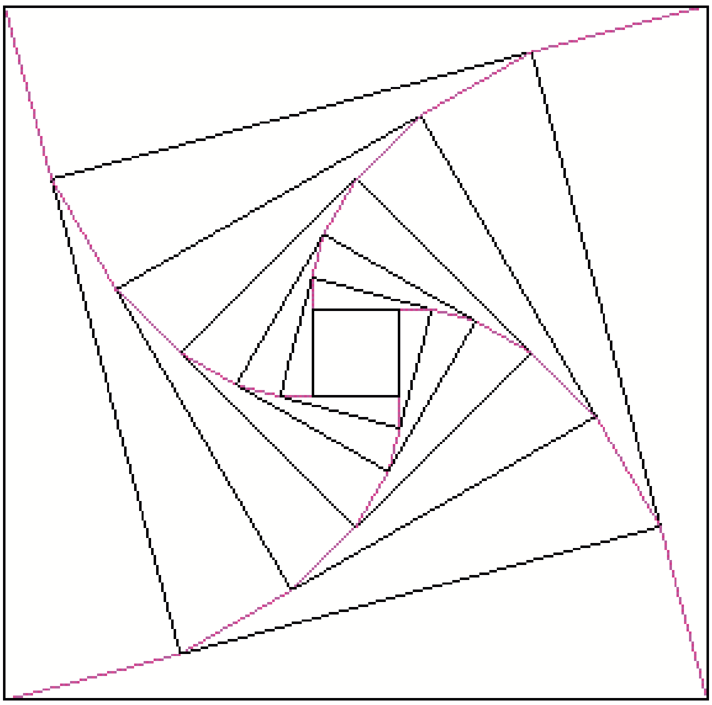
SOCIEDAD «PUIG ADAM» DE PROFESORES DE MATEMÁTICAS



BOLETÍN N.º 74
OCTUBRE DE 2006

ÍNDICE

ESTE BOLETÍN SE DISTRIBUYE GRATUITAMENTE ENTRE LOS SOCIOS DE LA SOCIEDAD «PUIG ADAM» DE PROFESORES DE MATEMÁTICAS.

NO SE VENDE NI SE ADMITEN SUSCRIPCIONES.

Recensiones de los artículos aparecen en
Zentralblatt für Didaktik der Mathematik y Mathematical Reviews

La confección de este número ha estado a cargo de Eugenio Roanes

ISSN: 1135-0261

Depósito Legal: M-7762-1995

GRÁFICAS LOUREIRO, S.L.- San Pedro, 23 bis -28917 Bº de La Fortuna (Madrid).
Teléf.: (91) 611 59 94 – Fax: (91) 611 59 88

En la portada de este número aparece la figura que adoptada como logotipo de la Sociedad “Puig Adam” de Profesores de Matemáticas. Esta figura ya apareció en portada de uno de los libros más emblemáticos de D. Pedro Puig Adam, el titulado “La Matemática y su enseñanza actual”, publicado en 1960 por el entonces Ministerio de Educación.

Toda la correspondencia debe dirigirse a la sede de nuestra Sociedad, ubicada en el despacho 3005 de la Facultad de Educación:

SOCIEDAD «PUIG ADAM» DE PROFESORES DE MATEMÁTICAS
Facultad de Educación (Dpto. de Álgebra)
C/ Rector Royo Villanova, s/n
28040 - Madrid
Teléf. y fax: 91 394 62 48
e-mail: puigadam@mat.ucm.es
Página web: www.ucm.es/info/secdealg/puigadam
Nueva página web en preparación (en servicio parcial):
htttp://www.sociedadpuigadam.es

JUNTA DIRECTIVA

Boletín de la Soc. Puig Adam, núm 74 (Octubre 2006)

Radiografía diferencial del teorema de MacLaurin-Cauchy para series numéricas

J.C. Cortés
Departamento de Matemática Aplicada
Universidad Politécnica de Valencia d
jccortes@mat.upv.es

G. Calbo Sanjuán
Departamento de Matemáticas
I.E.S. Els Évols. L'Alcúdia (Valencia)

Abstract

In this article we give a new formulation and proof of the well-known integral criterion to study the carácter of a numerical series which terms are positives. This new approach is more intuitive because it allows to recognize, from a graphical point of view, the kind of functions that define the general term of convergent series as well as divergent ones.

Introducción

Uno de los resultados más útiles para caracterizar la convergencia/divergencia de ciertas series numéricas de términos positivos está dado a través del conocido criterio integral de Cauchy-MacLaurin que enunciamos en el siguiente:

Teorema 1
Sea f una función positiva decreciente definida para todo $x \geq 1$. Para cada $n \geq 1$ sean

$$r_n = \sum_{m=1}^{n} f(m) \quad ; \quad t_n = \int_1^n f(x)dx,$$

entonces ambas sucesiones $\{r_n\}_{n\geq 1}$ y $\{t_n\}_{n\geq 1}$ tienen el mismo carácter, es decir, ambas convergen o ambas divergen.

El objetivo de este trabajo es proporcionar una reformulación más intuitiva de este resultado, que aporte una *radiografía* en términos de propiedades que dependen de las derivadas primera y segunda para caracterizar un tipo de funciones que definen (como veremos, a través de su primera derivada) series numéricas convergentes y divergentes.

La aportación del trabajo pretende orientarse en dos líneas. La primera, desde el punto de vista matemático, versionar el criterio integral y dar una nueva demostración del resultado -véase la prueba del teorema 1 en (Apóstol, p.485) ó en (Vorobiov, p.58), por ejemplo-, y la segunda, desde el punto de vista docente, dar una caracterización de fácil interpretación gráfica, de la clase de funciones que definen series numéricas convergentes/divergentes vía este importante criterio integral.

1. Reformulación del criterio integral

El principal resultado está dado por el siguiente.

Teorema 2
Supongamos que se cumplen las siguientes condiciones para una función g *:*

- *C1:* $g(x)$ *es continua en* $x \geq 1$.
- *C2:* $\mathrm{g(x)}$ *es derivable en* $x > 1$.
- *C3:* $g(x)$ *es estrictamente creciente en* $x > 1$.
- *C4:* $g(x)$ *es cóncava en* $x > 1$*, es decir,* $g'(x)$ *es estrictamente decreciente en* $x > 1$.

Entonces

$$\sum_{n=1}^{\infty} g'(n) \ \text{converge (diverge)} \quad \Leftrightarrow \quad M < +\infty \ \ (M = +\infty),$$

siendo $M = \lim\limits_{x \to +\infty} g(x)$.

<u>Demostración</u>
En primer lugar, obsérvese que por C3, se trata de una serie de términos positivos. Fijemos ahora, $m \geq 1$ entero, entonces por C1 y C2, $g(x)$ es continua en $[m, m+1]$ y derivable en $]m, m+1[$, por lo que aplicando en teorema del valor medio se deduce que

$$\exists c_m \in \left]m, m+1\right[: \quad g'(c_m) = g(m+1) - g(m) \qquad \textbf{(1)}$$

Por otra parte, por C4 se tiene que $g'(x)$ es estrictamente decreciente en $x > 1$, y en particular en $\left]m, m+1\right[\subset \left]1, +\infty\right[$, por lo que

$$g'(m+1) < g'(c_m) < g'(m) \qquad \textbf{(2)}$$

De (1) y (2)

$$g'(m+1) < g(m+1) - g(m) < g'(m) \quad \forall m \geq 1 \text{ entero}.$$

Sumando estas desigualdades para $m = 1, \ldots, n$ se tiene

$$\sum_{m=1}^{n} g'(m+1) < g(n+1) - g(1) < \sum_{m=1}^{n} g'(m) \qquad \textbf{(3)}$$

A partir de aquí, veamos primero la caracterización de la divergencia. Para ver el recíproco, supongamos $M = +\infty$, entonces tenemos que probar

$$\lim_{n \to +\infty} s_n = +\infty,$$

siendo $s_n = \sum_{m=1}^{n} g'(m)$.

De la desigualdad (3) se tiene que al ser $M = +\infty$, $g(n+1) - g(1)$ tiende a infinito y lo mismo le ocurrirá a su mayorante s_n luego,

$$\sum_{n \geq 1} g'(n) = +\infty.$$

La implicación directa es inmediata, ya que, como por hipótesis la serie $\sum_{n \geq 1} g'(n)$ diverge, también lo hace la integral de Riemann impropia

$$\int_1^{\infty} g'(x)dx,$$

ahora bien por la regla de Barrow

$$\int_1^{\infty} g'(x)dx = \lim_{x \to \infty} g(x) - g(1) = \infty,$$

de donde al ser $g(1) < \infty$, se tiene

$$\lim_{x\to+\infty} g(x) = +\infty .$$

Probemos ahora el recíproco del resultado de la convergencia. Para ello, en primer lugar observemos que al ser $g(x)$ una función estrictamente creciente y con derivada estrictamente decreciente en el intervalo $x > 1$ y con asíntota horizontal cuando $x \to +\infty$, ya que, por hipótesis $M < +\infty$ se tiene $\lim_{n\to+\infty} g'(n) = 0$ o equivalentemente $\lim_{n\to+\infty} g'(n+1) = 0$.

Por otra parte, observemos que de la desigualdad de la izquierda de (3) se deduce

$$s_n - g'(1) + g'(n+1) < g(n+1) - g(1),$$
$$s_n < g(n+1) - g'(n+1) - g(1) + g'(1),$$

luego tomando en esta última desigualdad límites cuando n tiende a infinito ($n \to +\infty$) obtenemos

$$\lim_{n\to+\infty} s_n < M - g(1) + g'(1) < +\infty,$$

tal y como queríamos probar.

Para justificar la implicación directa del teorema, se razona como en el caso de la prueba de la divergencia, pero apoyándose ahora en que, por ser la serie numérica convergente, entonces según la condición necesaria de convergencia de Cauchy se satisface que su término general tiende a cero, es decir, $\lim_{n\to+\infty} g'(n) = 0$.

2. Aplicaciones y observaciones

En este apartado daremos ejemplos y observaciones de interés práctico para estudiar la convergencia/divergencia de series numéricas a través del teorema 2 anterior.

Aplicación 1
En la tabla 1 se recoge una colección de series cuya convergencia se deduce del teorema 2 (en todos los casos suponemos $x \geq 1$ y comprobamos las hipótesis). Obsérvese que entre ellas están, la serie geométrica de razón entre 0 y 1 y la serie general de las potencias (de exponente mayor que 1) de los inversos de los números naturales.

$g(x)$	$\dfrac{r^X}{\ln r}$ $(0<r<1)$	$-\dfrac{1}{x}$	$\dfrac{1}{1-\alpha}\cdot\dfrac{1}{x^{\alpha-1}}$ $(\alpha>1)$	$\arctan x$
C1	Por ser	Por ser	Por ser	Por
C2	exponencial	$x\geq 1$	$x\geq 1$	def$^{\underline{\text{on}}}$
C3	$r^x>0$	$\dfrac{1}{x^2}>0$	$\dfrac{1}{x^\alpha}>0$	$\dfrac{1}{1+x^2}>0$
C4	$r^x\ln r<0$	$-\dfrac{2}{x^3}<0$	$-\dfrac{\alpha}{x^{\alpha+1}}<0$	$-\dfrac{2x}{(1+x^2)^2}<0$
M	0	0	0	$\dfrac{\pi}{2}$
serie convergente	$\sum_{n\geq 1} r^n$ $(0<r<1)$	$\sum_{n\geq 1}\dfrac{1}{n^2}$	$\sum_{n\geq 1}\dfrac{1}{n^\alpha}$ $(\alpha>1)$	$\sum_{n\geq 1}\dfrac{1}{1+n^2}$

Tabla 1. *Series convergentes*

Aplicación 2
En la tabla 2 se recoge una colección de series cuya divergencia se deduce del teorema 2 (en todos los casos suponemos $x\geq 1$ y comprobamos las hipótesis). Obsérvese que entre ellas está la serie armónica.

$g(x)$	$\ln x$	$\ln(\ln(1+x))$
C1	Por	Por ser
C2	definición	$x\geq 1$
C3	$\dfrac{1}{x}>0$	$\dfrac{(1+x)^{-1}}{\ln(1+x)}>0$
C4	$-\dfrac{1}{x^2}<0$	$-\dfrac{1+\ln(1+x)}{((1+x)\ln(1+x))^2}<0$
M	$+\infty$	$+\infty$
serie divergente	$\sum_{n\geq 1}\dfrac{1}{n}$	$\sum_{n\geq 1}\dfrac{1}{(1+n)\ln(1+n)}$

Tabla 2. *Series divergentes*

Observación 1

Gracias a la versión dada en el teorema 2 del teorema 1 podemos identificar gráficamente la familia de funciones $g(x)$ que generan series (con término general su derivada $g'(x)$) convergentes (véase figura 1) y divergentes (véase figura 2).

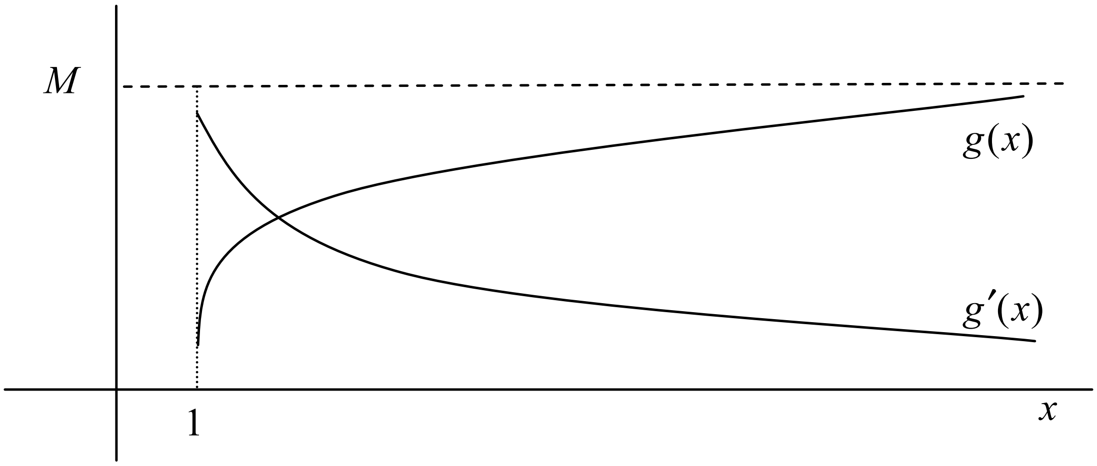


Figura 1. *Gráfica del término general* $g'(x)$ *de una serie convergente*

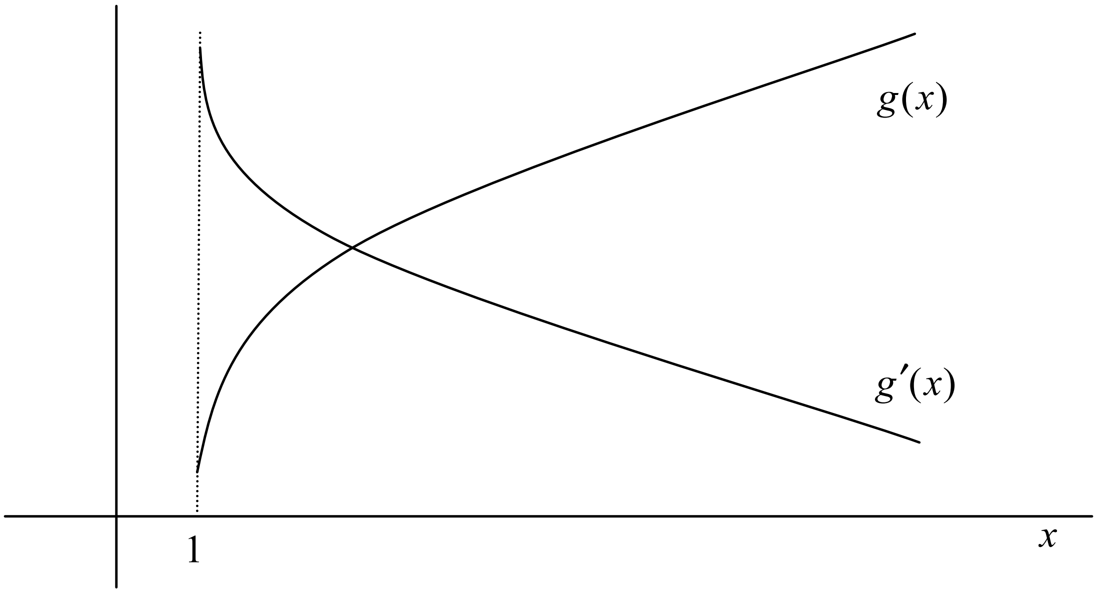


Figura 2. *Gráfica del término general* $g'(x)$ *de una serie divergente*

Observación 2

Es sencillo ver repasando la demostración, que las condiciones C1-C4 del teorema 2 pueden relajarse en el siguiente sentido: basta con que se satisfagan para $x \geq x_0 > 1$ sin importar lo grande, pero finito que sea x_0. En ese caso, entre $[1, x_0]$ es indiferente la monotonía y curvatura de la función mientras que ésta esté acotada.

Por ejemplo, con la notación del teorema 2, si tomamos $g(x) = |\ln(2x-7)|$ con $x > 3.5$, entonces como se cumplen C1-C4 para todo $x > 4 = x_0$, (véase figura 3) y como $M = \lim_{x\to\infty} |\ln(2x-7)| = +\infty$, la serie $\sum_{n\geq 4} \frac{2}{2n-7}$ diverge.

Observación 3

El teorema 3 nos permite, a partir de funciones $g(x)$ que satisfagan C1-C4, generar series convergentes y divergentes, pero en la práctica la realidad puede ser otra: conocido su término general, $g'(x)$, estudiar su carácter. En este caso, para poder aplicar el teorema 2 primero se ha de buscar una función primitiva $g(x)$ y que además satisfaga C1-C4. Esto exige pasar al cálculo de una integral, pero indefinida frente a la integral impropia que requiere el criterio integral. Aún así, como es de esperar, el teorema 2 se deduce del teorema 1, ya que, basta tomar $f(n) = g'(n)$, la cual es positiva (por C3) y decreciente (por C4) y aplicando el teorema 1 se tiene

$$\sum_{n\geq 1} g'(n) < +\infty \Leftrightarrow \int_1^{\infty} g'(x)dx < +\infty \Leftrightarrow M = \lim_{x\to\infty} g(x) < +\infty .$$

Las hipótesis extras C1 y C2 del teorema 1, a nosotros nos han servido para proporcionar otra prueba del resultado basada en el teorema del valor medio, sin embargo, como se desprende de la observación 2 ambos teoremas son básicamente equivalentes en la mayor parte de las situaciones donde los aplicaremos, aunque esta reformulación más débil del criterio integral resulta más fuerte desde el punto de vista intuitivo.

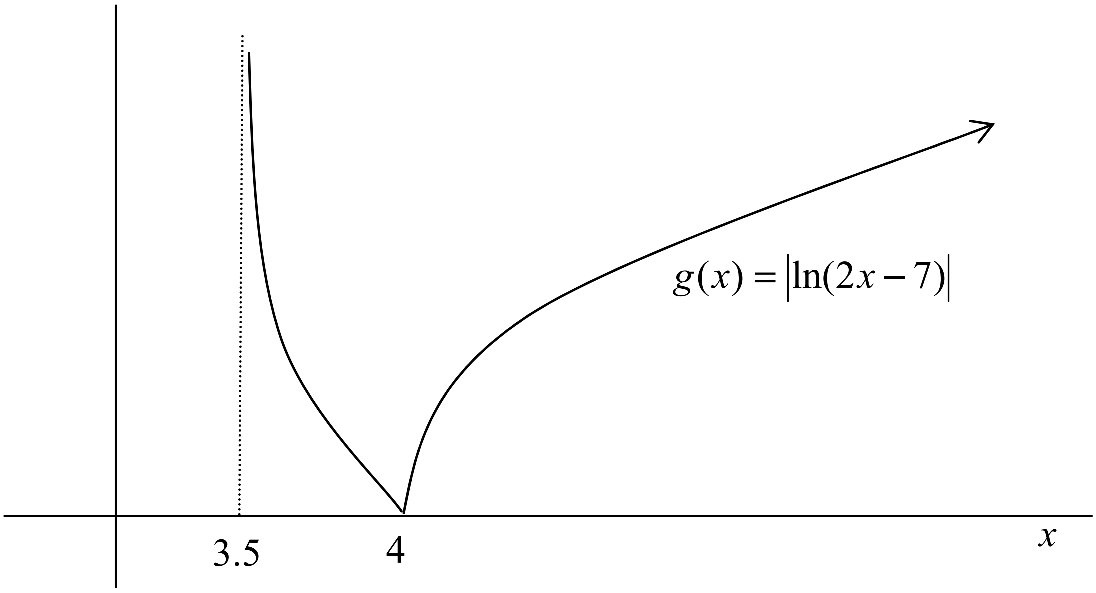


Figura 3. *Gráfica referente a la observación 3*

3. Conclusiones

La última observación dada nos sirve para enlazar con el objeto de este apartado de conclusiones. El artículo pretende proporcionar una visión más intuitiva del conocido criterio integral para series numéricas, el cual siempre se presenta y trabaja en el aula (y en los textos donde aparece) desde una perspectiva exclusivamente algebraica. La aproximación intuitiva a este resultado se hace desde un enfoque gráfico, lo que permite visualizar las características de comportamiento de las funciones que definen series convergentes y divergentes, deducibles a partir del criterio de MacLaurin-Cauchy. Para terminar, señalemos también que el enfoque gráfico nos permite proporcionar otra prueba del resultado.

Agradecimiento

Los autores quieren agradecer al “referee” anónimo los comentarios realizados, los cuales han mejorado la versión final.

Bibliografía

Apostol, T. M. (1989). *Calculus*, Volumen 1, Barcelona, Ed. Reverté.

Vorobiov, N.N. (1995). *Teoría de Series*, Parte 2, Madrid, Ed. Rubiños.