

UNIVERSIDAD POLITECNICA DE VALENCIA

ESCUELA POLITECNICA SUPERIOR DE GANDIA

Master en Ingeniería Acústica



UNIVERSIDAD
POLITECNICA
DE VALENCIA



ESCUELA POLITECNICA
SUPERIOR DE GANDIA

**Análisis numérico mediante elementos
finitos de la dispersión acústica
producida por cuerpos elásticos de
dimensiones finitas**

TESIS DE MASTER

Autor:

Nuria González Salido

Director/es:

D. Rubén Picó Vila

D. Francisco Camarena Femenia

GANDIA, 2012

ANÁLISIS NUMÉRICO MEDIANTE ELEMENTOS FINITOS DE LA DISPERSIÓN ACÚSTICA PRODUCIDA POR CUERPOS ELÁSTICOS DE DIMENSIONES FINITAS

Autor: Nuria González Salido

Director1: Rubén Picó Vila

Director2: Francisco Camarena Femenía

Resumen

El estudio numérico de la dispersión de ondas planas de sonido por diferentes geometrías finitas es presentado. La información contenida en los ecos (amplitud y fase) permite caracterizar ciertas propiedades de los dispersores como la forma, el tamaño o la orientación. Diferentes geometrías simples como esferas, cilindros y esferoides son a menudo empleadas en acústica submarina y medicina para modelar las distintas estructuras dispersoras, tales como las vejigas natatorias de los peces, las células sanguíneas o las fibras del corazón.

En los distintos modelos teóricos los efectos de difracción, reflexión y transmisión deben ser considerados a la hora de estudiar la energía dispersada por un cuerpo sólido. En particular existen soluciones analíticas para las geometrías más sencillas como la esfera. Para el resto de casos debe recurrirse a métodos numéricos u otros modelos complejos como el T-matrix

En este trabajo, el método de elementos finitos es usado para estudiar la dispersión de objetos sumergidos en agua con distintas geometrías y condiciones de contorno. Se emplea el software COMSOL Multiphysics para la implementación de dicho método. Los resultados numéricos son comparados con modelos teóricos, numéricos y datos experimentales medidos en laboratorio

Abstract

A numerical study of scattering of plane sound waves by different finite geometries is shown. The information contained in the echoes (amplitude and phase) allows the characterization of certain properties of the scatters as the shape, size or orientation. Simple geometries as spheres, cylinders and spheroids are often used in underwater acoustic and medical imaging to model the different scattering structures, such as fish swim bladders, blood cells, or the fibers of heart.

Theoretical models include the effects of diffraction, reflection and transmission adapted to the shape, composition and size relative to the wavelength of the different objects. In particular, there are analytical solutions derived by Faran for simple geometries such as sphere and cylinder, but for the other cases, numerical methods like T-matrix, or approximate simple solutions must be used.

In this work, the finite element method was used to model the scattering from submerged targets with these simple geometries and different boundary conditions. COMSOL Multiphysics are used for the implementation of the finite element method. Modeling results are compared with theoretical results and laboratory experimental data.

Autor: Nuria González Salido, email: nugonsa@epsg.upv.es

Fecha de entrega: 13-01-2012

Índice

I. Introducción	4
II. Dispersión	5
II. 1. Definiciones. Generalidades	5
II. 2. Tipos de dispersores	7
II. 3. Fenómenos que influyen en la dispersión del blanco	7
II. 3. a. Reflexión especular y transmisión o refracción:	8
II. 3. b. Difracción	9
II. 3. c. Interacción entre un dispersor sólido y un medio fluido:	9
II. 4. Dispersión en función de la frecuencia	10
II. 5. Dispersión De objetos elásticos curvados en el régimen de interferencia	11
II. 5. a. Dispersión de cuerpos impenetrables	11
II. 5. b. Dispersión de cuerpos elásticos	12
II. 6. Importancia de la fase en la identificación acústica del objeto	13
III. Modelos Teóricos para la dispersión acústica de objetos geométricos canónicos.....	14
III. 1. Método de Kirchoff: Reflexión especular	14
III. 2. Soluciones analíticas.....	14
III. 2. a. Soluciones modales.....	14
III. 2. b. Teoría de dispersión resonante.....	16
III. 2. c. Aproximaciones para geometrías complejas	16
IV. Aplicaciones de la dispersión.....	17
IV. 1. Aplicaciones submarinas.....	17
IV. 1. a. Modelos de dispersión de los organismos marinos	17
IV. 1. b. Importancia de la orientación del blanco.....	18
IV. 2. Aplicaciones médicas.....	19
IV. 2. a. Modelos de dispersión de los tejidos humanos.....	19
IV. 2. b. Aplicaciones de la caracterización de los tejidos.....	21
V. Elementos finitos	23
V. 1. Conceptos generales del método de elementos finitos.....	23
V. 2. Herramientas software.....	24
VI. Modelos de simulación.....	26
VI. 1. Consideraciones generales	26
VI. 2. Modelos 2D-Axisimétricos	27
VI. 3. Modelos 3D.....	27
VI. 3. a. Elección del dominio 3D.....	27
VI. 3. b. Cilindro finito	27
VI. 3. c. Esferoide elongado	28
VI. 4. Modos de vibración.....	28
VII. Resultados	29
VII. 1. Dispersor esférico.....	29
VII. 1. a. Esfera rígida versus esfera de liberación de presión.....	29
VII. 1. b. Esfera elástica de Tungsteno	30

VII. 1. c. Esfera de poliuretano: Modelo de célula.....	33
VII. 1. d. Esfera fluida.....	35
VII. 2. Cilindro finito	40
VII. 2. a. Incidencia normal $\theta = 0^\circ$	41
VII. 2. b. Incidencia oblicua.....	42
VII. 3. Esferoide elongado	45
VII. 3. a. Respuesta elástica del esferoide elongado con relación $a/b = 4$	45
VII. 4. Extracción de la fase de las señales elástica	47
VIII. Conclusiones	48
IX. Agradecimientos	48
X. Bibliografía.....	49
XI. Anexos	50

I. INTRODUCCIÓN

La dispersión acústica producida por los cuerpos ha sido estudiada a lo largo de la historia por importantes investigadores, tales como Rayleigh, Helmholtz, Kirchoff o Born. Sus técnicas analíticas y soluciones a los problemas forman parte del núcleo matemático de la física dedicada al estudio de la propagación de ondas. Sin embargo, los cuerpos no son siempre geometrías simples que puedan resolverse analíticamente, por lo que en ocasiones es necesario recurrir a técnicas numéricas basadas en las formulaciones clásicas. Además, ya que la presión sonora dispersada es medible, los resultados numéricos pueden ser empleados para contrastar los resultados experimentales en aquellas situaciones en las que no se dispone de soluciones analíticas. Estos métodos numéricos, permiten también obtener información adicional como el análisis modal o la respuesta de dispersores ideales que no es posible conocer a partir de la medición en el laboratorio.

Por ello, se realiza este trabajo con el objetivo principal de implementar modelos acústicos mediante el método de elementos finitos para describir la respuesta de la dispersión de objetos con geometrías canónicas tales como esferas, cilindros finitos y esferoides. Estos dispersores pueden ser empleados como primera aproximación para algunos de los dispersores más comunes tanto en acústica submarina, como en el campo de la medicina, en particular en las técnicas de diagnóstico médico o imagen ultrasónica.

Otro objetivo del proyecto consiste en analizar las diferencias que se produce entre la dispersión de blancos con propiedades acústicas distintas tales como dispersores fluidos o elásticos.

Como último objetivo este trabajo pretende hacer también una recopilación de los distintos modelos teóricos empleados para la descripción de los organismos acuáticos y de los tejidos humanos.

El proyecto se ha realizado en colaboración con la escuela de ingeniería electrónica, eléctrica y computacional de la universidad de Birmingham, y en concreto con el Dr Phil Atkins y el estudiante de doctorado Alan Islas Cital, cuyas investigaciones actuales [1] se centran en la extracción, a partir de medidas experimentales, de la fase de dispersión como parámetro complementario para la caracterización e identificación de blancos elásticos, en aplicaciones sonar. Nuestros resultados, para el caso de los dispersores elásticos estudiados, sirven por lo tanto como datos de contraste y validación para las mediciones experimentales. Estos resultados serán presentados en el 11 congreso francés de acústica de Nantes. El *abstract* presentado se adjunta en el Anexo XI.1

II. DISPERSIÓN

II. 1. DEFINICIONES. GENERALIDADES

Antes de introducir los modelos teóricos y de describir los distintos mecanismos que intervienen en la dispersión de los objetos, comenzaremos realizando una descripción de los parámetros fundamentales que habitualmente se emplean en formulaciones teóricas relacionadas con la dispersión de objetos.

Asumiendo que la onda incidente es plana e ignorando la fase, se definen los siguientes términos:

1. **Longitud de dispersión**, que describe las propiedades de dispersión del objeto y depende tanto de la dirección de incidencia como de la de observación :

$$L(\theta, \varphi, f) = \frac{P_{scat}}{P_{inc}} \left[R 10^{\frac{\alpha(f)R}{20}} \right] \quad (1)$$

donde P_{inc} es la amplitud de la presión incidente y P_{scat} es la amplitud de presión dispersada en campo lejano, es decir en un punto situado a una distancia R , para el que se cumple que $kr \gg 1$, siendo k el número de onda. La presión dispersada se obtiene a partir de la eq.1 como:

$$P_{scat} = L(\theta, \varphi, f) \frac{P_{inc}}{R} 10^{\frac{\alpha(f)R}{20}} \quad (2)$$

donde la onda dispersada disminuye por la divergencia esférica con $1/R$, y por la atenuación del medio con $10^{-\alpha(f)R/20}$, y depende de las características dispersivas del objeto a través de $L(\theta, \varphi, f)$.

2. **Longitud de dispersión en la dirección de vuelta**: Es la longitud de dispersión en la dirección del emisor, $\theta, \varphi = 0$:

$$L_{bs} = L(0,0, f) \quad (3)$$

3. **Sección eficaz de dispersión diferencial** (*differential scattering cross section*): Es un concepto que viene de la física cuántica y que en acústica se define como el cuadrado de la longitud de dispersión:

$$\sigma_s(\theta, \varphi, f) = |L(\theta, \varphi, f)|^2 = \frac{P_{scat}^2}{P_{inc}^2} R^2 10^{\frac{\alpha(f)R}{10}} \quad (4)$$

Esta magnitud representa la potencia dispersada en la dirección de observación en un ángulo sólido que abarca un área igual a R^2 , tal y como se muestra en la fig. 1.

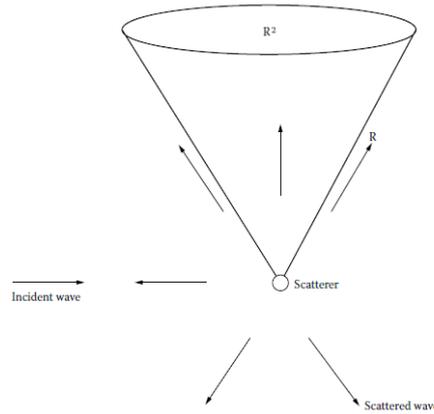


Fig. 1. Sección eficaz de dispersión diferencial

4. **Sección eficaz de dispersión diferencial en la dirección de vuelta** (*differential backscattering cross section*) que es la sección transversal de dispersión limitado a la dirección de vuelta

$$\sigma_{bs} = \sigma_s(0,0,f) = |L_{bs}|^2 \quad (5)$$

5. **Sección eficaz de dispersión total:** Es la integral de $\sigma_s(\theta, \varphi, f)$ sobre 4π del ángulo sólido:

$$\sigma_t(f) = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi \sigma_s(\theta, \varphi, f) \sin \theta d\theta = \frac{\pi_{scat}}{I_{inc}} \quad (6)$$

donde π_{scat} es la potencia dispersada por el objeto.

6. **Función de forma:** Es otra cantidad relacionada, normalizada a la dimensión característica del objeto dispersor, a , y medida en el campo lejano (región de Fraunhofer). Para objetos de dimensión finita como la esfera, el cilindro finito o el esferoide, a se corresponde con el radio de la menor esfera que contenga al dispersor y la función de forma se obtiene como:

$$f_{bs}(\theta, ka) = \frac{2}{a} L_{bs} = \frac{2R}{a} \frac{p_{scat}(R, \theta, ka)}{p_{inc}} \quad (7)$$

7. **Fuerza del blanco** (*Target strength*): Es una medida logarítmica de la sección eficaz de dispersión, y describe la reflectividad acústica de un objeto, expresado como la proporción decibélica entre la intensidad o presión, incidente y reflejada a una distancia de 1m del objeto dispersor:

$$TS = 10 \log \left(\frac{I_s}{I_i} \right) = 20 \log \left(\frac{p_s}{p_i} \right) \quad (8)$$

Otras formas de escribir la fuerza del blanco, en función de la sección eficaz de dispersión, o de la sección eficaz de dispersión en la dirección del emisor son:

$$TS(\theta, \varphi, f) = 10 \log(\sigma_s(\theta, \varphi, f)/1m^2) = 20 \log(L_s(\theta, \varphi, f)/1m) \quad (9)$$

$$TS(f) = 10 \log(\sigma_{bs} / 1m^2) = 20 \log(L_{bs} / 1m) \quad (10)$$

II. 2. TIPOS DE DISPERSORES

El estudio de la dispersión acústica puede realizarse en medios fluidos, sólidos o viscosos para dispersores cuya composición y características cambian notablemente de unos casos a otros. Por ejemplo, en el caso de los tejidos humanos la dispersión puede producirse por la inhomogeneidades de tejidos que a menudo se modelan como fluctuaciones de densidad y compresibilidad respecto a los valores constantes del medio circundante o por calcificaciones o acumulaciones de grasa que pueden modelarse como esferas homogéneas con unas determinadas propiedades acústicas. Por el contrario, en el océano, la dispersión acústica puede originarse por la presencia de diferentes blancos, como peces, algunos de ellos caracterizados por la vejiga natatoria cuyo modelo acústico se modela como un esferoide elongado relleno de gas, o también por la presencia de zooplancton o burbujas de aire. Los diferentes modelos de dispersión de los tejidos y de los blancos submarina se analizan con mas detalles en la secciones IV.1 y IV.2

En el caso de dispersores homogéneos, una forma sencilla de caracterizar la relación entre el medio y un dispersor [2] es definiendo la relación que existe entre sus densidades como

$$\varepsilon = \frac{\rho_{medio}}{\rho_{dispersor}} \quad (11)$$

En el caso de objetos sumergidos en agua, donde en la ec.11 la densidad del medio toma el valor de la del agua $\rho_{medio} = 998 \text{ kg/m}^3$ se pueden identificar los siguientes tipos de blanco:

- $\varepsilon \gg 1$ el dispersor tiene densidades menores que la del agua y se conoce como dispersor fluido. Este es el caso de dispersores gaseoso como las burbujas de aires sumergidas en el océano. En el caso extremo de que $\varepsilon \rightarrow \infty$ el dispersor se describe como una condición de contorno de liberación de presión, es decir la presión acústica en el contorno es cero.
- $\varepsilon \ll 1$ el dispersor tiene densidad mayor que la del agua y se conoce como dispersor duro. Es el caso de los cuerpos sólidos sumergidos en agua. En el caso extremo de que $\varepsilon \rightarrow 0$ el dispersor se describe como una condición de contorno rígida, en el que la velocidad normal de partícula en el contorno es nula.
- $\varepsilon \approx 1$ el dispersor tiene densidades similares a la del agua. Es el caso de dispersores viscosos como la carne del pescado.

II. 3. FENÓMENOS QUE INFLUYEN EN LA DISPERSIÓN DEL BLANCO

Cuando una onda acústica, que se propaga por un medio fluido, interacciona con algún tipo de obstáculo se producen distintos fenómenos que deben ser considerados a la hora de estudiar la energía dispersada por un cuerpo solido. Estos fenómenos dependen de las propiedades del objeto, tales como su composición, forma y dimensiones en relación a longitud de onda incidente, y son

fundamentalmente los fenómenos geométricos de reflexión especular y transmisión, la difracción y el tipo de interacción que se produce entre el dispersor y el medio.

II. 3. a. Reflexión especular y transmisión o refracción:

Cuando una onda incide sobre una interfaz plana que separa dos medios acústicamente diferentes, representados en la fig.2, parte de la energía se transmite al otro medio y parte se refleja. La proporción de energía reflejada y transmitida depende de las características acústicas de los medios (impedancia y velocidad del sonido). En términos de la amplitud de presión compleja de las ondas incidente P_i , reflejada P_r y transmitida P_t se define el coeficiente de transmisión T y reflexión R como:

$$T = \frac{P_t}{P_i}, R = \frac{P_r}{P_i} \quad (12)$$

cumpliéndose, por la continuidad de presión en el contorno que:

$$1 + R = T \quad (13)$$

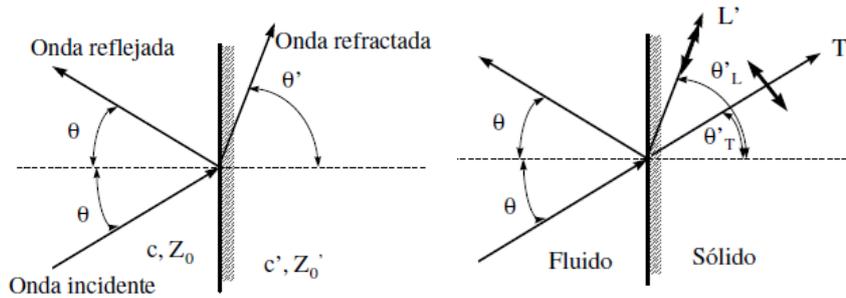


Fig. 2 Reflexión y transmisión en interfaces fluido/fluido (izquierda) y fluido/sólido (derecha)

Como se observa en la fig.2, el ángulo reflejado es igual al ángulo incidente, mientras que el ángulo de la onda transmitida depende tanto del ángulo incidente como de la relación entre las velocidades de ambos medios (*Ley de Snell*):

$$\frac{\sin \theta_i}{c_i} = \frac{\sin \theta_t}{c_t} \rightarrow \theta_t = \sin^{-1} \left(\frac{c_t}{c_i} \sin \theta_i \right) \quad (14)$$

Los valores de los coeficientes de reflexión y transmisión se obtienen imponiendo las condiciones de contorno de continuidad de presión y continuidad de velocidad normal de partícula en el contorno.

En caso de incidencia normal a la superficie, tendremos:

$$R = \frac{z_2/z_1 - 1}{z_2/z_1 + 1} \quad (15)$$

A partir de la ec. 15 se pueden deducir fácilmente el tipo de reflexión que se produce en relación con los tipos de dispersores descritos en II.2, y que es válido para cualquier ángulo de incidencia:

- $z_1 > z_2$: El coeficiente de reflexión será negativo, por lo que se producirá un cambio de fase en la energía reflejada. Esta condición se corresponde con la condición de contorno suave.
- $z_1 \gg z_2$: El coeficiente de reflexión tiende a -1 y el de transmisión a 0, es decir, la onda reflejada tiene igual amplitud y oposición de fase y no hay onda transmitida, por lo que la presión acústica en el contorno es cero (condición de contorno de liberación de presión).
- $z_1 < z_2$: El coeficiente de reflexión será positivo, es decir, no hay cambio de fase en la energía reflejada. Esta condición se corresponde con la condición de contorno duro.
- $z_1 \ll z_2$: El coeficiente de reflexión tiende a 1 y el de transmisión a 2. la onda reflejada tiene igual amplitud y fase y la transmitida el doble de amplitud. En este caso la velocidad normal de partícula en el contorno es nula (condición de contorno rígido).

II. 3. b. Difracción

Es un fenómeno acústico que afecta a la propagación del sonido dispersando las ondas sonoras. Cuando la onda incide sobre una abertura, superficie u obstáculo que impide su propagación, todos los puntos de su plano se convierten en fuentes secundarias de ondas, emitiendo nuevas ondas, denominadas ondas difractadas. Este efecto, mostrado en la fig. 3, ocurre principalmente cuando las dimensiones del obstáculo son menores o iguales que la longitud de onda. En el caso de objetos curvados, independientemente de si son cuerpos duros o blandos, la difracción de la onda incidente origina la formación de ondas superficiales en el medio circundante alrededor del objeto dispersor. Estas ondas se conocen como ondas de *Franz* o *creeping* y tiene fuertes efectos sobre la energía dispersada, tal y como se describe en las secciones II.4 y II.5

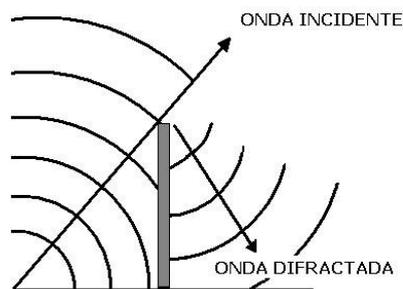


Fig. 3 Efecto de difracción de la onda incidente por la presencia de un objeto

II. 3. c. Interacción entre un dispersor sólido y un medio fluido:

En el caso de objetos sólidos penetrables ($\epsilon \ll 1$) sumergidos en agua tenemos que, a diferencia de los objetos perfectamente rígidos ($\epsilon \rightarrow 0$) donde toda la energía se refleja, parte de la energía incidente se transmite al interior en forma de vibraciones elásticas que se propagan como ondas superficiales, transversales y longitudinales). Es decir, en este caso, la presión incidente actúa como carga temporal causando dichas vibraciones elásticas. Consecuentemente, el medio recoge estas vibraciones, de forma que el cuerpo sólido actúa como una fuente acústica que irradia sonido. Esta

interacción se conoce acoplamiento entre los dos medios. Un esquema de ambos casos se muestra en la fig.4.

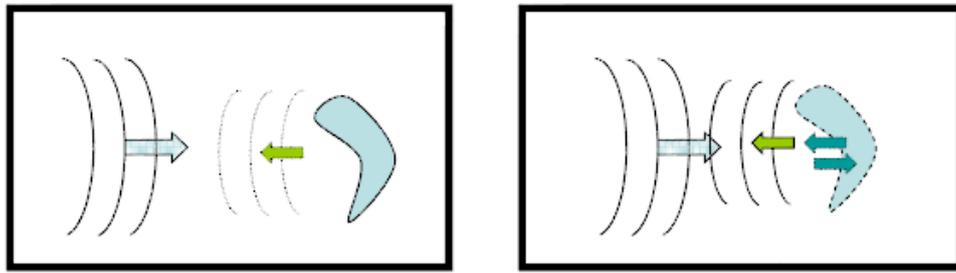


Fig. 4. a) Interacción con un cuerpo perfectamente rígido y b) Acoplamiento fluido-sólido elástico

II. 4. DISPERSIÓN EN FUNCIÓN DE LA FRECUENCIA

Los efectos que producen en la dispersión los fenómenos descritos en II.3, dependen principalmente de la relación entre las dimensiones del objeto y la longitud de onda, por lo que el estudio de la dispersión acústica se realiza identificando tres zonas en función de esta relación:

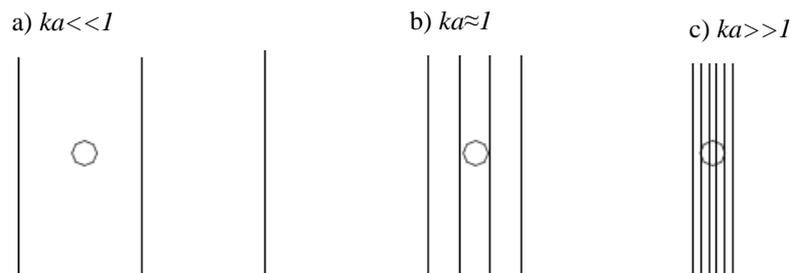


Fig. 5. Relación entre las dimensiones del objeto y la longitud de onda para a) Régimen de Rayleigh, b) Régimen de interferencia, c) Régimen geométrico

1. Régimen de Rayleigh: Para objetos cuyas dimensiones son mucho menores que la longitud de onda, fig. 5.a, donde $ka \ll 1$ con k el número de onda y a la dimensión característica del objeto, la dispersión viene marcada por el efecto de difracción. En estas condiciones las posibles reflexiones individuales que se puedan producir en las rugosidades de la superficie del objeto no producen ningún efecto de interferencia notable ya que las diferencias entre las fases de cada reflexión son insignificantes. El tipo de radiación [3] que se produce en este régimen depende de la relación entre las densidades y la compresibilidad del medio y del dispersor. Para igual densidad entre el objeto y el medio y distinta compresibilidad, el dispersor reacciona expandiéndose y comprimiéndose de forma opuesta a como lo hace el medio. Como consecuencia se produce la emisión de sonido en todas direcciones, originando una radiación de tipo monopolo. Por el contrario, si ambos presentan la misma compresibilidad pero distinta densidad, el movimiento del dispersor es diferente al del medio, moviéndose hacia atrás y hacia adelante en relación con el medio y originando una radiación de tipo dipolo. En el caso más general, en el que tanto la compresibilidad como la densidad difieren del medio, la presión dispersada será una combinación

de radiación monopolo y dipolo. Además, en este régimen, la intensidad dispersada presenta una proporcionalidad directa exponencial con la frecuencia.

2. Régimen de interferencia: A medida que aumenta la frecuencia, y por lo tanto el tamaño relativo del objeto respecto a la longitud de onda, fig. 5.b, se incrementa la cantidad de energía reflejada especularmente, que interacciona con las ondas periféricas inducidas por la difracción produciendo interferencias constructivas y destructivas originando una respuesta oscilatoria de la energía dispersada en función de la frecuencia. En el caso de que el cuerpo sea elástico, se excitan además ondas elásticas de superficie (ver anexo XI.2) que dan lugar a una serie de resonancias del objeto. Los efectos que producen este tipo de ondas se analizan con más detalle en la sección II.5.b

3. Régimen geométrico: A medida que aumenta la frecuencia, los efectos difractados son menores y cuando la longitud de onda es mucho menor que las dimensiones del objeto, como en la fig. 5.c las respuestas del sistema tienden a los límites de la acústica geométrica, donde puede aplicarse la teoría de rayos, en la que se considera exclusivamente la reflexión especular

II. 5. DISPERSIÓN DE OBJETOS ELÁSTICOS CURVADOS EN EL RÉGIMEN DE INTERFERENCIA

De los regímenes descritos en II.4, es de especial interés, por la complejidad que presenta, el régimen de dispersión de interferencia donde las dimensiones del objeto son similares a la longitud de onda, de forma que se superponen los efectos de todos los fenómenos descritos en II.3.

Para estudiar las respuestas que presentan los distintos tipos de dispersores, es importante recordar la distinción hecha en II.2 entre blancos en los que el sonido no puede penetrar (perfectamente rígidos o de liberación de presión), y en los que sí (blancos duros o sólidos, blandos o gaseosos y fluidos de densidad similar a la del agua). En el segundo grupo, las ondas que se producen en el interior del blanco excitan las distintas resonancias del blanco que aparecen como valles o depresiones en la amplitud de presión retrodispersada. Por lo tanto, mientras que en el caso de los objetos impenetrables solo se tienen que considerar los efectos geométricos de la reflexión especular y los de las ondas difractadas, para objetos penetrables, además hay que añadir los efectos de las resonancias, que se detallan en la sección II.5.b para el caso concreto de cuerpos elásticos.

II. 5. a. Dispersión de cuerpos impenetrables

Al incidir una onda plana sobre un objeto impenetrable curvado de dimensiones similares a la longitud de onda, se produce reflexión especular y ondas difractadas circundantes, conocidas como ondas *creeping* o *Franz*, que se propagan en el medio fluido ambiente con velocidad similar a la velocidad del sonido en dicho fluido [4]. La superposición de ambos efectos da como resultado una suma coherente de ambas ondas, de forma que se suman constructivamente dando lugar a un máximo en la amplitud de dispersión cuando están en fase, y destructivamente dando lugar a un mínimo cuando están en contrafase.

Como estos efectos también se producen en el caso de objetos penetrables, la amplitud de dispersión de un objeto impenetrable sirve como fondo para la amplitud de dispersión de objetos penetrables con la misma geometría. En particular, la respuesta rígida sirve como fondo de las resonancias que se producen en un objeto elástico y la respuesta suave sirve como fondo de las resonancias que se producen para un objeto compuesto por un fluido de densidad mucho menor que la del medio circundante. En los casos en los que la relación de densidades está cerca a la unidad, el fondo adecuado tiene un comportamiento intermedio entre los fondos rígidos y suaves.

En la fig. 6 se muestra la amplitud de presión dispersada por una esfera rígida y por una esfera elástica [2]. Se puede observar como la respuesta elástica presenta zonas de variación suaves similares a la respuesta rígida mas una serie de valles aislados debidos a las resonancias.

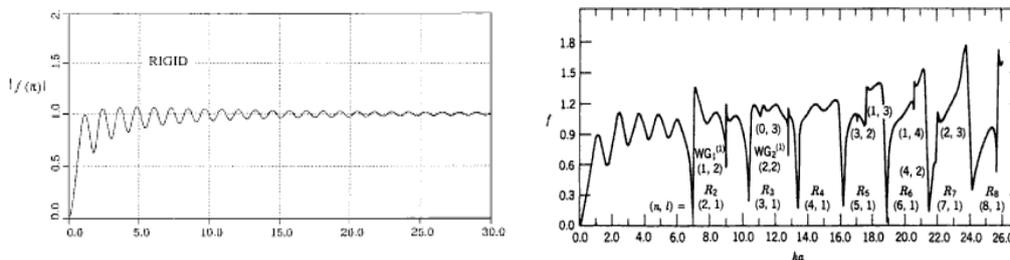


Fig. 6. Comparación entre la función de forma de una esfera perfectamente rígida (izquierda) y una esfera elástica de tungsteno (derecha). Se puede apreciar que en la repuesta elástica se superpone el efecto de las resonancias sobre la respuesta rígida

II. 5. b. Dispersión de cuerpos elásticos

A diferencia de los objetos impenetrables perfectamente rígidos donde sólo se excitan ondas periféricas que se propagan únicamente fuera del objeto en el fluido ambiente, en un objeto elástico (penetrable) se forman también distintos tipos de ondas elásticas que se propagan tanto hacia el interior como en la superficie interna del cuerpo elástico que tienen importantes efectos en la respuesta de dispersión del objeto que se superponen a los producidos por las ondas difractadas Franz.

Estos efectos son principalmente notables a frecuencias medias $1 < ka < 100$, donde la dispersión está dominada por los efectos de las ondas superficiales que producen ondas circunferenciales [4]. Estas ondas coinciden a ciertas frecuencias en fase consigo mismas formando ondas estacionarias alrededor del blanco y resonancias que son altamente notables en la amplitud de presión dispersada. Por lo tanto las ondas superficiales dan lugar a picos aislados en la respuesta, que conforma el llamado espectro de resonancia del objeto dispersor y que es dependiente de su forma y composición. Estos picos se superponen destructiva o constructivamente a los efectos de interferencia de la onda reflejada y de *creeping* descritos en II.5.a, por lo que las resonancias aisladas se representan como valles o picos en la amplitud de la función de dispersión.

En la fig. 6 se muestra la función de forma de una esfera de tungsteno sumergida en agua. Para valores bajos de ka , ($ka < 6$) la dispersión es debida únicamente a la interferencia entre las ondas

geométricas de Franz causadas por la difracción y la reflexión especular. Para valores de $ka > 6$, aparecen además los efectos de resonancia producidos por las distintas ondas elásticas superficiales que interfieren destructivamente con la respuesta rígida. Estas resonancias son etiquetadas con dos números, (n, l) donde l es el tipo de onda circunferencial que la causa (para un sólido $l = 1$ se refiere a las ondas de Rayleigh y $l > 1$ son las whispering gallery, que causan valles estrechos) y n es el número de longitudes de onda de la onda estacionaria resonante que coinciden consigo mismas sobre la circunferencia del dispersor, es decir, n es el modo de vibración. Estas resonancias se producen a frecuencias cercanas a los modos de vibración natural del cuerpo, y están ligeramente desplazadas debido a los efectos de la carga de fluido en el cuerpo elástico.

II. 6. IMPORTANCIA DE LA FASE EN LA IDENTIFICACIÓN ACÚSTICA DEL OBJETO

Con frecuencia, el estudio de la dispersión acústica producida por un objeto se ciñe a la identificación de los patrones de dispersión (diagramas polares) o a la representación de la amplitud de la presión dispersada en función de la frecuencia mediante la representación de la función de forma o el TS. Sin embargo esta información puede resultar insuficiente para la identificación del objeto, ya que distintos dispersores pueden presentar el mismo TS bajo determinadas condiciones. En este sentido, el estudio de la fase del objeto puede proporcionar información adicional muy útil para poder realizar dicha identificación [5], ya que depende de las diferencias entre las impedancias acústicas del medio y del dispersor. Como se ha comentado en II.3.a, cuando la impedancia del dispersor es menor que la impedancia del medio se produce un cambio de fase en la onda dispersada que no ocurre en caso contrario (ver fig.7). De esta forma, la detección de estos cambios de fase puede permitir, conocida la impedancia del medio, la clasificación de los objetos en función de si presentan características de fronteras suaves o duras, lo que permitiría diferenciar, por ejemplo, entre peces (cambio de medio agua-gas de la vejiga natatoria) y rocas.

En recientes trabajos [1] se ha mostrado que la fase manifiesta incoherencia temporal y decorrelación espacial que se agrava con las características de dispersión, resonancias y tamaño del objeto, lo que pone de manifiesto que la información añadida por la fase sobre el objeto es complementaria a la de la amplitud y muy útil para la caracterización del dispersor.

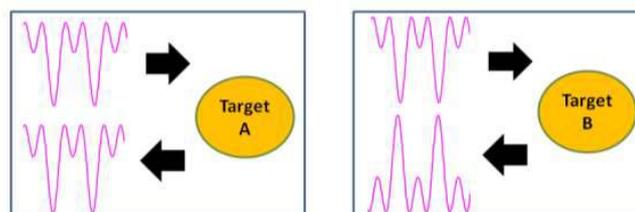


Fig. 7 Izquierda: dispersión de un objeto duro en el que la reflexión se produce en fase con la onda incidente. Derecha: Dispersión de un objeto blando que produce reflexión en oposición de fase

III. MODELOS TEÓRICOS PARA LA DISPERSIÓN ACÚSTICA DE OBJETOS GEOMÉTRICOS CANÓNICOS

La dispersión de objetos se produce por la interacción de los diversos fenómenos descritos en la sección II.3. En el caso más general de un objeto elástico, tenemos los efectos geométricos de reflexión especular, transmisión y múltiples reflexiones, la difracción de las ondas alrededor del objeto y los efectos de resonancias producidos por las ondas superficiales. Además hay que tener en cuenta que algunos de estos efectos como las resonancias dependen en gran medida de la forma del objeto, por lo que la forma más sencilla de entender el proceso de formación de la dispersión es ceñirse al estudio de formas simples canónicas como esferas, y cilindros y esferoides elongados

A continuación se presentan algunos de los modelos teóricos empleados en el estudio de la dispersión, y en los anexos XI.4;XI.5;XI.6, las soluciones particulares de las distintas geometrías

III. 1. MÉTODO DE KIRCHOFF: REFLEXIÓN ESPECULAR

Este método proporciona una primera aproximación basada en la óptica geométrica y resuelve la integral de Helmholtz-Kirchoff, ecuación particularizada para el caso de la presión dispersada [6] asumiendo que los cuerpos son perfectamente rígidos y homogéneos, y considerando que cada elemento diferencial del área insonificada actúa como un plano reflectante individual.

Aunque es un método sencillo de implementar, plantea el inconveniente principal de que se basa únicamente en la geometría del objeto, sin tener en cuenta ni los efectos difractados, ni la estructura interna o la composición de los objetos insonificados. Por lo tanto, ignora las posibles resonancias que puedan ocurrir por las propiedades mecánicas o físicas de los objetos, de forma que sólo es útil en el régimen geométrico o como primera aproximación

III. 2. SOLUCIONES ANALÍTICAS

Para obtener soluciones analíticas que describan correctamente la dispersión total de los cuerpos es necesario recurrir a otro tipo de soluciones que tengan en cuenta tanto los efectos de la difracción como las ondas internas de los cuerpos penetrables. Para obtener dichas soluciones, se puede resolver la ecuación de ondas escalar en las coordenadas apropiadas aplicando en cada caso las condiciones de contorno necesarias. Para ello, tanto las ondas incidentes como la presión dispersada se expresa como una suma expandida de funciones de Bessel o funciones esferoidales, descritas en el anexo XI.3. Sin embargo, es necesario que las coordenadas escogidas permitan resolver la ecuación de ondas mediante separación de variables, lo que sólo es posible para geometrías simples como la esfera o el cilindro infinito o para casos especiales de geometrías más complejas como el cilindro finito o el esferoide elongado.

III. 2. a. Soluciones modales

Las soluciones modales o modos normales fueron introducidas inicialmente por Lord Rayleigh en 1877 [3], aunque debido a la complejidad de las soluciones matemáticas, su trabajo se orientó solo

a casos en los que el dispersor era mucho menor que la longitud de onda. Anderson [7] amplió el trabajo de Lord Rayleigh para objetos no necesariamente pequeños, e incluyó los efectos de las ondas de compresión que se forma en el interior de los dispersores fluidos. Posteriormente, Faran [8] comenzó a estudiar el fenómeno de las resonancias en la dispersión de cuerpos elásticos (esfera y cilindro infinito), incluyendo el efecto de las ondas transversales que se generan en el interior de los objetos sólidos. Señaló que la ubicación de las frecuencias de resonancia es muy similar a la ubicación de los modos normales de vibración libre, con pequeñas diferencias debidas al acoplamiento con el medio, y destacó el papel importante que tienen las ondas transversales, que relacionan las resonancias características de los objetos con los parámetros característicos del material, en particular con el módulo de elasticidad. Como estas soluciones no son suficientes para describir la dispersión de objetos más realistas que se encuentran en la naturaleza, es necesario investigar las respuestas de dispersión de otros dispersores más complejos como el esferoide elongado, sin embargo por la dificultad que conlleva la resolución de la ecuación de onda en coordenadas esféricas solo se han encontrado soluciones analíticas [9] para casos particulares del esferoide, como la respuesta rígida o suave.

En general, el procedimiento seguido para obtener las soluciones modales consiste en resolver la ecuación de onda en coordenadas esféricas, cilíndricas o esféricas mediante una expansión en serie de funciones de Bessel con ciertos coeficientes desconocidos que se obtienen aplicando las condiciones de contorno adecuadas a cada caso:

1. *Dispersores elásticos*

✓ Presión en el fluido (incidente más dispersada) igual a la componente normal del esfuerzo en la superficie de la interfaz:

✓ Componente normal de los desplazamientos del fluido iguales a la componente normal de los desplazamientos en el sólido:

✓ Componente tangencial de los esfuerzos transversales igual a cero en la superficie del sólido

2. *Dispersores fluidos*

✓ continuidad de presión

✓ continuidad de la componente normal de la velocidad de partícula

3. *Dispersores rígidos*

Para un dispersor perfectamente rígido las condiciones de contorno aplicadas son las condiciones de Neumann o componente normal de la velocidad de partícula igual a cero

4. *Dispersores con contorno de liberación de presión*

Las condiciones de contorno aplicadas para dispersores de liberación de presión son las condiciones de Dirichlet o presión en el contorno igual a cero

III. 2. b. Teoría de dispersión resonante

A partir de las soluciones modales propuestas por Faran [8] se han llevado a cabo numerosas investigaciones experimentales que han dado lugar a un marco teórico importante conocido como teoría de dispersión resonante (RST). Esta teoría fue introducida por Flax [10] [11] quien aplicó los formalismos de la teoría nuclear al problema de dispersión de objetos sumergidos con geometrías simples como la esfera o el cilindro infinito, aplicando la transformación de sommerfeld-watson a las soluciones modales obtenidas por Faran. Uberall et al [12], demostraron que el comportamiento fluctuante de la señal dispersada está causado por la superposición de las resonancias modales sobre la respuesta de dispersión de un objeto impenetrable, ya que entre dos frecuencias propias, el dispersor presenta un comportamiento similar al de un cuerpo impenetrable (suave o rígido). Esta teoría permite por lo tanto separar la amplitud de dispersión en sus dos componentes, la respuesta de fondo, que es suave y regular, y la respuesta o espectro resonante. De esta forma, las resonancias pueden ser aisladas mediante la sustracción de la respuesta de fondo, que es conocida en el caso de objetos con densidades muy diferentes a la del medio, es decir si ρ_1 es mucho mayor que 1 o mucho menor.

III. 2. c. Aproximaciones para geometrías complejas

En el caso de otras geometrías complejas el uso de las soluciones modales no siempre es viable. Por ejemplo, en el caso del esferoide elongado el cálculo de la dispersión resulta muy complicado, ya que las funciones esferoidales convergen muy lentamente y por lo tanto se requiere un extenso cálculo computacional. De esta forma, para estas geometrías complejas, para las cuales no se han encontrado soluciones analíticas, suele recurrirse a métodos numéricos o a usar soluciones simples aproximadas obtenidas a partir de métodos matemáticos como *T-matrix* [13] que pueden ser usados para describir la presión dispersada por objetos de geometrías arbitrarias. Otros métodos numéricos que actualmente se emplean en los numerosos estudios realizados son el método elementos de contorno (BEM) [14] y el método de elementos finitos (FEM) [15] que puede ser fácilmente implementado mediante software como COMSOL multiphysics. Por esta razón, esta herramienta de cálculo es la que se emplea en este trabajo para predecir la dispersión de distintos elásticos, como esferas, cilindros y esferoides, ya que además de proporcionar la amplitud total de dispersión del cuerpo, permite realizar simultáneamente el análisis modal de las distintas geometrías y obtener la respuesta de fondo rígida o suave que es necesario conocer para determinar el espectro resonante.

IV. APLICACIONES DE LA DISPERSIÓN

IV. 1. APLICACIONES SUBMARINAS

Los sonidos o ultrasonidos son una potente herramienta no invasiva muy extendida en el estudio de los fondos marinos debido principalmente a que el agua es uno de los medios más favorable para su propagación. Desde la aparición del Sonar, tras la segunda guerra mundial, su uso se ha extendido a numerosos campos, siendo actualmente la base de diversas aplicaciones científicas y comerciales como la pesca o las exploraciones geológicas. Aunque existen varias versiones de este dispositivo, el procedimiento general se basa en el análisis de la energía dispersada por el blanco en la dirección del receptor con el fin de conseguir la identificación del objeto dispersor. En el caso de la pesca y la oceanografía estos blancos son las distintas variedades de animales acuáticos y vegetaciones o las características geológicas y sedimentarias.

Mediante los sondeos biológicos llevados a cabo con SONAR se puede obtener una amplia información acerca de las poblaciones marinas y de su comportamiento. Gracias a este sistema de comunicación marina es posible realizar un análisis de los fenómenos de transmisión, reflexión y dispersión del sonido debidos a los objetos presentes en el medio, extrayendo así información de la forma, tamaño o composición de los mismos y evaluando el hábitat en el que se encuentran. Sin embargo no es sencillo extraer dicha información, ya que las técnicas actuales no proporcionan niveles óptimos de certeza debido a la complejidad de los ambientes submarinos y a que se basan en el análisis del TS de un único organismo para caracterizar la densidad de población, lo que no es del todo fiable, especialmente para grandes volúmenes.

Por esta razón, la mayoría de las investigaciones actuales [16] [17] están dirigidas a la interpretación de las señales recibidas. En este sentido, una fuente importante de información puede ser incluir la detección de fase del eco, que a menudo ignoran los sonares convencionales, ya que se ha demostrado que las características de la fase reflejada manifiestan muchas de las propiedades del blanco. Esto es especialmente importante a la hora de realizar la clasificación automática de los objetivos detectados y su uso ha sido probado como un parámetro clasificador factible por sí mismo [14][18][19]. El estudio de la dispersión producida por geometrías finitas fundamentales como esferas y cilindros pueden proporcionar información clave en los mecanismos de formación de eco y en la conexión entre la fase y las características de blanco y servir como base para otras formas más complejas y reales.

IV. 1. a. Modelos de dispersión de los organismos marinos

Las propiedades acústicas de los organismos marinos varían considerablemente de unas especies a otras, en función de su forma, composición, y patrones de comportamiento. Aun en el caso de los peces que presentan todos una forma elongada similar, existen otras características biológicas como la presencia o no de vejiga natatoria que influyen notoriamente en el TS obtenido, (ver anexo XI.7) Por eso uno de los campos más importante de la investigación submarina es la determinación,

teórica y empírica, de las propiedades acústicas de los distintos organismos marinos y de sus partes constituyentes.

Por las dificultades que conlleva la medición experimental *in situ*, muchas investigaciones se orientan a buscar modelos teóricos [6][20] que tengan en cuenta tanto las características biológicas como los procesos físicos subyacentes en la formación del eco. En ese sentido, los modelos desarrollados para estudiar la dispersión de los peces y el zooplancton teniendo en cuenta los distintos grados de complejidad que representan dichos objetivos, se basan a menudo en el estudio de formas geométricas básicas que pueden describirse bien matemáticamente [20]. Estos modelos, detallados en el anexo XI.7, han sido verificados experimentalmente y son fundamentales para lograr la predicción e identificación de las especies submarinas y también para analizar la influencia de la variación de ciertos parámetros como la composición, el tamaño y la orientación. En general se suelen emplear esferas, cilindros y esferoides elongados, sólidos o llenos de aire ya que pueden representar ciertos variantes de zooplancton, peces o modelar algunas de sus partes constituyentes. El estudio de los efectos elásticos es también fundamental en estos modelos teóricos, ya que los contrastes de las densidades de los objetos en el agua no es tan grande como para considerarlos objetos perfectamente rígidos, y por lo tanto estos efectos afectan notablemente a la dispersión, especialmente en los rangos de frecuencias (kHz) en las que se trabaja en acústica submarina, en los que la longitud de onda es del orden de las dimensiones de los objetivos.

IV. 1. b. Importancia de la orientación del blanco

Uno de los parámetros que tiene mayor influencia sobre el TS, es la orientación del blanco, especialmente en el caso de objetos de dimensiones similares a la longitud de onda, donde es imprescindible incluir este parámetro para una correcta determinación del TS [20]. Además, poder identificar correctamente dicho parámetro nos da información valiosa sobre la dirección de nado de los peces o el rumbo de los submarinos.

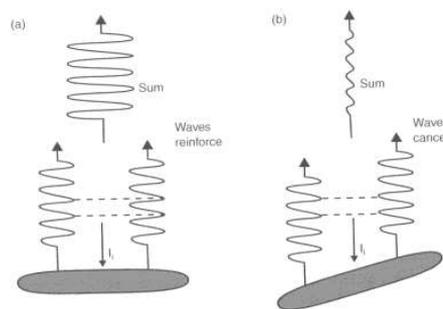


Fig.8 Efectos de la orientación sobre la fase: Interferencia constructiva (a) y destructiva (b)

Como los peces y otros organismos marinos poseen formas alargadas, la orientación es especialmente importante y se debe incluir en los modelos de dispersión, ya que distintos ángulos de inclinación producen cambios en el tamaño aparente de la sección insonificada, y dependiendo de dicho ángulo las ondas dispersadas pueden sumarse constructivamente o destructivamente produciendo

distintos patrones de dispersión (ver fig.8) .Experimentalmente, se puede identificar la orientación mediante un análisis de la longitud del pulso recibido, ya que a mayor inclinación se alarga el pulso

IV. 2. APLICACIONES MÉDICAS

En el campo médico, existen dos razones fundamentales que han propiciado la implementación de numerosas técnicas. En primer lugar está el hecho de que los tejidos biológicos, por su alto contenido en agua, son medios idóneos para la propagación de ultrasonidos, y en segundo lugar, que a diferencia de los rayos x, no producen energía ionizante y por lo tanto permiten técnicas no invasivas, que controladamente, pueden aplicarse sin riesgo para los pacientes tantas veces como sea necesario.

En general, en función de la potencia aplicada, suele distinguirse dos campos de aplicación, terapia ultrasónica (alta potencia) y diagnóstico médico (baja potencia). En este último campo, el procedimiento seguido para obtener el diagnóstico es similar al que realiza el sonar. Mediante las distintas técnicas de imagen ultrasónica, como la ecografía o la elastografía, se consiguen producir imágenes del interior del organismo, a partir de la medición y mapeado de ciertos parámetros como la energía dispersada por las distintos elementos del cuerpo, la velocidad de las ondas generadas o los desplazamientos causados en las distintas partes organismo.

IV. 2. a. Modelos de dispersión de los tejidos humanos

Los tejidos humanos pueden ser tratados de forma simple como medios elásticos homogéneos con características acústicas como impedancia, absorción, velocidad del sonido y dispersión y modelados por formas simples como esferas y cilindros cuya dispersión es analizada mediante la teoría de Faran. Sin embargo, esto son sólo aproximaciones teóricas que no reflejan todas las características que tienen los tejidos vivos, que son estructuras en diferentes escalas que están continuamente auto-regulándose, creciendo, reproduciéndose e interactuando [22]

Como se ha comentado en II.4, las propiedades acústicas de dispersión dependen de la relación entre el tamaño y la longitud de onda, por lo que es importante comenzar realizando una clasificación, propuesta en [23] en función del régimen de dispersión en el que se encuentre las distintas estructuras del organismo, cuyos efectos se muestran en fig. 9:

- Clase 0: Asociada a los efectos moleculares, los cuales producen absorción y dispersión de la velocidad del sonido. La absorción es considerada como energía propagándose que se convierte en calor a través de mecanismos tales como los efectos de conducción térmica y viscosidad. Todos los tejidos incluyen dispersión clase 0.

- Clase 1: Asociada a la concentración de células vivas cuyas dimensiones comparadas con la longitud de onda están en el rango de $ka \ll 1$ por lo que producen una dispersión difusiva no distinguible de forma independiente que a menudo produce en la imagen un efecto de moteado. Una manera de determinar la cantidad de energía que se dispersa fuera del transductor receptor es

medir la dispersión en función del ángulo. Este enfoque también puede ayudar en la separación de las contribuciones debidas a los cambios en la densidad (que presentan directividad dipolo) y a los cambios de los de la constante elástica y la compresibilidad (que presentan directividad monopolo), cada uno de los cuales tienen una dependencia angular de la dispersión distinta. Es decir, la dispersión de la clase 1, de una manera estadística, origina los diferentes patrones de dispersión. También pertenece a esta clase de dispersor la sangre, cuyos componentes son modelados a menudo como esferas, cilindros o discos de tamaño menor que la longitud de onda.

- Clase 2: Asociada a la dispersión de las microestructuras de tejidos con dimensiones similares a la longitud de onda. La dispersión de Clase 2 es independiente y distinguible a través de sus únicas características ofreciendo información dependiente de la frecuencia y del ángulo. Un ejemplo de un dispersor de la clase 2 son las microcalcificaciones aisladas de la mama. Anderson et al. (1998) utiliza un dispersor esférico como un modelo para este caso. Sus cálculos de esferas elásticas e inelásticas llegaron a la conclusión de que las microcalcificaciones se comportan como dispersores elásticos

- Clase 3: se asocia con los órganos y los límites de las venas que producen una dispersión especular por encontrarse en el rango $ka \gg 1$

- Clase 4: se aplica el tejido en movimiento, como la sangre.

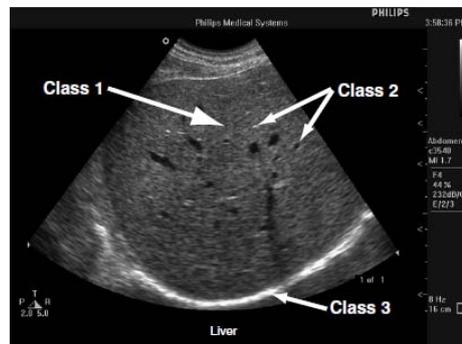


Fig. 9 Se muestra la imagen por ultrasonidos del hígado y los efectos de moteado (clase 1), vasos sanguíneos (clase 2) y contorno de los mismo (clase 3)

Además de esta clasificación en función del tamaño, es también importante distinguir los tejidos en función de sus propiedades acústicas:

- Tejidos homogéneos: Son aquellas regiones de tejido que pueden ser representadas por un único valor de un parámetro igual en todos los puntos espaciales. A través de estos tejidos, las ondas se propagan sin cambios acústicos, siendo sólo en los límites de la región cuando pueden experimentar los distintos efectos como reflexión, transmisión y cambios en la velocidad del sonido y la absorción, de acuerdo a las escalas de longitud apropiada definida anteriormente.

- Tejidos inhomogéneos: Son aquellos tejidos que son en su mayoría son del mismo tipo pero que presenta pequeñas fluctuaciones alrededor de un valor medio.

- Tejidos heterogéneos: Son regiones de tejidos en los que las propiedades varían con la posición espacial ya sea a través de pequeñas subregiones o de forma puntual
- Tejidos isotrópicos: Se aplica a los tejidos cuyas propiedades no varían con la orientación angular
- Tejidos anisotrópicos: Cuando las propiedades varían con el ángulo de insonificación. Generalmente este tipo de tejidos suelen tener una orientación estructural preferencial, como en el caso de las fibras musculares.

En el anexo XI.8 pueden encontrarse algunos modelos más realistas que describen la propagación a través de los distintos tejidos.

IV. 2. b. Aplicaciones de la caracterización de los tejidos

1. Aplicaciones cardiacas

Los tejidos encargados de los movimientos dinámicos del corazón son una serie de fibras que están organizadas con una dirección preferencial, de modo que muestran propiedades acústicas anisotrópicas. Por ello, estos tejidos se modelan habitualmente como una distribución de cilindros finitos cuya dispersión se estudia mediante la *aproximación de Born*, descrita en el anexo XI.8.a. Este modelo muestra que la dirección de insonificación respecto a la disposición de las fibras miocárdicas es importante, ya que cuando las fibras están alineadas perpendicularmente a la dirección de incidencia, la reflexión es máxima, mientras que cuando son paralelas, es mínima.

2. Aplicaciones de alta frecuencia

El empleo de ultrasonidos de alta frecuencia es también muy útil para caracterizar los tejidos ya que conllevan un aumento de la resolución y por lo tanto es capaz de identificar mejor las microestructuras frente a las imágenes convencionales, consiguiendo que dispersores como las células pertenecientes a la clase 0-1 (difusiva) en las imágenes convencionales pase a estar en la clase 1-2 (difractiva), lo que mejora considerablemente la identificación de sus patrones dispersivos.

Estas células están constituidas por un núcleo y un citoplasma que por lo general, muestran formas irregulares y composición heterogéneas, para las cuales no hay soluciones analíticas que modelen la dispersión que producen. Algunos modelos [24] asumen que el principal dispersor es el núcleo de la célula, mucho más denso que el citoplasma, que puede ser modelado como una esfera con propiedades elásticas homogéneas, inmersa en un citoplasma fluido con alto contenido en agua y densidad similar a la del medio circundante. La velocidad del sonido en el núcleo está en torno a 2400 m/s y en el citoplasma, alrededor de 1527 m/s. La impedancia acústica del núcleo es por lo tanto mucho mayor que la del citoplasma por lo que puede ser considerado como el único dispersor.

En general, el núcleo elástico se representa como una esfera elástica de poliuretano según el modelo de Faran, lo que permite identificar las oscilaciones del núcleo a través de las resonancias que aparecen en la respuesta de dispersión, como se muestra en fig. 10. A partir de este modelo, se pueden incorporar diferentes patrones de células similares a los observados durante la apoptosis. Los resultados han sido validados mediante la comparación con medidas experimentales y muestran que la retrodispersión aumenta a medida que las células mueren.

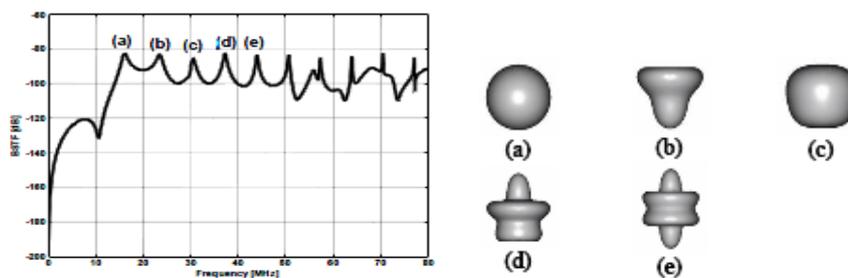


Fig. 10 Izq: Función de retrodispersión en campo lejano obtenidas para una micro esfera de poliuretano inmersa en una solución acuosa mediante Faran. Dcha: cinco primeros modos de vibración

3. Agentes de contraste

Los agentes de contraste son microburbujas de gas que se inyectan en el organismo para mejorar la relación señal a ruido, y por lo tanto, el contraste de las imágenes obtenidas mediante ultrasonidos ya que en la mayoría de las situaciones se obtiene un pobre contraste en las imágenes debido a la similitud de las impedancias acústicas de los tejidos humanos. Estos agentes deben tener altas propiedades ecogénicas, ser no tóxicos, biodegradables, fácilmente administrables y capaces de circular a través de los capilares y de los tejido, por lo que las investigaciones actuales se orientan hacia el estudio de distintas composiciones y tamaños con el fin de obtener el agente ideal.

Para el caso de agentes formados por estructuras rellenas de gas, puede aplicarse la teoría resonante del apartado III.2.b, que predice las frecuencias sonoras a las que se producen las resonancias, permitiendo así identificar el tamaño idóneo de la microburbuja para que resuene a la frecuencia empleada de forma que aumente la amplitud del eco y por lo tanto el contraste. Para agentes con estructuras rellenas de líquido, que presentan una gran durabilidad y estabilidad y un tamaño mucho menor que la longitud de onda es necesario emplear otros métodos que sean válido en el régimen de Rayleigh, como el descrito en [25] donde se presenta un análisis matemáticos usando que relaciona las propiedades acústicas de un agente de contraste fluido con las propiedades efectivas de un dispersor rígido dada por Rayleigh

V. ELEMENTOS FINITOS

En general, la resolución de las ecuaciones diferenciales que formulan un problema físico es de gran complejidad, y solo es posible resolverla analíticamente en algunos casos, en los que se pueden realizar simplificaciones sobre las dimensiones o la geometría del problema, que conducen a ecuaciones diferenciales fácilmente resolubles, por ejemplo, mediante la técnica de separación de variables.

En la mayoría de los casos, sin embargo, no es posible realizar estas aproximaciones, por lo que es necesario recurrir a métodos numéricos que resuelven las ecuaciones diferenciales mediante procedimientos iterativos a partir de la discretización de la ecuación diferencial. Entre estos métodos se encuentran las diferencias finitas, el método de elementos finitos FEM o el método de elementos de contorno BEM.

El método FEM plantea una serie de ventajas respecto a otros métodos como las diferencias entre las que se encuentran:

- Sus fundamentos permiten que sea fácilmente implementable mediante software de uso general como COMSOL
- No requiere discretizaciones estructuradas, sino que cada elemento de la discretización presenta una estructura independiente del resto
- Permite realizar tratamiento de geometrías complejas
- Las condiciones de contorno son generales e independientes de cada elemento de la discretización.

V. 1. CONCEPTOS GENERALES DEL MÉTODO DE ELEMENTOS FINITOS

El método de elementos finitos, FEM, es un método numérico para la solución de problemas de contorno gobernados por ecuaciones diferenciales que transforma un problema diferencial en otro algebraico mediante la discretización o subdivisión de una región en formas geométricas simples denominadas elementos finitos que están interconectados por una serie de puntos llamados nodos [26]. De esta forma se consigue pasar de un sistema continuo con infinitos grados de libertad, que es regido por una ecuación diferencial o un sistema de ecuaciones diferenciales, a otro con un número finito de grados libertad cuyo comportamiento se modela por un sistema de ecuaciones, lineales o no.

Para obtener la solución del problema, se realiza el siguiente procedimiento:

1. El dominio se discretiza mediante una serie de elementos adecuados que pueden ser puntos (caso lineal), líneas (caso bidimensional) o superficies (caso tridimensional) imaginarias, de forma que el dominio total se aproxima mediante este conjunto de elementos que están conectados a través de los nodos. Es importante definir adecuadamente el número, tamaño, tipo (número de nodos y grado de las funciones de aproximación) y situación de los elementos.

2. Sobre estos nodos se materializan las incógnitas fundamentales del problema, denominadas grados de libertad. Planteando la ecuación diferencial que rige el comportamiento del continuo para cada elemento, se obtienen formulas que relacionan el comportamiento en el interior del mismo con el valor que toman los grados de libertad nodales. Este paso se realiza por medio de unas funciones llamadas funciones de interpolación, que definen el valor del campo en el elemento a partir del valor de sus variables nodales. Estas funciones pueden ser ecuaciones lineales o polinomiales de alto orden dependiendo de la localización geométrica de los nodos.

3. A partir de aquí, el problema se formula de forma matricial. Se determinan las matrices que definen el comportamiento de cada elemento, y que son independiente del resto de elementos de la discretización.

4. Se obtiene la matriz global a partir del ensamblaje de las matrices elementales que constituye un sistema de ecuaciones algebraicas

5. Se imponen las condiciones de contorno correspondientes a cada caso

6. Se resuelve el sistema de ecuaciones obteniendo los valores de los grados de libertad en los nodos del sistema.

7. Se calculan los valores auxiliares en puntos no coincidentes con los nodos.

Este método se puede aplicar a una gran variedad de problemas de ingeniería, sin embargo hay que tener en cuenta el error que se introduce debido tanto a la discretización del dominio continuo como a los errores de redondeo acumulado y modelado. Los errores debidos a la discretización son los únicos controlables y pueden minimizarse refinando el mallado del dominio, con el inconveniente del aumento del coste computacional [27]. Otras limitaciones que plantea este método es que calcula soluciones numéricas concretas adaptadas a unos datos particulares de entrada por lo que no permite hacer un análisis de sensibilidad que indique como variaría la solución si alguno de los parámetros se alterara ligeramente.

V. 2. HERRAMIENTAS SOFTWARE

Los fundamentos de FEM hace que sea fácilmente implementable a través de herramientas software que permiten realizar el procedimiento descrito en V.I de forma eficiente y cómoda. El proceso de la obtención de la solución mediante elementos finitos se realiza siguiendo los siguientes pasos (ver fig.11):

1. Definición de la geometría del objeto a estudio: A partir de herramientas CAD se implementa el modelo en 2D o 3D de las formas de los diferentes objetos en los que se desea resolver las ecuaciones de campo.

2. Especificación del régimen a estudio: En general, dependiendo del tipo de problema, las herramientas software permiten distintos tipos de análisis. Por ejemplo en el caso de problemas de acústica se pueden hacer análisis en régimen transitorio, en el dominio frecuencial, análisis modal o de frecuencias propias.

3. Asignación de las propiedades físicas: En este paso se definen las propiedades y materiales de los objetos que se han generado en el paso 1. Generalmente, las herramientas software suelen tener una base de datos de forma que la asignación de estas propiedades se realiza de forma sencilla.

4. Aplicaciones de las condiciones de contorno: Se definen las condiciones que se aplican en contornos de los dominios con propiedades distintas.

5. Aplicación de las cargas: Se definen las fuentes activas del campo.

6. Mallado de la geometría: La geometría se divide en diferentes elementos en los que se resuelven las ecuaciones del campo. Los distintos software suelen disponer de herramientas que mallan de forma automática y permiten también al usuario definir el tipo y tamaño del elemento en las distintas zonas del dominio. Como la exactitud del método depende en gran medida de la elección correcta del tamaño del mallado, este el paso más importante en el proceso del método de elementos finitos.

7. Resolución del problema: En esta fase es donde se aplica el FEM para obtener la solución del problema físico de forma iterativa. La solución se obtiene en cada uno de los elementos de la discretización, aunque también es posible sumar o integrar pequeños elementos en una región determinada.

8. Análisis de la solución y postprocesamiento: Una vez que se ha obtenido la solución es posible representar gráficamente la distribución de las distintas variables. Es importante analizar la fiabilidad de los resultados y en caso de que los resultados no sean adecuados, realizar mejoras o cambio en el modelo.

Dentro de estas herramientas destaca el software Comsol Multiphysics cuyas particularidades se describen en el anexo XI.9

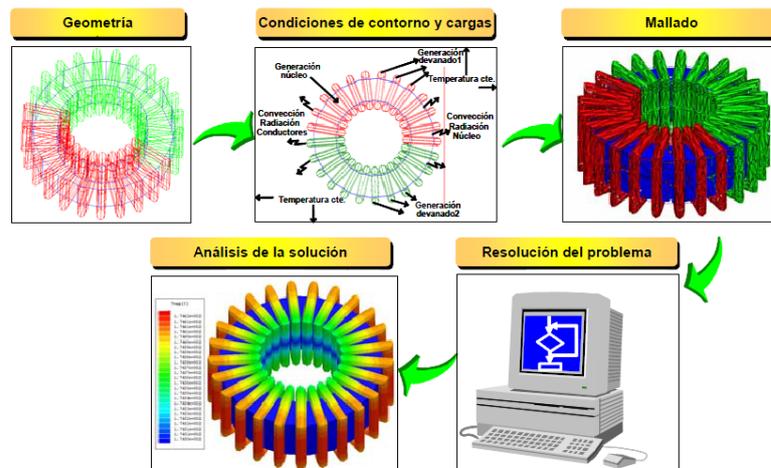


Fig.11 Proceso seguido para la creación de modelos empleando las herramientas software basadas en elementos finitos

VI. MODELOS DE SIMULACIÓN

Para estudiar la dispersión de blancos esféricos, cilíndricos y esferoidales distintos modelos en 2D axisimétrico y 3D. En concreto, el dispersor esférico y los dispersores cilíndricos y esferoidales en incidencia axial (*end on*) han sido modelados en 2D-axisimétrico, lo que reduce el tiempo de cálculo y permite una resolución frecuencial mayor. El resto de casos, incidencia oblicua y normal en esferoides y cilindro han sido modelados en 3D, ya que aunque su geometría tenga simetría de revolución, para ondas incidentes que no incidan en la dirección axial, el problema completo pierde su simetría de revolución.

Las distintas simulaciones se han hecho para dispersores de tipo elástico, rígido, fluido, aire o con condición de contorno de liberación de presión. En el primer caso se emplea el modulo de acoplamiento acústico estructural. En el resto de casos, únicamente el modulo de presión.

El procedimiento seguido para crear el modelo es el detallado en la sección V.2, definiendo como condiciones de contorno las indicadas en la sección III.2.a para cada caso. Estas condiciones están ya implementadas en COMSOL y pueden ser escogidas a través del menú desplegable que se muestra en el área de trabajo del software.

VI. 1. CONSIDERACIONES GENERALES

Las características comunes a todos los modelos simulados son:

- En el módulo acústico se emplea la formulación de campo disperso, es decir, la ecuación de ondas se resuelve para la presión dispersada.
- Se emplea también la formulación de campo lejano definiendo la variable p_{far} en el contorno del dispersor. Esta variable nos da el valor del campo dispersado en el infinito.
- El dominio fluido (agua) externo se acota mediante pmls con condición de contorno externa radiante. El ancho real de la pml se ha fijado en 2cm, y tras varias pruebas, se ha comprobado que definiendo elementos de 6.8 mm de tamaño máximo en la pml, junto con la condición de contorno radiante, se obtiene atenuaciones suficientes de forma que las posibles reflexiones no afectan al resultado.
- Para evitar errores de precisión se define siempre un tamaño de malla de mínimo seis elementos por longitud de onda en el medio. Como se emplea análisis frecuencial la longitud de onda es la correspondiente a la mayor frecuencia simulada
- Para describir un fluido se requieren el valor de la velocidad del sonido c [m/s] y la densidad ρ [Kg/m^3]. En el caso del agua, se han usados los valores: $c = 1486 m/s$; $\rho = 998Kg/m^3$
- Para describir un sólido elástico se requiere el valor de la densidad ρ [Kg/m^3], módulo de Young E [Pa] y del coeficiente de poisson ν .

- El tipo de elemento empleado en todos los casos es el elemento cuadrático triangular mostrado en el anexo XI.9.a

VI. 2. MODELOS 2D-AXISIMÉTRICOS

El dominio escogido en este modelo, fig 12, es siempre un dominio esférico que incluye al dispersor, la capa de fluido y la pml en esféricas.

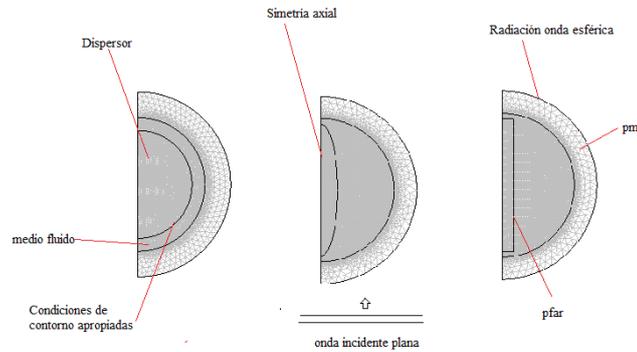


Fig. 12 Modelo definido empleando sistemas 2D axisimétrico para la esfera, el esferoide y el cilindro

En el anexo XI.10 se detallan las características particulares de cada simulación de cada uno de los dispersores simulados.

Además del dispersor esférico, para la obtención de la fase, se simulan en este dominio los dispersores cilíndricos y esferoidales ($a/b=4$) en incidencia axial, ya que el procedimiento requerido para la extracción de la fase, descrito en el anexo XI.12, necesita mucha resolución frecuencial, lo que es computacionalmente más económico en 2D-axi.

VI. 3. MODELOS 3D

VI. 3. a. Elección del dominio 3D

El dominio implementado en 3D, fig 13, consiste en un hexaedro rectangular con pml en cartesianas, formada por 15 subdominios cada uno de los cuales absorbe en alguna de las direcciones x , y , z , el dominio y fluido y el dispersor. Aunque no se pueda aprovechar la simetría de revolución del dispersor, si es posible definir otro plano de simetría, en nuestro caso el plano xy , de forma que sólo es necesario representar la mitad del dominio. Para ello, es necesario definir el plano xy como un contorno duro en dominios fluidos y como un plano de simetría en dominios elásticos. Estas condiciones hacen que dicho plano se comporte como un espejo, por lo que la amplitud de dispersión será el doble en el semiplano simulado. Por ello es necesario indicar dicha condición de simetría a la hora de definir la variable $pfar$.

VI. 3. b. Cilindro finito

Para estudiar la dispersión del cilindro finito, para distintos ángulos de incidencia ($0^\circ, 30^\circ, 45^\circ, 60^\circ, 90^\circ$) se ha escogido un cilindro metálico de acero con sección transversal circular de

12cm de longitud y 2 cm de diámetro. La dispersión producida por este tipo de dispersor ha sido estudiada en colaboración con el autor de [1]. Se disponen por tanto de las medidas experimentales obtenidas en [1] para verificar la validez de los resultados. Así mismo este modelo ha sido implementado usando el método de elementos de contorno por el Dr Trevor Francis, por lo que los resultados son comparados también con lo obtenidos mediante BEM.

El modelo completo resultante, implementado para estudiar la dispersión del cilindro se muestra en la fig.13 izquierda.

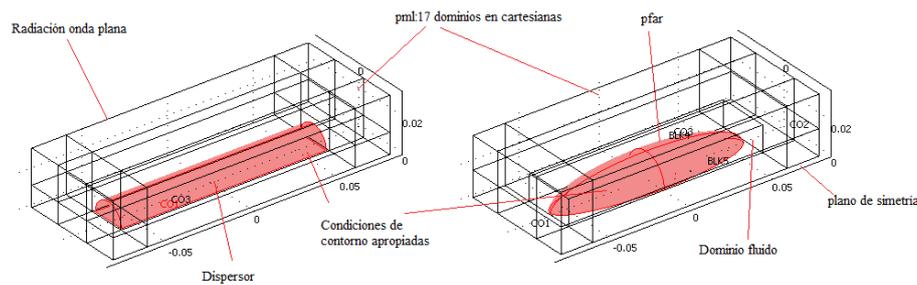


Fig. 13 Modelos definidos empleando sistemas 3D: cilindro y esferoide

VI. 3. c. Esferoide elongado

En este caso se estudia el esferoide elongado, mostrado en fig. 13 derecha. Este dispersor consiste en esferoide de aluminio con semieje mayor $a = 6 \text{ cm}$ y semieje menor de $b = 1.5 \text{ cm}$, similar al empleado en [1]. Los resultados obtenidos en este caso son comparados también con los resultados experimentales y con los resultados BEM obtenidos en [1]. Como parámetros de simulación se han utilizados los parámetros por defecto que facilita la base de datos de materiales de Comsol. De la misma forma que para el cilindro se simula tanto el dispersor elástico como el rígido. Además en este caso se obtiene la fuerza del blanco en función tanto de la frecuencia como del ángulo de incidencia, variando entre 0 y 90° con un incremento de 5° por ángulo.

VI. 4. MODOS DE VIBRACIÓN

Se han implementado también modelos 3D para el estudio de los modos naturales de vibración de la esfera elástica, de aire y de poliuretano, el cilindro finito de acero y el esferoide elongado de aluminio. En los casos elásticos se emplea el análisis modal de comsol del submódulo de aceleración estructural disponible en el módulo de acústica. Los modelos están constituidos únicamente por el dispersor, sin dominio fluido ni pml, y sólo es necesario definir las condiciones de contorno de vibración libre.

Para la esfera de aire se emplea el análisis modal del módulo de acústico y como condiciones de contorno se definen vibración con contorno fijo.

VII. RESULTADOS

VII. 1. DISPERSOR ESFÉRICO

VII. 1. a. Esfera rígida versus esfera de liberación de presión

Se describe a continuación las respuestas de dispersión obtenidas a partir de la simulación de los dos casos límite correspondientes al dispersor esférico perfectamente rígido (densidad mucho mayor que la del medio) con condiciones de contorno de Neumann y al dispersor esférico de liberación de presión (densidad mucho menor que la del medio) con condiciones de contorno de Dirichlet, ambos con diámetro $d = 84 \text{ mm}$.

En concreto, en la fig.14, se muestran la amplitud de presión normalizada o función de forma obtenida para cada uno de los dos tipos de dispersores, comparadas con los modelos teóricos de Faran (respuesta rígida) y Anderson (respuesta de liberación de presión) descritos en los anexos XI.4.a y XI.5.a respectivamente.

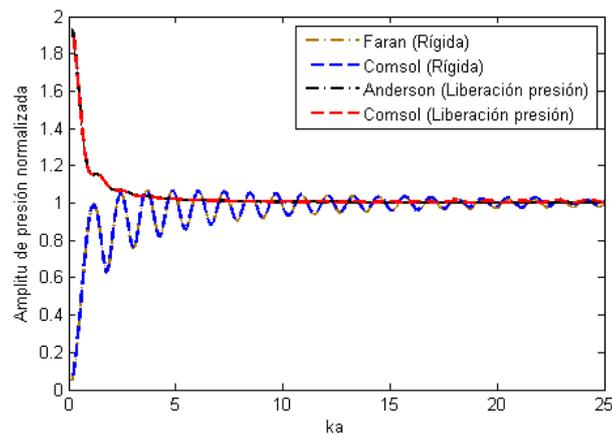


Fig. 14 Amplitud de presión normalizada frente al eje frecuencial normalizado para las esferas rígidas y de liberación de presión obtenidas numéricamente (azul y rojo), y mediante los modelos analítico de Faran para el caso rígido (ocre) y Anderson para el de liberación (negro)

Como se observa en la fig 14, ambas respuestas difieren principalmente a bajas frecuencias. En el régimen de Rayleigh, la esfera rígida dispersa el sonido de forma proporcional al cuadrado de la frecuencia, mientras que la esfera suave o de liberación de presión presenta un máximo inicial a muy baja frecuencia. Para altas frecuencias ambas soluciones tienden a e^{-2ika} [28], siendo la convergencia de la esfera suave más rápida.

Las oscilaciones en la respuesta de dispersión rígida son debidas a las interferencias producidas entre las ondas de Franz y la reflexión especular. Estas oscilaciones ocurren con cierta periodicidad debido a la diferencia de caminos Δd entre las ondas Franz y la reflexión especular. Para una esfera tenemos:

$$\Delta d = 2a + \pi a = n\lambda \quad (16)$$

donde λ es la longitud de onda de las ondas Franz, que se puede aproximar por la longitud de onda en el agua. A partir de la ec. 16 se obtiene que periodicidad en el eje frecuencial adimensional ka es

$$\Delta ka = \frac{2\pi n}{2 + \pi} = 1.22n \quad (17)$$

En nuestro caso, se obtiene en media $\Delta ka = 1.21$ lo que concuerda con el valor esperado.

1. Patrones de dispersión

Otro aspecto en la caracterización de la dispersión es el estudio de los diagramas polares de dispersión que representan la función de forma respecto al ángulo de dispersión.

En fig. 15 se han representado dichos patrones para ambos tipos de dispersores en $ka = 0.178$ (Régimen de Rayleigh), $ka = 2$, y $ka = 20$, para una onda plana incidente por la derecha en la dirección $\theta = 0^\circ$. Es importante señalar que estos patrones representan sólo la presión dispersada y no la presión total, ya que no tienen en cuenta la interferencia que se produce entre el campo dispersado y el campo incidente.

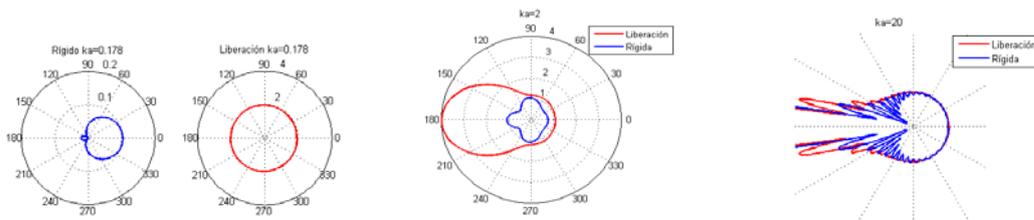


Fig 15 Patrones de dispersión de las esferas rígida (azul) y de liberación de presión (rojo) en $ka=0.178$ (Régimen de Rayleigh), $ka=2$ y $ka=20$, identificadas de izquierda a derecha. La onda incide por 0°

En el régimen de Rayleigh, fig. 15 izquierda, la esfera de liberación de presión (rojo) dispersa el sonido por igual en todas direcciones, es decir únicamente presenta radiación monopolo por la gran diferencia entre su compresibilidad y la del medio, que es de cuatro órdenes de magnitud, frente a la diferencia de densidades, que es de 1 orden de magnitud. En el caso de la esfera rígida no hay un efecto predominante por lo que el patrón de dispersión es la suma de la componente monopolo más la componente dipolo. Para $ka=2$, fig.15 centro, la esfera rígida dispersa el sonido de forma prácticamente isotrópica, mientras que para la esfera suave lo hace fundamentalmente en el semiplano posterior. A medida que aumenta la frecuencia, fig.15 derecha, aparecen lóbulos secundario en el patrón de dispersión rígido que no aparecen en el patrón de la esfera de liberación, aunque en ambos caso el sonido dispersado se concentra fundamentalmente detrás del dispersor, en la dirección opuesta a la fuente. Aunque no se observa en las imágenes, este lóbulo principal interfiere destructivamente con la onda incidente produciendo una zona de sombra tras el dispersor.

VII. 1. b. Esfera elástica de Tungsteno

Se muestran ahora los resultados obtenidos para una esfera de tungstenos con distintos diámetros. En fig.16 se ha representado la amplitud de la retrodispersión obtenida para los distintos diámetros

comparadas con los resultados obtenidos según el modelo de Faran. La concordancia entre el modelo teórico y el modelo implementado en Comsol es altamente satisfactoria.

La respuesta de dispersión depende tanto de la composición como de las dimensiones del dispersor. En nuestro caso, las cuatro esferas tienen la misma composición, por lo que las diferencias en la respuesta de dispersión son debidas únicamente a la variación del radio. Se observa que a medida que aumenta el radio, la distancia frecuencial entre las resonancias disminuye y aumenta la amplitud de retrodispersión.

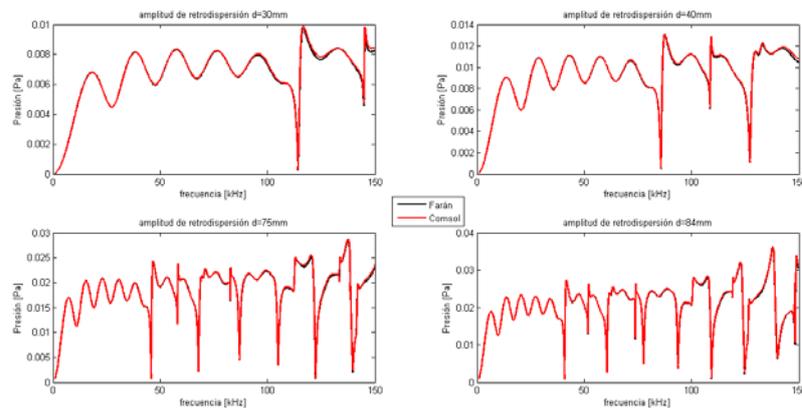


Fig. 16 Variación de la función de forma con el radio de la esfera. Se representa la función de forma, mediante comsol y Faran para los diámetros $d=30$ (izq.sup.), 40 (dcha.sup.), 75 (izq.inf.), 84 (dcha.inf.), mm

Para eliminar la dependencia del radio de la esfera, en fig.17 se representa la amplitud de presión normalizada, o función de forma respecto al eje frecuencial normalizado ka , para cada uno de los radios simulados. Las cuatro respuestas se superponen obteniéndose una representación de la dispersión independizada del radio del dispersor, que es siempre igual para todos los dispersores esféricos que tengan igual composición.

Las frecuencias de resonancia son etiquetadas en la fig.17, mediante los índices modales (n, l) . Para obtener estos índices es necesario representar las distintas funciones de forma parciales f_n , lo que no es posible a partir de comsol, por lo que para identificar los distintos índices se ha recurrido a [2], donde se obtienen, a partir de la teoría de Faran, las frecuencias de resonancia de una esfera de tungsteno.

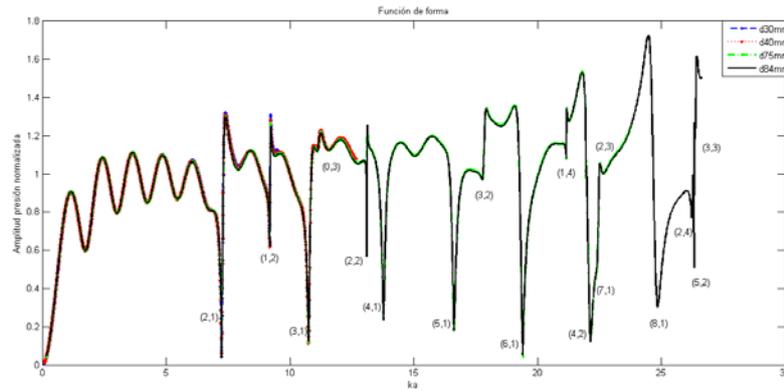


Fig. 17 Amplitud de la función de norma frente al eje adimensional ka para las 4 esferas de tungstenos simuladas. Las etiquetas (n,l) identifican los modos resonantes.

1. Estudio de las resonancias

La respuesta de dispersión de un objeto elástico se forma por la superposición de las resonancias que producen las ondas superficiales elásticas sobre la respuesta rígida. El espectro resonante se puede obtener a partir de la ecuación, como el valor absoluto de la diferencia entre la respuesta elástica y la respuesta rígida. Teóricamente, entre dos resonancias consecutivas la respuesta elástica coincide con la respuesta rígida, por lo que el espectro resonante será cero entre esas dos resonancias. Para comprobarlo en fig.18 se muestra, en la imagen superior, la amplitud de dispersión normalizada de la esfera elástica de tungsteno de diámetro $d=84$ mm, junto con la respuesta de la misma esfera pero perfectamente rígida, y en la imagen inferior el espectro resonante obtenido a partir de la ec. 64 del anexo XI.4.a.3

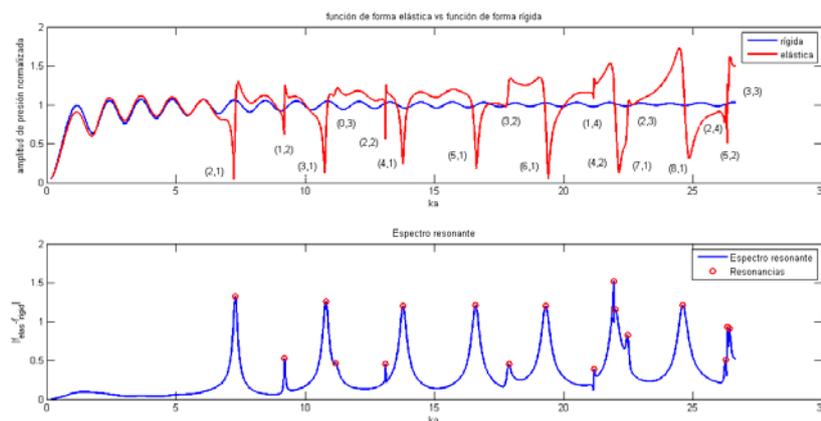


Fig.18 Amplitud de la función de forma frente al eje normalizado ka para la esfera rígida y de tungsteno con diámetro $d=84$ mm (superior). Las etiquetas (n,l) identifican los modos resonantes. Espectro resonante (figura inferior) obtenida a partir de la diferencia de las ff rígida y elástica. Los círculos rojos marcan las frecuencias de resonancia obtenidas

Aunque el espectro resonante no es exactamente cero entre dos resonancias si permite identificar fácilmente las frecuencias de resonancia excitadas por las ondas superficiales. En el

anexo XI.11.a, proporcionan las frecuencias de resonancia obtenidas a partir del espectro junto al modo natural de vibración asociado. Además se muestran la representación de los desplazamientos asociados a los seis primeros modos.

2. Patrones de dispersión

En la fig. 19, se representan los patrones de dispersión de la esfera elástica junto a los de la esfera perfectamente rígida para $ka = 0.178$, $ka = 15$, $ka = 16,5$ que se corresponden con el régimen de Rayleigh, una frecuencia no resonante y una resonante. En régimen de Rayleigh el patrón obtenido para ambos dispersores es idéntico salvo pequeñas diferencias de amplitud. Esto es debido a que en ese Régimen la esfera elástica presenta un comportamiento rígido, pero no perfectamente rígido (modelo ideal), por lo que es lógico esperar que haya diferencias de amplitud debido a que la esfera elástica es realmente un objeto penetrable y móvil. Para frecuencias no resonantes, el patrón de dispersión de la esfera elástica es similar al obtenido para la esfera rígida, presentando también un lóbulo principal posterior y una serie de lóbulos secundarios de menor amplitud. Para frecuencias resonantes, en cambio si aparecen diferencias en el semiplano derecho donde se sitúa la onda incidente (derecha) debidos a los efectos de los desplazamientos superficiales de la esfera característicos de la resonancia

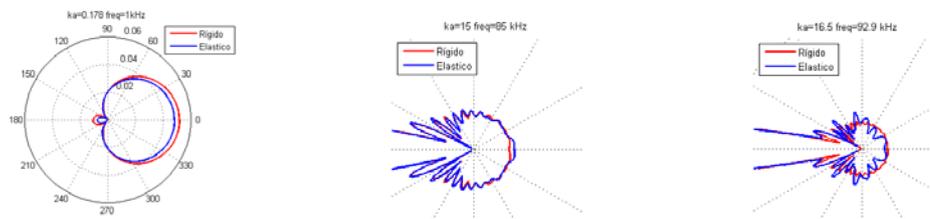


Fig. 19 Patrones de dispersión de las esferas rígida (rojo) y de elástica de tungsteno (azul) en $ka=0.178$ (Régimen de Rayleigh), $ka=15$ (frecuencia no resonante) y $ka=16.5$ (frecuencia resonante), identificadas de izquierda a derecha. La onda plana incide por la derecha.

VII. 1. c. Esfera de poliuretano: Modelo de célula.

Los parámetros elásticos del poliuretano se detallan en la tabla I del anexo XI.10. Aunque el diámetro de la esfera no se corresponde con diámetro del núcleo de una célula, tal y como se ha visto en VII.1.b, para un mismo material es posible obtener una respuesta de dispersión independiente del radio (función de forma frente a ka). Por otro lado, al ser un elemento con densidad similar a la del agua, no puede ser considerado un dispersor duro, por lo que su respuesta de dispersión diferirá de la obtenida para la esfera metálica de tungsteno. En la fig.20 se muestra la función de forma de la esfera de poliuretano comparada con el modelo de Faran.

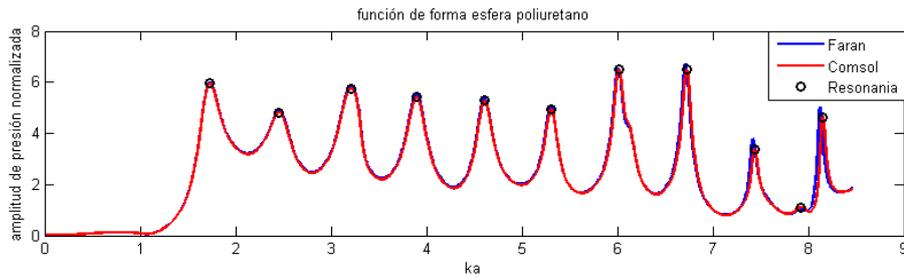


Figura 20 Amplitud de la función de forma obtenida (rojo) para la esfera de poliuretano ($d=20\text{mm}$), comparada con el modelo de Faran (azul). Las resonancias se indican en negro

Como se aprecia en fig.20, en el caso de una esfera de poliuretano no sólida, el fondo de dispersión no se corresponde con el fondo perfectamente rígido y las resonancias no se superponen destructivamente sino constructivamente. Otra particularidad de este tipo de dispersores es que la distancia frecuencial entre las resonancias permanece prácticamente constante, siendo esta distancia aproximadamente [24] $ka \approx 0.7$. De esta forma, es posible determinar el radio del dispersor a partir de la medida experimental de su respuesta de dispersión, lo que es muy útil en algunas aplicaciones médicas relacionadas con la evolución del tamaño de las células. En el anexo XI.11.b se indican los valores ka en los que aparece una resonancia según la fig. 20, junto con las frecuencias asociadas obtenidas a partir de la representación de los desplazamientos en la simulación. En algunos casos, debido supuestamente a la proximidad a la que se encuentran dos resonancias en la simulación, originan una única resonancia en la respuesta de dispersión. Hay que añadir también, que al no tratarse de una esfera dura, los modos naturales de vibración no están próximos a las frecuencias de resonancias de la función de forma. Por ejemplo el modo asociado a la primera frecuencia de resonancia situada en 40.9 kHz se encuentra en la frecuencia propia 57.25 kHz .

La separación frecuencial según la tabla es aproximadamente:

$$f = 17200\text{ Hz}$$

A partir de esta expresión se deduce que el radio del dispersor es:

$$a = \frac{0.7 \cdot 1486}{2\pi \cdot 17200} = 0.0096\text{ m}$$

por lo que, efectivamente, se obtiene una buena aproximación del radio de la esfera, que es de 0.01m .

1. Patrones de dispersión

En fig.21, se representan los patrones de directividad para distintos valores de ka , en concreto para $ka = 0.0042$ (regimen de Rayleigh), $ka = 2.45$; $ka = 8.15$ correspondientes a dos frecuencias de resonancia.

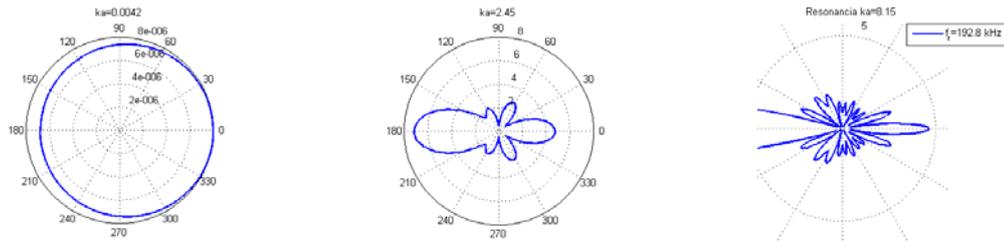


Fig. 21 Patrones de dispersión de la esfera de poliuretano en $ka=0.0042$ (Régimen de Rayleigh), $ka=2.45$ (frecuencia resonante) y $ka=5$ (frecuencia resonante), identificadas de izquierda a derecha. La onda plana incide por la derecha.

En el caso de la esfera de poliuretano, como la densidad es similar a la del agua, la radiación en el régimen de Rayleigh está afectada por la diferencia de compresibilidad, por lo que la dispersión presenta un patrón monopolo.

A medida que aumenta la frecuencia van apareciendo lóbulos laterales y un lóbulo principal que se extiende en la parte posterior del dispersor originando la región de sombra. En relación con el patrón de dispersión de la esfera metálica, se puede apreciar que, en el caso del poliuretano, aparece un lóbulo secundario en la dirección de incidencia, que en las frecuencias de resonancia, interfiere constructivamente con la onda incidente ocasionando un máximo en la respuesta de dispersión.

VII. 1. d. Esfera fluida

Estudiamos ahora la dispersión de esferas o cavidades fluidas que no soportan ondas transversales. Este modelo fue estudiado inicialmente por lord Rayleigh para dispersores muchos menores que la longitud de onda y por Anderson [7] para dispersores de cualquier dimensión. La dispersión de los cuerpos fluidos está determinada especialmente por la relación que existe entre la velocidad, la densidad y la compresibilidad del medio y el fluido definida como $\kappa = 1/\rho c^2$

1. Esfera de aire

En la fig.22 se representa la amplitud normalizada de dispersión o función de forma obtenida para una esfera de aire de diámetro $d = 20mm$ inmersa en el agua comparada con el modelo de Anderson.

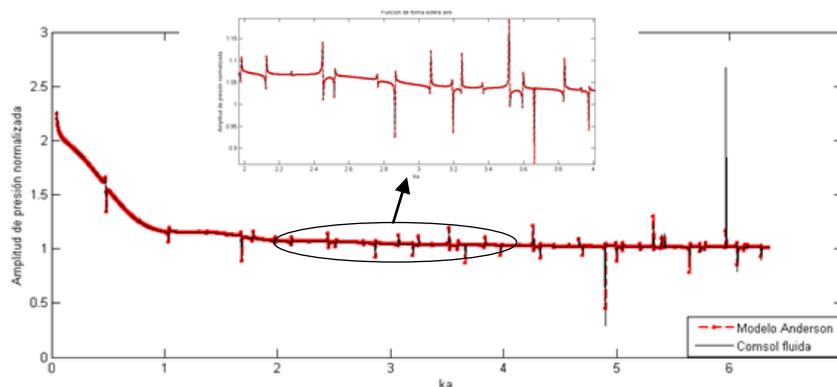


Fig. 22 Amplitud de la función de forma obtenida (negro) para la esfera de aire ($d=20\text{mm}$), comparada con el modelo de Anderson (negro). Se ha ampliado la zona entre $ka=2$ y $ka=4$ para observar mejor el comportamiento de las resonancias.

Como observa en fig.22, salvo la amplitud en algunas resonancias ambos resultados concuerdan satisfactoriamente por lo que el modelo implementado en comsol es válido para representar la dispersión producida por la interacción entre dos fluidos, en nuestro caso esfera de aire y agua .

a) Espectro resonante

La función de forma de la fig.22 muestra una tendencia similar a la de la esfera de liberación de presión (ver fig.14), ya que se trata de un dispersor con densidad mucho menor que la del medio, por lo que su respuesta de dispersión puede aproximarse como la superposición de la respuesta de fondo de liberación y el espectro resonante de la cavidad gaseosa que se obtiene de forma análoga al caso elástico. De este forma, se puede obtener dicho espectro a partir de la diferencia entre ambas respuestas, fig.23

Una importante diferencia con el caso elástico, es que mientras que para la esfera elástica, las resonancias se corresponde con los modos naturales de vibración de la esfera con condiciones Dirichlet en el contorno, es decir, vibrando libre, en el caso de la esfera de aire, las resonancias se corresponde con los modos de vibración de la esfera con condiciones de contorno dura de Neuman, ya que en este caso el fluido, de mayor densidad, actúa como una pared para la esfera. En el anexo XI.11.c se muestran las seis primeras frecuencias de resonancia y los campos de presiones asociados

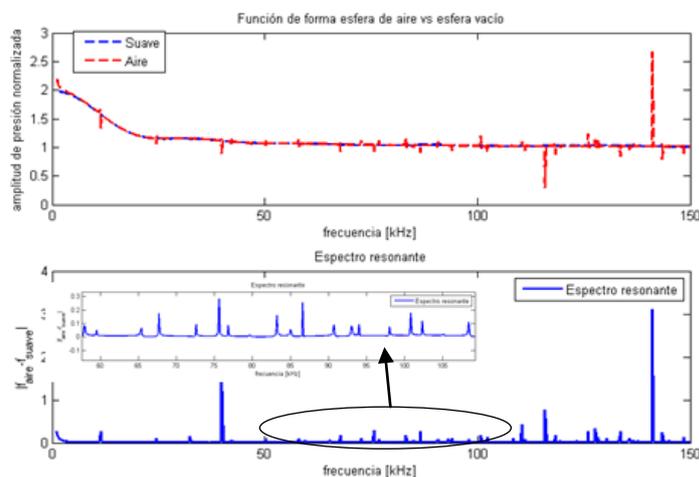


Fig. 23 Amplitud de la función de forma frente al eje normalizado ka para la esfera de liberación o suave (azul) y de aire (rojo) con diámetro $d=20\text{mm}$ (superior). Espectro resonante (figura inferior) obtenida a partir de la diferencia de la ff de liberación y aire. Se ha ampliado la zona entre $ka=50$ y $ka=100$ para observar mejor el comportamiento de las resonancias.

b) Patrón de dispersión

En la fig.24 se muestran el patrón de dispersión de la esfera de aire junto con el de liberación de presión y de aire para $ka = 0.04$, $ka = 01.48$ (frecuencia no resonante), $ka = 4.9$ (frecuencia

resonante). En el régimen de Rayleigh, $ka = 0.04$, ambas esferas radian el sonido de forma monopolo, por la marcada diferencia entre su compresibilidad y la del medio. En el régimen de interferencias, la comparación entre ambos patrones depende de la frecuencia mostrada. Si no coincide con una frecuencia de resonancia, ambos muestran el mismo patrón de dispersión, mientras que en las frecuencias de resonancia, la esfera muestra ciertas lobulaciones que no aparecen en la esfera de vacío, debido al igual que en el caso elástico y la respuesta rígida, a los efectos de las resonancias.

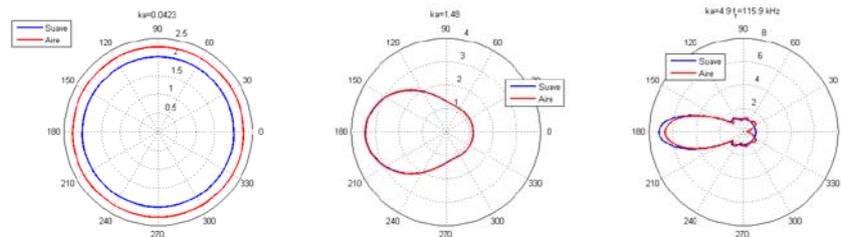


Fig. 24 Patrones de dispersión de las esferas de aire (rojo) y liberación de presión o suave (azul) en $ka=0.0423$ (Régimen de Rayleigh), $ka=1.4$ (frecuencia no resonante) y $ka=4.9$ (frecuencia resonante), identificadas de izquierda a derecha. La onda plana incide por 0°

2. Caracterización de esferas fluidas

La dispersión de las esferas fluidas se ve fuertemente afectada por la relación que existe entre las densidades ($g = \rho_{disp}/\rho_{medio}$), velocidades, ($h = c_{disp}/c_{medio}$), y compresibilidades ($K = \kappa_{disp}/\kappa_{medio}$), del medio y del dispersor (ver anexo XI.5.a). Por esta razón se han obtenidos las respuestas de dispersión para esferas fluidas que mantienen algunos de estos parámetros constantes, variando los otros dos.

a) Dispersores esféricos con densidad igual a la del fluido

Si consideramos un dispersor esférico con igual densidad ρ_1 a la del medio pero distinta velocidad del sonido c_1 , y por lo tanto distinta compresibilidad ($\kappa = 1/(\rho c^2)$) obtenemos las amplitudes de retrodispersión mostradas en la fig.25. En la imagen derecha se muestra la función de forma para esferas que tienen mayor velocidad del sonido (superior), con $h = c_1/c_0 = 0.5; 0.8$ y en la imagen inferior la respuesta de esferas con menor velocidad del sonido, $h = 1.2; 2$

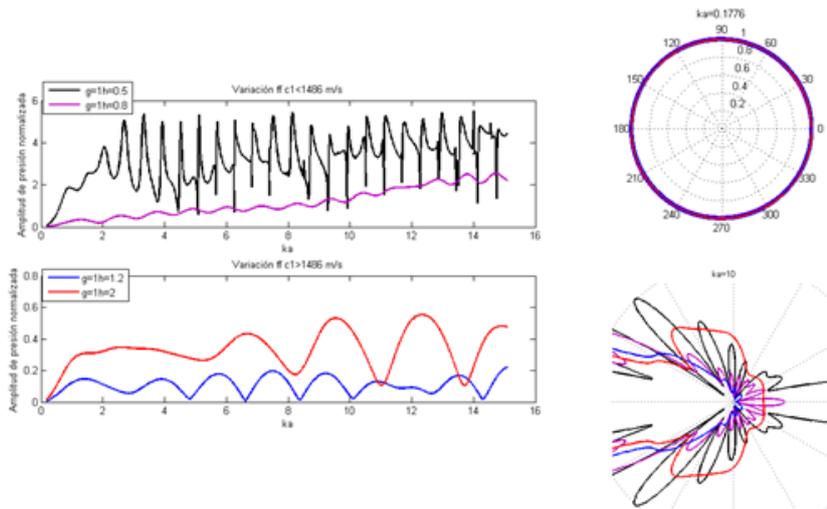


Fig. 25 Izda.: Funciones de forma obtenidas para esferas fluidas con densidad igual a la del medio y relación de velocidades $h=0.5$ (negro) , 0.8 (morado), 1.2 (azul), 2 (rojo). Dcha: Patrones de dispersión de las misma esferas en régimen de Rayleigh y $ka=10$. La onda plana incide por 0°

A partir de los resultados mostrados en la fig.25 izquierda se puede comprobar que para pequeños valores de h aumenta el número de resonancias del dispersor y su amplitud. Al disminuir la velocidad del sonido en el dispersor manteniendo constante la densidad aumenta la compresibilidad de la esfera fluida y por lo tanto es más deformable dando lugar a más resonancias. A medida que aumenta la velocidad y disminuye la compresibilidad, las resonancias se distancian. Esto es evidente en todas las respuestas, tanto para velocidades inferiores como superiores a la del agua. En relación con la amplitud, los diferentes niveles obtenidos pueden explicarse a partir de la relación de impedancias ($Z = \rho c$), ya que cuanto más próximas son, menor es el nivel del eco.

Otro aspecto importante en la caracterización de la dispersión de la esfera fluida es la representación de los patrones de dispersión, mostrados en la fig.25 derecha. Para obtener una correcta visualización se han normalizado respecto a su máximo correspondiente, por lo que en las imágenes mostradas no se aprecian las diferencias de amplitud, solo el patrón. Como cabía esperar, en régimen de Rayleigh ($ka = 0.1776$) patrón de dispersión es de tipo monopolo, ya que la componente dipolo sólo aparece para valores distintos de densidad. Para frecuencias más elevadas ($ka = 10$) se obtiene que en el caso de que la velocidad sea menor que la del agua aparecen lobulaciones en la dirección de la onda incidente (colores negro y morado), mientras que para velocidades mayores, la dispersión es más isotrópica.

b) Dispersores esféricos con velocidad igual a la del fluido

Si mantenemos constante la velocidad del sonido igual a la del medio y variamos tanto la densidad del sonido como la compresibilidad, obtenemos las respuestas de retrodispersión mostradas en la fig.26

Los cambios en la función de forma son menos apreciables con el cambio de densidad, ya que salvo las diferencias de nivel, todas las respuestas presentan las resonancias frecuencias iguales o

muy próximas. Quizás es el cambio más apreciable se produce en la primera frecuencia de resonancia que se localiza a mayor frecuencia cuanto más parecida es la densidad del dispersor a la del medio.

El razonamiento para las diferencias de amplitud es análogo al realizado para la velocidad del sonido igual a la del medio.

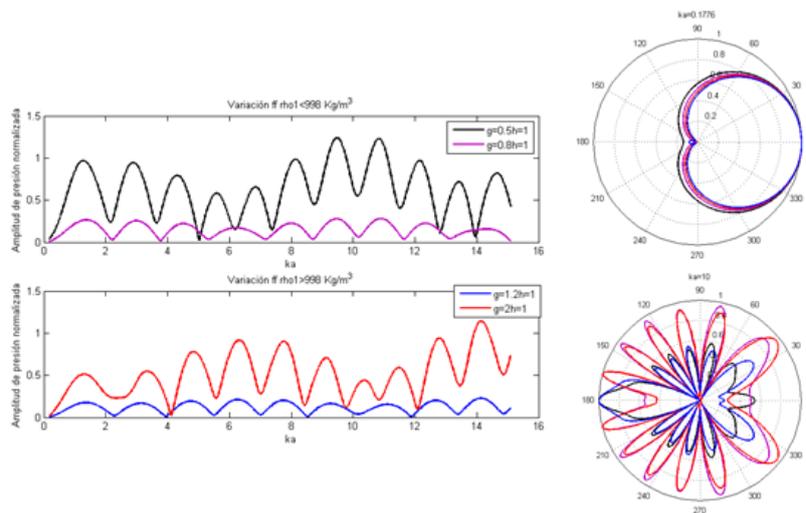


Fig. 26 Izda.: Funciones de forma obtenidas para esferas fluidas con velocidad igual a la del medio y relación de densidades $g=0.5$ (negro), 0.8 (morado), 1.2 (azul), 2 (rojo). Dcha: Patrones de dispersión de las mismas esferas en régimen de Rayleigh y $ka=10$. La onda plana incide por 0°

En relación con los patrones de dispersión, mostrados en la fig.26 derecha, se puede decir, que en régimen de Rayleigh, como la densidad y la compresibilidad son distintas a la del agua, el patrón de radiación tiene tanto componente monopolo como dipolo, siendo para bajas densidades y mayor compresibilidad (negro y morado) predominante la componente monopolo y para densidades altas, mayores que la del agua, predominante la componente dipolo. Para frecuencias más alta, se observa que el comportamiento angular de dispersión depende de la proximidad entre la densidad del medio y la del dispersor, obteniéndose patrones similares para las parejas $g = (0.8; 1.2)$; $g = (0.5; 2)$

c) Dispersores esféricos con compresibilidad igual a la del fluido

Estudiamos ahora el caso de dispersores esféricos que presentan igual compresibilidad que el agua. Por lo que tanto la densidad como la velocidad de las ondas longitudinales es modificada, siendo la relación entre ellas:

$$\rho_1 = g\rho_0 \tag{18}$$

$$c_1 = \sqrt{\frac{1}{\rho_1 \kappa_0}} = \sqrt{\frac{\rho_0 c_0^2}{\rho_1}} \tag{19}$$

De esta forma, si disminuimos la densidad aumenta la velocidad del sonido en el dispersor, lo que es consecuente con los resultados obtenidos, mostrados en la fig.27 izquierda. Para densidades

menores que el agua, la velocidad del sonido será mayor cuanto menor sea la densidad, y por lo tanto, al igual que ocurría en la fig. 25 izquierda para velocidades mayores mostradas en rojo y azul se produce un desplazamiento de las resonancias hacia altas frecuencias cuanto más pequeña es la densidad. Para densidades mayores que la del agua, ocurre justamente lo contrario, la velocidad del sonido se hace menor y por lo tanto las gráficas obtenidas son similares a las de la fig.25 izquierda para velocidades menores

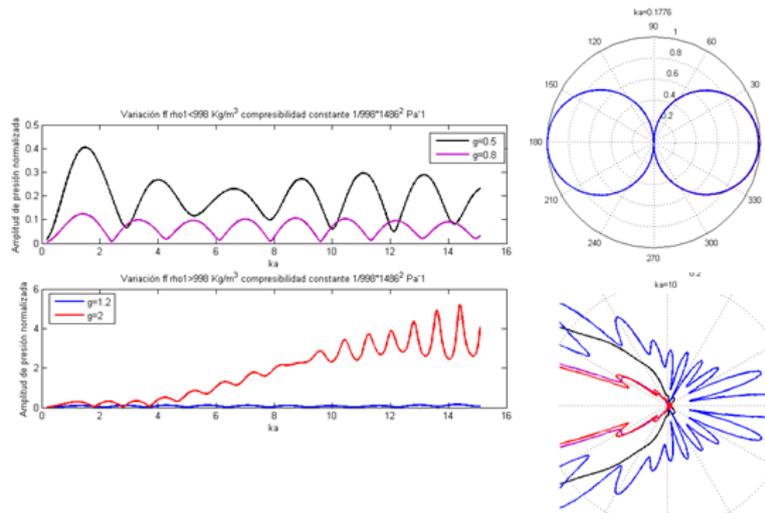


Fig. 27 Izda.: Funciones de forma obtenidas para esferas fluidas con compresibilidad igual a la del medio y relación de densidades $g=0.5$ (negro), 0.8 (morado), 1.2 (azul), 2 (rojo). Dcha: Patrones de dispersión de las mismas esferas en régimen de Rayleigh y $ka=10$. La onda plana incide por 0°

Respecto a los patrones de dispersión es especialmente destacable el patrón obtenido a bajas frecuencias. Como la compresibilidad es igual a la del medio y la densidad varía, en todos los casos se obtiene radiación de tipo de dipolo. En medias y altas frecuencias, las diferencias principales se encuentran en las lobulaciones que aparecen para densidades mayores, que se corresponden con los patrones obtenidos en la fig.25 para velocidades menores que el agua, es decir solo muestran lóbulos en la dirección de incidencia las esferas con velocidades menor que el agua, que en nuestro son las que tienen mayor densidad.

VII. 2. CILINDRO FINITO

En esta sección se presentan los resultados obtenidos para el dispersor cilíndrico de acero (ver tabla II del anexo XI.10.b) con sección de transversal circular, longitud 12cm y radio 1cm. A partir del modelo implementado en comsol se obtiene la fuerza del blanco [TS], el espectro resonante y el patrón de dispersión para distintos ángulos de incidencia en un rango frecuencial entre 50 kHz y 150 kHz. Los resultados obtenidos son comparados tanto con los resultados experimentales como con el modelo de BEM [1] siguiendo el criterio empleado en ese trabajo donde cero grados se corresponde con incidencia normal y 90 grados con incidencia axial, tal y como se muestra en fig.28.

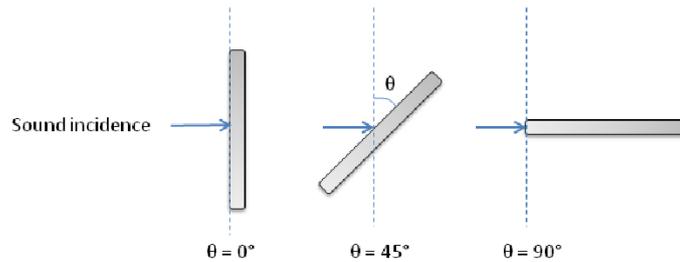


Fig. 28 Definición de los ángulos incidentes. 0° corresponde a incidencia normal y 90° a incidencia axial.

Como para obtener el espectro resonante es necesario conocer la respuesta rígida, en todos los casos se presentan ambas respuestas.

VII. 2. a. *Incidencia normal $\theta = 0^\circ$*

Comenzamos estudiando la dispersión producida cuando la onda incide perpendicular al eje axial del cilindro (*broadside incidence*). En la fig. 29 se representa la fuerza del blanco para el cilindro rígido y elástico comparado en cada caso con los resultados teóricos (Faran cilindro infinito), experimentales y numéricos (BEM).

En la fig.29 izquierda se muestra el TS rígido obtenido junto con el del modelo de cilindro infinito de Faran. Las diferencias entre ambos resultados se producen fundamentalmente a baja frecuencias, donde los efectos de difracción debido a los laterales del cilindro finito son más notables. En ambas respuestas se producen oscilaciones debido a la interferencia de las ondas Franz con la onda incidente, y a medida que aumenta la frecuencia, como los efectos de la difracción comienzan a ser despreciables, dichas oscilaciones desaparecen y las respuestas convergen hacia el mismo valor ya que, a altas frecuencia, el cilindro finito puede considerarse infinito.

En relación con la respuesta elástica, fig. 29 derecha, la concordancia del TS obtenido a partir de COMSOL con la medida experimental y el modelo BEM prueba la validez del modelo para este ángulo de incidencia. Todas las respuestas, incluida la del cilindro infinito presentan dos resonancias situadas a las mismas frecuencias, ya que dichas resonancias están asociadas a las ondas superficiales que en incidencia normal siguen caminos circunferenciales alrededor del cilindro y por lo tanto la condición de coincidencia de fase que da lugar a la resonancia solo depende del radio que es el mismo para ambos cilindros.

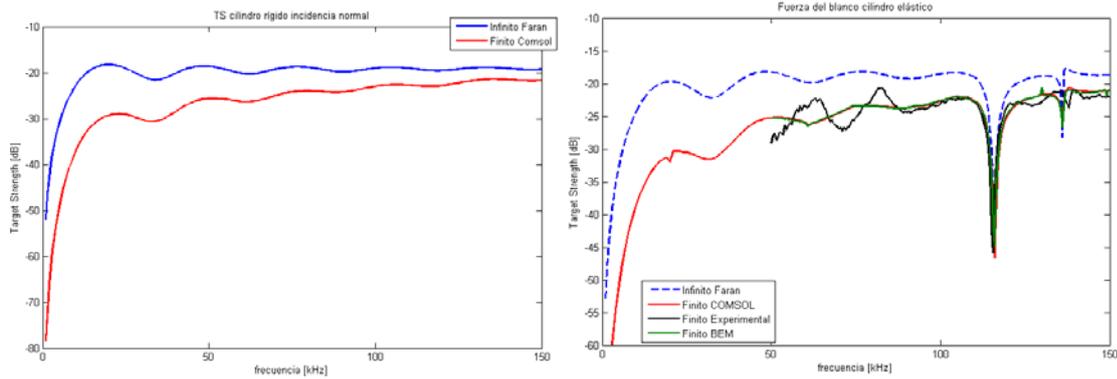


Fig. 29 Izquierda: Comparación del TS rígido obtenido mediante comsol para el cilindro de 12 cm de longitud comparado con el modelo de Faran de cilindro infinito. Derecha: TS elásticos obtenidos mediante Comsol (rojo), BEM (verde), medidas experimentales (negro), comparadas con el TS de Faran para el cilindro infinito.

1. Espectro resonante

Como en el caso de la esfera, las frecuencias de resonancia pueden ser asociadas a los modos de vibración natural del cilindro. Estas frecuencias de resonancia pueden ser determinadas también a partir del espectro resonante obtenido como la amplitud de la diferencia entre la función de forma resonante y rígida, fig. 30

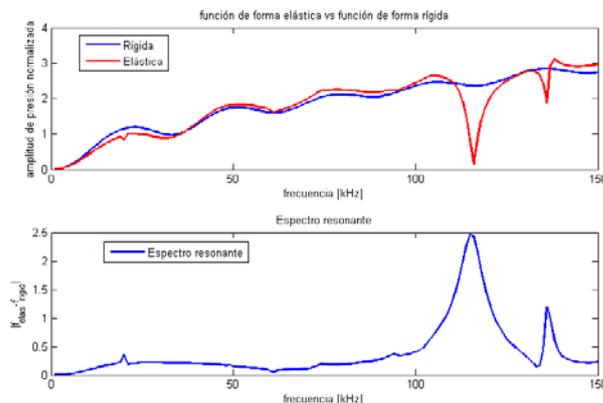


Fig. 30 Amplitud de la función de forma para el cilindro rígido y elástico de acero (superior). Espectro resonante (figura inferior) obtenida a partir de la diferencia de las ff rígida y elástica.

Las frecuencias y modos naturales de vibración obtenidos se muestran en el anexo XI.11.d

VII. 2. b. Incidencia oblicua

En incidencia oblicua los modelos teóricos de Faran para el cilindro infinito, y el modelo adaptado de Stanton, dejan de ser validos, por lo que forzosamente se debe recurrir a métodos numéricos [29] o a la implementación de otros modelos de cálculo como el T-matrix.

Como ocurre con el cilindro infinito en incidencia oblicua, descrito en el anexo XI.4.b, las resonancias para incidencia con componente axial no nula, están producidas por las ondas superficiales que se propagan a lo largo tanto de caminos meridionales, al igual que en incidencia normal, como de caminos helicoidales [30]. Las resonancias producidas dependen del ángulo de

incidencia, lo que es muy útil para identificar la orientación del dispersor en los distintos sistemas de imagen ultrasónica.

1. Incidencia axial (en don incidence)

En la fig.31 se presenta el TS del cilindro finito en incidencia axial, junto a las respuestas obtenidas experimentalmente y mediante BEM.

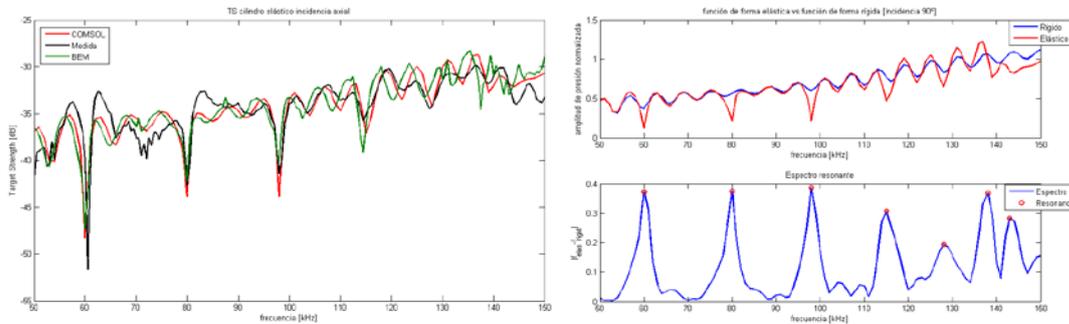


Fig. 31 Izquierda: TS obtenido para incidencia 90°, a partir de Comsol (Rojo), BEM (verde) y Experimental (negro). Derecha: Amplitud de la función de forma elástica y rígida en incidencia 90° (superior) y espectro resonante (inferior). Los círculos rojos marcan las frecuencias de resonancia obtenidas

Aunque las tres respuestas presentan formas bastante semejantes con resonancias en las mismas frecuencias, las diferencias, tanto entre los modelos numéricos como con la medida experimental son ahora más notables, especialmente a altas frecuencias. Aún así el modelo de comsol, implementado en este trabajo, aproxima mejor la medida experimental.

Para encontrar las frecuencias de resonancia, en fig.31 derecha se muestra el espectro resonante calculado a partir de la diferencia entre la respuesta elástica y rígida. En total se excitan 7 resonancias que se muestran en el anexo XI.11.d, junto a los modos naturales de vibración.

Los modos excitados son únicamente los modos axiales, representados en la anexo XI.11.d que se caracterizan por una sucesión de máximos y mínimos a lo largo del eje axial vibrando de forma pulsante, sin que haya desplazamiento axial.

2. Otros ángulos de incidencia: 30°,45°,60°

Se presenta ahora el TS obtenido para otros ángulos de incidencia, en concreto se ha escogido como ángulos representativos 30°, 45° y 60°.

A. $\theta = 30^\circ$

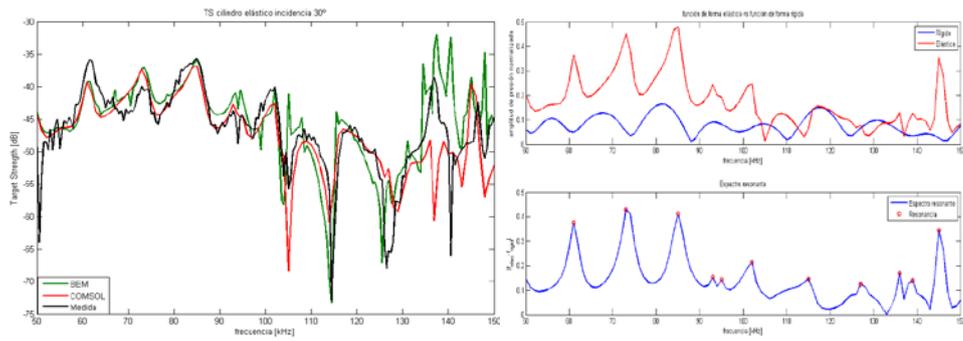
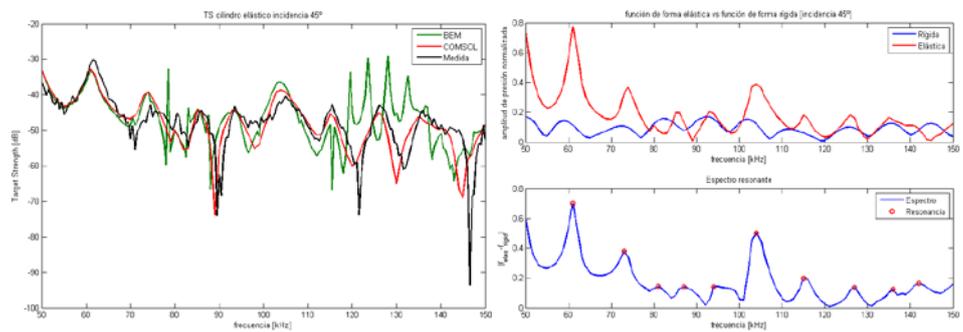
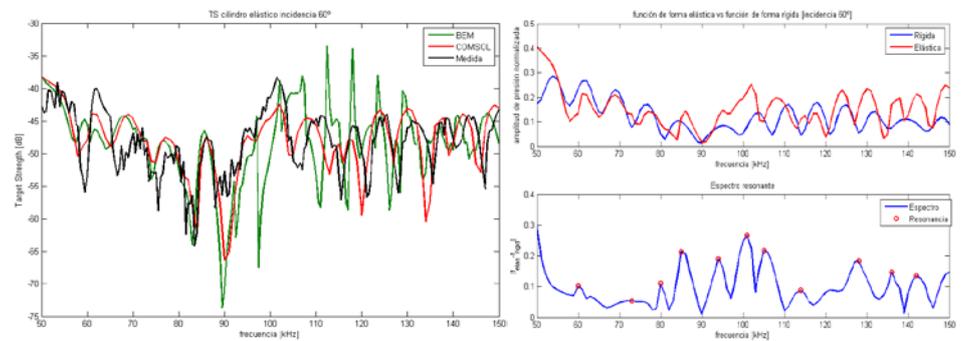
B. $\theta = 45^\circ$ C. $\theta = 60^\circ$ 

Figura 32 Izquierda: TS obtenido para incidencia 30° (A), 45° (B), 60° (C), a partir de Comsol (Rojo), BEM (verde) y Experimental (negro). Derecha: Amplitud de la función de forma elástica y rígida para las mismas incidencias (A,B,C derecha superior) y espectro resonante (A,B,C derecha superior inferior). Los círculos rojos marcan las frecuencias de resonancia obtenidas

Al igual que para incidencia *end-on*, es en altas frecuencias donde aparecen las mayores diferencias entre la medida experimental y los resultados obtenidos según los modelos numéricos (Comsol y BEM). Sin embargo, para los tres ángulos representados en la fig.32, nuestro en comsol (en rojo) presenta una clara mejoría respecto a la similitud con la medida experimental, frente al TS obtenido mediante BEM, que introduce un mayor error numérico, especialmente a altas frecuencias.

Como se observa en la fig.32 A,B,C, las frecuencias excitadas varían de un ángulo de incidencia a otro, por lo que se confirma que es posible identificar la orientación del dispersor a partir de su TS. Además, en el caso de incidencia oblicua, puede verse en las funciones de forma, que dichas

frecuencias de resonancia no siempre se superponen destructivamente con la respuesta rígida, tal y como en el caso de la esfera o a del cilindro finito en incidencia normal, sino que en algunos casos dan lugar a picos resonantes, en lugar de los valles mostrados en la fig.30 o fig.31

Otro efecto destacable para incidencia oblicua es que, como el vector director incidente tiene componente no nula tanto en la dirección axial como radial, excita modos de muy diversa naturaleza, que pueden producir desplazamientos radiales, axiales y sus posibles combinaciones. Algunos de estos modos se muestran en el anexo XI.11.d

VII. 3. *ESFEROIDE ELONGADO*

Por último se presentan en esta sección los resultados obtenidos en la simulación de la dispersión del esferoide elongado. En concreto se obtiene la variación del TS en función del ángulo y de la frecuencia para un esferoide de aluminio con semieje mayor $a = 6 \text{ cm}$ y semieje menor $b = 1.5 \text{ cm}$, medido experimentalmente en [1].

Es importante indicar, que siguiendo con el criterio establecido para el cilindro, la incidencia normal al eje mayor del cilindro se asocia al ángulo $\theta = 0^\circ$, y la incidencia normal al eje menor del cilindro (*end-on incidence*) se asocia al ángulo $\theta = 90^\circ$

VII. 3. a. *Respuesta elástica del esferoide elongado con relación $a/b = 4$*

Al igual que en el caso del cilindro finito, se dispone tanto de resultados experimentales como de los resultados obtenidos mediante el método de elementos de contorno. Sin embargo, no se conoce la composición real de los parámetros elásticos asociados al dispersor experimenta, por lo que para el modelo de comsol se emplean los parámetros proporcionados por la base de datos del programa para el *aluminum*, que han sido detallados en la tabla III del anexo XI.10.c

La fig.33 muestra el TS obtenido a partir de BEM, COMSOL y de la medición para los ángulos de incidencia $\theta = 0^\circ, 45^\circ$ y 90° . Los desacuerdos entre los distintos TS pueden obedecer a varias razones. Por un lado, el uso de parámetros elásticos distintos a los del Aluminio empleado experimentalmente puede modificar tanto la posición de las resonancias como los niveles de amplitud. Otra posibilidad es que haya algún pequeño error de posición en la medida experimental de forma que los ángulos reales no se correspondan exactamente con los indicados. Por otro lado los resultados BEM se extienden solo hasta 68 kHz y no llegan a mostrar ninguna resonancia, por lo que no se puede contrastar la posición de las resonancias obtenidas mediante comsol con los resultados de dicho método numérico. A pesar de ello, se puede decir que los resultados obtenidos mediante nuestro modelo de COMSOL si están conformes con los obtenidos experimentalmente y en todos los casos muestra una visible mejoría respecto al modelo de elementos de contorno BEM.

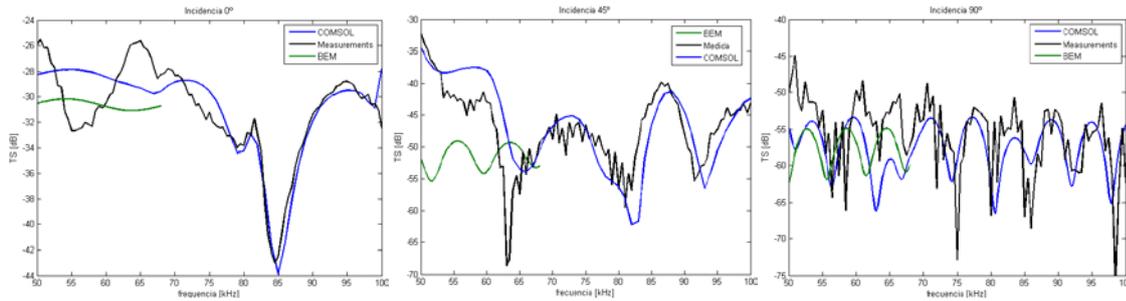


Fig. 33 TS obtenido para el esferoide elongado en incidencia 0° (izquierda), 45° (centro), 90° (derecha), a partir de Comsol (azul), BEM (verde) y Experimental (negro).

Estas respuestas se muestran en la fig.34. Los resultados de BEM se obtienen en un rango frecuencial demasiado bajo por lo que no llegan a mostrar ninguna resonancia. Los resultados obtenidos en este trabajo mediante COMSOL, si presentan unos niveles y forma similares a los resultados experimentales, a pesar de las limitaciones descritas anteriormente. En general todos los resultados muestran que el TS es dependiente tanto de la frecuencia como del ángulo de incidencia, y por lo tanto es posible identificar la orientación del dispersor a partir de la medición de su respuesta de dispersor.

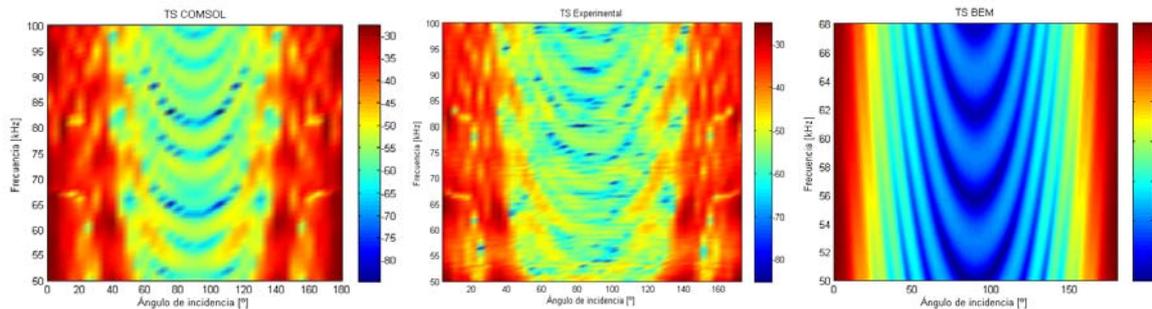


Fig.34 TS en función de la frecuencia y el ángulo para el esferoide elongado obtenido mediante Comsol (izquierda), experimental (Centro) y BEM (derecha)

Por último en la fig. 35 se muestran las funciones de forma y el espectro resonante obtenido para los tres ángulos representados en la fig. 33.

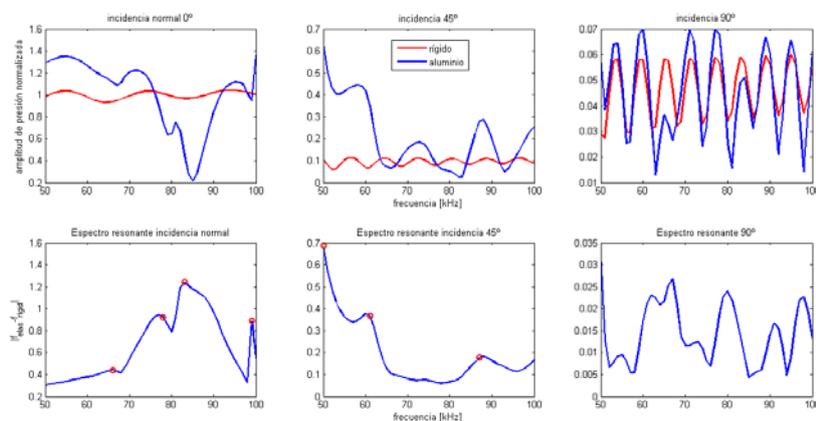


Fig. 35 Superior: Amplitud de la función de forma elástica (azul) y rígida (rojo) para las mismas incidencias de la fig. 33. Inferior: espectro resonante.

Se puede comprobar que en incidencia axial de 90°, para el rango frecuencial estudiado, no se excita ninguna resonancia, ya que los niveles obtenidos en el espectro son prácticamente cero para todas las frecuencias. Las resonancias obtenidas se muestran en el anexo XI.11.e

VII. 4. EXTRACCIÓN DE LA FASE DE LAS SEÑALES ELÁSTICA

Para la comprensión de los mecanismos de formación de ecos es necesario el procesamiento total, en fase y amplitud de las señales recibidas. Sin embargo, la componente de fase es habitualmente ignorada por lo que la presentación de respuesta de fase de esferas, cilindros y esferoides elásticos resulta novedoso y constituye un paso temprano hacia el desarrollo de aplicaciones en situaciones más realistas, ya que el análisis para geometrías relativamente simples puede contribuir a una mejor interpretación para casos más reales.

La información de la fase, puede extraerse de la misma manera que en el caso de la amplitud a partir de la respuesta acústica siguiendo el procedimiento detallado en los anexos XI.12. En nuestro caso se presenta esta información para el modelo de la esfera elástica de tungsteno, y los modelos del cilindro y del esferoide en incidencia axial. La validación se realiza comparando los resultados de comsol, en fig.36, con soluciones modales (Faran) en el caso de la esfera y mediciones efectuadas en [1].

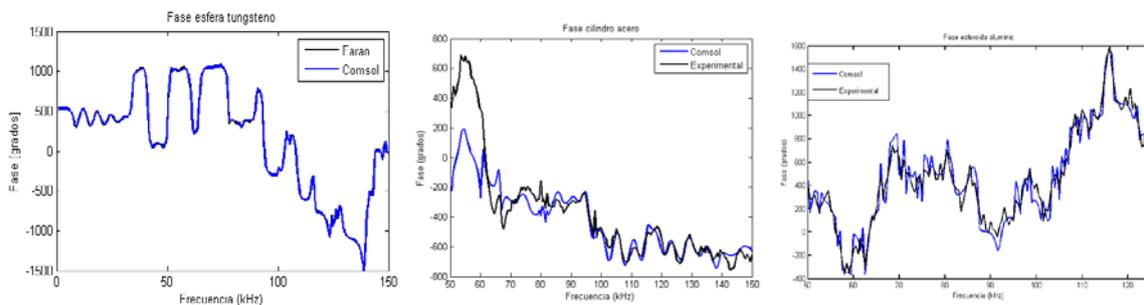


Fig. 36 Fases obtenidas mediante comsol (azul) obtenidas para la esfera cilindro y esferoide comparadas con el modelo de Faran (esfera), y experimental (cilindro y esferoide)

En general, las gráficas de fase muestran sensibilidad a las resonancias elásticas. En el caso de la esfera sólida de TC y 84mm de diámetro es posible notar un régimen de oscilaciones suaves a bajas frecuencias. Este comportamiento obedece al patrón de interferencia creado por la difracción de ondas de superficie Franz. Sin embargo, la completa interpretación de las curvas de fase va más allá de los objetivos de este trabajo.

VIII. CONCLUSIONES

A la vista de los resultados mostrados en la sección, se concluye que en este trabajo se han desarrollado con éxito distintos modelos numéricos en elementos finitos para describir los procesos dispersivos que se producen diferentes objetos con distinta geometría y composición.

En el caso de dispersores esféricos, los resultados han sido validados con los modelos analíticos de Faran, para el caso elástico, y Anderson, para el caso fluido encontrándose una perfecta concordancia entre los resultados numéricos y teóricos. Para este tipo de dispersores se ha obtenido también información de los patrones de dispersión que concuerdan con los modelos teóricos y describen correctamente la dispersión en los distintos regímenes estudiados. Es de particular interés el análisis en el régimen de Rayleigh de las esferas fluidas para el cual se observan distintos patrones de radiación de tipo monopolo y dipolo en función de la variación de densidad, compresibilidad y velocidad.

En el caso de los dispersores cilíndrico y esferoidal estudiados, los resultados se han analizado para distintos ángulos de incidencia y comparado con las medidas experimentales realizadas en [1]. Se obtiene una gran concordancia entre los resultado numéricos y del laboratorio en todos los casos. Se ha verificado que es posible obtener mediante las simulaciones de Comsol información válida tanto de amplitud como de fase, hecho que resulta novedoso, ya que los trabajos en este campo suelen utilizar únicamente la información de la amplitud.

Se muestra también el espectro resonante de los distintos dispersores elásticos y gaseosos, para varios ángulos de incidencia, que han sido validados mediante el análisis modal de Comsol. Se obtiene, tal y como predice la teoría resonante, que las frecuencias de resonancia ocurren a frecuencias cercanas a los modos naturales de vibración sólo en el caso de dispersores con densidades muy diferentes a las del medio. Por lo tanto, las respuestas de dispersión de objetos sólidos elásticos (o gaseosos) inmersos en agua se forman a partir de la superposición de las respuestas de dispersión correspondiente a dispersores ideales de tipo de rígido (o de liberación de presión) y dicho espectro resonante.

En este sentido, una de las principales líneas futura de investigación, puede ir encaminada a extraer información adicional de la fase de estos dispersores ideales, que no pueden ser medidos experimentalmente, de forma que se obtenga un análisis similar al realizado para la amplitud.

IX. AGRADECIMIENTOS

El presente trabajo ha sido realizado en colaboración con los doctores Phil Atkins y Alan Islas de la Universidad de Birmingham, a quienes quiero agradecer todo el cariño mostrado durante mi estancia allí. Personalmente quiero dedicarle el trabajo a mi tutor Rubén Picó por animarme a hacer este proyecto y a Paco Camarena, por todo el apoyo que me ofrece siempre. A mi familia, a mi abuelo Joseto, a Ernest y especialmente a Jaime Jr, mi futuro sobrino y mi más preciada ilusión.

X. BIBLIOGRAFIA

- 1 Islas-Cital A., “Amplitude and phase sonar calibration and the use of target phase for enhanced acoustic target characterization”, Thesis. University of Birmingham
- 2 Norris A. “Resonant acoustic scattering from solid targets”. *J. Acoust. Soc. of Am.*-1990. 88:1
- 3 Rayleigh L. “Investigation of the disturbance produced by a spherical obstacle on the waves of sound”. Proceedings of the London mathematical Society.-1872.4
- 4 Crocker M.J. “Chapter 4:Interference and steady state scattering of sound waves” Handbook of acoustics. Wiley-interscience publication.-1998
- 5 Yen, N.-c., Dragonette, L.R. and Numrich, S.K. “Time-frequency analysis of acoustic scattering from elastic objects”. *J. Acoust. Soc. Am.*-1990., 87: (6): 2359-2370
- 6 Medwin H. and Clay C.S. “Fundamentals of acoustical Oceanography” Academic Press.-1998
- 7 Anderson V.C. “Sound scattering from a Fluid sphere”. *J. Acoust. Soc. of Am.*-1951. 22:4
- 8 Faran J.J. “Sound scattering by a Solid Cylinder and Spheres” *J. Acoust. Soc. of Am.*-1951.23:4
- 9 Spence R.D. and Granger S. “The scattering of sound from a prolate spheroid” *J. Acoust. Soc. of Am.*-1951.23:6
- 10 Flax, L., Dragonette, L.R. and Uberall, H. “Theory of elastic resonance excitation by sound scattering”. *J. Acoust. Soc. Am.*,1978 63: 3
- 11 Flax, L., Gaunaurd, G.C. and Uberall, H. “Theory of resonance scattering”. In Mason, W.P. & Thurston, R.N. (Eds.) Physical Acoustics. London, Academic Press.- 1981. 191-294
- 12 Uberall, H., Dragonette, L.R. and Flax, L. “Relation between creeping waves and normal modes of vibration of a curved body.” *J. Acoust. Soc. Am.*-1977:61: 3
- 13 Waterman P.C. “T-matrix methods in acoustic scattering” *J. Acoust. Soc. of Am.*-2008.125:6
- 14 Francis, D.T.I., Foote, K.G. and Atkins, P.R. “Robustness of target strength of an immersed, hollow ceramic flotation sphere of constant shell thickness”. MTS/IEEE Oceans 2007. Vancouver,
- 15 Burnett. D.S “Finite element modeling of acoustic scattering from 3D-elastic structures”COMSOL Multiphysics Conference.- 2005. 24 –25
- 16 Azimi-Sadjadi, M.R., Yao, D., Huang, Q., et al. “Underwater target classification using wavelet packets and neural networks”. *IEEE Transactions on Neural Networks*, 2000.11:3.
- 17 Lu, H.J. and Lee, K.T. “Species identification of fish shoals from echograms by an echosignal image processing system”. *Fisheries Research*, 1994. 24.
- 18 Barr, R. and Coombs, R.F. “Target phase: An extra dimension for fish and plankton target identification”. *J. Acoust. Soc. Am.*, 118: 3.
- 19 Islas-Cital, A., Atkins, P.R., Foo, K.Y., et al. “Phase calibration of sonar systems using standard targets and dual-frequency transmission pulses”. *J. Acoust. Soc. Am.*, 2011.130:4.
- 20 Simmonds, J. and MacLennan, D.N. “Fisheries acoustics”. 2nd.Oxford, UK: Blackwell Science.2005
- 21 Misund, O.A. “Underwater acoustics in marine fisheries and fisheries research”. *Reviews in Fish Biology and Fisheries*, 1977.1-34.
- 22 Szabo T. “Diagnostic Ultrasound imaging: inside out” Academic Press, Elsevier, 2004
- 23 Greenleaf, J. F. and Sehgal, C. M.”Biologic System Evaluation with Ultrasound.” Springer Verlag, 1992.
- 24 Baddour R.”High frequency ultrasound scattering from microspheres and single cells” U. Toronto. 2004
- 25 Fleg M.B et al “Rayleigh theory of ultrasound scattering applied to liquid-filled contrast nanoparticles” *Phys. Med. Biol.* 2010.55
- 26 Juan C. Heinrich, “The finite element method: basic concepts and applications”.
- 27 O.Zienkiewicz, “Finite element method”. (2001)
- 28 Hickling R. “Analysis of Echoes from a Solid Elastic Sphere in Water” *J. Acoust. Soc. Am.*,19762 34: 10
- 29 LaFollett, J.R., Williams, K.L. and Marston, P.L. “Boundary effects on backscattering by a solid aluminum cylinder: Experiment and finite element model comparison”. *J. Acoust. Soc. Am.*,2001. 130:2
- 30 Fan Y. et al “Circumferential resonance modes of solid elastic cylinders excited by obliquely incident acoustic waves””. *J. Acoust. Soc. Am.*,2003. 1113:1

XI. ANEXOS**ANEXOS**

Índice

XI. Anexos	52
XI. 1. Abstract del 11 Congreso de acústica de Nantes 2012	52
XI. 2. Tipos de ondas en dispersores elásticos.....	52
XI. 3. Funciones de Bessel Y Funciones esferoidales	53
XI. 3. a. <i>Funciones de Bessel</i>	53
XI. 3. b. <i>Funciones esferoidales</i>	55
XI. 4. Soluciones particulares para geometrías solidas.....	56
XI. 4. a. <i>Esfera</i>	56
XI. 4. b. <i>Cilindro infinito</i>	64
XI. 4. c. <i>Cilindro finito:</i>	70
XI. 4. d. <i>Esferoide</i>	73
XI. 5. Soluciones particulares para geometrías simples fluidas	73
XI. 5. a. <i>Esfera</i>	73
XI. 5. b. <i>Cilindro infinito</i>	76
XI. 5. c. <i>Cilindro finito (Incidencia normal)</i>	77
XI. 6. T-MATRIX: Dispersión de objetos elongados	77
XI. 6. a. <i>Aplicación del método T-matrix al esferoide elongado</i>	78
XI. 7. Modelos de dispersión para blancos marinos	80
XI. 8. Dispersión en tejidos	82
XI. 8. a. <i>Dispersión tejidos inhomogeneos</i>	82
XI. 8. b. <i>Dispersión débil en tejidos aleatorios</i>	84
XI. 8. c. <i>Dispersión en tejidos heterogéneos</i>	85
XI. 9. COMSOL.....	85
XI. 9. a. <i>Módulo de acústica</i>	85
XI. 10. Parámetros de la simulación	90
XI. 10. a. <i>2D-axisimétrico</i>	90
XI. 10. b. <i>Cilindro finito</i>	90
XI. 10. c. <i>Esferoide elongado</i>	90
XI. 11. Resonancias	90
XI. 11. a. <i>Esfera elástica de tungsteno</i>	91
XI. 11. b. <i>Esfera de poliuretano</i>	92
XI. 11. c. <i>Esfera fluida de aire</i>	93
XI. 11. d. <i>Cilindro elástico</i>	93
XI. 11. e. <i>Esferoide elongado</i>	97
XI. 12. Obtención de la fase	97
XII. BIBLIOGRAFIA ANEXOS.....	99

XI. ANEXOS

XI. 1. ABSTRACT DEL II CONGRESO DE ACÚSTICA DE NANTES 2012

Scattering of complex geometries by Finite Element Method

The back-scattering of complex finite geometries targets to plane incoming waves is investigated. The information obtained from the echoes (amplitude and phase) is used to characterize certain properties of the scatterers as the shape, size or orientation. Simple geometries as spheres, cylinders and spheroids are often used in underwater acoustic and medical imaging to model the different the scattering of structures, such as fish swim bladders, blood cells, or the fibbers of heart. Theoretical models include the effects of diffraction, reflection and transmission adapted to the shape, composition and size relative to the wavelength of the different objects. In particular, there are analytical solutions derived by Faran for simple geometries such as sphere and cylinder, but for the other cases, numerical methods like T-matrix, or approximate simple solutions must be used.

In this work, the finite element method was used to model the scattering from submerged targets with these simple geometries and elastic and rigid boundary conditions. A vibroacoustic model is used to couple the structure with the surrounding fluid medium. Numerical results show good agreement when compared with theoretical predictions and experimental data.

XI. 2. TIPOS DE ONDAS EN DISPERSORES ELÁSTICOS

a. *Ondas compresivas*: Son ondas longitudinales de la misma naturaleza que las que se propagan a través de los fluidos, que se propagan hacia el interior del cuerpo con velocidades mayores que en el fluido y con un movimiento de las partículas es paralelo a la dirección de propagación.

b. *Ondas transversales*: Son ondas elásticas que se propagan hacia el interior del cuerpo con velocidad menor que las ondas compresivas y con un movimiento de las partículas perpendicular a la dirección de propagación.

c. *Ondas de Rayleigh*: Son ondas elásticas que se propagan en la superficie del sólido con una velocidad cercana a la velocidad de las ondas transversales que se producen en el interior del sólido. Tienen componentes tanto transversales como longitudinales, cuya composición da lugar a movimientos elípticos de las partículas similares a los de las olas de la superficie del mar, y que llegan a penetrar como mucho una profundidad de una longitud de onda en el objeto. Cuando el sólido está sumergido en agua, estas ondas pierden energía radiando hacia el fluido, por lo que se conocen como *leaky Rayleigh*.

d. *Ondas Whispering Gallery*: Este tipo de ondas se propagan al igual que las ondas Rayleigh en la superficie del sólido con componentes transversales y longitudinales. Los desplazamientos transversales penetran en el cuerpo a mayores profundidades que los desplazamientos

longitudinales, con una velocidad que se encuentra entre la velocidad de las ondas longitudinales y transversales del sólido.

e. *Ondas guiadas axiales*: Son ondas elásticas que se producen únicamente en determinados objetos con formas alargadas como el cilindro o el esferoide elongado cuando el vector de ondas incidente tiene componente no nula a lo largo del eje axial. Este tipo de ondas se propagan por la superficie del objeto a lo largo de trayectorias helicoidales.

XI. 3. FUNCIONES DE BESSEL Y FUNCIONES ESFEROIDALES

XI. 3. a. Funciones de Bessel

Las funciones de Bessel, definidas por el matemático Daniel Bernouille y generalizadas por Friedrich Bessel, son las distintas soluciones canónicas de la ecuación diferencial de Bessel:

$$x^2 \frac{d^2 y}{dx^2} + x \frac{dy}{dx} + (x^2 - \alpha^2)y = 0 \quad (20)$$

donde α es un número arbitrario real o complejo conocido como el orden de la función de Bessel, siendo las más comunes las obtenidas para un valor entero n , o semi-entero $n + 1/2$. Como es una ecuación de segundo orden, tendrá dos soluciones linealmente independientes, conocidas como funciones de Bessel de primera clase o de segunda clase, o combinaciones lineales de ellas:

- Función de Bessel de primera clase J_α definida como:

$$J_\alpha(x) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m! \Gamma(m+\alpha+1)} \left(\frac{1}{2}x\right)^{2m+\alpha} \quad (21)$$

donde Γ es la función gamma.

- Funciones de Bessel de segunda clase o funciones de Neumann N_α :

$$N_\alpha(x) = \frac{J_\alpha(x) \cos(\pi\alpha) - J_{-\alpha}(x)}{\sin(\pi\alpha)} \quad (22)$$

• Funciones de Hankel H_α : Son combinaciones lineales de las funciones de Bessel de primera y segunda clase:

$$H_\alpha^{(1)}(x) = J_\alpha(x) + iN_\alpha(x) \quad (23)$$

$$H_\alpha^{(2)}(x) = J_\alpha(x) - iN_\alpha(x) \quad (24)$$

Estas funciones tienen una especial importancia en los problemas de propagación de ondas, ya que aparecen como solución al resolver la ecuación de Helmholtz mediante la técnica de separación de variables, en coordenadas esféricas o cilíndricas.

(1) *Coordenadas cilíndricas*

Cuando resolver la ecuación de Helmholtz en coordenadas cilíndricas (r, θ, z) fig.37, aparecen funciones de Bessel de orden entero $\alpha = n$. Estas funciones son:

- Función de Bessel de primera clase J_n definida como:

$$J_n(x) = x^n \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{2^{2m+n} m!(n+m)!} x^{2m+n} \quad (25)$$

$$J_{-n}(x) = (-1)^n J_n(x) \quad (26)$$

- Funciones de Bessel de segunda clase o funciones de Neumann N_n :

$$N_n(x) = \lim_{\alpha \rightarrow n} \frac{J_\alpha(x) \cos(\pi\alpha) - J_{-\alpha}(x)}{\sin(\pi\alpha)} = \frac{1}{\pi} \frac{\partial J_\alpha(x)}{\partial \alpha} \Big|_{\alpha=n} + \frac{(-1)^n}{\pi} \frac{\partial J_\alpha(x)}{\partial \alpha} \Big|_{\alpha=-n} \quad (27)$$

$$N_{-n}(x) = (-1)^n N_n(x) \quad (28)$$

- Funciones de Hankel H_n : Son combinaciones lineales de las funciones de Bessel de primera y segunda clase:

$$H_n^{(1)}(x) = J_n(x) + iN_n(x) \quad (29)$$

$$H_n^{(2)}(x) = J_n(x) - iN_n(x) \quad (30)$$

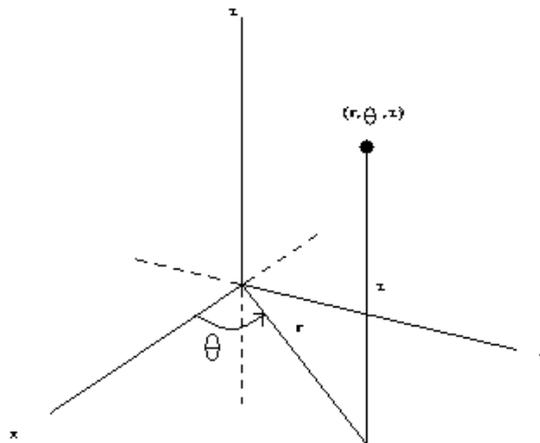


Fig. 37 Esquema de coordenadas cilíndricas

(2) *Coordenadas esféricas*

Cuando se emplean coordenadas esféricas (r, θ, φ) , fig.38, aparecen funciones de Bessel de orden semi-entero $\alpha = n + 1/2$, también llamadas funciones esféricas de Bessel:

- Funciones esféricas de Bessel de primer orden j_n :

$$j_n(x) = \sqrt{\frac{\pi}{2x}} J_{n+1/2} = (-x)^n \left(\frac{1}{x} \frac{d}{dx} \right)^n \frac{\sin x}{x} \quad (31)$$

- Funciones esféricas de Bessel de segundo orden o funciones de Neuman n_n :

$$n_n(x) = \sqrt{\frac{\pi}{2x}} N_{n+1/2} = -(-x)^n \left(\frac{1}{x} \frac{d}{dx}\right)^n \frac{\cos x}{x} \quad (32)$$

- Funciones esféricas de Hankel h_n :

$$h_n^{(1)}(x) = j_n(x) + in_n(x) \quad (33.a)$$

$$h_n^{(2)}(x) = j_n(x) - in_n(x) \quad (33.b)$$

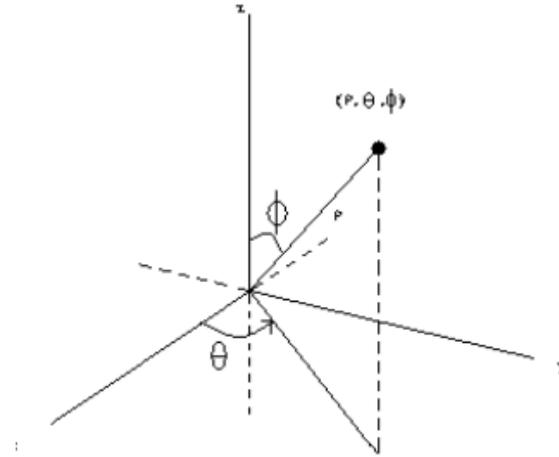


Fig. 38 Esquema de coordenadas esféricas

XI. 3. b. Funciones esferoidales

Las funciones esferoidales son las soluciones obtenidas al resolver la ecuación de Helmholtz mediante separación de variables en coordenadas esferoidales.

En el caso de esferoides elongados, fig. 39, que son superficies de revolución de una elipse sobre su semi-eje mayor manteniendo así los dos puntos focales, las coordenadas esferoidales son (ξ, η, ϕ) , siendo ξ, η las coordenadas angular y radial, y ϕ la coordenada acimutal definida como $\phi = \tan^{-1}(y/x)$. Estas coordenadas están relacionadas con las coordenadas cartesianas mediante la transformación:

$$x = d\sqrt{(1 - \eta^2)(\xi^2 - 1)} \cos \phi \quad (34)$$

$$y = d\sqrt{(1 - \eta^2)(\xi^2 - 1)} \sin \phi \quad (35)$$

$$z = d\eta\xi \quad (36)$$

siendo d la semi-distancia focal, y los rangos de las variables:

$$-1 \leq \eta \leq 1; 1 \leq \xi \leq \infty; 0 \leq \phi < 2\pi \quad (37)$$

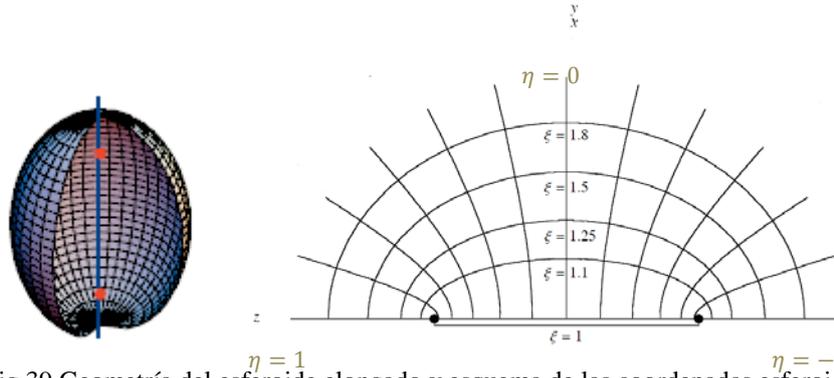


Fig.39 Geometría del esferoide elongado y esquema de las coordenadas esferoidales

Resolviendo la ecuación de Helmholtz en coordenadas esferoidales aparecen dos tipos de funciones esferoidales:

- Angulares S_{mn} de primera y segunda clase definidas como:

$$S_{mn}^{(1)}(c, \eta) = \sum_{r=-\infty}^{\infty} d_r^{mn}(c) P_{m+r}^m(\eta) \quad (38)$$

$$S_{mn}^{(2)}(c, \eta) = \sum_{r=-\infty}^{\infty} d_r^{mn}(c) Q_{m+r}^m(\eta) \quad (39)$$

donde $c = kd$, siendo k el número de onda, P, Q polinomios de Legendre y d_r^{mn} son una serie de coeficientes de expansión definidos en [31]

- Radiales R_{mn} de primera y segunda clase definidas, en términos de las funciones esféricas de Bessel como:

$$R_{mn}^{(1)}(c, \xi) = (\xi^2 - 1)^{m/2} (c\xi)^{-m} \sum_{r=-\infty}^{\infty} a_r^{mn}(c) j_{m+n}(c\xi) \quad (40)$$

$$R_{mn}^{(2)}(c, \xi) = (\xi^2 - 1)^{m/2} (c\xi)^{-m} \sum_{r=-\infty}^{\infty} a_r^{mn}(c) n_{m+n}(c\xi) \quad (41)$$

donde a_r^{mn} son los coeficientes de expansión definidos en [31]

XI. 4. SOLUCIONES PARTICULARES PARA GEOMETRÍAS SÓLIDAS

XI. 4. a. Esfera

La dispersión producida por cuerpos esféricos ha sido ampliamente estudiada a lo largo de la historia debido a las numerosas aplicaciones que presenta este tipo de geometría. En acústica submarina es habitual el uso de esferas para realizar la calibración de los distintos dispositivos acústicos como hidrófonos o sonar [32] ya que presentan la particularidad de que la dispersión que produce es independiente del ángulo de incidencia, como se aprecia en fig.40, lo que simplifica en gran medida su estudio. En medicina, el modelo de esfera es también muy empleado para representar muchos de los elementos que constituyen los tejidos como las células o ciertas agrupaciones de tejido adiposo, que pueden ser considerados en una primera aproximación como esferas [24].

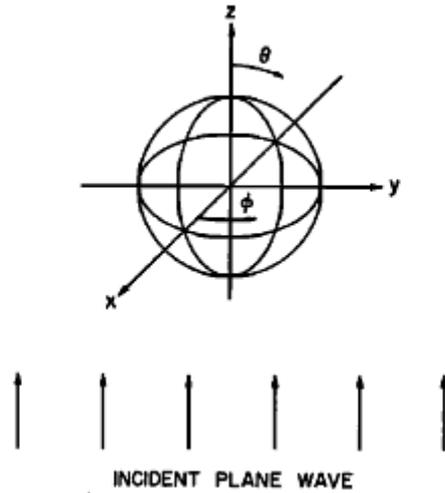


Fig. 40 Modelo de dispersor esférico

(1) *Aproximación de kirchoff: Reflexión especular*

Aunque la aplicación de éste método no proporciona soluciones reales debido a que ignora los efectos tanto de las difracción como de las ondas elásticas, si proporciona una primera aproximación que es aceptable para el caso de esferas rígidas insonificadas por altas frecuencias. En el régimen geométrico la componente difractada puede considerarse despreciable frente a la componente especular y por lo tanto sólo es necesario considerar los efectos debidos a la reflexión.

Asumiendo que la onda incide en la dirección $-z$, es decir $p_{inc} = p_0 e^{-ikz}$, y empleando las coordenadas esféricas mostradas en la figura 12 tendremos:

$$\vec{k} = -k\hat{z} \quad (42)$$

$$\hat{n} = \cos \varphi \cos \theta \hat{x} + \sin \varphi \sin \theta \hat{y} + \cos \theta \hat{z} \quad (43)$$

$$\vec{r}' = a \cos \varphi \cos \theta \hat{x} + a \sin \varphi \sin \theta \hat{y} + a \cos \theta \hat{z} \quad (44)$$

$$dS = a^2 \sin \theta d\theta d\varphi \quad (45)$$

Se obtiene que la integral que la longitud de dispersión a partir de la integral de Kirchoff puede escribirse como:

$$l(\theta, \varphi, ka) = \frac{i}{\lambda} \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/2} -\cos \theta e^{-i2ka \cos \theta} a^2 \sin \theta d\theta d\varphi \quad (46)$$

Por último, integrando sobre φ y haciendo la sustitución $x = \cos \theta$ tenemos

$$l(\theta, ka) = -ika^2 \int_{-1}^0 -xe^{-i2kax} dx \quad (47)$$

obtenemos la expresión para la longitud de dispersión en la dirección de retorno:

$$l_{bs}(ka) = \frac{i}{4k} + \frac{ae^{-i2ka}}{2} - \frac{ie^{-2ika}}{4k} \quad (48)$$

En fig. 41 se muestra el TS de una esfera calculado según la aproximación de Kirchoff, donde la fuerza del blanco se obtiene como

$$TS = 10 * \log |l_{bs}|^2 \quad (49)$$

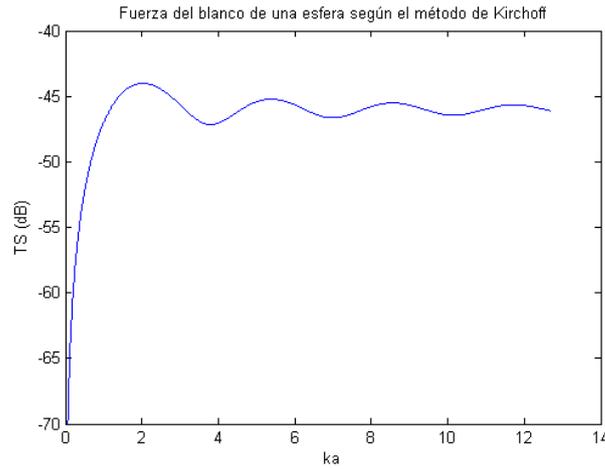


Fig. 41 TS de una esfera según la aproximación de Kirchoff

(2) Soluciones modales

El primer estudio de la dispersión producida por esferas elástica fue realizado por Faran [8], quien resolvió el problema para una esfera homogénea, isotrópica y elástica sumergida en agua e insonificada por ondas de compresión con incidencia normal. Para ello empleó una técnica de expansión modal que actualmente es ampliamente utilizada y es la base de un gran número de estudios posteriores. Faran calculó la presión dispersada mediante una descomposición en suma expandida de armónicos esféricos (funciones de Bessel y polinomios de Lagrange) de la onda incidente y de las ondas compresivas y transversales que se originan en el interior de la esfera.

Empleando coordenadas esféricas, y teniendo en cuenta que la onda incidente plana se aproxima a lo largo del eje φ , lo que elimina la dependencia de esta coordenada, tenemos que la presión incidente puede escribirse como:

$$p_i = P_0 \sum_{n=0}^{\infty} (-i)^n (2n + 1) j_n(kr) P_n(\cos \theta) \tag{50}$$

donde el índice n indica las ondas parciales individuales que forman el campo total incidente con su correspondiente n -ésimo polinomio de Lagrange P_n y la correspondiente función esférica de Bessel de primera clase j_n

La presión dispersada mediante descomposición en armónicos esféricos se escribe como:

$$p_s = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (j_n(kr) + in_n(kr)) P_n \cos \theta = \sum_{n=0}^{\infty} c_n h_n^{(1)}(kr) P_n(\cos \theta) \tag{51}$$

donde $j_n, n_n, h_n^{(1)}$ representan las correspondientes funciones esféricas de Bessel y c_n los coeficientes que deben ser evaluados aplicando las apropiadas condiciones de contorno definidas en el apartado III.2.a de la memoria. De esta forma se obtiene que los coeficientes c_n de la ec 51 son [8]:

$$c_n = -P_0 (2n + 1) (-j)^{n+1} e^{i\delta_n} \sin \delta_n \tag{52}$$

donde δ_n es el desplazamiento de fase de la n -ésima componente de la onda dispersada.

A partir de las ecuaciones 51,52, y teniendo en cuenta, que en campo lejano

$$h_n^{(1)}(kr) \rightarrow \frac{1}{kr} i^{-n-1} e^{ikr} \quad (53)$$

se obtiene que la amplitud de la presión dispersada medida en campo lejano, puede escribirse en suma de términos modales como [10]:

$$|p_s| = \frac{P_0}{\pi kr} \left| \sum_{n=0}^{\infty} (2n+1) e^{i\delta_n} \sin \delta_n P_n(\cos \theta) \right| \quad (54)$$

y la función de forma, obtenida según la ec. 7

$$f(\theta) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n(\theta) = \frac{2}{ka} \sum_{n=0}^{\infty} (2n+1) e^{i\delta_n} \sin \delta_n P_n(\cos \theta) \quad (55)$$

- *Esfera rígida*

En el caso de una esfera perfectamente rígida de radio a los coeficientes c_n de la ec.51 se puede escribir como [33]:

$$c_n = \frac{-(-i)^n (2n+1) j_n'(ka)}{h_n'(ka)} \quad (56)$$

siendo j_n' y $h_n^{(1)'}$ las derivadas de primer orden de las funciones de Bessel y de Henkel con respecto al argumento ka . Así, la presión dispersada en la dirección de vuelta con $\theta = 0$ y $P_n \cos \theta = 1$ para todo n , puede escribirse como:

$$p_{bs}(r) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{-P_0(i)^n (2n+1) j_n'(ka)}{h_n^{(1)'(ka)} h_n^{(1)}(kr)} \quad (57)$$

A partir de estas expresiones, la dispersión producida por una esfera suele expresarse en términos de la función de forma $f(\theta, ka)$, que como se ha visto en II.1 está definida en términos de la proporción entre la presión dispersada y la presión incidente (onda plana armónica) a una distancia lejana de la esfera.

En fig. 42 se muestra una comparación del TS de una esfera perfectamente rígida obtenida mediante la aproximación de Kirchoff y según la solución modal. Puede comprobarse que la solución de Kirchoff sólo se aproxima a la solución modal en el régimen geométrico donde la longitud de onda es mucho menor que las dimensiones del objeto, y por lo tanto pueden despreciarse los efectos de difracción que no tiene en cuenta la solución de Kirchoff.

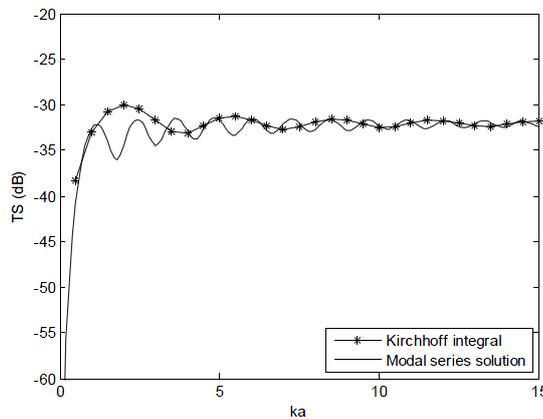


Figura 42 Fuerza del blanco de una esfera perfectamente rígida obtenida según la aproximación de Kirchoff y según las soluciones modales.

(3) *Teoría resonante*

La ec. 51 puede escribirse empleando la formulación de la física nuclear [10] como:

$$p_s = \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} (2n+1) i^n (S_n - 1) h_n^{(1)}(kr) P_n(\cos \theta) \quad (58)$$

siendo $S_n = e^{i2\delta_n}$ la llamada función de dispersión, que para un cuerpo elásticos puede escribirse como:

$$S_n = S_n^{(r)} \frac{L_n^{-1} - z_2^{-1}}{L_n^{-1} - z_1^{-1}} \quad (59)$$

con

$$z_i = \frac{ka h_n^{(i)}(ka)}{h_n^{(i)'}(ka)} \quad (60)$$

y L_n es una función que contiene funciones esféricas de Bessel con argumentos $k_L a$ y $k_T a$ y que es proporcional ratio de densidades ϵ de la ec.11. k_L, k_T son el número de onda de las ondas compresivas y transversales que se producen en el interior de la esfera. La función de dispersión S_n de una esfera elástica depende de la función de dispersión de una esfera rígida $S_n^{(r)}$ y de un término resonante.

Haciendo cero el denominador de la ec 59

$$L_n^{-1} - z_1^{-1} = 0 \quad (61)$$

se obtienen las frecuencias de resonancia $k_{nl}^{(r)}$ de la esfera rígida cercanas a las frecuencias de resonancia de la esfera en el vacío ($\epsilon \rightarrow 0$).

La función de dispersión puede escribirse en términos resonantes como

$$S_n = e^{2i\delta_{nl}} = S_n^{(r)} \frac{ka - k_{nl}^{(r)} a - \frac{1}{2} i \Gamma_{nl}^{(r)}}{ka - k_{nl}^{(r)} a + \frac{1}{2} i \Gamma_{nl}^{(r)}} \quad (62)$$

donde δ_{nl} es el desplazamiento de la fase de dispersión y $\Gamma_{nl}^{(r)}$ es el llamado ancho de resonancia [10]

En términos de resonancia, la función de forma parcial de la ec.55 para el caso de una esfera elástica, resulta:

$$f_n(\theta) = \frac{2}{ka} (2n+1) e^{2i\xi_n} \left[e^{-i\xi_n} \sin \xi_n + \frac{\frac{1}{2} \Gamma_{nl}^{(r)}}{k_{nl}^{(r)} a - ka - \frac{1}{2} i \Gamma_{nl}^{(r)}} \right] P_n(\cos \theta) \quad (63)$$

donde ξ_n es el desplazamiento de fase para una esfera perfectamente rígida. El primer término del paréntesis representa el campo dispersado rígido y el segundo término representa el campo dispersado resonante. Por lo tanto la amplitud de dispersión de cada resonancia pura se puede obtener a partir del módulo de la diferencia entre la función de forma total y la función de forma rígida

$$|f_n(\theta) - f_n^{rigida}(\theta)| \quad (64)$$

En la fig.43 se muestra la amplitud de retrodispersión ($\theta = \pi$) para una esfera elástica de aluminio.

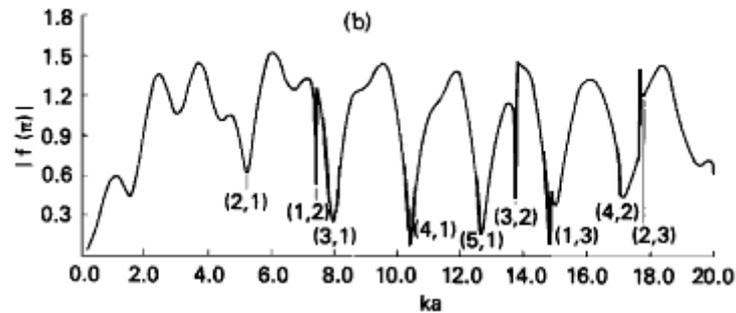


Fig. 43 Amplitud de la función de forma para una esfera de aluminio

Es importante señalar que el dispersor puede tener más modos propios de vibración de los que aparecen en la amplitud de dispersión. Por ejemplo, en el caso de la esfera el modo de respiración ($n=0$) es excitado con muy poca amplitud, por lo que no aparece en la fig.43

Para determinar que modos de resonancia son excitados se pueden representar las amplitudes de las funciones de forma parciales. En la fig.44 se representan las amplitudes correspondientes a los cinco primeros modos, en cada uno de los cuales aparecen distintas resonancias identificadas por el índice (l) = 1,2,3, que se van desplazando a altas frecuencias al pasar de un modo a otro. Estas resonancias se producen por la coincidencia de fase de dos ondas superficiales del mismo tipo viajando en sentido contrario, lo que produce una onda estacionaria. Esta condición de coincidencia se puede expresar matemáticamente como:

$$L = n\lambda_l \quad (65)$$

donde $L = 2\pi a$ es la longitud de la mayor circunferencia de la esfera y λ_l la longitud de onda de la onda circunferencia. Por lo tanto las distintas frecuencias de resonancias vienen dadas por:

$$f^{reson} = \frac{nc_l}{2\pi a} \quad (66)$$

con c_l la velocidad de fase de la onda circunferencial de tipo l , siendo (l) = 1 las ondas de Rayleigh y (l) > 1 las ondas whispery gallery.

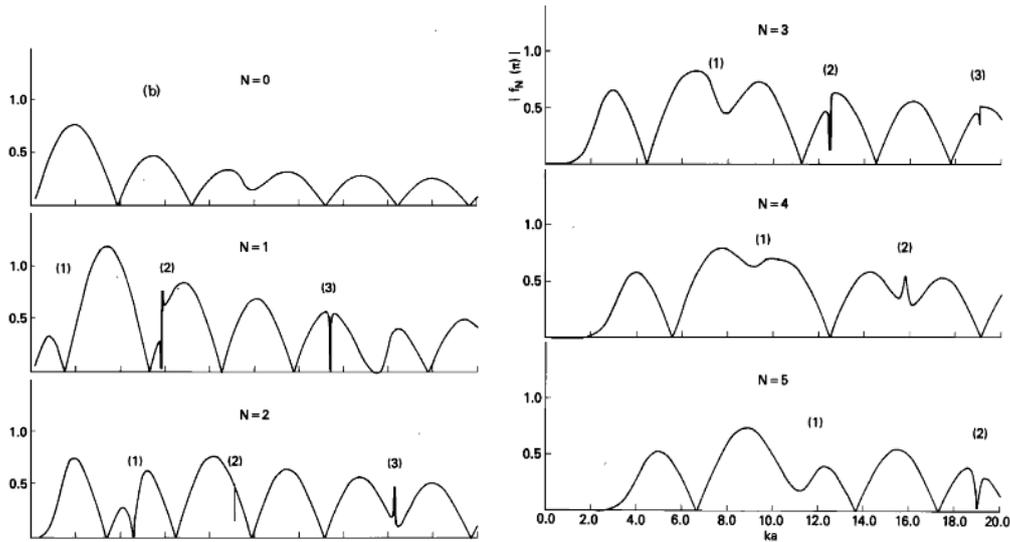


Fig- 44 Representación de las 6 primeras funciones parciales

En la fig. 44 se pueden apreciar las distintas formas que pueden presentar las resonancias que pueden clasificarse como [10]

✓ Tipo A o resonancia pura: Este tipo de resonancias se producen cerca de un nulo de la respuesta rígida ($\xi_n = 0$), por lo que la contribución principal a la función de forma parcial correspondiente es la resonancia que aparece como un pico en la amplitud. A este tipo pertenecen las resonancias (2,3) o (4,2).

✓ Tipo B: En este caso la resonancia coincide con un máximo de la respuesta rígida ($\xi_n = \frac{\pi}{2}$), lo que produce una cancelación y un estrecho valle en la $|f_n(\pi)|$ correspondiente. Un ejemplo de estas resonancias son la (1,3) o (3,2).

✓ Tipo C: Para el resto de casos en los que la resonancia no coincide con ningún máximo o mínimo de la respuesta rígida. En este caso la resonancia exhibe un valle en un lado y un pico en el otro. Un ejemplo sería la resonancia (1,2)

(4) Comportamiento dispersivo de la esfera en régimen de Rayleigh

En el régimen de Rayleigh, donde la longitud de onda es mucho mayor que el radio a de la esfera ($ka \ll 1$), la dispersión es debida principalmente a los efectos de difracción. En esta situación, la esfera puede ser modelada como una pequeña esfera incompresible y fija sin propagación en su interior [6].

La presión total en la esfera será, eliminando la dependencia temporal, la suma de la presión incidente más la presión dispersada:

$$P = P_{inc} e^{ikR \cos \theta} + P_{disp} \quad (67)$$

donde θ es el ángulo entra la dirección de incidente y la dirección dispersada y R la distancia de la esfera al receptor.

La condición de contorno rígido implica que la componente normal (radial) de los desplazamientos y de la velocidad de partícula igual a cero en cualquier instante.

A partir de la ec. 67 tendremos que el gradiente de la presión total en el contorno es:

$$\left. \frac{\partial P}{\partial R} \right|_{R=a} = ik \cos \theta P_{inc} e^{ikac \cos \theta} + \frac{\partial P_{disp}}{\partial R} = 0 \quad (68)$$

de donde se obtiene

$$\left. \frac{\partial P_{disp}}{\partial R} \right|_{R=a} = -ik \cos \theta P_{inc} e^{ikac \cos \theta} \quad (69)$$

A partir de las ecuaciones 68,69 la componente radial de la velocidad de partícula dispersada en $R = a$, será:

$$u_{disp} \Big|_{R=a} = \frac{P_{inc}}{\rho_0 c} \cos \theta e^{ikac \cos \theta} \quad (70)$$

Para valores pequeños de ka , la exponencial se puede escribir como:

$$e^{ikac \cos \theta} = 1 + ikac \cos \theta \quad (71)$$

Por lo que la velocidad radial de partícula dispersada necesaria para hacer cero la velocidad radial total de partícula es:

$$u_{disp} \Big|_{R=a} = \frac{P_{inc}}{\rho_0 c} (\cos \theta + ika \cos^2 \theta) \quad (72)$$

La ec. 72 muestra que la velocidad de partícula dispersada es equivalente a la radiación de una esfera compuesta por un monopolo y un dipolo, tal y como se ha comentado II.4

Para obtener la presión dispersada en campo lejano debida a cada componente se obtiene el flujo volumétrico V (m^3/s) a partir de la integral de u_{disp} sobre la superficie de la esfera. Integrando para ambas componentes y aproximando para ($kR \gg 1$) se obtiene que la presión dispersada en campo lejano es [6]

$$P_{disp} = P_m + P_d = \frac{(ka)^2 a P_{inc}}{3 R} e^{-ikR} + \frac{(ka)^2 a \cos \theta P_{inc}}{2 R} e^{-ikR} \quad (73)$$

es decir

$$P_{disp} = \left[\frac{2(ka)^2}{3} \left(1 + \frac{3}{2} \cos \theta \right) \right] \frac{a P_{inc}}{2 R} e^{-ikR} \quad (74)$$

y la longitud de dispersión

$$|L| = \frac{(ka)^2 a}{3} \left(1 + \frac{3}{2} \cos \theta \right) \quad (75)$$

En fig. 45 se muestra el diagrama polar de la longitud de dispersión de la esfera referenciado a $(\pi a^2)^{1/2}$ en el Régimen de Rayleigh, para $ka = 0.1$.

Para el caso de retrodispersión tendremos $\theta = 0$

$$|L_{bs}| = \frac{5(ka)^2 a}{6} \quad (76)$$

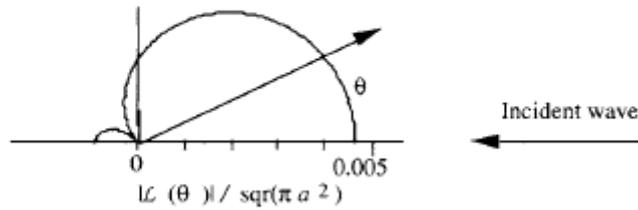


Fig. 45 Diagrama polar de radiación en el régimen de Rayleigh para una esfera con densidad y velocidad distinta a la del medio. Se observa que el patrón se obtiene mediante la superposición de la componente monopolo y dipolo.

XI. 4. b. Cilindro infinito

El cilindro infinito es un modelo puramente teórico que ha sido ampliamente estudiado por Faran y otros autores [8][30]. Su importancia radica en que en algunos casos, las soluciones obtenidas para el cilindro infinito pueden ser adaptadas para los cilindros finitos, tal y como se verá en el anexo XI.4.c

A diferencia de la esfera, la dispersión del cilindro si depende del ángulo de incidencia, por lo que es importante estudiar la respuesta de dispersión tanto para incidencia normal (perpendicular al eje axial del cilindro), como para incidencia oblicua.

(1) Cilindro infinito (incidencia normal)

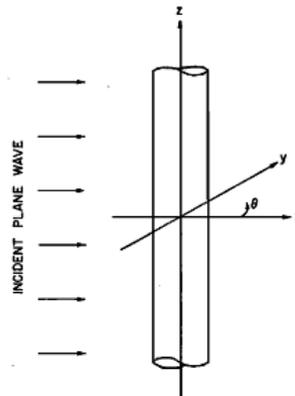


Fig.46 Esquema del cilindro en incidencia normal

a) Aproximación de Kirchoff : Reflexión especular

Asumiendo ahora que la onda incide en la dirección $-x$, es decir $p_{inc} = p_0 e^{-ikx}$, y empleando las coordenadas cilíndricas mostradas en la fig. 46 tendremos:

$$\vec{k} = -k\hat{x} \quad (77)$$

$$\hat{n} = \cos \theta \hat{x} + \sin \theta \hat{y} \quad (78)$$

$$\vec{r} = a \cos \theta \hat{x} + a \sin \theta \hat{y} + z\hat{z} \quad (79)$$

$$dS = ad\theta d\varphi \quad (80)$$

En estas coordenadas, la longitud de dispersión para el cilindro infinito puede obtenerse a partir de la integral de Kirchoff como

$$l_{bs} = \frac{i}{\lambda} \int_S \cos \theta e^{i2ka \cos \theta} dS \quad (81)$$

Para evaluar la ec 81 es necesario recurrir a evaluaciones numéricas mediante sumas finitas:

$$l_{bs} = \frac{i}{\lambda} \sum_m \cos \theta e^{i2ka \cos \theta} \Delta S_m \quad (82)$$

b) Soluciones modales

Las soluciones modales de un cilindro infinito fueron también propuestas por Faran [8] de forma análoga a como se ha explicado en XI.4.a.2

Empleando ahora coordenadas cilíndricas (r, θ, z) , y teniendo en cuenta que la onda incidente plana se aproxima a lo largo del eje z , lo que elimina la dependencia de esta coordenada, tenemos que la presión incidente puede escribirse como:

$$p_i = P_0 \sum_{n=0}^{\infty} \epsilon_n (-i)^n j_n(kr) P_n \cos n\theta \quad (83)$$

donde ϵ_n es el número de Neumann, con $\epsilon_n = 1$ para $n = 0$ y $\epsilon_n = 2$ para $n > 0$

La presión dispersada para un cilindro infinito mediante su descomposición en armónicos se escribe como:

$$p_s = \sum_{n=0}^{\infty} c_n H_n^{(1)}(kr) \cos n\theta \quad (84)$$

donde $H_n^{(1)}$ representan la correspondiente función de Hankel de primera clase y c_n son nuevamente los coeficientes a evaluar, que se obtienen aplicando las condiciones de contorno descritas en III.2.a

$$c_n = -P_0 \epsilon_n (-i)^{n+1} e^{i\delta_n} \sin \delta_n \quad (85)$$

donde δ_n es el desplazamiento de fase de la n -ésima componente de la onda dispersada.

A partir de las ecuaciones 84,85 y teniendo en cuenta, que en campo lejano

$$H_n^{(1)}(kr) \rightarrow \left(\frac{2}{\pi ikr}\right)^{1/2} i^{-n} e^{ikr} \quad (86)$$

se obtiene que la amplitud de la presión dispersada medida en campo lejano, puede escribirse en suma de términos modales como [10]:

$$|p_s| = P_0 \left(\frac{2}{\pi ikr}\right)^{1/2} \left| \sum_{n=0}^{\infty} \epsilon_n e^{i\delta_n} \sin \delta_n \cos n\theta \right| \quad (87)$$

y la función de forma

$$f(\theta) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n(\theta) = \left(\frac{1}{\pi ika}\right)^{1/2} \sum_{n=0}^{\infty} \epsilon_n e^{i\delta_n} \sin \delta_n P_n \cos \theta \quad (88)$$

- *Cilindro rígido infinito*

Para un cilindro rígido fijo se obtiene

$$c_n = -P_0 \epsilon_n (i)^n [J'_n(ka) / H_n^{(1)'}(ka)] \quad (89)$$

En campo lejano, teniendo en cuenta la ecuación 87, tendremos

$$p_s = -P_0 \left(\frac{2}{\pi k r}\right)^{1/2} e^{i(kr - \pi/4)} \sum_{n=0}^{\infty} \epsilon_n [J'_n(ka)/H_n^{(1)'}(ka)] \cos n\theta \quad (90)$$

c) *Teoría resonante*

En general, todo lo comentado en XI.4.a.3 la esfera elástica es válido para el cilindro elástico infinito en incidencia normal, con algunas diferencias en la formulación que se comentan a continuación.

La presión dispersada por el cilindro, empleando coordenadas cilíndricas, con la formulación resonante es

$$p_s = \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \epsilon_n i^n (S_n - 1) H_n^{(1)}(kr) P_n \cos \theta \quad (91)$$

y la función de forma parcial

$$f_n(\theta) = 2i\epsilon_n (\pi ika)^{-1/2} e^{2i\xi_n} \left[e^{-i\xi_n} \sin \xi_n + \frac{\frac{1}{2}\Gamma_{nl}^{(r)}}{k_{nl}^{(r)} a - ka - \frac{1}{2}i\Gamma_{nl}^{(r)}} \right] P_n \cos \theta \quad (92)$$

donde todos los términos han sido definidos para la ec.63

Al igual que en XI.4.a.3, cada función parcial está compuesta por dos términos, uno referente al campo de fondo rígido y otro referente al campo resonante. En la fig.47 se representa la amplitud de la función de forma para los seis primeros modos. Se observa que en el caso del cilindro tampoco aparece ninguna resonancia en el modo 0.

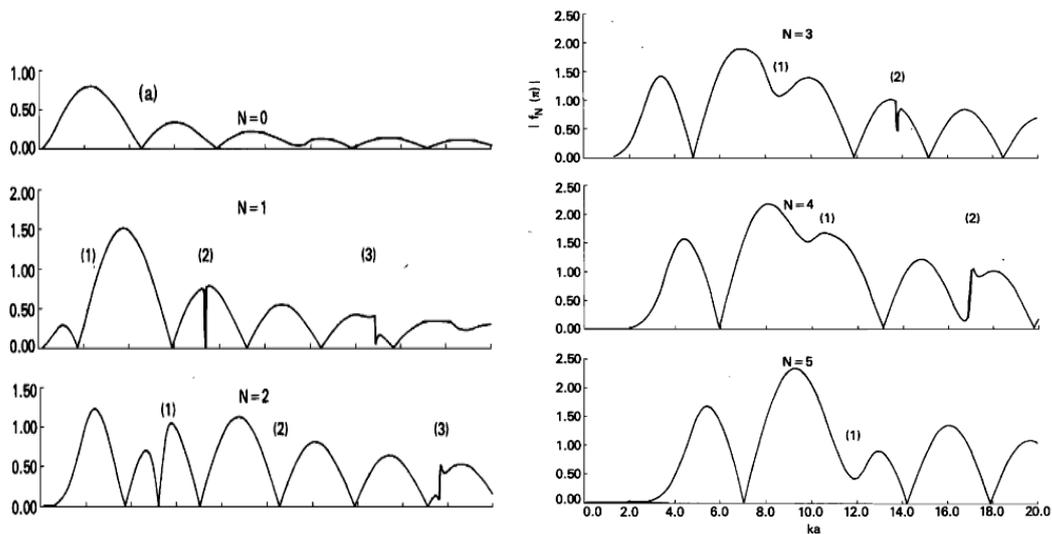


Fig.47 Funciones parciales para un cilindro de aluminio

La función de forma total para el caso retrodispersión, representada en la fig.48 se obtiene nuevamente según la expresión.

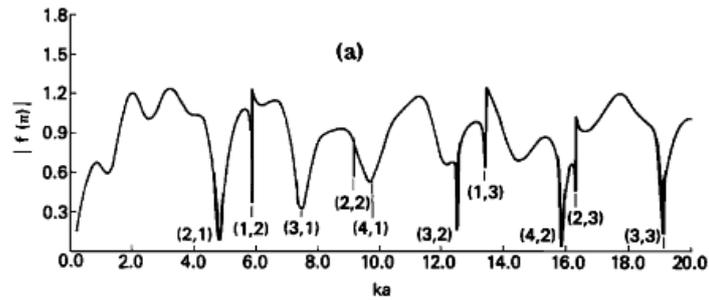


Fig.48 Amplitud de presión normalizada del cilindro infinito de aluminio

(2) *Cilindro infinito (incidencia oblicua)*

La energía dispersada por un blanco contiene información característica del dispersor que permite identificarlo y diferenciarlos de otros posibles blancos. Por ejemplo, las resonancias que aparecen en la amplitud de la retrodispersión, son una firma del objeto que permite determinar sus propiedades elásticas y geométricas. En el caso de objetos elongados, como el cilindro, la energía dispersada es función no sólo de la frecuencia, sino también del ángulo de incidencia de la onda plana. Por lo tanto, las características particulares que se pueden extraer de la respuesta en cada ángulo de incidencia es útil para identificar la orientación del blanco o las propiedades axiales del dispersor.

En el caso del cilindro infinito, Flax et al [34] demostró que para incidencia oblicua, además de las dos clases de ondas observada en incidencia normal, aparecen un nuevo tipo de ondas llamadas ondas guiadas axiales, que surgen cuando el vector de onda incidente tiene componente no nula en el eje del cilindro. Esta clase de ondas, caracterizadas por seguir caminos helicoidales (fig 49), generan nuevos modos de resonancias cuya frecuencia depende del ángulo de incidencia, localizándose a más altas frecuencias a medida que aumenta el ángulo.

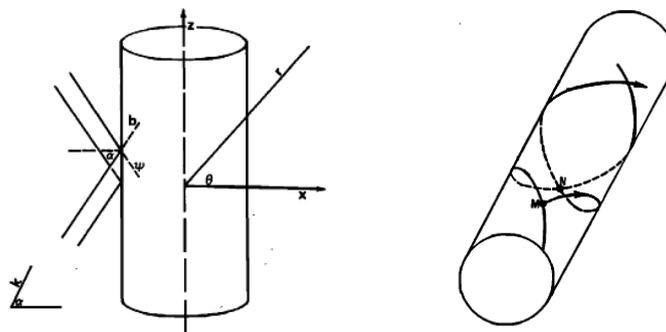


fig.49 Esquema del cilindro infinito (Izquierda). Caminos helicoidales seguidos por las ondas superficiales en incidencia oblicua (derecha)

El modelo matemático implementado por Flax es similar al descrito para el caso de incidencia normal. La fig.49 muestra un esquema de la orientación de las coordenadas cilíndricas y la

dirección de onda incidente. El eje del cilindro se corresponde con el eje z del sistema de coordenadas (r, θ, z) , y vector incidente de propagación k , localizado en el plano xz , forma un ángulo α con el eje x . La solución se obtiene en el punto (r, θ) con $\theta \in [0, 2\pi]$ radianes. Como la onda plana y el cilindro son infinitos en z , la solución es independiente de z .

La presión incidente se expresa mediante su descomposición modal como:

$$p_i = P_0 e^{izk_z} \sum_{n=0}^{\infty} \epsilon_n (-i)^n j_n(k_{\perp} r) P_n \cos n\theta \quad (93)$$

donde $k_{\perp} = k \cos \alpha$ y $k_z = k \sin \alpha$

La presión dispersada será:

$$p_s = P_0 e^{izk_z} \sum_{n=0}^{\infty} \epsilon_n c_n H_n^{(1)}(k_{\perp} r) \cos n\theta \quad (94)$$

donde

$$c_n = \frac{J_n(k_{\perp} a) L_n - k_{\perp} a J_n'(k_{\perp} a)}{H_n^{(1)}(k_{\perp} a) L_n - k_{\perp} a H_n^{(1)'}(k_{\perp} a)} \quad (95)$$

con

$$L_n = \frac{\rho D_n^{(1)}}{\rho_s D_n^{(2)}} \quad (96)$$

L_n , definida también en la ec.59 es una función que contiene funciones de Bessel con argumentos $k_L a, k_T a$ y $k_z a$ siendo

$$k_L = \frac{k^2 c^2}{c_l^2} - k_z^2; \quad k_T = \frac{k^2 c^2}{c_s^2} - k_z^2 \quad (97)$$

donde c_L, c_T son respectivamente las velocidades de las ondas longitudinales y transversales del cilindro.

La presión de dispersión en campo lejano será:

$$p_s = P_0 e^{ihk_z} e^{ik_{\perp} r} \frac{2\pi}{kk_{\perp}} e^{i\pi/4} \sum_{n=0}^{\infty} c_n \cos n\theta \quad (98)$$

y la función de forma

$$f_s = \frac{2}{\sqrt{i\pi k_{\perp} a}} \sum_{n=0}^{\infty} \epsilon^n c_n \cos n\theta = \sum_{n=0}^{\infty} f_n \quad (99)$$

Al igual que para incidencia normal, la función de forma puede descomponerse mediante la teoría resonante en sus componentes, una que está presente aunque el cilindro sea impenetrable, y la otra que es el espectro resonante. De esta forma, se puede obtener el espectro de resonancia de cada modo como:

$$f_n^{(res)} = \frac{2}{\sqrt{i\pi k \cos \alpha a}} \epsilon^n \frac{c_n^{rigid} - c_n}{1 + 2c_n} \cos n\theta \quad (100)$$

Las frecuencias de resonancias se pueden obtener haciendo cero el denominador de la ec.95. Estas resonancias, se produce por la coincidencia de fase de las distintas clases de ondas superficiales. Para las ondas circunferenciales, la coincidencia de fase se cumple cuando

$$n\lambda_l^{cir} = 2\pi a \quad (101)$$

Sin embargo, en el caso de las onda helicoidales, Conoir [35] demostró que la condición de coincidencia se da para

$$L = 2\pi a \cos \gamma_l = n\lambda_l = K_l a \cos \gamma_l \quad (102)$$

siendo λ_l, K_l la longitud de ondas y el número de ondas asociado a la onda helicoidal, γ_l su ángulo de refracción que se obtiene a partir de la ley de Snell

$$\gamma_l = \arcsin \frac{k \sin \alpha}{K_l} \quad (103)$$

En ambos casos, ondas circunferenciales y helicoidales, la condición de resonancia implica una intersección entre dos ondas coherentes cuyo vector de ondas mantiene el carácter axisimétrico del blanco.

La ecuación 101 puede expresarse también como

$$n = x_{nl}(\alpha) [c/c_l(\alpha)] \cos \gamma_l \quad (104)$$

donde

$$x_{nl} = \frac{2\pi f_{nl}}{c} a \quad (105)$$

con c la velocidad del sonido en el fluido y f_{nl} la frecuencia de resonancia. En el caso de incidencia normal tendremos:

$$n = x_{nl}(0) [c/c_l(0)] \quad (106)$$

lo que implica

$$x_{nl}(\alpha) = x_{nl}(0) \frac{c_l(\alpha)}{c_l(0) \cos \gamma_l} \quad (107)$$

Esta relación muestra que el desplazamiento de las resonancias es proporcional a $1/\cos \gamma_l$ y se incrementa a medida que aumenta α . Por lo tanto cuando γ_l alcanza el valor $\pi/2$, es decir para el ángulo de incidencia de Rayleigh, x_{nl} la frecuencia de resonancia tiende a infinito.

En la fig. 50 se representa la función de forma de un cilindro infinito para distintos ángulos de incidencias. Se puede apreciar que para ángulos cercanos al ángulo de Rayleigh, se produce una interferencia destructiva entre la onda de Rayleigh y la reflexión especular. A partir de ese ángulo ya no es posible aislar más resonancias y el dispersor vuelve a mostrar un comportamiento rígido.

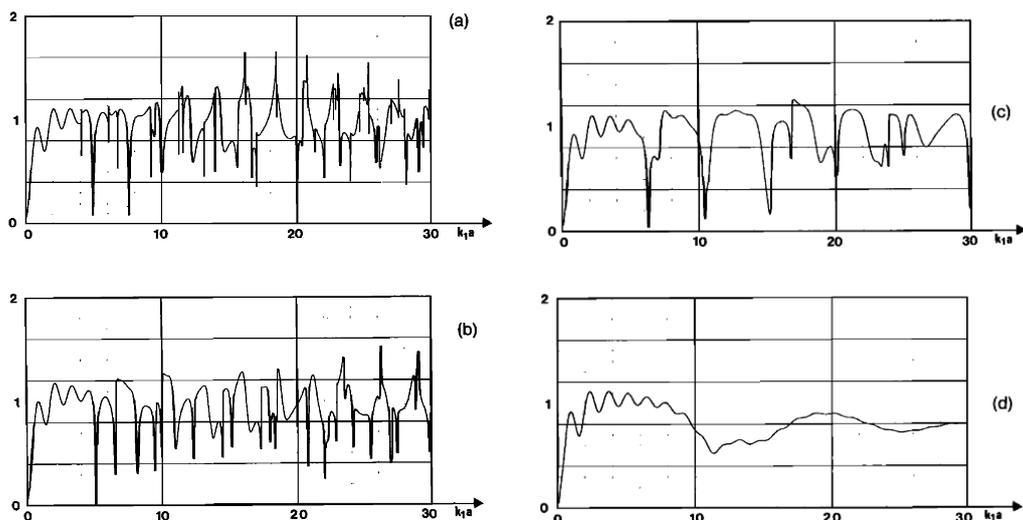


Fig.50 Función de forma del cilindro infinito para distintos ángulos de incidencia

XI. 4. c. Cilindro finito:

Los cilindros elásticos finitos son, al igual que las esferas, una de las geometrías simples más utilizadas en los estudios sobre la dispersión acústica. Esta geometría resulta útil ya que sirve como primera aproximación para otras figuras elongadas, y en el caso de la acústica submarina, representa un modelo simple de la forma de los peces. Sin embargo no es tan sencillo determinar la respuesta de dispersión como en el caso de la esfera, ya que además de depender de la orientación del cilindro, hay que tener en cuenta que, al ser una geometría truncada, ocurren fuertes efectos de difracción en los bordes de las caras laterales que no pueden ser bien predichos por las soluciones modales ni por las aproximaciones de rayos acústicos. Estas soluciones sólo son aplicables en algunas situaciones concretas en las que se puede considerar al cilindro finito como infinito.

En general, esta distinción entre cilindro finito e infinito depende la longitud del cilindro en relación con la longitud de onda incidente y se define en términos de las zonas Fresnel. Si el cilindro está suficientemente lejos del receptor y su longitud es menor que la primera zona Fresnel, $L \ll 2\sqrt{R\lambda}$, el cilindro debe considerarse finito. En caso contrario, cuando $L \gg 2\sqrt{R\lambda}$, el cilindro puede considerarse infinito y pueden aplicarse los resultados obtenidos en XI.4.b

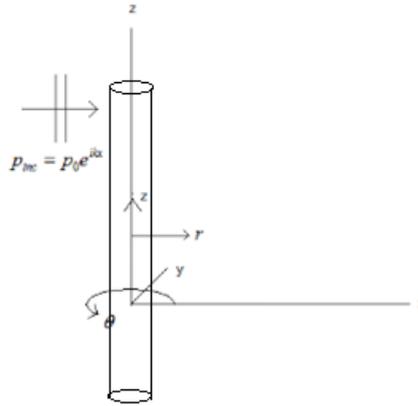


Fig.51 Esquema del cilindro finito

(1) *Incidencia normal*

a) *Aproximación de Kirchoff: Reflexión especular*

La longitud de dispersión en la dirección de vuelta para un cilindro finito, empleando el método de Kirchoff resulta [33]

$$l_{bs} = \frac{ikaL}{2\pi} [2 - \pi[H_1(2ka) + iJ_1(2ka)]] \quad (108)$$

b) *Soluciones modales*

Las soluciones modales propuestas por Faran [8] para el cilindro infinito han sido adaptadas para el caso de cilindros finitos asumiendo que los efectos de borde son despreciables. Stanton [36] desarrolló un modelo, conocido como modelo de cilindro deformado basado en las soluciones modales (MB-DCM), en el que realiza cálculos aproximados del flujo volumétrico para secciones discretas a lo largo de la longitud del cilindro, asumiendo que este flujo volumétrico es equivalente al que produciría un cilindro infinito. Este modelo ha sido aplicado a tres casos concretos, cilindro fluido finito, cilindro elástico fluido y esferoides y cilindros deformados. Sin embargo, este método no es válido para todos los casos estando restringido a ángulos normales de incidencia o casi-normales, y resultando insuficiente para ángulos de incidencia mayores que representan las situaciones más realistas.

La presión dispersada por un cilindro elástico finito medida en campo lejano, puede escribirse en términos modales como:

$$p_{scat} = P_0 \frac{e^{ikr}}{r} \left(\frac{-L}{\pi}\right) \frac{\sin \Delta}{\Delta} \sum_{n=0}^{\infty} \epsilon_n \sin \delta_n e^{-i\delta_n} \cos n\theta \quad (109)$$

donde r es la distancia a la que se encuentra el receptor, θ el ángulo entre el receptor y el emisor, δ_n es el desplazamiento de fase del modo n , L es la longitud del cilindro, k la longitud de onda en el fluido, $\epsilon_n = 1$ para $n = 0$ y $\epsilon_n = 2$ para $n > 0$, y

$$\Delta = \frac{kL(\hat{r}_t - \hat{r}_r)\hat{r}_c}{2} \quad (110)$$

con $\hat{r}_i, \hat{r}_r, \hat{r}_c$ los vectores de posición unitarios de emisor, receptor y cilindro respectivamente.

La longitud de dispersión para el cilindro elástico será:

$$L = \frac{-L \sin \Delta}{\pi \Delta} \sum_{n=0}^{\infty} \epsilon_n \sin \delta_n e^{-i\delta_n} \cos n\theta \quad (111)$$

- *Cilindro rígido*

En el caso de un cilindro perfectamente rígido de longitud L, la ecuación ec. 111 puede escribirse como [33]:

$$l = \frac{iL \sin \Delta}{\pi \Delta} \sum_{n=0}^{\infty} \epsilon_n \frac{J_n'(ka)}{H_n^{(1)'}(ka)} \cos n\phi \quad (112)$$

Para el caso de retrodispersión, $\cos n\phi = (-1)^n$, tendremos:

$$l_{bs} = \frac{iL}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\epsilon_n (-1)^n J_n'(ka)}{H_n^{(1)'}(ka)} \quad (113)$$

En la fig. 52 se ha representado La fuerza del blanco para un cilindro rígido según Kirchoff y según las soluciones modales. Al igual que en la fig.42 se puede apreciar que para altas frecuencias la solución de Kirchoff da una buena aproximación de la solución modal.

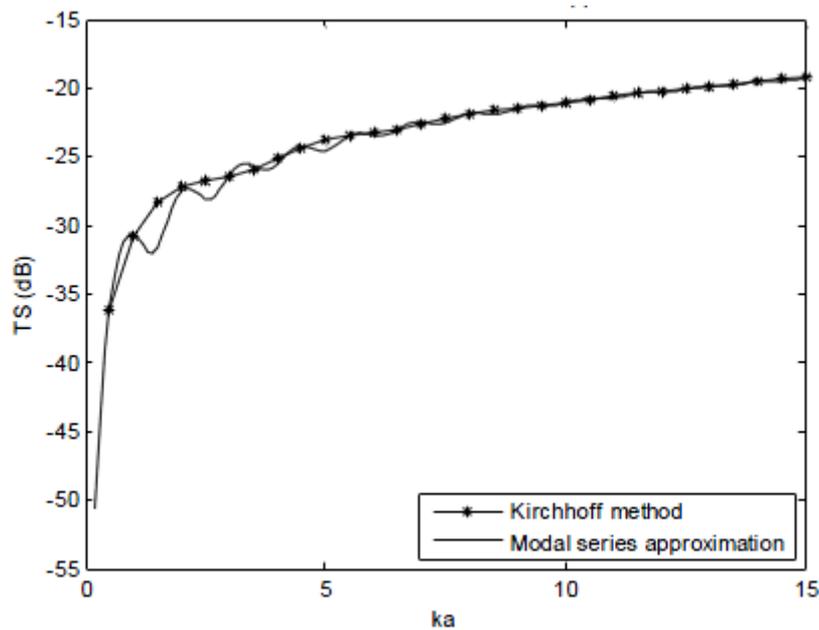


fig.52 Comparación del TS de un cilindro rígido finito en incidencia normal obtenido mediante Kirchoff y Faran

(2) *Incidencia oblicua*

Las soluciones adaptadas por Stanton para el cilindro finito no son válidas para incidencia oblicua, ya que a partir de cierto ángulo de incidencia crítico dado por el acoplamiento entre las ondas transversales y longitudinales, se producen ondas que se propagan axialmente y que el método MB-DCM no llega a predecir. Para describir estos fenómenos se han propuesto algunas soluciones basadas en el método T-matrix o se han realizados modelos numéricos con el método de elementos finitos.

XI. 4. d. Esferoide

En general, la dispersión del sonido a partir de un dispersor elástico sumergido incluye la compleja interacción de dos sistemas con infinitos grados de libertad. En el caso de dispersores con geometrías simples como los estudiados en las secciones XI.4 a,b y c, es posible describir tanto el fluido como el dispersor mediante una expansión de modos normales que convergen adecuadamente y que pueden ser emparejados a partir de las condiciones de contorno descritas en III.2.a . Sin embargo, si el dispersor tiene una forma esferoidal, únicamente puede encontrarse una solución directa para un número especiales de casos (entre los que se encuentran el esferoide rígido,el esferoide fluido y el régimen de Rayleigh.), en los que cada modo acústico excita todos los modos elásticos y viceversa. Estas soluciones particulares fueron obtenidas por Silgiber [37] mediante la expansión en serie de los distintos campos acústicos en funciones de onda esferoidales, descritas en el anexo XI.3, aunque no llegó a obtener resultados numéricos concretos debido a las complicaciones que conllevan el cálculo de las funciones esferoidales.

XI. 5. SOLUCIONES PARTICULARES PARA GEOMETRÍAS SIMPLES FLUIDAS

XI. 5. a. Esfera

El modelo de esfera fluida es una buena aproximación para numerosos organismos marinos, las células sanguíneas, las burbujas de aire o los agentes de contraste empleados en las técnicas de imagen.

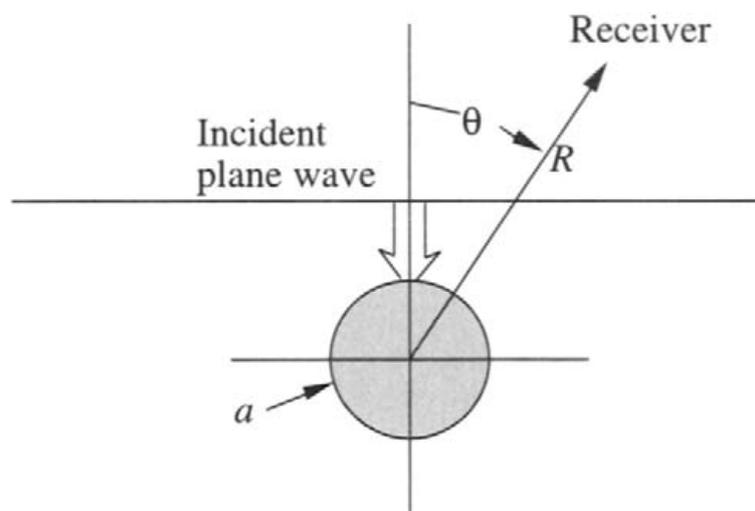


fig. 53 Esquema del dispersor esférico fluido

La teoría que describe la dispersión de una esfera fluida fue establecida por Anderson [7]. El modelo general empleado para determinar el comportamiento acústico de la esfera es el modelo axisimétrico de soluciones modales esféricas propuesto por [38]. En la fig. 53 se muestra un esquema de este modelo. En él se asume que la onda incidente se propaga en la dirección negativa del eje z . El medio fluido tiene una densidad ρ , y la onda acústica se propaga con velocidad del

sonido c , y número de onda k . La esfera de radio a , tiene densidad ρ_1 , velocidad del sonido c_1 , y número de onda k_1 . Los ratios de estos parámetros se expresan definiendo dos nuevas variables h, g :

$$h = \frac{c_1}{c}, g = \frac{\rho_1}{\rho} \quad (114)$$

Como se trata de una esfera fluida, en este caso tendremos tres presiones, la presión incidente p_{inc} , la presión dispersada fuera de la esfera p_{disp} definida para puntos situados a una distancia R mayor que el radio, y la presión interior a la esfera p_{int} definida para puntos situados a una distancia R menor que el radio. Expresando estas presiones mediante expansión en serie de funciones esféricas de Bessel y polinomios de Lagrange tenemos:

$$p_{inc} = P_0 \sum_{n=0}^{\infty} (-i)^n (2n+1) j_n(kr) P_n(\cos \theta) \quad (115)$$

$$p_{int} = \sum_{n=0}^{\infty} B_n j_n(k_1 r) P_n(\cos \theta) \quad (116)$$

$$p_{disp} = \sum_{n=0}^{\infty} A_n [j_n(kr) + i n_n(kr)] P_n(\cos \theta) \quad (117)$$

Los coeficientes desconocidos A_n, B_n se obtienen aplicando las condiciones de contorno definidas en III.2.a

Aplicando dichas condiciones y aproximando las funciones de Bessel para la condición de campo lejano, se obtiene que la presión dispersada en campo lejano es [7]

$$p_{disp} = P_0 \frac{i}{kR} e^{ikR} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (2n+1) P_n(\cos \theta)}{1 + iC_n} \quad (118)$$

con

$$C_n = \frac{j_n'(k_1 a) n_n(ka) - g h j_n(k_1 a) n_n'(ka)}{j_n'(k_1 a) j_n(ka) - g h j_n(k_1 a) j_n'(ka)} \quad (119)$$

y la función de dispersión en campo lejano

$$f = \frac{2i}{ka} \sum_{n=0}^{N-1} \frac{(-1)^n (2n+1) P_n(\cos \theta)}{1 + iC_n} \quad (120)$$

con $N \geq ka + 3$, que es una buena aproximación numérica de infinitos modos.

(1) Dispersión de la esfera suave (liberación de presión)

En el caso de una esfera suave tendremos que la presión en el interior de la esfera es cero, por lo que la presión en el contorno es nula.

Aplicando dichas condiciones se obtiene que la presión dispersada vale:

$$p_{bs}(r) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{-P_0 (i)^n (2n+1) j_n(ka)}{h_n^{(1)}(ka)} h_n^{(1)}(kr) \quad (121)$$

y en campo lejano

$$p_{bs}(r) = \frac{-P_0}{ikr} e^{ikr} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n+1) j_n(ka)}{h_n^{(1)}(ka)} \quad (122)$$

(2) *Teoría resonante*

En el caso de una esfera gaseosa con densidad mucho menor que la del fluido, como una burbuja de gas, el modelo desarrollado en XI.4.a.3 es igualmente válido con la salvedad de que ahora la función de dispersión depende del fondo suave:

$$S_n = S_n^{(s)} \frac{L_n - z_2}{L_n - z_1} = S_n^{(s)} \frac{ka - k_{nl}^{(s)} a - \frac{1}{2} i \Gamma_{nl}^{(s)}}{ka - k_{nl}^{(s)} a + \frac{1}{2} i \Gamma_{nl}^{(s)}} \quad (123)$$

donde $S_n^{(s)}$ es ahora la función de dispersión de una esfera suave, con condición de contorno de liberación de presión

En términos de resonancia, la función de forma parcial para el caso de una esfera fluida resulta:

$$f_n(\theta) = \frac{2}{ka} (2n + 1) e^{2i\xi_n} \left[e^{-i\xi_n} \sin \xi_n + \frac{\frac{1}{2} \Gamma_{nl}^{(s)}}{k_{nl}^{(s)} a - ka - \frac{1}{2} i \Gamma_{nl}^{(s)}} \right] P_n(\cos \theta) \quad (124)$$

donde ξ_n es ahora el desplazamiento de fase para una esfera suave. El primer término del paréntesis representa el campo dispersado suave y el segundo término representa el campo dispersado resonante. Por lo tanto la amplitud de dispersión de cada resonancia pura se puede obtener a partir del módulo de la diferencia entre la función de forma total y la función de forma suave

$$|f_n(\theta) - f_n^{suave}(\theta)| \quad (125)$$

(3) *Dispersión de la esfera en régimen de Rayleigh*

Cuando el radio de la esfera es mucho menor que la longitud de onda sólo es necesario considerar el primer termino en las series de las funciones esféricas de Bessel:

$$j_n(ka) \rightarrow \frac{(ka)^n}{1 \cdot 3 \dots (2n+1)} \quad (126)$$

$$n_n(ka) \rightarrow \frac{1 \cdot 3 \dots (2n-1)}{(ka)^{n+1}} \quad (127)$$

Usando estos valores límite, la amplitud de la presión dispersada es

$$|p_{disp}| = \frac{P_0(ka)^2 a}{R} \left| \frac{1-g}{3gh^2} + \frac{(1-g) \cos \theta}{1+2g} \right| \quad (128)$$

Teniendo en cuenta que las compresibilidades κ del medio y κ_1 del dispersor son:

$$\kappa = \frac{1}{\rho c^2}, \kappa_1 = \frac{1}{\rho_1 c_1^2} \quad (129)$$

la amplitud de la presión dispersada puede escribirse como:

$$|p_{disp}| = \frac{P_0(ka)^2 a}{3R} \left| \frac{\kappa_1 - \kappa}{\kappa} + \frac{3(\rho_1 - \rho) \cos \theta}{2\rho_1 + \rho} \right| \quad (130)$$

Al igual que en el caso de la esfera rígida, en el régimen de Rayleigh la dispersión de la esfera de fluida tiene dos componentes, una monopolo que depende de la relación entre las compresibilidad del medio y de la esfera, y otra componente dipolo que depende de la relación entre las densidades.

XI. 5. b. Cilindro infinito

Al igual que en XI.4.b, las soluciones obtenidas para el cilindro infinito son válidas para cilindros finitos fluido son válidas para cilindros en los que $L \gg 2\sqrt{R\lambda}$.

Las distintas presiones pueden expresarse como expansión en serie de funciones de Bessel [39]:

$$p_{inc} = P_0 \sum_{n=0}^{\infty} i^n \epsilon_n J_n(kr) \cos n\theta \quad (131)$$

$$p_{int} = P_0 \sum_{n=0}^{\infty} A_n J_n(k_1 r) \cos n\theta \quad (132)$$

$$p_{disp} = P_0 \sum_{n=0}^{\infty} B_n H_n^{(1)}(kr) \cos n\theta \quad (133)$$

Aplicando las condiciones de contorno definidas en III.2.a se obtiene que la presión dispersada es

$$B_n = \frac{-\epsilon_n i^n}{1+iC_n} \quad (134)$$

con

$$C_n = \frac{\frac{J_n'(k_1 a) N_n(ka) - gh N_n'(k_1 a)}{J_n(k_1 a) J_n(ka)} - \frac{J_n'(ka)}{J_n(k_1 a) J_n'(ka)}}{\frac{J_n'(k_1 a) J_n(ka)}{J_n(k_1 a) J_n'(ka)} - gh} \quad (135)$$

con g, h definidos en XI.5.a

En campo lejano se obtiene

$$p_{disp} \rightarrow P_0 \sqrt{\frac{2}{\pi k R}} e^{i(kR - \pi/4)} \sum_{n=0}^{\infty} (-i)^n B_n \cos n\theta \quad (136)$$

(1) Dispersión del cilindro suave (liberación de presión)

Aplicando las condiciones de contorno definidas en III.2.a, junto con la aproximación de campo lejano de la función $H_n^{(1)}(kr)$ se obtiene que la presión dispersada en campo lejano para el cilindro suave infinito:

$$p_s = -P_0 \left(\frac{2}{\pi k r}\right)^{1/2} e^{i(kr - \pi/4)} \sum_{n=0}^{\infty} \epsilon_n [J_n(ka)/H_n^{(1)}(ka)] \cos n\theta \quad (137)$$

(2) Teoría resonante

La presión dispersada por el cilindro infinito fluido, empleando coordenadas cilíndricas, con la formulación resonante es

$$p_s = \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \epsilon_n i^n (S_n - 1) H_n^{(1)}(kr) P_n \cos \theta \quad (138)$$

y la función de forma parcial

$$f_n(\theta) = 2i\epsilon_n (\pi i k a)^{-1/2} e^{2i\xi_n} \left[e^{-i\xi_n} \sin \xi_n + \frac{\frac{1}{2}\Gamma_{nl}^{(s)}}{k_{nl}^{(s)} a - ka - \frac{1}{2}i\Gamma_{nl}^{(s)}} \right] P_n \cos \theta \quad (139)$$

donde ξ_n es ahora el desplazamiento de fase para un cilindro suave.

Nuevamente cada función parcial está compuesta por dos términos, uno referente al campo de fondo suave y otro referente al campo resonante.

(3) Dispersión del cilindro fluido infinito en régimen de Rayleigh

Cuando el radio del cilindro es mucho menor que la longitud de onda, las funciones de Bessel se aproximan por los dos primeros términos obteniéndose

$$p_{disp} \rightarrow \frac{P_0(ka)^2 i\pi}{2} \sqrt{\frac{2}{\pi kR}} e^{i(kR - \pi/4)} \left(\frac{1-gh^2}{2gh^2} + \frac{(1-g)\cos\theta}{1+g} \right) \quad (140)$$

XI. 5. c. Cilindro finito (Incidencia normal)

Stanton [39] obtuvo también la solución para el caso del cilindro finito fluido en incidencia normal. Esta solución se obtiene mediante la integración a lo largo de la longitud del cilindro del flujo volumétrico aparente por unidad de longitud. Para ello se ignoran los efectos de borde y se aproxima el campo interno del cilindro fluido finito por el del cilindro infinito.

De esta forma se obtiene:

$$p_{disp} = P_0 \frac{e^{ikR}}{R} \left(\frac{-iL}{\pi} \right) \frac{\sin\Delta}{\Delta} \sum_{n=0}^{\infty} (-i)^n B_n \cos n\theta \quad (141)$$

con Δ definido en ec.110 de XI.4.c.1

La longitud de dispersión para el cilindro elástico será:

$$l = \frac{-iL}{\pi} \frac{\sin\Delta}{\Delta} \sum_{n=0}^{\infty} (-i)^n B_n \cos n\theta \quad (142)$$

(1) Dispersión del cilindro finito suave (liberación de presión)

En el caso de un cilindro suave de longitud L, la longitud de dispersión puede escribirse como [39]:

$$l = \frac{iL}{\pi} \frac{\sin\Delta}{\Delta} \sum_{n=0}^{\infty} \epsilon_n \frac{J_n(ka)}{H_n^{(1)}(ka)} \cos n\theta \quad (143)$$

XI. 6. T-MATRIX: DISPERSIÓN DE OBJETOS ELONGADOS

El método T-matrix es una técnica desarrollada por Peter Waterman [13] que ha llegado a ser una de las herramientas teóricas más potentes y versátiles empleadas en el estudio de la dispersión electromagnética, acústica y elastodinámica de superficies con formas arbitrarias. La ventaja de la formulación T-matrix es que la solución se obtiene a partir de una expansión en términos de funciones de onda esféricas. Como estas funciones son fáciles de manejar computacionalmente, la T-matrix permite formulaciones monostáticas y biestáticas para distintos ángulos de incidencia y para una variedad de blancos finitos, lisos y en 3D

El procedimiento es similar al del análisis modal de Faran. En primer lugar se debe expresar el campo dispersado, incidente e interior comuna expansión en serie de ciertas funciones base esféricas definidas en [13]. A continuación, para determinar los coeficientes desconocidos del campo dispersado se aplican las condiciones de contorno correspondientes a cada situación y se obtiene una serie de ecuaciones que pueden escribirse de forma matricial. A partir de estas ecuaciones puede obtenerse la matriz T que establece la relación entre los coeficiente de la presión incidente y dispersada, escritos de forma matricial.

XI. 6. a. Aplicación del método T-matrix al esferoide elongado

Este método ha sido usado satisfactoriamente para describir la dispersión de distintas geometrías demostrando su validez mediante con medidas experimentales o teóricas. En concreto, en [40] [41], se emplea la T matrix para estudiar la dispersión del esferoide elongado rígido y elástico, comparando los resultado con las predicciones hechas a partir de las consideraciones de la respuesta resonante.

(1) Esferoide rígido

Aunque la formulación de la solución para un esferoide rígido ha sido realizada mediante diversas técnicas, como la técnica de separación de variables, se han obtenido pocos resultados numéricos debido a las dificultades que conlleva el cálculo de funciones esferoidales..

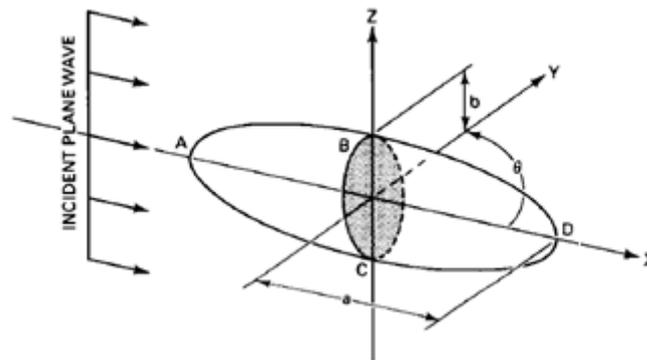


Fig.54 Esquema del esferoide elongado

En [40] se calcula la respuesta para un esferoide rígido a partir de la formulación T-matrix. Los resultados describen la respuesta de dispersión de un esferoide elongado rígido, fig. 54, con $a/b = 2$ donde b es la longitud del semieje menor y a es la longitud del semieje mayor. En concreto se obtiene la función de forma para ángulos de $0^\circ, 45^\circ 90^\circ$ en un rango frecuencial $0 < ka < 10$, representada en la fig. 55

Se puede observar que la función de forma de un esferoide rígido está constituida por una serie de ondulaciones suaves. Los mecanismos físicos que influyen en la formación de esta respuesta son las interferencias que se producen entre las reflexiones especulares y las ondas de Franz o creeping que circunvalan el esferoide.

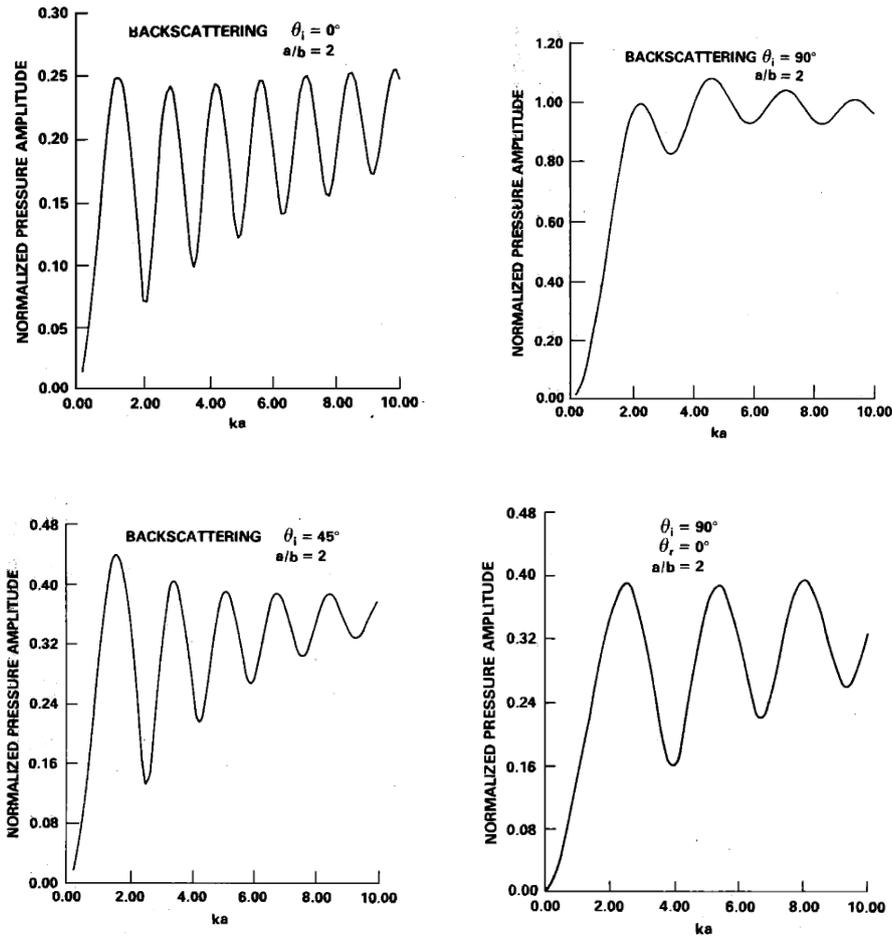


Fig. 55 Función de forma del esferoide elongado para distintos ángulos de incidencia y configuraciones de emisor-receptor

(2) *Esferoide elástico*

La formulación T-matrix permite obtener la respuesta de dispersión de un esferoide elástico. En concreto, en [41] se desarrolla una solución para la dispersión de un esferoide elongado elástico sumergido en agua, comparando los resultados con las predicciones hechas a partir de las consideraciones resonantes. La geometría del problema es análoga a la mostrada en la Fig.54

El campo dispersado se puede definir a partir de la función de forma como:

$$U^s = (b/2)e^{-(i\omega t - kr)} f \tag{144}$$

donde f es la función de forma dada por

$$f = 2 \left(\frac{r}{a}\right) e^{ikr} \sum \sum (-i)^{n+1} h_n(kr) P_n(\cos \theta) \epsilon_{nm} f_{nm} \tag{145}$$

Empleando las expresiones asintóticas para las funciones de Hankel, se obtiene la función e forma en campo lejano:

$$f_\infty = \left(\frac{2}{ka}\right) \sum \sum P_n(\cos \theta) f_{nm} \tag{146}$$

que describe las características reflectivas de un esferoide. Para el caso monoestático de retrodispersión, $P_n(\cos \theta) = (-1)^n$ y

$$f_{\infty} = -\left(\frac{2}{ka}\right) \sum_n \sum_{n'} (-1)^n \epsilon_{nm} f_{nm'} \quad (147)$$

donde $f_{nm'}$ se obtiene a partir de la matriz T.

Esta formulación en base a la matriz T puede ser relacionada con la teoría resonante. Como se ha visto en las distintas secciones de XI.4 y XI.5, la función de forma está constituida por la superposición de los distintos modos o funciones parciales f_n

$$f_{\infty} = \sum_n f_n \quad (148)$$

Con la formulación Tmatrix, cada función de forma parcial se obtiene como

$$f_n = \sum_{n'} T_{nn'} \quad (149)$$

Para el caso del esferoide rígido, se tiene que $f^{rigid} = T^{rigid}$, por lo que según la teoría resonante, como la función de forma del esferoide está compuesta, al igual que en el caso de cilindros y esferas, por la superposición de las resonancias sobre la respuesta rígida, el espectro resonante se puede obtener a partir de:

$$f_n - f_n^{rigid} = \sum_{n'} T_{nn'} - T_{nn'}^{rigid} \quad (150)$$

XI. 7. MODELOS DE DISPERSIÓN PARA BLANCOS MARINOS

(1) Modelos acústicos de los peces

Cuando se trata de peces, el TS depende de diversos parámetros como el tamaño, la forma y la orientación, o de algunos componentes internos como el tener o no vejiga natatoria. Todo esto hace que resulte complicado obtener un modelo que proporcione una estimación teórica fiable de la dispersión de los peces. En general, los modelos acústicos de los peces se basan en formas alargadas que intentan imitar a grandes rasgos su anatomía. Las distintas geometrías usadas han evolucionado desde las esferas y cilindros hacia los esferoides elongados, que se asemejan más a la forma del pescado. En los últimos años, con el avance de las computadoras, se han llegado a desarrollar modelos digitalizados a partir de la forma real de los peces, en 2D y 3D, que incluyen su estructura interna y que pueden ser estudiados mediante métodos numéricos.

En general, a la hora de modelar acústicamente los peces, se distingue entre los que tienen vejiga natatoria y los que no:

a. Para los peces sin vejiga natatoria, el eco resultante es una contribución de los ecos de los tejidos, los huesos y el cráneo, por lo que se pueden emplear distintos modelos para representar la estructura interna. Así, partes como la carne del pescado, con densidad parecida a la del agua, puede ser modelada mediante usando la aproximación de onda distorsionada de Born (ver XI.8.a), mientras que partes como los huesos, con densidad mucho mayor que la del agua y formas cilíndricas, quedan correctamente modelado usando el análisis modal del cilindro deformado propuesto por Stanton [36] [39].

b. En el caso de peces con vejiga natatoria, el modelado de dicha vejiga tiene una especial importancia, ya que esta característica anatómica, presente en muchas especies, tiene una influencia notoria en la dispersión a frecuencias bajas debido a su densidad y a las características resonantes. La existencia de esta resonancia a baja frecuencia sirve como diferenciador frente a los peces sin vejiga y el zooplancton. Además otra de las características fundamentales de la vejiga es que al estar llena de gas tiene una impedancia acústica inferior a la del agua, es decir actúa como un dispersor suave produciendo una inversión de fase en la energía dispersada que puede ser útil a la hora de la identificación. En el modelado de la vejiga natatoria, a menudo se emplean modelos híbridos, usándose el modelo del cilindro deformado de Stanton a bajas frecuencias y la aproximación de Kirchoff para la forma externa a frecuencias altas.

(2) *Modelo acústico del zooplancton*

Debido a la variedad de especies de zooplancton, existen diversos modelos acústicos para describirlos que permiten obtener los parámetros de dispersión, y por lo general se escogen en función de los mecanismos de dispersión y las características físicas del espécimen. El más simple, aunque bastante limitado a ciertas clases de zooplancton esféricos, es el de la esfera rellena de fluido de bajo contraste.

Para los organismos con una densidad similar a la del medio que permite la penetración del sonido causando patrones de interferencia entre las fronteras de entrada y salida, se puede emplear un modelo simple de dispersión por rayos en dos direcciones, basado en una geometría de cilindro recto. Otro modelo más preciso para este caso dispersión débil, es la aproximación de onda distorsionada de Born (ver XI.8.a), llamada así por las perturbaciones de fase que sufre la onda debido a las variaciones de la velocidad del sonido en el dispersor. Este modelo es muy apropiado para el caso de cuerpos homogéneos con dimensiones y formas arbitrarias y no está restringido a ciertos ángulos de inclinación por lo que ha sido implementado para predecir *in situ* la dispersión de agregaciones de zooplancton con distribuciones aleatorias de forma y tamaño. Además, en los últimos años, se han realizado algunas mejoras como la inclusión de la variabilidad de la fase debida a causas estocásticas y de comportamiento, o los cambios de la composición a lo largo de los cuerpos de organismos más grandes como el krill.

Aún así hay muchos investigadores que prefieren realizar aproximaciones empíricas para describir la dispersión del zooplancton, ya que consideran que los modelos teóricos de morfologías tan complicadas pueden fallar por el desconocimiento de alguno de los parámetros que afectan a la dispersión.

XI. 8. DISPERSIÓN EN TEJIDOS

XI. 8. a. Dispersión tejidos inhomogeneos

Las inhomogeneidades de los tejidos se pueden modelar como regiones cuyas propiedades acústicas, como densidad ρ_r y compresibilidad κ_r difieren de los valores del resto del tejido κ, ρ . En este caso, la ecuación de ondas para la presión acústica, omitiendo la atenuación del medio, puede escribirse como [42]:

$$\nabla^2 p - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} = \frac{1}{c^2} \gamma_\kappa(r, t) \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} + \nabla \left(\gamma_\rho(r, t) \nabla(p) \right) \quad (151)$$

con $c^2 = 1/\rho\kappa$, y:

$$\gamma_\kappa = \frac{\kappa_r - \kappa}{\kappa_r}, \gamma_\rho = \frac{\rho_r - \rho}{\rho_r} \quad (152)$$

La parte izquierda de la ec.151 describe la propagación a través del tejido homogéneo del entorno, y proporciona la propagación geométrica a través de grandes regiones de tejido homogéneo. El término de la derecha representa las perturbaciones de las propiedades acústicas respecto los valores promedios del medio.

Empleando el teorema de Green, podemos convertir la ecuación anterior en una ecuación integral. Suponiendo el caso en el que tenemos una onda incidente plana de frecuencia $\omega/2\pi$, y que el dispersor está situado en r_0 incluido en un volumen V , tendremos, omitiendo la dependencia temporal por ser una fuente armónica:

$$p(r) = p_i(r) + \iiint_V \left(k^2 \gamma_\kappa p(r_0) G(r|r_0) + \gamma_\rho \nabla_0 p(r_0) \cdot \nabla_0 G(r|r_0) \right) dv \quad (153)$$

siendo $k = 2\pi/\lambda$ el número de onda, y $G(r|r_0)$ la función de Green:

$$G(r|r_0) = \frac{1}{4\pi|r-r_0|} e^{ik|r-r_0|} \quad (154)$$

La integral volumétrica representa la presión dispersada producida por la interacción de la onda incidente y las irregularidades de κ, ρ de la región de volumen V . El primer término de la integral representa la dispersión debida a las fluctuaciones de compresibilidad que dan lugar a una distribución de fuente monopolo. El segundo término representa la componente dispersada por las fluctuaciones de densidad que tiene una distribución de fuente dipolo. Es importante señalar que ambas fuentes dependen del campo de presión actual en el interior del volumen, pero no de la presión incidente. Por lo tanto, conociendo el campo de presiones en el volumen, es decir resolviendo la ecuación integral, podemos determinar la presión dispersada a larga distancias. Esta ecuación puede resolverse mediante métodos variacionales o mediante aproximaciones sucesivas:

$$p = p_i(r) + p_1(r) + p_2(r) + p_3(r) + \dots \quad (155)$$

$$p_{n+1}(r) = \iiint_V \left(k^2 \gamma_\kappa p_n(r_0) G(r|r_0) + \gamma_\rho \nabla_0 p_n(r_0) \cdot \nabla_0 G(r|r_0) \right) dv \quad (156)$$

(1) *Aproximación de Born*

En el caso de que las inhomogeneidades que causan la dispersión tengan valores de densidad y compresibilidad muy cercanas a los del resto del medio, produciendo una dispersión débil, y si ignoramos múltiple dispersión, es suficiente aproximar la ecuación integral únicamente con el primer término de la serie, lo que se conoce como aproximación de Born [38]:

$$p = p_i(r) + p_s(r) \quad (157)$$

$$p_s(r) \approx \iiint_V \left(k^2 \gamma_k p_i(r_0) G(r|r_0) + \gamma_\rho \nabla_0 p_i(r_0) \cdot \nabla_0 G(r|r_0) \right) dv \quad (158)$$

Además, si calculamos la presión en campo lejano, es decir a una distancia grande de la región de dispersión (Región de fraunhofer), podemos expresar la presión dispersada como:

$$p_s(r) = \left(\frac{e^{-ikr}}{r} \right) \Phi(K) \quad (159)$$

$$\Phi(K) \approx \frac{k^2}{4\pi} \iiint_V \left(\gamma_k p_i(r_0) - i \gamma_\rho \frac{\vec{\sigma}}{k} \cdot \nabla_0 p_i(r_0) \right) dv \quad (160)$$

donde $K = k(\vec{l} - \vec{\sigma})$, siendo \vec{l} la dirección de incidencia y $\vec{\sigma}$ la de observación, formando un ángulo θ , cuya magnitud es $|K| = 2k \sin \theta/2$

$\Phi(K)$ es la función de distribución angular, que describe la dependencia frecuencial de la presión dispersada. En el caso de una onda plana de amplitud 1, esta función puede escribirse como:

$$\Phi(K) \approx \frac{k^2}{4\pi} \iiint_V \gamma(r_0) e^{iK r_0} dv \quad (161)$$

donde

$$\gamma(r_0) = \gamma_\kappa(r_0) + \gamma_\rho(r_0) \cos \theta \quad (162)$$

De la misma forma podemos obtener la presión dispersada en la dirección de retorno $\vec{\sigma} = -\vec{l}$, con $K = 2k\vec{l}$, siendo ahora la función de distribución angular

$$\Phi(2k) = \frac{k^2}{4\pi} \iiint_{V_0} \gamma(r_0) e^{-2ikr_0} dv_0, \text{ con } \gamma(r) = \gamma_\kappa(r) - \gamma_\rho(r) \quad (163)$$

La intensidad retrodispersada es por lo tanto:

$$I_{bs} = Ak^4 |\Phi(2k)|^2 \quad (164)$$

donde A es una constante de proporcionalidad.

Además, en este caso de dispersión de débil, la función $\gamma(r)$ se aproxima por

$$\gamma(r) = -2 \frac{z(r) - z_0}{z(r)} = -2 \frac{\Delta z}{z} \quad (165)$$

donde $z = \rho c = \sqrt{\rho/\kappa}$ es la impedancia acústica característica en el punto r , y z_0 es la impedancia del medio (sin dispersores). Por lo tanto, la función $\gamma(r)$ es proporcional al cambio relativo en la impedancia acústica característica.

Combinando las ecuaciones anteriores tenemos:

$$I_{bs} = A' k^4 S(2k) \quad (166)$$

con

$$S(2k) = \left| \frac{\iiint_{V_0} \frac{\Delta z}{z} e^{-2ikr_0} dv_0}{\iiint_{V_0} \frac{\Delta z}{z} dv_0} \right| = \frac{S'(2k)}{S'(0)} \quad (167)$$

A' es una nueva constante de proporcionalidad, y $S(2k)$ esta normalizada de forma que $S(0) = 1$. La intensidad retrodispersada dividida por k^4 es proporcional a la magnitud cuadrada de la transformada de Fourier de la función relativa de impedancia. $S'(2k)$ y $S(2k)$ son las denominadas espectro de potencia, y espectro de potencia normalizado del medio. $S'(2k)$ se puede obtener experimentalmente como el cuadrado de la magnitud de la transformada de Fourier del mapa de impedancias 3D obtenido tras el escaneado.

XI. 8. b. Dispersión débil en tejidos aleatorios

Existen algunos medios biológicos donde un conjunto de inhomogeneidades distribuidas de forma aleatoria actúan como principales dispersores del sonido. El campo dispersado en ese caso, será la suma de los campos de presión dispersado por cada uno de ellos [43]

$$p_s(r) = \left(\frac{e^{-ikr}}{r} \right) \sum_{j=1}^N \Phi_j(K) e^{ikr_j} = \langle p_s(r) \rangle + p_s'(r) \quad (168)$$

donde r_j es la posición de cada uno de los dispersores y N es el número total de dispersores. Este campo dispersado es una función aleatoria de la posición y puede escribirse como la suma de una presión dispersada promedio, $\langle p_s(r) \rangle$ llamado campo coherente, y una presión dispersada fluctuante $p_s'(r)$, llamado campo incoherente.

La sección transversal de dispersión diferencial σ_d se puede obtener a partir de la ec. 186 como

$$\sigma_d = \frac{k^4 V_s}{16\pi^2} \bar{n} \gamma_0^2 \int_{-\infty}^{\infty} b_\gamma(\Delta r) e^{-ik\Delta r} d^3 \Delta r = 4\pi^4 k^4 \bar{n} \Gamma^2(K) \quad (169)$$

donde V_s es el volumen promedio de partícula, \bar{n} es el número promedio de partículas por unidad de volumen, γ_0^2 es el cuadrado de la variación media en impedancia acústica por partícula, b_γ es un coeficiente de correlación y $\Gamma^2(K)$ es la función densidad espectral de potencia para las fluctuaciones del medio γ que en esta situación es una función aleatoria que describe la distribución de los dispersores en el medio

$$\Gamma^2(K) = \frac{V_s}{(2\pi)^6} \gamma_0^2 \int_{-\infty}^{\infty} b_\gamma(\Delta r) e^{iK\Delta r} d^3 \Delta r \quad (170)$$

Esta función nos da la dependencia de la frecuencia espacial de σ_d , al igual que describe las propiedades estructurales del medio como el tamaño promedio de la partícula, la forma, densidad y fuerza de dispersión por partícula.

Es importante señalar también que, como se supone que el medio es aleatorio e isotrópico, σ_d es debido únicamente a la dispersión incoherente por lo que se puede considerar que cada inhomogeneidad dispersa el sonido independientemente de los otros.

En el caso de que las inhomogeneidades sean esféricas, lo que concuerda bien por ejemplo con la forma de las concentraciones de grasa que se producen en los tejidos biológicos, la sección

transversal de dispersión diferencial en la dirección de vuelta σ_b , también llamada coeficiente de retrodispersión, para dispersores esféricos es:

$$\sigma_b = \frac{k^3 V_s}{8\pi} \bar{n} \gamma_0^2 \int_0^\infty b_\gamma(\Delta r) \sin(2k\Delta r) d\Delta r \quad (171)$$

Variando el coeficiente de correlación $b_\gamma(\Delta r)$ se pueden obtener distintos modelos que representan distintos tipos de inhomogeneidades.

XI. 8. c. Dispersión en tejidos heterogéneos

Existe poca información acerca de la dispersión real de los tejidos, debido principalmente a la dificultad que conlleva realizar las mediciones. La dispersión, en el rango de frecuencias comúnmente empleado para las imágenes médicas, depende de la frecuencia por lo que es importante tener en cuenta la influencia de ciertos efectos del sistema tales como las características espectrales o la directividad del transductor, que necesitan ser corregidos para obtener mediciones realistas que permitan inferir correctamente las propiedades de los tejidos.

En general, [22] se puede decir que la dispersión del tejido real incluye principalmente tres aportaciones: frentes principales, ondas de menor nivel debidas a las estructuras de difracción, y moteado (ondas difusivas muchos menores que las longitud de onda debidas a las estructuras de los tejidos).

XI. 9. COMSOL

Comsol Multiphysics es una herramienta software de uso comercial que provee de una serie de modos de aplicación que contienen plantillas predefinidas e interfaces de usuario configuradas con las ecuaciones y variables específicas de las distintas áreas físicas, entre las que se encuentran la acústica, ingeniería química, radio frecuencia, mecánica estructural, etc.

Para el propósito que nos ocupa en este trabajo, en el que se desea estudiar la dispersión de cuerpos elásticos y fluidos inmersos en agua bajo la acción de un campo acústico, se necesita el módulo de acústica, que incluye también modos de aplicación para análisis estructural.

XI. 9. a. Módulo de acústica

El módulo de acústica es modo de aplicación de COMSOL que estudia la propagación de ondas acústicas a través de fluidos y sólidos, a partir de distintos tipos de análisis. En el caso que nos ocupa, se empleará el análisis en el dominio frecuencial para estudiar la dispersión en función de la frecuencia y el análisis de frecuencias propias para determinar las resonancias o modos propios de los distintos dispersores simulados.

Los distintos submódulos que conforman el módulo de acústica permiten realizar de forma sencilla la simulación de problemas estándares en acústica, como problemas de radiación de

fuentes, problemas de dispersión, distribución de sonido en el interior de un volumen finito, problemas aeroacústicos o acoplamiento entre fluidos y estructuras elásticas.

(1) *Consideraciones previas*

En general, en todos los estudios es importante tener en cuenta una serie de consideraciones previas necesarias para obtener soluciones aproximadas correctas:

➤ **Tamaño del mallado:** Para reducir el error de la discretización es necesario que haya suficiente resolución. Esta resolución depende del tipo de elemento escogido, mostrados en la figura 56, y de la mayor frecuencia de trabajo, que proporciona la menor longitud de onda. Para elementos cuadráticos triangulares, el número de elementos de por longitud de onda debe ser entre 6 y 8.

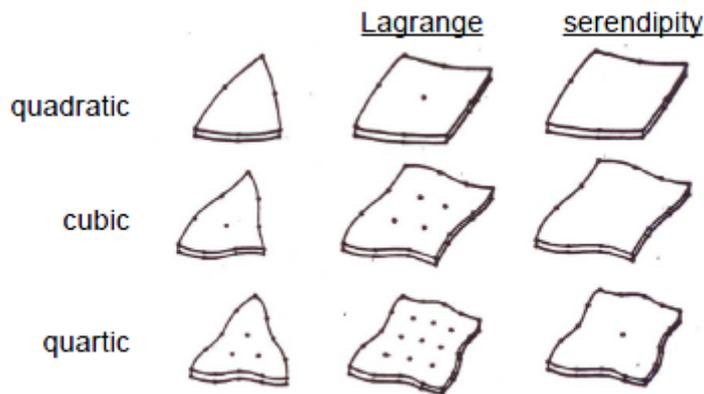


Fig.56 Tipos de elementos empleados en el mallado en Comsol

➤ **Campo cercano y lejano:** En algunas situaciones, como es el caso del estudio de la dispersión, se requiere conocer el valor del campo de presiones en puntos suficientemente alejados de la fuente. Sin embargo, si el dominio es demasiado grande el coste computacional se hace inviable. Con el fin de evitar esto, comsol introduce la formulación de campo lejano que permite conocer el valor del campo de presiones en un punto lejano. La obtención de estos valores se puede hacer mediante dos procedimientos distintos:

- Evaluando la integral de Helmholtz-Kirchoff: Este método proporciona el valor de la presión a una distancia finita de la fuente, pero tiene el inconveniente de que la integral numérica tienen a ser mas inexacta a largas distancias.

-Mediante la aproximación integral a distancias que tienden a infinito: Este método evalúa la amplitud de la presión en campo lejano en una dirección determinada, sin tener en cuenta la distancia de medida.

➤ **Condiciones de contorno artificiales:** Otra de las consecuencias que se derivan de la simulación de dominios grandes o espacios abiertos es la necesidad de imponer condiciones de

contorno artificiales que permitan acotar el dominio pero sin introducir reflexiones, es decir condiciones de contorno que emulen un espacio abierto. Estas condiciones pueden ser:

- Condición de radiación: Esta condición permite que una onda que incide sobre este contorno se propague fuera del dominio sin apenas reflexiones.

-PML: Estrictamente hablando la pml no es una condición de contorno artificial sino un dominio artificial que se añade en los contornos del dominio a estudio y que absorbe las radiaciones incidente sin producir reflexiones. La formulación pml introduce una transformación de coordenadas de valores complejos para que el dominio artificial absorba las ondas acústica incidente en la dirección ξ , con la condición de que no se altere el valor de la impedancia acústica. Esta transformación está dada por

$$\xi' = \text{sign}(\xi - \xi_0) |\xi - \xi_0|^n \frac{L}{\delta \xi^n} (1 - i) \quad (172)$$

donde ξ_0 son las coordenadas de los límites interiores de la pml, $\delta \xi^n$ es el ancho real de la pml y n es el exponente de escalado. Para que la pml sea adecuada a cualquier frecuencia se introduce un factor de escalado de forma L de forma que el ancho de la pml siempre se corresponde con una (o más) longitud de onda independientemente del ancho real dibujado.

La pml se pueden representar tanto en coordenadas cartesianas (cubo), cilíndricas o esféricas, o adaptarse a cualquier transformación de coordenadas definidas por el usuario, definiendo dominios que absorban en las coordenadas correspondientes. Los dominios pml típicos se muestran en la fig.57. Como se puede apreciar, para definir correctamente la pml es necesaria segmentarla en distintos subdominios de forma que cada uno absorba la onda en la dirección apropiada.

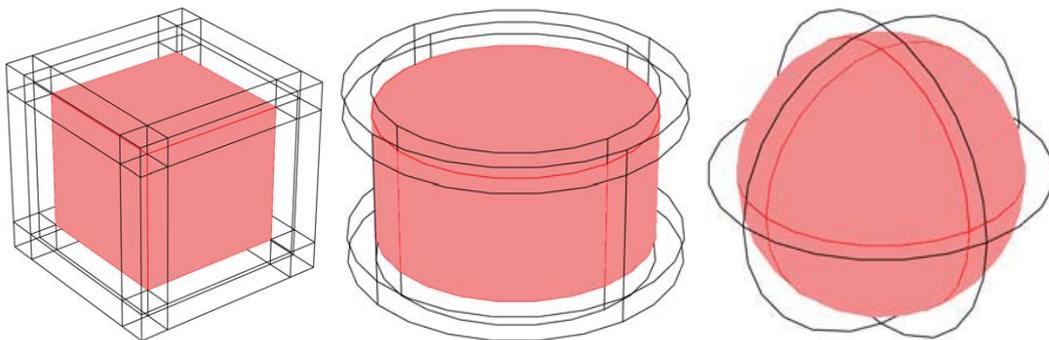


Fig. 57 Dominios habituales para la implementación de pmls

En los casos en los que se emplean pmls, se pueden poner condiciones de radiación en los contornos externos de la pml reduciendo aún más las reflexiones que pudieran ocurrir.

➤ Formulación de campo disperso: Finalmente otra de las consideraciones a tener en cuenta es que para los problemas en los que la variable de interés es la presión dispersada conviene trabajar con la formulación de campo dispersado, siendo obligatorio en el caso de usar pml en los contornos externos del dominio. La idea principal de esta formulación consiste en escribir el campo de presiones como la suma de la presión incidente más la presión dispersada. Insertando esta suma en

la ecuación que gobierna el campo de presiones totales, se obtiene una ecuación solo para la presión dispersada.

(2) *Módulo de presión acústica (análisis frecuencial)*

Este modulo resuelve la ecuación de ondas acústica, asumiendo la dependencia harmónica temporal del término fuente, es decir resuelve la ecuación de Helmholtz inhomogénea:

$$\nabla \cdot \left(-\frac{1}{\rho_0} (\nabla p - q) - \frac{\omega^2 p}{\rho_0 c_s^2} \right) = Q \quad (173)$$

donde Q es la fuente monopolo, q es la fuente dipolo, ambas opcionales, y ρ_0, c_s, ω son la densidad del medio, la velocidad del sonido y la frecuencia angular respectivamente. Con esta formulación se puede obtener la respuesta frecuencial usando el resolvidor paramétrico que permite hacer un barrido frecuencial usando una carga harmónica.

En la formulación de campo dispersado la onda incidente es por defecto es una onda plana que viaja en la dirección x , aunque esta dirección se puede variar, definiendo cualquier otra dirección.

➤ 2D axi-simétrico:

Esta ecuación puede ser adaptada para los casos en los que el problema tiene simetría de revolución, para los cuales el se emplea una geometría 2D-axisimétrica con coordenadas radial r y axial z :

$$\frac{\partial}{\partial r} \left[-\frac{r}{\rho_0} \left(\frac{\partial p}{\partial r} - q_r \right) \right] + r \frac{\partial}{\partial z} \left[-\frac{1}{\rho_0} \left(\frac{\partial p}{\partial z} - q_z \right) \right] - \left[\left(\frac{\omega^2}{c_s^2} - \left(\frac{m}{r} \right)^2 - k_z^2 \right) \right] \frac{rp}{\rho_0} = rQ \quad (174)$$

donde m es un entero denominado numero de onda circunferencial que viene de escribir la presión en forma 2D axisimétrico:

$$p(r, \phi, z) = p(r, z) e^{-im\phi} \quad (175)$$

➤ Análisis de frecuencias propias

Para el estudio de los valores propios se resuelve la ec.173 para los modos propios y para las frecuencias propias:

$$\nabla \cdot \left(-\frac{1}{\rho_0} (\nabla p - q) - \frac{\lambda^2 p}{\rho_0 c_s^2} \right) = Q \quad (176)$$

donde λ es el valor propio que relaciona la frecuencia propia con la frecuencia angular ω a través de

$$\lambda = i2\pi f = i\omega \quad (177)$$

➤ Condiciones de contorno:

El módulo de acústica permite introducir las condiciones de contorno descritas en y algunas otras:

- Condición de sonido dura o condición de Neumann: Es la condición donde la componente normal de la velocidad es cero

$$\mathbf{n} \cdot \left(\frac{1}{\rho_0} (\nabla p - q) \right) = 0 \quad (178)$$

-Condición suave o condición de Dirichlet: Es la condición que impone que la presión es nula en el contorno.

$$p = 0 \quad (179)$$

-Condición de impedancia: Es una generalización de las dos condiciones anteriores que simula un cambio de impedancia local en el contorno. Esta condición es una buena aproximación para una superficies reactante local, en la cual la velocidad normal en cada punto depende solo de la presión en dicho punto.

$$\mathbf{n} \cdot \left(\frac{1}{\rho_0} (\nabla p - q) \right) + \frac{i\omega p}{Z} = 0 \quad (180)$$

-Aceleración normal: Esta condición permite especificar una aceleración normal hacia dentro de la superficie.

$$-\mathbf{n} \cdot \left(\frac{1}{\rho_0} (\nabla p - q) \right) = 0 \quad (181)$$

-Presión: Esta condición permite especificar una presión incidente en el contorno.

$$p = p_0 \quad (182)$$

(3) Acoplamiento acústico-estructural

La interacción acústica-estructural se refiere a aquellos fenómenos físicos donde la presión del fluido actúa como carga del dominio sólido y la aceleración estructural afecta al dominio fluido como una aceleración a través del contorno entre el fluido y el sólido. Este acoplamiento se puede hacer bien acoplando manualmente el modulo estructural y el módulo acústico o usando el módulo predefinido que incorpora comsol.

En el segundo caso, para generar el modelo se debe realizar el siguiente procedimiento:

a. Se identifica el tipo de subdominio indicando si es un dominio fluido en el que se aplica el módulo de presión, o un dominio sólido, en el que se aplica el módulo estructural.

b. Se definen las condiciones de contorno:

-carga fluida: Esta condición de contorno se define en el módulo estructural, en aquellos dominios en los que hay carga fluida. Esta condición impone que la fuerza por unidad de área en el contorno es igual a la componente normal de la presión.

$$\mathbf{F}_p = -\mathbf{n}_s p \quad (183)$$

-aceleración estructural: condición de contorno se define en el módulo acústico para los contornos entre el sólido y el fluido. Esta condición impone que la aceleración normal es igual a la segunda derivada de los desplazamientos normales de la superficie:

$$a_n = \mathbf{n} \mathbf{u}_{tt} \quad (184)$$

XI. 10. PARÁMETROS DE LA SIMULACIÓN

XI. 10. a. 2D-axisimétrico

Tipo dispersor	Diámetro [mm]	Rango frecuencial [Hz]	c [m/s]	ρ [kg/m ³]	E [Pa]	ν	Elementos dispersor/agua
Rígido	84	1k:100:150k	-	-	-	-	-/10
Tungsteno	30,40,75,84	1k:100:150k	-	15022	614.5M	0.202	10/8
Poliuretano	20	100:100:200k	-	1050	5.22M	0.35	8/7
Aire	20	100:500:150k	-	1.25	3.75	0.49	8/7
Aire	20	100:500:150k	343	1.25	-	-	10/10
Suave	84/20	100:500:150k	-	-	-	-	-/10

Tabla I Parámetros de las simulaciones 2D axisimétrico.

XI. 10. b. Cilindro finito

Tipo dispersor	Ángulo [°]	Rango frecuencial [Hz]	ρ [kg/m ³]	E [Pa]	ν	Elementos dispersor/agua
Rígido	0,45,90	50k:1k:150k	-	-	-	-/6
Acero	0,30,45,60,90	50k:1k:150k	7910	190.7M	0.254	8/6

Tabla II Parámetros de simulación del cilindro finito

XI. 10. c. Esferoide elongado

Tipo dispersor	Ángulo [°]	Rango frecuencial [Hz]	ρ [kg/m ³]	E [Pa]	ν	Elementos dispersor/agua
Rígido ($a/b=4$)	0,45,90	50k:1k:100k	-	-	-	-/7
Acero ($a/b=4$)	[0:5:90]	50k:1k:100k	2700	70M	0.33	8/6

Tabla III Parámetros de simulación del cilindro finito

XI. 11. RESONANCIAS

Las frecuencias de resonancia que se muestran en las siguientes tablas han sido obtenidas a partir de los espectros resonantes, y/o bien a partir de las simulaciones, mediante la representación de los desplazamientos en la superficie de la esfera, que serán máximo a dichas frecuencias. Además se incluye los modos propios asociados obtenidos a partir de las simulaciones en régimen de análisis modal de comsol.

XI. 11. a. Esfera elástica de tungsteno

(n,l)	Resonancia a partir del espectro[kHz]	Resonancia a partir de la simulación [kHz]	Frecuencia natural de vibración [kHz]
(2,1)	41.1	41.5	41.163
(1,2)	51.8	51.8	51.859
(3,1)	60.8	60.4	60.902
(0,3)	62.9	61.8	-
(2,2)	73.8	73.8	73.894
(4,1)	77.6	77.2	77.740
(5,1)	93.4	92.9	93.490
(3,2)	100.7	100.3	100.580
(6,1)	108.7	107.8	108.799
(1,4)	119.3	119.2	119.232
(4,2)	123.5	123.6	123.542
(7,1)	123.9	124.3	123.879
(2,3)	126.5	126.7	126.526
(8,1)	138.6	139.0	138.546
(2,4)	147.9	147.7	147.883
(5,2)	148.3	148.2	148.311
(3,3)	148.7	148.9	148.680

Tabla IV Frecuencias de resonancia de la esfera de tungsteno obtenidas a partir del espectro de la fig 21. Se incluyen los modos de vibración asociados, obtenidos mediante el análisis de modos propios de consol

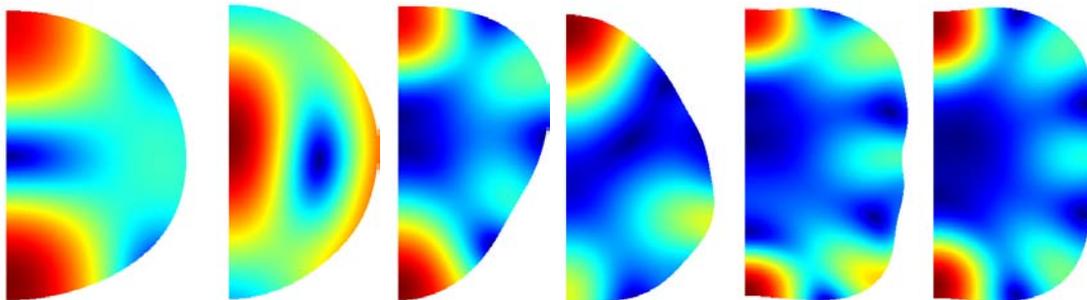


Fig. 58 Desplazamientos de la esfera en las 6 primeras frecuencias de resonancia de la tabla IV.

XI. 11. b. Esfera de poliuretano

ka	Resonancia en ff [kHz]	Frecuencia en la simulación [kHz]	Modo [kHz]
1.72	40.9	38.5/43.5	57.257
2.45	58.1	58.7	85.482
3.2	75.9	73.4/78.5	109.682
3.89	92.1	92.4	
4.61	109	107.6/111	
5.31	125.5	126.2	
6.02	142.3	141.3/144.1	
6.73	159.1	159.1	
7.44	175.9	175.9	
7.92	187.4	187.4	
8.15	192.8	192.8	

Tabla V Frecuencias de resonancia de la esfera de poliuretano obtenidas a partir de la fig 23 y de la representación en la simulación. Al no ser una esfera dura los modos de vibración no son cercanos a las frecuencias de resonancia. Como ejemplo, se muestran los tres primeros modos de la esfera de poliuretano con contornos vibrando libre.

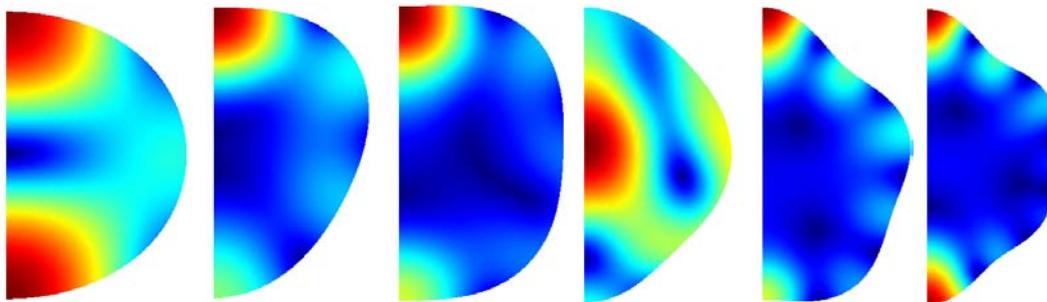


Fig. 59 Desplazamientos de la esfera en las 6 primeras frecuencias de resonancia de la tabla V.

XI. 11. c. *Esfera fluida de aire*

Frecuencia espectro [kHz]	Modo natural de vibración [kHz]
11.4	11.452
24.5	24.385
32.4	32.088
39.8	39.822
42.2	42.206
50.3	50.712

Tabla VI Frecuencias de resonancia de la esfera de tungsteno obtenidas a partir del espectro de la fig 26. Se incluyen los modos de vibración asociados, obtenidos mediante el análisis de modos propios de consol

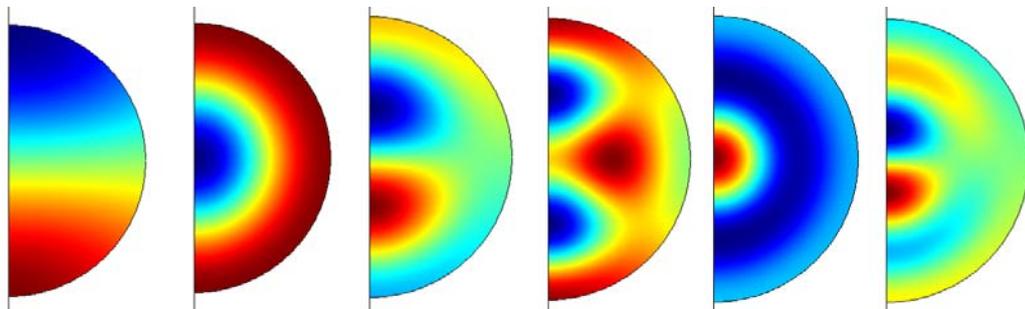


Fig. 60 Desplazamientos de la esfera en las 6 primeras frecuencias de resonancia de la tabla VI

XI. 11. d. *Cilindro elástico*

(1) *Incidencia normal*

Espectro resonante [kHz]	Resonancia en simulación [kHz]	Modo [kHz]
115	115	115.743
136	136	135.945

Tabla VII Frecuencias de resonancia del cilindro de acero en incidencia normal obtenidas a partir del espectro de la fig 33. Se incluyen los modos de vibración asociados, obtenidos mediante el análisis de modos propios de consol

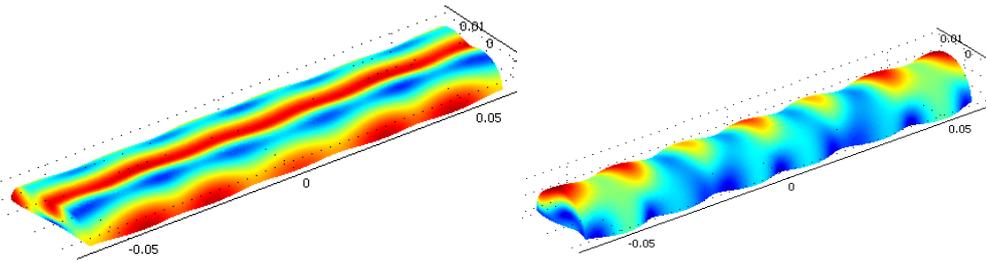


Fig. 61 Desplazamientos de la superficie del cilindro en las frecuencias de resonancia de la tabla VII

(2) *Incidencia axial*

Espectro resonante [kHz]	Resonancia en simulación [kHz]	Modo [kHz]
60	61	60.681
80	80	80.019
98	99	98.246
115	114	114.569
128	128	128.079
138	138	138.465
143	143	140.864

Tabla VIII Frecuencias de resonancia del cilindro de acero en incidencia end-on obtenidas a partir del espectro de la fig 34. Se incluyen los modos de vibración asociados, obtenidos mediante el análisis de modos propios de consol

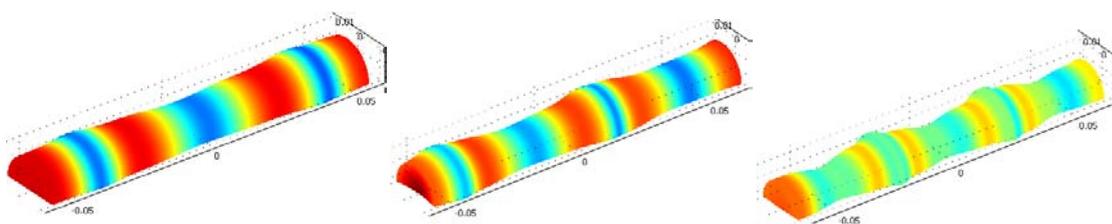


Fig. 62 Desplazamientos de la superficie del cilindro en las 3 primeras frecuencias de resonancia de la tabla VIII. Se observa que en incidencia end-on sólo se excitan modos radiales, con desplazamientos pulsantes alrededor del eje del cilindro

(3) 30°

Espectro resonante [kHz]	Resonancia en simulación [kHz]	Modo [kHz]
61	60	61.791
73	74	74.125
85	84	85.498
93	94	-
95	95	94.552
102	103	104.987
115	116	115.610
127	127	127.523
136	136	135.945
139	138	137.459
145	146	146.134

Tabla IX Frecuencias de resonancia del cilindro de acero en incidencia 30° obtenidas a partir del espectro de la fig 35.A. Se incluyen los modos de vibración asociados, obtenidos mediante el análisis de modos propios de comsol

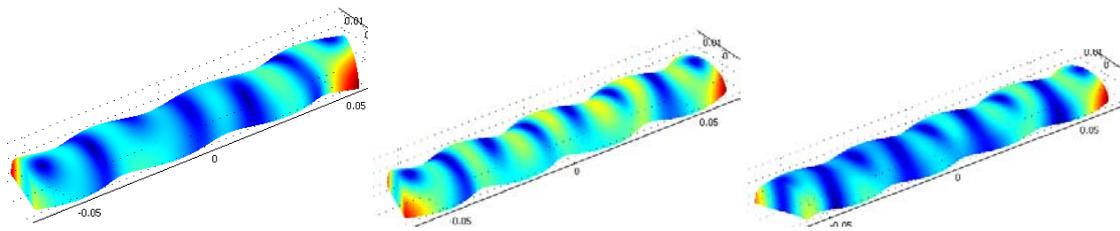


Fig. 63 Desplazamientos de la superficie del cilindro en las 3 primeras frecuencias de resonancia de la tabla IX

(4) 45°

Espectro resonante [kHz]	Resonancia en simulación [kHz]	Modo [kHz]
61	60/62	61.791
73	74	74.125
81	80	-
87	86	85.498
94	93	93.724
104	103	104.987
115	116	115.610
127	127	126.567
136	137	137.459
142	140	141.150

-	146	146.134
---	-----	---------

Tabla X Frecuencias de resonancia del cilindro de acero en incidencia 45° obtenidas a partir del espectro de la fig 35.B. Se incluyen los modos de vibración asociados, obtenidos mediante el análisis de modos propios de consol

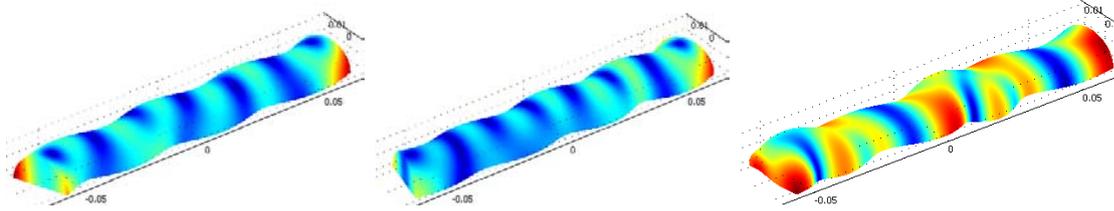


Fig. 64 Desplazamientos de la superficie del cilindro en las 3 primeras frecuencias de resonancia de la tabla X

(5) 60°

Espectro resonante [kHz]	Resonancia en simulación [kHz]	Modo [kHz]
60	60	60.681
73	73	74.125
80	80	80.019
85	86	85.498
94	94	94.552
101	102	104.987
105	105	104.986
114	116	115.611
128	127	127.523
136	136	135.945
142	146	146.134

Tabla XI Frecuencias de resonancia del cilindro de acero en incidencia 60° obtenidas a partir del espectro de la fig 35.C. Se incluyen los modos de vibración asociados, obtenidos mediante el análisis de modos propios de consol

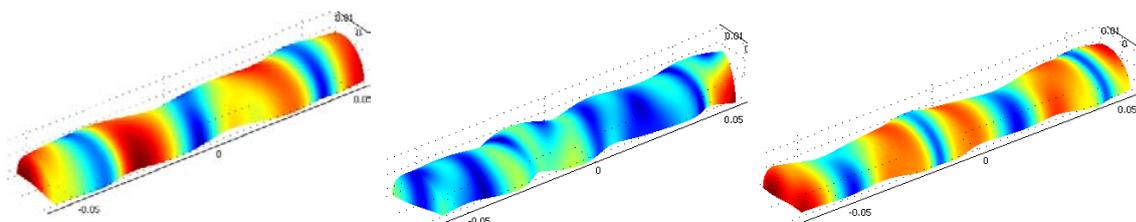


Fig. 65 Desplazamientos de la superficie del cilindro en las 3 primeras frecuencias de resonancia de la tabla XI

XI. 11. e. Esferoide elongado

Incidencia $\theta = 0^\circ$		Incidencia $\theta = 45^\circ$		Incidencia $\theta = 90^\circ$	
f_r [kHz]	Modo [kHz]	f_r [kHz]	Modo [kHz]	f_r [kHz]	Modo [kHz]
67	67.381	50	49.056		
78	78.797	61	62.014		
82	81.685	87	88.009		
99	-				

TablaXII Frecuencias de resonancia del esferoide de aluminio en incidencia $0^\circ, 45^\circ, 90^\circ$ obtenidas a partir del de la simulación. Se incluyen los modos de vibración asociados, obtenidos mediante el análisis de modos propios de comsol.

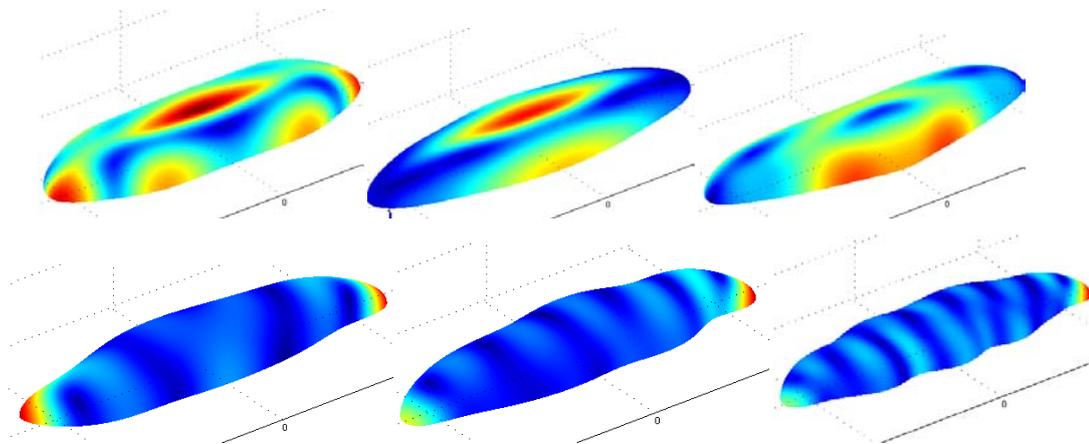


Fig. 66 Desplazamientos de la superficie del cilindro en las 3 primeras frecuencias de resonancia de la tabla XII para incidencia 0° (superior) y 45° (inferior)

XI. 12. OBTENCIÓN DE LA FASE

El procesamiento de las señales de ecos medidos y calculados mediante métodos modales se efectúa en Matlab, por lo que los resultados obtenidos en Comsol han sido exportados también a Matlab a través de la variable FEMdata que contienen el eje de frecuencias, así como las partes real y compleja de la presión calculada en campo lejano, o 'pFEM'. El 'target strength' TS es calculado a partir de esta presión, como se muestra en el extracto de Matlab presentado a continuación.

```

FrequencyAxisFEM = FEMData(:,1);
pFEM              = FEMData(:,2) + 1i*FEMData(:,3);
TSFEM             = 20*log10(abs(pFEM));
    
```

Para eliminar la información de fase correspondiente a la distancia, el cálculo de la fase se obtiene como la diferencia entre dos componentes de frecuencia, separados por un factor fijo denominado μ . El algoritmo identifica dos componentes de presión p_{f1} y p_{f2} , correspondientes a dos frecuencias

f_1 y f_2 de tal manera que $f_2 = \mu f_1$. En términos prácticos, dado que el rango de frecuencias disponibles no siempre está completo u ordenado, se adopta un método de búsqueda generalizable., a partir de un bucle for que recorre los datos totales disponibles, construyendo los componentes inferior y superior, así como el eje restringido de frecuencias

```
in = 0;

for(index=1:length(FrequencyAxisFEM))

    temporal = index;

    for(n=temporal:length(FrequencyAxisFEM))

        if(mu*FrequencyAxisFEM(index)==FrequencyAxisFEM(n))

            in = in + 1;

            pf1FEM(in) = pFEM(index);

            pf2FEM(in) = pFEM(n);

            PhaseFrequencyFEM(in) = FrequencyAxisFEM(index);

        end

    end

end
```

A continuación la componente de baja frecuencia es elevada a la misma frecuencia que la de alta frecuencia y se calcula el conjugado de p_2 que se multiplica por p_1 . Finalmente, el ángulo resultante se calcula, eliminando μ y la fase acumulada por la rotación fasorial, esto es, ejecutando un proceso de ‘unwrapping.’ La sección relevante de Matlab se presenta a continuación.

```
Pscale = pf1FEM.^mu;

P2conj = conj(pf2FEM);

Pmult = Pscale.*P2conj;

TargetPhaseDualFreq = (angle(Pmult)/(mu-1));
```

```
TargetPhaseFEM = (180/pi)*unwrap(TargetPhaseDualFreq);
```

La descripción anterior esta proporcionada principalmente desde un punto de vista de implementación. Un desarrollo matemático más detallado puede encontrarse en las referencias [14] y [19]. En general, el método de diferencias de fase entre componentes espectrales permite la visualización de la fase en función de la frecuencia, sin que la distancia entre receptor y objetivo sea un factor. Recientemente, esto ha sido utilizado para extender la calibración de sistemas de sonar por medio del método de objetivos estándar [19]

XII. BIBLIOGRAFIA ANEXOS

- 31 Fallon. P, “*Theory and Computation of Spheroidal Harmonics with General Arguments*”, Thesis. University of Western, Australia
- 32 Foote, K.G., Knudsen, H.P., Vestnes, G., et al. “*Calibration of acoustic instruments for fish density estimation: A practical guide*”. Coop. Res. Rep. Const. Int. Explor. Mer.- 1997. 144: 69.
- 33 Dietzen G. “*Acoustic Scattering from sand dollars: Modeling as high aspect ratio oblate objects and comparison to experiment.*” Thesis. Universidad de Massachusetts
- 34 Flax L. “*Scattering of an obliquely incident acoustic wave by an infinite cylinder*”. J. Acoust. Soc. Am.-1980.68: 6
- 35 Conoir J. et all “*Relation between surface helical waves and elastic resonances*” J. Acoust. Soc. Am.-1993.93: 3
- 36 Stanton T.K. “*Sound scattering by cylinders of finite length. II. Elastic cylinders*” J. Acoust.Soc. Am.-1988.83:1
- 37 Silgiber A. “*Scattering of Sound by an Elastic Prolate Spheroid*” J. Acoust.Soc. Am.-1963.35:4
- 38 P. M. Morse, “*Vibration and Sound*” McGraw-Hill Book Co., 1948
- 39 Stanton T.K. “*Sound scattering by cylinders of finite length. I. Fluid cylinders*” J. Acoust.Soc. Am.-1988.83:1
- 40 V. Varadan et all “*Computation of rigid body scattering by prolate spheroids using the T-matrix approach*” . J. Acoust.Soc. Am.-1982.71:1
- 41 V. Varadan et all. “*Analysis and computation of the acoustic scattering by an elastic prolate spheroid obtained from the T-matrix formulation*” J. Acoust.Soc. Am.-1982.71:5
- 42 Waag. C “*A review of tissue characterization from ultrasonic scattering*” IEEE transactions on biomedical engineering.-1984. 31:12
- 43 Insana M. et all “*Describing small-scale structure in random media using pulse-echo ultrasound*” J. Acoust.Soc. Am.-1990.87:1