SUMA 45
Febrero 2004, pp.35-40

Viaje a la teoría analítica de números desde un problema elemental

El trabajo que presentamos es una experiencia desarrollada por los autores y que consiste en trabajar a diferentes niveles (Secundaria, Bachillerato y Universidad) los conceptos que, de forma natural, aparecen al utilizar la generalización como estrategia de resolución de problemas. Con esta estrategia y resolviendo problemas de los libros de texto de Bachillerato, se estudian algunas propiedades de la Teoría de Números. Esta experiencia permite, además, realizar un trabajo interdisciplinar física-matemáticas.

This essay accounts for a practical experience carried out by its authors at different levels (Secondary, both Compulsory and Non-Compulsory, and University studies) and consists of dealing with concepts which show up naturally when generalization is used as the approach to problem solving. Some of the properties of the Number Theory are here researched through this approach as well as through solving problems in Non-Compulsory Secondary Education textbooks. Besides, this experience allows for physics and mathematics cross-curricular work.

Hay diferentes formas de presentar la Matemática tanto a nivel docente como de investigación. Sin duda, la presentación rigurosa y formal de los resultados (hasta de los más fecundos) suele resultar poco agradable a ojos de los estudiantes (incluidos los más aventajados), e incluso el matemático profesional agradece la exposición de la motivación que hay siempre detrás, subyaciendo a cada resultado abstracto. Así por ejemplo, al introducir en el aula la función logarítmica, tenemos dos opciones: a partir de su definición como función inversa de la función exponencial, o bien introducirla de forma natural a partir de un problema motivador, como puede ser el ejemplo histórico desde el cual surge la misma (Boyer, pág. 396).

Muy buenos ejemplos en este sentido se encuentran a partir de la generalización de problemas sencillos. En efecto, en numerosas ocasiones, la generalización de un problema elemental conduce a estudiar problemas de naturaleza compleja que se adentran en terrenos propios de la matemática superior como la Teoría Analítica de Números, la Teoría de Juegos… Esta forma de actuar permite trabajar, en todos los niveles educativos, una de las estrategias más importantes que se enseñan en la *Resolución de problemas*: llegar a la generalización a partir de casos particulares.

Las páginas que siguen de este trabajo presentarán la generalización de un problema, que resultará familiar en su plan-teamiento básico a aquellos lectores que desarrollan su trabajo como profesores de matemáticas en Bachillerato. Este artículo pretende:

1. Potenciar una parte del quehacer matemático a nivel docente consistente en desarrollar los programas de matemáticas a partir de problemas que motiven los aspectos teóricos que se introducen.

2. Proponer un problema que puede ser tratado y aprovechado en distintos niveles educativos: en el instituto para estudiar las implicaciones físicas que puede tener el carácter irracional de un número y a nivel universitario para estudiar el carácter irracional de ciertos valores de la función trigonométrica coseno. En este último caso, se invita al lector a consultar el magnífico libro (Cilleruelo-Córdoba) donde en el teorema 6.11 de la página 123 se caracterizan los valores irracionales de la función $tan(\pi x/4)$, un problema parecido, pero en absoluto equivalente, al que trataremos nosotros.

Juan Carlos Cortés López
Universidad Politécnica de Valencia.
Gema Calbo Sanjuán
IES Els Évols, L'Alcúdia, Valencia.

Planteamiento y reslución del problema original.

El enunciado original del problema es:

Dos móviles A *y* ***B*** *parten al mismo tiempo de un vértice (en la figura 1, el vértice es el 1) de un cuadrado de lado l con velocidad constante e idéntica. El móvil* A *recorre el perímetro del cuadrado (en sentido antihorario en la figura 1), mientras que el móvil B realiza el trayecto por la diagonal. ¿En qué instante de tiempo coincidirán ambos móviles?*

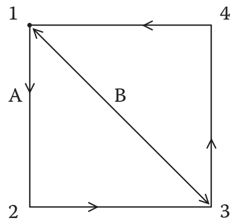

Figura 1. Problema original: movimiento sobre un cuadrado

Está claro que, de encontrarse los móviles lo harán en los vértices 1 o 3, y al partir del origen en el mismo instante y con la misma velocidad constante, la condición de encuentro es que coincidan sus espacios recorridos. Las distancias recorridas por el móvil *A* en sus diferentes pasos por el vértice 3 siguen la progresión aritmética de primer término *2l* y diferencia *4l*: {*2l, 6l, 10l, 14l...*}; mientras que las distancias recorridas por el móvil *B* en sus diferentes pasos por el vértice número 3 siguen la progresión aritmética de primer témino $\sqrt{2}l$ y diferencia $2\sqrt{2}l:\left\{\sqrt{2}l, 3\sqrt{2}l, 5\sqrt{2}l, 7\sqrt{2}l, \ldots\right\}$, por lo que habrá encuentro en el vértice 3 si estas dos sucesiones tienen algún término en común, es decir, si:

$$\exists m,n \in IN \cup \{0\} : (2+4m)l = (1+2n)\sqrt{2}l \Leftrightarrow \sqrt{2} = \frac{2+4m}{1+2n} \quad (1)$$

La irracionalidad del número $\sqrt{2}$ nos indica que esta condición no puede darse, y por lo tanto los móviles nunca podrán encontrarse en el vértice 3.

Razonándo del mismo modo se llega a que la condición de encuentro en el vértice 1 es:

$$\exists m,n \in IN \cup \{0\} : (4m)l = (2n)\sqrt{2}l \Leftrightarrow \sqrt{2} = \frac{2m}{n} \quad (2)$$

Por el mismo argumento que antes, tampoco en este caso podrán encontrarse los móviles.

Camino de la generalización

Proponemos ahora generalizar este sencillo problema. Para ello tenemos distintas opciones. Caminar hacia una generalización matemática de sabor geométrico, en el siguiente sentido: estudiar el problema con otros polígonos regulares, continuando este análisis con el pentágono, hexágono… o realizar una generalización física de sabor cinemático, en el siguiente sentido: estudiar el problema suponiendo que los móviles no parten en el mismo instante, o que llevan movimientos rectilíneos uniformes con distinta velocidad, o que llevan movimientos rectilíneos uniformemente acelerados... y encontrar condiciones sobre las magnitudes físicas (velocidad, aceleración...) que caractericen cuándo habrá encuentro. La riqueza interdisciplinar de este problema se pone de manifiesto aquí (y lo seguirá haciendo en lo que sigue, pero en el contexto matemático), y pensamos que lo hace todavía más interesante para llevarlo al aula, sobre todo con aquellos alumnos que cursan la asignatura de Física.

Nosotros en este trabajo abordaremos la generalización matemática que nos brindará la oportunidad de realizar un viaje a través de la matemática a distintos niveles de enseñanza: secundaria, bachillerato o incluso una asignatura propia de la licenciatura de Matemáticas como es la Teoría de Números. Como veremos, y dependiendo del estrato educativo en el que desarrollemos este problema-investigación, tendremos ocasión de tratar diferentes temáticas: números irracionales, propiedades geométricas de los polígonos, trigonometría, funciones, sucesiones aritméticas, estrategias de resolución de problemas, números complejos...

Empecemos ya abordando el problema para el caso del pentágono. Es suficiente observar la figura 2, para comprender el nuevo enunciado.

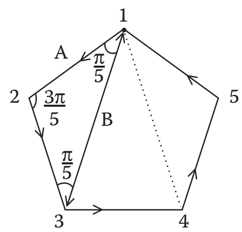

Figura 2. Formulación del problema sobre un pentágono

En principio, tiene sentido que los móviles se puedan encontrar en los vértices {1,3} y {1,4}. Analizaremos en detalle el primer caso, pues como luego veremos el otro caso es muy sencillo de tratar conociendo la solución del primero.

En primer lugar necesitamos calcular el valor de la longitud d de la diagonal que une los vértices 1 y 3. Para ello utilizamos que el ángulo común de un pentágono regular es $3\pi/5$ radianes, y que por la simetría del polígono, el triángulo de vértices numerados 123 es isósceles, y en consecuencia los ángulos de los vértices 1 y 3 de dicho triángulo deben ser $\pi/5$ radianes. Basta ahora aplicar el teorema del coseno a dicho triángulo para calcular *d*:

$$d^2 = 2l^2\left(1-\cos\frac{3\pi}{5}\right) \Rightarrow$$

$$d = 2l\sqrt{\frac{1-\cos\frac{3\pi}{5}}{2}} = 2l\,sen\frac{3\pi}{10} = 2l\cos\left(\frac{\pi}{2}-\frac{3\pi}{10}\right) = 2l\cos\left(\frac{\pi}{5}\right)$$

donde hemos aplicado las fórmulas:

$$\text{sen}\,\alpha = \sqrt{\frac{1-\cos 2\alpha}{2}};\ \text{sen}\,\alpha = \cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)$$

Introduciremos ahora la conocida representación trigonométrica del número aúreo:

$$\Phi = 2\cos\frac{\pi}{5}$$

(siendo $\Phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$) con lo cual: $d = l\Phi$

Así, razonando como en el caso del cuadrado se llega a que la condición de encuentro en el vértice 3 es

$$\exists m,n \in IN \cup \{0\} : (2+5m)l = (1+2n)\Phi l \Leftrightarrow \Phi = \frac{2+5m}{1+2n} \quad (3)$$

La conocida irracionalidad del número de oro (heredada de la de $\sqrt{5}$) nos indica que los móviles nunca se encontrarán en el vértice 3. Por la misma razón los móviles nunca se encontrarán en el vértice 1, pues debería cumplirse que

$$\exists m,n \in IN \cup \{0\} : (5m)l = (2n)\Phi l \Leftrightarrow \Phi = \frac{5m}{2n} \quad (4)$$

lo cual es imposible.

El otro caso, es la posible coincidencia de los móviles en los vértices {1,4}. Por la simetría del pentágono regular se deduce que la longitud de la diagonal que une los vértices 1 y 4 es también $d = l\Phi$, por lo tanto, la imposibilidad de encuentro también en este caso se deduce cambiando el sentido de recorrido (ahora horario) del móvil *A*, ya que por simetría, el problema es el mismo que el resuelto al estudiar la posibilidad de encuentro en los vértices {1,3}.

La técnica utilizada para resolver el problema con el pentágono es de sencilla generalización y permite encarar ya el caso de un polígono regular de *k* lados. Representamos en la figura 3 el enunciado del problema.

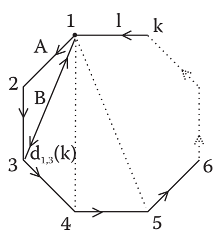

Figura 3. Formulación general del problema

Por analogía a los casos particulares anteriores, analizamos el caso en el que el encuentro puede darse en los vértices {1,3}. Necesitamos previamente calcular el valor $d_{1,3}(k)$ de la longitud de la diagonal que une estos vértices. El argumento es el mismo que para el pentágono:

$$\left(d_{1,3}(k)\right)^2 = 2l^2\left(1-\cos\left(\frac{k-2}{k}\pi\right)\right) \Rightarrow$$

$$d_{1,3}(k) = 2l\sqrt{\frac{1-\cos\left(\frac{k-2}{k}\pi\right)}{2}} = 2l\text{sen}\left(\frac{k-2}{2k}\pi\right) = 2l\cos\frac{\pi}{k}$$

Por lo tanto existirá coincidencia de ambos móviles en el vértice 3 si se cumple que

$$\exists m,n \in IN \cup \{0\} : (2+mk)l = (1+2n)2l\cos\frac{\pi}{k} \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \cos\frac{\pi}{k} = \frac{2+mk}{2(1+2n)} \quad (5)$$

y se dará el encuentro en el vértice 1 si se verifica:

$$\exists m,n \in IN \cup \{0\} : (mk)l = (2n)2l\cos\frac{\pi}{k} \Leftrightarrow \cos\frac{\pi}{k} = \frac{mk}{4n} \quad (6)$$

Antes de continuar debería comprobarse que estas condiciones coinciden para $k = 4$ y $k = 5$ con las establecidas anteriormente para el estudio del problema sobre el cuadrado y el pentágono regular, respectivamente. Si en (5) hacemos $k = 4$, obtenemos la condición (1); si en (6) hacemos $k = 4$, obtenemos la condición (2). Si en (5) hacemos $k = 5$, obtenemos la condición (3); si en (6) hacemos $k = 5$, obtenemos la condición (4).

Observemos que la respuesta a la generalización del problema nos conduce a estudiar una cuestión muy general perteneciente a la Teoría Analítica de Números:

¿Para qué valores de k, cos(π/k) *es un número racional?* (7)

Algunos casos particulares de especial interés

Por el interés docente que tiene el estudio del hexágono, el heptágono o el octógono regulares, nos detendremos en su análisis, ya que, al igual que el pentágono nos permite introducir una de las constantes más importantes que se presenta en la naturaleza y en el arte: el número de oro, veremos que el octógono nos permitirá introducir la proporción cordobesa usada en la construcción de mezquita de Córdoba (De la Hoz). El estudio de estos polígonos regulares también posibilita la presentación de algunas técnicas polinómicas sencillas e interesantes para estudiar la irracionalidad de algunos números expresados en forma trigonométrica.

Hemos visto antes que la condición de encuentro en los vértices {1,3} para el hexágono está caracterizada en términos de la racionalidad del valor

$$\cos\frac{\pi}{6}=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

por lo que no podrá darse nunca la coincidencia de ambos móviles en dichos vértices.

Sin embargo, para el caso del heptágono el problema es más complicado, pues no es conocido el valor de *cos(π/7)*. En realidad no necesitamos saber tanto, basta conocer si es racional o irracional. Una forma de averiguarlo es la siguiente: construimos un polinomio cuyas raíces sean *cos(2π/7)*, *cos(4π/7)* y *cos(6π/7)*, por ejemplo,

$$p(x)=\left(x-\cos\frac{2\pi}{7}\right)\cdot\left(x-\cos\frac{4\pi}{7}\right)\cdot\left(x-\cos\frac{6\pi}{7}\right)$$

Observemos que llamando

$$\alpha=\cos\frac{2\pi}{7}+i\cdot\operatorname{sen}\frac{2\pi}{7}$$

y utilizando la fórmula de De Moivre y que *cos(2π - x) = cos x*, *sen(2π - x) = -sen x* se tiene

$$\cos\frac{2\pi}{7}=\frac{\alpha+\alpha^6}{2}$$
$$\cos\frac{4\pi}{7}=\frac{\alpha^2+\alpha^5}{2}$$
$$\cos\frac{6\pi}{7}=\frac{\alpha^3+\alpha^4}{2}$$

por lo que

$$p(x)=\left(x-\frac{\alpha+\alpha^6}{2}\right)\cdot\left(x-\frac{\alpha^2+\alpha^5}{2}\right)\cdot\left(x-\frac{\alpha^3+\alpha^4}{2}\right)=$$
$$=x^3-\frac{\alpha+\alpha^2+\alpha^3+\alpha^4+\alpha^5+\alpha^6}{2}x^2+$$
$$+\frac{(\alpha+\alpha^6)(\alpha^2+\alpha^5)+(\alpha+\alpha^6)(\alpha^3+\alpha^4)+(\alpha^2+\alpha^5)(\alpha^3+\alpha^4)}{4}x-$$
$$-\frac{(\alpha+\alpha^6)(\alpha^2+\alpha^5)(\alpha^3+\alpha^4)}{8}$$

Ahora utilizando que se cumple $\alpha^7 = 1$, se tiene que

$$1+\alpha+\alpha^2+\ldots+\alpha^6=\frac{\alpha^7-1}{\alpha-1}=0\Rightarrow\alpha+\alpha^2+\ldots+\alpha^6=-1$$

y que $\alpha^t = \alpha^r$ siendo r el resto de dividir t por 7, se llega a la simplificación

$$p(x)=x^3+\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{2}x-\frac{1}{8}$$

Por construcción sabemos que las raíces de *p(x)* son los números reales: *cos(2π/7)*, *cos(4π/7)* y *cos(6π/7)*. Por otra parte, sabemos que, de tener *p(x)* raíces racionales, éstas deben ser algunos de los valores

$$\left\{\pm1,\pm\frac{1}{2},\pm\frac{1}{4},\pm\frac{1}{8}\right\}$$

Sin embargo, es inmediato comprobar que ninguno de estos valores es cero de *p(x)*, por lo tanto se deduce que *cos(2π/7)*, *cos(4π/7)* y *cos(6π/7)* son números irracionales.

Ahora es sencillo ver que *cos(π/7)* es irracional. En efecto, supongamos, por reducción al absurdo, que

$$\cos\frac{\pi}{7}=\frac{a}{b}\in Q$$

(siendo Q el conjunto de los números racionales), entonces aplicando la fórmula del coseno del ángulo doble:

$$\cos 2\alpha = 2(\cos\alpha)^2 - 1$$

llegamos a una contradicción:

$$\cos\frac{2\pi}{7}=2\left(\cos\frac{\pi}{7}\right)^2-1=2\frac{a^2}{b^2}-1\in Q$$

y antes hemos probado que

$$\cos\frac{2\pi}{7}\notin Q$$

Todo ello prueba que en el caso del heptágono los móviles nunca coincidirán ni en el vértice 1 ni en el 3.

El análisis del problema en el caso del octógono nos conduce a caracterizar la respuesta en términos de la irracionalidad del número real *cos(π/8)*. En este caso, sí es muy sencillo calcular la expresión radical de dicho valor trigonométrico, basta aplicar la fórmula del coseno del ángulo mitad:

$$\cos\frac{\pi}{8}=\sqrt{\frac{1+\cos\frac{\pi}{4}}{2}}=\sqrt{\frac{1+\frac{\sqrt{2}}{2}}{2}}=\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$$

que como es sencillo probar (por reducción al absurdo) hereda su carácter irracional del número $\sqrt{2}$, por lo que tampoco coincidirán los móviles en este caso.

Para terminar, podemos aprovechar el contexto para introducir el número cordobés (también irracional):

$$C=\frac{1}{\sqrt{2-\sqrt{2}}}$$

a través de la relación:

$$\cos\frac{\pi}{8}=\frac{\sqrt{2}}{2}C$$

y conectarlo con su presencia en el arte musulmán en la arquitectura de la ciudad de Córdoba (Aranda y otros).

Solución del problema general

Abordamos en esta sección la respuesta a la solución del problema general que, como ya se señaló, se basa en responder la cuestión planteada en (7). Así, los móviles sólo se encontrarán en los polígonos regulares cuyo número de lados *k* sea tal que *cos(π/k)* sea racional. Adentrándonos ya, en una pregunta propia de la Teoría Analítica de Números, a continuación veremos que:

$$\cos\frac{\pi}{k} \text{ es racional} \Leftrightarrow \text{n} = 1,2,3 \qquad (8)$$

por lo que la respuesta al problema de los móviles es que nunca se podrán encontrar.

En efecto, si

$$k \in \{1,2,3\} \Rightarrow \cos\frac{\pi}{k} \in \left\{-1, 0, \frac{1}{2}\right\}$$

Veamos que en cualquier otro caso, los valores son irracionales. Para ello dividiremos el conjunto de los naturales que nos resta por analizar,

$$A = \{k \in IN : k > 3\}$$

en cuatro subconjuntos disjuntos:

$A_1 = \{k > 3 : k \text{ impar}\}$
$A_2 = \{k > 2, \text{ par} : k = m \cdot 2^n, m \text{ impar y } m > 3\}$
$A_3 = \{k > 2, \text{ par} : k = 2^n\}$
$A_4 = \{k > 2, \text{ par} : k = 3 \cdot 2^n\}$

Obsérvese que

$$A = \bigcup_{i=1}^{4} A_i$$

Analicemos cada caso.

Caso 1
Supongamos que $k \in A_1$ y consideremos *cos(π/k)*. Por la fórmula de De Moivre:

$$\left(\cos\frac{\pi}{k} + i \cdot \sin\frac{\pi}{k}\right)^k = -1 \qquad (9)$$

Por el desarrollo del binomio de Newton: (10)

$$\left(\cos\frac{\pi}{k} + i \cdot \sin\frac{\pi}{k}\right)^k = \sum_{r=0}^{k} \binom{k}{r} \left(\cos\frac{\pi}{k}\right)^{k-r} \left(i \cdot \sin\frac{\pi}{k}\right)^r \qquad (10)$$

De (9) y (10), se obtiene (11)

$$\sum_{r=0}^{k} \binom{k}{r} \left(\cos\frac{\pi}{k}\right)^{k-r} \left(i \cdot \sin\frac{\pi}{k}\right)^r = -1$$

La parte real del sumatorio corresponde a los valores de *r* pares: *r = 2k*, así tomando partes reales en (11), resulta

$$\sum_{r=0}^{\frac{k}{2}} \binom{k}{2r} \left(\cos\frac{\pi}{k}\right)^{k-2r} \left(i \cdot \sin\frac{\pi}{k}\right)^{2r} = -1 \qquad (12)$$

y como

$$\left(i \cdot \text{sen}\frac{\pi}{k}\right)^{2r} = \left(\left(i \cdot \text{sen}\frac{\pi}{k}\right)^2\right)^r = \left(-\left(\text{sen}\frac{\pi}{k}\right)^2\right)^r = \left(\left(\cos\frac{\pi}{k}\right)^2 - 1\right)^r$$

sustituyendo esto en (12)

$$\sum_{r=0}^{\frac{k}{2}} \binom{k}{2r} \left(\cos\frac{\pi}{k}\right)^{k-2r} \left(\left(\cos\frac{\pi}{k}\right)^2 - 1\right)^r = -1$$

Llamando *x = cos(π/k)*, esta última expresión se escribe como

$$\sum_{r=0}^{\frac{k}{2}} \binom{k}{2r} x^{k-2r} \left(x^2 - 1\right)^r + 1 = 0$$

El término independiente de esta ecuación polinómica en *x* es 1. Como se buscan soluciones *x = cos(π/k)* racionales de esta ecuación, es decir, del tipo *x = a/b*, con enteros ($b \neq 0$), se debe cumplir que *a/b* divida al término independiente, i.e., que *a* divida a 1, luego *a = ±1*. Así, *x = cos(π/k) = ±(1/b)*. Pero, si *k > 3*, se tiene que *cos(π/k) >1/2*, luego *b = 1*, y en consecuencia *cos(π/k) = 1*, de lo cual se deduce que *π/k = 0*, que conduce a la contradicción: *π = 0*. Por lo tanto, en el caso en que $k \in A_1$, se tiene *cos(π/k) ∉ Q*.

Caso 2
Supongamos que $k \in A_2$. Entonces aplicando la fórmula del coseno del ángulo doble tenemos: (13)

$$\begin{aligned} \cos 2\frac{\pi}{m \cdot 2^k} &= 2\left(\cos\frac{\pi}{m \cdot 2^k}\right)^2 - 1 \Rightarrow \\ \Rightarrow \cos\frac{\pi}{m \cdot 2^{k-1}} &= 2\left(\cos\frac{\pi}{m \cdot 2^k}\right)^2 - 1 \end{aligned} \qquad (13)$$

Por tanto, si $\cos\frac{\pi}{m \cdot 2^k}$ es racional, aplicando (13) se deduce

que $\cos\frac{\pi}{m \cdot 2^{k-1}}$ también es racional, y aplicando reiteradamente este razonamiento de descenso en el exponente de 2, se llegará a *cos(π/m)* es racional, siendo *m* impar, pero esto es imposible, pues contradice la conclusión obtenida en el caso 1.

Caso 3
Supongamos que $k \in A_3$. Entonces, aplicando como en el caso 2 la fórmula del coseno del ángulo doble, tenemos que si

cos(π/2^k) es racional, entonces *cos(π/2^{k-1})* también es racional, este razonamiento de descenso nos conduce a la contradicción:

$$\cos\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}\ \text{ es racional.}$$

Caso 4

Supongamos que $k \in A_4$. Podemos aprovechar de nuevo el razonamiento hecho del caso 2: si

$$\cos\frac{\pi}{3\cdot 2^k}$$

es racional, entonces

$$\cos\frac{\pi}{3\cdot 2^{k-1}}$$

es racional, y en particular, a través del razonamiento recurrente llegaremos a que

$$\cos\frac{\pi}{6}=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

debe ser racional, lo que constituye un absurdo, debido al carácter irracional de $\sqrt{3}$.

Esto completa la prueba de (8) y justifica la respuesta antes dada relativa al problema de los móviles.

Conclusiones

Este trabajo pretende unirse a la línea de otros, como los de Aledo (2000) y Cortés (2002) que tienen como origen un problema sencillo, y que a través del proceso natural de la generalización permiten profundizar, hasta niveles a priori insospechados, en otras ramas de las Matemáticas. En este sentido, pretende ser una experiencia concreta, susceptible de ser aprovechada en diferentes niveles educativos, desde la enseñanza secundaria hasta la enseñanza universitaria, para introducir de forma motivada aspectos teóricos como pueden ser el estudio genérico de los números irracionales o la caracterización de ciertos valores de la función trigonométrica coseno. Desde el punto de vista interdisciplinar, puede servir para mostrar las consecuencias físicas que puede tener la característica abstracta y genuinamente matemática de la irracionalidad de un número.

Para terminar, subrayamos que dejamos abierto el problema en varias líneas. Desde el punto de vista matemático, puede abordarse el estudio del problema cuando el móvil *B*, se mueve por la diagonal que une los vértices {1,4}, {1,5} ... Obsérvese que la cuestión es tratable a partir de los desarrollos dados en este trabajo, pero que por simetría, no es necesario llegar a estudiar el caso en que *B* viaja por la diagonal formada por {1, k – 1}, pues es el mismo estudio que el que hemos hecho nosotros entre {1,3}. Como se señaló antes, desde la óptica de la cinemática podemos suponer una gran variedad de casuísticas en función del tipo de movimiento que lleve cada móvil. ■

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

ALEDO SÁNCHEZ, J.A. y CORTÉS LÓPEZ, J.C. (2000): *Una aplicación de una idea arquimediana*, Puig Adam, nº 59, 58-68.

ARANDA BALLESTEROS F.D., DOMINGUEZ RUBIO I. y FERNÁNDEZ MORALES J. (1995): *La proporción cordobesa, algunas actividades para el aula*, VII Jornadas Andaluzas de Educación Matemática "Thales", 85-96. Córdoba.

BOYER C.B. (1986): *Historia de la Matemática*, Ed. Alianza Universidad. Madrid.

CORTÉS LÓPEZ, J.C., CALBO SANJUAN, G. Y LÓPEZ PELAYO, F. (2002): *Desigualdades para funciones f que satisfacen la ecuación funcional f(x,y)=g(f(x),f(y))*, Puig Adam, nº 59, 46-51.

DE LA HOZ ARDERIUS R. (1995): *La proporción cordobesa*, VII Jornadas Andaluzas de Educación Matemática Thales, 67-84. Córdoba.