

## Cálculo geométrico del límite de sucesiones trigonométricas

**Juan Carlos Cortés López**  
**Juan Ángel Aledo Sánchez**

**E**L ESTUDIO de las sucesiones y el cálculo de su límite, cuando existe, constituye un aspecto importante en las programaciones de Matemáticas de los nuevos bachilleratos Logse, así como de cualquier primer curso universitario de carácter científico-técnico. Sin embargo, en todos estos niveles educativos este tema se aborda desde un enfoque exclusivamente algebraico-analítico. En este trabajo proponemos aprovechar la interpretación geométrica que muchas situaciones matemáticas nos brindan para calcular límites de sucesiones trigonométricas. Hemos tratado de aportar un ejemplo de cada una de las distintas formas en que usualmente se nos da una sucesión: mediante una fórmula explícita o mediante una expresión recurrente. Como las funciones equivalentes tienen especial importancia en el cálculo de límites trigonométricos, también daremos un ejemplo de la deducción geométrica de este tipo de límites. Asimismo, a través de un sencillo ejemplo pondremos de manifiesto el «peligro» que acarrea manejar «alegremente» razonamientos geométricos para deducir el valor del límite de una sucesión, pues veremos que nos pueden conducir a paradojas.

Con estas líneas pretendemos proponer una metodología de trabajo para llevarla a la práctica en el aula para iniciar –y más tarde profundizar– en el tema de límites. Matemos que aunque con ello no defendemos el abandono posterior de las potentes técnicas algebraico-analíticas, es interesante observar que este enfoque geométrico, además de proporcionar una aproximación más intuitiva al concepto de límite, nos permite establecer una conexión natural entre dos partes de la Matemática que usualmente presentamos a nuestros alumnos de un modo disconexo: el Análisis y la Geometría. Además esta línea metodológica invita –y así lo mostraremos en ejemplos posteriores– a que los alumnos discutan el significado de demostración y conjetura, o analicen el porqué de una paradoja. Al mismo

En la actualidad el cálculo del límite de una sucesión, tanto en bachillerato como en los primeros cursos universitarios se viene realizando desde un enfoque exclusivamente analítico-algebraico. En este artículo proponemos un rico enfoque geométrico para iniciar este tema en el aula, particularizando nuestra propuesta a las sucesiones trigonométricas.

tiempo este enfoque permite recuperar razonamientos geométricos de escuelas matemáticas clásicas, como la griega, e introducir de este modo en el aula esa bella pero olvidada parte de la Matemática: su Historia.

## Funciones equivalentes

En esta sección obtendremos geoméricamente la equivalencia de las funciones  $\text{sen } x$  y  $x$  alrededor del origen, esto es:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\text{sen } x}{x} = 1 \quad [1]$$

Para ello recordemos que la construcción de un polígono regular de  $n$  lados,  $P_n$  (o equivalentemente la división de una circunferencia en  $n$  partes iguales), se estudia en Dibujo Técnico desde dos puntos de vista distintos (Rodríguez de Abajo, 1995):

1. Fijado el radio de la circunferencia donde está inscrito  $P_n$ , calcular el lado del polígono.
2. Fijado el lado de  $P_n$ , determinar el radio de la circunferencia en que está inscrito el polígono.

Mediante el primer enfoque y aceptando la siguiente intuición geométrica: al aumentar el número  $n$  de lados de  $P_n$  la longitud del lado tenderá a cero o lo que es igual, al aumentar  $n$  el perímetro de  $P_n$  se aproximará a la longitud de la circunferencia en la que está inscrito, Arquímedes de Siracusa (287-212 a. de C.) encontró tomando  $n = 96$  que

$$\pi \approx 3 + \frac{1}{7} = 3,14$$

(Boyer, 1987). En Cortés (1999) se aprovecha este enfoque clásico para deducir geoméricamente los infinitésimos equivalentes:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\text{sen } x}{x} = 1 = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\text{tg } x}{x}$$

A continuación usaremos el segundo enfoque para establecer de otra forma [1]. Para ello supondremos fijada la longitud  $L$  del lado de  $P_n$  (ver figura 1) y deseamos para cada  $n$  calcular el radio  $R_n$  de la circunferencia en que  $P_n$  está inscrito. Usando trigonometría es sencillo probar

$$L = 2R_n \text{sen } \frac{\pi}{n}$$

por tanto:

$$R_n = \frac{L}{2 \text{sen } \frac{\pi}{n}} \quad [3]$$

Denotaremos por:

- $\alpha_n = 2\pi/n$  el ángulo central de  $P_n$ .
- $L_n$  longitud del arco de circunferencia de radio  $R_n$  (que abarca el ángulo  $\alpha_n$ ) en que está inscrito el polígono regular de  $n$  lados de longitud  $L$ .

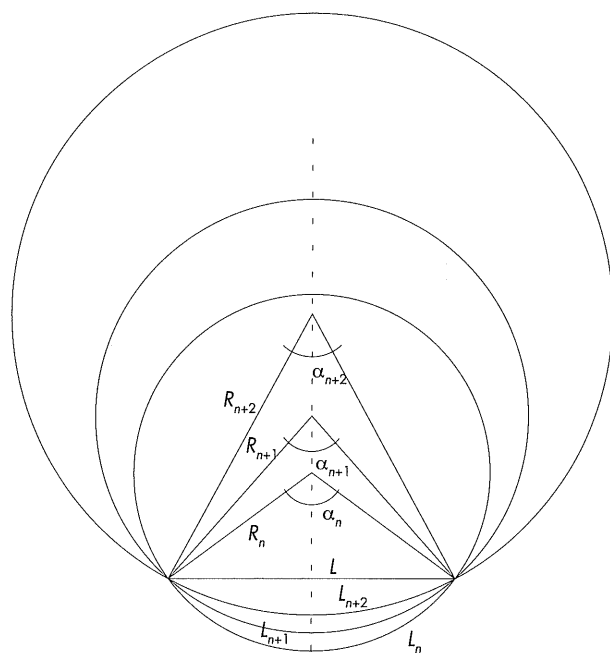


Figura 1. Construcción de un polígono regular fijado el lado

Como  $L_n$  es la  $n$ ésima parte de una circunferencia de radio  $R_n$  se tiene:

$$L_n = \frac{2\pi R_n}{n} \quad [3]$$

Ahora aceptaremos la siguiente intuición geométrica, deducida de la figura 1:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} L_n = L$$

por lo que usando [3] y [2]:

$$L = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2\pi R_n}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2\pi}{n} \cdot \frac{L}{2 \text{sen } \frac{\pi}{n}} = L \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\pi}{n} \cdot \frac{1}{\text{sen } \frac{\pi}{n}}$$

luego:

$$1 = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{\pi}{n}}{\text{sen } \frac{\pi}{n}}$$

haciendo el cambio de variable  $x = \pi/n$  se tiene:

$$1 = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\text{sen } x} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\text{sen } x}{x} = 1$$

Es importante observar, (al igual que en Cortés, 1999) que este razonamiento no constituye una demostración de [1], ya que, lo que en realidad hemos hecho (y a lo máximo que podemos aspirar con un razonamiento geométrico), es encontrar una sucesión  $\{x_n\} = \{\pi/n\}$  tal que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$$

y

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = 1$$

siendo

$$f(x) = \frac{\operatorname{sen} x}{x}$$

Obsérvese que el razonamiento geométrico sería una demostración rigurosa de [1] si pudiésemos probar geoméricamente que dicho límite existe, pero haciendo uso de la intuición geométrica no sólo no es posible afirmar esto, sino que además este tipo de argumentos basados en la intuición puede conducirnos a conclusiones erróneas. Este es un buen momento para introducir en el aula la aparición de paradojas matemáticas cuando se usan alegremente razonamientos geométricos. En efecto, en la deducción anterior hemos utilizado la convergencia geométrica de los arcos de circunferencia  $\{L_n\}_{n \geq 3}$  al segmento  $L$ . Sin embargo, veamos como un razonamiento geométrico similar nos puede conducir a la contradicción  $\pi = 2$ .

Partimos de una circunferencia  $C$  de radio  $R$  (ver figura 2), cuya longitud es  $2\pi R$ . Denotaremos por  $\overline{AB}$  su diámetro, luego  $\overline{AB} = 2R$ . Tomaremos primero la semicircunferencia superior  $C_0$  cuya longitud es  $\operatorname{Long}(C_0) = \pi R$ . Tal y como se muestra en la figura 2 trazamos sobre el segmento  $AB$  una curva  $C_1$  formada por dos semicircunferencias de radio la mitad que el de  $C_0$ . La longitud de la

*Este tipo de situaciones paradójicas pueden presentarse cuando trabajamos en el aula el cálculo de límites desde esta propuesta geométrica.*

curva  $C_1$  es  $\operatorname{Long}(C_1) = 2\pi R/2 = \pi R$ . Volvemos a trazar sobre  $AB$  cuatro semicircunferencias que definen  $C_2$  cuya longitud es  $\operatorname{Long}(C_2) = 2(2\pi R/4) = \pi R$ . Análogamente en el paso  $n$  de este razonamiento se tiene  $\operatorname{Long}(C_n) = \pi R$ . Tomamos límites en la última expresión:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \operatorname{Long}(C_n) = \pi R \quad [4]$$

pero geoméricamente la intuición nos dice que la curva  $C_n$  se aproxima tanto como deseemos al segmento  $AB$  (ver figura 2), por lo que sus longitudes coincidirán en el límite:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \operatorname{Long}(C_n) = \operatorname{Long}\left(\lim_{n \rightarrow \infty} C_n\right) = \operatorname{Long}(AB) = 2R \quad [5]$$

por tanto de [4] y [5] se deduce  $\pi = 2$ . ¿Dónde está el error de este razonamiento geométrico? Este tipo de situaciones paradójicas pueden presentarse cuando trabajamos en el aula el cálculo de límites desde esta propuesta geométrica. Lejos de ser esto un inconveniente de esta metodología, cuando esto suceda tendremos la oportunidad de introducir de un modo natural en la clase el atractivo tema de las paradojas y falacias en Matemáticas.

## Sucesiones dadas en forma explícita

Todavía es posible explotar más, desde este enfoque geométrico, la figura 1. En efecto, recordemos que el área de la porción de círculo de radio  $R$  determinada entre la circunferencia y una cuerda  $AB$  cuyo ángulo central es  $\varphi$  es

$$A(\varphi, R) = \frac{1}{2} R^2 (\varphi - \operatorname{sen} \varphi)$$

Geoméricamente podemos afirmar que el área de los trozos de círculo de radio  $R_n$  definidos entre la circunferencia y la cuerda de longitud  $L_n$ , cuyo ángulo central es  $\alpha_n = 2\pi/n$ , tienden a cero. Luego con ello deducimos el límite en el infinito de la sucesión trigonométrica cuyo término general es

$$\left\{ A(\alpha_n, R_n) \right\} = \left\{ \frac{1}{2} R_n^2 \left[ \frac{2\pi}{n} - \operatorname{sen} \frac{2\pi}{n} \right] \right\}$$

esto es usando [2]:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2} \cdot \frac{L^2}{4 \operatorname{sen}^2 \frac{\pi}{n}} \cdot \left[ \frac{2\pi}{n} - \operatorname{sen} \frac{2\pi}{n} \right] = 0$$

Geoméricamente acabamos de probar:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{2\pi}{n} - \operatorname{sen} \frac{2\pi}{n}}{\operatorname{sen}^2 \frac{\pi}{n}} = 0$$

Nótese que la resolución de la indeterminación  $\{0/0\}$  que aparece en el límite anterior mediante técnicas analíticas clásicas requiere que el alumno conozca la regla de L'Hôpital.

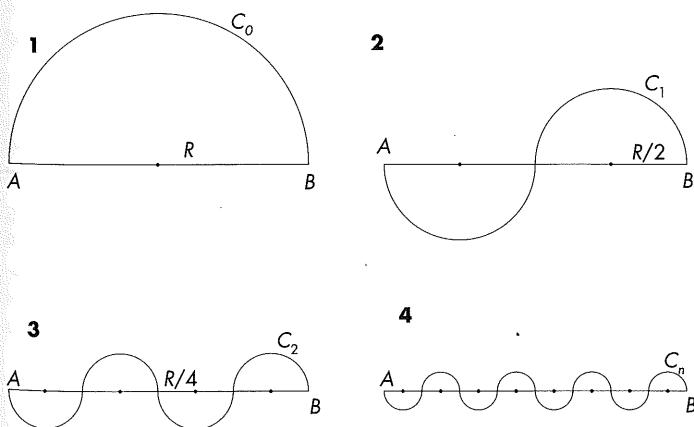


Figura 2. Una paradoja geométrica

## Sucesiones dadas en forma recurrente

En este apartado aprovecharemos el significado geométrico de la bisección (usado para construir un polígono regular de  $2n$  lados a partir de un polígono regular de  $n$  lados) para calcular límites de ciertas sucesiones recurrentes, por una vía diferente a la habitual. En particular abordaremos la sucesión:

$$\sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \dots}}} \quad [6]$$

la cual puede definirse recurrentemente como:

$$x_1 = \sqrt{2}, \quad x_{n+1} = \sqrt{2 + x_n} \quad n \geq 1, \quad [7]$$

En Rivaud (1975) puede encontrarse el cálculo de su límite. Brevemente, para ello se demuestra que dicha sucesión es convergente, probando previamente que es monótona creciente y acotada superiormente; finalmente llamando

$$L = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n$$

tomando límites en la fórmula recurrente [7] y teniendo en cuenta que

$$L = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} x_{n+1}$$

se llega a la ecuación algebraica:  $L^2 = 2 + L$  cuyas soluciones son  $L = -1$  y  $L = 2$ . Obviamente como se trata de una sucesión de términos positivos,  $L = 2$  es el límite buscado.

Nuestro objetivo es calcular el límite de la sucesión [7] usando la interpretación geométrica del método de bisección. Para ello, necesitamos establecer previamente la relación entre la longitud del lado del polígono regular de  $n$  lados y la longitud del lado del polígono regular de  $2n$  lados construido a partir del anterior por bisección de sus lados. Para simplificar trabajaremos con la circunferencia goniométrica, esto es, de radio unidad.

Es sencillo probar:

$$L_{2n} = \sqrt{2 - \sqrt{4 - L_n^2}}$$

ya que, aplicando el teorema de Pitágoras a los triángulos  $CDB$  y  $ODB$  del la figura 3, obtenemos respectivamente:

$$L_{2n} = \sqrt{\frac{1}{4} L_n^2 + \overline{CD}^2}, \quad \overline{OD} = \sqrt{1 - \frac{1}{4} L_n^2}$$

y como  $\overline{CD} = 1 - \overline{OD}$  se tiene:

$$L_{2n} = \sqrt{\frac{1}{4} L_n^2 + \left(1 - \sqrt{1 - \frac{1}{4} L_n^2}\right)^2} = \sqrt{2 - \sqrt{4 - L_n^2}} \quad n \geq 3 \quad [8]$$

Así, supongamos que sobre la circunferencia goniométrica construimos –de un modo exacto– el cuadrado, cuyo lado es

$$L_4 = \sqrt{2}$$

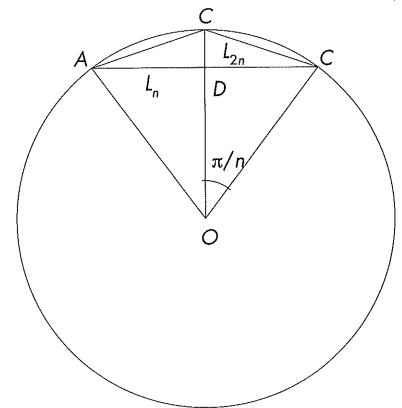


Figura 3. Construcción de un polígono por el método de bisección

...aprovecharemos el significado geométrico de la bisección para calcular límites de ciertas sucesiones recurrentes, por una vía diferente a la habitual.

y a partir de él, construimos por bisección los polígonos de 8, 16, 32, ...,  $2^n$ , ... lados. Haciendo uso de la interpretación geométrica podemos asegurar que:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} L_{2^n} = 0$$

pero por otra parte como

$$L_4 = \sqrt{2}$$

usando [8], la sucesión:

$$L_8 = \sqrt{2 - \sqrt{4 - (\sqrt{2})^2}} = \sqrt{2 - \sqrt{2}}$$

$$L_{16} = \sqrt{2 - \sqrt{4 - (\sqrt{2 - \sqrt{2}})^2}} = \sqrt{2 - \sqrt{2 + \sqrt{2}}}$$

$$L_{32} = \sqrt{2 - \sqrt{4 - (\sqrt{2 - \sqrt{2 + \sqrt{2}}})^2}} = \sqrt{2 - \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2}}}}$$

... ..

tiene como límite:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} L_{2^n} = \sqrt{2 - \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \dots}}}} = 0$$

De donde resulta inmediatamente:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \dots}}} = 2$$

Además, obsérvese que mediante este razonamiento no sólo calculamos el límite directamente, sin probar previamente su existencia, sino que por la construcción geométrica se deduce claramente que la sucesión  $\{y_n\}_{n \geq 0}$ :

$$y_n = \sqrt{2 - x_n}, \quad \forall n \geq 0$$

donde

$$x_n = \sqrt{2 + x_{n-1}}, \quad \forall n \geq 1$$

siendo

$$x_0 = \sqrt{2}$$

es estrictamente decreciente (por representar la longitud del lado del polígono regular construido por bisección) y además la sucesión  $\{y_n\}_{n \geq 0}$  está acotada inferiormente por cero (ya que, la longitud es una cantidad positiva); esto nos permite asegurar que la sucesión  $\{x_n\}_{n \geq 0}$  es monótona creciente y está acotada superiormente por 2, como pretendíamos probar.

Repetiendo el razonamiento partiendo ahora del triángulo equilátero inscrito en la circunferencia goniométrica, y teniendo en cuenta que

$$L_3 = \sqrt{3}$$

la sucesión de las longitudes de los lados de los polígonos regulares construidos por bisección a partir del triángulo viene dada por:

$$L_6 = \sqrt{2 - \sqrt{4 - (\sqrt{3})^2}} = 1$$

$$L_{12} = \sqrt{2 - \sqrt{4 - (1)^2}} = \sqrt{2 - \sqrt{3}}$$

$$L_{24} = \sqrt{2 - \sqrt{4 - (\sqrt{2 - \sqrt{3}})^2}} = \sqrt{2 - \sqrt{2 + \sqrt{3}}}$$

$$L_{48} = \sqrt{2 - \sqrt{4 - (\sqrt{2 - \sqrt{2 + \sqrt{3}}})^2}} = \sqrt{2 - \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{3}}}}$$

... ..

Al igual que en el caso anterior, y apoyándonos en la interpretación geométrica podemos asegurar que:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} L_{3 \cdot 2^n} = 0$$

Así pues, razonando como antes a partir de la sucesión  $\{t_n\}_{n \geq 0}$  definida por:

$$t_n = \sqrt{2 - z_n} \quad \forall n \geq 0$$

donde

$$z_n = \sqrt{2 + z_{n-1}} \quad \forall n \geq 1$$

siendo

$$z_0 = \sqrt{3}$$

se tiene que  $\{z_n\}_{n \geq 0}$  es creciente y acotada superiormente por 2 y además:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = 2$$

que coincide con el anterior a pesar de que variamos la condición inicial.

*...este enfoque geométrico puede ser también explotado para estudiar cualquier otra familia de sucesiones, como pueden ser por ejemplo las irracionales.*

Y, en general, partiendo del polígono regular de  $k$  lados que nos proporciona la condición inicial

$$\alpha_0 = L_k = 2 \operatorname{sen} \frac{\pi}{k}$$

se tiene:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n = 2$$

siendo:

$$\alpha_n = \sqrt{2 + \alpha_{n-1}} \quad \forall n \geq 1 \quad \alpha_0 = 2 \operatorname{sen} \frac{\pi}{k} \quad \forall k \geq 3$$

y de nuevo vemos, geoméricamente, que el límite no depende de la condición inicial.

Para terminar aprovecharemos este enfoque geométrico para calcular excelentes aproximaciones al número  $\pi$ . En efecto, si  $L(P_{2n})$  denota el perímetro del polígono regular de  $2n$  lados, como la sucesión de longitudes se aproxima más y más a la longitud de la circunferencia goniométrica, que es  $2\pi$ , en la cual están inscritos, se tiene, usando que la longitud  $L_n$  del lado de un polígono regular de  $n$  lados es:

$$2\pi = \lim_{n \rightarrow \infty} L(P_{2n}):$$

$$\begin{aligned} 2\pi &= \lim_{n \rightarrow \infty} L(P_{2n}) = \lim_{n \rightarrow \infty} 2n \sqrt{2 - \sqrt{4 - \left(2 \operatorname{sen} \frac{\pi}{n}\right)^2}} = \lim_{n \rightarrow \infty} 2n \sqrt{2 - 2 \cos \frac{\pi}{n}} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} 2\sqrt{2} n \sqrt{1 - \cos \frac{\pi}{n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} 4n \operatorname{sen} \frac{\pi}{2n} \end{aligned}$$

esto es:

$$\pi = \lim_{n \rightarrow \infty} 2n \operatorname{sen} \frac{\pi}{2n}$$

así, para  $n = 1.000$  obtenemos la siguiente aproximación de  $\pi$ :  $\pi = 3,1415914$  que proporciona cinco cifras decimales exactas.

## Sucesiones irracionales

Aunque hemos dedicado el trabajo al estudio de sucesiones de tipo trigonométrico, nos gustaría terminar este artículo señalando que este enfoque geométrico que proponemos puede ser también explotado para estudiar cualquier otra familia de sucesiones, como pueden ser por ejemplo las irracionales. Para comprender mejor esta idea resolveremos geoméricamente la indeterminación  $(\infty - \infty)$  que aparece al evaluar el límite en el infinito de la sucesión irracional

$$\left\{ \sqrt{n+1} - \sqrt{n} \right\}$$

Para ello aprovechamos una interpretación geométrica sobre la espiral pitagórica de la figura 4 (formada por

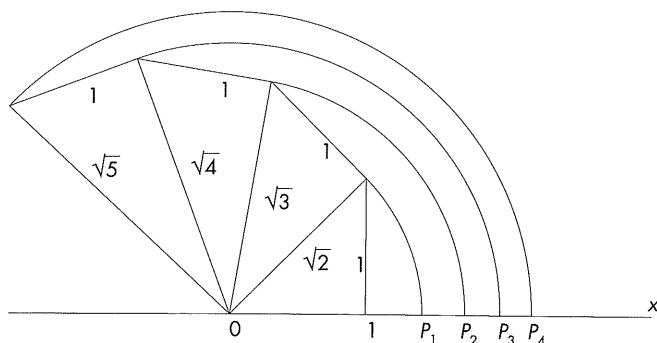


Figura 4. Cálculo geométrico del límite de una sucesión irracional

triángulos rectángulos). En efecto obsérvese sobre el eje  $X$  que las hipotenusas de estos triángulos son los radios

$$\overline{OP_n} = \sqrt{n+1}$$

de las circunferencias de centro  $O$  y una representación detallada nos indica geoméricamente que las longitudes

$$\overline{P_n P_{n+1}} = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$$

tienen a cero cuando  $n \rightarrow \infty$ , por lo que:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) = 0$$

tal y como puede comprobarse analíticamente:

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(\sqrt{n+1} - \sqrt{n})(\sqrt{n+1} + \sqrt{n})}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} = 0 \end{aligned}$$

**Juan Carlos Cortés**  
IES Bonifacio Sotos  
Casas Ibáñez (Albacete)  
Sociedad Castellano-Manchega  
de Profesores de Matemáticas

**Juan Ángel Aledo**  
Escuela Politécnica Superior  
Universidad de Castilla-La Mancha (Albacete)  
Sociedad Castellano-Manchega  
de Profesores de Matemáticas

## Bibliografía

- BOYER, C. B. (1987): *Historia de la Matemática*, Alianza Universidad Textos, Madrid.
- CORTÉS LÓPEZ, J. C. y G. CALBO SANJUÁN: «Infinitésimos desde los polígonos regulares», aparecerá en la revista *Epsilon*.
- RIVAUD, J. (1975): *Ejercicios de Análisis. Tomo I*, Aguilar, Madrid.
- RODRÍGUEZ DE ABAJO, F. J. y V. ÁLVAREZ BENGEOA (1995): *Dibujo Técnico*, Ed. Donostiarra, San Sebastián.

# SUMA

## SUSCRIPCIONES

Particulares: 3.500 pts. (3 números)  
Centros: 5.000 pts. (3 números)  
Número suelto: 1.700 pts.

### Revista SUMA

ICE Universidad de Zaragoza. c/ Pedro Cerbuna, 12. 50009 ZARAGOZA  
Fax: 976 76 13 45.  
E-mail: suma@public.ibercaja.es

*Se ruega a los suscriptores y a los socios de la Federación que para cualquier comunicación sobre envío de ejemplares atrasados, reclamaciones, suscripciones... se haga por correo, fax o mail. No se podrán atender este tipo de comunicaciones por teléfono.*