings,  $E_j$  and  $E_{j+1}$ . The velocity of the coupling  $E_j$  can be obtained as

$$\mathbf{v}_j^E = \mathbf{v}_j + \boldsymbol{\Omega}_j \times \left( \mathbf{T}_j \begin{Bmatrix} 0 \\ y_j \\ z_j \end{Bmatrix} \right) + \mathbf{T}_j \begin{Bmatrix} 0 \\ \dot{y}_j \\ \dot{z}_j \end{Bmatrix} \quad (5)$$

where  $\mathbf{v}_j$  is the global velocity of the origin of the reference frame associated with the coupling,  $\boldsymbol{\Omega}_j$  is the global angular velocity of this reference frame and  $\mathbf{T}_j$  is the rotation matrix between the coupling and the global reference frames. The transformation consists of a yaw, roll and pitch sequence, i.e. a succession of rotations about  $z^0$ -axis,  $\alpha_j^z$ , then about  $x^{0'}$ -axis,  $\alpha_j^x$ , and finally about  $y^{0''}$ -axis,  $\alpha_j^y$ .

$$\mathbf{v}_j = \mathbf{T}_j \begin{Bmatrix} V \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad ; \quad \boldsymbol{\Omega}_j = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{Bmatrix} \dot{\alpha}_j^z + \begin{Bmatrix} \cos(\alpha_j^z) \\ \sin(\alpha_j^z) \\ 0 \end{Bmatrix} \dot{\alpha}_j^x$$

Let  $h_j$  be the height of the carbody center of mass with respect to the couplings. Assuming that the center of mass is located half the distance between the couplings, its velocity can be obtained as

$$\mathbf{v}_j^G = \frac{1}{2} (\mathbf{v}_j^E + \mathbf{v}_{j+1}^E) + \mathbf{T}_j \begin{Bmatrix} 0 \\ -h_j \dot{\phi}_j \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (6)$$

Taking into account the assumptions made in section 3, the angular velocity of each carbody can be expressed in the coupling frame as

$$\omega_j^{\text{cb}} = {}^t\mathbf{T}_j \boldsymbol{\Omega}_j + \begin{Bmatrix} \dot{\phi}_j \\ \frac{1}{a_j} (\dot{z}_j - \dot{z}_{j+1}) \\ \frac{1}{a_j} (\dot{y}_{j+1} - \dot{y}_j) \end{Bmatrix} \quad (7)$$

The accelerations are obtained by differentiating the velocities with respect to time. Knowing that  $\dot{\mathbf{T}}_j \mathbf{v} = \boldsymbol{\Omega}_j \times (\mathbf{T}_j \mathbf{v})$ , then

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{v}}_j^E &= \dot{\mathbf{v}}_j + \dot{\boldsymbol{\Omega}}_j \times \left( \mathbf{T}_j \begin{Bmatrix} 0 \\ y_j \\ z_j \end{Bmatrix} \right) + \boldsymbol{\Omega}_j \times \left[ \boldsymbol{\Omega}_j \times \left( \mathbf{T}_j \begin{Bmatrix} 0 \\ y_j \\ z_j \end{Bmatrix} \right) \right] + \\ &+ \mathbf{T}_j \begin{Bmatrix} 0 \\ \ddot{y}_j \\ \ddot{z}_j \end{Bmatrix} + 2 \left[ \boldsymbol{\Omega}_j \times \left( \mathbf{T}_j \begin{Bmatrix} 0 \\ \dot{y}_j \\ \dot{z}_j \end{Bmatrix} \right) \right] \end{aligned} \quad (8)$$

$$\dot{\mathbf{v}}_j^G = \frac{1}{2} (\dot{\mathbf{v}}_j^E + \dot{\mathbf{v}}_{j+1}^E) + \mathbf{T}_j \begin{Bmatrix} 0 \\ -h_j \ddot{\phi}_j \\ 0 \end{Bmatrix} + \boldsymbol{\Omega}_j \times \left( \mathbf{T}_j \begin{Bmatrix} 0 \\ -h_j \dot{\phi}_j \\ 0 \end{Bmatrix} \right) \quad (9)$$

$$\dot{\omega}_j^{\text{cb}} = {}^t\mathbf{T}_j \dot{\boldsymbol{\Omega}}_j + \begin{Bmatrix} \ddot{\phi}_j \\ \frac{1}{a_j} (\ddot{z}_j - \ddot{z}_{j+1}) \\ \frac{1}{a_j} (\ddot{y}_{j+1} - \ddot{y}_j) \end{Bmatrix} \quad (10)$$

The velocity of the truck center of mass,  $H_j$ , can be calculated as

$$\mathbf{v}_j^H = \mathbf{v}_j + \boldsymbol{\Omega}_j \times \left( \mathbf{T}_j \begin{Bmatrix} 0 \\ u_j \\ w_j \end{Bmatrix} \right) + \mathbf{T}_j \begin{Bmatrix} 0 \\ \dot{u}_j \\ \dot{w}_j \end{Bmatrix} \quad (11)$$

Because of the small values of  $\theta_j$  and of  $\psi_j$ , further simplifying assumptions can be made with no loss of precision in the expressions modeling the kinematics. In this way, the angular velocity of the non-rotating masses of the truck can be expressed in the body frame as

$$\omega_j^{\text{f}} = {}^t\mathbf{T}_j \boldsymbol{\Omega}_j + \begin{Bmatrix} \dot{\theta}_j \\ \theta_j \dot{\psi}_j \\ \dot{\psi}_j \end{Bmatrix} \quad (12)$$

Then, the angular velocity of the wheels can be written

$$\omega_j^w = \omega_j^f + \begin{Bmatrix} 0 \\ V/r \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (13)$$

where  $r$  is the rolling radius of the wheels.

The derivatives of these equations with respect to time correspond to the acceleration of the truck center of mass and the angular acceleration of the truck,

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{v}}_j^H = \dot{\mathbf{v}}_j + \dot{\boldsymbol{\Omega}}_j \times \left( \mathbf{T}_j \begin{Bmatrix} 0 \\ u_j \\ w_j \end{Bmatrix} \right) + \boldsymbol{\Omega}_j \times \left[ \boldsymbol{\Omega}_j \times \left( \mathbf{T}_j \begin{Bmatrix} 0 \\ u_j \\ w_j \end{Bmatrix} \right) \right] + \\ + \mathbf{T}_j \begin{Bmatrix} 0 \\ \ddot{u}_j \\ \ddot{w}_j \end{Bmatrix} + 2 \left[ \boldsymbol{\Omega}_j \times \left( \mathbf{T}_j \begin{Bmatrix} 0 \\ \dot{u}_j \\ \dot{w}_j \end{Bmatrix} \right) \right] \end{aligned} \quad (14)$$

$$\dot{\omega}_j^w = \dot{\omega}_j^f = {}^t\mathbf{T}_j \boldsymbol{\Omega}_j + \begin{Bmatrix} \ddot{\theta}_j \\ \dot{\theta}_j \dot{\psi}_j + \theta_j \ddot{\psi}_j \\ \ddot{\psi}_j \end{Bmatrix} \quad (15)$$

#### 4.2 Dynamic analysis

The equations of motion are derived by using Lagrange's formulation written for a set of dependent coordinates:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{y}_j} + \frac{\partial U}{\partial y_j} + \frac{\partial R}{\partial \dot{y}_j} + \lambda_{j-1}^\psi \frac{\partial \Gamma^\psi(y_j, y_{j-1}, y_{j-2}, \psi_{j-1})}{\partial y_j} + \\ + \lambda_j^\psi \frac{\partial \Gamma^\psi(y_{j+1}, y_j, y_{j-1}, \psi_j)}{\partial y_j} + \lambda_{j+1}^\psi \frac{\partial \Gamma^\psi(y_{j+2}, y_{j+1}, y_j, \psi_{j+1})}{\partial y_j} = Q_j^y \end{aligned} \quad (16)$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{z}_j} + \frac{\partial U}{\partial z_j} + \frac{\partial R}{\partial \dot{z}_j} = Q_j^z \quad (17)$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{\phi}_j} + \frac{\partial U}{\partial \phi_j} + \frac{\partial R}{\partial \dot{\phi}_j} = Q_j^\phi \quad (18)$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{u}_j} + \frac{\partial U}{\partial u_j} + \frac{\partial R}{\partial \dot{u}_j} + \lambda_j^w \frac{\partial \Gamma^w(u_j)}{\partial u_j} + \lambda_j^\theta \frac{\partial \Gamma^\theta(u_j)}{\partial y_j} = Q_j^u \quad (19)$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{w}_j} + \frac{\partial U}{\partial w_j} + \frac{\partial R}{\partial \dot{w}_j} - \lambda_j^w = Q_j^w \quad (20)$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}_j} + \frac{\partial U}{\partial \theta_j} + \frac{\partial R}{\partial \dot{\theta}_j} - \lambda_j^\theta = Q_j^\theta \quad (21)$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{\psi}_j} + \frac{\partial U}{\partial \psi_j} + \frac{\partial R}{\partial \dot{\psi}_j} - \lambda_j^\psi = Q_j^\psi \quad (22)$$

where  $T$  is the kinetic energy,  $U$  is the potential energy related to the springs of the suspensions,  $R$  is the Rayleigh dissipation function of the dampers,  $Q$  are the generalized forces and  $\lambda^\psi$ ,  $\lambda^w$  and  $\lambda^\theta$  are the Lagrange multipliers.

$\lambda^\psi$  ensues from the steering mechanism constraint equations (2) and (3), while  $\lambda^w$  and  $\lambda^\theta$  arise from the wheel-rail contact constraint equations (4).

The kinetic energy for a set of  $N - 1$  cars and  $N$  trucks can be calculated from

$$\begin{aligned} T = & \sum_{j=1}^{N-1} \left( \frac{1}{2} m_j^{cb} ({}^t \mathbf{v}_j^G \mathbf{v}_j^G) + \frac{1}{2} {}^t \omega_j^{cb} \mathbf{I}_j^{cb} \omega_j^{cb} \right) + \\ & + \sum_{j=1}^N \left( \frac{1}{2} m_j^r ({}^t \mathbf{v}_j^H \mathbf{v}_j^H) + \frac{1}{2} {}^t \omega_j^w \mathbf{I}_j^w \omega_j^w + \frac{1}{2} {}^t \omega_j^f \mathbf{I}_j^f \omega_j^f \right) \end{aligned} \quad (23)$$

$m_j^{cb}$  and  $\mathbf{I}_j^{cb}$  are the  $j$ -th carbody mass and inertia matrix, respectively.  $m_j^r$  considers the whole truck mass, while  $\mathbf{I}_j^w$  refers to the inertia matrix of both wheels and  $\mathbf{I}_j^f$  refers to the inertia matrix of the truck frame.

The airsprings of the secondary suspension contribute to both the potential energy  $U$  and the Rayleigh dissipation function  $R$ . As a first approach, a linearized model of the airsprings is considered, and then equivalent stiffness and damping coefficients are calculated for the vertical and the lateral directions (see figure 9). The relative displacements, and then the relative velocities, are obtained from the system coordinates in equation (24), where  $b$  is the vertical distance between the center of mass of the carbody and the secondary suspension plane and  $c$  is half the lateral distance between the airsprings.

$$\begin{cases} \text{In the lateral direction, } ((y_j - u_j) - b(\phi_j - \theta_j)) \\ \text{In the vertical direction, } ((z_j - w_j) \pm c(\phi_j - \theta_j)) \end{cases} \quad (24)$$

The connection between carbodies is modeled in a simplified way by replacing the dampers and springs with a damping matrix and a yaw stiffness coefficient that provide the same coupling effect (see figure 10). These simplified parameters can be obtained from the real characteristics of the elements mounted, together with the location of their joints. In this way, three damping coefficients for the relative angular velocities of the carbodies in the roll, the pitch and yaw directions are defined. Also a stiffness coefficient for the relative yaw between carbodies is estimated.

The Rayleigh dissipation function for the elements connecting the carbodies is obtained in equation (25), where  $\mathbf{D} = [d_\phi, d_\varphi, d_\psi]$  is the diagonal damping matrix and  $\Delta_j$  is the relative angular velocity between the carbodies written in the  $j$ -th coupling reference frame.

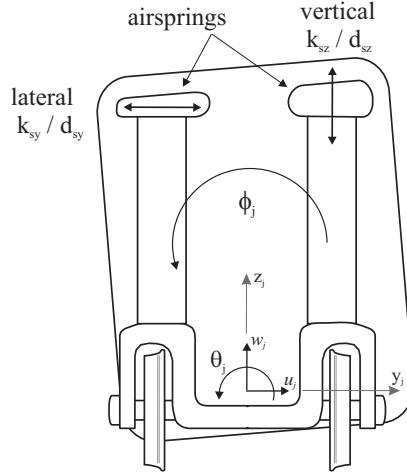


Figure 9. Airsprings of the secondary suspension.

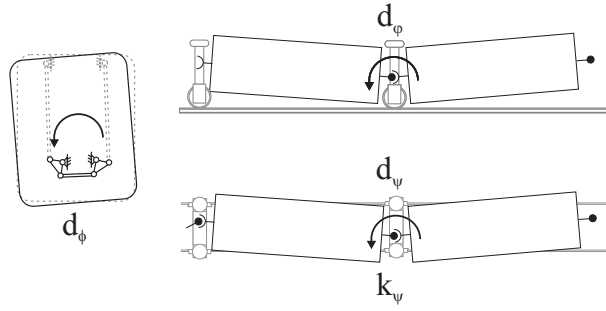


Figure 10. Damping matrix and yaw stiffness between carbodies.

$$R^{cb} = \frac{1}{2} \sum_{j=2}^{N-1} {}^t \Delta_j \mathbf{D}_j \Delta_j$$

$$\Delta_j = \omega_j^{cb} - {}^t \mathbf{T}_j \mathbf{T}_{j-1} \omega_{j-1}^{cb} \quad (25)$$

Analogous to the derivation of equation (1) in section 3, the contribution to the elastic potential energy of the system due to the yaw stiffness between carbodies can be obtained from the lateral displacements of the couplings and the geometric characteristics of the track ( $\Theta_j$  is the relative yaw rotation due to the track curvature) as follows

$$U^{cb} = \sum_{j=2}^{N-1} \left[ \frac{1}{2} k_{\psi} \left\{ \Theta_j + \frac{1}{2} (y_{j+1} - 2y_j + y_{j-1}) \right\}^2 \right] \quad (26)$$

Wheel-rail contact forces and the vehicle weight are considered through the generalized forces,  $Q$ . The

dynamics of the system is strongly conditioned by the forces arising from the contact between wheel and rail [8]. The tangential forces are calculated through the Johnson-Vermeulen theory modified by Shen, Hedrick and Elkins [9], as it is a fast and reliable method, although some simulations have been carried using FASTSIM [10] to check the results. To take the presence of independently rotating wheels into account the longitudinal component of the tangential force for the steady-state condition [2] is considered to be zero.

Also, the non-linear characteristics of any train components that may be present, e.g. bumpstops or Coulomb friction dampers, can be taken into account as external forces acting on the vehicle through the generalized forces.

## 5 NUMERICAL RESULTS

Some numerical simulations were performed in order to validate the model developed. The equations of motion result in a stiff differential-algebraic system and so a BDF method with variable step size and error control was implemented [11, 12]. The numerical results should allow us to verify the assumptions made and also give some insight into the dynamic behavior of the train. A demonstration example is developed next for a Talgo 7th generation tilting train.

A detailed study of the results obtained is beyond the scope of this paper, so only a few results are presented. These correspond to a simulation of the curving behavior of the train. The train travels at  $220 \text{ km/h}$  through a  $1580 \text{ m}$  radius curve with an unbalanced lateral acceleration of  $1.32 \text{ m/s}^2$  at track level. The trucks angle of attack should remain approximately zero and the roll rotation of the carbodies should lead to a lower lateral acceleration at the passenger level, improving passenger comfort.

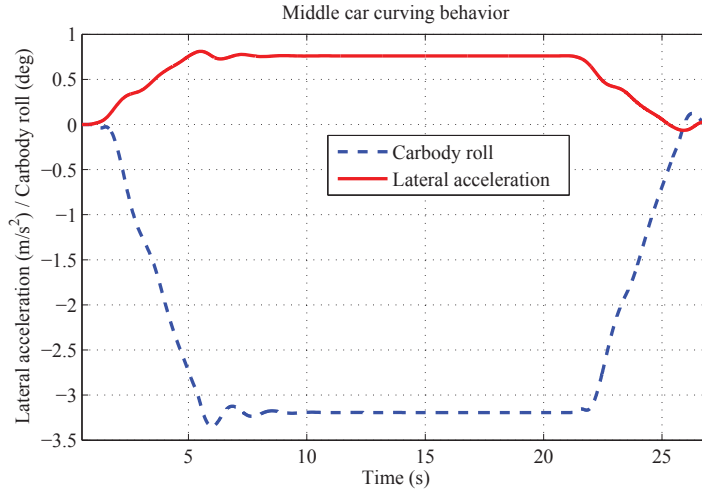


Figure 11. Curving behavior of the middle car with an unbalanced lateral acceleration of  $1.32 \text{ m/s}^2$ .

Figure 11 shows the curving behavior of the middle car in a set of 5 cars. This car is usually the cafeteria or restaurant car and is the one that rests on two trucks. As shown in the figure, the carbody rolls inwards to the curve thus greatly reducing the lateral forces acting on passengers, as lateral acceleration decreases from  $1.32 \text{ m/s}^2$  at track level to nearly  $0.8 \text{ m/s}^2$  at passenger level. It should be noticed that the roll angle is given for the coupling reference frame that follows the track and so the cant angle has already been considered.

To verify how the steering mechanisms work, two results for an end truck and another truck are given.



Figure 12 shows the angles of attack of both the first and the second trucks of the set in traveling direction. Zero degrees denotes the radial position, so little deviation can be seen to occur here.

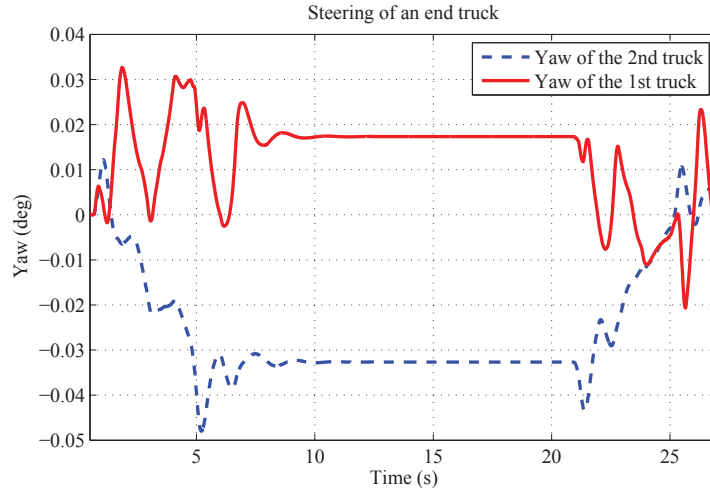


Figure 12. End truck steering mechanism.

Figure 13 shows the lateral displacement and the angle of attack for the third truck in traveling direction. It moves outward to the curve until flange contact occurs, while the angle of attack remains almost in the radial position thanks to steering mechanism.

The contact forces are obtained and the Q and Y components shown. Also the ratio  $Y/Q$  is calculated to study the likelihood of a wheelclimb derailment. These forces are consistent with the train motion, although a better contact model should be used to obtain accurate values.

## 6 CONCLUSIONS

The singular technical characteristics of Talgo trains have been presented in this paper. Also, a specific model has been developed in order to study the dynamic behavior of these trains. In a first approach, some assumptions have been done in order to build a model with a low computational cost.

The main mechanisms of the train have been replaced by constraint equations, instead of adding new bodies to the model; natural coordinates have been used to describe the kinematics of the carbodies, resulting in a efficient way to analyze the low frequency dynamics of the train with a low number of degrees of freedom; similarly, simplified models are proposed to take into account the dynamic coupling between cars due to the articulated configuration of these trains.

Finally, some numerical results regarding the curving performance of these trains are shown, with a good correlation with the expected behavior.

## ACKNOWLEDGEMENTS

The authors wish to express their gratitude for the support received in the course of this work from the Spanish Ministry of Education and Science through the Research Project TALGO-MEC-FEDER plan TRA2004-01828/TREN.

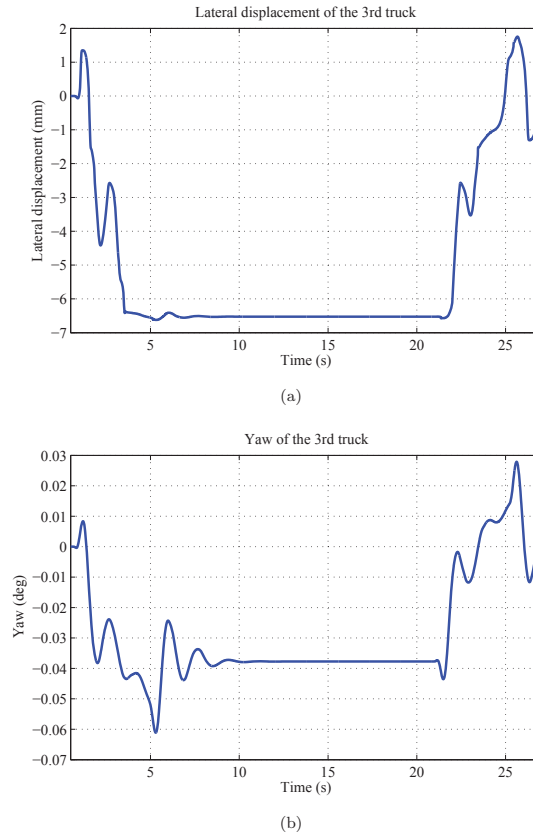
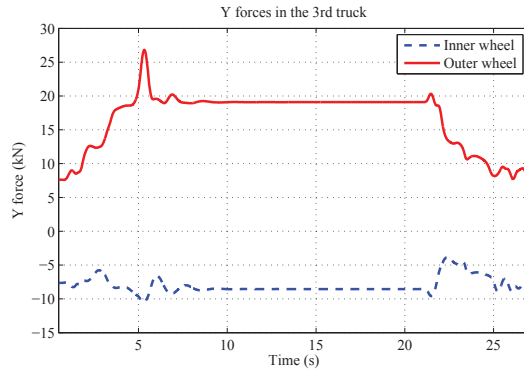


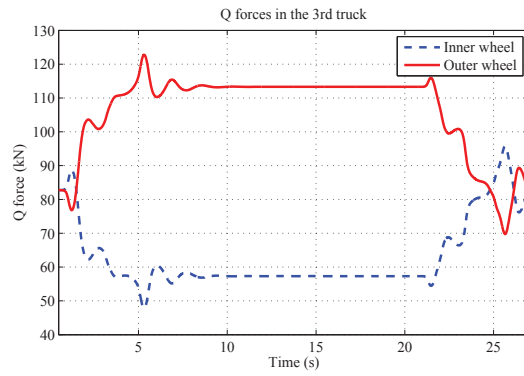
Figure 13. 3rd truck curving behavior: (a) Lateral displacement and (b) Yaw

## References

- [1] A.H. Wickens and Z. Nagy, *Guidance and stability of articulated railway vehicles with single axles and various forms of passive and active steering*, Proceedings of the 16th IAVSD Symposium, Pretoria, South Africa, 1999.
- [2] B. M. Eickhoff and R.F. Harvey, *Theoretical and experimental evaluation of independently rotating wheels for railway vehicles*, Proceedings of the 11th IAVSD Symposium, Kingston, Ontario, Canada, 1989.
- [3] L. Baeza, J. Carballeira, A. Roda, J.E. Tarancón, *Method for obtaining the modal properties of articulated trains equipped with independently rotating wheels*, Vehicle System Dynamics, Vol. 44, 2006, pp. 841–856.
- [4] E. García and J. Chiva, *Dynamic simulations of Talgo track-inspection trainset*, 16th European ADAMS User Conference, Berchtesgaden, Germany, 2001.
- [5] J. García de Jalón, E. Bayo, *Kinematic and dynamic simulation of multibody systems: The real-time challenge*, Springer-Verlag, New York, 1994.
- [6] J. García de Jalón, *Twenty-five years of natural coordinates*, Multibody System Dynamics, 18, 2007, 15–33.
- [7] H. Akima, *A method of univariate interpolation that has the accuracy of a third-degree polynomial*, ACM Transactions on Mathematical Software, 17 (1991), pp. 341–366.
- [8] S. Iwnicki, *Simulation of wheel-rail contact forces*, Fatigue and Fracture of Engineering Materials and Structures, 26 (10), 2003, pp. 887–900.
- [9] Z.Y. Shen, J.K. Hedrick, J.A. Elkins, *A comparison of alternative creep-force models for rail vehicle dynamic analysis*, Proceedings of the 8th IAVSD Symposium, Swets & Zeitlinger, Lisse, Holland, 1984.
- [10] J.J. Kalker, *Three-dimensional elastic bodies in rolling contact*, ISBN 0-7923-0712-7, Kluwer Academic Publishers, 1990.
- [11] E. Eich-Soellner, C. Führer, *Numerical Methods in Multibody Dynamics*, ECMI-Series, ISBN 3-519-02601-5, Teubner, Stuttgart, 1998.
- [12] B. Simeon, C. Führer, P. Rentrop, *Differential-algebraic equations in vehicle system dynamics*, Surveys on Mathematics for Industry, I, Springer-Verlag, 1991, pp. 1–37.



(a)



(b)

Figure 14. 3rd truck contact forces: (a) Y forces and (b) Q forces

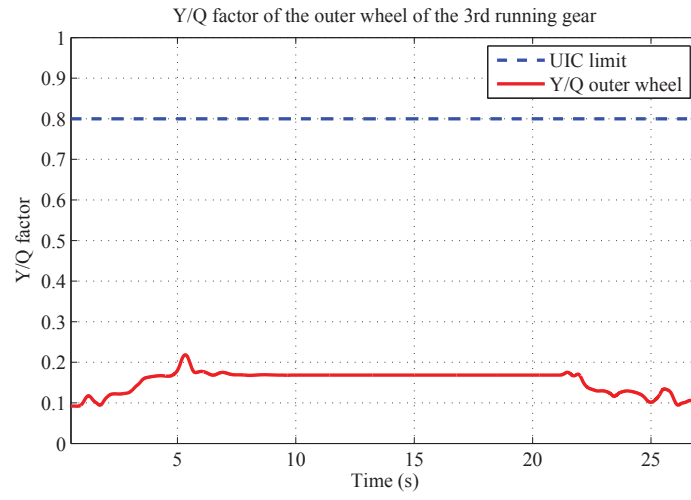


Figure 15. Derailment factor of the outer wheel of the 3rd truck.