

TESIS DOCTORAL

Autor: Antonio González Sorribes

Directores: Dr. Antonio Sala Piqueras y Pedro
García Gil

SISTEMAS DINÁMICOS CON RETARDOS TEMPORALES

Controladores digitales basados en predictor
para sistemas con retardos variables en el
tiempo

Octubre 2011



Grupo de Sistemas Híbridos

Departamento de Ingeniería de Sistemas y Automática

Universitat Politècnica de València

A mi madre y hermana, por su incondicional apoyo.

A mi familia y a Isabel

Resumen

Los sistemas con retardos temporales aparecen frecuentemente en aplicaciones prácticas de ingeniería de control. Éstos deben ser considerados tanto en el análisis como en el diseño de controladores. De no ser tenidos en cuenta, la respuesta del sistema en bucle cerrado puede llegar a degradarse hasta la inestabilidad, especialmente si el sistema a controlar es inestable.

Básicamente los esquemas de control utilizados para estabilizar sistemas con retardos puede clasificarse en dos grupos: reutilización de los esquemas clásicos de control y diseño de esquemas de control específicos para sistemas con retardos. Este último se conoce en la literatura como Compensadores de Tiempo Muerto (DTC), y se puede mencionar al respecto el Predictor de Smith (SP) y sus modificaciones, y por otro lado la técnica de Asignación Finita del Espectro (FSA). La principal característica es que, en ausencia de incertidumbres, el retardo es eliminado de la ecuación característica del sistema en bucle cerrado.

En este trabajo se aportarán nuevas contribuciones en el análisis y diseño de controladores para procesos discretos con retardos variables en la entrada y la salida. Concretamente, la idea es aplicar un esquema de control basado en la realimentación de la predicción futura del estado (implementación discreta del esquema de control FSA), denominado *predictor*, a partir del modelo discreto del proceso, y comparar las prestaciones obtenidas con respecto a otros esquemas de control propuestos en la literatura. El buen funcionamiento del controlador basado en *predictor* ha sido constatado previamente sobre sistemas con retardos fijos, pero no hay estudios concluyentes con retardos variables. Aspectos tales como el análisis de la estabilidad robusta frente a incertidumbres en el modelo y en el retardo, y la síntesis de la ley de control, serán objeto de estudio. Finalmente, con el objetivo de verificar los resultados obtenidos, se ha implementado la ley de control sobre una plataforma de tiempo real.

Resum

Els sistemes amb retards temporals apareixen freqüentment en aplicacions pràctiques d'enginyeria de control. Estos han de ser considerats tant en l'anàlisi com en el disseny de controladors. De no ser tinguts en compte, la resposta del sistema en bucle tancat pot arribar a degradar-se fins a la inestabilitat, especialment si el sistema a controlar és inestable.

Bàsicament els esquemes de control utilitzats per a estabilitzar sistemes amb retards poden classificar-se en dos grups: reutilització dels esquemes clàssics de control i disseny d'esquemes de control específics per a sistemes amb retards temporals. Aquest darrer és conegut a la literatura com a Compensadors de Temps Mort (DTC), i es pot distinguir al respecte el Predictor de Smith (SP) i les seues modificacions, i per altra banda, la tècnica d'Assignació Finita de l'Espectre (FSA). La principal característica és que, en absència d'incerteses, el retard és eliminat de l'equació característica del sistema en bucle tancat.

En este treball s'aportaran noves contribucions en l'anàlisi i disseny de controladors per a processos discrets amb retards variables en l'entrada i l'eixida. Concretament, la idea és aplicar un esquema de control basat en la realimentació de la predicció futura de l'estat (implementació discreta del esquema de control FSA), denominat *predictor*, a partir del model discret del procés, i comparar els prestacions obtingudes respecte a altres esquemes de control proposats en la literatura. El bon funcionament del controlador basat en *predictor* ha sigut constatat prèviament sobre sistemes amb retards fixos, però no hi ha estudis conclouents amb retards variables. Aspectes com ara l'anàlisi de l'estabilitat robusta enfront d'incerteses en el model i en el retard, i la síntesi de la llei de control, seran objecte d'estudi. Finalment, amb l'objectiu de verificar els resultats obtingudes, s'ha implementat la llei de control sobre una plataforma de temps real.

Abstract

Time-delay systems appear frequently in control engineering applications. Their presence should be considered both in analysis and synthesis of controllers. If they are not taken into account, the closed-loop system response may degrade until instability, particularly if the system to be controlled is unstable.

Basically the control schemes that are used to stabilize time-delay systems can be classified into two groups: classical control approaches and control schemes specifically designed for time delay systems. This last approach is known in the literature as Dead-Time Compensators (DTC). With respect to that, it's worth mentioning the Smith Predictor (SP) and their modifications, and on the other hand the Finite Spectrum Assignment (FSA) technique. The main feature is that delay is eliminated from the characteristic equation of the closed-loop system.

In this work new contributions for analysis and synthesis of controllers for discrete-time systems with input and output time-varying delays will be provided. Concretely, the goal consists of applying a control scheme based on the feedback of the future prediction of state (discrete implementation of FSA control scheme), known as *predictor*, by using the discrete-time process model, and comparing the achieved performance with respect to another control schemes proposed in literature. The good behavior of the predictor-based control scheme has been previously reported for time-constant delay systems. However, no contributions have been found for the time-varying case. Issues such as robust stability analysis against model and delay uncertainty, and the synthesis of the predictor-based control law will be discussed. Finally, with the aim to verify the achieved results, the predictor-based control law has been implemented in a real-time platform.

Agradecimientos

Me gustaría que estas líneas sirvieran para expresar mi más profundo y sincero agradecimiento a todas aquellas personas que con su ayuda han colaborado en la realización del presente trabajo, en especial al Prof. Antonio Sala Piqueras y Prof. Pedro García Gil, directores de esta investigación, por la orientación, el seguimiento y la supervisión continúa de la misma, pero sobre todo por la motivación y el apoyo recibido a lo largo de estos años, así como por brindarme la oportunidad de trabajar con ellos.

También quisiera expresar mi gratitud al Prof. Julián Salt Llobregat, Prof. Ángel Cuenca Lacruz, y toda la gente vinculada al grupo de investigación con la que he tenido la oportunidad de trabajar y quienes han contribuido decisivamente a consolidar mi orientación en este campo de investigación y por ende al desarrollo de la presente tesis.

Por último, quisiera mostrar mi agradecimiento a Andreu Berna Ferri por la ayuda en la obtención de los resultados experimentales, a Isabel por estar a mi lado y por su paciencia conmigo, y en general a todas aquellas personas que me han brindado de un modo su apoyo.

Gracias a todos.

Antonio González

Justificación y objetivos

Los sistemas de control con retardos temporales aparecen frecuentemente en aplicaciones prácticas: o bien de forma intrínseca al propio proceso o bien de forma inducida por la propia plataforma (tiempos de cómputo, retardos de comunicación en el intercambio de datos entre dispositivos, etc). Los retardos pueden afectar a la entrada, la salida o el estado interno del proceso.

En líneas generales, las prestaciones de los sistemas de control presentan una notoria sensibilidad a los retardos. De hecho, desde la perspectiva del control clásico, la presencia de retardos contribuye a reducir el margen de fase y por ende, el margen de ganancia, pudiendo llegar a inestabilizar su respuesta en bucle cerrado si estos no son considerados en la fase de diseño. El estudio de los sistemas de control con retardos temporales representa actualmente una prolífica línea de investigación en la que se pueden encontrar numerosas contribuciones en la literatura moderna de ingeniería de control. Realmente, la investigación de los sistemas con retardos temporales comienza en los albores del siglo XVIII con los trabajos de Bernoulli, Euler, Lambert o Condorcet, dentro de un marco puramente teórico, donde por primera vez se consideran las ecuaciones diferenciales con retardos. Posteriormente, los trabajos [121, 22, 5, 50] presentan un estudio sistemático de este tipo de ecuaciones que constituyen, como se verá posteriormente, la base del estudio de la dinámica de los sistemas con retardos temporales.

Los retardos en un sistema de control pueden aparecer por diversos motivos. Cabe citar al respecto:

Retardos inherentes al proceso físico: Algunos sistemas físicos presentan retardos como propiedad intrínseca al mismo. Cabe citar, por ejemplo, procesos en los que tiene lugar operaciones de transporte de fluidos, por ejemplo, a través de tuberías de larga distancia. En general, cualquier proceso en los que los retardos de transporte siempre están asociados con el medio controlado que se desplaza de una ubicación física a otra dentro del propio proceso (transporte de masas) [82]. Un ejemplo típico cotidiano es el calentador de agua, en el que la temperatura no evoluciona hasta pasado un cierto tiempo.

Aproximación de modelos de orden elevado: En ocasiones puede resultar conveniente modelar un proceso de orden elevado a partir de un modelo de orden reducido en serie con un retardo puro (aproximación de Padé) con el objetivo de simplificar la tarea de identificación, análisis y el diseño de controladores [52]. Por ejemplo, un horno o un calentador de agua, donde la evolución de la temperatura resulta mucho más sencilla de modelar a partir de un proceso con retardo que a partir de una función de transferencia racional de orden elevado.

Sistemas de control basados en red: La proliferación y el avance tecnológico de las redes de comunicaciones en las últimas décadas ha motivado colateralmente el estudio de los denominados Sistemas de Control Basados en red (SCBR) (o de sus siglas en inglés, *NCS*) [91] desde la perspectiva de la ingeniería de control, donde los retardos desempeñan un papel fundamental. Los SCBR se caracterizan esencialmente por su arquitectura distribuida: es decir, el controlador se encuentra ubicado en un emplazamiento físico distinto al proceso a controlar y el intercambio de datos se produce a través de un medio de comunicación. Por ejemplo: buses de campo (DeviceNet, ControlNet, Profibus) [117, 77, 2, 75], redes de propósito general (Ethernet, TCP/IP) [77] o redes inalámbricas (802.11b, redes estándar inalámbricas Bluetooth) [103]. También cabe incluir al respecto aplicaciones de Teleoperación [46]. Por tanto, la aparición de retardos en el lazo de control es inevitable. Además, los retardos normalmente son de naturaleza variable y aleatoria, ya que éstos dependen por ejemplo de posibles congestiones puntuales en nodos intermedios, del propio protocolo de arbitraje de acceso al medio, etc. Además, con la finalidad de economizar costes en infraestructura y mantenimiento el medio de comunicación generalmente es compartido por varias aplicaciones, lo que contribuye a la aleatoriedad y variabilidad del retardo inducido [91].

Por tanto, la presente tesis plantea el objetivo de contribuir al análisis y diseño de controladores sobre sistemas lineales discretos con retardos temporales. La idea principal sinergiza con otros trabajos dentro de esta línea cuya finalidad es plantear este problema mediante condiciones resolubles a un coste razonable. La principal novedad a destacar dentro de esta tesis consiste en la unión de dos líneas de trabajo:

- Obtención de resultados de análisis y diseño de controladores sobre sistemas discretos con retardos variables que mejoren en la medida de lo posible la relación entre conservadurismo/coste computacional. Un sistema discreto con retardo variable siempre se puede modelar como un sistema equivalente conmutado libre de retardos [62], lo que permite abordar el problema de análisis y diseño con técnicas convencionales, ya que el sistema es de dimensión finita. No obstante, el gran inconveniente que presenta este tipo de sistemas es que la complejidad del análisis es proporcional al valor del retardo. Por tanto, para retardos elevados las técnicas convencionales no son

aplicables. La línea de investigación en este campo se centra en la obtención de resultados de análisis y diseño cuya complejidad sea independiente del valor del retardo, al mismo tiempo que se minimice el conservadurismo adicional inherente al sesgo en el número de variables de decisión.

- Diseño de estrategias de control concebidas para eliminar el efecto del retardo sobre la dinámica del sistema en bucle cerrado. Concretamente, la técnica de Asignación de Espectro Finito (FSA) [83] ha sido probada sobre sistemas discretos (tanto estables como inestables) con retardos, mediante un esquema de control basado en la predicción futura del estado (análogo al FSA continuo), obtenido a partir del modelo discreto del proceso. Este esquema de control se denomina *predictor* [81, 38].

La idea, por tanto, es utilizar el esquema de control basado en *predictor* para mejorar las prestaciones de la respuesta de los sistemas discretos con retardos variables, tanto en estabilidad como en robustez frente a incertidumbres de modelado. Los resultados obtenidos se pueden resumir en:

- Aportación de condiciones suficientes de análisis de estabilidad basadas en desigualdades matriciales lineales (LMI) [10] que permite demostrar la mejora en prestaciones introducida por el uso del esquema de control basado en *predictor* con respecto a la realimentación estática del estado sobre sistemas lineales discretos con retardos variables. Las prestaciones que se pretende mejorar se definen respecto a la amplitud de margen de variación del retardo y en tolerancia frente a incertidumbres en el modelo del proceso.
- Obtención de un criterio de diseño basado en LMI que mejora las prestaciones en bucle cerrado con un esquema de control basado en *predictor* con respecto a la realimentación estática del estado.
- Verificación de las mejoras introducidas por el esquema de control, tanto por simulación como experimentalmente.

La redacción de la tesis se ha estructurado del siguiente modo:

Revisión del Estado del Arte: (capítulos 1-3): En estos capítulos se definen los sistemas con retardos temporales, así como las estrategias de modelado, criterios de estabilidad y las principales estrategias de control diseñadas para este tipo de sistemas. En detalle: En el capítulo 1 se introduce formalmente el concepto de retardo y se revisan las técnicas de modelado de los sistemas dinámicos con retardos temporales a partir de ecuaciones diferenciales funcionales [51]. Asimismo se ilustra algunas aplicaciones prácticas de ingeniería de control que justifican el uso de modelos de sistemas discretos con retardos temporales, analizando las diferentes estrategias de obtención de tales modelos a partir de los sistemas continuos.

En el capítulo 2 se revisan criterios de análisis de la estabilidad y robustez aplicados sobre los sistemas lineales con retardos temporales. Dada su relevancia, este capítulo se centra en una revisión de las principales bases de los criterios de estabilidad derivados del análisis en el dominio temporal [44, 90].

En el capítulo 3 se realiza una revisión de las principales estrategias de control utilizadas para el control de los sistemas lineales con retardos temporales en la entrada o salida.

Contribuciones: (capítulos 4-7): En estos capítulos se reflejan las contribuciones aportadas en la tesis, y son una transcripción literal del contenido de las publicaciones. El capítulo 4 ha sido publicado en formato artículo la revista *International Journal of System Science*. En este capítulo se discute y compara las prestaciones en términos de robustez frente a incertidumbres de modelado del esquema de control basado en *predictor* respecto el control por realimentación estática del estado en sistemas lineales discretos con retardos variables en la entrada.

El contenido del capítulo 5 ha sido en parte publicado en formato congreso en *IFAC 2010, Praga* y en formato revista en *Control Engineering Practice*. En ambos trabajos se estudia el impacto en la estabilidad del uso del esquema de control basado en *predictor* en lugar del control estático en sistemas discretos lineales con retardos variables en la salida. Se analiza tanto la estabilidad respecto el rango de variación del retardo como la robustez respecto las incertidumbres del modelado. Los resultados experimentales y los resultados de simulación de la plataforma experimental publicados en esta última revista se refleja dentro del capítulo 7.

Finalmente, en el capítulo 6 se establece un método de diseño del controlador basado en *predictor* para sistemas lineales discretos con retardos variables en la entrada. La estrategia de diseño presentada se deriva a partir de un resultado de análisis de estabilidad, adaptado a diseño mediante la aplicación de algoritmos iterativos basados en desigualdades matriciales lineales. Este último capítulo ha sido objeto de publicación en formato *Technical Note* en la revista *Automática*.

Índice general

Parte I Sistemas lineales con retardos temporales

1. Modelado	3
1.1. Resumen	3
1.2. Introducción	3
1.3. Definición de sistema continuo con retardo temporal	3
1.3.1. Ecuaciones Diferenciales Funcionales	4
1.3.2. Clasificación de Sistemas con Retardos	6
1.3.3. Técnicas de Modelado	7
1.4. Sistemas discretos con retardos	12
1.4.1. Técnicas de discretización (retardo constante)	13
1.4.2. Técnicas de sobreaproximación (retardo variable)	14
1.4.3. Aplicaciones de control prácticas	17
1.5. Sistemas discretos aumentados	19
1.5.1. Retardo constante	19
1.5.2. Retardo variable	20
1.6. Conclusiones	21
2. Análisis de la estabilidad y robustez	23
2.1. Resumen	23
2.2. Introducción	23
2.2.1. Concepto de estabilidad	24
2.2.2. Criterios de Estabilidad: Clasificación	25
2.3. Análisis de estabilidad en el dominio frecuencial	27
2.3.1. Criterios basados en la determinación de la región de estabilidad	27
2.3.2. Criterios basados en el Teorema de la Pequeña Ganancia	28
2.4. Análisis de estabilidad en el dominio temporal	30
2.4.1. Análisis de la estabilidad LMI en sistemas continuos ..	31
2.4.2. Análisis de la estabilidad LMI en sistemas discretos ...	35
2.5. Análisis de Prestaciones y Criterios de Desempeño	47
2.5.1. En base a la dinámica de la respuesta	48
2.5.2. En base a rechazo a perturbaciones externas	48

2.5.3. En base a la robustez frente a incertidumbres	48
2.6. Conclusiones	49
3. Síntesis de controladores	51
3.1. Resumen	51
3.2. Introducción	51
3.3. Esquemas de control clásicos	52
3.3.1. Realimentación estática del estado	52
3.3.2. Control PID	54
3.3.3. Control en modo deslizante	54
3.4. Esquemas de control por Compensación de Tiempo Muerto (DTC)	55
3.4.1. Predictor de Smith	56
3.4.2. Asignación finita del espectro (FSA)	56
3.5. Adaptación FSA a sistemas discretos. Control basado en predictor	59
3.5.1. Modelo en bucle cerrado	59
3.6. Conclusiones	61

Parte II Contribuciones

4. Análisis estabilidad y robustez con predictor (retardo entrada)	65
4.1. Resumen/Motivación	65
4.2. Introducción	65
4.3. Aspectos preliminares	66
4.3.1. Realimentación estática del estado	67
4.3.2. Controlador basado en predictor	67
4.3.3. Sensibilidad a incertidumbres en el predictor	68
4.4. Formulación del Problema	68
4.5. Resultados Principales	69
4.5.1. Modelo en bucle cerrado	69
4.5.2. Análisis de Robustez	70
4.6. Ejemplo numérico	75
4.6.1. Resultados de Simulación	76
4.7. Conclusiones	76
5. Análisis estabilidad y robustez con predictor (retardo salida)	79
5.1. Resumen/Motivación	79
5.2. Introducción	79
5.3. Aspectos preliminares	80
5.3.1. Modelo en bucle cerrado	82
5.4. Análisis de estabilidad	83

5.4.1. Análisis de Robustez	88
5.5. Ejemplos numéricos	93
5.5.1. Ejemplo 1	93
5.5.2. Ejemplo 2 (Péndulo Invertido)	94
5.6. Conclusiones	96
6. Síntesis de controladores basados en predictor	97
6.1. Resumen/Motivación	97
6.2. Introducción	97
6.3. Formulación del problema	98
6.4. Resultados principales	99
6.4.1. Diseño del controlador basado en predictor	105
6.5. Ejemplo numérico	106
6.6. Conclusiones	107
7. Aplicación experimental	109
7.1. Resumen/Motivación	109
7.2. Descripción de la Plataforma	109
7.3. Resultados de simulación	110
7.3.1. Análisis de la robustez frente a incertidumbre en el retardo	110
7.3.2. Análisis de la robustez frente a incertidumbre en el modelo	113
7.4. Resultados Experimentales	115

Parte III Apéndices

8. Desigualdades Matriciales: Revisión	123
8.1. Definición LMI	123
8.2. Problemas LMI	124
8.2.1. Problema de Factibilidad	124
8.2.2. Problema de Optimización	124
8.3. Propiedades de las Desigualdades Matriciales Lineales	125
8.3.1. Complemento de Schur	125
8.3.2. S-Procedure	126
8.3.3. Bounded-real lemma	126
8.3.4. Cross-Product Lemma	126
8.3.5. Eliminación de variables de decisión LMI	127
9. Desigualdades Matriciales no lineales: Revisión	129
9.0.6. Algoritmos CCL	129

10. Modelo de sistemas inciertos	131
10.1. Incertidumbres normadas	131
10.2. Incertidumbres politópicas	131
10.3. Incertidumbres mixtas (normadas y politópicas)	132

Parte IV Publicaciones

Referencias	137
--------------------------	-----

Parte I

**Sistemas lineales con
retardos temporales**

1 Modelado

1.1. Resumen

Este capítulo define el concepto de retardo temporal y los modelos adoptados típicamente en la literatura para los sistemas con retardos. Ya que las contribuciones se han desarrollado para sistemas discretos, se hace especial hincapié en la revisión de las técnicas de modelado de los sistemas discretos con retardos a partir de los sistemas continuos, tanto para retardos constantes como variables.

1.2. Introducción

Dentro de este capítulo, en una primera parte, se introduce los modelos matemáticos que caracterizan el comportamiento dinámico de los sistemas con retardos temporales: ecuaciones diferenciales funcionales (FDEs) y aproximaciones sobre funciones de transferencia (a través del operador $e^{-\tau s}$), y en una segunda parte, se revisa las diferentes técnicas de discretización aplicadas sobre sistemas con retardos temporales, y los modelos discretos que se derivan [62, 21]. Respecto a la caracterización de los sistemas con retardos en tiempo continuo, también se puede encontrar modelos basados en reducciones a través de transformaciones y aproximaciones algebraicas, y en menor medida, representaciones polinomiales sobre anillos [89, 68, 101]. En los siguientes tutoriales [106, 105] se puede consultar en detalle una clasificación de todos estos métodos.

1.3. Definición de sistema continuo con retardo temporal

En esta sección se establece una definición formal y su clasificación en base a la naturaleza y origen del retardo. Bien conocido es que la respuesta de un sistema dinámico se puede caracterizar mediante ecuaciones diferenciales ordinarias (EDO):

$$\dot{x}(t) = f(t, x(t)) \quad (1.1)$$

donde $x(t) \in \mathbb{R}^n$ representa las variables de estado del proceso. Por tanto, mediante el modelo del proceso la evolución futura de las variables de estado a partir de cierto instante t_0 se puede determinar a partir del valor actual del estado $x(t_0)$.

No obstante, el comportamiento de ciertos sistemas dinámicos no pueden ser modelados a partir de EDO. Concretamente, existen ciertos sistemas en los que la evolución futura de las variables de estado no sólo depende del valor actual del estado $x(t_0)$ sino de los valores pasados dentro de una cierta ventana temporal $x(\theta)$, $t_0 - \tau \leq \theta \leq t_0$, $\tau > 0$. Este tipo de sistemas son conocidos en la literatura como *sistemas hereditarios* o *sistemas con retardos temporales*.

1.3.1. Ecuaciones Diferenciales Funcionales

Definición: Las ecuaciones diferenciales funcionales (EDF) se diferencian básicamente de las ecuaciones diferenciales ordinarias en que al menos uno de los argumentos de la ecuación no depende directamente del tiempo t , sino a través de una cierta función $g(t)$ de modo que:

$$\dot{x}(t) = f(t, x(g(t))) \quad (1.2)$$

El comportamiento de los sistemas con retardos temporales se pueden describir a partir de EDF [51]. Es fácil ver, por tanto, que siempre que el retardo sea constante la función $g(t)$ es lineal en t con pendiente 1. Por ejemplo, para un cierto retardo sistema con retardo τ la dinámica viene gobernada por:

$$\dot{x}(t) = f(t, x(t - \tau)) \quad (1.3)$$

donde la condición inicial del estado $x(t)$ en cualquier instante de tiempo arbitrario se define a partir de la evolución histórica del estado en la ventana temporal $t - \tau \leq t < t$ como:

$$\begin{aligned} x(t + \theta) &= \phi(\theta) \\ -\tau &\leq \theta \leq 0 \end{aligned} \quad (1.4)$$

condición a partir de la cual se puede obtener unívocamente la evolución futura del estado desde el instante t , siempre que la parte derecha de la ecuación (1.4) sea continua en todos sus argumentos, y Lipschitz, de forma análoga a las EDO con las condiciones iniciales definidas en un instante puntual.

Clasificación EDF de sistemas con retardos: En términos generales, la ecuación diferencial funcional de un sistema con retardos temporales puede escribirse como:

$$x^{(m)}(t) = f(t, x^{(m_1)}(t - \tau_1(t)), x^{(m_2)}(t), \dots, x^{(m_k)}(t - \tau_k(t))) \quad (1.5)$$

Dependiendo de si el argumento con mayor grado en la derivada contiene o no retardos cabe distinguir los siguientes casos:

- Ecuaciones diferenciales funcionales retardadas (EDFR): Cuando el término de mayor grado en la derivada (m) se sitúa en el término libre de retardo ($m > \max(m_1, m_2, \dots, m_k)$):

$$\dot{x}(t) = f(x(t - \tau(t))) \quad (1.6)$$

Por ejemplo, el siguiente sistema lineal con un único retardo en el estado:

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bx(t - \tau(t)) \quad (1.7)$$

- Ecuaciones diferenciales funcionales neutrales (EDFN): Cuando el término de mayor grado en la derivada se sitúa en el término con retardo de modo que ($m = \max(m_1, m_2, \dots, m_k)$):

$$\dot{x}(t - \tau_1(t)) = f(x(t - \tau_2(t))) \quad (1.8)$$

Existencia, unicidad y resolución de EDF: Análogamente al caso de las ecuaciones diferenciales ordinarias, resulta fundamental probar la existencia de una solución que, además, sea unívoca. En [43] (Teorema 1.2) se prueba que en términos generales las ecuaciones diferenciales funcionales tienen solución única. Para el caso particular de la ecuación diferencial retardada (EDFR), con retardo constante, en [5] se propone un método denominado *paso-a-paso*. El siguiente ejemplo ilustra este método:

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= -x(t - \tau) \\ x(t + \theta) &= K \in \mathbb{R} \\ -\tau &\leq \theta \leq 0 \end{aligned} \quad (1.9)$$

Tal y como se ha visto, en este tipo de ecuaciones la solución de $x(t)$ es única a partir de la condición inicial definida en la ventana histórica $[t - \tau, t]$. De ello, sobre el ejemplo se desprende que el valor de $x(t)$ entre $0 \leq t \leq \tau$ es $x(t) = K - Kt$, solución que satisface la ecuación en este intervalo. En general, el procedimiento se repite en cada uno de los intervalos definidos de forma análoga obteniendo la solución:

$$x(t) = \begin{cases} K - Kt & 0 \leq t \leq \tau \\ (K - K\frac{\tau^2}{2}) - Kt + K\frac{t^2}{2} & \tau \leq t \leq 2\tau \\ \dots & \end{cases}$$

1.3.2. Clasificación de Sistemas con Retardos

Segun el argumento de mayor grado en su derivada:

- Sistemas Retardados [105]: Cuando la dinámica del sistema se puede modelar a partir de una EDFR.
- Sistemas Neutrales [72]: Cuando la dinámica del sistema se puede modelar a partir de una EDFN. Este tipo de sistemas no será objeto de estudio en la presente tesis.

Segun el numero de retardos:

- Sistemas con retardo unico: Sistemas en los que sólo aparece un único retardo diferente:

$$\dot{x}(t) = f(t, x(t), x(t - \tau(t))) \quad (1.10)$$

- Sistema con múltiples retardos: Sistemas en los que aparece más de un retardo:

$$\dot{x}(t) = f(t, x(t), x(t - \tau_1(t)), \dots, x(t - \tau_m(t))) \quad (1.11)$$

En el caso particular de que todos los retardos $\tau_i(t)$, $1 \leq i \leq m$ sean múltiplos enteros de un cierto retardo base τ , se denomina *commensurate delays*:

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= f(t, x(t), x(t - d_1(t)\tau), \dots, x(t - d_m(t)\tau)) \\ d_i(t) &\in \mathbb{N}+, 1 \leq i \leq m \end{aligned} \quad (1.12)$$

Segun el tipo de retardo:

- Retardo puntual: Cuando el retardo afecta al estado en valores puntuales de tiempo. Cualquiera de los casos expuestos anteriormente son retardos puntuales.
- Retardo distribuido: Este tipo de retardo no tiene un valor puntual sino que su valor se encuentra repartido dentro de una ventana temporal:

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= f(t, g[x(\int_{-\tau}^0 x(t + \theta)d\theta)]) \\ d_i &\in \mathbb{N}+, 1 \leq i \leq m \end{aligned} \quad (1.13)$$

Nótese que un retardo distribuido puede modelarse como la suma de infinitos retardos puntuales cuyo valores están distribuidos equiespaciadamente dentro del intervalo $[-\tau, 0]$:

$$\dot{x}(t) = f(t, \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{i=0}^N g(x(t - \tau + \frac{i\tau}{N})) \quad (1.14)$$

Algunas aplicaciones prácticas donde aparece este tipo de retardos se puede encontrar en el campo de la biomedicina [14].

Segun la ubicación del retardo: Definiendo el siguiente modelo de proceso cuya representación en variables de estado es:

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= f(t, x(t - \tau_{x_1}), \dots, x(t - \tau_{x_{m_x}}), \\ &u(t - \tau_{u_1}), \dots, u(t - \tau_{u_{m_u}})) \\ y(t) &= g(t, x(t - \tau_{y_1}), \dots, x(t - \tau_{y_{m_y}})) \end{aligned} \quad (1.15)$$

según la ubicación del retardo se tiene:

- Retardos en la entrada ($\tau_{u_i}, 1 \leq i \leq m_u$): Tiene lugar cuando existe un retardo entre el instante de generación de la acción de control y el instante en que ésta se aplica a la planta. Ejemplos típicos se dan en sistemas en los que existe transporte de materia o energía o en sistemas de control distribuidos donde el controlador y el actuador se encuentran físicamente separados.
- Retardos en la salida ($\tau_{y_i}, 1 \leq i \leq m_y$): Tiene lugar cuando existe un retardo entre el instante en que el sensor mide la salida y el instante de cálculo de la acción de control. Ejemplos típicos se dan en sistemas en los que existe transporte de materia o energía o en sistemas de control distribuidos donde el sensor y el controlador se encuentran físicamente separados.
- Retardos en el estado: Afecta al estado interno del proceso y corresponde dentro del modelo con $\tau_{x_i}, 1 \leq i \leq m_x$. Por ejemplo, los sistemas físicos en los que existen lazos cerrados internos en los que hay recirculación de materia/energía con el correspondiente retardo interno de propagación.

1.3.3. Técnicas de Modelado

En base a la información acerca del retardo se puede construir modelos equivalentes o aproximados que faciliten su estudio. A grandes rasgos, la información puede ser de naturaleza estadística: distribución de probabilidad de de retardo o modelo Markoviano de probabilidades de transición de retardo [8, 18], o de naturaleza determinista: se dispone de un modelo del proceso y del retardo.

En base a la clasificación anterior, se puede diferenciar dos tendencias (determinista y estocástica) aplicadas sobre sistemas con retardos temporales (En [7] se plantean ambos enfoques). Mientras que la primera garantiza exhaustivamente la estabilidad y los posibles criterios de desempeño (robustez, rechazo a perturbaciones, etc) exigidos en las especificaciones definidas sobre el comportamiento del sistema, el segundo, a menudo a cambio de reducir cierto conservadurismo, define los criterios de desempeño en base a la media o esperanza. (En otras palabras, el cumplimiento de los mismos está *casi* garantizado).

Modelo determinista versus estocástico:

Modelo Determinista: En esta sección se ilustra los diferentes modelos del retardo en función de la información disponible del mismo:

- Caso retardo constante:
 - Retardo completamente desconocido: En este caso, la única forma de asegurar la estabilidad es mediante la aplicación de criterios de estabilidad *independientes del retardo* (ver capítulo 2), a menudo demasiado conservadores [43].
 - Retardo acotado: A diferencia del caso anterior, aunque el retardo exacto es desconocido, se sabe *a priori* que el retardo está acotado y además se conoce la cota mínima y máxima. El análisis de la estabilidad en este caso resulta menos conservador debido a la inclusión de información adicional sobre el retardo. Es posible, por tanto, aplicar criterios de estabilidad *dependientes del retardo* [43]. (ver capítulo 2).
 - Retardo conocido: Es el caso más favorable ya que a partir del modelo del proceso, mediante el diseño adecuado del esquema de control, es posible eliminar éste de la ecuación característica [114, 94]. Otra posibilidad, para retardos pequeños, consiste en obtener un modelo aproximado LTI sin retardo a partir de la aproximación de Padé.
- Caso retardo variable:
 - Retardo completamente desconocido: Análogamente al caso de retardo constante, no se dispone de información acerca del rango de variación ni del patrón de variación temporal, que se asume completamente aleatorio. Análogamente al caso de retardo constante, existen criterios de estabilidad *independientes del retardo*, que se detallan en el capítulo 2.
 - Retardo acotado: En este caso el valor del retardo es desconocido y varía aleatoriamente dentro de un intervalo finito, del que sólo se conoce las cotas mínima y máxima (τ_m y τ_M , respectivamente. El retardo, por tanto, satisface $\tau_m \leq \tau(t) \leq \tau_M$. La gran mayoría de los resultados de análisis de sistemas con retardos variables tienen en cuenta este modelo de retardo [9, 143].
 - Retardo conocido: En este caso se dispone de un modelo dinámico en ecuaciones de estado de la evolución del retardo o donde se puede modular el retardo a partir del estado del proceso [120].

Modelo Estocástico:

- Distribución probabilística del retardo: por ejemplo, la función densidad de probabilidad del retardo que puede ser sobre el retardo continuo o por intervalos [29].
- Modelo de transición de Markov [8]: Este modelo incluye la probabilidad de transición del valor del retardo en un determinado instante y el siguiente. Se define tanto sobre sistemas continuos como discretos. En el primer caso, el modelo resultante es un conjunto finito de posibles realizaciones con probabilidad de transición en tiempo continuo mientras que en el caso discreto el modelo se puede asociar a un sistema discreto conmutado donde las probabilidades de transición se definen según el modelo de Markov [123].

Modelos en Representación Interna: variables de estado: En el dominio temporal, la evolución del estado del proceso se representa mediante las EDF ya definidas anteriormente. Por ejemplo, el siguiente sistema lineal con múltiples retados puntuales constantes:

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= Ax(t) + \sum_{i=1}^{p_x} A_i x(t - \tau_{x_i}) + \sum_{i=1}^{p_u} B_i u(t - \tau_{u_i}) \\ y(t) &= \sum_{i=1}^{p_y} C_i x(t - \tau_{y_i}) \end{aligned} \quad (1.16)$$

Modelos en Representación Externa: entrada/salida: Según la ubicación del retardo, cabe distinguir:

Retardos en la entrada/salida: Consideremos el sistema LTI continuo en representación interna con único retardo en la entrada y único retardo en la salida:

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t - \tau_u) \\ y(t) &= Cx(t - \tau_y) \end{aligned} \quad (1.17)$$

La función de transferencia entrada/salida en representación externa, expresada en el Dominio de Laplace, es:

$$G(s) = C(sI_n - A)^{-1} B e^{-(\tau_u + \tau_y)s} = G_{nom}(s) e^{-\tau s} \quad (1.18)$$

donde $G_{nom}(s)$ es la fdt del sistema libre de retardo y $\tau = \tau_u + \tau_y$. En general, para el sistema descrito en (1.16) sin retardos en el estado ($\tau_{x_i} = 0$) la fdt es:

$$G(s) = \sum_{i=1}^{p_u} \sum_{j=1}^{p_y} C_i (sI_n - A)^{-1} B_j e^{-(\tau_{u_i} + \tau_{y_j})s} \quad (1.19)$$

Nótese que el retardo en la entrada y salida no afecta a la dinámica del sistema, ya que la ecuación característica es idéntica a la del sistema libre de retardo.

Retardo en el estado: Consideremos el siguiente sistema continuo LTI con único retardo en el estado, expresado en representación interna:

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= Ax(t) + A_d x(t - \tau_x) + Bu(t) \\ y(t) &= Cx(t) \end{aligned} \quad (1.20)$$

La función de transferencia entrada/salida en representación externa, expresada en el Dominio de Laplace, es:

$$G(s) = C(sI_n - A - A_d e^{-\tau_x s})^{-1} B \quad (1.21)$$

En general, para el sistema descrito en (1.16) sin retardos en la entrada/salida ($\tau_{u_i} = 0, \tau_{y_i} = 0$) la fdt es:

$$G(s) = C(sI_n - A - \sum_{i=1}^{p_x} A_i e^{-\tau_{x_i} s})^{-1} B \quad (1.22)$$

Nótese que a diferencia de los sistemas convencionales, la ecuación característica es trascendente. Por tanto, el número de raíces es infinito. Por tanto, las ecuaciones diferenciales con retardos temporales se diferencian de las EDO por su naturaleza infinito-dimensional.

Modelo en bucle cerrado:

Control por realimentación estática de estado/salida: Con el modelo lineal con múltiples retardos de actuación, de medida y/o en los estados representado por 1.16, y ley de control $u(t) = Ky(t)$ el modelo en bucle cerrado resultante es:

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + \sum_{i=1}^{p_x} A_i x(t - \tau_{x_i}) + \sum_{i=1}^{p_u} \sum_{j=1}^{p_y} B_i K C_j x(t - \tau_{i,j}) \quad (1.23)$$

$$\tau_{i,j} = \tau_{u_i} + \tau_{y_j}$$

Nótese que el modelo en bucle cerrado no depende de los valores de retardo de entrada y salida de forma individual (τ_{u_i}, τ_{y_j} respectivamente), sino de la suma de ambos $\tau_{i,j}$. Sin pérdida de generalidad, si se considera un retardo de cálculo en la acción de control τ_c , se sigue manteniendo esta propiedad donde $\tau_{i,j} = \tau_{u_i} + \tau_{y_j} + \tau_c$. De hecho, en el análisis y diseño de sistemas de control con retardos en la entrada/salida con controladores estáticos siempre se tiene en cuenta la suma de estas tres contribuciones.

Control dinámico: Por simplicidad, supóngase el sistema con único retardo en la entrada y en la salida:

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t - \tau_u) \\ y(t) &= Cx(t - \tau_y) \end{aligned} \quad (1.24)$$

y un controlador dinámico genérico de la forma:

$$\begin{aligned} \dot{z}(t) &= A_c z(t) + B_c y(t) \\ u(t) &= C_c z(t) + D_c y(t) \end{aligned} \quad (1.25)$$

Siempre que τ_u sea constante, las ecuaciones dinámicas del controlador anterior se pueden expresar también como:

$$\begin{aligned} \dot{z}(t - \tau_u) &= A_c z(t - \tau_u) + B_c y(t - \tau_u) \\ u(t) &= C_c z(t) + D_c y(t) \end{aligned} \quad (1.26)$$

Teniendo en cuenta lo anterior, el sistema en bucle cerrado resultante es:

$$\begin{aligned} \dot{\phi}(t) &= \bar{A}\phi(t) + \bar{A}_\tau \phi(t - \tau) \\ \tau &= \tau_u + \tau_y \end{aligned} \quad (1.27)$$

donde $\phi(t) = (x(t) \ z(t - \tau_u))^T$ y

$$\begin{aligned}\bar{A} &= \begin{pmatrix} A & BC_c \\ B_c C & A_c \end{pmatrix} \\ \bar{A}_r &= \begin{pmatrix} BD_c C & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\end{aligned}\tag{1.28}$$

Nótese que si el retardo en la entrada τ_u es constante, la expresión en bucle cerrado de un sistema con retardo en la entrada/salida con un regulador dinámico no depende de los retardos individuales de entrada y salida τ_u, τ_y , sino de la suma de ambos.

1.4. Sistemas discretos con retardos

En implementaciones prácticas de control el sensor y el controlador ejecutan sus tareas en instantes puntuales de tiempo, ya que se implementan con dispositivos digitales. De este modo la actualización de la acción de control y la medida de la salida del proceso se realiza en ciertos instantes puntuales t_{a_k} y t_{s_k} , $k = 1, 2, \dots$ respectivamente. Bajo este escenario, se define el periodo de muestreo como la diferencia entre dos instantes de tiempo consecutivos. Por ejemplo, el periodo de muestreo del sensor es $T_{s_k} = t_{s_k} - t_{s_{k-1}}$. Por simplicidad, los periodos de muestreo se asumen constantes $T_{s_k} = T_s, T_{a_k} = T_a$. Normalmente, en la gran mayoría de aplicaciones prácticas se asume que la señal de acción de control se mantiene constante durante cada periodo (retenedor de orden cero en la entrada), aunque de forma genérica puede entenderse que no necesariamente es así. Por ejemplo, se podría implementar un bloque *Generalised Sample-Data Hold Function* en la entrada en lugar de un retenedor de orden cero, con el fin de mejorar las prestaciones del control mediante el diseño adecuado de la función de interpolación [109].

En lo que sigue se describe las técnicas de modelado de sistemas continuos con retardos en el dominio del tiempo discreto, tanto para retardos constantes como variables.

En el primer caso (retardo constante), es posible obtener un modelo discreto exacto en tanto en cuanto se garantiza que el valor en el instante de muestreo siempre coincidirá con el valor de la respuesta del sistema continuo. No obstante, esta afirmación sólo es válida cuando el retardo afecta a la entrada, salida o ambos. Cuando el retardo afecta al estado, sin embargo, esto no se cumple [19]. En lo que sigue se revisará el procedimiento de discretización con retenedor de orden cero en la entrada.

En el caso de retardo variable, en cambio, el modelo ya no es exacto, y por tanto es necesario recurrir a técnicas de sobreaproximación [21] que permiten obtener un modelo discreto con incertidumbres para este tipo de sistemas. La técnica de sobreaproximación diseñada debe tender a reducir al máximo el

grado de conservadurismo añadido. En [58] se presenta un estudio comparativo de varias técnicas de sobreaproximación, en términos de conservadurismo versus complejidad del modelo resultante.

1.4.1. Técnicas de discretización (retardo constante)

En esta sección se revisa en primer lugar la técnica de discretización para sistemas con retardo constante, para el caso de retardo en la entrada y la salida, bajo las dos hipótesis: retardos múltiplos del periodo de muestreo T (*commensurate delays*) y retardos no múltiplos del periodo de muestreo T (*incommensurate delays*) [43]. En una segunda parte se revisa el procedimiento de discretización para sistemas con retardo en el estado, donde se ilustra la imposibilidad de obtener un modelo discreto exacto [19].

Retardo E/S múltiplo entero del periodo de muestreo: Considérese el sistema descrito en la Ecuación (1.16) sin retardo en el estado ($\tau_{x_i} = 0, \forall i \in 1 \dots p_x$) donde el controlador es discreto. Por simplicidad se asume que todos los periodos son equivalentes (sensor, controlador y actuador), y están sincronizados.

Dado que los retardos son múltiplos enteros de T , éstos se pueden escribir como:

$$\begin{aligned}\tau_{u_i} &= d_{u_i} T, 1 \leq i \leq p_u \\ \tau_{y_i} &= d_{y_i} T, 1 \leq i \leq p_y \\ d_{u_i}, d_{y_i} &\in \mathbb{Z}^+\end{aligned}\tag{1.29}$$

Aplicando la técnica de discretización estándar con retenedor de orden cero a la entrada del proceso el modelo discreto es:

$$\begin{aligned}x(k+1) &= e^{AT} x(k) + \sum_{i=1}^p \int_0^T e^{As} ds B_i u(k - d_{u_i}) \\ y(k) &= Cx(k - d_{y_i})\end{aligned}\tag{1.30}$$

Retardo E/S no múltiplo entero del periodo de muestreo: En este caso, sin pérdida de generalidad el retardo se puede descomponer del siguiente modo:

$$\begin{aligned}\tau_{u_i} &= d_{u_i} T + \epsilon_{u_i} \\ \tau_{y_i} &= d_{y_i} T + \epsilon_{y_i} \\ d_{u_i}, d_{y_i} &\in \mathbb{Z}^+ \\ 0 &\leq \epsilon_{u_i}, \epsilon_{y_i} < T\end{aligned}\tag{1.31}$$

Análogamente al caso anterior, el modelo equivalente discreto a periodo T es:

$$\begin{aligned} x(k+1) &= e^{AT}x(k) + \\ &+ \sum_{i=1}^{p_u} \int_0^{T-\epsilon_{u_i}} e^{As} ds B_i u(k-d_{u_i}) + \sum_{i=1}^{p_u} \int_{T-\epsilon_{u_i}}^T e^{As} ds B_i u(k-d_{u_i}-1) \\ y(k) &= \sum_{i=1}^{p_y} C_i x(k-d_{y_i} - \text{ceil}(\frac{\epsilon_{y_i}}{T})) \end{aligned} \quad (1.32)$$

Teniendo en cuenta que en el modelo definido la referencia de tiempo discreto se define a partir de los instantes de muestreo del sensor, el retardo a la salida es percibido como el retardo real más un periodo de muestreo si éste no es múltiplo entero de T .

Retardo en el estado: En sistemas con retardo en el estado, a diferencia de los casos anteriormente vistos donde el retardo afecta sólo a la entrada o la salida, no es posible obtener un modelo discreto equivalente exacto. Veamos el siguiente ejemplo para ilustrar este hecho. Dado el sistema con retardo en el estado τ_x :

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + A_q x(t - \tau_x) + Bu(t) \quad (1.33)$$

el modelo discretizado con retenedor de orden cero en la entrada es:

$$x(kT+T) = A_d x(kT) + B_d u(kT) + \int_{kT}^{kT+T} e^{kT+T-s} A_1 x(s - \tau_x) ds$$

donde el término $\int_{kT}^{kT+T} e^{kT+T-s} A_1 x(s - \tau_x) ds$ necesita ser aproximado para poder obtener el modelo discreto. En [19] se obtiene un modelo discreto aproximado para los casos $\tau_x < T$ y $\tau_x > T$ asumiendo que la evolución del estado $x(t)$ es constante a trozos.

1.4.2. Técnicas de sobreaproximación (retardo variable)

El objetivo de las técnicas de modelado basado en la sobreaproximación de los sistemas con retardos variables consiste básicamente en establecer los pasos a seguir para la obtención de un modelo discreto con incertidumbres [81, 98] que facilite el estudio (análisis y diseño de controladores) en el dominio temporal. La idea *grosso modo* consiste en encapsular el efecto de las variaciones temporales de retardo dentro de las matrices de incertidumbre del modelo. Sin embargo, dichas técnicas no están exentas de un cierto grado de

conservadurismo, que se define en el concepto de error de sobreaproximación (discrepancia entre el modelo real y sobreaproximado) [21]. La idea, por tanto, consiste en diseñar la estrategia de modelado de forma que mejore en la medida de lo posible la relación de compromiso entre precisión (menor error de sobreaproximación) y complejidad del modelo sobreaproximado [58].

Por ejemplo, un sistema continuo LTI con un solo retardo variable en la entrada:

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t - \tau(t)) \quad (1.34)$$

Retardo menor que un periodo de muestreo T : el modelo discretizado a periodo T con retenedor de orden cero en la entrada, tal que $\tau(t) \leq \tau_M < T$ puede obtenerse de forma exacta como [40]

$$\begin{aligned} \phi(k+1) &= A(\Delta(\tau_k))\phi(k) + B(\Delta(\tau_k))u(k) & (1.35) \\ A(\Delta(\tau_k)) &= \begin{pmatrix} e^{AT} & \Delta(\tau_k) \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\ B(\Delta(\tau_k)) &= \begin{pmatrix} \int_0^T e^{A(T-s)} B ds - \Delta(\tau_k) \\ I \end{pmatrix} \\ \phi(k) &= (x(k) \ u(k-1))^T \end{aligned}$$

donde el término $\Delta(\tau_k)$ contiene el efecto de las variaciones de retardo. Mediante las técnicas de sobreaproximación, es posible generar un modelo discreto aumentado incierto a partir del sistema anterior cuya forma es:

$$\phi(k+1) = A_k\phi(k) + B_k u(k) \quad (1.36)$$

donde las matrices A_k, B_k contienen las incertidumbres generadas por el término $\Delta(\tau_k)$, y su valor depende de la técnica de sobreaproximación elegida. El modelo de las incertidumbres definido sobre las matrices A_k, B_k puede ser normada, politópica o mixto (ver Apéndice 10), dependiendo también de la técnica de sobreaproximación elegida.

Retardo mayor que un periodo de muestreo T : En el caso de que el retardo del sistema (1.34) sea mayor que un periodo de muestreo T , siguiendo pasos análogos al caso anterior, y siempre que se garantice que los datos lleguen ordenados, el sistema puede obtenerse como [21]:

$$\phi(k+1) = A_k\phi(k) + B_k u(k) \quad (1.37)$$

donde el estado aumentado se define como:

$$\begin{aligned}\phi(k) &= (x(k)^T \ u(k-1)^T \ \dots \ u(k-d)^T)^T \\ d &= \text{floor}\left(\frac{\tau M}{T}\right)\end{aligned}\tag{1.38}$$

Las matrices A_k, B_k contienen las incertidumbres generadas por el retardo variable, análogamente al caso anterior, y su valor depende de la técnica de sobreaproximación elegida.

En los desarrollos anteriores se ha supuesto un periodo de muestreo T constante. En [20] se amplía los resultados anteriores para periodos de muestreo variables T_k .

Técnicas de sobreaproximación: En resumen, alguna de las técnicas de sobreaproximación, recogidas en el trabajo [58], son:

- *Aproximación basada en la Forma Real de Jordan [JN]:* Esta técnica utiliza la factorización basada en la Forma Real de Jordan sobre la matriz del sistema A para obtener una aproximación politópica de las incertidumbres con un cierto número de vértices N , cuyo valor depende de la multiplicidad geométrica y algebraica de los valores propios de A .
- *Aproximación basada en el Teorema de Cayley-Hamilton [CH]:* Este método, muy similar al anterior, y que también hace uso de la Forma Real de Jordan, utiliza el Teorema de Cayley-Hamilton: cualquier potencia de A de orden ν o superior a ν se puede expresar como combinación lineal de las ν primeras potencias de A : $I, A, \dots, A^{\nu-1}$. El resultado es también una aproximación politópica de las incertidumbres con un cierto número de vértices N , cuyo valor depende de la multiplicidad geométrica y algebraica de los valores propios de A .
- *Aproximación basada en Series de Taylor [TS]:* Esta técnica utiliza la descomposición en Series de Taylor de la matriz e^{At} para generar un modelo politópico de $p+1$ vértices con incertidumbres normadas, donde p es el grado de aproximación del polinomio.
- *Aproximación de mallado con incertidumbres normadas [GND]* Este método [108, 115] está basado en la partición en N subintervalos equiespaciados del parámetro del sistema variable con el tiempo, en este caso el retardo. El resultado es un modelo con incertidumbres mixtas (normadas y politópicas).

Los trabajos [58, 40] discuten comparativamente las técnicas de sobreaproximación anteriores. Tanto en GND como en TS, la complejidad del modelo sobreaproximado es independiente del orden del sistema. Además, se puede reducir el error de sobreaproximación mediante ajuste de un cierto parámetro (en TS, con el grado del polinomio p y en GND con el número de puntos de mallado N). Sin embargo, en GND, si el número de puntos del mallado $N \rightarrow \infty$, entonces el error de sobreaproximación tiende a 0. En cambio,

si el grado de polinomio p en TS aumenta, el error de sobreaproximación no tiende necesariamente a desaparecer.

1.4.3. Aplicaciones de control prácticas

En la Figura 1.4.3 se ilustra el esquema típico de un sistema de control con retardos, donde los dispositivos del bucle de control (sensor, controlador y actuador) son digitales.

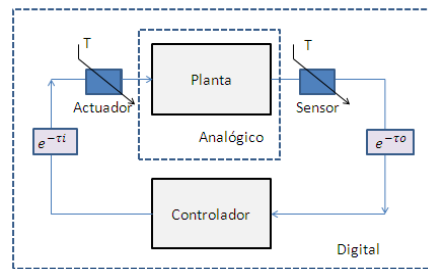


Figura 1.1. Bucle de control con retardos temporales con controlador digital y retenedor de orden cero a periodo T

En relación a este tipo de sistemas, especial atención merece los denominados *Sistemas de Control Basados en Red* (SCBR). Este tipo de sistemas constituye el ejemplo de aplicación más típico de los sistemas con retardos temporales [91, 61] (ver Figura 1.4.3). De hecho, la proliferación y el avance tecnológico en materia de redes de datos, así como la tecnología digital, ha motivado colateralmente el estudio de este tipo de sistemas. Por este motivo se dedica una sección para describirlos. Los sistemas de control basados en red (SCBR o de sus siglas en inglés: NCS de *Network Control Systems*) se definen como sistemas de control donde los diferentes elementos que lo integran (sensor, actuador y controlador) se encuentran distribuidos espacialmente, de modo que el intercambio de información se realiza a través de un medio de comunicación, generalmente compartido.

A continuación se describe los aspectos fundamentales que suelen tratarse en el estudio de este tipo de sistemas:

Problemática de los SCBR:

Limitación en el ancho de banda: La limitación en el ancho de banda del canal impone una restricción sobre la máxima cantidad de información que se puede transmitir por unidad de tiempo. En [125, 126, 13] se analiza la influencia de este fenómeno en la estabilidad de sistemas lineales, y en [78] se extiende los resultados anteriores a sistemas no lineales.

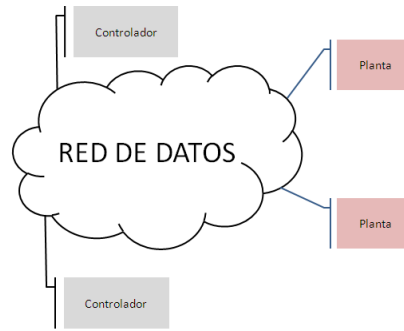


Figura 1.2. Esquema de un sistema de control basado en red

Ruido de cuantificación: En general, cuando los controladores son digitales, hay que tener en cuenta el problema de la aritmética finita. La disponibilidad de un número *finito* de bits para codificar el valor de las muestras da lugar a errores de redondeo [35]. Por tanto, el análisis de este fenómeno obliga a considerar dentro del modelo una no-linealidad no invertible conocida como *ruido de cuantificación* [24, 125, 126, 15, 92].

Sin embargo, en [27] se trata el problema del ruido de cuantificación conjuntamente con el retardo. En este trabajo se incluye además el efecto de la saturación en la acción de control, fenómeno vinculado también a la capacidad finita de los paquetes de datos [30].

Retardos inducidos: Una de los rasgos más destacados de los SCBR es la presencia de retardos temporales, principalmente imputables al medio de comunicación de datos, y en menor medida al coste de conversión A/D, D/A, cálculo de la acción de control, etc. En los medios de comunicación compartidos es inevitable la aparición de retardos, debido por ejemplo, a la necesidad de cubrir grandes distancias, o a posibles congestiones puntuales en nodos intermedios, dependiendo de la carga de tráfico en la red, etc.

Pérdida de datos: Otro de los aspectos principales a considerar en el modelo de SCBR es la posibilidad de pérdida de datos [100] debido a posibles fallos en la transmisión.

Muestreo no uniforme: En la práctica, en los sistemas discretos el periodo de muestreo está sujeto a posibles variaciones temporales debido al efecto del *jitter* derivado de los retardos inducidos por los tiempos de cómputo o los retardos de propagación en red, etc [79], o por la propia política de planificación de los dispositivos guiados por eventos [57]. De forma análoga al modelado del retardo variable, usualmente se modela el periodo de muestreo variable y aleatorio pero acotado tal que $T_{s_m} \leq T_s \leq T_{s_M}$, donde los valores T_{s_m}, T_{s_M} se asumen conocidos.

De todos los problemas anteriormente vistos, los que se tratan con mayor frecuencia son el efecto de los retardos y la pérdida de datos.

1.5. Sistemas discretos aumentados

En esta sección se revisan técnicas de obtención de sistemas discretos aumentados libre de retardo a partir de los sistemas discretos con retardos. Gracias a esta posibilidad se puede simplificar en gran medida el estudio de los sistemas con retardos discretos. Sin embargo, si el retardo es muy grande, pueden existir complicaciones dada la complejidad del modelo. En los siguientes capítulos (capítulo 2) se discute este fenómeno en el contexto del análisis de la estabilidad para este tipo de sistemas.

1.5.1. Retardo constante

Dado un sistema lineal discreto con retardos constantes, es posible obtener un modelo aumentado equivalente libre de retardos. Considérese el sistema 1.30. Es fácil ver que se puede expresar como:

$$\begin{aligned}\bar{x}(k+1) &= \bar{A}\bar{x}(k) + \bar{B}u(k) \\ y(k) &= \bar{C}\bar{x}(k)\end{aligned}\quad (1.39)$$

Retardo solo en la entrada: En este caso, a partir del estado aumentado definido como:

$$\bar{x}(k) = (x(k) \ u(k-1) \ u(k-2) \ \cdots \ u(k-\bar{d}))^T \quad (1.40)$$

las matrices del sistema aumentado son:

$$\begin{aligned}\bar{A} &= \begin{pmatrix} A & M_1 & M_2 & \cdots & M_{\bar{d}-1} & M_{\bar{d}} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & I & 0 \end{pmatrix} \\ \bar{B} &= (0 \ I \ 0 \ \cdots \ 0 \ 0)^T \\ \bar{C} &= (I \ 0 \ 0 \ \cdots \ 0 \ 0) \\ M_j &= \begin{cases} \int_0^T e^{As} ds B_i & \text{si } j = i \\ 0 & \text{si } j \neq i \end{cases}\end{aligned}\quad (1.41)$$

Retardo en la entrada y en la salida: En este caso, a partir del estado aumentado definido como:

$$\bar{x}(k) = \begin{pmatrix} x(k) \\ x(k-1) \\ \dots \\ x(k-\bar{d}_y) \\ u(k-1) \\ u(k-2) \\ \dots \\ u(k-\bar{d}_u) \end{pmatrix} \quad (1.42)$$

$$\bar{d}_u = \max_{i=1}^{p_u} d_{i_u}$$

$$\bar{d}_y = \max_{i=1}^{p_y} d_{i_y}$$

las matrices del sistema aumentado son:

$$\bar{A} = \begin{pmatrix} A & 0 & \dots & 0 & M_1 & M_2 & \dots & M_{\bar{d}-1} & M_{\bar{d}} \\ I & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & I & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & I & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & I & 0 \end{pmatrix} \quad (1.43)$$

$$\bar{B} = (0 \ I \ 0 \ \dots \ 0 \ 0)^T$$

$$\bar{C} = (C_1 \ C_2 \ \dots \ C_{d_y} \ I \ 0 \ \dots \ 0 \ 0)^T$$

$$M_j = \begin{cases} \int_0^T e^{As} ds B_i & \text{si } j = i \\ 0 & \text{si } j \neq i \end{cases}$$

1.5.2. Retardo variable

Si el retardo es variable, el modelo aumentado equivalente también es un sistema libre de retardos de dimensión finita, pero a diferencia del retardo constante, el sistema es LTV [62]: la matriz $\bar{A}(k)$ es variable y admite tantas realizaciones como posibles retardos. Por ejemplo, considérese el siguiente sistema discreto con retardo variable en el estado d_k

$$x(k+1) = Ax(k) + A_d x(k-d_k) + Bu(k) \quad (1.44)$$

$$d_m \leq d_k \leq d_M$$

considerando el estado aumentado $(x(k) \ x(k-1) \ \dots \ x(k-d_M))$, el sistema anterior puede expresarse como:

$$\bar{x}(k+1) = \bar{A}(k)\bar{x}(k) + \bar{B}u(k) \quad (1.45)$$

donde

$$\bar{A}(k) = \begin{pmatrix} A & 0 & \cdots & M_2(k) & \cdots & M_{\bar{\delta}-1}(k) & M_{\bar{\delta}(k)} \\ I & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & I & \cdots & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & I & 0 \end{pmatrix} \quad (1.46)$$

$$\bar{B} = (B \ 0 \ \cdots \ 0)^T$$

$$M_i(j) = \begin{cases} A_d & \text{si } j = d_k \\ 0 & \text{si } j \neq d_k \end{cases}$$

$$\delta = d_M - d_m$$

1.6. Conclusiones

En este capítulo se han revisado algunas de las estrategias de modelado de sistemas con retardos temporales. Este tipo de sistemas son de dimensión infinita, lo que implica a menudo una mayor complejidad en su estudio. Puesto que en la práctica, la mayor parte de controladores y dispositivos son digitales, resulta interesante disponer del modelo equivalente discreto. La principal ventaja de éstos es que es posible aplicar técnicas convencionales ya que mediante la definición del estado aumentado, es posible obtener un sistema libre de retardos. Cuando el retardo es variable, también es posible obtener un modelo discreto aumentado con incertidumbres, libre de retardos, mediante técnicas de sobreaproximación, lo que resulta de gran utilidad en el análisis y diseño de controladores discretos, tal y como se verá en los siguientes capítulos.

2 Análisis de la estabilidad y robustez

2.1. Resumen

Este capítulo revisa las principales técnicas de análisis de estabilidad de sistemas continuos y discretos con retardos. Se ilustra la problemática derivada del tratamiento de retardo en ambos casos, así como las soluciones adoptadas en la literatura y los problemas abiertos que actualmente sigue siendo motivo de línea de trabajo.

2.2. Introducción

La presencia de retardos temporales en los sistemas de control tiene un impacto en la respuesta del sistema, provocando en líneas generales una pérdida de prestaciones en el comportamiento, que ocasionalmente puede producir inestabilidad [71]. También puede suceder justo lo contrario: la presencia de retardos puede estabilizar un sistema inestable en ausencia de retardos [44]. En cualquier caso, el análisis de estabilidad en este tipo de sistemas resulta notoriamente más complejo que en los sistemas convencionales, principalmente debido a su naturaleza infinito-dimensional. En el caso de retardos variables y aleatorios, el análisis por ubicación de polos deja de tener sentido, siendo por tanto necesario recurrir a otras técnicas basadas en el Teorema de la Pequeña Ganancia o en el método de Lyapunov. La propia complejidad que se deriva de su estudio, junto con el interés práctico, han motivado una amplia línea de investigación con numerosas contribuciones que se abordan tanto en el dominio frecuencial como en el temporal. Al igual que sucede en la Teoría clásica de Control, en el análisis de los sistemas con retardos temporales también se puede distinguir la clásica dicotomía entre el enfoque estocástico y determinista [91, 7].

De hecho, ya por los finales de los años 50's, surgieron las primeras contribuciones para el análisis de la estabilidad de los sistemas con retardos de la mano de los dos grandes precursores en esta línea:

- N. Krasovskii: Análisis de la estabilidad de sistemas con retardos mediante el manejo de funcionales de Lyapunov [73].

- B. Razumikhin: Redefinición de las clásicas funciones de Lyapunov aplicables a sistemas con retardos [104].

Los dos resultados anteriores establecen los fundamentos del análisis de la estabilidad en el dominio del tiempo. Las contribuciones posteriores se centran básicamente en el diseño de la función o funcional candidata que mejoren en la medida de lo posible la relación de compromiso entre complejidad y conservadurismo.

2.2.1. Concepto de estabilidad

Se dice que un proceso es estable cuando dadas ciertas condiciones iniciales todos los estados del proceso alcanzan el punto de equilibrio en régimen permanente.

El concepto de estabilidad referido al comportamiento de un proceso puede clasificarse dependiendo de las siguientes características. A saber:

Estabilidad simple: Se dice simplemente que un proceso es estable si, para cualquier valor arbitrario de tiempo continuo $t_0 \in \mathbb{R}^+$ o tiempo discreto $k_0 \in \mathbb{N}^+$ y para cierto escalar $\epsilon > 0$ existe cierto valor $\delta = \delta(t_0|k_0, \epsilon)$ tal que, para sistemas continuos verifica:

$$\|x(t_0)\| \leq \delta \rightarrow \|x(t)\| < \epsilon, \text{ para todo } t \geq t_0$$

y para sistemas discretos verifica.

$$\|x(k_0)\| \leq \delta \rightarrow \|x(k)\| < \epsilon, \text{ para todo } k \geq k_0$$

Esto implica que el estado permanece *próximo* al punto de equilibrio dentro de una bola de cierto radio arbitrario ϵ , aunque no necesariamente alcance el valor exacto en $t \rightarrow \infty$.

Estabilidad Asintótica: Se dice que un proceso es asintóticamente estable, si además de verificar la condición anterior, verifica para sistemas continuos:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = 0$$

y para sistemas discretos:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} x(k) = 0$$

A diferencia de la simple estabilidad, el punto de equilibrio en régimen permanente siempre es alcanzado.

Estabilidad Exponencial: Además, se afirma que un proceso es exponencialmente y asintóticamente estable si además de satisfacer las condiciones anteriores, para ciertos valores escalares $\lambda, K > 0$, donde $\lambda, K \in \mathbb{R}$ se cumple para sistemas continuos:

$$\|x(t)\| \leq K \|x(t_0)\| e^{-\lambda t}, \forall t > 0$$

y análogamente, para sistemas discretos (para un cierto $\lambda_d > 0$, donde $\lambda_d \in \mathbb{R}$):

$$\|x(k)\| \leq K \lambda_d^k \|x(0)\|, \forall k \in \mathbb{N}^+ > 0$$

El concepto de estabilidad exponencial incluye adicionalmente el aspecto de la velocidad de convergencia o decaimiento geométrico en el parámetro λ (continuo) o λ_d (discreto).

Estabilidad Global: Si la condición de estabilidad es independiente del valor de la condición inicial del estado del proceso $x(t_0)$, se dice que el proceso es globalmente estable. En el caso de los sistemas LTI, estabilidad asintótica implica estabilidad global y exponencial.

2.2.2. Criterios de Estabilidad: Clasificación

Dentro del paradigma del análisis de la estabilidad de los sistemas con retardos, se puede encontrar diversas estrategias que pueden ser agrupadas atendiendo a los siguientes criterios:

Dominio de análisis: tiempo/frecuencia:

- Dominio frecuencial: los métodos derivados del análisis en frecuencia para sistemas con retardos surgen como extensión de los métodos clásicos: determinación de los autovalores del sistema, tales como la generalización del método de Hurwitz o el criterio de Nyquist y el Teorema de la Pequeña Ganancia. La propiedad más importante que permite generar resultados en esta línea deriva de la propiedad de continuidad del término exponencial $e^{-s\tau}$, gracias a la cual se puede afirmar que si el sistema *libre de retardo* es estable, existe un τ suficientemente pequeño por debajo del cual el sistema sigue siendo estable. Los métodos basados en el análisis en el dominio de Laplace, válido para retardos constantes, propone básicamente determinar la estabilidad a partir de la obtención de los puntos de corte del lugar de las raíces de la ecuación característica con el eje imaginario, dando lugar a condiciones necesarias y suficientes de estabilidad relativamente sencillas de evaluar sobre sistemas de orden reducido o con pocos retardos. La aplicación del Teorema de la Pequeña Ganancia, en cambio, implica en líneas generales mayor complejidad y puede introducir conservadurismo, pero gana en versatilidad con respecto al primero ya que permite tratar el caso de múltiples retardos no múltiplos enteros de un cierto valor y es aplicable también sobre sistemas con retardos variables [76].
- Dominio temporal: Los métodos de análisis en el dominio del tiempo para sistemas con retardos se contruyen a partir de los resultados de Razumikhin [104] o Lyapunov-Krasovskii [73]. Ambos resultados se pueden entender como una ampliación de la Teoría de estabilidad de Lyapunov sobre sistemas convencionales. La idea subyacente es, por tanto, análoga: encontrar una cierta función (Razumikhin) o funcional (Krasovskii) candidato adecuado que permita probar la estabilidad o la verificación de algún criterio de desempeño. La ventaja principal respecto al análisis en frecuencia estriba en que la inclusión de incertidumbres en el modelo y retardos variables resulta más intuitivo y sencillo de abordar en el dominio del tiempo.

En el caso de los sistemas discretos con retardos, es posible recurrir a la técnica convencional de Lyapunov a partir de la función cuadrática genérica aplicada sobre el modelo aumentado equivalente de dimensión finita [62]

o a partir del modelo discreto con incertidumbres obtenido a partir de alguna técnica de sobreaproximación revisada en el capítulo anterior. Sin embargo, la complejidad del análisis es proporcional al valor del retardo máximo. Partiendo de esta premisa, surge la necesidad de diseñar funciones de Lyapunov candidatas cuya estructura permita que la complejidad de los test de estabilidad derivados sean independientes del retardo.

Estabilidad dependiente/independiente del retardo: En la literatura se puede encontrar criterios de análisis de estabilidad sobre sistemas con retardos acuñados con el término en inglés *delay-independent* versus *delay-dependent*. Los primeros garantizan la estabilidad para cualquier valor de retardo, mientras que los segundos incluyen información del retardo dentro de las propias condiciones de estabilidad. Comparativamente, los criterios *delay-dependent* son, en líneas generales, menos conservadores que los primeros, especialmente si los retardos son pequeños [7, 43, 132].

Los criterios de análisis de estabilidad en sistemas con retardos variables pueden incluir, además, información de la derivada del retardo $\dot{\tau}(t)$. Es frecuente encontrar criterios en los que el valor máximo de la derivada está acotado por debajo de 1 ($\tau(t) \leq \mu < 1$) [43]. Sin embargo, existen resultados análogos que eliminan esta restricción [132].

Análogamente al caso continuo, en la literatura de sistemas discretos también es posible encontrar criterios de estabilidad independientes y dependientes del retardo [43]. En particular, en sistemas discretos con retardos variables acotados d_k tal que $d_m \leq d_k \leq d_M$, donde las cotas d_m, d_M son conocidas, se puede encontrar los siguientes casos:

- Criterios de estabilidad que sólo dependen del intervalo del retardo (denominados *delay-range dependent*).
- Criterios de análisis de estabilidad que dependen tanto del intervalo como del retardo.

Cabe citar que hasta la fecha no se han encontrado en la literatura contribuciones en el análisis de estabilidad de sistemas discretos con retardos que tengan en cuenta el valor del máximo incremento de retardo entre dos instantes de muestreo consecutivos: ($|d_{k+1} - d_k| \leq \Delta_d$) donde Δ_d es el valor que representa dicho incremento de retardo máximo y lógicamente verifica $0 < \Delta_d \leq d_M - d_m$.

Retardos múltiples/no múltiples enteros de un valor: En sistemas que presentan múltiples retardos, existen condiciones de análisis de estabilidad desarrolladas bajo la hipótesis de la existencia de un denominador común en los retardos (el término en la literatura es *Commensurate delays*). En este caso se simplifica notoriamente el estudio de la estabilidad, obteniendo condiciones necesarias y suficientes [43], y su aplicación se ajusta a algunas implementaciones reales. Por contra, cuando no existe un denominador común en los diferentes retardos que afectan el sistema (*Ucommensurate delays*), el análisis de la estabilidad adquiere mayor complejidad [43, 7].

Análisis con enfoque estocástico/determinista: Tal y como se ha visto en el capítulo anterior, existen dos enfoques (estocástico versus determinista) dentro del análisis de los sistemas de control. A modo de recordatorio, el concepto de estabilidad en sentido estocástico, para un sistema discreto, se define como sigue [142]:

Se dice que un sistema es estocásticamente estable en el contexto de la media cuadrática si existe una constante $\alpha > 0$ y un valor $0 \leq \gamma \leq 1$ tal que:

$$E(\|x(k)\|^2) \leq \alpha \gamma^k E(\|x(0)\|^2) \quad (2.1)$$

donde $E(x)$ es la media o esperanza matemática. Asimismo, otros criterios de desempeño típicamente adoptados tales como el nivel de rechazo a perturbaciones H_2, H_∞ , o el decaimiento geométrico, se redefinen del mismo modo en base a la media.

La presente tesis se engloba dentro del enfoque determinista: garantizar la estabilidad dentro de los márgenes de incertidumbre sobre el retardo y el modelo del proceso definidos.

2.3. Análisis de estabilidad en el dominio frecuencial

En esta sección se expone con más detalle algunas de las técnicas desarrolladas en el dominio frecuencial. Éstas surgen como resultado de una adaptación de las técnicas clásicas de análisis en frecuencia (región de estabilidad y Teorema de la Pequeña Ganancia) para sistemas con retardos.

2.3.1. Criterios basados en la determinación de la región de estabilidad

En sistemas convencionales LTI, la estabilidad se puede fácilmente analizar a partir de la ubicación en el plano complejo de los polos del sistema [86, 113].

Considérese, por ejemplo, el sistema lineal retardado autónomo con múltiples retardos puntuales constantes:

$$\dot{x}(t) = A_c x(t) + \sum_{i=1}^p A_{ci} x(t - \tau_i) \quad (2.2)$$

La ecuación característica asociada al sistema $\mathbb{F} : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ se obtiene como:

$$\mathbb{F}(s) = \det(sI_n - A_c - \sum_{i=1}^p A_{ci} e^{-s\tau_i}) = 0 \quad (2.3)$$

Nótese que el número de raíces es infinito debido al carácter trascendente de la ecuación característica. Sin embargo, la estabilidad puede ser determinada en base al siguiente criterio:

El sistema (2.2) es globalmente y asintóticamente estable si y solo si todas las raíces de la ecuación característica están en el semiplano izquierdo. Es decir, si verifica que:

$$\lambda \in \mathbb{C} : \Re(\lambda) \geq 0, \mathbb{F}(\lambda) = 0 \quad (2.4)$$

La ecuación característica $\mathbb{F}(s)$ se puede definir como un *cuasipolinomio* real en la variable s , lo que le confiere la propiedad de continuidad del término exponencial respecto los retardos τ_i , tal y como se ha puntualizado anteriormente. Por tanto, si el sistema libre de retardos es estable (matriz $A_c + \sum_{i=1}^p A_{ci}$ estable), entonces existe valores de retardo lo suficientemente pequeños que conservan la estabilidad para el sistema (2.2) [7]. Otro modo de interpretar esta propiedad es observar que las infinitas raíces de la ecuación característica del sistema con retardo convergen a las finitas raíces del sistema libre de retardo equivalente conforme τ_i converge a 0 $i = 1, \dots, p$.

Por tanto, el objetivo de los criterios de análisis de estabilidad en frecuencia estriban en el modo de determinar la existencia de puntos de corte de las raíces de la ecuación característica con el eje imaginario, y en calcularlos resolviendo la ecuación $\mathbb{F}(jw) = 0$. Cabe destacar las dos aproximaciones siguientes ya mencionadas en la introducción:

Retardos múltiples enteros de un número: Las técnicas englobadas en este apartado son aplicables para sistemas con único retardo τ (*Single-delay case*) o sistemas con múltiples retardos (*Multiple-delay case*) tal que $\tau_i = d_i\tau$ donde $d_i \in \mathbb{N}^+$. En cualquiera de los dos casos, la ecuación característica se puede expresar como un polinomio 2D o bivariable $\mathbb{F}(s) = p(s, z)$ donde $z = e^{s\tau}$. Otra propiedad útil consiste en la simetría conjugada del polinomio bivariable, lo que restringe la búsqueda de soluciones de corte con el eje imaginario a soluciones positivas. Algunas técnicas, tales como el *Test de estabilidad 2D* o *Test por barrido en frecuencia*, permiten resolver el problema. Estas técnicas sólo difieren entre ellas en la estrategia utilizada para obtener soluciones de $p(jw, e^{jw\tau})$, que derivan en condiciones necesarias y suficientes de estabilidad. Una descripción detallada de las técnicas citadas puede encontrarse en [43].

2.3.2. Criterios basados en el Teorema de la Pequeña Ganancia

A partir de un esquema de interconexión en lazo cerrado formado por dos bloques M y Δ , donde M es el modelo del sistema y Δ es el modelo de incertidumbres, el Teorema de la Pequeña Ganancia garantiza la estabilidad en base al siguiente Teorema [43]:

Teorema 2.3.1 *El bucle $M - \Delta$ (ver Figura 2.3.2) es estable si $\|M\|_\infty < 1, \forall \Delta / \|\Delta\|_\infty \leq 1$. Si la matriz de incertidumbres Δ no es estructurada, entonces la condición anterior es necesaria y suficiente.*

Demostración: Ver [43] ■

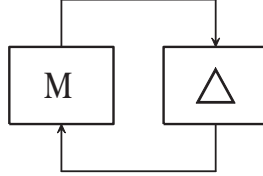


Figura 2.1. Modelo del sistema-incertidumbres $M - \Delta$ en lazo cerrado

Para aplicar este resultado a los sistemas con retardos, la idea es considerar los retardos como incertidumbres. Veamos algunos ejemplos de aplicación:

Sistema con único retardo Dado el sistema LTI con único retardo τ :

$$\dot{x}(t) = A_0x(t) + A_1x(t - \tau) \tag{2.5}$$

Se puede comprobar fácilmente que se puede modelar con el bucle $M - \Delta$, donde se abstrae por un lado el modelo $M(s) = (sI - A_0)^{-1}A_1$ y por otro lado el operador retardo, que se encuentra embebido dentro del término de las incertidumbres $\Delta(s) = e^{-\tau s}$. Teniendo en cuenta que $\forall \tau \geq 0, \|\Delta\|_\infty \leq 1$, se puede afirmar que el sistema es estable si $\|(sI - A_0)^{-1}A_1\|_\infty = 1$. Nótese que esta condición de estabilidad es independiente del retardo. La condición anterior es suficiente, ya que en la aplicación del Teorema de la Pequeña Ganancia el operador $\Delta(s)$ que caracteriza el bloque retardo se sobreaproxima con una matriz de incertidumbres no estructurada.

Este mismo resultado es aplicable para retardo variable $\tau(t)$ acotado superiormente siempre que $\dot{\tau}(t) \leq 1, \forall t$, [43] ya que bajo estas condiciones se sigue verificando $\|\Delta(s)\|_\infty \leq 1$.

Sistema con múltiples retardos: El resultado anterior se puede aplicar a un sistema con múltiples retardos puntuales:

$$\dot{x}(t) = A_0x(t) + \sum_{i=1}^m A_i x(t - \tau_i) \tag{2.6}$$

redefiniendo la matriz del sistema en lazo cerrado $M(s)$ como:

$$M(s) = \begin{pmatrix} I & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & I & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & I \end{pmatrix} (sI - A_0)^{-1} (A_1 \cdots A_m) \quad (2.7)$$

donde la matriz de incertidumbres $\Delta(s)$ es una matriz diagonal por bloques $\Delta = \text{diag}(\Delta_1, \dots, \Delta_m)$, donde a su vez Δ_i , $1 \leq i \leq m$ representa cada retardo individual. Análogamente, el sistema es estable independientemente del retardo si $\|M\|_\infty < 1$. Nótese que la aplicación del Teorema de la Pequeña Ganancia puede resultar demasiado conservador ya que no se aprovecha la estructura diagonal del término de incertidumbres $\Delta(s)$. Sin embargo, aplicando el Teorema de la Pequeña Ganancia μ [43], basado en el cálculo del valor singular estructurado, es posible derivar una condición necesaria y suficiente de estabilidad.

La ventaja respecto al análisis de la región de estabilidad es que se puede aplicar sobre sistemas con múltiples retardos que no sean necesariamente múltiplos enteros de un valor (*ucommensurate delays*). No obstante, el coste computacional vinculado al cálculo del valor singular estructurado $\mu_\Delta(M)$ presenta un coste computacional que crece exponencialmente respecto al tamaño del problema. En general, los algoritmos se clasifican en base a su complejidad en algoritmos de coste polinomial (eficientes) y coste exponencial. Estos últimos se denominan *NP-Hard* [70], y se consideran computacionalmente *intratables*. En [12] se discute la complejidad *NP-Hard* del Teorema de la Pequeña Ganancia μ .

Otros resultados que analizan la estabilidad sobre sistemas con retardos variables, bajo el Teorema de la Pequeña Ganancia, aproximación también conocida en la literatura como *Input-output approach*, se puede encontrar en [76]. Este trabajo aplica esta aproximación sobre sistemas discretos con retardos variables.

2.4. Análisis de estabilidad en el dominio temporal

En la sección anterior se ha revisado las técnicas de análisis de estabilidad en el dominio de la frecuencia. Sin embargo, el análisis en el dominio temporal resulta más intuitivo a la hora de estudiar sistemas con incertidumbres y retardos variables. Básicamente los resultados propuestos dentro de este ámbito para sistemas continuos con retardos temporales se derivan de los conocidos Teoremas de Razumikhin y Lyapunov-Krasovskii, que tal y como se ha reseñado anteriormente, constituyen la base de los resultados de análisis de estabilidad para sistemas con retardos temporales en el dominio del tiempo.

2.4.1. Análisis de la estabilidad LMI en sistemas continuos

En este apartado se analiza en detalle las estrategias de análisis de estabilidad en el dominio temporal para sistemas continuos. Los resultados basados en los Teoremas de Razumikhin [104] o Lyapunov-Krasovskii [73] buscan obtener condiciones suficientes de estabilidad fácilmente computables a partir de la búsqueda de una solución factible a un problema LMI [43], generado a partir de un cierto funcional (Krasovskii) o función (Razumikhin) candidato. No existe ningún método analítico para resolver LMI. En cambio, existe software comercial [33] que implementan algoritmos numéricos eficientes (con coste computacional polinomial), tales como el algoritmo de la elipsoide o punto interior [10], desarrollados dentro del paradigma de la Teoría de Optimización Convexa [6, 99].

Estabilidad Independiente del retardo: El siguiente resultado asegura la estabilidad independientemente del valor de los retardos para un sistema con múltiples retardos puntuales constantes:

Teorema 2.4.1 [43]

El sistema con múltiples retardos puntuales constantes (2.2) es globalmente y asintóticamente estable si existen matrices $P, Q_1, \dots, Q_p > 0$ tal que:

$$\begin{pmatrix} A^T P + PA + \sum_{i=1}^p Q_i A_1^T P \dots A_p^T P & & & & \\ (*) & -Q_1 & \dots & & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ (*) & (*) & \dots & -Q_p & \end{pmatrix} < 0 \tag{2.8}$$

Demostración: Considérese el funcional de Lyapunov-Krasovskii candidato:

$$V(t) = x^T(t)Px(t) + \sum_{i=1}^p \int_{t-\tau_i}^t x^T(\theta)Q_i x(\theta)d\theta \tag{2.9}$$

donde $P, Q_i > 0$ con $i \in [1, 2, \dots, p]$ son ciertas matrices definidas positivas.

El término derivativo, haciendo uso de la fórmula de Newton-Leibniz (Ecuacion 2.14), es:

$$\dot{V}(t) = \dot{x}^T(t)Px(t) + x^T(t)P\dot{x}(t) + \sum_{i=1}^p [x^T(t)Q_i x(t) - x^T(t - \tau_i)Q_i x(t - \tau_i)] \tag{2.10}$$

Sustituyendo $\dot{x}(t)$ a partir del modelo del proceso (2.2) y agrupando convenientemente los términos se obtiene:

$$\begin{aligned} \dot{V}(t) = & x^T(t)(A^T P + PA + \sum_{i=1}^p Q_i)x(t) + \\ & + 2 \sum_{i=1}^p x^T(t)A_i^T P x(t - \tau_i) - \sum_{i=1}^p x^T(t - \tau_i)Q_i x(t - \tau_i) \end{aligned} \quad (2.11)$$

Definiendo un nuevo estado $\phi(t) = (x(t) \ x(t - \tau_1) \ \cdots \ x(t - \tau_p))$ el término derivativo se puede expresar matricialmente como:

$$\dot{V}(t) = \phi^T(t)\Theta\phi(t) \quad (2.12)$$

donde

$$\Theta = \begin{pmatrix} A^T P + PA + \sum_{i=1}^p Q_i & A_1^T P & \cdots & A_p^T P \\ (*) & -Q_1 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ (*) & (*) & \cdots & -Q_p \end{pmatrix} \quad (2.13)$$

La convergencia del estado al punto de equilibrio a lo largo de todas las posibles trayectorias de estado y por tanto la estabilidad se garantiza siempre que se verifique $\dot{V}(t) < 0$. Esta condición se cumple si y solo si $\Theta < 0$. Por tratarse de un sistema LTI, la estabilidad implica estabilidad global y asintótica. ■

Estabilidad Dependiente del retardo: La condición de estabilidad independiente del retardo resulta a menudo demasiado conservadora, especialmente si el valor de retardo que inestabiliza el sistema es pequeño. Existen dos modos de generar condiciones que tengan en cuenta el valor del retardo: aplicando un cambio de variable (transformación del modelo), o directamente a partir del funcional de Lyapunov-Krasovskii candidato.

Estabilidad basada en transformación de modelo: El cambio de variable inspirado en la fórmula de Newton-Leibniz:

$$x(t - \tau) = x(t) - \int_{t-\tau}^t \dot{x}(s)ds \quad (2.14)$$

Aplicado sobre el sistema (2.2) permite obtener el siguiente modelo transformado del proceso:

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + \sum_{i=1}^r A_i [x(t) - \int_{t-\tau_i}^t \sum_{j=1}^r A_j x(s - \tau_j)ds] \quad (2.15)$$

Sin embargo, este cambio de variable puede añadir conservadurismo debido a la dinámica adicional introducida sobre el modelo transformado [43]. El siguiente teorema representa una condición suficiente de estabilidad para sistemas con múltiples retardos, obtenida a partir del modelo transformado de la Ecuación (2.15).

Teorema 2.4.2 [7]

El sistema (2.2) es estable si existen matrices $P, Q_1, \dots, Q_p > 0$ tal que:

$$\begin{pmatrix} \bar{A}^T P + P \bar{A} + \sum_{j=1}^m \sum_{l=0}^m \tau_j Q_l & M \\ (*) & -\bar{Q} \end{pmatrix} < 0 \quad (2.16)$$

$$M = (\tau_1 P A_1 A_0 \cdots \tau_1 P A_1 A_m \cdots \tau_m P A_m A_0 \cdots \tau_m P A_m A_m)$$

$$\bar{Q} = \text{diag}(\tau_1 Q_0, \dots, \tau_1 Q_m, \dots, \tau_m Q_0, \dots, \tau_m Q_m)$$

Demostración: Ver Teorema 3.6 en [7]. ■

Nótese que si $r = 1$ (retardo único), si el sistema *libre de retardo* es estable, en [7] se plantea la obtención del máximo τ tal que el sistema siga siendo estable mediante la resolución de un problema GEVP (ver Apéndice 8.2.2)

Estabilidad basada en la forma discretizada de Lyapunov: La definición del funcional de Lyapunov cuadrático *parameter-dependent* genérico de la forma:

$$V(x(t)) = x^T(t) P x(t) + x^T(t) \int_{-\tau}^0 Q(s) x(t+s) ds +$$

$$+ \int_{-\tau}^0 \int_{-\tau}^0 x^T(t+z) R(z, v) x(t+v) dz dv + \int_{-\tau}^0 x^T(t+s) S(s) x(t+s) ds$$

permite obtener el resultado de análisis de estabilidad menos conservador posible, dentro de los posibles funcionales candidatos cuadráticos, a partir de la condición $V(x(t)) > 0$ y $\dot{V}(x(t)) < 0$ [51]. Sin embargo, la obtención de $V(x(t))$ implica resolver complejas ecuaciones diferenciales en derivadas parciales con condiciones de contorno. En [53, 7, 44] se propone un método que permite transformar el problema anterior en un problema LMI a partir de la denominada *forma discretizada de Lyapunov*. Ésta se obtiene asumiendo que las matrices parametrizadas $Q(\cdot), R(\cdot), S(\cdot)$ son constantes a trozos dentro de cada intervalo generado mediante una partición homogénea en p trozos del intervalo $[-\tau, 0]$. La característica más destacada de este método es que el resultado converge a la condición originalmente formulada conforme el número de particiones es más elevado ($p \rightarrow \infty$). Por tanto, se puede graduar el compromiso entre complejidad y conservadurismo mediante la adecuada elección de p . La idea de particionar el intervalo de retardo en intervalos más pequeños ha sido también explorado en el contexto de sistemas discretos con retardos constantes y variables en [85].

Estabilidad sobre sistemas con retardos variables: En el caso de sistemas continuos con retardos variables, también es posible derivar condiciones

de estabilidad LMI independientes del retardo, a partir del Teorema de Razumikhin [104]. No obstante, en la mayoría de aplicaciones, el retardo $\tau(t)$ se asume que acotado de modo que verifica $\tau_m \leq \tau(t) \leq \tau_M$, siendo τ_m, τ_M las cotas mínima y máxima, respectivamente, que son conocidas a priori. A partir de las cotas del retardo, se derivan condiciones de análisis y diseño menos conservadoras, que además, incluyen información de la derivada del retardo $\dot{\tau}(t) \leq \mu < 1$. Por ejemplo, mediante funcionales de Lyapunov-Krasovskii se obtienen condiciones de análisis LMI [127, 130]. No obstante, algunas veces se introducen variables de decisión que no contribuyen a reducir el conservadurismo de los resultados de análisis. En [143] se propone condiciones de análisis que con un menor número de variables de decisión alcanzan el mismo grado de conservadurismo que otros resultados similares anteriores. Este hecho se demuestra mediante el Teorema de Eliminación (ver Teorema 8.3.5, Apéndice 8).

Técnicas Free-Weighting: Las técnicas denominadas *Free-Weighting* se explota para reducir el conservadurismo de las condiciones suficientes de estabilidad basadas en LMI, tanto en sistemas continuos [55] como en sistemas discretos [135]. En cambio, se añaden nuevas variables de decisión dentro del problema. Cabe destacar que no siempre dichas técnicas implican una reducción del conservadurismo, tal y como se ha visto anteriormente. En [143], se demuestra mediante el Teorema de Eliminación sobre otros resultados similares ([130], y referencias similares) que existen variables de decisión que no aportan ninguna mejora, contribuyendo en todo caso negativamente debido al aumento de los errores numéricos por exceso de variables y al coste computacional. En sistemas discretos, un resultado equivalente se presenta en [47], donde se ilustra la equivalencia respecto otros resultados análogos en términos de conservadurismo pero con mayor número de variables de decisión ([135], y referencias similares).

La idea subyacente a las técnicas *Free-Weighting* consiste en aprovechar la relación entre los estados del vector ampliado definido en el funcional candidato para introducir nuevas variables de decisión (conocidas como *slack variables*) que en principio contribuyan a reducir el conservadurismo del test de estabilidad. En la utilización de esta técnica para sistemas continuos interviene de nuevo la conocida fórmula de Newton-Leibniz (Ecuación (2.14)). Por ejemplo, se puede afirmar que para una matriz arbitraria M de dimensiones apropiadas siempre se verifica que:

$$2\bar{x}(t)M(x(t) - x(t - \tau) - \int_{t-\tau}^t \dot{x}(s)ds) = 0 \quad (2.17)$$

Por tanto, la condición de negatividad de la derivada $\dot{V}(t) < 0$ se puede reformular sin conservadurismo adicional como $\dot{V}(t) + 2\bar{x}(t)M(x(t) - x(t - \tau) - \int_{t-\tau}^t \dot{x}(s)ds)$. De este modo, se incorpora nuevas variables de decisión en la

matriz M . Precisamente, en la correcta y adecuada elección del funcional candidato, conjuntamente con el adecuado diseño de las técnicas *Free-Weighting*, se concentra el esfuerzo de esta línea de trabajo: mejorar la relación de compromiso entre número de variables y conservadurismo en el desarrollo de condiciones de análisis de estabilidad sobre sistemas con retardos.

2.4.2. Análisis de la estabilidad LMI en sistemas discretos

A diferencia de los sistemas con retardos continuos, los sistemas discretos son siempre de dimensión finita. En el capítulo 1 se ha revisado cómo obtener modelos discretos equivalentes o sobreaproximados *libres de retardo* a partir de un sistema continuo con retardos constantes y variables.

El estudio de los sistemas con retardos temporales discretos resulta mucho más simple, en tanto en cuanto éstos son de dimensión finita, y por tanto, pueden ser abordados con técnicas convencionales. Sin embargo, cuando el retardo es elevado, los modelos equivalentes resultan demasiado complejos, y por tanto las técnicas convencionales no son aplicables y surge la necesidad de buscar métodos alternativos, los cuales son objeto de discusión en este apartado.

Estabilidad independiente del retardo: Análogamente al caso continuo, es posible derivar una condición de estabilidad independiente del retardo para sistemas discretos. Considérese el siguiente sistema discreto con múltiples retardos:

$$x(k+1) = Ax(k) + \sum_{i=1}^p A_i x(k-d_i) \quad (2.18)$$

Teorema 2.4.3 *El sistema (2.2) es estable si existen matrices $P, Q_1, \dots, Q_p > 0$ tal que:*

$$\begin{pmatrix} -P + \sum_{i=1}^p Q_i & 0 & \cdots & 0 & A^T P \\ (*) & -Q_1 & \cdots & 0 & A_1^T P \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ (*) & (*) & \cdots & -Q_p & A_p^T P \\ (*) & (*) & \cdots & (*) & -P \end{pmatrix} < 0 \quad (2.19)$$

Demostración:

Considérese el siguiente funcional de Lyapunov-Krasovskii discreto:

$$V(k) = x^T(k)Px(k) + \sum_{i=1}^p \sum_{j=k-1}^{k-d_i} x^T(j)Q_i x(j) \quad (2.20)$$

El término $\Delta V(k)$ se obtiene como:

$$\begin{aligned} \Delta V(k) &= x^T(k+1)Px(k+1) + \\ &+ \sum_{i=1}^p x^T(k)Q_i x(k) - \sum_{i=1}^p x^T(k-d_i)Q_i x(k-d_i) \end{aligned} \quad (2.21)$$

Definiendo el estado ampliado $\phi(k) = (x(k) \ x(k-d_1) \ \cdots \ x(k-\bar{d}))$, donde $\bar{d} = \max_{i=1}^p d_i$, el término $\Delta V(k)$ se puede expresar matricialmente como:

$$\Delta V(k) = \phi^T(k)\Theta\phi(k) \quad (2.22)$$

donde

$$\Theta = \begin{pmatrix} A^T P A - P + \sum_{i=1}^p Q_i & A^T P A_1 & \cdots & A^T P A^p \\ (*) & A_1^T P A_1 - Q_1 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ (*) & (*) & \cdots & A_p^T P A_p - Q_p \end{pmatrix} \quad (2.23)$$

Aplicando el complemento de Schur sobre Θ se completa la demostración.

■

Estabilidad dependiente del retardo: En esta sección se analiza la estabilidad para sistemas discreto con retardos variables. Considérese el siguiente sistema LTI con un solo retardo variable en el estado:

$$\begin{aligned} x(k+1) &= Ax(k) + A_d x(k-d_k) \\ d_m &\leq d_k \leq d_M \quad d_k \in \mathbb{N}^+ \end{aligned} \quad (2.24)$$

Teorema 2.4.4 *Para sistemas discretos con retardo constante ($d_m = d_M$), el sistema es globalmente asintóticamente estable si y solo si existe una matriz $P > 0$ de dimensiones apropiadas tal que la función candidata $V(k)$ satisfaga $\Delta V(k) = V(k+1) - V(k) < 0$, lo que equivale a encontrar una solución factible de las siguientes condiciones LMI:*

$$\begin{pmatrix} -\bar{P} & \bar{A}^T \bar{P} \\ (*) & -\bar{P} \end{pmatrix} < 0 \quad (2.25)$$

donde \bar{A} es la matriz del sistema discreto aumentado, definida en la Ecuación (1.41).

Demostración:

Considérese la siguiente función de Lyapunov discreta cuadrática genérica de la forma:

$$V(k) = \bar{x}(k)^T \bar{P} \bar{x}(k) \quad (2.26)$$

donde $\bar{x}(k) = (x(k) \ x(k-1) \ \cdots \ x(k-d_M))$ es el estado aumentado formado por el estado actual y todos los estados pasados hasta la cota máxima de retardo variable d_M . El teorema se demuestra aplicando el complemento de Schur sobre la desigualdad:

$$\Delta V(k) = \bar{A}^T \bar{P} \bar{A} - \bar{P} < 0$$

■

Para retardos variables, la condición de estabilidad es sólo suficiente. No obstante, la condición menos conservadora y a su vez con un mayor número de variables de decisión se obtiene teniendo en cuenta todas las $p = d_M - d_m + 1$ realizaciones posibles del sistema para cada posible valor de retardo d_k , y considerando una función candidata *parameter-dependent*. El siguiente teorema recoge este resultado:

Teorema 2.4.5 *El sistema con retardos variables es globalmente asintóticamente estable si para cada valor entero $i, j \in [1, 2, \dots, d_M - d_m]$ existen matrices $\bar{P}_i, \bar{P}_j > 0$ de dimensiones apropiadas tal que se verifique las siguientes $p \times p$ condiciones LMI:*

$$\begin{pmatrix} -\bar{P}_i & \bar{A}(j)^T \bar{P}_j \\ (*) & -\bar{P}_j \end{pmatrix} < 0 \quad (2.27)$$

donde $\bar{A}(j)$ es la matriz del sistema discreto aumentado, definida en la Ecuación (1.46).

Demostración:

La demostración se puede obtener a partir de la condición de estabilidad sobre la función de Lyapunov $\Delta V(k) = V(k+1) - V(k) < 0$ para cada realización posible del sistema en $\bar{A}(i) = A(d_{i+d_m-1})$, que se corresponden con los vértices del politopo generado como $\sum_{i=1}^p \lambda_i \bar{A}(i)$ donde $\sum_{i=1}^p \lambda_i = 1$.

■

Si se define una función candidata donde $\bar{P}_i = \bar{P}, \forall i = 1, \dots, p$, se reduce considerablemente el número de variables de decisión aunque a costa de incrementar el conservadurismo:

Teorema 2.4.6 *El sistema con retardos variables es globalmente asintóticamente estable si existe para cada valor entero $i \in [1, 2, \dots, p]$ ciertas una matriz $\bar{P} > 0$ de dimensiones apropiadas tal que exista una solución factible que satisfagan las siguientes p condiciones LMI:*

$$\begin{pmatrix} -\bar{P} & \bar{A}(i)^T \bar{P} \\ (*) & -\bar{P} \end{pmatrix} < 0 \quad (2.28)$$

Demostración:

La demostración es análoga al Teorema 2.4.5

■

Condiciones de estabilidad basadas en funcionales de Lyapunov-Krasovskii: A la luz de los resultados anteriores, se puede apreciar claramente la dependencia entre la complejidad del modelo y por tanto de la LMI's de análisis con respecto al valor del retardo, lo cual es inadmisibles cuando éstos son elevados debido a la limitación de recursos computacionales y a los errores de precisión numéricas acumulados [143].

De hecho, la mayor parte de contribuciones que existen en la literatura de sistemas con retardos discretos tienen como objetivo encontrar condiciones de estabilidad LMI cuyo tamaño en número de variables de decisión sea independiente del valor del retardo. La idea es que tales condiciones sean lo menos conservadoras posibles, lo cual se explota desde el diseño adecuado del funcional candidato y las técnicas *Free-weighting*. Los resultados en este campo guardan un cierto paralelismo con sus equivalentes continuos. A continuación se revisan algunas de las contribuciones más destacadas en este ámbito para sistemas discretos con retardos variables:

Criterio de estabilidad propuesto por [36]:

Teorema 2.4.7 [36]

El sistema (2.24) es globalmente asintóticamente estable si es posible encontrar matrices $P > 0, Q > 0, Z > 0, X > 0, Y$ tal que satisfaga la siguiente LMI:

$$\begin{pmatrix} -P & 0 & PA & PA_d \\ (*) & -d_M Z & d_M Z(A - I) & d_M Z A_d \\ (*) & (*) & \Gamma & -Y \\ (*) & (*) & (*) & -Q \end{pmatrix} < 0 \quad (2.29)$$

donde $\Gamma = -P + d_M X + Y + Y^T + (d_M - d_m + 1)Q$.

Demostración:

Se propone el siguiente funcional de Lyapunov-Krasovskii candidato:

$$\begin{aligned}
 V(k) &= V_1(k) + V_2(k) + V_3(k) + V_4(k) & (2.30) \\
 V_1(k) &= x^T(k)Px(k) \\
 V_2(k) &= \sum_{j=k-1}^{k-d_k} x^T(j)Qx(j) \\
 V_3(k) &= \sum_{i=-d_M+2}^{-d_m+1} \sum_{j=k-d_M}^{k-1} x^T(j)Qx(j) \\
 V_4(k) &= \sum_{i=-d_M}^{-1} \sum_{j=k+i}^{k-1} \nu^T(j)Z\nu(j) \\
 \nu(k) &= x(k+1) - x(k)
 \end{aligned}$$

Para más detalles se puede consultar la bibliografía [36].

■

Cabe destacar las siguientes observaciones:

- (i) Los términos $\Delta V_2(k)$ y $\Delta V_3(k)$ se definen de modo que se introduce dentro de la LMI dependencia respecto a la diferencia entre el máximo y mínimo retardo $d_M - d_m$. A saber:

$$\begin{aligned}
 \Delta V_2(k) &= x^T(k)Qx(k) - x^T(k-d_k)Qx(k-d_k) + \sum_{j=k-d_{k+1}+1}^{k-d_k} x^T(j)Qx(j) \leq \\
 & x^T(k)Qx(k) - x^T(k-d_k)Qx(k-d_k) + \sum_{j=k-d_M+1}^{k-d_m} x^T(j)Qx(j)
 \end{aligned}$$

Por otro lado:

$$\Delta V_3(k) = (d_M - d_m)x^T(k)Qx(k) - \sum_{j=k-d_M+1}^{k-d_m} x^T(j)Qx(j) \quad (2.31)$$

Se puede observar que el término $\sum_{j=k-d_M+1}^{k-d_m} x^T(j)Qx(j)$ se cancela, eliminando por tanto la dependencia de los estados retardados intermedios dentro de la LMI e introduciendo dependencia explícita del rango de retardo $(d_M - d_m)$. No obstante, cabe destacar que el alargamiento del sumatorio $\sum_{j=k-d_{k+1}+1}^{k-d_k} x^T(j)Qx(j)$ hasta d_M términos es un paso conservador que se puede observar prácticamente en todos los resultados basados en Laypunov-Krasovskii para sistemas discretos.

- (ii) La equivalencia expresada en (2.14) aplicada sobre sistemas continuos también puede aplicarse sobre sistemas discretos con retardos variables mediante la siguiente ecuación:

$$x(k - d_k) = x(k) - \sum_{i=0}^{d_k-1} (x(k - i) - x(k - i - 1)) \quad (2.32)$$

que aplicada sobre el sistema (2.24) da lugar al siguiente sistema transformado:

$$\begin{aligned} x(k + 1) &= (A + A_d)x(k) - \sum_{j=k-d_k}^{k-1} A_d \nu(j) \\ \nu(k) &= x(k + 1) - x(k) \end{aligned} \quad (2.33)$$

Nótese el paralelismo con respecto a la obtención del modelo transformado sobre sistemas continuos con retardos. El término $\Delta V_1(k)$ se construye del siguiente modo:

$$\begin{aligned} \Delta V_1(k) &= x^T(k)[(A + A_d^T)P(A + A_d) - P]x(k) + \\ &+ \sum_{j=k-d_k}^{k-1} [-2x^T(k)(A + A_d)^T P A_d \nu(j)] + \\ &+ [A_d \sum_{j=k-d_k}^{k-1} \nu(j)]^T P [A_d \sum_{j=k-d_k}^{k-1} \nu(j)] \end{aligned}$$

Para eliminar la dependencia respecto los estados retardados intermedios procedentes del término $\sum_{j=k-d_k}^{k-1} [-2x^T(k)(A + A_d)^T P A_d \nu(j)]$ se hace uso del *cross product lemma* (ver Lema 8.3.1, Apéndice 8) teniendo en cuenta las siguientes sustituciones de variables: $a = x(k)$, $b = \nu(j)$ y $\mathbb{N} = (A + A_d)^T P A_d$ respectivamente:

$$\begin{aligned} \sum_{j=k-d_k}^{k-1} [-2x^T(k)(A + A_d)^T P A_d \nu(j)] &\leq d_M x^T(k) X x(k) + \\ &+ 2x^T(k)[Y - (A + A_d)^T P A_d] \sum_{j=k-d_k}^{k-1} \nu(j) + \sum_{j=k-d_M}^{k-1} \nu(j) Z \nu(j) \end{aligned}$$

de modo que el término $\Delta V_1(k)$ queda acotado como:

$$\begin{aligned} \Delta V_1(k) &\leq x^T(k)[A^T P A + d_M (A - I)^T Z (A - I) + X + Y + Y^T]x(k) + \\ &+ 2x^T(k)[A^T P A_d + d_M (A - I)^T Z A_d]x(k - d_k) + \\ &+ x^T(k - d_k)[A_d^T P A_d + d_M A_d^T Z A_d]x(k - d_k) \end{aligned}$$

Cabe destacar que la acotación del término $\Delta V_1(k)$ a partir del uso del *cross-product lemma* es una conocida fuente de conservadurismo. En [34,

135, 47] se elude la necesidad de recurrir a esta acotación haciendo uso del modelo del sistema original en lugar del sistema transformado a partir del cambio de variable definido en (2.32).

Criterio de estabilidad propuesto por [9]: En este trabajo se propone una técnica de análisis y diseño de controladores estáticos para sistemas con retardos variables que, a diferencia de los resultados presentados anteriormente, no se añade conservadurismo adicional por la acotación superior del término $\Delta V(k)$ a partir de la aplicación del *cross-product lemma*. Sin embargo, a diferencia de [36], este resultado sólo presenta dependencia del valor del rango de variación de retardo $(d_M - d_m)$ (acuñado con el término *delay-range dependent*). Esto implica que el resultado no depende del valor de d_m , de modo que al igual que la condición *delay-independent*, para retardos d_m pequeños este resultado puede resultar demasiado restrictivo.

Por otro lado, nótese que los siguientes resultados son equivalentes:

- (i) Teorema 3.1 [9] El sistema (2.24) es globalmente asintóticamente estable si existen matrices $P, Q > 0$ y P_2, P_3 tal que verifique $R < Q$ y la desigualdad matricial:

$$\begin{pmatrix} V_{11} & -A^T P_3 - P_2^T & -P_2^T A_d^T \\ (*) & P + P_3 + P_3^T & -P_3 A_d^T \\ (*) & (*) & -R \end{pmatrix} < 0 \quad (2.34)$$

$$V_{11} = -P + R + (d_M - d_m + 1)Q + A^T P_2 + P_2^T A$$

- (ii) El sistema 2.24 es globalmente asintóticamente estable si existen matrices definidas positivas P, Q que satisfagan las siguientes LMIs:

$$\begin{pmatrix} -P + (d_M - d_m + 1)Q & 0 & 0 & A^T P \\ (*) & -Q & 0 & A_d^T P \\ (*) & (*) & Q - R & 0 \\ (*) & (*) & (*) & -P \end{pmatrix} < 0 \quad (2.35)$$

La desigualdad matricial en Teorema 3.1 [9] puede expresarse como:

$$\begin{aligned} \Phi + MXN + N^T X^T M^T &< 0 & (2.36) \\ \Phi &= \begin{pmatrix} -P + (d_M - d_m + 1)Q & 0 & 0 & 0 \\ (*) & -Q & 0 & 0 \\ (*) & (*) & -R & 0 \\ (*) & (*) & (*) & Q - R \end{pmatrix} \\ M &= (-A^T \ I \ -A_d^T) \\ N &= \begin{pmatrix} I & 0 & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ X &= (P_1 \ P_2) \end{aligned}$$

Aplicando el Teorema de eliminación sobre la variable X se puede demostrar la equivalencia de las LMI (i), (ii), donde los subespacios nulos de M y N son respectivamente:

$$N_M = \begin{pmatrix} I & 0 \\ A^T & A_d^T \\ 0 & I \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (2.37)$$

$$N_M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I \end{pmatrix} \quad (2.38)$$

Nótese además que (ii) es obtenible a partir de un funcional de Lyapunov-Krasovskii candidata de la forma:

$$\begin{aligned} V(k) &= V_1(k) + V_2(k) + V_3(k) + V_4(k) & (2.39) \\ V_1(k) &= x^T(k)Px(k) \\ V_2(k) &= \sum_{j=k-1}^{k-d_k} x^T(j)Qx(j) \\ V_3(k) &= \sum_{i=-d_M+2}^{-d_m+1} \sum_{j=k-d_M}^{k-1} x^T(j)Qx(j) \end{aligned}$$

que equivale a [36] pero sin el término $V_4(k)$. Precisamente, este término es el que añade a la LMI dependencia del retardo d_m en [36], lo que significa que aporta menos información y por tanto se incorpora cierto grado de conservadurismo. En cambio, a diferencia de éste, no se acota el término $V_1(k)$ con el *cross-product lemma*, evitando en consecuencia este paso conservador ¹.

Criterio de estabilidad propuesto por [34]: Este resultado aglutina las ventajas de los dos anteriores. Por un lado, evita el uso del *cross-product lemma*, y por otro lado incorpora respecto a [9] el valor del retardo d_m dentro de la LMI:

Teorema 2.4.8 [34]

El sistema (2.24) es globalmente asintóticamente estable si es posible encontrar matrices $P > 0, Q > 0, Q_M > 0, Z_1 > 0, Z_2 > 0, M, N, S$ tal que satisfagan las LMI's:

¹ Con el fin de homogeneizar la notación y facilitar la interpretación de los resultados, se ha considerado conveniente reescribir el Teorema 3.1 [9] reformulando las siguientes variables de decisión: $Q = R, P = P_1$ y $R = Q$

$$\begin{pmatrix} \Gamma_1 + \Gamma_2 + \Gamma_2^T + \Gamma_3 & \Gamma_4 \\ (*) & \Gamma_5 \end{pmatrix} < 0 \quad (2.40)$$

donde

$$\Gamma_1 = \begin{pmatrix} \gamma_{11} & A^T P A_d & 0 \\ (*) & A_d^T P A_d - Q & 0 \\ (*) & (*) & -Q_M \end{pmatrix} \quad (2.41)$$

$$\gamma_{11} = A^T P A - P + (\Delta_d + 1)Q + Q_M$$

$$\Gamma_2 = (M + N \ S - M \ -S - N)$$

$$\Gamma_3 = d_M (A - I \ A_d \ 0)^T (Z_1 + Z_2) (A - I \ A_d \ 0)$$

$$\Gamma_4 = (\sqrt{d_M} M \ \sqrt{\Delta_d} S \ \sqrt{d_M} N)$$

$$\Gamma_5 = \text{diag}(-Z_1, -Z_1, -Z_2)$$

$$\Delta_d = d_M - d_m$$

Demostración:

El detalle de la demostración se puede consultar en [34] a partir del criterio $\Delta V(k) < 0$ sobre el funcional de Lyapunov-Krasovskii:

$$V(k) = V_1(k) + V_2(k) + V_3(k) + V_4(k) + V_5(k) \quad (2.42)$$

$$V_1(k) = x^T(k) P x(k)$$

$$V_2(k) = \sum_{j=k-1}^{k-d_k} x^T(j) Q x(j)$$

$$V_3(k) = \sum_{i=-d_M+1}^{-d_m} \sum_{j=k-d_M}^{k-1} x^T(j) Q x(j)$$

$$V_4(k) = \sum_{j=k-1}^{k-d_M} x^T(j) Q_M x(j)$$

$$V_5(k) = \sum_{i=-d_M}^{-1} \sum_{j=k+i}^{k-1} \nu^T(j) Z \nu(j)$$

$$\nu(k) = x(k+1) - x(k)$$

■

Cabe destacar las siguientes observaciones:

- Respecto al resultado anterior, se incluye el estado retardado $x(k - d_M)$ dentro del estado ampliado a través del término $V_4(k)$. De este modo, el estado ampliado es:

$$\Phi(k) = (x(k) \ x(k - d_k) \ x(k - d_M)) \quad (2.43)$$

- dentro del desarrollo del término $\Delta V_1(k)$ se considera el modelo original (2.24) en lugar del modelo transformado (2.4.2) en $x(k + 1)$. Por tanto, se elude la necesidad de aplicar la desigualdad procedente del *cross product lemma*, y por consiguiente se elimina una fuente considerable de conservadurismo en la formulación de este resultado.
- Las variables M, N, S se introducen en la LMI sumando las siguientes relaciones *free-weighting* al término $\Delta V(k)$:

$$\begin{aligned} & \Delta V(k) + 2\Phi^T(k)M[x(k) - x(k - d_k) - \\ & - \sum_{i=k-d_k}^{k-1} \nu(i)] + 2\Phi^T(k)S[x(k - d_k) - x(k - d_M) - \sum_{i=k-d_M}^{k-d_k-1} \nu(i)] + \\ & + 2\Phi^T(k)S[x(k) - x(k - d_M) - \sum_{i=k-d_M}^{k-1} \nu(i)] < 0 \end{aligned} \quad (2.44)$$

Por otro lado, el término $-\sum_{i=k-d_M}^{k-1} \nu^T(j)Z_1\nu(j)$ procedente de $\Delta V_5(k)$, en lugar de incrementarlo hasta $-\sum_{i=k-d_k}^{k-1} \nu^T(j)Z_1\nu(j)$, se separa en dos términos: $-\sum_{i=k-d_k}^{k-1} \nu^T(j)Z_1\nu(j)$ y $-\sum_{i=k-d_M}^{k-d_k+1} \nu^T(j)Z_1\nu(j)$. Nótese que la elección particular de la técnica *free-weighting* tiene la finalidad en este caso de eliminar los términos que contienen estados retardados intermedios.

Criterio de estabilidad propuesto por [135]: Una mejora respecto al resultado anterior es sugerida en [135], donde se presenta el siguiente teorema de estabilidad:

Teorema 2.4.9 [135]

El sistema (2.24) es globalmente asintóticamente estable para cualquier valor de retardo $d_m \leq d_k \leq d_M$ si existen las matrices $P, Q, Q_M, Q_m, R, S > 0$ y $L_1, L_2, M_1, M_2, N_1, N_2$ que satisfacen la siguiente condición LMI:

$$\begin{pmatrix} \Gamma_{11} & \Gamma_{12} & M_1 & -L_1 & \sqrt{\Delta_d}L_1 & \sqrt{\Delta_d}M_1 & \sqrt{d_M}N_1 \\ (*) & \Gamma_{22} & M_2 & -L_2 & \sqrt{\Delta_d}L_2 & \sqrt{\Delta_d}M_2 & \sqrt{d_M}N_2 \\ (*) & (*) & -Q_M & 0 & 0 & 0 & 0 \\ (*) & (*) & (*) & -Q_m & 0 & 0 & 0 \\ (*) & (*) & (*) & (*) & -R - S & 0 & 0 \\ (*) & (*) & (*) & (*) & (*) & -R & 0 \\ (*) & (*) & (*) & (*) & (*) & (*) & -S \end{pmatrix} < 0 \quad (2.45)$$

$$\begin{aligned} \Gamma_{11} = & A^T P A - P + (1 + \Delta_d)Q + Q_M + Q_m + \Delta_d(A - I)^T R (A - I) + \\ & + d_M(A - I)^T S (A - I) + N_1 + N_1^T \end{aligned}$$

$$\Gamma_{12} = A^T P A_d + \Delta_d (A - I)^T R A_d + d_M (A - I)^T S A_d + \\ + L_1 - M_1 - N_1 + N_2^T$$

$$\Gamma_{22} = A_d^T P A_d + \Delta_d A_d^T R A_d + d_M A_d^T S A_d + \\ + L_2 + L_2^T - M_2 - M_2^T - N_2 - N_2^T$$

Demostración: Ver [135] ■

En resumen, las mejoras que introduce este resultado son:

- Se introduce en el vector de estados ampliado el estado con retardo d_m , de modo que la función cuadrática de Lyapunov-Krasovskii involucra el nuevo estado definido como:

$$\Phi(k) = (x(k) \ x(k - d_k) \ x(k - d_M) \ x(k - d_m)) \quad (2.46)$$

- Con el nuevo estado introducido, se aporta información adicional en la LMI que contribuye a reducir el grado de conservadurismo. Tales modificaciones se pueden apreciar en los siguientes aspectos:
 - Se añade el nuevo término en el funcional de Lyapunov-Krasovskii $\sum_{j=k-1}^{k-d_m} x^T(j) Q_m x(j)$ que relaciona el estado actual con el nuevo estado $x(k - d_m)$.
 - Con la misma finalidad que el punto anterior, se añade también el nuevo término $\sum_{i=-d_M}^{-d_m-1} \sum_{j=k+i}^{k-1} \nu^T(j) R \nu(j)$.

Por tanto, el funcional candidato propuesto es:

$$\begin{aligned} V(k) &= V_1(k) + V_2(k) + V_3(k) + V_4(k) + V_5(k) \quad (2.47) \\ V_1(k) &= x^T(k) P x(k) \\ V_2(k) &= \sum_{j=k-1}^{k-d_k} x^T(j) Q x(j) \\ V_3(k) &= \sum_{i=-d_M+1}^{-d_m} \sum_{j=k-d_M}^{k-1} x^T(j) Q x(j) \\ V_4(k) &= \sum_{j=k-1}^{k-d_M} x^T(j) Q_M x(j) + \sum_{j=k-1}^{k-d_m} x^T(j) Q_m x(j) \\ V_5(k) &= \sum_{i=-d_M}^{-1} \sum_{j=k+i}^{k-1} \nu^T(j) Z \nu(j) \\ \nu(k) &= x(k+1) - x(k) \end{aligned}$$

- Además, se agregan al término diferencial $\Delta V(k)$ resultante las identidades:

$$\begin{aligned}
& 2[x(k)^T L_1 + x(k - d_k)^T L_2][x(k - d_k) - x(k - d_M) - \sum_{i=k-d_M}^{k-d_k-1} \nu(i)] \quad (2.48) \\
& 2[x(k)^T M_1 + x(k - d_k)^T M_2][x(k - d_m) - x(k - d_k) - \sum_{i=k-d_k}^{k-d_m-1} \nu(i)] \\
& 2[x(k)^T N_1 + x(k - d_k)^T N_2][x(k) - x(k - d_k) - \sum_{i=k-d_k}^{k-1} \nu(i)]
\end{aligned}$$

que introducen las nuevas variables *free-weighting* $L_1, L_2, M_1, M_2, N_1, N_2$.

- con estas modificaciones, el número de variables de decisión es $9n^2 + 3n$, donde n es la dimensión de la matriz A , frente a las $(23n^2 + 5n)/2$ variables involucradas en el teorema anterior [34]. Mediante algunos ejemplos numéricos se ilustra la reducción de conservadurismo respecto resultados análogos anteriores.

Criterio de estabilidad propuesto por [47]: Finalmente, en [47] se presenta un nuevo resultado que mejora la relación de compromiso entre número de variables de decisión y conservadurismo. En este trabajo se compara con resultados anteriores similares [135] demostrando la mejora introducida analíticamente y con ejemplos numéricos.

Teorema 2.4.10 [47] *El sistema 2.24 es globalmente asintóticamente estable si existen ciertas matrices $P, Q, Q_m, Q_M, Z_M, Z_1 > 0$ y S_1, S_2, T_1, T_2 que satisfagan las LMI's:*

$$\begin{pmatrix} \Gamma & \Delta_d S \\ \Delta_d S^T & -\Delta_d Z_M \end{pmatrix} < 0 \quad \begin{pmatrix} \Gamma & \Delta_d T \\ \Delta_d T^T & -\Delta_d Z_M \end{pmatrix} < 0 \quad (2.49)$$

donde

$$S = (0 \ S_1^T \ S_2^T \ 0)^T \quad (2.50)$$

$$T = (0 \ T_1^T \ 0 \ T_2^T)^T$$

$$\Gamma = \begin{pmatrix} \Gamma_{11} & \Gamma_{12} & Z_1 & 0 \\ (*) & \Gamma_{22} & S_1 - S_2^T & -T_1 + T_2^T \\ (*) & (*) & \Gamma_{33} & 0 \\ (*) & (*) & (*) & -Q_M - T_2 - T_2^T \end{pmatrix}$$

$$\Gamma_{11} = A^T P A - P + (1 + \Delta_d)Q + Q_M + Q_m + (A - I)^T Z (A - I) - Z_1$$

$$\Gamma_{12} = A^T P A_d + (A - I)^T Z A_d$$

$$\Gamma_{22} = A_d^T P A_d + A_d^T Z A_d$$

$$\Gamma_{33} = -Q_m - Z_1 + S_2 + S_2^T$$

$$Z = d_m^2 Z_1 + \Delta_d Z_2$$

Demostración: Ver [47] ■

En resumen, las novedades a destacar son:

- Reducción en el tamaño: $9n^2 + 3n$ en el Teorema 3 [135] frente a $7n^2 + 3n$ variables de decisión en el Teorema 1 [47].
- A diferencia de otros resultados análogos, y teniendo en cuenta que $d_m \leq d_k \leq d_M$, se explota la parametrización afín en la variable d_k mediante la construcción de la siguiente aproximación politópica:

$$\Gamma + (d_k - d_m)S Z_2^{-1} S^T + (d_M - d_k)T Z_2^{-1} T^T < 0 \quad (2.51)$$

que es equivalente a:

$$\Gamma + \Delta_d S Z_2^{-1} S^T < 0 \quad (2.52)$$

$$\Gamma + \Delta_d T Z_2^{-1} T^T < 0$$

2.5. Análisis de Prestaciones y Criterios de Desempeño

En ocasiones, además de garantizar la estabilidad de un sistema, se desea imponer especificaciones de calidad sobre su respuesta, o bien en base al comportamiento dinámico (tiempo de establecimiento/carácter oscilatorio), en base a la capacidad de rechazar las perturbaciones externas (ruido de proceso / ruido de medida) o en base a consideraciones de robustez frente a incertidumbres en el modelo del proceso / retardo. Por ejemplo, un sistema estable que se inestabiliza con una mínima variación en alguno de sus parámetros, o cuyo tiempo de establecimiento es demasiado prolongado, desde el punto de vista práctico podría no ser operativo.

2.5.1. En base a la dinámica de la respuesta

En un sistema LTI convencional, la ubicación de los polos en el plano complejo, además de la estabilidad revela toda la información necesaria para conocer la dinámica de la respuesta del sistema (velocidad de convergencia, carácter oscilatorio). En un sistema LTI con retardos, dado que el número de polos es infinito en el caso de retardo constante, resulta más complejo evaluar la dinámica bajo este criterio. En el caso de retardos variables y aleatorios ni tan siquiera es aplicable, ya que no se puede recurrir al modelo en el dominio de Laplace.

Sin embargo, existen resultados que extienden los resultados de estabilidad basados en LMI para obtener más información acerca de la dinámica del sistema. Por ejemplo, el criterio de estabilidad-D [59, 60] extiende las LMIs derivadas del análisis de estabilidad de Lyapunov, de modo que permite definir áreas específicas dentro del plano complejo tal que la verificación de las LMIs garantizan, además de la estabilidad, que los parámetros dinámicos de la respuesta del sistema estarán dentro de unos límites fijados a priori.

Una variante típica de este criterio, aplicada sobre sistemas discretos, es el llamado criterio de estabilidad- $D(\alpha, r)$, donde la región del plano complejo se especifica en un disco de radio r centrado en el punto $\alpha + j0$. Nótese que el mero criterio de estabilidad es un caso particular del anterior haciendo $r = 1$ y $\alpha = 0$.

Otro ejemplo se puede encontrar en [84]. En este trabajo se aplica el criterio de estabilidad- $D(\alpha, r)$ sobre un sistema discreto con múltiples retardos e incertidumbres politópicas. Nótese que haciendo $\alpha = 0$ solamente se garantiza una mínima velocidad de convergencia en la respuesta a partir de un máximo coeficiente de decaimiento geométrico $r \leq 1$ ([108]).

2.5.2. En base a rechazo a perturbaciones externas

En los análisis de sistemas con retardos, es frecuente encontrar resultados que extienden el estudio de la estabilidad con la evaluación de la capacidad del sistema controlado de rechazar las perturbaciones externas (ruido de proceso y ruido de medida). Los criterios de desempeño basados en la norma H_2/H_∞ de la función de transferencia entre las perturbaciones externas del proceso y la salida se aplican también sobre los sistemas con retardos. En [136] se explora el diseño de filtros óptimos H_2 y en [66] bajo la norma H_∞ sobre sistemas continuos con retardos variables e incertidumbres de modelado.

2.5.3. En base a la robustez frente a incertidumbres

En la práctica nunca se dispone de un modelo exacto del proceso a controlar. El análisis de la estabilidad robusta puede entenderse como una extensión del mero estudio de la estabilidad considerando un modelo incierto.

Normalmente, las incertidumbres sobre el modelo se consideran variables con el tiempo y acotadas.

Para este tipo de incertidumbres, el análisis en el dominio del tiempo resulta muy eficaz, gracias a la facilidad de integración del modelo de las incertidumbres típicamente adoptado (normadas, politópicas o ambos) con la herramienta de análisis basado en LMIs.

En el contexto de sistemas con retardos temporales se puede consultar una amplia bibliografía. Por ejemplo, en [55, 28] se analiza la estabilidad sobre sistemas inciertos con ambos modelos de incertidumbres. En esta última referencia, se extiende el resultado de análisis a diseño de una ley de control por realimentación estática del estado. En el contexto de sistemas discretos, también en [34] se aborda el estudio de la estabilidad sobre un modelo de incertidumbres normadas y en [67] con incertidumbres politópicas.

2.6. Conclusiones

En este capítulo se han revisado algunas de las contribuciones más significativas en el análisis de la estabilidad de los sistemas con retardos temporales. Concretamente, se ha hecho especial hincapié en el análisis basado en el dominio del tiempo sobre sistemas discretos con retardos mediante LMI's generadas a partir de funcionales de Lyapunov-Krasovskii. La principal motivación de esta línea de trabajo, aplicada para sistemas con retardos variables, radica en el diseño del funcional candidato adecuado para reducir el conservadurismo en las condiciones LMI de análisis y el número de variables de decisión del problema.

3 Síntesis de controladores

3.1. Resumen

Este capítulo revisa las principales técnicas de diseño de controladores para sistemas con retardos temporales, bajo las dos aproximaciones principales: esquemas de control convencionales y esquemas de control diseñados para compensar el efecto del retardo.

3.2. Introduccion

A la hora de diseñar un controlador sobre un sistema con retardos temporales, es necesario tener en cuenta el efecto de éstos en la respuesta del sistema en bucle cerrado [93, 95, 65], ya que pueden degradar su respuesta hasta inestabilizarlos.

Básicamente, en la literatura es posible diferenciar dos tendencias en el diseño de estrategias de control para sistemas con retardos:

- Reutilización de los esquemas de control clásicos: Mediante esquemas de control tales como realimentación estática del estado [9] o la salida [36], control PID [96], o control en modo deslizante [102], entre otros. La idea es obtener la técnica adecuada que permita calcular los parámetros del controlador que estabilice el sistema, incluyendo en ésta el efecto del retardo.
- Esquemas de control con compensación del retardo o de tiempo muerto (de sus siglas en inglés, *Dead-time compensators*, DTC) [94]. A diferencia del esquema de control clásico, se proponen arquitecturas de control cuyo objetivo es eliminar el retardo de la ecuación característica en bucle cerrado. Cabe citar dentro de esta categoría dos contribuciones, sobre las cuales es posible encontrar bibliografía: el conocido Predictor de Smith (SP) [114], y la técnica de Asignación Finita del espectro (de sus siglas en inglés, *Finite Spectrum Assignment*, FSA) [83].

Asimismo, los resultados de diseño suelen enfocarse a simplemente estabilización o control óptimo:

- Simple estabilización: se trata de encontrar los parámetros del controlador que estabilice el sistema en bucle cerrado para un cierto retardo. En este

caso, la idea es obtener el máximo retardo por debajo del cual el sistema en lazo cerrado permanece estable [143].

- **Control óptimo:** A partir de una función de coste que englobe uno o varios criterios de desempeño, se plantea el objetivo de diseñar un controlador que además de estabilizar el sistema, minimice la función de coste definida. En la literatura de diseño de controladores con retardo, es frecuente el diseño óptimo frente a rechazo a perturbaciones externas H_2/H_∞ [66] y tolerancia frente a incertidumbres de modelado.

A continuación se revisan algunas de las contribuciones en el diseño de controladores sobre sistemas con retardos:

3.3. Esquemas de control clásicos

El argumento principal que motiva esta línea de trabajo estriba en la posibilidad de reutilizar los esquemas clásicos de control sobre sistemas con retardos. Es bien conocido el hecho de que en la industria, dado su bajo coste y sencillez, la mayor parte de controladores son estáticos o PID [96].

Por tanto, la idea es diseñar los parámetros del controlador teniendo en cuenta el retardo dentro del bucle de control. La problemática inherente al diseño es análoga al análisis: reducir en la medida de lo posible el conservadurismo de las condiciones de diseño obtenidas, muchas de ellas derivadas directamente de análisis mediante cambios de variable [9].

En lo que sigue se revisan algunas de las contribuciones más destacadas, clasificadas según el esquema de control utilizado:

3.3.1. Realimentación estática del estado

Por tratarse del esquema de control más simple, es el que tiene una mayor aceptación en la literatura. Algunos resultados de análisis de estabilidad en el dominio del tiempo basados en LMI, son fácilmente adaptables a diseño, simplemente con algunas transformaciones algebraicas y sencillos cambios de variable [9]. La idea es calcular la ganancia del controlador estático K a partir de las variables de decisión del problema planteado. Para ilustrar este hecho, veamos el siguiente ejemplo sobre la condición de análisis de la estabilidad *independiente del retardo* sobre un sistema con múltiples retardos constantes (ver Teorema 2.4.1, Capítulo 2).

Considérese el siguiente sistema:

$$\dot{x}(t) = A_c x(t) + \sum_{i=1}^p A_{ci} x(t - \tau_i) + B_c u(t) \quad (3.1)$$

y una ley de control por realimentación estática del estado $u(t) = Kx(t)$. El siguiente resultado permite diseñar la K que estabilice el sistema anterior en bucle cerrado:

Teorema 3.3.1 [43]

El sistema con múltiples retardos puntuales constantes (2.2) es globalmente y asintóticamente estable si existen matrices $R, S_1, \dots, S_p > 0$ y una matriz W tal que:

$$\begin{pmatrix} RA_c^T + W^T B_c^T + A_c R + B_c W + \sum_{i=1}^p S_i RA_1^T \cdots RA_p^T & & & \\ (*) & -S_1 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ (*) & (*) & \cdots & -S_p \end{pmatrix} < 0 \quad (3.2)$$

donde la ganancia del controlador es $K = WR^{-1}$.

Demostración: Se puede demostrar fácilmente pre y post multiplicando ambos lados de la LMI del Teorema 3.3.1 por la matriz:

$$\begin{pmatrix} P^{-1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & P^{-1} & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & P^{-1} \end{pmatrix}$$

y redefiniendo las siguientes variables: $S_i = P^{-1}Q_iP^{-1}$ y $R = P^{-1}$. ■

En el caso de sistemas discretos con retardos variables, en algún caso es posible derivar condiciones de diseño siguiendo el mismo razonamiento [9]. Esto, en principio, es posible siempre que exista una matriz tal que al pre y post multiplicarla por las LMI de análisis permita obtener un problema LMI donde el parámetro del controlador pueda obtenerse a partir de las variables de decisión. Sin embargo, en la mayor parte de ocasiones, esto no es posible, y por tanto, el problema de diseño no es convexo [135], salvo que se realice algún paso conservador (eliminando convenientemente alguna de las variables de decisión).

Los problemas no convexos basados en desigualdades matriciales no lineales (NMI) (las BMI *Bilinear Matrix Inequality* o desigualdades matriciales bilineales [119, 69] son un caso particular) presentan un coste computacional exponencial. Este tipo de algoritmos se les conoce como problemas *NP-Hard* [116, 1] y son considerados como *intratables*.

En la literatura existen contribuciones que tratan de ofrecer métodos de resolución numérica de este tipo de problemas. Cabe citar al respecto:

- ILMI *Iterative Linear Matrix Inequality* [16]: a partir de un valor inicial establecido heurísticamente para alguna de las variables de decisión (las mínimas necesarias para que el problema sea LMI), iterar sustituyendo de forma alternada en cada iteración hasta una cierta condición de parada o no factibilidad. Este método es quizá el más simple pero existe una fuerte

dependencia del valor inicial y por ende, no garantiza la obtención de una solución óptima (o ni siquiera factible, aunque exista).

- Algoritmo CCL [26]: Este algoritmo, también de carácter iterativo, es el que goza de mayor popularidad en la literatura, ya que bajo ciertas condiciones poco restrictivas, la obtención de una solución óptima tras un número finito de iteraciones está garantizado. En el apéndice 9.0.6 se puede consultar más detalles al respecto.
- Otras: Por ejemplo, el algoritmo *Branch and Bound* [69] u otros algoritmos heurísticos se plantean y discuten en [31, 138].

3.3.2. Control PID

El esquema de control PID (o alguna de sus variantes: P, PI, PD) es el que mayor impacto tiene en la industria, dada su sencillez en la implementación y bajo coste. Resulta, por tanto, interesante disponer de técnicas de diseño que permitan, de forma análoga a los sistemas convencionales, sintonizar las ganancias para estabilizar sistemas con retardos temporales. En el libro [112], así como en [96, 63, 11] se puede encontrar contribuciones de aplicación y diseño de controladores PID sobre sistemas con retardos temporales y concretamente para el caso de retardos variables en [124].

Otra aplicación de control PID sobre sistemas con retardos, con adaptación dinámica de los parámetros del regulador en función del retardo medido se puede encontrar en [110, 23].

3.3.3. Control en modo deslizante

La técnica de control en modo deslizante tradicional [102] consiste en la aplicación de una señal de control discontinua conmutada, que bajo ciertas condiciones consigue llevar el estado del sistema a una superficie $\sigma(x(t))$ denominada *superficie de deslizamiento*, que se diseña en base a las especificaciones dinámicas de la respuesta deseada. Cabe destacar los siguientes requerimientos: (i) la ley de control deberá hacer que el estado del sistema converja a la superficie de deslizamiento y (ii) el estado deberá mantenerse dentro de la superficie ante perturbaciones externas y converger al punto de equilibrio. A tales efectos, deberá cumplirse, entre otras cosas, que el grado relativo del sistema (que puede definirse como el número de veces que hay que derivar la función $\sigma(x(t))$ que describe la superficie de deslizamiento para que la señal de control aparezca explícitamente) sea uno. Una vez el estado del sistema se encuentra dentro de la superficie de deslizamiento, en sistemas LTI, garantiza la convergencia al punto de equilibrio.

Esta técnica de control representa una alternativa eficiente para la estabilización robusta frente a incertidumbres en el modelo, comportamiento no lineal y perturbaciones externas, pero uno de sus principales inconvenientes es el efecto *chattering*, debido a la conmutación a alta frecuencia de la acción de control, lo cual puede limitar su aplicabilidad sobre ciertos sistemas

físicos. El estudio de esta ley de control aplicada sobre sistemas con retardos temporales se discute en el trabajo [107]. Al igual que sucede con otras leyes de control convencionales, si no se tiene en cuenta el retardo en el diseño, el sistema puede volverse inestable o en este caso agravar el efecto *chattering*.

En el trabajo [42] se proponen estrategias de diseño basadas en LMI de leyes de control en modo deslizante aplicada sobre sistemas con retardos en el estado fijos (tanto para un solo retardo como para múltiples retardos) y retardos variables. Para todos los casos, el procedimiento se divide en dos partes: en primer lugar, diseño de la superficie de deslizamiento $\sigma(x(t))$ tal que el estado del sistema en bucle cerrado sea capaz de alcanzarla en tiempo finito, mediante funciones de Lyapunov. En segundo lugar, diseño de la ley de control de modo que una vez el estado haya alcanzado la superficie de deslizamiento ($\sigma(x(t)) = 0$), el sistema converja al punto de equilibrio deseado. En este caso, se utiliza funcionales de Lyapunov en cuyo diseño se tiene en cuenta el estado retardado.

Otra contribución similar [128] aplica el control en modo deslizante sobre sistemas inciertos con retardo constante y desconocido.

3.4. Esquemas de control por Compensación de Tiempo Muerto (DTC)

Los esquemas de control por compensación de tiempo muerto (DTC) *Dead time compensator* presentan un objetivo: compensar el efecto del retardo dentro del bucle de control. La idea subyacente a estos métodos consiste en utilizar de un modo implícito o explícito una predicción del estado a partir del modelo y de la información histórica del estado para eliminar el retardo de la ecuación característica. En los monográficos [93, 94] y en [37, 95, 65] se puede consultar numerosas aplicaciones prácticas de las técnicas de control DTC.

Los esquemas de control basados en DTC se pueden basar en los dos siguientes resultados: Predictor de Smith (SP) [114] y Asignación de Espectro Finito (FSA) [83]. La característica más destacada de ambas aproximaciones, es que en ausencia de errores de modelado y retardo constante y conocido (condiciones *ideales*), la respuesta en bucle cerrado es equivalente al sistema libre de retardo. No obstante, ya que la predicción del estado se realiza a partir del modelo, cabe esperar en principio una fuerte dependencia del modelo del sistema, lo que sugiere en principio una elevada sensibilidad a errores de modelado, especialmente cuando el retardo a compensar es elevado. En [37] se estudia el rechazo a perturbaciones de un esquema DTC aplicado sobre procesos estables y con integrador. Del mismo modo cabe esperar que, ante errores de modelado en el retardo o retardos variables, el comportamiento del sistema controlado mediante alguna estrategia basada en DTC se degrade rápidamente, pudiendo llegar a inestabilizarse.

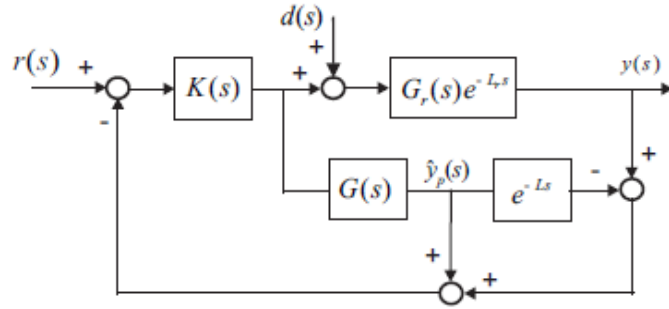


Figura 3.1. Predictor de Smith

3.4.1. Predictor de Smith

El Predictor de Smith fue inicialmente propuesto por [114] y representa una de las ideas precursoras en la literatura del control basado en DTC.

Asumiendo un retardo constante en la entrada o salida del sistema τ (ver Figura 3.1, la función de transferencia del mismo se puede representar como:

$$G_{cl}(s) = \frac{K(s)G_r(s)e^{-L_r s}}{1 + K(s)G(s) + K(s)G(s)e^{-L s} - K(s)G_r(s)e^{-L_r s}} \quad (3.3)$$

donde $G(s)$, L representan el modelo del proceso y el modelo del retardo, respectivamente, sobre el proceso y retardo reales $G_r(s)$, L_r , y $K(s)$ es la función de transferencia del controlador.

No obstante, cabe citar las siguientes limitaciones del SP:

- (i) No es aplicable a procesos inestables, incluso en ausencia de errores de modelado en proceso y retardo ($G(s) = G_r(s)$, $L = L_r$).
- (ii) Sólomente es aplicable, en principio, cuando el retardo es constante.
- (iii) No es aplicable a sistemas con retardos en el estado.
- (iv) Es muy sensible a errores de modelado.
- (v) Elevada sensibilidad a perturbaciones externas. En concreto, presenta problemas de rechazo a perturbaciones en procesos con acción integral.

3.4.2. Asignación finita del espectro (FSA)

La técnica de Asignación finita del espectro con terminología en inglés *Finite Spectrum Assignment*, (FSA) [83] tiene como objeto superar alguna de las limitaciones inherentes al Predictor de Smith, como la inestabilidad interna cuando se aplica sobre procesos inestables. De hecho, la técnica FSA, a diferencia del SP [114], no se propaga los polos inestables del proceso a la función de transferencia en bucle cerrado.

La técnica de control FSA se basa en la transformación del vector de estados del proceso propuesta por [74, 3] que permite eliminar los retardos de la ecuación característica del sistema, de modo que los polos del sistema en bucle cerrado se pueden asignar libremente en base a las especificaciones requeridas mediante cualquier técnica de diseño clásica [32].

Por ejemplo, considérese el siguiente sistema continuo con retardo constante τ en la entrada:

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t - \tau) \quad (3.4)$$

Por otro lado, la ley de control FSA se define como sigue:

$$\begin{aligned} u(t) &= Kz(t) \\ z(t) &= x(t) + \int_{-\tau_h}^0 e^{As} Bu(t+s) ds \end{aligned} \quad (3.5)$$

donde $z(t)$ es una transformación lineal de las variables $x(t), u(\alpha), \alpha \in [t - \tau_h, t]$ [3].

Lema 3.4.1 [88]

Si el retardo considerado en la ley de control FSA coincide con el retardo real ($\tau_h = \tau$), y en ausencia de incertidumbres en el modelo, la ecuación en bucle cerrado del sistema 3.4-3.5 es:

$$\dot{z}(t) = Az(t) + (e^{-\tau t} B)u(t) \quad (3.6)$$

y por tanto, el retardo desaparece de la ecuación característica.

Se deduce, por tanto, que el valor de K puede ser calculado utilizando cualquier técnica de diseño clásica sobre la expresión en lazo cerrado (3.6) libre de retardo. La estabilidad del sistema transformado en lazo cerrado implica la estabilidad del sistema original y viceversa. Sin embargo, uno de los mayores inconvenientes de esta técnica es la necesidad del conocimiento exacto del modelo, lo cual es con frecuencia imposible en aplicaciones prácticas de ingeniería [88]. En caso de existir discrepancia entre el modelo original y aproximado, el sistema en bucle cerrado no elimina los retardos de la ecuación característica. En este último trabajo, y en [134], se estudia la aplicación de la ley de control FSA sobre sistemas con incertidumbres.

La técnica de control FSA se puede entender como una ley de control dinámica donde se realimenta información del histórico del estado entre los instantes $t - \tau_h$ y t para obtener una predicción del mismo, donde a su vez τ_h es el retardo que se asume como cierto.

Implementación de la ley control FSA continua en sistemas digitales: Una de las características de la ley de control FSA continua es que es de dimensión infinita, debido a la presencia del término integral del retardo distribuido en la ley de control (Ecuación (3.5)). Dicho en otras palabras, sería necesario almacenar en un buffer los *infinitos* valores de estado comprendidos entre los instantes t y $t - \tau_h$ para poder evaluar el término integral correspondiente al retardo distribuido de la ley de control FSA. En [83] sugiere una aproximación para el cómputo del retardo distribuido a partir de la implementación numérica de la integral como un sumatorio de términos con retardos puntuales múltiples enteros de un determinado valor, cuyo resultado depende de la partición realizada entre $t - \tau_h$ y t :

$$\int_{-\tau_h}^0 e^{As} Bu(t+s) ds \approx \sum_{q=0}^p \nu_q e^{\frac{q}{p} Ah} Bu(t - \frac{q}{p} \tau_h) \quad (3.7)$$

Donde el término izquierdo de la expresión anterior es el retardo distribuido de la ley de control (3.5), aproximada a partir de un sumatorio finito de p términos, correspondientes a la partición uniforme del intervalo de integración $[-\tau_h, 0]$. Los coeficientes ν_q dependen de la regla de aproximación numérica elegida (rectangular, trapezoidal, Simpson, etc) [87].

Sin embargo, en el monográfico [105] se discute la dificultad de la implementación numérica del término integral de la ley de control FSA y en particular el problema de la no convergencia respecto al número de puntos en la interpolación $p \rightarrow \infty$. Esta cuestión se plantea como problema abierto. Sin embargo, en [139] se presentan una metodología de aproximación de la integral de predicción en el dominio z y posteriormente, en [140] se desarrolla una técnica análoga a la anterior en el dominio s) resolviendo ambas los problemas de inestabilidad numérica de la implementación discreta del retardo distribuido de la ley de control FSA reportados anteriormente. De hecho, se demuestra que la norma infinito del error de aproximación converge a 0 cuando $p \rightarrow \infty$. No obstante:

- Estos últimos trabajos únicamente aportan resultados de simulación que respaldan las conclusiones obtenidas sobre un proceso escalar de primer orden.
- En ningún momento se tiene en consideración la naturaleza discreta de una ley de control implementada en un sistema digital, teniendo en cuenta que la mayoría de las aplicaciones prácticas de ingeniería de control se implementan por computador [4]. En este caso, la medida del proceso debe ser considerada como una señal discreta, muestreada al periodo del sensor.

3.5. Adaptación FSA a sistemas discretos. Control basado en predictor

En el apartado anterior se ha revisado la problemática de la implementación digital de la ley de control FSA. Una solución alternativa a este problema se plantea en [81], siguiendo las ideas expuestas en [41]. La idea propuesta en este trabajo consiste en computar la predicción del estado a partir del modelo discreto del proceso a controlar, de modo que la ley de control resultante sea de dimensión finita. Considérese el proceso (3.4) discretizado a periodo T . Es fácil ver que, asumiendo en principio que $\tau = dT$, $d \in \mathbb{Z}^+$, el modelo discreto equivalente con retenedor de orden cero en la entrada (ZOH) es:

$$\begin{aligned} x(k+1) &= A_d x(k) + B_d u(k-d) \\ A_d &= e^{AT} \\ B_d &= \int_0^T e^{As} B ds \end{aligned} \quad (3.8)$$

Por otro lado, considérese la definición de la nueva variable $z(k)$ [81, 38] generada a partir de las matrices A_d, B_d del sistema discreto (3.8):

$$z(k) = A_d^h x_k + \sum_{i=0}^{h-1} A_d^{h-i-1} B_d u_{k+i-h} \quad (3.9)$$

donde $h \in \mathbb{Z}^+$ es el valor del retardo discreto asumido como cierto (idealmente $h = d$). En este caso, se puede interpretar $z(k)$ como la predicción discreta del estado h periodos de muestreo hacia delante.

Por tanto, la ley de control:

$$u(k) = Kz(k) \quad (3.10)$$

se puede considerar como el equivalente discreto de la ley de control FSA continuo. Esta ley de control también es conocida como ley de control basada en predictor [38]

3.5.1. Modelo en bucle cerrado

Lema 3.5.1 [81]

Si el retardo considerado en la ley de control basada en predictor coincide con el retardo real ($h = d$), y este último es constante, en ausencia de incertidumbres en el modelo la ecuación en bucle cerrado del sistema 3.8-3.10 es:

$$z(k+1) = (A_d + B_d K)z(k) \quad (3.11)$$

El resultado anterior se extiende al caso en que $h \neq d$, donde es posible obtener una expresión en bucle cerrado que depende sólo del valor del estado actual $z(k)$ y los estados pasados $z(k-d), z(k-h)$:

Lema 3.5.2 [38]

En ausencia de incertidumbres en el modelo, y suponiendo un retardo d constante la ecuación en bucle cerrado del sistema 3.8-3.10 es:

$$z(k+1) = (A_d + B_d K)z(k) + B_d K A_d^h z(k-d) - B_d K A_d^h z(k-h) \quad (3.12)$$

Nótese que si $d = h$, se obtiene la expresión en bucle cerrado libre de retardo (ver Ecuación (3.11)).

Análisis robustez: Hasta ahora se ha supuesto que el retardo τ es constante y múltiplo entero del periodo T . En este apartado se discute el comportamiento del sistema frente a pequeñas variaciones en el retardo y en el periodo de muestreo. Teniendo en cuenta que t_k es el k -ésimo instante de muestreo, se tiene que:

$$T_k = t_{k+1} - t_k + \zeta_k \quad (3.13)$$

donde ζ_k representa una pequeña variación en el periodo de muestreo, que puede ser indistintamente positiva o negativa, tal que $|\zeta_k| \ll T$

Por otro lado, el retardo se redefine de modo que permite una pequeña variación temporal:

$$\tau(t_k) = dT_k + \varepsilon(t) \quad (3.14)$$

donde $|\varepsilon(t)| \leq \bar{\varepsilon} \ll T$.

En [81] se discute el comportamiento del sistema en bucle cerrado frente a estas incertidumbres variables. Aunque se demuestra que existe un cierto límite por debajo del cual, para $d = h$ y una K que estabilice el sistema, éste sigue siendo estable, no se aporta ningún resultado que permita cuantificar este límite. Hasta el conocimiento del autor, no existe ninguna contribución al respecto.

Diseño de K: En virtud del Lema 3.5.1, es posible diseñar el valor de K utilizando cualquier técnica de síntesis convencional, siempre que el retardo sea constante y conocido. Sin embargo, no se ha encontrado ningún resultado que permita diseñar K para sistemas discretos con retardos variables.

3.6. Conclusiones

En este capítulo se ha revisado algunas de las estrategias de diseño de controladores sobre sistemas con retardos temporales. En particular, el esquema de control FSA discreto (control basado en predictor) permite compensar el retardo cuando éste es constante y conocido (incluso cuando el proceso a controlar es inestable), a la vez que resuelve el problema de implementación digital. Sin embargo, hasta el conocimiento del autor, no existen contribuciones que profundicen por un lado en el estudio del análisis de la estabilidad robusta para este tipo de controladores sobre sistemas discretos con retardos variables, y por otro lado en el diseño de la ganancia del controlador basado en predictor para este tipo de sistemas. La motivación de la presente tesis, por tanto, es contribuir en esta línea, adaptando alguno de los resultados propuestos en la literatura para análisis y diseño con controladores estáticos al esquema de control basado en predictor.

Parte II

Contribuciones

4 Análisis de estabilidad y robustez de controladores basados en Predictor sobre sistemas LTI con retardos variables en la entrada

4.1. Resumen/Motivación

Este capítulo se corresponde con el contenido del artículo publicado en la revista International Journal of System Science (año 2011)

El objetivo de este capítulo es analizar mediante LMI (análisis en el dominio temporal) la robustez frente a incertidumbres de modelado del controlador discreto basado en predictor sobre sistemas con retardos variables en la entrada. Se compara la tolerancia a errores en el modelo de este esquema de control con respecto a otras estrategias de diseño (sub)óptimos para controladores basados en realimentación estática del estado. Finalmente, se proponen ejemplos numéricos sobre un proceso inestable con la finalidad de ilustrar la mejora introducida en la robustez del sistema en lazo cerrado.

4.2. Introducción

Tal y como se ha visto en anteriores capítulos, la presencia de retardos aparece con frecuencia en los sistemas de control, tales como ciertos procesos químicos, biológicos, aplicaciones en aeronáutica, etc. En la mayoría de ocasiones, tales retardos son variables, especialmente en los sistemas de control basados en red [91]. Básicamente, el análisis y diseño de sistemas lineales con retardos se ha investigado bajo dos tendencias:

- Esquemas de control convencionales: realimentación estática del estado [98, 118, 25, 133, 45], y realimentación estática de la salida/controladores dinámicos[36, 80].
- Esquemas de compensación de tiempo muerto (DTC), cuyo objetivo es eliminar el retardo de la ecuación característica en bucle cerrado incorporando de algún modo la predicción futura del estado en base al modelo del proceso. Cabe distinguir al respecto dos soluciones bien conocidas en la literatura: El Predictor de Smith y sus modificaciones [114, 97, 93] (para retardos constantes) y la técnica de Asignación de Espectro Finito (FSA), [83, 122, 134, 141]. En [49, 93] se puede encontrar numerosas aplicaciones experimentales del esquema de control basado en las técnicas DTC.

En este capítulo se compara la robustez frente a incertidumbres en el modelo del esquema de control basado en predictor con respecto al controlador por realimentación estática del estado. Análogamente al FSA continuo, la característica más destacada de este tipo de control es que en condiciones ideales (ausencia de errores de modelado y retardo constante y conocido), la respuesta del sistema en bucle cerrado coincide con la respuesta del sistema libre de retardo. Sin embargo, una de las críticas más señaladas sobre los esquemas de control DTC, y en particular, el predictor, es la elevada sensibilidad a errores de modelado en el proceso y en el retardo. Este hecho puede entenderse intuitivamente teniendo en cuenta que el cálculo de la predicción del estado se realiza iterativamente a partir de las ecuaciones del modelo del proceso, y por tanto, el posible error de aproximación tiende a acumularse. Por tanto, la motivación de este trabajo reside en el interés de evaluar la relación de compromiso entre el beneficio introducido debido a la compensación del retardo del esquema de control basado en el predictor y la pérdida de prestaciones en términos de robustez explicada anteriormente, para sistemas con retardos variables en la entrada. Dado que la mayor parte de aplicaciones de control se implementan sobre sistemas digitales, el estudio se centra en sistemas discretos.

4.3. Aspectos preliminares

Consideremos el siguiente sistema lineal discreto con retardos variables en la entrada:

$$\begin{aligned} x_{k+1} &= Ax_k + Bu_{k-d_k}, \quad k = 0, 1, \dots \\ u_l &= \phi_u(l), \quad -d_M \leq l < 0 \end{aligned} \quad (4.1)$$

donde $\phi_u(l)$ es una función que representa las condiciones iniciales de las acciones de control pasadas u_{-d_M}, \dots, u_{-1} y $A \in \mathfrak{R}^{m \times m}$, $B \in \mathfrak{R}^{m \times n}$ son las matrices del modelo de planta nominal.

Esta clase de modelos describen típicamente el comportamiento de ciertos procesos físicos en los que existe transporte de masas o de energía a través de tuberías, tales como reactores industriales o válvulas. El retardo, por tanto, dependería en cierta medida de la distancia a cubrir y de la velocidad de transferencia del fluido. Esta última podría variar aleatoriamente, por lo que el retardo inducido también.

Por tanto, en la formulación del problema el retardo se asume variable con el tiempo $d_k > 0$ en modo aleatorio y no medible, tal que $d_m \leq d_k \leq d_M$. Las cotas mínima y máxima (d_m y d_M , respectivamente) son conocidas.

Con el fin de simplificar los desarrollos posteriores se asume que $\phi_u(l) = 0$. Los valores iniciales de las acciones de control están disponibles en el controlador y por tanto pueden establecerse arbitrariamente en fase de diseño.

Además, ya que el sistema en bucle cerrado es un sistema LTI, las condiciones iniciales no influyen en la estabilidad.

4.3.1. Realimentación estática del estado

Con la ley de control por realimentación estática del estado

$$u_k = Kx_k \quad (4.2)$$

donde $K \in \mathfrak{R}^{n \times m}$ es la matriz de ganancia del controlador, la realización en bucle cerrado es

$$x_{k+1} = Ax_k + BKx_{k-d_k} \quad (4.3)$$

Obsérvese que la expresión en bucle cerrado se convierte en un sistema con retardo en el estado. En la literatura existe una amplia contribución en el análisis y diseño de controladores de este tipo, dada su sencillez en la implementación. Concretamente, los sistemas discretos con retardos se han analizado mediante LMI a partir de los criterios derivados del Teorema de Lyapunov generados a partir de funcionales de Lyapunov-Krasovskii en [34, 135].

No obstante, el principal problema de este tipo de controlador es el grado de conservadurismo introducido por los siguientes motivos:

- El controlador estático definido en (4.2) sólo considera información parcial del estado. Cabe pensar que si se incorpora más información en la ley de control (estados anteriores a $x(k)$), se puede mejorar la calidad de la respuesta.
- Los funcionales de Lyapunov-Krasovskii no representan con total generalidad la clase de funciones de Lyapunov requeridas [64]. Recordemos que los funcionales de Lyapunov-Krasovskii son una versión simplificada de la forma cuadrática genérica generada a partir del modelo aumentado con el vector de estados actuales y pasados, que a cambio de independizar el tamaño de la LMI del valor del retardo, introduce un grado de conservadurismo.

4.3.2. Controlador basado en predictor

Como alternativa al controlador anterior, considérese la siguiente ley de control:

$$u_k = K\bar{x}_{k+h} \quad (4.4)$$

donde \bar{x}_{k+h} es la predicción futura del estado h periodos de muestreo hacia delante. El parámetro h es un parámetro de diseño y debe ser un valor

entero positivo, en principio lo más cercano posible al valor real del retardo. [41, 81]. Nótese que para el caso particular de retardo constante d , si $h = d$, se elimina el retardo de la ecuación característica en bucle cerrado [38].

En concreto, se tiene a partir del modelo discreto del sistema, que $x_{k+1} = Ax_k + Bu_{k-h}$. Por tanto, $x_{k+2} = A^2x_k + ABu_{k-h} + Bu_{k-h+1}$ y para x_{k+3} procediendo de forma análoga se puede obtener expresiones similares. Por tanto, la predicción del estado \bar{x} en la ley de control de la Ecuación (4.4) puede calcularse mediante la expresión [41, 81]:

$$\bar{x}_{k+h} = A^h x_k + \sum_{i=0}^{h-1} A^{h-i-1} B u_{k+i-h} \quad (4.5)$$

Obsérves que las acciones de control son anteriores al instante de cómputo de la nueva acción de control: u_{k-h}, \dots, u_{k-1} , por tanto, esta fórmula es una expresión *causal*

Para el caso de retardo constante $d_k = d$, la expresión en bucle cerrado del sistema es [38]:

$$x_{k+1} = (A + BK)x_k + BKA^h (x_{k-d} - x_{k-h}) \quad (4.6)$$

donde, si $d = h$, se elimina el retardo de la ecuación característica, tal y como se puede deducir por la propia estructura de la ley de control.

4.3.3. Sensibilidad a incertidumbres en el predictor

Como se ha discutido en capítulos anteriores la presencia de incertidumbres en el modelo puede afectar negativamente al comportamiento del sistema hasta hacerlo inestable. Particularmente, en el caso del control basado en predictor, es razonable suponer además que las incertidumbres de modelado tienen un impacto mayor dado que éstos se acumulan en el cálculo de la predicción del estado. Por tanto, cabe esperar que la degradación en la respuesta debido a los errores de modelado en el sistema sea mayor conforme el retardo considerado en el predictor h sea más grande.

Por tanto, en este capítulo se plantea un doble objetivo: en primer lugar extender las ideas de los trabajos anteriormente citados para analizar la estabilidad robusta del controlador basado en predictor ante retardos variables, y en segundo lugar, mostrar que en ciertos casos el uso del predictor mejorar la robustez con respecto al esquema de control basado en la realimentación estática.

4.4. Formulación del Problema

Considérese el sistema LTI de la Ecuación (4.1) con incertidumbres normadas:

$$\begin{aligned} x_{k+1} &= (A + \Delta_{A_k})x_k + (B + \Delta_{B_k})u_{k-d_k} \\ u_l &= \phi_u(l), \quad -d_M \leq l < 0 \end{aligned} \quad (4.7)$$

Las incertidumbres del sistema $\Delta_{A_k}, \Delta_{B_k}$ verifican por tanto:

$$\begin{aligned} [\Delta_{A_k}, \Delta_{B_k}] &= \bar{\alpha}G\Delta_k[H_a, H_b] \\ \Delta_k^T \Delta_k &\leq I \end{aligned} \quad (4.8)$$

donde G, H_a, H_b son matrices conocidas de dimensiones apropiadas.

El objetivo de las siguientes secciones es desarrollar un conjunto de LMI que permitan cuantificar y comparar la relación de compromiso entre robustez frente a incertidumbres en el modelo y frente a incertidumbres en el retardo, para ambos esquemas de control: realimentación estática del estado y predictor. En este contexto, $\bar{\alpha}$ es el parámetro que define el tamaño de las incertidumbres y por tanto el que se utilizará de baremo a efectos comparativos entre ambos esquemas.

4.5. Resultados Principales

4.5.1. Modelo en bucle cerrado

Uno de los primeros pasos a seguir consiste en obtener un modelo en bucle cerrado con la ley de control basado en predictor. Puesto que el análisis se realiza en el dominio del tiempo el modelo en bucle cerrado se obtiene en representación interna del estado. Además, el modelo incluye las incertidumbres normadas anteriormente definidas.

Lema 4.5.1 *Si la matriz A es invertible¹, la realización del modelo en bucle cerrado (4.7) con la ley de control (4.4) se puede expresar como:*

$$\begin{aligned} z_{k+1} &= A_1 z_k + B_d z_{k-d_k} + B_h z_{k-h} + \sum_{i=1}^{h-1} B_i z_{k-i} \\ A_1 &= A + BK + A^h \Delta_{A_k} A^{-h} \\ B_d &= A^h (B + \Delta_{B_k}) K \\ B_h &= -A^h (I + \Delta_{A_k} A^{-1}) BK \\ B_i &= -A^h (\Delta_{A_k} A^{-h+i-1}) BK \quad i = 1, \dots, h-1 \end{aligned} \quad (4.9)$$

donde el nuevo estado definido z_k es la predicción del estado h periodos de muestreo hacia delante: x_{k+h} , i.e., $z_k = \bar{x}_{k+h}$.

¹ Nótese que la discretización de un sistema continuo con cierta matriz A_c , la matriz del sistema discreto a periodo T equivalente $A = e^{A_c T}$ es siempre regular.

Demostración:

Definamos el nuevo estado z_k :

$$z_k = A^h x_k + \sum_{i=0}^{h-1} A^{h-i-1} B u_{k-h+i} \quad (4.10)$$

El nuevo estado, un instante posterior, z_{k+1} , es:

$$z_{k+1} = A^h x_{k+1} + \sum_{i=0}^{h-1} A^{h-i} B u_{k-h+i+1} \quad (4.11)$$

Sustituyendo x_{k+1} a partir del modelo del sistema (4.1) se obtiene:

$$z_{k+1} = A^h [(A + \Delta_{A_k}) x_k + (B + \Delta_{B_k}) u_{k-d_k}] + \sum_{i=0}^{h-1} A^{h-i} B u_{k-h+i+1} \quad (4.12)$$

A partir de (4.10) el estado x_k se puede obtener en función del nuevo estado z_k y de las h acciones de control anteriores:

$$x_k = A^{-h} z_k + \sum_{i=0}^{h-1} A^{-1-i} B u_{k-h+i} \quad (4.13)$$

Sustituyendo el estado x_k en la ecuación (4.12) y realizando las operaciones algebraicas pertinentes se obtiene:

$$z_{k+1} = (A + A^h \Delta_{A_k} A^{-h}) z_k + B u_k - A^h (I + \Delta_{A_k} A^{-1}) B u_{k-h} + A^h (B + \Delta_{B_k}) u_{k-d_k} - \sum_{i=1}^{h-1} A^h (\Delta_{A_k} A^{-h+i-1}) B u_{k-i} \quad (4.14)$$

Finalmente, teniendo en cuenta la ley de control $u_k = K z_k$ se completa la prueba. ■

4.5.2. Análisis de Robustez

Una vez en disposición del modelo en bucle cerrado en representación de espacio de estados, se establece un conjunto de restricciones LMI cuya verificación garantiza la estabilidad del sistema en bucle cerrado con la ley de control basada en predictor. La estabilidad se garantiza para cualquier posible patrón aleatorio de variación del retardo o de las incertidumbres normadas en el modelo, siempre que estén dentro de las cotas definidas.

Con el fin de simplificar la notación, se introduce el término $\delta = d_M - d_m + 1$. También, $d_i = d_m + i - 1$ para todo $i \in \{1, \dots, \delta\}$.

Teorema 4.5.1 *El sistema en bucle cerrado descrito en (4.9) es asintóticamente estable para un cierto valor de K y h si existe δ matrices \bar{P}_i y δ^2 escalares $\epsilon_{ij} > 0$ para todo $i, \in \{1, \dots, \delta\}$ y $j \in \{1, \dots, \delta\}$ tal que se cumplan las siguientes desigualdades:*

$$\bar{P}_i > 0 \quad \forall i \in \{1, \dots, \delta\} \quad (4.15)$$

y, para todo $i, j \in \{1, \dots, \delta\} \times \{1, \dots, \delta\}$

$$\begin{pmatrix} \bar{P}_i + \epsilon_{ij} \bar{H}(d_i)^T \bar{H}(d_i) & (*) & (*) \\ \bar{P}_j \bar{A}(d_i) & -\bar{P}_j & (*) \\ 0 & \bar{G}^T \bar{P}_j & -\rho \epsilon_{ij} I \end{pmatrix} < 0 \quad (4.16)$$

donde

$$\bar{A}(d_i) = \begin{pmatrix} A + BK & \Gamma_1(d_i) & \Gamma_2(d_i) & \cdots & \cdots & \Gamma_{d_M}(d_i) \\ I & 0 & 0 \cdots & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 \cdots & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 \cdots & I & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

siendo

$$\Gamma_l(d_i) = \gamma(d_i, l) A^h B K - \gamma(h, l) A^h B K \quad (4.17)$$

para todo $1 \leq l \leq d_M$ y

$$\bar{G} = (A^h G \ 0 \ \cdots \ 0)^T \quad (4.18)$$

$$\bar{H}(d_i) = \begin{pmatrix} H_a A^{-h} \\ -H_a A^{-h} B K + \gamma(d_i, 1) H_b K \\ -H_a A^{-h+1} B K + \gamma(d_i, 2) H_b K \\ \cdots \\ -H_a A^{-1} B K + \gamma(d_i, h-1) H_b K \\ \gamma(d_i, h) H_b K \\ \cdots \\ \gamma(d_i, d_M) H_b K \end{pmatrix}^T \quad (4.19)$$

donde la función escalar $\gamma(x, y)$ se define aquí como:

- $\gamma(x, y) = 1$, if $x = y$
- $\gamma(x, y) = 0$, if $x \neq y$

Además, es posible obtener una cota superior para las incertidumbres normadas $\bar{\alpha}$ definidas en (4.8) resolviendo el siguiente problema convexo de optimización sobre la siguiente función objetivo en la variable ρ :

minimizar ρ sujeto a las LMI (4.15), (4.16)

En caso de encontrar una solución factible, el resultado anterior permite probar la estabilidad dentro de la región de incertidumbre definido por el modelo de incertidumbres acotadas en norma cuyo tamaño se obtiene como: $\bar{\alpha} = \sqrt{1/\rho}$.

Demostración:

Considérese el siguiente funcional *parameter-dependent* cuadrático construida a partir del modelo aumentado:

$$V_k = \sum_{p=0}^{d_M} \sum_{r=0}^{d_M} x_{k-p}^T P_{d_k}^{p,r} x_{k-r} \quad (4.20)$$

Las matrices $P_{d_k}^{p,r}$ se definen de modo que el funcional de Lyapunov candidato (4.20) sea siempre positivo definido, $V_k > 0$. A saber:

$$\bar{P}_{d_i} = \bar{P}_i = \begin{pmatrix} P_i^{0,0} & P_i^{0,1} & \dots & P_i^{0,d_M} \\ P_i^{0,1} & P_i^{1,1} & \dots & P_i^{1,d_M} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ P_i^{d_M,0} & P_i^{d_M,1} & \dots & P_i^{d_M,d_M} \end{pmatrix} > 0$$

para cada valor de $i \in \{1, \delta\}$. Sin pérdida de generalidad se considera que $P_i^{p,r} = (P_i^{r,p})^T$.

De este modo, (4.20) puede expresarse como

$$V(k, d_k) = \Phi_k^T \bar{P}_{d_k} \Phi_k \quad (4.21)$$

donde Φ_k es el vector de estados aumentado $\Phi_k = [x_k, \dots, x_{k-d_M}]$.

Tras realizar las operaciones algebraicas oportunas el modelo den bucle cerrado de la ecuación (4.9) con Φ_k se puede expresar como

$$\Phi_{k+1} = [\bar{A}(d_k) + \bar{G}\Delta_k\bar{H}(d_k)]\Phi_k \quad (4.22)$$

donde $\bar{A}(d_k)$, \bar{G} y $\bar{H}(d_k)$ se definen en(4.17), (4.18) y (4.19), respectivamente.

Teniendo en cuenta que el funcional de Laypunov candidato debe verificar la conocida condición $V(d_{k+1}, k+1) - V(d_k, k) < 0$ y obteniendo el complemento de Schur es relativamente sencillo obtener las condiciones LMI para cada valor $d_i = d_k$ y $d_j = d_{k+1}$:

$$\begin{pmatrix} -\bar{P}_i & (*) \\ \bar{P}_j[\bar{A}(d_i) + \bar{\alpha}\bar{G}\Delta_k\bar{H}(d_i)] - \bar{P}_j \end{pmatrix} < 0 \quad (4.23)$$

esta última expresión puede reescribirse como:

$$\bar{A}_u(d_i, d_j) + \bar{\alpha} \bar{G}_u(d_j) \Delta_k \bar{H}_u(d_i) + \bar{H}_u^T(d_i) \Delta_k^T \bar{G}_u^T(d_j) < 0 \quad (4.24)$$

donde

$$\bar{A}_u(d_i, d_j) = \begin{pmatrix} -\bar{P}_i & (*) \\ \bar{P}_j \bar{A}(d_i) & -\bar{P}_j \end{pmatrix} \quad (4.25)$$

$$\bar{G}_u(d_j) = (0 \ \bar{P}_j \bar{G})^T \quad (4.26)$$

$$\bar{H}_u(d_i) = (\bar{H}(d_i) \ 0) \quad (4.27)$$

Aplicando el lema 8.3.3, se demuestra que la desigualdad (4.24) se cumple para todo valor d_k que satisfaga además $\Delta_k^T \Delta_k \leq I$ si y solo si existen un escalar $\epsilon_{ij} > 0$ tal que:

$$\bar{A}(d_i, d_j) + \epsilon_{ij}^{-1} \bar{\alpha}^2 \bar{G}_u(d_j) \bar{G}_u^T(d_j) + \epsilon_{ij} \bar{H}_u^T(d_i) \bar{H}_u(d_i) < 0 \quad (4.28)$$

Sustituyendo (4.25), (4.26) y (4.27) en (4.28) se obtiene las siguientes LMI's:

$$\begin{pmatrix} -\bar{P}_i + \epsilon_{ij} \bar{H}^T(d_i) \bar{H}(d_i) & (*) \\ \bar{P}_j \bar{A}(d_i) & -\bar{P}_j + \epsilon_{ij}^{-1} \bar{\alpha}^2 \bar{P}_j \bar{G} \bar{G}^T \bar{P}_j \end{pmatrix} < 0 \quad (4.29)$$

Aplicando nuevamente el complemento de Schur, la desigualdad anterior se puede poner como:

$$\begin{pmatrix} \bar{P}_i + (\epsilon_{ij}) \bar{H}^T(d_i) \bar{H}(d_i) & (*) & (*) \\ \bar{P}_j \bar{A}(d_i) & -\bar{P}_j & (*) \\ 0 & \bar{G}^T \bar{P}_j & -(\epsilon_{ij}) \bar{\alpha}^{-2} I \end{pmatrix} < 0 \quad (4.30)$$

■

Nótese que haciendo $\epsilon_{ij} = \epsilon$ el teorema anterior 6.4.1 se puede formular como problema LMI sin más que realizar el cambio de variable $P' = P/\epsilon$.

Por otro lado, la complejidad del problema de análisis planteado es proporcional al valor del retardo. Este problema se puede solventar proponiendo un funcional de Lyapunov candidato de menor generalidad con una forma específica (Lyapunov-Krasovskii) tal que elimine la dependencia de los estados retardados intermedios, y cuya forma genérica puede expresarse en función de un cierto parámetro de ajuste:

$$V_k = \sum_{p=0}^{d_M} \sum_{r=\max(0, p-q)}^{\min(p+q, d_M)} x_{k-p}^T P_{d_k}^{p,r} x_{k-r}$$

donde q es el parámetro de ajuste de compromiso entre conservadurismo y complejidad computacional, que convierte la matriz (4.21) de una matriz

completa ($q = d_M$) en una matriz diagonal por bandas ($q = 0$). De hecho, en sentido amplio, gran parte de los funcionales discretos Lyapunov-Krasovskii propuestos en la literatura para generar condiciones LMI para sistemas discretos con retardos elevados pueden considerarse como un caso particular del funcional genérico expuesto anteriormente.

El siguiente resultado, obtenido a partir de pequeñas modificaciones sobre [34, lema 2] se utiliza para comparar en los ejemplos numéricos:

Lema 4.5.2 *El sistema en bucle cerrado (4.3) es globalmente asintóticamente estable si existen matrices $P, Q, R, Z_1 > 0$, un escalar $\rho > 0$ y ciertas matrices M, N, S, W de dimensiones adecuadas que satisfacen el siguiente problema de optimización convexa:*

minimizar ρ sujeto a:

$$\begin{pmatrix} -P & 0 & \phi_4 & 0 & \sqrt{d_M}G & 0 \\ (*) & -P & \phi_3 & 0 & G & 0 \\ (*) & (*) & \phi_1 + \Psi_2 + \Psi_2^T & \Psi_4 & 0 & \phi_2 \\ (*) & (*) & (*) & \Psi_5 & 0 & 0 \\ (*) & (*) & (*) & (*) & -\rho I & 0 \\ (*) & (*) & (*) & (*) & (*) & -I \end{pmatrix} < 0 \quad (4.31)$$

$$\Psi_2 = (M + N, S - M, -S - N)$$

$$\Psi_4 = (M\sqrt{d_M}, S\sqrt{d_M - d_m}, N\sqrt{d_M})$$

$$\Psi_5 = \text{diag}(-Z_1, -Z_1, -P + Z_1)$$

$$\phi_1 = \begin{pmatrix} -P + \tau Q + R & 0 & 0 \\ (*) & -Q & 0 \\ (*) & (*) & -R \end{pmatrix}$$

$$\phi_2 = (H_a P, H_b W, 0)^T$$

$$\phi_3 = (A_0 P, B_0 W, 0)$$

$$\phi_4 = (\sqrt{d_M}(A_0 - I)P, \sqrt{d_M}B_0 W, 0)$$

Además, la ganancia del controlador estático robusto subóptimo se obtiene a partir de las variables de decisión del problema como $K = WP^{-1}$. Este controlador garantiza la estabilidad robusta del modelo incierto cuyas matrices Δ_{A_k} y Δ_{B_k} satisfacen el modelo de incertidumbres normadas (Ecuación (4.8)) con $\bar{\alpha} = \sqrt{1/\rho}$. Por esta razón interesa minimizar el parámetro ρ .

Demostración: Este resultado se prueba fácilmente mediante el cambio de variable $P = Z_1 + Z_2$ sobre el Teorema 2 [34], y posteriormente aplicando una transformación congruente pre y post multiplicando a ambos lados de la

desigualdad matricial por la matriz $\text{diag}(P^{-1}, P^{-1}, P^{-1}, P^{-1}, P^{-1}, P^{-1}, P^{-1}, P^{-1}, I, I)$. Nótese que la matriz P en (4.31)–(4.32) representa la inversa de la matriz P definida en [34]. ■

Existen resultados más recientes en la literatura (por ejemplo, [135]) que mejoran [34] en análisis de estabilidad. También en [47], teniendo en cuenta incertidumbres en el modelo. Sin embargo, [135] resuelve el problema de diseño no convexo como BMI mediante CCL [26] y el segundo [47] no mejora con respecto [34] cuando se adapta el problema de análisis de estabilidad para poder abordar el diseño como LMI, de forma análoga a como se procede en la obtención del Lema 4.5.2. En este capítulo, se considera únicamente resultados basados en LMI.

4.6. Ejemplo numérico

Considérese el siguiente sistema lineal inestable:

$$x_{k+1} = (A + \Delta A_k)x_k + (B + \Delta B_k)u_{k-d_k} \quad (4.32)$$

donde las matrices del sistema son

$$A = \begin{pmatrix} 1,01 & 0 \\ 0 & 0,7 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} \quad (4.33)$$

y las matrices del modelo de incertidumbres normadas definido en las ecuaciones (4.8) son

$$G_d = (1 \ 1)^T, H_a = (0,1 \ 0,1), H_b = 1 \quad (4.34)$$

En este ejemplo se procede a comparar la tolerancia respecto a las incertidumbres de modelado bajo las dos siguientes estrategias de diseño de controladores robustos subóptimos:

- Realimentación estática del estado: La ganancia K que se diseña mediante 4.5.2, teniendo en cuenta las cotas de retardo: d_m y d_M .
- Controlador dinámico basado en predictor escogiendo el valor de $h = d_m$. La ganancia del controlador K se diseña aplicando el mismo resultado 4.5.2 pero sustituyendo los valores d_m y d_M con los nuevos valores $d'_m = 0$ y $d'_M = d_M - d_m$, respectivamente.

En la Figura 4.1 se compara la tolerancia respecto a incertidumbres de modelado obtenido en ambos casos con el parámetro $\bar{\alpha}$. En la leyenda, la línea que representa el valor de $\bar{\alpha}$ obtenido con el diseño propuesto se etiqueta como *pred* mientras que la línea que representa $\bar{\alpha}$ obtenida con realimentación estática del estado se etiqueta como *no pred*, respectivamente.

La cota mínima de retardo d_m se representa en el eje de abcisas en cada caso. La línea de color cyan representa el tamaño de las incertidumbres

toleradas para el caso de retardo constante $d_m = d_M$. Las otras dos líneas representan el caso con retardo variable: (a) la línea roja representa el caso con rango de variación $d_M = d_m + 1$, y (b) la línea azul representa el caso $d_M = d_m + 3$. En el caso de ausencia de valor $\bar{\alpha}$, significa que no se ha podido probar la estabilidad para este retardo.

4.6.1. Resultados de Simulación

La estrategia de análisis y diseño propuestas son condiciones suficientes, de modo que es muy probable que exista un cierto grado de conservadurismo en los resultados obtenidos. Por tanto, con la finalidad de corroborar la ampliación del margen de robustez sobre el ejemplo propuesto se presenta los siguientes resultados de simulación:

La simulación se ha realizado considerando retardo variable en la entrada tal que $4 \leq d_k \leq 5$ ($d_m = 4$ y $d_M = 5$, respectivamente) y un valor de incertidumbre en el modelo constante según las ecuaciones (4.8) tomando $\Delta_k = -0,5$. La comparación de las respuestas temporales del estado del proceso se representan en las Figuras 4.2 y 4.3 para los estados x_1 y x_2 , respectivamente. La leyenda es:

- Sin predictor (trazo a puntos). El controlador por realimentación de estado ha sido diseñado para maximizar $\bar{\alpha}$ mediante el lema 4.5.2 con $d_m = 4$, $d_M = 5$ obteniendo la ganancia de controlador $K = [-0,0419, 0,0147]$ y un margen de tolerancia a errores de modelado $\bar{\alpha} = 0,442$.
- Con predictor (trazo continuo). La ganancia K ha sido diseñado con el criterio propuesto tomando el valor de h coincidente con el retardo mínimo d_m ($h = 4$) obteniendo la ganancia de controlador $K = [-0,1504, -0,0448]$ y un margen de tolerancia a errores de modelado $\bar{\alpha} = 0,952$.

La Figura 4.1 demuestra, por tanto, que el esquema de control basado en predictor diseñado con la metodología propuesta puede mejorar la respuesta ante presencia de errores en el modelado y retardos variables en la entrada con respecto al esquema de control basado en realimentación estática del estado, incrementando además el intervalo de retardo tolerado.

4.7. Conclusiones

En este capítulo se ha analizado la robustez de sistemas discretos con retardos variables en la entrada obtenida a partir de controladores basados en predictor comparando con respecto al controlador estático. Para reducir en la medida de lo posible el grado de conservadurismo inherente a las condiciones de análisis de estabilidad basados en LMI, se ha propuesto una función de Lyapunov cuadrática genérica construida a partir del modelo del sistema aumentado equivalente sin retardo. Para retardos elevados se puede utilizar

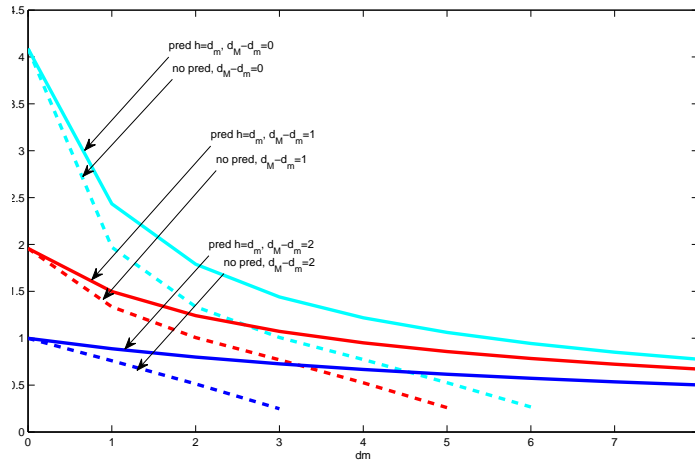


Figura 4.1. Márgen de robustez $\bar{\alpha}$ obtenida mediante el controlador basado en predictor versus controlador estático diseñado mediante 4.5.2.

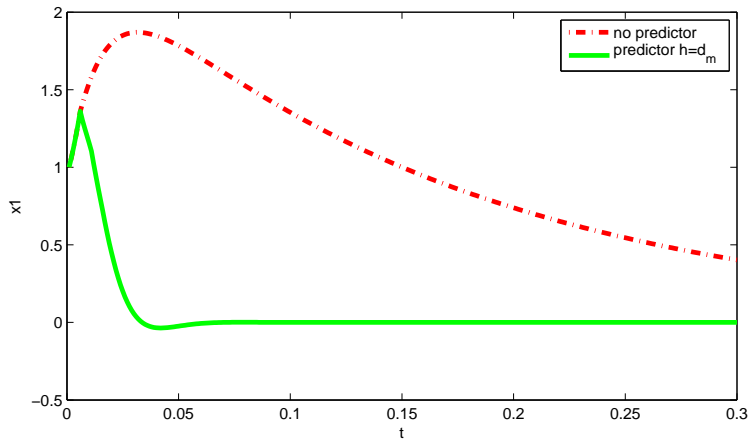


Figura 4.2. Comparación de la respuesta del estado x_1 obtenida con el controlador predictor versus realimentación estática del estado mediante lema 4.5.2.

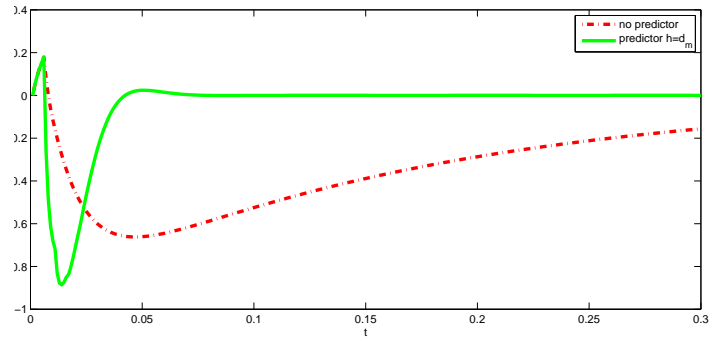


Figura 4.3. Comparación de la respuesta del estado x_2 obtenida con el controlador predictor versus realimentación estática del estado mediante lema 4.5.2.

funcionales de Lyapunov-Krasovskii, aunque a costa de mayor conservadurismo en los resultados obtenidos.

Se ha ilustrado mediante un ejemplo numérico que es posible mejorar la robustez frente a incertidumbres de modelado gracias al uso del esquema de control basado en predictor en presencia de retardos variables frente al diseño de un control subóptimo basado en realimentación estática del estado comparando con otros resultados en la literatura aplicados en sistemas discretos con retardos variables.

5 Análisis de estabilidad y robustez de controladores basados en Predictor sobre sistemas LTI con retardos variables en la salida

5.1. Resumen/Motivación

Este capítulo se corresponde en parte con el contenido del artículo publicado en el congreso IFAC 2010 (Praga), y en parte con el contenido de la revista Control Engineering Practice, (año 2011). En este último trabajo se extiende y se mejora los resultados respecto al primero. Los resultados experimentales publicados en esta revista, así como los resultados obtenidos por simulación de la plataforma experimental, se han desglosado en el capítulo 7

El objetivo de este capítulo es analizar la estabilidad y la robustez frente a incertidumbres de modelado del controlador discreto basado en predictor sobre sistemas con retardos variables en la salida. En primer lugar, se demuestra que simplemente el uso del predictor permite aumentar el intervalo de retardo variable dentro del cual el sistema permanece estable con respecto al controlador estático, para un mismo valor de la ganancia del controlador. En segundo lugar se demuestra, análogamente al capítulo anterior para retardos variables en la entrada, este esquema de control puede mejorar la robustez frente a incertidumbres en el modelo.

5.2. Introducción

El diseño de cualquier sistema de control el comportamiento del proceso impone algunas limitaciones en las prestaciones obtenidas [111]. En particular, es el caso de los sistemas con retardos temporales [93, 95, 65]. El Predictor de Smith (SP) [114] y la Técnica de Asignación Finita de Espectro (FSA) [83] pueden considerarse como los métodos de control para procesos lineales con retardos en la entrada o en la salida [105]. Un análisis detallado de estos métodos y sus modificaciones revelan que todos ellos utilizan, de un modo implícito o explícito, la predicción del estado, con el fin de contrarrestar el efecto del retardo y por ende obtener la respuesta deseada. La característica más destacada del controlador basado en predictor es que, en ausencia de incertidumbres en el modelo y para retardo constante y conocido, el comportamiento en bucle cerrado es similar al sistema equivalente libre de retardo [134], [94], [48].

El Predictor de Smith (SP), si el proceso es inestable, el sistema en lazo cerrado será internamente estable [97]. La técnica de Asignación Finita de Espectro (FSA) permite soslayar esta limitación. En [97] se sugiere cómo implementar la ley de control usando la conocida forma integral (presencia de un retardo distribuido dentro de la acción de control FSA). Sin embargo, la implementación de la ley de control FSA en sistemas digitales puede llevar el sistema a la inestabilidad [87].

Hoy en día, prácticamente la totalidad de las aplicaciones de control se implementan por computador [4]. Por tanto, resulta muy interesante analizar el efecto del retardo en sistemas discretos. Por otro lado, es bien conocido el hecho de que los sistemas discretos con retardos se pueden modelar a partir de sistemas discretos sin retardos definiendo el vector de estados aumentado. Sin embargo, en muchos casos, tales retardos son demasiado grandes y variables [134, 98], de modo que el sistema aumentado es demasiado complejo para ser abordado. Por tanto, esta técnica puede resultar no válida para su estudio [34]. Estas consideraciones motivan el estudio de los sistemas discretos con retardos variables [139, 9]. En la literatura, diferentes estrategias de análisis se han propuesto con el controlador por realimentación estática del estado [25, 47, 85, 45] o controladores dinámicos [80, 56].

En [81] se verifica que el controlador basado en predictor, generado a partir del modelo discreto del proceso, consigue estabilizar el sistema continuo equivalente para retardos variables. No obstante, la prueba de estabilidad robusta sólo es válida para retardos variables cuyo valor no excede de un periodo de muestreo, en principio. Posteriormente, en [38], el resultado anterior se extiende para retardos mayores que un periodo de muestreo, pero cuya variación no excede del valor del periodo. Más recientemente, en [39], se amplía los resultados anteriores para retardos variables sin restricción respecto al periodo. Sin embargo, las condiciones LMI de análisis desarrolladas siguen siendo demasiado conservadoras.

Por tanto, el objetivo de este capítulo es analizar la estabilidad y la robustez de un controlador basado en predictor, aportando un resultado de análisis de estabilidad y robustez menos conservador que [39]. La idea es aplicar dicho resultado sobre un proceso inestable con retardos variables en la salida, de modo que sólo se conoce a priori las cotas mínima y máxima del retardo. Hasta el conocimiento del autor, no existen resultados similares en la literatura para controladores basados en predictor.

5.3. Aspectos preliminares

Consideremos el sistema continuo en representación de espacio de estados:

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= A_c x(t) + B_c u(t) \\ x(t) &= 0, \quad t \leq 0 \end{aligned} \tag{5.1a}$$

donde los parámetros nominales de la planta son $A_c \in \mathfrak{R}^{n \times n}$, $B_c \in \mathfrak{R}^{n \times m}$.

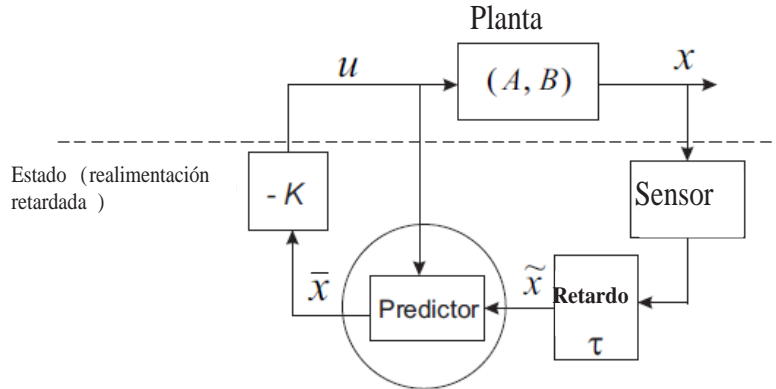


Figura 5.1. Bucle de control con retardo en la medida

Tal y como se muestra en la Figura 5.1, el estado interno de la planta $x(t)$ es completamente medible, pero existe un retardo variable, desconocido y aleatorio en el canal de medida $\tau(t)$ (entre el sensor y el controlador), de modo que:

$$\tilde{x}(t) = x(t - \tau(t)) \tag{5.2}$$

Consideremos el siguiente sistema lineal discreto:

$$\begin{aligned} x_{k+1} &= Ax_k + Bu_k \\ x_k &= 0, \quad k \leq 0 \end{aligned} \tag{5.3}$$

donde $A \in \mathfrak{R}^{m \times m}$, $B \in \mathfrak{R}^{m \times n}$ son las matrices del modelo de planta nominal.

Supongamos una ley de control estática:

$$u_k = -Kx_k \tag{5.4}$$

donde $K \in \mathfrak{R}^{m \times n}$ es la ganancia del controlador, la cual se asume que ha sido previamente diseñada para estabilizar el sistema 5.3. Es decir, $A - BK$ es una matriz Hurwitz.

Sin embargo, si se tiene en cuenta la presencia de un retardo variable d_k en el canal de salida (entre el sensor y el controlador), la ley de control anterior incluyendo el retardo se puede expresar como:

$$u_k = -K\tilde{x}_k = -Kx_{k-d_k} \quad (5.5)$$

Debido a la presencia del retardo, la estabilidad del sistema en bucle cerrado (5.3)-(5.5) no se puede garantizar, a menos que se haga uso de resultados de análisis de estabilidad y robustez para sistemas con retardos variables existentes en la literatura. Tales resultados, a partir de una cierta ganancia de controlador estático K , permiten calcular el intervalo de retardo $\{d_m, d_M\}$ dentro del cual el sistema siga siendo estable para esa K .

Considérese la ley de control con predictor de la Ecuación (4.4) donde esta vez la predicción del estado se computa a partir de la medida retardada, de modo que:

$$\begin{aligned} \tilde{x}_{k+h} &= A^h x_{k-d_k} + \Sigma_{h,k} \\ \Sigma_{h,k} &= \sum_{i=0}^{h-1} A^{h-i-1} B u_{k+i-h} \end{aligned} \quad (5.6)$$

donde x_{k-d_k} es la medida del estado realizada en el controlador. El retardo de salida d_k es variable y aleatorio tal que $(d_m \leq d_k \leq d_M)$.

5.3.1. Modelo en bucle cerrado

De forma análoga a la sección 4.5.1, se obtiene la ecuación de la dinámica del sistema en bucle cerrado para retardo en la salida con el esquema de control basado en predictor.

Lema 5.3.1 *El sistema en bucle cerrado obtenido a partir de las Ecuaciones (5.3), (4.4) y (5.6) puede expresarse a partir del siguiente modelo:*

$$x_{k+1} = (A - BK)x_k - BKA^h x_{k-d_k} + BKA^h x_{k-h} \quad (5.7)$$

Demostración: Teniendo en cuenta las Ecuaciones (4.4) y (5.3), y considerando la Ecuación (5.6) se obtiene:

$$x_{k+1} = Ax_k - BKA^h x_{k-d_k} - BK\Sigma_{h,k} \quad (5.8)$$

donde $\Sigma_{h,k}$ se define en (5.6).

Por otro lado, aplicando recursivamente la Ecuación del modelo del sistema (5.3) durante h iteraciones, se obtiene:

$$x_k = A^h x_{k-h} + \Sigma_{h,k} \quad (5.9)$$

Se puede observar que el término $\Sigma_{h,k}$ se puede eliminar a partir de (5.9) y (5.8), obteniéndose en consecuencia (5.7) y completando así la prueba. ■

5.4. Análisis de estabilidad

Esta sección presenta dos condiciones suficientes que permiten probar la estabilidad del sistema en bucle cerrado con predictor ((5.7)).

Con el fin de simplificar la notación, se define $A_0 = (A - BK)$ y $A_1 = BKA^h$. De este modo, la Ecuación en bucle cerrado (5.7) se reescribe como:

$$x_{k+1} = A_0x_k + A_1x_{k-h} - A_1x_{k-d_k} \quad (5.10)$$

Teorema 5.4.1 *El sistema (5.10) es globalmente estable si existen ciertas matrices P , Q_1 , Q_2 , Z_1 and $Z_2 > 0$, y X_1 , X_2 , Y_1 , Y_2 que satisfacen las siguientes LMI:*

$$\begin{pmatrix} \Gamma & -Y_1 & -Y_2 & A_0^T P & d_M(A_0 - I)^T Z_1 & h(A_0 - I)^T Z_2 \\ * & -Q_1 & 0 & A_1^T P & d_M A_1^T Z_1 & h A_1^T Z_2 \\ * & * & -Q_2 & -A_1^T P & -d_M A_1^T Z_1 & -h A_1^T Z_2 \\ * & * & * & -P & 0 & 0 \\ * & * & * & * & -d_M Z_1 & 0 \\ * & * & * & * & * & -h Z_2 \end{pmatrix} < 0$$

con $\Gamma := -P + d_M X_1 + h X_2 + Y_1 + Y_1^T + Y_2 + Y_2^T + (d_M - d_m + 1)Q_1 + Q_2$

$$\begin{pmatrix} X_1 & Y_1 \\ Y_1^T & Z_1 \end{pmatrix} \geq 0 \quad \begin{pmatrix} X_2 & Y_2 \\ Y_2^T & Z_2 \end{pmatrix} \geq 0 \quad (5.11)$$

Si se verifican las LMI anteriores el sistema (5.10) es asintóticamente estable para cualquier retardo d_k que satisfaga $d_m \leq d_k \leq d_M$.

Demostración: Denótese

$$\nu_j = x_j - x_{j-1}$$

Los estados retardados pueden expresarse respectivamente como:

$$x_{k-h} = x_k - \sum_{j=k-h+1}^k \nu_j \quad (5.12)$$

$$x_{k-d_k} = x_k - \sum_{j=k-d_k+1}^k \nu_j$$

De este modo, la expresión del sistema en bucle cerrado de la Ecuación (5.10) puede expresarse del siguiente modo:

$$x_{k+1} = A_0x_k - A_1 \sum_{j=k-h+1}^k \nu_j + A_1 \sum_{j=k-d_k+1}^k \nu_j \quad (5.13)$$

Siguiendo un procedimiento análogo a [38]-[34], se propone la siguiente función candidata de Lyapunov-Krasovskii:

$V(k) = V_1(k) + V_2(k) + V_3(k) + V_4(k)$, donde:

$$\begin{aligned} V_1(k) &= x^T(k)Px(k) \\ V_2(k) &= \sum_{i=k-d_k}^{k-1} x^T(i)Q_1x(k) + \sum_{i=k-h}^{k-1} x^T(i)Q_2x(k) \\ V_3(k) &= \sum_{j=-d_M+1}^{-d_m+1} \sum_{i=k+j-1}^{k-1} x^T(i)Q_1x(i) \\ V_4(k) &= \sum_{i=-d_M}^{-1} \sum_{m=k+i}^{k-1} \nu^T(m)Z_1\nu(m) + \sum_{i=-h}^{-1} \sum_{m=k+i}^{k-1} \nu^T(m)Z_2\nu(m) \end{aligned}$$

Nótese la inclusión de los términos adicionales V_2 y V_4 , los cuales aportan información en la función candidata del parámetro h y del retardo variable d_k . De este modo, el sistema (5.10) o (5.7) será asintóticamente estable si:

$$\Delta V(k) = \Delta V_1(k) + \Delta V_2(k) + \Delta V_3(k) + \Delta V_4(k) < 0$$

Tras realizar las oportunas manipulaciones algebraicas se obtiene:

$$\Delta V = \Delta V_1 + \Delta V_2 + \Delta V_3 + \Delta V_4 \leq \lambda^T(k)\Omega\lambda(k) \quad (5.14)$$

donde

$$\Omega = \begin{pmatrix} \Psi_{11} & \Psi_{12} & \Psi_{13} \\ * & \Psi_{22} & \Psi_{23} \\ * & * & \Psi_{33} \end{pmatrix} \quad (5.15)$$

$$\begin{aligned} \Psi_{11} &= A_0^T P A_0 + \Gamma + d_M(A_0 - I)^T Z_1(A_0 - I) + h(A_0 - I)^T Z_2(A_0 - I) \\ \Psi_{12} &= -Y_1 - d_M(A_0 - I)^T Z_1 A_1 - A_0^T P A_1 \\ \Psi_{13} &= -Y_2 + h(A_0 - I)^T Z_2 A_1 + A_0^T P A_1 \\ \Psi_{22} &= A_1^T P A_1 - Q_1 d_M A_1^T Z_1 A_1 + h A_1^T Z_2 A_1 \\ \Psi_{23} &= -A_1^T P A_1 - d_M A_1^T Z_1 A_1 - h A_1^T Z_2 A_1 \\ \Psi_{33} &= -A_1^T P A_1 - Q_2 + d_M A_1^T Z_1 A_1 + h A_1^T Z_2 A_1 \end{aligned}$$

y

$$\lambda^T(k) = (x(k) \ x(k - d_k) \ x(k - h))$$

Nuevamente, tras las manipulaciones algebraicas oportunas y aplicando el Complemento de Schur [10], se obtienen las LMI's del Teorema 5.4.1. ■

El siguiente teorema, obtenido a partir de [47], evita la aplicación del *Cross-product lemma*, y por tanto es menos conservador:

Teorema 5.4.2 *El sistema (5.10) es globalmente estable si existen ciertas matrices $P, Z_1, Z_2 > 0$; $Q, Q_m, Q_M, Q_h, Z_M \geq 0$ y S_1, S_2, T_1, T_2 que satisfacen las siguientes LMI:*

$$\begin{pmatrix} \Gamma & \delta S \\ \delta S^T & -\delta Z_M \end{pmatrix} < 0 \quad \begin{pmatrix} \Gamma & \delta T \\ \delta T^T & -\delta Z_M \end{pmatrix} < 0 \quad (5.16)$$

donde

$$S = (0 \ S_1^T \ S_2^T \ 0 \ 0 \ 0 \ 0)^T$$

$$T = (0 \ T_1^T \ 0 \ T_2^T \ 0 \ 0 \ 0)^T.$$

La matriz simétrica Γ se define como:

$$\Gamma = \begin{pmatrix} \Gamma_1 & 0 & \Gamma_2 & 0 & \Gamma_3 & \Gamma_4 & \Gamma_5 \\ (*) & \Gamma_6 & \Gamma_7 & \Gamma_8 & 0 & \Gamma_9 & \Gamma_{10} \\ (*) & (*) & \Gamma_{11} & 0 & Z_1 & 0 & 0 \\ (*) & (*) & (*) & \Gamma_{12} & 0 & 0 & 0 \\ (*) & (*) & (*) & (*) & \Gamma_{13} & \Gamma_{14} & \Gamma_{15} \\ (*) & (*) & (*) & (*) & (*) & -P & 0 \\ (*) & (*) & (*) & (*) & (*) & (*) & -Z \end{pmatrix} \quad (5.17)$$

donde

$$\Gamma_1 = -P + (\delta + 1)Q + Q_M + Q_m + Q_h - Z_2$$

$$\Gamma_2 = \begin{cases} 0 & h \leq d_m \\ Z_2 & h > d_m \end{cases}$$

$$\Gamma_3 = \begin{cases} Z_2 & h \leq d_m \\ 0 & h > d_m \end{cases}$$

$$\Gamma_4 = A_0^T P$$

$$\Gamma_5 = (A_0 - I)^T Z$$

$$\Gamma_6 = -Q + T_1 + T_1^T - S_1 - S_1^T$$

$$\Gamma_7 = S_1 - S_2^T$$

$$\Gamma_8 = -T_1 + T_2^T$$

$$\Gamma_9 = -A_1^T P$$

$$\Gamma_{10} = -A_1^T Z$$

$$\Gamma_{11} = -Q_m + S_2 + S_2^T - Z_1 + \begin{cases} 0 & h \leq d_m \\ -Z_2 & h > d_m \end{cases}$$

$$\Gamma_{12} = -Q_M - T_2 - T_2^T$$

$$\Gamma_{13} = -Q_h - Z_1 + \begin{cases} -Z_2 & h \leq d_m \\ 0 & h > d_m \end{cases}$$

$$\Gamma_{14} = A_1^T P$$

$$\Gamma_{15} = A_1^T Z$$

$$Z = \rho_1^2 Z_2 + (d_m - h)^2 Z_1 + \delta Z_M$$

$$\rho_1 = \min(d_m, h)$$

Nótese que $\delta = d_M - d_m$ es un parámetro de análisis.

Demostración: A partir de un razonamiento análogo a [47] y [39], se propone el siguiente funcional de Lyapunov-Krasovskii candidato:

$$\begin{aligned}
V(k) &= V_1(k) + V_2(k) + V_3(k) + V_4(k) + V_5(k) \\
V_1(k) &= x(k)^T P x(k) \\
V_2(k) &= \sum_{i=k-d_k}^{k-1} x(i)^T Q x(i) \\
V_3(k) &= \sum_{i=k-d_m}^{k-1} x(i)^T Q_m x(i) + \sum_{i=k-d_M}^{k-1} x(i)^T Q_M x(i) + \sum_{i=k-h}^{k-1} x(i)^T Q_h x(i) \\
V_4(k) &= \sum_{j=-d_M+1}^{-d_m} \sum_{i=k+j}^{k-1} x(i)^T Q x(i) \\
V_5(k) &= \rho_1 \sum_{i=-\rho_1}^{-1} \sum_{m=k+i}^{k-1} \nu(i)^T Z_2 \nu(i) + |d_m - h| \sum_{i=-\rho_2}^{-\rho_1-1} \sum_{m=k+i}^{k-1} \nu(i)^T Z_1 \nu(i) + \\
&\quad + \sum_{i=-d_M}^{-d_m-1} \sum_{m=k+i}^{k-1} \nu(i)^T Z_M \nu(i) \\
\nu(k) &= x(k+1) - x(k) \\
\rho_1 &= \min(d_m, h) \\
\rho_2 &= \max(d_m, h)
\end{aligned}$$

El sistema 5.10 es estable si se verifica $\Delta V(k) = V(k+1) - V(k) < 0$:

$$\begin{aligned}
\Delta V_1(k) &= x_{k+1}^T P x_{k+1} - x_k^T P x_k \\
&= [A_0 x_k + A_1 x_{k-h} - A_1 x_{k-d_k}]^T P [A_0 x_k + A_1 x_{k-h} - A_1 x_{k-d_k}] - x_k^T P x_k \\
\Delta V_2(k) &= x_k^T Q x_k - x_{k-d_k}^T Q x_{k-d_k} + \sum_{i=k-d_{k+1}+1}^{k-d_k} x_i^T Q x_i \leq \\
&\leq x_k^T Q x_k - x_{k-d_k}^T Q x_{k-d_k} + \sum_{i=k-d_M+1}^{k-d_m} x_i^T Q x_i \\
\Delta V_3(k) &= x_k^T (Q_m + Q_M + Q_h) x_k - x_{k-d_m}^T Q_m x_{k-d_m} - \\
&\quad - x_{k-d_M}^T Q_M x_{k-d_M} - x_{k-h}^T Q_h x_{k-h} \\
\Delta V_4(k) &= \delta [x_k - x_{k-d_M}]^T Q [x_k - x_{k-d_M}] - \sum_{i=k-d_M+1}^{k-d_m} x_i^T Q x_i \\
\Delta V_5(k) &= \nu_k^T Z \nu_k - \rho_1 \sum_{i=k-\rho_1}^{k-1} \nu_i^T Z_2 \nu_i - |d_m - h| \sum_{i=k-\rho_2}^{k-\rho_1-1} \nu_i^T Z_1 \nu_i - \\
&\quad - \sum_{i=k-d_M}^{k-d_k-1} \nu_i^T Z_M \nu_i - \sum_{i=k-d_k}^{k-d_m-1} \nu_i^T Z_M \nu_i
\end{aligned}$$

$$Z = \rho_1^2 Z_2 + (d_m - h)^2 Z_1 + \delta Z_M$$

$$\delta = d_M - d_m$$

Aplicando la desigualdad de Tchebyshev (Lema 1 en [47]) se obtiene:

$$\begin{aligned}
 -\rho_1 \sum_{i=k-\rho_1}^{k-1} \nu_i^T Z_2 \nu_i &\leq -\left[\sum_{i=k-\rho_1}^{k-1} \nu_i \right]^T Z_2 \left[\sum_{i=k-\rho_1}^{k-1} \nu_i \right] \\
 -|d_m - h| \sum_{i=k-\rho_2}^{k-\rho_1-1} \nu_i^T Z_1 \nu_i &\leq -\left[\sum_{i=k-\rho_2}^{k-\rho_1-1} \nu_i \right]^T Z_1 \left[\sum_{i=k-\rho_2}^{k-\rho_1-1} \nu_i \right]
 \end{aligned}$$

y por tanto el término $\Delta V_5(k)$ se puede acotar del siguiente modo:

$$\begin{aligned}
 \Delta V_5(k) &\leq \nu_k^T Z \nu_k - [x_k - x_{k-\rho_1}]^T Z_2 [x_k - x_{k-\rho_1}] - \\
 &\quad - [x_{k-\rho_1} - x_{k-\rho_2}]^T Z_1 [x_{k-\rho_1} - x_{k-\rho_2}] - \\
 &\quad - \sum_{i=k-d_M}^{k-d_k-1} \nu_i^T Z_M \nu_i - \sum_{i=k-d_k}^{k-d_m-1} \nu_i^T Z_M \nu_i
 \end{aligned}$$

Para ciertas matrices $\tilde{S} = (0 \ S_1^T \ S_2^T \ 0 \ 0)^T$, $\tilde{T} = (0 \ T_1^T \ 0 \ T_2^T \ 0)^T$ de dimensiones apropiadas, se establecen las siguientes relaciones *free-weighting*:

$$\begin{aligned}
 0 &= 2\lambda_k^T \tilde{S} [x_{k-d_m} - x_{k-d_k} - \sum_{i=k-d_k}^{k-d_m-1} \nu_i] \leq \\
 &\leq 2\lambda_k^T \tilde{S} [x_{k-d_m} - x_{k-d_k}] + (d_k - d_m) \lambda_k^T \tilde{S} Z_M^{-1} \tilde{S}^T \lambda_k + \sum_{i=k-d_k}^{k-d_m-1} \nu_i^T Z_M \nu_i
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 0 &= 2\lambda_k^T \tilde{T} [x_{k-d_k} - x_{k-d_M} - \sum_{i=k-d_M}^{k-d_k-1} \nu_i] \leq \\
 &\leq 2\lambda_k^T \tilde{T} [x_{k-d_k} - x_{k-d_M}] + (d_M - d_k) \lambda_k^T \tilde{T} Z_M^{-1} \tilde{T}^T \lambda_k + \sum_{i=k-d_M}^{k-d_k-1} \nu_i^T Z_M \nu_i
 \end{aligned}$$

Teniendo en cuenta las relaciones *free-weighting* anteriores el término $\Delta V(k)$ se puede expresar como:

$$\Delta V(k) \leq \lambda_k^T \Omega \lambda_k - \sum_{i=k-d_k}^{k-d_m-1} \nu_i^T Z_M \nu_i - \sum_{i=k-d_M}^{k-d_k-1} \nu_i^T Z_M \nu_i < 0 \quad (5.18)$$

donde el estado aumentado se define como:

$$\lambda_k^T = (x_k \ x_{k-d_k} \ x_{k-d_m} \ x_{k-d_M} \ x_{k-h})$$

y la matriz Ω es:

$$\Omega = \begin{pmatrix} \Omega_1 & \Omega_2 & \Omega_3 & 0 & \Omega_4 \\ (*) & \Omega_5 & S_1 - S_2^T & -T_1 + T_2^T & \Omega_6 \\ (*) & (*) & \Omega_7 & 0 & Z_1 \\ (*) & (*) & (*) & \Omega_8 & 0 \\ (*) & (*) & (*) & (*) & \Omega_9 \end{pmatrix}$$

$$\Omega_1 = A_0^T P A_0 + (A_0 - I)^T Z (A_0 - I) - P + (\delta + 1)Q + Q_M + Q_m + Q_h - Z_2$$

$$\Omega_2 = -A_0^T P A_1 - (A_0 - I)^T Z A_1$$

$$\Omega_3 = \begin{cases} 0 & h \leq d_m \\ Z_1 & h > d_m \end{cases}$$

$$\Omega_4 = A_0^T P A_1 + (A_0 - I)^T Z A_1 + \begin{cases} Z_2 & h \leq d_m \\ 0 & h > d_m \end{cases}$$

$$\Omega_5 = A_1^T P A_1 + A_1^T Z A_1 - Q$$

$$\Omega_6 = -A_1^T P A_1 - A_1^T Z A_1$$

$$\Omega_7 = -Q_m - Z_1 + \begin{cases} 0 & h \leq d_m \\ -Z_2 & h > d_m \end{cases}$$

$$\Omega_8 = -Q_M$$

$$\Omega_9 = A_1^T P A_1 + A_1^T Z A_1 - Q_h - Z_1 + \begin{cases} -Z_2 & h \leq d_m \\ 0 & h > d_m \end{cases}$$

Aplicando el complemento de Schur en P y Z , y realizando las manipulaciones algebraicas oportunas se obtiene la siguiente desigualdad matricial que depende linealmente de d_k :

$$\Gamma + (d_k - d_m)SZ_M^{-1}S^T + (d_M - d_k)TZ_M^{-1}T^T < 0$$

Teniendo en cuenta que la expresión anterior está parametrizada en d_k en modo afín, y que $d_k \in [d_m, d_m + 1, \dots, d_M]$, se prueba la equivalencia de la desigualdad anterior con respecto a las LMI's [47]:

$$\Gamma + \delta SZ_M^{-1}S^T < 0$$

$$\Gamma + \delta TZ_M^{-1}T^T < 0$$

Donde $\delta = d_M - d_m$. Finalmente, aplicando nuevamente el complemento de Schur sobre Z_M en ambas desigualdades se completa la demostración. ■

La aplicación de los teoremas anteriores permiten ilustrar la ventaja del uso del predictor respecto la tolerancia al intervalo de retardo dentro del cual el sistema en lazo cerrado permanece estable. Los siguientes ejemplos numéricos establecen resultados comparativos a tal efecto:

5.4.1. Análisis de Robustez

Análisis de Robustez cualitativo Este apartado prueba la existencia de un área de incertidumbre no nula dentro de la cual, si el sistema en bucle cerrado es estable, también lo será dentro de dicha área.

Concretamente, se pretende analizar cualitativamente la robustez del sistema en lazo cerrado frente a pequeñas variaciones en el periodo de muestreo.

Se define t_k como el k -ésimo instante de muestreo de modo que:

$$T_k = t_{k+1} - t_k + \zeta_k$$

donde ζ_k representa una pequeña variación del instante de muestreo respecto al periodo de reloj del sensor. La fluctuación ζ_k puede ser tanto positiva como negativa pero siempre acotada en módulo:

$$|\zeta_k| \leq \bar{\zeta} \ll T$$

Siguiendo un procedimiento similar a [81], se expresa el sistema en bucle cerrado (5.7) como:

$$x_{k+1} = (A - BK)x_k - BKA^h x_{k-h} + BKA^h x_{k-d} + \Gamma' \gamma_k$$

siendo la acción de control:

$$u_{k-d} = -K[x_k + A^h x_{k-h} - A^h x_{k-d}] + \Gamma'' \gamma_k$$

donde Γ' y Γ'' son matrices cuyos elementos se encuentran acotados por $\bar{\zeta}$ (nótese claramente que Γ' y Γ'' convergen ambos a cero si la cota superior de la incertidumbre $\bar{\zeta}$ converge a cero), y el vector de estados aumentado γ_k contiene el estado actual y pasados, y las acciones de control pasadas:

$$\gamma_k = [x_k, \dots, x_{k-h}, \dots, x_{k-d}, u_{k-d-1}, \dots, u_{k-2d-1}]$$

Con notación obvia, el sistema en lazo cerrado puede reescribirse como:

$$\gamma_{k+1} = \bar{A}\gamma_k + \tilde{T}\gamma_k \quad (5.19)$$

Nótese a partir de (5.19) que si $d = h$ los valores propios de la matriz \bar{A} coinciden con los n valores propios de $(A - BK)$ más $((d + 1)(n + m) - n)$ valores propios en el origen (nulos), debido a los retardos introducidos. De este modo, se puede concluir que para cualquier matriz $Q > 0$, existe otra matriz $P > 0$ que cumpla la siguiente ecuación de Lyapunov:

$$\bar{A}^T P \bar{A} - P = -Q.$$

Incluso si se consideran incertidumbres de modelado, si A_c , B_c , y ζ_k son lo suficientemente pequeños tal que se verifique la desigualdad:

$$-Q + \|2\tilde{T}^T P \bar{A} + \tilde{T}^T P \tilde{T}\| < -\eta Q$$

para cierto escalar $\eta > 0$, el sistema en bucle cerrado (5.19) permanece estable dentro de la región de incertidumbre en torno al modelo nominal.

Análisis de robustez cuantitativo En la sección anterior, se ha probado que si el sistema ideal en bucle cerrado (en ausencia de incertidumbres en el modelo, periodo de muestreo y retardo) es estable, existe un área de incertidumbre dentro de la cual el sistema conserva la estabilidad. Sin embargo, la prueba anterior no provee información acerca de la magnitud de dicha área de incertidumbre. En otras palabras, no permite cuantificar la tolerancia frente a las incertidumbres y por ende, evaluar si el sistema en bucle cerrado es robusto en la práctica.

En esta sección, se plantea un método de análisis cuantitativo de la robustez del sistema en lazo cerrado, considerando la posibilidad de existencia de incertidumbre en todos los parámetros del sistema.

Mediante un método de sobreaproximación (véase, por ejemplo [81, 20]), se incluyen dentro del modelo discreto del sistema (añadiendo cierto grado de conservadurismo), las incertidumbres en el periodo de muestreo, o variaciones en el retardo menores que un periodo de muestreo. Finalmente, el modelo discreto resultante, el cual puede incluir también las incertidumbres en el modelo, se puede expresar como:

$$x_{k+1} = Ax_k + Bu_k + \Delta f_k \quad (5.20)$$

donde $f_k = [x_k^T, u_k^T, u_{k-1}^T]^T$ es el vector de estados aumentado y Δ se define como:

$$\Delta = (\Delta_A \ \Delta_B \ \Delta_{B1}) = \gamma G \Delta_k (H_A \ H_B \ H_{B1})$$

donde G, H_A, H_B, H_{B1} son ciertas matrices constantes de dimensiones apropiadas, y Δ_k es una matriz con entradas Lebesgue variables con el tiempo, tal que verifica $\Delta_k^T \Delta_k \leq I$, y el valor escalar $\gamma > 0$ determina el tamaño del elipsoide de la región de incertidumbres.

A continuación se define un modelo en bucle cerrado formado por el sistema (5.20) aumentado, y la ley de control definida en (4.4) con el predictor (5.6). El sistema autónomo resultante, incluyendo los estados y las acciones de control presente y pasadas, es:

$$\bar{x}_{k+1} = \bar{A}_{cl}(d_i) \bar{x}_k \quad (5.22)$$

donde el vector de estados aumentado se define como:

$$\begin{aligned} \bar{x}_k &= (x_k^T \cdots x_{k-\bar{d}}^T u_{k-1}^T \cdots u_{k-h}^T)^T \\ \bar{d} &= \max(d_M, h) \end{aligned} \quad (5.23)$$

y la matriz de transición de estado $\bar{A}_{cl}(d_i)$, para cierto valor de retardo instantáneo $d_k = d_i$, es:

$$\begin{aligned}
 \bar{A}_{cl}(d_i) &= \bar{A}(d_i) + \gamma \bar{G} \Delta_k \bar{H}(d_i) \\
 \bar{A}(d_i) &= \begin{pmatrix} \bar{A}_{11}(d_i) & \bar{A}_{12} \\ \bar{A}_{21}(d_i) & \bar{A}_{22} \end{pmatrix} \\
 \bar{A}_{11}(d_i) &= \begin{pmatrix} A + BK_0(d_i) & BK_1(d_i) & \cdots & \cdots & BK_{\bar{d}}(d_i) \\ I & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & I & \cdots & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & I & 0 \end{pmatrix} \\
 \bar{A}_{12} &= \begin{pmatrix} -BKB \cdots -BKA^{h-1}B \\ 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} \\
 \bar{A}_{21}(d_i) &= \begin{pmatrix} K_0(d_i) & K_1(d_i) & \cdots & K_{\bar{d}}(d_i) \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} \\
 \bar{A}_{22} &= \begin{pmatrix} -KB \cdots -KA^{h-2}B & -KA^{h-1}B \\ I & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & \cdots & I & 0 \end{pmatrix} \\
 \bar{G} &= (G \ 0 \ \cdots \ 0)^T \\
 \bar{H}(d_i) &= (\bar{H}_1(d_i) \ \bar{H}_2) \\
 \bar{H}_1(d_i) &= (H_A + H_B K_0(d_i) \ H_B K_1(d_i) \ \cdots \ H_B K_{\bar{d}}(d_i)) \\
 \bar{H}_2 &= (-H_B K B + H_{B1} \ -H_B K A B \ \cdots \ -H_B K A^{h-1} B) \\
 K_j(d_i) &= \begin{cases} -KA^h & j = d_i \\ 0 & j \neq d_i \end{cases}
 \end{aligned}$$

Teorema 5.4.3 *El sistema en bucle cerrado formado por (5.20) y el esquema de control basado en predictor (4.4)-(5.6) es robustamente estable si existe una matriz $\bar{L} > 0$ tal que las siguientes condiciones LMI se satisfagan para todo $d_i = d_m, d_m + 1, \dots, d_M$:*

$$\begin{pmatrix} -\bar{L} + \bar{H}(d_i)^T \bar{H}(d_i) & \bar{A}(d_i)^T \bar{L} & 0 \\ (*) & -\bar{L} & \bar{L} \bar{G} \\ (*) & (*) & -\gamma^{-2} I \end{pmatrix} < 0 \quad (5.24)$$

Además, se puede obtener la máxima tolerancia a incertidumbres resolviendo el siguiente problema de optimización convexa: minimizar γ^{-2} sujeto a la LMI anterior.

Demostración: Se propone el siguiente funcional de Lyapunov candidato $V(k) = \bar{x}_k^T \bar{P} \bar{x}_k$, $\bar{P} > 0$ donde el estado aumentado se define en la Ecuación (5.22). La estabilidad en lazo cerrado se prueba a partir de la verificación de las condiciones LMI para cada $d_i = d_m, d_m + 1, \dots, d_M$.

$$-\bar{P} + \bar{A}_{cl}(d_i)^T \bar{P} \bar{A}_{cl}(d_i) < 0 \quad (5.25)$$

Aplicando el complemento de Schur se obtiene:

$$\begin{pmatrix} -\bar{P} & \bar{A}_{cl}(d_i)^T \bar{P} \\ (*) & -\bar{P} \end{pmatrix} < 0 \quad (5.26)$$

que puede expresarse del siguiente modo, teniendo en cuenta la descomposición de la matriz del sistema en base a la definición de las incertidumbres de modelado normadas $\bar{A}_{cl}(d_i) = \bar{A}(d_i) + \gamma \bar{G} \Delta_k \bar{H}(d_i)$:

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} -\bar{P} & \bar{A}(d_i)^T \bar{P} \\ (*) & -\bar{P} \end{pmatrix} + \gamma \begin{pmatrix} 0 \\ P \bar{G} \end{pmatrix} \Delta_k (\bar{H}(d_i) \ 0) + \\ + \gamma (\bar{H}(d_i) \ 0)^T \Delta_k^T \begin{pmatrix} 0 \\ P \bar{G} \end{pmatrix} < 0 \end{aligned} \quad (5.27)$$

La desigualdad anterior se cumple para cierto escalar $\epsilon > 0$, [129], aplicando el *Cross-product lemma* (ver apéndice 8, Lema 8.3.1) tal que:

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} -\bar{P} & \bar{A}(d_i)^T \bar{P} \\ (*) & -\bar{P} \end{pmatrix} + \epsilon \gamma^2 \begin{pmatrix} 0 \\ P \bar{G} \end{pmatrix} (0 \ \bar{G}^T P) + \\ + \epsilon^{-1} \begin{pmatrix} \bar{H}(d_i)^T \\ 0 \end{pmatrix} (\bar{H}(d_i) \ 0) < 0 \end{aligned} \quad (5.28)$$

Aplicando nuevamente el complemento de Schur se obtiene:

$$\begin{pmatrix} -\bar{P} + \epsilon^{-1} \bar{H}(d_i)^T \bar{H}(d_i) & \bar{A}(d_i)^T \bar{P} & 0 \\ (*) & -\bar{P} & \bar{P} \bar{G} \\ (*) & (*) & -\gamma^{-2} \epsilon^{-1} I \end{pmatrix} < 0 \quad (5.29)$$

Pre y post multiplicando la desigualdad anterior por una matriz diagonal por bloques de dimensiones apropiadas $\sqrt{\epsilon} \cdot \text{diag}(I, I, I)$ se obtiene:

$$\begin{pmatrix} -\epsilon \bar{P} + \bar{H}(d_i)^T \bar{H}(d_i) & \epsilon \bar{A}(d_i)^T \bar{P} & 0 \\ (*) & -\epsilon \bar{P} & \epsilon \bar{P} \bar{G} \\ (*) & (*) & -\gamma^{-2} I \end{pmatrix} < 0 \quad (5.30)$$

Finalmente, definiendo la matriz $\bar{L} = \epsilon \bar{P}$ se obtiene la expresión LMI del Teorema 5.4.3. Con esto la prueba queda completada. ■

5.5. Ejemplos numéricos

5.5.1. Ejemplo 1

Consideremos el siguiente sistema de segundo orden, ya propuesto en [34]:

$$x_{k+1} = \begin{pmatrix} 0,5450 & -0,0392 \\ 0,6225 & -0,1696 \end{pmatrix} x_k + \begin{pmatrix} 1,0000 \\ -2,2159 \end{pmatrix} u_k$$

donde $x_k = (x_{1k} \ x_{2k})$ es el vector de estados, supuesto accesible en su totalidad ($C = I$). La ley de control estática propuesta, incluyendo el efecto del retardo en la medida, es:

$$u_k = -Kx_{k-d_k}$$

donde

$$K = [-0,2392 \quad -0,1842]$$

En este ejemplo se asume, por ejemplo, un retardo mínimo $d_m = 3$. La idea es encontrar el máximo valor de retardo d_M por debajo del cual pueda probarse la estabilidad en bucle cerrado. En este caso, aplicando el Teorema 1 de [34], la estabilidad puede probarse para $d_M \leq 7$. Sin embargo, introduciendo el esquema de control basado en predictor con $h = 3$, mediante la aplicación del Teorema 5.4.1 la estabilidad del sistema en bucle cerrado se prueba para $d_M \leq 31$.

A continuación, se muestran resultados de simulación en el que el retardo de salida verifica $3 \leq d_k \leq 31$ ($d_m = 3, d_M = 31$).

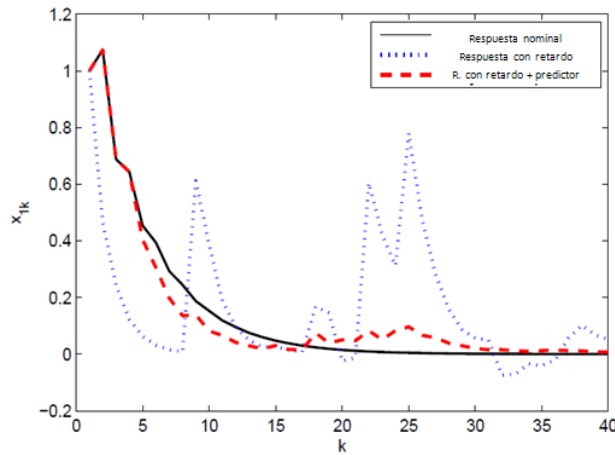


Figura 5.2. Comparación de la respuesta nominal con la respuesta del sistema con retardo para el estado x_1

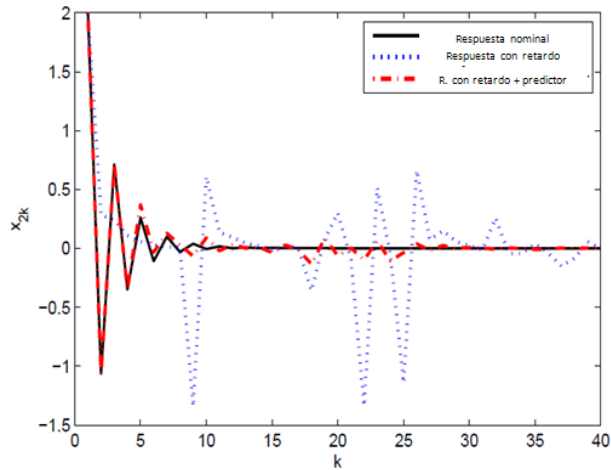


Figura 5.3. Comparación de la respuesta nominal con la respuesta del sistema con retardo para el estado x_2

En las Figuras 5.2 y 5.3 se representa la dinámica de la respuesta de los estados del proceso en lazo cerrado. Los valores iniciales del estado son respectivamente $x_1(0) = 1$ y $x_2(0) = 2$. Se puede apreciar cómo la respuesta del sistema con el controlador basado en predictor se asemeja más a la respuesta nominal que la obtenida a partir del controlador estático.

5.5.2. Ejemplo 2 (Péndulo Invertido)

Considérese el siguiente sistema autónomo:

$$x_{k+1} = Ax_k + A_d x_{k-d_k} \quad (5.31)$$

La estabilidad del sistema respecto al intervalo de retardo $d_k \in \{d_m, d_M\}$ ha sido ampliamente estudiado en la literatura (véase por ejemplo las referencias [34, 47, 85]).

El sistema anterior es equivalente al sistema (5.3) en bucle cerrado con la ley de control estática (5.5) con retardo en la medida, simplemente definiendo:

$$A_d = -BK \quad (5.32)$$

Considérese el ejemplo académico del péndulo invertido (ver Ejemplo 3 en [34]). Con el fin de mostrar la influencia del retardo discreto (expresado en múltiplos enteros del periodo de muestreo T), se propone un periodo $T = 10ms$ en lugar de $T = 30ms$, tal y como se propone en los trabajos citados anteriormente.

El modelo discreto del péndulo invertido con $T = 10ms$ con retenedor de orden cero a la entrada es:

$$x_{k+1} = \begin{pmatrix} 1,0009 & 0,0100 \\ 0,1730 & 1,0009 \end{pmatrix} x_k + 10^{-3} \begin{pmatrix} -0,0088 \\ -1,7652 \end{pmatrix} u_k$$

Los polos del sistema en bucle abierto son $\{1,0425, 0,9593\}$. En [34] se propone una ley de control estática que estabiliza el sistema en bucle cerrado cuya ganancia es:

$$K = -[102,9100 \quad 80,7916] \quad (5.33)$$

de modo que los polos del sistema en bucle cerrado ($A - BK$) se establecen en $\{0,9994, 0,8588\}$.

Se asume la presencia de un retardo variable d_k en el canal de medida (ver Figure 5.1). Al respecto se consideran las dos opciones siguientes:

1. Ley de control basada en la realimentación estática de la medida del estado retardado (5.5), $u_k = -Kx_{k-d_k}$.
2. Ley de control basada en la realimentación estática de la predicción del estado h muestras hacia delante mediante la Ecuación (5.6): $u_k = -K\bar{x}_{k+h}$.

En ambos casos, en ausencia de retardo ($d_k = 0$), la dinámica del sistema se caracteriza por los polos originales en bucle cerrado. Sin embargo, para un cierto d_m , se pretende obtener la cota máxima de d_M tal que el sistema en bucle cerrado para ambos controladores permanezca estable. La idea, por tanto, es maximizar el intervalo de retardo dentro del cual pueda probarse la estabilidad del sistema bajo control. En el Cuadro 5.1 se comparan resultados obtenidos con la ley de control estática según Teorema 1 de [47], Teorema 1 y 3 en [34], Teorema 1 en [85]¹, y con la ley de control basada en predictor, a partir del Teorema propuesto 5.4.2.

Cuadro 5.1. Obtención del máximo valor de d_M para d_m

ley de control		d_m			
		1	4	7	10
SSF	Th.1 [47]	8	8	8	no factible
SSF	Th.1 [34]	8	8	8	no factible
SSF	Th.3 [34]	8	8	9	no factible
SSF	Th.1 [85]	8	8	9	10
predictor	Th.5.4.2 ($h = d_m$)	8	10	13	15
predictor	Th.5.4.2 ($h = (d_m + d_M)/2$)	5	8	10	13
predictor	Th.5.4.2 ($h = d_M$)	4	7	9	12

En los resultados anteriores se ha establecido el parámetro del predictor $h = d_m$. Tal y como se puede ver en el cuadro anterior, el uso del predictor

¹ Donde se ha utilizado la partición menos conservadora.

permite alargar el intervalo de retardo, o incluso estabilizarlo. Por ejemplo, para un $d_m = 10$, con los resultados propuestos en la literatura explorada, no es posible probar la estabilidad para retardo variable. En cambio, el uso de la ley de control basada en predictor permite probar la estabilidad con retardo variable hasta $d_M = 15$.

5.6. Conclusiones

En este capítulo se ha analizado la estabilidad y la robustez de sistemas discretos con retardos variables en la salida obtenida a partir de controladores basados en predictor comparando con respecto al controlador estático.

Se ha tomado el intervalo de retardo variable $\delta = d_M - d_m$ como parámetro de análisis, de modo que para un cierto controlador, se ha demostrado que el uso del predictor dentro del esquema de control incrementa el valor máximo de δ dentro del cual el sistema en bucle cerrado es estable. La elección del parámetro h se ha tomado dentro del intervalo $h \in \{d_M, d_m\}$, aunque el establecimiento de un criterio formal de diseño sobre este parámetro es objeto de estudio y no se ha abordado dentro de la presente tesis.

6 Diseño de controladores basados en Predictor sobre sistemas LTI con retardos variables en la entrada

6.1. Resumen/Motivación

Este capítulo se corresponde con el contenido del artículo publicado en la Automatica (año 2011)

En este capítulo se presenta un método de diseño de controladores basados en predictor para estabilizar sistemas discretos con retardos variables en la entrada. El método de diseño propuesto, basado en el algoritmo CCL [26], se deriva a partir de un resultado de análisis de estabilidad mediante LMI para este tipo de sistemas. Finalmente, se ilustra mediante ejemplos numéricos que el uso del predictor en el bucle de control incrementa el intervalo de retardo respecto al diseño.

6.2. Introducción

En el campo del diseño de controladores para sistemas discretos con retardos es posible encontrar diferentes resultados en la literatura: a partir de controladores por realimentación estática del estado [45] como controladores basados en predictor (adaptación del FSA [83] a sistemas discretos). Los controladores basados en predictor son un caso particular de sistemas dinámicos; otras propuestas similares se pueden consultar en [54]. En la literatura, la estabilidad para este tipo de sistemas se puede probar tanto a partir de LMI's derivadas de funcionales de Lyapunov-Krasovskii [45, 137] como de la aplicación del Teorema de la Pequeña Ganancia [76].

Respecto al estudio de la estabilidad de sistemas discretos con retardos variables mediante controladores basados en predictor sólo se han encontrado resultados de análisis [81, 39], pero no de diseño. Hasta el conocimiento del autor, la síntesis con este tipo de controladores solamente se ha llevado a cabo para el caso de retardo constante y conocido, donde una vez compensado el retardo, el diseño se ha realizado sobre el sistema equivalente libre de retardo.

El objetivo de este capítulo, por tanto, es a grandes rasgos demostrar que es posible adaptar alguno de los resultados propuestos en la literatura para análisis de estabilidad sobre controladores basados en la realimentación estática del estado para estabilizar sistemas con retardos variables mediante

controladores basados en predictor. En particular, en este trabajo, el resultado de análisis [47] ha sido utilizado para desarrollar el método de síntesis propuesto. No obstante, siguiendo un razonamiento análogo, es posible generar condiciones de diseño a partir de resultados similares de análisis de la estabilidad propuestos en la literatura.

Debido a la naturaleza no convexa del problema de síntesis del controlador, algoritmo CCL [26] (ver apéndice 8) para diseñar el controlador basado en predictor, para sistemas con retardos variables en la entrada.

Finalmente, mediante un ejemplo numérico, se demuestra que un controlador basado en predictor puede incrementar el intervalo de retardo dentro del cual el sistema permanece estable, respecto al diseño mediante CCL derivado del mismo resultado de análisis de estabilidad con controlador estático, a partir del cual se desarrolla el método de diseño propuesto.

6.3. Formulación del problema

Considérese el siguiente sistema discreto LTI con retardos variable en la entrada:

$$\begin{aligned} x_{k+1} &= Ax_k + Bu_{k-d_k} \\ x_0 &= \psi, \quad u_\kappa = \phi_u(\kappa), \quad -d_M \leq \kappa < 0 \end{aligned} \quad (6.1)$$

donde ψ representa la condición inicial del estado y $\phi_u(\kappa)$ representa las condiciones iniciales de la entrada correspondiente a la acción de control u_k . Los parámetros $A \in \mathfrak{R}^{n \times n}$, $B \in \mathfrak{R}^{n \times m}$ son las matrices del modelo de proceso.

Por otro lado se asume que el retardo en la entrada $d_k > 0$ no es medible y que varía aleatoriamente dentro de un intervalo acotado $d_m \leq d_k \leq d_M$. En cambio, los valores del límite inferior y superior del intervalo (d_m y d_M , respectivamente), son conocidos.

Control por realimentación estática del estado: Con la ley de control por realimentación estática del estado $u_k = Kx_k$, las ecuaciones en bucle cerrado son:

$$x_{k+1} = Ax_k + BKx_{k-d_k} \quad (6.2)$$

El análisis de estabilidad y diseño para este tipo de sistemas ha sido explorado en el contexto de funcionales de Lyapunov-Krasovskii discretos [135]. Sin embargo, existe un conservadurismo inherente a este tipo de controladores debido a: (a) x no puede considerarse como el vector de estados ya que es necesario información histórica del estado para poder computar la predicción futura del mismo y (b) los funcionales de Lyapunov-Krasovskii no representan con total generalidad toda la clase de funciones de Lyapunov existentes y posiblemente requeridas [64].

Control basado en predictor: Alternativamente, considérese la siguiente ley de control, basada en predictor:

$$u_k = K\bar{x}_{k+h} \quad (6.3)$$

donde la predicción del estado h pasos hacia delante se obtiene como:

$$\bar{x}_{k+h} = A^h x_k + \sum_{i=0}^{h-1} A^{h-i-1} B u_{k-h+i} \quad (6.4)$$

y h es un parámetro definido por el usuario [41, 81].

6.4. Resultados principales

El siguiente lema propone una transformación del modelo original del sistema en bucle cerrado que elimina la dependencia de los estados intermedios (acciones de control pasadas), y que será de gran utilidad para la obtención del resultado de diseño deseado:

Lema 6.4.1 *Las ecuaciones en bucle cerrado del modelo (6.1) con la ley de control (6.3) se puede expresar como:*

$$z_{k+1} = (A + BK)z_k + A^h BK z_{k-d_k} - A^h BK z_{k-h} \quad (6.5)$$

donde z_k es la predicción del estado " h " periodos de muestreo hacia delante: x_{k+h} , i.e., $z_k = \bar{x}_{k+h}$.

Demostración: Se define la variable de estado $z_k = \bar{x}_{k+h}$ a partir de la Ecuación (6.4), de modo que

$$z_{k+1} = A^h x_{k+1} + \sum_{j=1}^h A^{h-j} B u_{k-h+j}$$

Sustituyendo x_{k+1} a partir de las ecuaciones del sistema (6.1), y añadiendo y substrayendo los términos correspondientes a los índices $j = 0$ y $j = h$ en el lado derecho del sumatorio, se obtiene:

$$\begin{aligned} z_{k+1} &= A^h [A x_k + B u_{k-d_k}] + \\ &+ A \sum_{j=0}^{h-1} A^{h-j-1} B u_{k-h+j} + B u_k - A^h B u_{k-h} \end{aligned} \quad (6.6)$$

que puede expresarse como:

$$z_{k+1} = A z_k + B u_k - A^h B u_{k-h} + A^h B u_{k-d_k} \quad (6.7)$$

Finalmente, teniendo en cuenta que la ley de control (6.3) puede expresarse como $u_k = K z_k$, la prueba se completa. ■

Nótese que en el caso de retardo constante y conocido, con $d_k = d = h$, se elimina el retardo de la ecuación característica.

El siguiente teorema proporciona una condición suficiente de análisis de estabilidad aplicable sobre la expresión en bucle cerrado obtenida anteriormente (Ecuación (6.5))

Teorema 6.4.1 *El sistema (6.5) es globalmente estable si existen matrices $P, L, Q, Q_m, Q_M, Q_h, Z, Z_2, Z_1, M > 0$ y matrices S_1, S_2, T_1, T_2, K que satisfacen las siguientes condiciones:*

$$\begin{pmatrix} \Gamma & \tau S \\ \tau S^T & -Z_M \end{pmatrix} < 0 \quad \begin{pmatrix} \Gamma & \tau T \\ \tau T^T & -Z_M \end{pmatrix} < 0 \quad (6.8)$$

$$S = (0 \ S_1^T \ S_2^T \ 0 \ 0 \ 0 \ 0)^T, \quad T = (0 \ T_1^T \ 0 \ T_2^T \ 0 \ 0 \ 0)^T$$

$$\tau = d_M - d_m$$

$$\Gamma = \begin{pmatrix} \Gamma_1 & 0 & \Gamma_2 & 0 & \Gamma_3 & \Gamma_4 & \Gamma_5 \\ (*) & \Gamma_6 & \Gamma_7 & \Gamma_8 & 0 & \Gamma_9 & \Gamma_{10} \\ (*) & (*) & \Gamma_{11} & 0 & Z_1 & 0 & 0 \\ (*) & (*) & (*) & \Gamma_{12} & 0 & 0 & 0 \\ (*) & (*) & (*) & (*) & \Gamma_{13} & -\Gamma_9 & -\Gamma_{10} \\ (*) & (*) & (*) & (*) & (*) & -L & 0 \\ (*) & (*) & (*) & (*) & (*) & (*) & -M \end{pmatrix}$$

$$\Gamma_1 = -P + (\tau + 1)Q + Q_M + Q_m + Q_h - Z_2$$

$$\Gamma_2 = \begin{cases} 0 & h \leq d_m \\ Z_2 & h > d_m \end{cases}, \quad \Gamma_3 = \begin{cases} Z_2 & h \leq d_m \\ 0 & h > d_m \end{cases}$$

$$\Gamma_4 = A_1^T, \quad \Gamma_5 = (A_1 - I)^T,$$

$$\Gamma_6 = -Q + T_1 + T_1^T - S_1 - S_1^T$$

$$\Gamma_7 = S_1 - S_2^T, \quad \Gamma_8 = -T_1 + T_2^T, \quad \Gamma_9 = B_1^T$$

$$\Gamma_{10} = B_1^T, \quad \Gamma_{12} = -Q_M - T_2 - T_2^T$$

$$\Gamma_{11} = -Q_m + S_2 + S_2^T - Z_1 + \begin{cases} 0 & h \leq d_m \\ -Z_2 & h > d_m \end{cases}$$

$$\Gamma_{13} = -Q_h - Z_1 + \begin{cases} -Z_2 & h \leq d_m \\ 0 & h > d_m \end{cases}$$

$$A_1 = A + BK, \quad B_1 = A^h BK$$

$$Z_M = Z - \gamma^2 Z_2 - (d_m - h)^2 Z_1, \quad \gamma \doteq \min(d_m, h)$$

y

$$PL = I, \quad ZM = I \quad (6.9)$$

Demostración:

Aplicando un razonamiento análogo a [39, 47], se define la siguiente función de Lyapunov-Krasovskii candidata:

$$V(k) = V_1(k) + V_2(k) + V_3(k) + V_4(k) + V_5(k) \quad (6.10)$$

$$\begin{aligned}
V_1(k) &= z^T(k)Pz(k), & V_2(k) &= \sum_{i=k-d_k}^{k-1} z^T(i)Qz(i) \\
V_3(k) &= \sum_{i=k-d_m}^{k-1} z^T(i)Q_m z(i) + \sum_{i=k-d_M}^{k-1} z^T(i)Q_M z(i) + \\
&\quad + \sum_{i=k-h}^{k-1} z^T(i)Q_h z(i) \\
V_4(k) &= \sum_{j=-d_M+1}^{-d_m} \sum_{i=k+j}^{k-1} z^T(i)Qz(i) \\
V_5(k) &= \gamma \sum_{i=-\gamma}^{-1} \sum_{m=k+i}^{k-1} \nu^T(m)Z_2\nu(m) + \\
&\quad + |d_m - h| \sum_{i=-\rho}^{-\gamma-1} \sum_{m=k+i}^{k-1} \nu^T(m)Z_1\nu(m) + \\
&\quad + \sum_{i=-d_M}^{-d_m-1} \sum_{m=k+i}^{k-1} \nu^T(m)Z_M\nu(m)
\end{aligned}$$

donde $\nu(k) = z(k+1) - z(k)$ y $\rho \doteq \max(d_m, h)$.

Entonces, el sistema en bucle cerrado (6.5) será asintóticamente estable si la diferencia de retorno $\Delta V(k) = V(k+1) - V(k)$ es negativa

En primer lugar se define el siguiente estado aumentado:

$$\mu^T(k) = (z(k) \ z(k-d_k) \ z(k-d_m) \ z(k-d_M) \ z(k-h))^T$$

y la matriz $\Theta = (A_1 \ B_1 \ 0 \ 0 \ -B_1)$, de modo que el sistema en bucle cerrado (6.5) puede expresarse como $z_{k+1} = \Theta\mu_k$. Utilizando la función de Lyapunov-Krasovskii definida en (6.10), los incrementos de V_1 a V_5 pueden expresarse respectivamente del siguiente modo:

$$\begin{aligned}
\Delta V_1(k) &= \mu^T(k)\Theta^T P\Theta\mu(k) - z^T(k)Pz(k) \\
\Delta V_2(k) + \Delta V_4(k) &\leq \\
&\quad (1 + \tau)[z(k)]^T Q[z(k)] - z^T(k-d_k)Qz(k-d_k) \\
\Delta V_3(k) &= z^T(k)(Q_m + Q_M + Q_h)z(k) - z^T(k-d_m)Q_m z(k-d_m) - \\
&\quad - z^T(k-d_M)Q_M z(k-d_M) - z^T(k-h)Q_h z(k-h) \\
\Delta V_5(k) &= \nu(k)^T(\gamma^2 Z_2 + (d_m - h)^2 Z_1 + \tau Z_M)\nu(k) - \\
&\quad - \gamma \sum_{i=k-\gamma}^{k-1} \nu(i)^T Z_2 \nu(i) - |d_m - h| \sum_{i=k-\rho}^{k-\gamma-1} \nu(i)^T Z_1 \nu(i) - \\
&\quad - \sum_{i=k-d_M}^{k-d_k-1} \nu(i)^T Z_M \nu(i) - \sum_{i=k-d_k}^{k-d_m-1} \nu(i)^T Z_M \nu(i)
\end{aligned}$$

Aplicando la desigualdad de Tchebyshev (Lema 1 [47]) y asumiendo que $\sum_{i=a}^b f(i) := 0$, si $b < a$, se obtiene:

$$\begin{aligned} -\gamma \sum_{i=k-\gamma}^{k-1} \nu(i)^T Z_2 \nu(i) &\leq -\left[\sum_{i=k-\gamma}^{k-1} \nu(i) \right]^T Z_2 \left[\sum_{i=k-\gamma}^{k-1} \nu(i) \right] - \\ -|d_m - h| \sum_{i=k-\rho}^{k-\gamma-1} \nu(i)^T Z_1 \nu(i) &\leq -\left[\sum_{i=k-\rho}^{k-\gamma-1} \nu(i) \right]^T Z_1 \left[\sum_{i=k-\rho}^{k-\gamma-1} \nu(i) \right] \end{aligned}$$

y por consiguiente:

$$\begin{aligned} \Delta V_5(k) &\leq \nu(k)^T Z \nu(k) - [z(k) - z(k-\gamma)]^T Z_2 [z(k) - z(k-\gamma)] - \\ &\quad - [z(k-\gamma) - z(k-\rho)]^T Z_1 [z(k-\gamma) - z(k-\rho)] - \\ &\quad - \sum_{i=k-d_m}^{k-d_k-1} \nu(i)^T Z_M \nu(i) - \sum_{i=k-d_k}^{k-d_m-1} \nu(i)^T Z_M \nu(i) \end{aligned}$$

donde $S_0 = (0 \ S_1^T \ S_2^T \ 0 \ 0)^T$ y $T_0 = (0 \ T_1^T \ 0 \ T_2^T \ 0)^T$ son ciertas matrices de dimensiones apropiadas. Por otro lado se puede establecer las siguientes relaciones *free-weighting*:

$$\begin{aligned} 0 &= 2\mu^T(k) S_0 [z(k-d_m) - z(k-d_k) - \sum_{i=k-d_k}^{k-d_m-1} \nu(i)] \leq \\ &\quad \leq 2\mu^T(k) S_0 [z(k-d_m) - z(k-d_k)] + \\ &\quad + (d_k - d_m) \mu^T(k) S_0 Z_M^{-1} S_0^T \mu(k) + \sum_{i=k-d_k}^{k-d_m-1} \nu(i)^T Z_M \nu(i) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 0 &= 2\mu^T(k) T_0 [z(k-d_k) - z(k-d_M) - \sum_{i=k-d_M}^{k-d_k-1} \nu(i)] \leq \\ &\quad \leq 2\mu^T(k) T_0 [z(k-d_k) - z(k-d_M)] + \\ &\quad + (d_M - d_k) \mu^T(k) T_0 Z_M^{-1} T_0^T \mu(k) + \sum_{i=k-d_M}^{k-d_k-1} \nu(i)^T Z_M \nu(i) \end{aligned}$$

Nótese que si $d_k = d_m$ o $d_k = d_M$ ambas desigualdades se reducen a la tautología $0 \leq 0$.

Teniendo en cuenta las equivalencias anteriores, la diferencia de retorno $\Delta V(k)$ puede expresarse como:

$$\begin{aligned} \Delta V(k) &\leq \mu^T(k) \Omega \mu(k) + (d_k - d_m) \mu^T(k) S_0 Z_M^{-1} S_0^T \mu(k) + \quad (6.11) \\ &\quad + (d_M - d_k) \mu^T(k) T_0 Z_M^{-1} T_0^T \mu(k) \leq 0 \end{aligned}$$

$$\Omega = \begin{pmatrix} \Omega_1 & \Omega_2 & \Omega_3 & 0 & \Omega_4 \\ (*) & \Omega_5 & S_1 - S_2^T & -T_1 + T_2^T & \Omega_6 \\ (*) & (*) & \Omega_7 & 0 & Z_1 \\ (*) & (*) & (*) & \Omega_8 & 0 \\ (*) & (*) & (*) & (*) & \Omega_9 \end{pmatrix}$$

$$\Omega_1 = A_1^T P A_1 + (A_1 - I)^T Z (A_1 - I) - P + (\tau + 1) Q + Q_M + Q_m + Q_h - Z_2$$

$$\begin{aligned}
\Omega_2 &= A_1^T P B_1 + (A_1 - I)^T Z B_1 \\
\Omega_3 &= \begin{cases} 0 & h \leq d_m \\ Z_2 & h > d_m \end{cases}, \Omega_8 = -Q_M - T_2 - T_2^T \\
\Omega_4 &= -A_1^T P B_1 - (A_1 - I)^T Z B_1 + \begin{cases} Z_2 & h \leq d_m \\ 0 & h > d_m \end{cases} \\
\Omega_5 &= B_1^T P B_1 + B_1^T Z B_1 - Q - S_1 - S_1^T + T_1 + T_1^T \\
\Omega_6 &= -B_1^T P B_1 - B_1^T Z B_1 \\
\Omega_7 &= -Q_m - Z_1 + S_2 + S_2^T + \begin{cases} 0 & h \leq d_m \\ -Z_2 & h > d_m \end{cases} \\
\Omega_9 &= B_1^T P B_1 + B_1^T Z B_1 - Q_h - Z_1 + \begin{cases} -Z_2 & h \leq d_m \\ 0 & h > d_m \end{cases}
\end{aligned}$$

La matriz Ω puede factorizarse del siguiente modo: $\Omega = \bar{\Omega} + \Theta^T P \Theta + \Upsilon^T Z \Upsilon$, donde:

$$\begin{aligned}
\bar{\Omega} &= \begin{pmatrix} \bar{\Omega}_1 & 0 & \bar{\Omega}_3 & 0 & \bar{\Omega}_4 \\ (*) & \bar{\Omega}_5 & S_1 - S_2^T & -T_1 + T_2^T & 0 \\ (*) & (*) & \bar{\Omega}_7 & 0 & Z_1 \\ (*) & (*) & (*) & \bar{\Omega}_8 & 0 \\ (*) & (*) & (*) & (*) & \bar{\Omega}_9 \end{pmatrix} \\
\Theta &= (A_1 \ B_1 \ 0 \ 0 \ -B_1) \\
\Upsilon &= (A_1 - I \ B_1 \ 0 \ 0 \ -B_1)
\end{aligned}$$

donde

$$\begin{aligned}
\bar{\Omega}_1 &= -P + (\tau + 1)Q + Q_M + Q_m + Q_h - Z_2 \\
\bar{\Omega}_3 &= \begin{cases} 0 & h \leq d_m \\ Z_2 & h > d_m \end{cases}, \bar{\Omega}_8 = -Q_M - T_2 - T_2^T \\
\bar{\Omega}_4 &= \begin{cases} Z_2 & h \leq d_m \\ 0 & h > d_m \end{cases} \\
\bar{\Omega}_5 &= -Q - S_1 - S_1^T + T_1 + T_1^T \\
\bar{\Omega}_7 &= -Q_m - Z_1 + S_2 + S_2^T + \begin{cases} 0 & h \leq d_m \\ -Z_2 & h > d_m \end{cases} \\
\bar{\Omega}_9 &= -Q_h - Z_1 + \begin{cases} -Z_2 & h \leq d_m \\ 0 & h > d_m \end{cases}
\end{aligned}$$

Aplicando dos veces el Complemento de Schur en la matriz Γ definida en el Teorema 1, se obtiene:

$$\Gamma + (d_k - d_m) S Z_M^{-1} S^T + (d_M - d_k) T Z_M^{-1} T^T < 0 \quad (6.12)$$

Se puede observar que la expresión anterior está parametrizada de modo afín respecto d_k por tanto es suficiente con probar la desigualdad en los vértices $d_k = d_m$ y $d_k = d_M$ [47]. Por tanto, basta con probar las LMI $\Gamma + (d_M - d_m)SZ_M^{-1}S^T < 0$ y $\Gamma + (d_M - d_m)TZ_M^{-1}T^T < 0$. Finalmente, aplicando una vez más el Complemento de Schur sobre cada una de las desigualdades anteriores, se obtiene el resultado deseado en (6.8). ■

Nótese que el teorema anterior no es convexo debido a las restricciones $PL = I, ZM = I$. El problema de análisis de estabilidad, en cambio, puede ser formulado mediante LMI tal y como se prueba en el siguiente corolario:

Corolario 6.4.1 *Fijando el valor de K , El análisis de la estabilidad sobre el esquema de control basado en predictor puede ser formulado como un problema LMI pre y post multiplicando las desigualdades matriciales (6.8) por la matriz $\text{diag}(I, P, Z, I)$ de modo que L y M en Γ se transforman en sus respectivas inversas P y Z .*

El siguiente corolario prueba la existencia de una solución factible para el caso particular de retardo constante $d = d_m = d_M$ con $h = d$. Este resultado es de gran utilidad, tal y como se verá posteriormente:

Corolario 6.4.2 *Para cierto valor de K tal que $A + BK$ sea Hurwitz, si $d_m = d_M = h$, siempre existirá una solución factible al Teorema 6.4.1 considerando los valores $Q = \epsilon_1 I, Q_m = \epsilon_1 I, Q_M = \epsilon_1 I, Q_h = \epsilon_1 I, Z = \epsilon_1 I, M = \epsilon_1^{-1} I, Z_1 = \epsilon_2 I, Z_2 = \epsilon_2 I, S_1 = 0, S_2 = 0, T_1 = 0, T_2 = 0$ para ciertos escalares positivos suficientemente pequeños ϵ_1, ϵ_2 .*

Corolario 6.4.3 *Se obtiene el Teorema 1 en [47] tomando $h = 0$ en el Corolario 6.4.1.*

Demostración: Tomando $h = 0$ se obtiene la siguiente equivalencia: $Z = d_m^2 Z_1 + \tau Z_M$. De este modo, la restricción $Z_2 > 0$ desaparece y en consecuencia Z_2 puede adquirir un valor arbitrario. Por otro lado, multiplicando Γ definido en el Teorema 6.4.1 por la matriz $\text{diag}(I, P, Z)$ se obtiene una nueva matriz Ψ que puede expresarse como:

$$\Psi = \Psi_0 + U^T Z_2 V + U Z_2 V^T$$

$$\Psi_0 = \begin{pmatrix} \Gamma_1 + Z_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & \Gamma_4 P & \Gamma_5 Z \\ (*) & \Gamma_6 & \Gamma_7 & \Gamma_8 & 0 & \Gamma_9 P & \Gamma_{10} Z \\ (*) & (*) & \Gamma_{11} & 0 & Z_1 & 0 & 0 \\ (*) & (*) & (*) & \Gamma_{12} & 0 & 0 & 0 \\ (*) & (*) & (*) & (*) & \Gamma_{13} + Z_2 & -\Gamma_9 P & -\Gamma_{10} Z \\ (*) & (*) & (*) & (*) & (*) & -P & 0 \\ (*) & (*) & (*) & (*) & (*) & (*) & -Z \end{pmatrix}$$

$$U^T = (1 \ 0 \ 0 \ 0 \ -1 \ 0 \ 0)$$

$$V = (-1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1 \ 0 \ 0)$$

Teniendo en cuenta que tanto U como V comparten el mismo subespacio nulo N_u, N_v (es decir, $N_u^T U = 0$ y $N_v^T V = 0$)

$$N_u = N_v = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

aplicando el Teorema de Eliminación (ver Teorema 8.3.5, Apéndice 8) se prueba la equivalencia con respecto al Teorema 1 en [47] cuando $h = 0$. ■

El Corolario 6.4.3 demuestra con total generalidad que el resultado propuesto nunca reducirá el intervalo de retardo respecto al Teorema 1 [47]. Por tanto bastaría con demostrar, al menos en un ejemplo numérico, que para un cierto valor $h > 0$ se puede incrementar el margen de retardo dentro del cual el sistema en bucle cerrado es estable.

6.4.1. Diseño del controlador basado en predictor

El Teorema 6.4.1 se puede utilizar para estabilizar el sistema (6.5). De este modo, fijando el valor del retardo mínimo d_m , se trata de diseñar el controlador que estabilice el sistema para el máximo valor de d_M posible. Para conseguir este objetivo se propone el siguiente algoritmo basado en CCL [26, 135]

- Paso 1: Obtener un valor de K que estabilice el bucle cerrado sin retardo $A + BK$. Establecer $d_M = d_m = h$ y obtener una solución factible $(P_0, L_0, Z_0, M_0, \dots)$ ¹ establecer, por tanto, los valores iniciales $(P_0, L_0, Z_0, M_0, \dots)$ obtenidos a partir del 6.4.1 para el valor de K obtenido anteriormente. Fijar $q = 0$ y el contador de iteraciones $n_t = 1$
- Paso 2: Se resuelve el siguiente problema LMI: Minimizar la función lineal $\text{tr}(P_q L + P L_q + Z_q M + Z M_q)$ sujeto a las restricciones (6.8) del Teorema 6.4.1. Establecer $P_{q+1} = P, L_{q+1} = L, Z_{q+1} = Z, M_{q+1} = M$.

¹ Nótese que los parámetros del algoritmo CCL puede inicializarse a partir de cualquier solución factible del problema (6.8) eliminando las restricciones no convexas (6.9). Sin embargo, para $d_M = d_m$, el Corolario 6.4.2 asegura la existencia de una solución factible, de modo que se sugiere como mejor inicialización.

- Paso 3: Si existe una solución factible aplicando el Corolario 6.4.1 sobre la variable K obtenida en el paso anterior, establecer los nuevos valores para los contadores $q = q + 1, n_t = 1$ y volver al paso 2 tras incrementar el valor de d_M por una pequeña cantidad. En caso contrario, si este valor de K no permite obtener una solución factible, si el contador n_t es mayor que un cierto número máximo de iteraciones, entonces salir del proceso iterativo. Si tal contador no excede este umbral, entonces establecer los nuevos valores para los contadores $q = q + 1, n_t = n_t + 1$ y volver al paso 2 (sin incrementar d_M).

Con el objetivo de comparar el algoritmo CCL propuesto con el diseño del controlador estático, se presenta el siguiente corolario:

Corolario 6.4.4 *Para diseñar el valor de K del controlador estático, el Teorema 1 de análisis de estabilidad propuesto en [47] puede utilizarse para diseñar K mediante CCL aplicando el complemento de Schur y las manipulaciones algebraicas oportunas. La inicialización puede establecerse a partir de cualquier solución factible de (6.8).*

6.5. Ejemplo numérico

Considérese el siguiente ejemplo académico: un sistema de segundo orden inestable en bucle abierto, correspondiente al péndulo invertido, propuesto en [34, Ejemplo 3], tomando un periodo de muestreo de $T = 10ms$:

$$x_{k+1} = \begin{pmatrix} 1,0009 & 0,0100 \\ 0,1730 & 1,0009 \end{pmatrix} x_k + 10^{-3} \begin{pmatrix} -0,0018 \\ -1,7652 \end{pmatrix} u_{k-d_k}$$

donde se asume que el estado del proceso $x_k = [x_{1_k}, x_{2_k}]^T$ es accesible en su totalidad y que el retardo varía aleatoriamente de modo que satisface $d_m \leq d_k \leq d_M$.

En el Cuadro 6.1 se muestra el valor máximo de la cota superior del retardo d_M para un cierto d_m , que permite encontrar una solución factible aplicando el algoritmo CCL sobre ambos esquemas de control. La mejora introducida por el algoritmo propuesto en la sección 6.4.1 se refleja con claridad sobre este ejemplo. Concretamente, fijando un valor de retardo mínimo $d_m = 60$, hasta donde el autor conozca, no es posible estabilizar el sistema. En cambio, con el esquema de control basado en predictor, es posible encontrar un valor de K que estabilice el sistema hasta un valor máximo de retardo $d_M = 61$ (concretamente, para $K = (98,5106 \ 22,2021)$ y $h = 60$).

Los resultados anteriores se han obtenido fijando un número máximo de iteraciones CCL de $n_t < 30$.

Cuadro 6.1. Cálculo de d_M para cierto d_m . SSF: Realimentación estática del estado, PBC: Controlador basado en predictor ($h = d_m$)

	d_m	10	20	30	40	50	60
SSF	d_M	23	23	-	-	-	-
PBC	d_M	25	31	36	44	52	61

6.6. Conclusiones

En este capítulo se ha propuesto un método de diseño basado en LMIs de la ganancia del controlador basado en predictor para sistemas discretos con retardos variables en la entrada. Dicho método surge como ampliación de las técnicas de diseño de controladores estáticos para este tipo de sistemas, de modo que éstos pueden verse como un caso particular del controlador basado en predictor tomando el parámetro $h = 0$, de modo que la técnica de diseño propuesta nunca será más conservadora que el diseño del control estático. Para resolver el problema de diseño de la ganancia del controlador sin necesidad de incrementar el conservadurismo transformando el problema de diseño en LMI (a partir de la eliminación selectiva de algunas variables de decisión, por ejemplo), se ha utilizado el algoritmo CCL. Finalmente, se ha ilustrado mediante un ejemplo numérico que el método de diseño sobre controladores basados en predictor propuestos puede mejorar el rango de variación de retardo $d_M - d_m$ respecto el controlador estático.

7 Aplicación experimental: control de posición angular de un helicóptero quad-rotor

7.1. Resumen/Motivación

Este capítulo contiene los resultados experimentales y los resultados obtenidos por simulación sobre el modelo del proceso de la plataforma experimental. Se han desglosado en un capítulo independiente del contenido del artículo publicado en Control Engineering Practice (año 2011).

La dinámica del control de la posición y la velocidad de un helicóptero se caracteriza por la sensibilidad a perturbaciones y por su comportamiento no lineal. Estas características incrementan el grado de exigencia en el diseño del sistema de control dado que pequeñas variaciones en el periodo de muestreo o incertidumbres en el modelo pueden tener un impacto considerable en la respuesta, pudiendo incluso inestabilizarlo. Este hecho se agrava en presencia de retardos, y más si éstos son variables. Tales características justifican la elección de esta plataforma para el desarrollo experimental y validación de los esquemas de control propuestos. Asimismo, el análisis de las variaciones en el comportamiento del proceso implementado dentro de una plataforma de tiempo real pondrán de relieve la robustez del sistema en bucle cerrado.

Por tanto, en este capítulo se muestran resultados experimentales cuyo objetivo es validar las conclusiones extraídas en el marco teórico y por ende probar la robustez frente a incertidumbres variables en el retardo de medida conjuntamente con otras fuentes de incertidumbre inherentes a posibles errores en el modelado y fluctuaciones en el periodo de muestreo. Previamente se describe la plataforma de control utilizada así como el modelo dinámico del proceso.

7.2. Descripción de la Plataforma

La plataforma está compuesta de una unidad de control, desarrollada sobre el sistema operativo de tiempo real RT-Linux, y un prototipo de cuatro rotores con tres grados de libertad angulares (yaw, pitch y roll), equipado con una unidad de medida integrada inalámbrica (Integrated Measurement Unit (IMU)). Dicha unidad permite realizar medidas de la posición y la velocidad angular en los tres ángulos (ver Figura 7.1).

Asumiendo que los ángulos pitch y yaw son cero, el par en el eje roll puede ser controlado por dos motores, de modo que el proceso se puede describir mediante el siguiente modelo lineal [17]:

$$\ddot{\phi} = K_{\phi}(V_r - V_l)$$

donde V_r, V_l representan la tensión eléctrica aplicada sobre los motores izquierdo y derecho, respectivamente, y $K_{\phi} = 0,1050$ es una constante que equivale al momento de inercia del chasis, y $\ddot{\phi}$ denota la aceleración angular en roll.

Defínase el siguiente vector de estado del sistema $x = [\phi \ \dot{\phi}]^T$. Por tanto, la dinámica del ángulo en roll puede describirse mediante la siguiente ecuación:

$$\dot{x}(t) = A_c x(t) + B_c u(t)$$

donde las matrices del proceso son:

$$A_c = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad B_c = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ K_{\phi} & -K_{\phi} \end{pmatrix}$$

y la acción de control es:

$$u(t) = \begin{pmatrix} V_r \\ V_l \end{pmatrix}$$

Nótese que este modelo ya ha sido utilizado en el Ejemplo 7.3.1. El periodo de muestreo en todos los experimentos se establece en $T = 10$ ms.

La ley de control utilizada en los experimentos es la misma que se propone en el Ejemplo 7.3.1. Por tanto¹, la ley de control es:

$$u_k = \begin{pmatrix} -109,9907 & -50,0020 \\ 109,9907 & 50,0020 \end{pmatrix} x_k \quad (7.1)$$

Para los siguientes experimentos, se utilizara un tren de pulsos cuadrados como señal de referencia de la posición angular en roll, con 5° de magnitud

7.3. Resultados de simulación

7.3.1. Análisis de la robustez frente a incertidumbre en el retardo

Consideremos el siguiente modelo de planta inestable, correspondiente a un doble integrador. Este modelo de planta se corresponde con una versión

¹ Nótese que el objetivo de este capítulo no es validar las prestaciones de la ley de control, la cual se asume que ya ha sido diseñada previamente, sino verificar que en presencia de retardos variables y aleatorios, en una plataforma de tiempo real, la implementación del controlador basado en predictor mejora tales prestaciones respecto el caso del controlador estático sobre un proceso inestable



Figura 7.1. Sistema de cuatro rotores con la unidad de medida inalámbrica integrada (IMU).

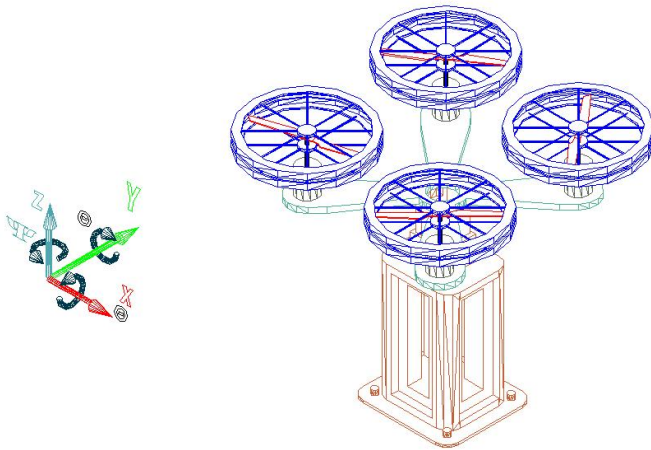


Figura 7.2. Representación esquemática del helicóptero.

simplificada del modelo de la plataforma utilizada en los experimentos descritos en este capítulo.

$$\dot{x}(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} x(t) + \begin{pmatrix} 0 \\ 0,1050 \end{pmatrix} u(t)$$

Donde el periodo de muestreo se establece en $T = 10ms$. La siguiente ley de control estática $u_k = -[109,9907 \ 50,0020]x_k$ estabiliza la planta, asignando los polos del sistema libre de retardos en $\{0,9735 \pm 0,0212i\}$.

En el Cuadro 7.1 se comparan resultados obtenidos con la ley de control estática según Teorema 1 de [47], Teorema 1 y 3 en [34], Teorema 1 en [85]², y con la ley de control basada en predictor, a partir del Teorema propuesto 5.4.2

Cuadro 7.1. Obtención del máximo valor de d_M para d_m

ley de control		d_m			
		5	10	20	30
SSF	Th.1 [47]	19	19	no factible	no factible
SSF	Th.1 [34]	19	19	no factible	no factible
SSF	Th.3 [34]	19	19	no factible	no factible
SSF	Th.1 [85]	19	19	20	no factible
predictor	Th.5.4.2 ($h = d_m$)	21	25	32	41
predictor	Th.5.4.2 ($h = (d_m + d_M)/2$)	16	19	29	37
predictor	Th.5.4.2 ($h = d_M$)	12	16	25	35

A la vista de los resultados presentados en el Cuadro 7.1, se puede observar la mejora en la robustez frente al intervalo de variación del retardo en la medida gracias al predictor. En particular, cuando el retardo mínimo es $d_m = 30$, para la ley de control propuesta, no es posible probar la estabilidad ni tan siquiera para retardo constante ($d_M = d_m$). En cambio, con el predictor con $h = 30$ es posible probar la estabilidad hasta el valor de retardo máximo $d_M = 41$.

El Teorema 5.4.2 provee de unos márgenes de retardo que son conservadores con respecto al margen de retardo dentro del cual la estabilidad del sistema en bucle cerrado con el controlador basado en predictor está garantizada. En la siguiente simulación (ver Figura 7.3), fijando $d_m = 30$ y $h = d_m$ (el valor de h que permite obtener un máximo valor de retardo d_M garantizando la estabilidad, para este caso), se establece por ejemplo un valor de retardo máximo $d_M = 60$. Se puede esperar que en este caso el sistema sigue siendo estable tras la realización de múltiples simulaciones utilizando diferentes patrones de retardo aleatorio. Nótese, sin embargo, que con la aplicación del Teorema 5.4.2 la estabilidad solamente se prueba hasta $d_M = 41$

² Donde se ha utilizado la partición menos conservadora.

(ver Cuadro 7.1). Fijando $d_M = 66$, tras un menor número de simulaciones que en el caso anterior ($d_M = 60$), se ha encontrado un patrón de retardo variable (ver Figura 7.5) en el que el sistema se hace inestable (ver Figura 7.4).

7.3.2. Análisis de la robustez frente a incertidumbre en el modelo

Consideremos el proceso del ejemplo anterior con incertidumbres normadas, tal y como se describe en el parámetro Δ de la Ecuación (5.20), tomando los siguientes valores para las matrices: $G = 10^{-4} (1 \ 1)^T$, $H_A = (1 \ 1)$, $H_B = 1$, $H_{B1} = 0$.

La idea consiste en fijar el intervalo de variación de retardo $\delta = d_M - d_m$, y para este valor δ encontrar la cota máxima de γ debajo del cual se garantice que el sistema en bucle cerrado permanece estable. En el Cuadro 7.2 se muestra el valor máximo de γ obtenido a partir del Teorema 5.4.3 para ciertos valores de retardo tomando $h = d_m$.

Nótese, sin embargo, que tomando otro valor de h , por ejemplo, $h = d_M$, se obtiene un valor máximo de γ superior al caso anterior. Comparando los resultados del cuadro anterior con el Cuadro 7.3 se puede confirmar esta mejora, que también se prueba por simulación. En cualquier caso, la búsqueda del valor óptimo en h queda fuera de la presente tesis y se propone como posible línea de investigación futura.

A continuación se muestran algunos resultados obtenidos por simulación. Se asume una condición inicial en el estado del proceso $x_k = [1 \ 1]^T$ para

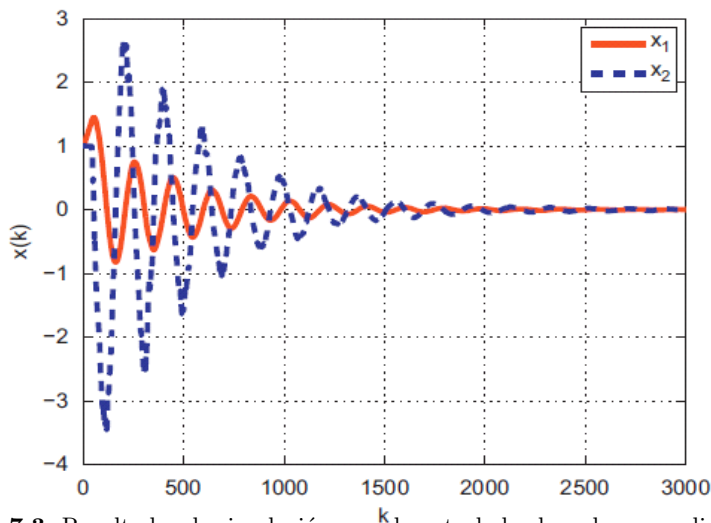


Figura 7.3. Resultados de simulación con el controlador basado en predictor para $d_m = 30$, $h = d_m$ y $d_M = 60$.

$k \leq 0$. El retardo d_k varía aleatoriamente entre $d_m = 18$ y $d_M = 23$ tal y como se representa en la Figura 7.7. Por otro lado, las incertidumbres variables del modelo verifican la Ecuación (5.20) (parámetro Δ) de las incertidumbres normadas con los valores de G, H_A, H_B y H_{B1} definidos anteriormente, y

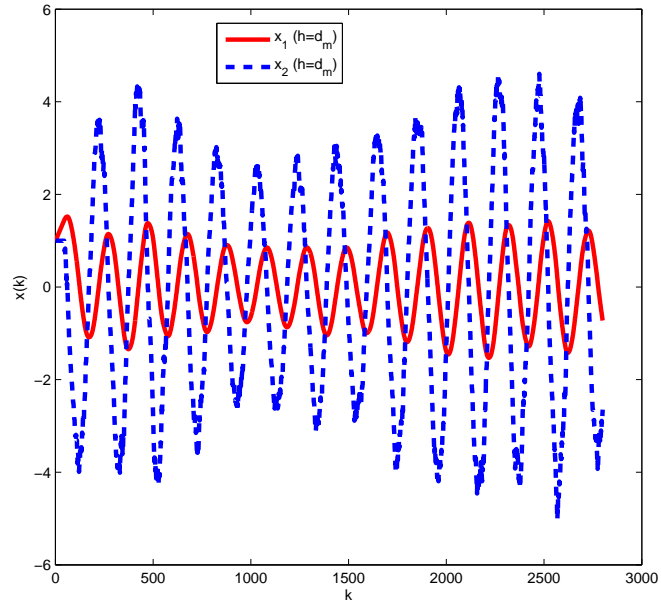


Figura 7.4. Resultados de simulación con el controlador basado en predictor para $d_m = 30$, $d_M = 66$ con $h = d_m$.

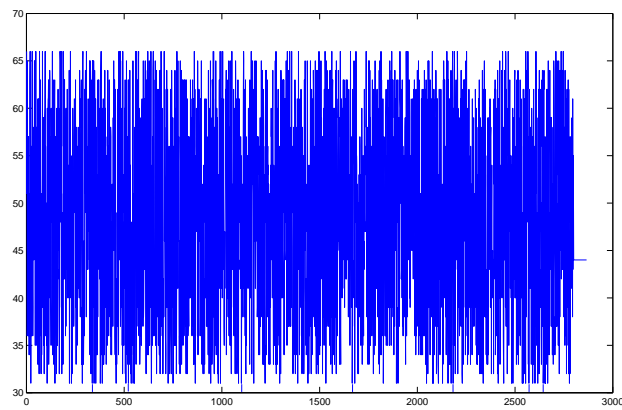


Figura 7.5. Evolución del retardo utilizado en la simulación de la Figura 7.4.

Cuadro 7.2. Cota máxima de tolerancia a incertidumbres de modelado $\bar{\gamma}$ para ciertos valores de retardo ($h = d_m$)

d_m	3	6	9	12	15	18
$\bar{\gamma}(\delta = 2)$	1.0440	1.0148	0.9867	0.9591	0.9291	0.8882
$\bar{\gamma}(\delta = 3)$	1.0080	0.9751	0.9409	0.9062	0.8473	0.8296
$\bar{\gamma}(\delta = 4)$	0.9712	0.9308	0.8904	0.8446	0.7802	0.7336
$\bar{\gamma}(\delta = 5)$	0.9290	0.8797	0.8297	0.7729	0.7031	0.6428

Cuadro 7.3. Cota máxima de tolerancia a incertidumbres de modelado $\bar{\gamma}$ para ciertos valores de retardo ($h = d_M$)

d_m	3	6	9	12	15	18
$\bar{\gamma}(\delta = 2)$	1.0905	1.0702	1.0493	1.0302	1.0046	0.9837
$\bar{\gamma}(\delta = 3)$	1.0826	1.0616	1.0385	1.0036	0.9632	0.9436
$\bar{\gamma}(\delta = 4)$	1.0743	1.0505	1.0065	0.9807	0.9406	0.9267
$\bar{\gamma}(\delta = 5)$	1.0615	1.0321	1.0009	0.9655	0.8774	0.8359

se fija el valor de $\gamma = 0,8359$. La matriz de variación Δ_k oscila en modo aleatorio entre -1 y 1. Por otro lado, el predictor se configura con un valor de $h = d_M = 23$. De este modo, la respuesta del sistema se muestra en la Figura 7.6. Se puede apreciar claramente que el sistema es asintóticamente estable.

7.4. Resultados Experimentales

Primer experimento: Caso nominal:

El primer experimento se lleva a cabo aplicando el controlador por realimentación estática del estado propuesto en (7.1) sin retardos adicionales³. En la Figura 7.8 ilustra el comportamiento dinámico del sistema ante una señal cuadrada de referencia, que será utilizada en los demás experimentos.

Segundo experimento: controlador estático con retardos:

El segundo experimento se lleva a cabo añadiendo retardos variables y aleatorios adicionales en el canal de medida. El esquema de control es el mismo que en el experimento anterior, de modo que se realimenta el estado medido retardado x_{k-d_k} , donde el retardo discreto (número entero de periodos de muestreo T) es $d_k = d_m + \delta_k$ y a su vez d_m es el retardo mínimo, y δ_k es un valor variable y aleatorio:

³ En los siguientes experimentos, se introduce deliberadamente un retardo variable adicional en el canal de medida para ilustrar los resultados deseados, no obstante, la propia plataforma y la IMU ya introducen de por sí un cierto retardo

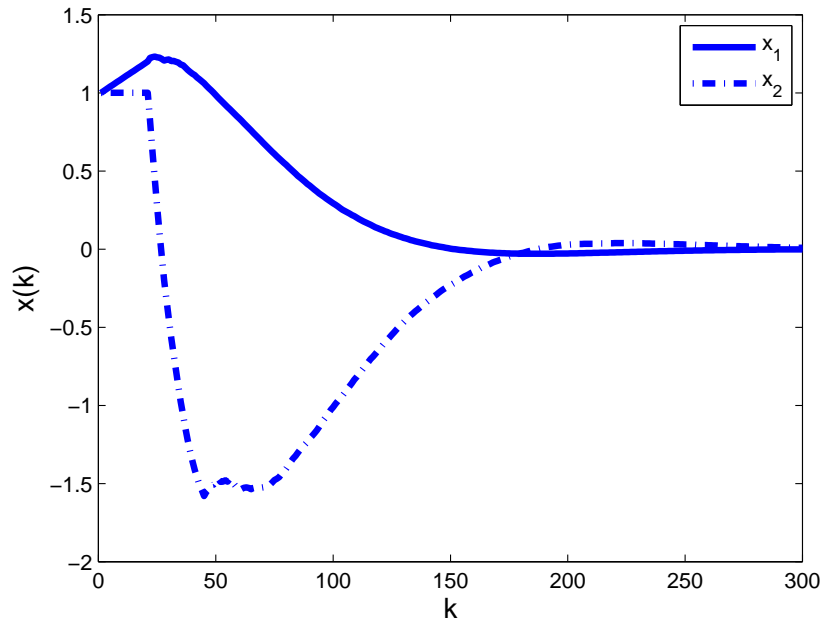


Figura 7.6. Respuesta del sistema con predictor ($h = d_M$), retardo de medida variable $18 \leq d_k \leq 23$ y $\gamma = 0,8359$.

Este experimento se ha llevado a cabo con un retardo variable y aleatorio con un intervalo de variación de 2 periodos de muestreo ($d_M - d_m = 2$). La respuesta del sistema ante la presencia de este retardo en la medida se muestra en la Figura 7.9. Para $t < 8$ s, donde el retardo es nulo ($d_k = 0$), la respuesta coincide con la Figura 7.8. Posteriormente, se incrementa el retardo de $3 \leq d_k \leq 5$ en el instante $t = 8$, observándose que el sistema permanece estable. Finalmente, se incrementa de nuevo el retardo a $5 \leq d_k \leq 7$ en el instante $t \geq 18$ s. Nótese que este último valor de retardo inestabiliza el sistema.

La mejora introducida por el uso del esquema de control basado en predictor, así como la robustez, en presencia de retardos elevados, se ilustra en el siguiente experimento.

Tercer experimento: controlador basado en predictor con retardos:

En el tercer experimento, se sustituye el controlador estático del experimento anterior por el esquema de control basado en predictor, manteniendo las mismas ganancias del controlador (Ecuación (7.1)). En este experimento se establece el parámetro del predictor $h = 8$.

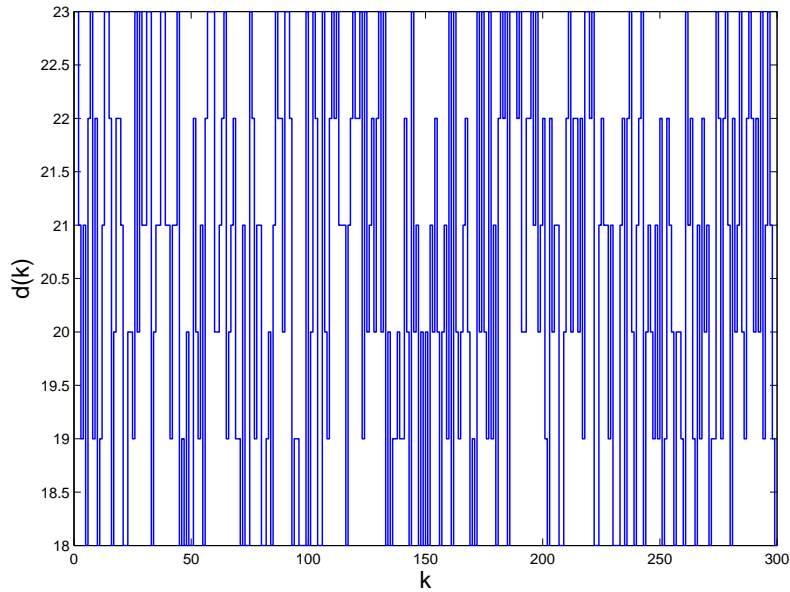


Figura 7.7. Evolución del retardo utilizado en la simulación de la Figura 7.6

De forma análoga al experimento anterior, se introduce un retardo variable en el canal de medida, cuyo valor inicial propuesto ($d_k \in \{5, 7\}$) coincide con el valor de retardo que inestabiliza el sistema con el controlador estático. La respuesta del sistema se muestra en la Figura 7.10.

Para probar la robustez del sistema con el controlador basado en predictor, se incrementa el retardo adicional del siguiente modo (Figura 7.11) En el instante $t = 25$ s, el valor mínimo de retardo se establece en ($d_k \in \{7, 9\}$). Se puede ver que con este nuevo retardo el comportamiento del sistema sigue siendo estable, y con una dinámica similar a la respuesta del sistema en el caso nominal (Experimento 1). Sin embargo, cuando el retardo se incrementa a ($d_k \in \{9, 11\}$), en el instante $t = 43$ s, se puede apreciar cómo el transitorio de la respuesta se degrada ligeramente (ver último escalon en la Figura 7.10).

Este último resultado pone de relieve las buenas prestaciones que ofrece el control basado en predictor, incluso en presencia de retardos variables y aleatorios e incertidumbres de modelado.

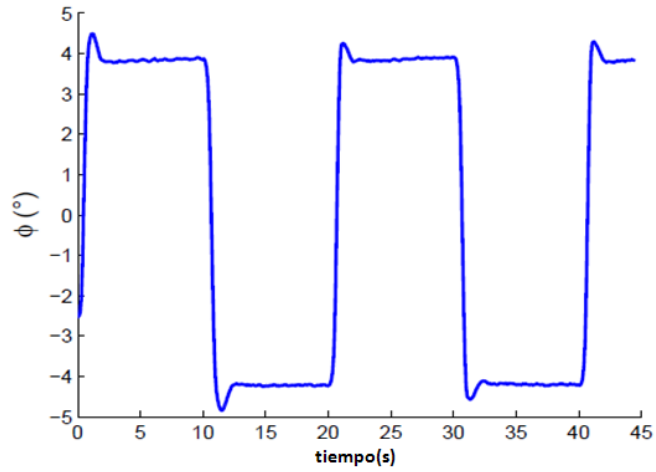


Figura 7.8. Respuesta del sistema en bucle cerrado sin retardos adicionales (caso nominal) con una señal onda cuadrada de referencia de posición angular en roll.

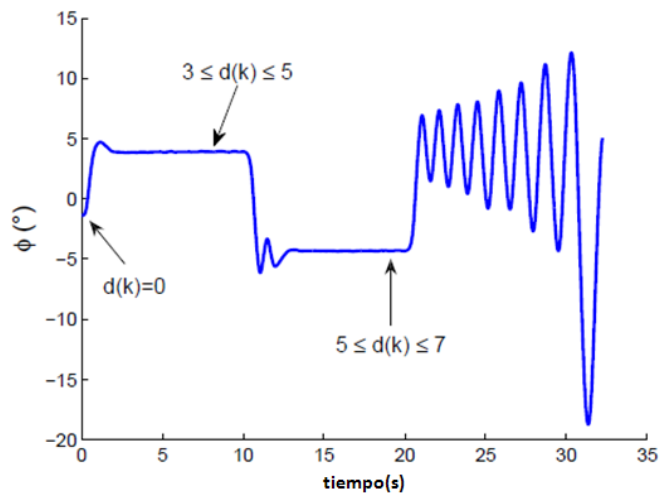


Figura 7.9. Respuesta del sistema en bucle cerrado con retardos adicionales y con ley de control estática

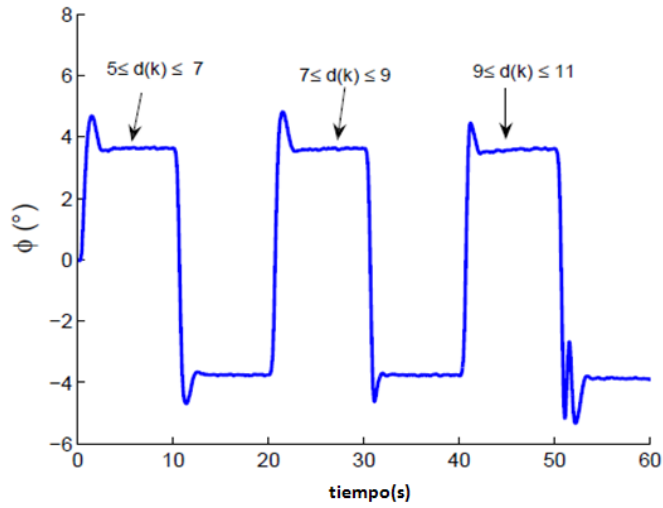


Figura 7.10. Respuesta del sistema en bucle cerrado con retardos adicionales y con ley de control basada en predictor

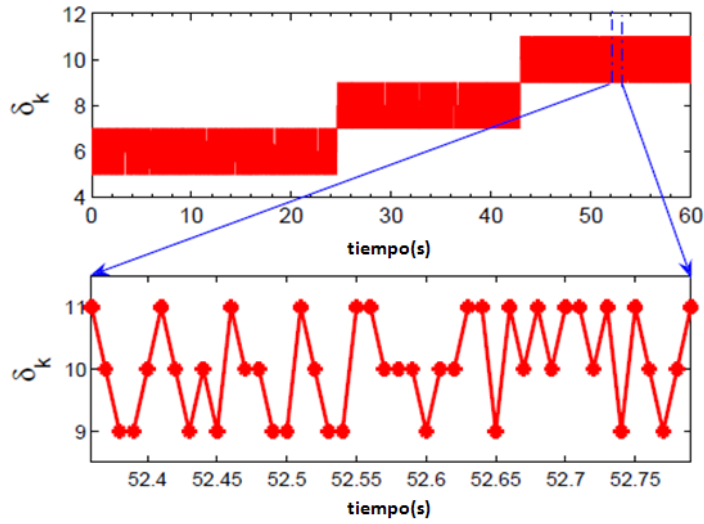


Figura 7.11. Retardos adicionales variables y aleatorios inducidos en el canal de medida del sistema para la realización del experimento 3 (control basado en predictor)

Parte III

Apéndices

8 Desigualdades Matriciales: Revisión

8.1. Definición LMI

Las desigualdades matriciales lineales (LMI) se pueden definir como restricciones numéricas definidas sobre un supespacio \mathbb{R}^n cuya expresión general es:

$$\begin{aligned} F_{00} + \sum_{i=1}^p x_i F_{i0} &< 0 \\ F_{01} + \sum_{i=1}^p x_i F_{i1} &< 0 \\ &\dots \\ F_{0N} + \sum_{i=1}^p x_i F_{iN} &< 0 \end{aligned} \tag{8.1}$$

donde F_{ij} son ciertas matrices de valor previamente establecido y x_i son las variables de decisión, que pueden ser escalares o matriciales. El tipo de desigualdad puede definirse también en sentido estricto o con signo opuesto (\leq , $>$, \geq). Una de las características más destacables de las LMI es la convexidad del conjunto formado por las soluciones factibles, lo cual se enuncia del siguiente modo:

Si x_1, x_2 satisfacen (8.1), entonces $\forall 0 \leq \lambda \leq 1, \lambda \in \mathbb{R}^+$ tal que $x = \lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2$ también satisface (8.1)

Las LMI's no se pueden resolver analíticamente. En cambio, gracias a la propiedad de convexidad es posible resolver LMI mediante algoritmos computacionalmente eficientes o de coste polinomial. Existe software comercial que implementan tales algoritmos. Por ejemplo, MATLAB implementa una librería exclusiva para resolver problemas derivados de LMI (factibilidad y optimización), así como otros métodos para resolución GEVP, etc. Otro conocido software es el YALMIP, el cual posee un interfaz mucho más intuitivo y amigable, aunque su versatilidad es más reducida

Nótese que en la expresión general de las LMI nunca aparecen las variables de decisión multiplicadas entre sí. Si existen productos de variables de decisión, el problema es conocido como NMI (*Nonlinear Matrix Inequality*),

perdiendo la propiedad de convexidad. Por tanto, su resolución es mucho más compleja y a menudo no eficiente.

8.2. Problemas LMI

Básicamente cabe destacar los siguientes tipos de problemas LMI:

8.2.1. Problema de Factibilidad

En ocasiones, es suficiente con saber que la LMI planteada tiene al menos una solución que las satisfaga. Este problema recibe el nombre de factibilidad, y es ampliamente utilizado en análisis de estabilidad. También surge este planteamiento ante un problema de diseño de un controlador del cual sólo se pretende que estabilice el sistema o que verifique algún criterio de desempeño previamente establecido (un cierto decaimiento geométrico o una cierto nivel de rechazo a perturbaciones H_2/H_∞).

8.2.2. Problema de Optimización

A diferencia del problema de factibilidad, no sólo se pretende encontrar una solución a las LMI, sino que además dicha solución optimice una cierta función objetivo dentro del conjunto de soluciones factibles. Obviamente, el problema de optimización es implícitamente siempre un problema de factibilidad. El planteamiento es como sigue:

$$\begin{array}{ll} \min c(x_1, x_2, \dots, x_p) & s.t \\ & \text{ecuaciones(8.1)} \end{array}$$

donde $c(x_1, x_2, \dots, x_p)$ es una función afín respecto a las variables de decisión x_i , denominada 'función objetivo'.

Este problema surge ante la necesidad del análisis de un cierto criterio de desempeño (por ejemplo, evaluar la robustez de cierto controlador), o en control óptimo (por ejemplo, diseñar la ganancia de un cierto controlador que minimice el rechazo a perturbaciones).

Problema Generalizado de Valor Propio (GEVP) La expresión general de un problema GEVP es la siguiente:

$$\begin{array}{ll} \min \lambda & s.t \\ \lambda B(x) & > A(x) \\ B(x) & > 0 \\ C(x) & > 0 \end{array}$$

donde $A(x), B(x), C(x)$ son matrices simétricas parametrizadas de forma afín en las variables de decisión x .

Definiendo, para ciertas matrices $X, Y > 0$, la función $\lambda_{max}(X, Y)$ como el máximo valor propio generalizado del lápiz $\lambda Y - X$, el problema GEVP genérico puede reformularse como:

$$\begin{aligned} \min \lambda_{max}(A(x), B(x)) & \quad s.t \\ B(x) > 0, C(x) > 0 \end{aligned}$$

El problema generalizado de valor propio no es estrictamente un problema LMI, ya que aparece producto de variables de decisión, y por tanto, no goza de la propiedad de convexidad. En cambio, GEVP posee una propiedad denominada *cuasiconvexidad*, cuyo enunciado es como sigue:

Si x_1, x_2 son soluciones factibles, para un cierto escalar $0 \leq \theta \leq 1$ se cumple:

$$\begin{aligned} \lambda_{max}(A(\theta x_1 + (1 - \theta)x_2), B(\theta x_1 + (1 - \theta)x_2)) \leq \\ \max(\lambda_{max}(A(x_1), B(x_1)), \lambda_{max}(A(x_2), B(x_2))) \end{aligned}$$

Un ejemplo de GEVP es el cálculo del mínimo valor del coeficiente de decaimiento geométrico α dentro de la LMI de estabilidad para sistemas lineales discretos, enunciado como sigue:

$$\begin{aligned} \min(\alpha) & \quad s.t \\ P > 0, \alpha > 0 \\ \begin{pmatrix} -\alpha P & A^T P \\ (*) & -P \end{pmatrix} < 0 \end{aligned}$$

Gracias a esta propiedad, el problema GEVP puede resolverse por bisección a partir de un cierto número de LMI's.

8.3. Propiedades de las Desigualdades Matriciales Lineales

En esta sección se presentan algunas de las propiedades más destacadas de las desigualdades matriciales de gran utilidad en la transformación de restricciones no convexas a LMI's:

8.3.1. Complemento de Schur

Las siguientes afirmaciones son equivalentes:

- (i) Existe ciertas matrices $P, R > 0$ tal que $Q^T R^{-1} Q - P < 0$.
- (ii) Existe ciertas matrices $P, R > 0$ tal que $\begin{pmatrix} -P & Q^T \\ Q & -R \end{pmatrix} > 0$.

Este procedimiento, por tanto, permite transformar un problema de resolución de matriciales no lineal de la forma (i) en LMI.

8.3.2. S-Procedure

Las siguientes afirmaciones son equivalentes:

- (i) Existe ciertas matrices $P, Q > 0$ tal que $\forall z \neq 0$ la verificación de $z^T P z > 0$ implica $z^T Q z > 0$.
- (ii) Existe un cierto escalar $\epsilon \geq 0$ tal que $P - \epsilon Q > 0$.

8.3.3. Bounded-real lemma

Derivado del S-Procedure, se plantea el clásico ejemplo de análisis de estabilidad de un sistema con restricción adicional de garantizar una cota máxima de rechazo a perturbaciones γ definida a partir de la ganancia RMS de la función de transferencia salida-perturbaciones. Dado el sistema lineal:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= Ax + Hw \\ y &= Cx\end{aligned}$$

donde x, w son el estado y las perturbaciones, respectivamente, se desea probar la estabilidad y además que $y^T y \leq \gamma^2 x^T x$. Por tanto si $z = [xw]^T$, si existe $P > 0$ tal que satisfaga:

$$\begin{pmatrix} A^T P + PA + C^T C & PH \\ (*) & -\gamma^2 I \end{pmatrix} < 0$$

entonces la forma cuadrática $V(z) = z^T P z$, además de probar la estabilidad del sistema garantiza que la ganancia RMS es menor que γ .

8.3.4. Cross-Product Lemma

Dadas ciertas matrices X, Y , de dimensiones apropiadas, y cierta matriz simétrica Z , se verifica, para toda matriz no estructurada Δ que verifique $\Delta^T \Delta \leq I$, la siguiente desigualdad:

Lema 8.3.1

$$Z + X \Delta Y + Y^T \Delta^T X^T < 0$$

si y solo si existe un escalar $\epsilon > 0$ tal que:

$$Z + \epsilon X X^T + \epsilon^{-1} Y^T Y < 0$$

8.3.5. Eliminación de variables de decisión LMI

Lema 8.3.1. [10] Dada la matriz Φ simétrica y matrices P, Q, X , si se verifica la LMI:

$$\Phi + P^T X^T Q + Q^T X P < 0$$

entonces se verifica también:

$$\begin{aligned} N_P^T \Phi N_P &< 0 \\ N_Q^T \Phi N_Q &< 0 \end{aligned}$$

siendo N_P y N_Q bases cualesquiera de los subespacios P y Q , respectivamente. En el sentido recíproco también se cumple, de modo que ambas condiciones son equivalentes.

A la luz del resultado anterior, la variable de decisión X puede ser eliminada de la LMI ya que no influye en el conjunto posible de soluciones factibles del mismo.

9 Desigualdades Matriciales no lineales: Revisión

Un caso particular de las desigualdades matriciales no lineales (NMI) son las desigualdades matriciales bilineales (BMI), que se corresponden con desigualdades matriciales de segundo grado, y cuya expresión genérica es:

$$F_{00} + \sum_{i=1}^{p_x} x_i F_{i0} + \sum_{i=1}^{p_y} y_i G_{i0} + \sum_{i=1}^{p_x} \sum_{j=1}^{p_y} x_i y_j H_{i0} < 0 \quad (9.1)$$

9.0.6. Algoritmos CCL

Por otro lado, dentro de los métodos ILMI cabe destacar el algoritmo CCL *Cone Complementary Linearization* [26]. Este algoritmo es aplicable sobre cualquier problema BMI que se pueda formular mediante la aplicación de pasos no conservadores como un conjunto de desigualdades matriciales lineales y de restricciones del tipo $X_i X_j = I$, donde X_i, X_j son ciertas variables de decisión matriciales y la matriz I es la identidad. Afortunadamente, gran parte de los problemas de diseño de controladores se puede formular de este modo.

Para poder aplicar el algoritmo CCL las restricciones $X_i X_j = I$ se expresan como desigualdades matriciales del tipo:

$$\begin{pmatrix} X_i & I \\ I & X_j \end{pmatrix} \leq 0$$

y se plantea el problema de optimización $\min(\sum_{p=1}^N \text{tr}(X_i X_j))$ sujeto a las LMIs originales más las LMIs anteriores. El parámetro N corresponde con el número de restricciones $X_i X_j = I$.

Se puede observar que el nuevo problema formulado sigue siendo no convexo, dado que la función a optimizar no es lineal. Por tanto, requiere, al igual que cualquier problema LMI, establecer un valor inicial para alguna de las variables de decisión. El algoritmo CCL se puede resumir en los siguientes pasos:

- *Paso 1:* Inicializar $X_i = X_{i_0}, \forall i \in 1 \cdots N$, donde X_{i_0} es un cierto valor arbitrario, y verificar que existe una solución factible X_{j_1}, \dots .

- *Paso 2:* Con la solución obtenida en el paso anterior, fijar la otra variable $X_j = X_{j_i} \forall i \in 1 \cdots N$ y resolver el problema de optimización. Nótese que al fijar una de las variables de decisión la función a optimizar es lineal.
- *Paso 3:* Repetir el paso anterior alternando la variable de decisión a fijar. En cada iteración comprobar si el conjunto de soluciones satisface las desigualdades matriciales del problema BMI original, tomando o bien $X_i = X_j^{-1}$ o $X_j = X_i^{-1}$. En caso afirmativo, se obtiene la solución al problema BMI planteado y se finaliza el proceso iterativo. En caso negativo, seguir iterando. Si se excede un cierto número de iteraciones prefijadas de antemano, interrumpir el proceso iterativo sin la solución buscada.

10 Modelo de sistemas inciertos

En general, las incertidumbres definidas sobre sistemas, expresados en variables de estado, se pueden representar del siguiente modo:

10.1. Incertidumbres normadas

Se asume que las incertidumbres del sistema están siempre acotadas dentro de un elipsoide definido por $\Delta_A(t), \Delta_B(t)$. Por ejemplo, el sistema:

$$\dot{x}(t) = (A + \Delta_A(t))x(t) + (B + \Delta_B(t))u(t) \quad (10.1)$$

donde las matrices $\Delta_A(t), \Delta_B(t)$ satisfacen:

$$\begin{pmatrix} \Delta_A(t) & \Delta_B(t) \end{pmatrix} = G\Delta(t) \begin{pmatrix} H_A & H_B \end{pmatrix} \quad (10.2)$$

donde G, H_A, H_B son ciertas matrices constantes de dimensiones apropiadas, de cuyos valores depende la forma del elipsoide, y $\Delta(t)$ es una matriz variable de valores arbitrarios que satisface $\Delta^T(t)\Delta(t) \leq 1$. Cuando $\Delta(t)$ es completamente arbitraria, se dice que las incertidumbres son no estructuradas. En caso contrario, las incertidumbres se denominan estructuradas.

10.2. Incertidumbres politópicas

En este modelo las incertidumbres están acotadas dentro de un politopo convexo formado por N vértices. Por ejemplo, el sistema:

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t) \quad (10.3)$$

donde las matrices del sistema pertenecen a la envolvente convexa definida por los vértices $[A_i, B_i], 1 \leq i \leq N$:

$$[A(t)B(t)] \in Co([A_1, B_1], \dots, [A_N, B_N]) \quad (10.4)$$

Por tanto, el modelo del sistema incierto resultante es:

$$\dot{x}(t) = \sum_{i=1}^N \lambda_i [A_i x(t) + B_i u(t)] \quad (10.5)$$

$$\sum_{i=1}^N \lambda_i = 1$$

10.3. Incertidumbres mixtas (normadas y politópicas)

Los modelos de incertidumbres anteriores pueden definirse conjuntamente, dando lugar a un modelo de incertidumbres mixto:

$$\dot{x}(t) = \sum_{i=1}^N \lambda_i [(A_i + \Delta_{A_i})x(t) + (B_i + \Delta_{B_i})u(t)] \quad (10.6)$$

$$\sum_{i=1}^N \lambda_i = 1$$

donde

$$(\Delta_{A_i}(t) \ \Delta_{B_i}(t)) = G_i \Delta_i(t) (H_{A_i} \ H_{B_i}) \quad (10.7)$$

Parte IV

Publicaciones

Publicaciones

Publicaciones en Revistas

- Gonzalez, A., Sala, A., Garcia, P., Albertos, P., 2011. Robustness analysis of discrete predictor-based controllers for input-delay systems. *International Journal of Systems Science* (DOI:10.1080/00207721.2011.600469).
- Gonzalez, A., Garcia, P., Albertos, P., 2011. Robustness of a discrete-time predictor-based controller for time-varying measurement delay . *Control Engineering Practice* (DOI:10.1016/j.conengprac.2011.09.001).
- Gonzalez, A., Sala, A. Albertos, P., 2011. Predictor-based stabilization of discrete time-varying input-delay systems. *Automatica* (DOI:10.1016/j.automatica.2011.10.005).

Publicaciones en Congreso

- Garcia, P., Gonzalez, A., Castillo, P., Lozano, R., Albertos, P. Robustness of a discrete-time predictor-based controller for time-varying measurement delay. *International Federation of Automatic Control, Praga 2010* (<http://tds2010.fs.cvut.cz>).
- A. Gonzalez, A. Sala, P. Albertos. Time invariant control of MIMO systems under random transient failures. *15th IEEE Mediterranean Electrotechnical Conference, Malta 2010* (http://ieeexplore.ieee.org/xpl/freeabs_all.jsp?arnumber=5475934).
- A. Gonzalez, A. Cuenca, V. Casanova, J. Salt Técnicas de modelado y compensación en un sistema de control basado en red *Convención Internacional de Ingeniería Eléctrica FIE 2008, 5º edición, Santiago de Cuba, 2008* (http://fie2008.uo.edu.cu/programas /Programa_CA_Final1-2.pdf)
- A. Gonzalez, V. Casanova, A. Cuenca, J. Salt Análisis y modelado de la influencia de la respuesta de un sistema de control en red basada en Profibus-DP *Convención Internacional de Ingeniería Eléctrica FIE 2008, 5º edición, Santiago de Cuba, 2008* (http://fie2008.uo.edu.cu/programas /Programa_CA_Final1-2.pdf)

Referencias

1. K. Aida, W. Natsume, and Y. Futakata. Distributed computing with hierarchical master-worker paradigm for parallel branch and bound algorithm. In *Proceedings of the 3rd IEEE/ACM International Symposium on Cluster, Cloud, and Grid Computing*, pages 156–163. IEEE, 2003.
2. M. Alves, E. Tovar, F. Vasques, G. Hammer, and K. Rother. Real-time communications over hybrid wired/wireless profibus-based networks. In *Proceedings of the 14th Euromicro Conference on Real-Time Systems*, pages 142–151. IEEE, 2002.
3. Z Artstein. Linear systems with delayed control: A reduction. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 27(4):869–879, 1982.
4. K. J. Astrom and B. Wittenmark. *Computer-Controlled Systems - Theory and Design*. Prentice-Hall, New York, 1997.
5. R. Bellman, R.E. Bellman, and K.L. Cooke. *Differential-difference equations*, volume 6. Academic Press, New York, 1963.
6. D.P. Bertsekas and A. Scientific. *Convex optimization theory*. Athena Scientific, Belmont, 2009.
7. E.K. Boukas and Z.K. Liu. *Deterministic and stochastic time delay systems*. Birkhauser, 2002.
8. EK Boukas, ZK Liu, and P. Shi. Delay-dependent stability and output feedback stabilisation of markov jump system with time-delay. *IEE Proceedings on Control Theory and Applications*, 149(5):379–386, 2002.
9. El-Kebir Boukas. Discrete-time systems with time-varying time delay: stability and stabilization. *Mathematical Problems in Engineering*, 2006:1–10, 2006.
10. S. Boyd, L. El Ghaoui, E. Feron, and V. Balakrishnan. *Linear matrix inequalities in system and control theory*, volume 15. Society for Industrial and Applied Mathematics, Philadelphia, 1994.
11. M. Bozorg and F. Termeh. Domains of pid controller coefficients which guarantee stability and performance for lti time-delay systems. *Automatica*, 47(9):2122–2125, 2011.
12. R.P. Braatz, P.M. Young, J.C. Doyle, and M. Morari. Computational complexity of μ calculation. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 39(5):1000–1002, 1994.
13. J.H. Braslavsky, R.H. Middleton, and J.S. Freudenberg. Feedback stabilization over signal-to-noise ratio constrained channels. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 52(8):1391–1403, 2007.
14. C. Briat and E.I. Verriest. A new delay-sir model for pulse vaccination. *Biomedical Signal Processing and Control*, 4(4):272–277, 2009.
15. R.W. Brockett and D. Liberzon. Quantized feedback stabilization of linear systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 45(7):1279–1289, 2000.

16. Y.Y. Cao, J. Lam, and Y.X. Sun. Static output feedback stabilization: an ilmi approach. *Automatica*, 34(12):1641–1645, 1998.
17. P. Castillo, R. Lozano, and A.E. Dzul. *Modelling and control of mini-flying machines*. Springer-Verlag, New York, 2005.
18. B. Chen, H. Li, P. Shi, C. Lin, and Q. Zhou. Delay-dependent stability analysis and controller synthesis for markovian jump systems with state and input delays. *Information Sciences*, 179(16):2851–2860, 2009.
19. C.M. Chen. Flexible sampling of a state-delay system. *Journal of the Franklin Institute*, 334(4):643–652, 1997.
20. MBG Cloosterman, L. Hetel, N. van de Wouw, W. Heemels, J. Daafouz, and H. Nijmeijer. Controller synthesis for networked control systems. *Automatica*, 46(10):1584–1594, 2010.
21. M.B.G. Cloosterman, N. van de Wouw, W. Heemels, and H. Nijmeijer. Stability of networked control systems with uncertain time-varying delays. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 54(7):1575–1580, 2009.
22. C.W. Cryer and L. Tavernini. The numerical solution of volterra functional differential equations by euler’s method. *SIAM Journal on Numerical Analysis*, pages 105–129, 1972.
23. A. Cuenca, J. Salt, A. Sala, and R. Piza. A delay-dependent dual-rate pid controller over an ethernet network. *IEEE Transactions on Industrial Informatics*, 7(1):18–29, 2011.
24. D.F. Delchamps. Stabilizing a linear system with quantized state feedback. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 35(8):916–924, 1990.
25. D. Du, B. Jiang, and S. Zhou. Delay-dependent robust stabilisation of uncertain discrete-time switched systems with time-varying state delay. *International Journal of Systems Science*, 39(3):305–313, 2008.
26. L. El Ghaoui, F. Oustry, and M. AitRami. A cone complementarity linearization algorithm for static output-feedback and related problems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 42(8):1171–1176, 1997.
27. E. Fridman and M. Dambrine. Control under quantization, saturation and delay: An LMI approach. *Automatica*, 45(10):2258–2264, 2009.
28. E. Fridman and U. Shaked. An improved stabilization method for linear time-delay systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 47(11):1931–1937, 2002.
29. J. Fu, H. Zhang, and T. Ma. Delay-probability-distribution-dependent robust stability analysis for stochastic neural networks with time-varying delay. *Progress in Natural Science*, 19(10):1333–1340, 2009.
30. M. Fu and L. Xie. The sector bound approach to quantized feedback control. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 50(11):1698–1711, 2005.
31. M. Fukuda and M. Kojima. Branch-and-cut algorithms for the bilinear matrix inequality eigenvalue problem. *Computational Optimization and Applications*, 19(1):79–105, 2001.
32. E. Furutani and M Araki. Robust stability of state-predictive ans smith control systems for plants with a pure delay. *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, 8(18):907–919, 1998.
33. P. Gahinet, A. Nemirovskii, A.J. Laub, and M. Chilali. The lmi control toolbox. In *Proceedings on the 33rd IEEE Conference on Decision and Control (CDC)*, volume 3, pages 2038–2041. IEEE, 1995.

34. H. Gao and T. Chen. New results on stability of discrete-time systems with time-varying state delay. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 52(2):328–334, 2007.
35. H. Gao and T. Chen. A new approach to quantized feedback control systems. *Automatica*, 44(2):534–542, 2008.
36. H. Gao, J. Lam, C. Wang, and Y. Wang. Delay-dependent output feedback stabilisation of discrete-time systems with time-varying state delay. *IEE Proceedings on Control Theory and Applications*, 151(6):691–698, 2004.
37. P. Garcia and P. Albertos. A new dead-time compensator to control stable and integrating processes with long dead-time. *Automatica*, 44(4):1062–1071, 2008.
38. P. Garcia, P. Castillo, R. Lozano, and P. Albertos. Robustness with respect to delay uncertainties of a predictor-observer based discrete-time controller. In *Proceedings on the 45th IEEE Conference on Decision and Control (CDC)*, pages 199–204. IEEE, 2006.
39. P. Garcia, A. Gonzalez, P. Castillo, R. Lozano, and P. Albertos. Robustness of a discrete-time predictor-based controller for time-varying measurement delay. *International Federation of Automatic Control (<http://tds2010.fs.cvut.cz>)*, 2010.
40. RH Gielen, S. Oлару, M. Lazar, W. Heemels, N. Van de Wouw, and S.I. Niculescu. On polytopic inclusions as a modeling framework for systems with time-varying delays. *Automatica*, 46(3):615–619, 2010.
41. G. C. Goodwin and K Sang Sin. Adaptive filtering prediction and control. *Information and systems sciences series*, 1984.
42. F. Gouaisbaut, M. Dambrine, and J.P. Richard. Robust control of delay systems: a sliding mode control design via lmi. *Systems & control letters*, 46(4):219–230, 2002.
43. K. Gu, V. Kharitonov, and J. Chen. *Stability of time-delay systems*. Birkhauser, Basel, 2003.
44. K. Gu and S.I. Niculescu. Survey on recent results in the stability and control of time-delay systems. *Journal of Dynamic Systems, Measurement, and Control*, 125:158–165, 2003.
45. Z. Guangdeng, H. Linlin, and Y. Hongyong. Further results concerning delay-dependent h_∞ control for uncertain discrete-time systems with time-varying delay. *Mathematical Problems in Engineering*, 2009.
46. M. Guinaldo, J. Sanchez, and S. Dormido. A packet-based network control system architecture for teleoperation and remote laboratories. In *Proceedings on the 49th IEEE Conference on Decision and Control (CDC)*, pages 5863–5868. IEEE, 2010.
47. Y. Guo and S. Li. New stability criterion for discrete-time systems with interval time-varying state delay. In *Proceedings on the 48th IEEE Conference on Decision and Control (CDC)*, pages 1342–1347. IEEE, 2009.
48. J.L. Guzman, P. Garcia, T. Haggglund, S. Dormido, P. Albertos, and M. Berenguel. Interactive tool for analysis of time-delay systems with dead-time compensators. *Control Engineering Practice*, 16(7):824–835, 2008.
49. T. Haggglund. An industrial dead-time compensating PI controller. *Control Engineering Practice*, 4(6):749–756, 1996.
50. J. Hale. Functional differential equations. *Analytic Theory of Differential Equations*, pages 9–22, 1971.

51. J.K. Hale and S.M.V. Lunel. *Introduction to functional differential equations*. Springer-Verlag, New York, 1993.
52. Y. Halevi. Reduced-Order Models with Delay. *International Journal of Control*, 64(4):733–744, 1996.
53. Q.L. Han and K. Gu. Stability of linear systems with time-varying delay: a generalized discretized lyapunov functional approach. *Asian Journal of Control*, 3(3):170–180, 2001.
54. Y. He, G.P. Liu, D. Rees, and M. Wu. H_∞ filtering for discrete-time systems with time-varying delay. *Signal Processing*, 89(3):275–282, 2009.
55. Y. He, Q.G. Wang, L. Xie, and C. Lin. Further improvement of free-weighting matrices technique for systems with time-varying delay. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 52(2):293–299, 2007.
56. Y. He, M. Wu, G.P. Liu, and J.H. She. Output feedback stabilization for a discrete-time system with a time-varying delay. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 53(10):2372–2377, 2008.
57. W. Heemels, JH Sandee, and PPJ Van Den Bosch. Analysis of event-driven controllers for linear systems. *International Journal of Control*, 81(4):571–590, 2008.
58. W.P.M.H. Heemels, N. van de Wouw, R.H. Gielen, MCF Donkers, L. Hetel, S. Olaru, M. Lazar, J. Daafouz, and S. Niculescu. Comparison of overapproximation methods for stability analysis of networked control systems. In *Proceedings on the 13th ACM international Conference on Hybrid systems: computation and control*, pages 181–190. ACM, 2010.
59. D. Henrion, D. Arzelier, and D. Peaucelle. An LMI condition for robust stability of polynomial matrix polytopes. *Automatica*, 37(3):461–468, 2001.
60. D. Henrion, M. Šebek, and V. Kučera. Robust pole placement for second-order systems: an LMI approach. In *Proceedings on the IFAC Symposium on Robust Control Design*, 2003.
61. J.P. Hespanha, P. Naghshtabrizi, and Y. Xu. A survey of recent results in networked control systems. *Proceedings of the IEEE*, 95(1):138–162, 2007.
62. L. Hetel, J. Daafouz, and C. Lung. Equivalence between the Lyapunov-Krasovskii functionals approach for discrete delay systems and that of the stability conditions for switched systems. *Nonlinear Analysis: Hybrid Systems*, 2(3):697–705, 2008.
63. N. Hohenbichler. All stabilizing pid controllers for time delay systems. *Automatica*, 45(11):2678–2684, 2009.
64. K. Hu and J. Yuan. Delay-dependent H_∞ control of linear discrete-time systems with time-varying delay via switched system approach. *International Journal of Adaptive Control and Signal Processing*, 23(12):1104–1112, 2009.
65. A. Ingimundarson and T. Hagglund. Robust tuning procedures of dead-time compensating controllers. *Control Engineering Practice*, 9(11):1195–1208, 2001.
66. X. Jiang and Q.L. Han. On H_∞ control for linear systems with interval time-varying delay. *Automatica*, 41(12):2099–2106, 2005.
67. X. Jun and A. Yimin. A new result on robust stability of discrete-time systems with polytopic uncertainties and time-varying state delay. In *Proceedings on the 27th Chinese Control Conference*, pages 2–6. IEEE, 2008.
68. E.W. Kamen. *Lectures on Algebraic System Theory: linear systems over rings*, volume 3016. National Aeronautics and Space Administration, Scientific and Technical Information Office, 1978.

69. M. Kawanishi and Y. Shibata. BMI Global Optimization using Parallel Branch and Bound Method with a Novel Branching Method. In *Proceedings of the American Control Conference*, pages 1664–1669. IEEE, 2007.
70. R.B. Kearfott. Computational complexity and feasibility of data processing and interval computations. *Reliable Computing*, 4(4):405–409, 1998.
71. VB Kolmanovskii, S.I. Niculescu, and K. Gu. Delay effects on stability: a survey. In *Proceedings on the 38th IEEE Conference on Decision and Control (CDC)*, volume 2, pages 1993–1998. IEEE, 1999.
72. V.B. Kolmanovskii and VR Nosov. *Stability of functional differential equations*, volume 180. Academic Press, London and Orlando), 1986.
73. NN Krasovskii. On the applications of the second lyapunov method for equations with delay. *Journal of Applied Mathematics and Mechanics*, 20:315–327, 1956.
74. W. Kwon and A. Pearson. Feedback stabilization of linear systems with delayed control. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 25(2):266–269, 1980.
75. K.C. Lee, S. Lee, and M.H. Lee. Qos-based remote control of networked control systems via profibus token passing protocol. *IEEE Transactions on Industrial Informatics*, 1(3):183–191, 2005.
76. X. Li and H. Gao. A new model transformation of discrete-time systems with time. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 56(9):2172–2178, 2011.
77. F.L. Lian, J.R. Moyne, and D.M. Tilbury. Performance evaluation of control networks: Ethernet, controlnet, and devicenet. *IEEE Control Systems Magazine*, 21(1):66–83, 2001.
78. D. Liberzon and J.P. Hespanha. Stabilization of nonlinear systems with limited information feedback. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 50(6):910–915, 2005.
79. B. Lincoln. Jitter compensation in digital control systems. In *Proceedings of the American Control Conference*, volume 4, pages 2985–2990. IEEE, 2002.
80. Xg Liu, RR Martin, M. WU, and ML Tang. Delay-dependent robust stabilisation of discrete-time systems with time-varying delay. *IEE Proceedings on Control Theory and Applications*, 153(6):689–702, 2006.
81. R. Lozano, P. Castillo, P. Garcia, and A. Dzul. Robust prediction-based control for unstable delay systems: Application to the yaw control of a mini-helicopter. *Automatica*, 40(4):603–612, 2004.
82. M.S. Mahmoud, Y. Shi, and H.N. Nounou. Resilient observer-based control of uncertain time-delay systems. *International Journal of Innovative Computing, Information and Control*, 3(2):407–418, 2007.
83. A. Manitius and A. Olbrot. Finite spectrum assignment problem for systems with delays. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 24(4):541–552, 1979.
84. W.J. Mao and J. Chu. Technical communique: D-stability and D-stabilization of linear discrete time-delay systems with polytopic uncertainties. *Automatica*, 45(3):842–846, 2009.
85. X. Meng, J. Lam, B. Du, and H. Gao. A delay-partitioning approach to the stability analysis of discrete-time systems. *Automatica*, 46(3):610–614, 2010.
86. W. Michiels, K. Engelborghs, P. Vansevenant, and D. Roose. Continuous pole placement for delay equations. *Automatica*, 38(5):747–761, 2002.
87. S. Mondié, M. Dambrine, and O. Santos. Approximation of control laws with distributed delays: a necessary condition for stability. *Kybernetika*, 38(5):541–551, 2002.

88. Y.S. Moon, P.G. Park, and W.H. Kwon. Robust stabilization of uncertain input-delayed systems using reduction method. *Automatica*, 37(2):307–312, 2001.
89. AS Morse. Ring models for delay-differential systems. *Automatica*, 12(5):529–531, 1976.
90. S.I. Niculescu. *Delay effects on stability: A robust control approach*. Springer-Verlag, Berlin, 2001.
91. J. Nilsson. Real-time control systems with delays. *Lund, Sweden: Lund Institute of Technology*, 1998.
92. Y. Niu, T. Jia, X. Wang, and F. Yang. Output-feedback control design for ncss subject to quantization and dropout. *Information Sciences*, 179(21):3804–3813, 2009.
93. J. E. Normey-Rico and E. F. Camacho. *Control of Dead-time Processes*. Springer-Verlag, London, 2007.
94. J.E. Normey-Rico, E. Camacho, et al. Dead-time compensators: A survey. *Control Engineering Practice*, 16(4):407–428, 2008.
95. J.E. Normey-Rico, J.L. Guzman, S. Dormido, M. Berenguel, and E.F. Camacho. An unified approach for dtc design using interactive tools. *Control Engineering Practice*, 17(10):1234–1244, 2009.
96. V.A. Oliveira, L.V. Cossi, M. Teixeira, and A.M.F. Silva. Synthesis of pid controllers for a class of time delay systems. *Automatica*, 45(7):1778–1782, 2009.
97. ZJ Palmor. Time-delay compensation—smith predictor and its modifications. *The Control Handbook*, 1:224–229, 1996.
98. Y.J. Pan, HJ Marquez, and T. Chen. Stabilization of remote control systems with unknown time varying delays by lmi techniques. *International Journal of Control*, 79(7):752–763, 2006.
99. P.M. Pardalos. *Convex optimization theory*. Taylor & Francis, Veszprém, 2010.
100. I. Penarrocha and R. Sanchis. Inferential networked control with variable accessibility constraints. In *Proceedings on the 35th IEEE Annual Conference of Industrial Electronics*, pages 2999–3006. IEEE, 2009.
101. AM Perdon and M. Anderlucci. Disturbance decoupling problem for a class of descriptor systems with delay via systems over rings. *IMA Journal of Mathematical Control and Information*, 27(2):205, 2010.
102. W. Perruquetti and JP Barbot. Sliding mode control in engineering. control engineering series. *Sliding Mode Control in Engineering*, page 409, 2002.
103. N.J. Ploplys, P.A. Kawka, and A.G. Alleyne. Closed-loop control over wireless networks. *IEEE Control Systems Magazine*, 24(3):58–71, 2004.
104. BS Razumikhin. On the stability of systems with a delay. *Prikl. Matemathics and Mechanics*, 20(4):500–512, 1956.
105. J.P. Richard. Time-delay systems: an overview of some recent advances and open problems. *Automatica*, 39(10):1667–1694, 2003.
106. JP Richard, M. Dambrine, F. Gouaisbaut, and W. Perruquetti. Systems with delays: an overview of some recent advances. *Stability and Control: Theory and Applications*, 3:3–23, 2000.
107. J.P. Richard, F. Gouaisbaut, and W. Perruquetti. Sliding mode control in the presence of delay. *Kybernetika*, 37(3):277–294, 2001.
108. A. Sala. Computer control under time-varying sampling period: An LMI gridding approach. *Automatica*, 41(12):2077–2082, 2005.

109. A. Sala. Improving performance under sampling-rate variations via generalized hold functions. *IEEE Transactions on Control Systems Technology*, 15(4):794–797, 2007.
110. A. Sala, A. Cuenca, and J. Salt. A retunable pid multi-rate controller for a networked control system. *Information Sciences*, 179(14):2390–2402, 2009.
111. M. Seron, J. Braslavsky, and G. Goodwin. Fundamental limitations in filtering and control. [Online] <http://www.eng.newcastle.edu.au/jhb519/book/download.html>, 1997.
112. G.J. Silva, A. Datta, and S.P. Bhattacharyya. *PID controllers for time-delay systems*. Birkhauser, Boston, 2005.
113. R. Sipahi, S.I. Niculescu, C.T. Abdallah, W. Michiels, and K. Gu. Stability and stabilization of systems with time delay. *IEEE Control Systems Magazine*, 31(1):38–65, 2011.
114. O.J.M. Smith. Closer control of loops with dead time. *Chemical Engineering Progress*, 53(5):217–219, 1959.
115. Y.S. Suh. Stability and stabilization of nonuniform sampling systems. *Automatica*, 44(12):3222–3226, 2008.
116. O. Toker and H. Ozbay. On the np-hardness of solving bilinear matrix inequalities and simultaneous stabilization with static output feedback. In *Proceedings of the American Control Conference*, volume 4, pages 2525–2526. IEEE, 1995.
117. E. Tovar and F. Vasques. Real-time fieldbus communications using profibus networks. *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, 46(6):1241–1251, 1999.
118. JS Valter et al. Robust stabilization of discrete-time systems with time-varying delay: an LMI approach. *Mathematical Problems in Engineering*, 2008.
119. J.G. VanAntwerp and R.D. Braatz. A tutorial on linear and bilinear matrix inequalities. *Journal of Process Control*, 10(4):363–385, 2000.
120. E.I. Verriest. Stability of systems with state-dependent and random delays. *IMA Journal of Mathematical Control and Information*, 19(1 and 2):103, 2002.
121. V. Volterra. Theory of functionals and of integral and integro-differential equations. *Bull. Amer. Math. Soc*, 38(1):623, 1932.
122. Q.G. Wang, T.H. Lee, and K.K. Tan. *Finite spectrum assignment for time-delay systems*, volume 239. Springer-Verlag, 1998.
123. Y. Wang and Z. Sun. H_∞ control of networked control system via lmi approach. *International Journal of Innovative Computing, Information and Control*, 3(2):343–352, 2007.
124. Y.J. Wang. Graphical computation of gain and phase margin specifications-oriented robust pid controllers for uncertain systems with time-varying delay. *Journal of Process Control*, 21(4):475–488, 2011.
125. W.S. Wong and R.W. Brockett. Systems with finite communication bandwidth constraints. i. state estimation problems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 42(9):1294–1299, 1997.
126. W.S. Wong and R.W. Brockett. Systems with finite communication bandwidth constraints. ii. stabilization with limited information feedback. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 44(5):1049–1053, 1999.
127. M. Wu, Y. He, J.H. She, and G.P. Liu. Delay-dependent criteria for robust stability of time-varying delay systems. *Automatica*, 40(8):1435–1439, 2004.
128. Y. Xia and Y. Jia. Robust sliding-mode control for uncertain time-delay systems: an lmi approach. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 48(6):1086–1091, 2003.

129. L. Xie. Output feedback H_∞ control of systems with parameter uncertainty. *International Journal of Control*, 63(4):741–750, 1996.
130. S. Xu and J. Lam. Improved delay-dependent stability criteria for time-delay systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 50(3):384–387, 2005.
131. S. Xu and J. Lam. A survey of linear matrix inequality techniques in stability analysis of delay systems. *International Journal of Systems Science*, 39(12):1095–1113, 2008.
132. H. Yan, X. Huang, M. Wang, and H. Zhang. New delay-dependent stability criteria of uncertain linear systems with multiple time-varying state delays. *Chaos, Solitons & Fractals*, 37(1):157–165, 2008.
133. HE Yong, WU Min, HAN Qinglong, and S. Jinhua. Delay-dependent H_∞ control of linear discrete-time systems with an interval-like time-varying delay. *International Journal of Systems Science*, 39(4):427–436, 2008.
134. D. Yue and Q.L. Han. Delayed feedback control of uncertain systems with time-varying input delay. *Automatica*, 41(2):233–240, 2005.
135. B. Zhang, S. Xu, and Y. Zou. Improved stability criterion and its applications in delayed controller design for discrete-time systems. *Automatica*, 44(11):2963–2967, 2008.
136. W. Zhang, L. Yu, and X. Jiang. Delay-dependent generalized H_2 filtering for uncertain systems with multiple time-varying state delays. *Signal Processing*, 87(4):709–724, 2007.
137. X.M. Zhang and Q.L. Han. A novel finite-sum inequality for stability of discrete-time linear systems with interval-like time-varying delays. In *Proceedings on the 49th IEEE Conference on Decision and Control (CDC)*, pages 708–713. IEEE, 2010.
138. F. Zheng, Q.G. Wang, and T.H. Lee. A heuristic approach to solving a class of bilinear matrix inequality problems. *Systems & control letters*, 47(2):111–119, 2002.
139. Q.C. Zhong. On distributed delay in linear control laws-part i: Discrete-delay implementations. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 49(11):2074–2080, 2004.
140. Q.C. Zhong. On distributed delay in linear control laws-part ii: rational implementations inspired from the δ -operator. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 50(5):729–734, 2005.
141. Q.C. Zhong. *Robust control of time-delay systems*. Springer-Verlag, London, 2006.
142. S. Zhou and G. Feng. H_∞ filtering for discrete-time systems with randomly varying sensor delays. *Automatica*, 44(7):1918–1922, 2008.
143. X.L. Zhu, G.H. Yang, T. Li, C. Lin, and L. Guo. LMI stability criterion with less variables for time-delay systems. *International Journal of Control, Automation and Systems*, 7(4):530–535, 2009.