



UNIVERSITAT
POLITÈCNICA
DE VALÈNCIA

itvestmat



UNIVERSITAT
DE VALÈNCIA

El caos en los métodos iterativos de resolución de ecuaciones no lineales

Julio de 2020

Autor: Marlon Ernesto Moscoso Martínez
marmosma@posgrado.upv.es

Director: D. Alicia Cordero Barbero
D. Juan Ramón Torregrosa Sánchez

Dedicatoria

A mis padres.

Agradecimientos

A Alicia y Juan Ramón, por su soporte incondicional.

Resumen

En el presente trabajo se estudia la dinámica compleja de una familia de métodos con esquemas iterativos multipaso, que es una generalización de un método propuesto por Artidiello *y col.* en [1], sobre polinomios cuadráticos. Varios conjuntos singulares asociados a esta familia aparecen en los espacios de parámetros. Estos conjuntos tienen interesantes características similares a las del conjunto de Mandelbrot. El espacio de parámetros nos ha permitido encontrar diferentes elementos de la familia que tienen malas propiedades de convergencia, ya que las órbitas periódicas y los puntos fijos extraños atractores aparecen en el plano dinámico del método correspondiente. Por otra parte, este mismo estudio ha servido para detectar miembros de la familia con comportamiento especialmente estable, adecuados para la resolución de problemas prácticos. Se dan varios ejemplos numéricos para ilustrar la eficiencia de la familia presentada.

Palabras clave— Caos · dinámica compleja · métodos iterativos · métodos de un paso y multipaso · ecuaciones no lineales · polinomios cuadráticos · esfera de Riemann · conjuntos de Mandelbrot, Fatou y Julia · espacio de parámetros · plano dinámico · cuencas de atracción · regiones de convergencia y divergencia · eficiencia computacional.

Prefacio

La solución de ecuaciones no lineales ha sido uno de los temas más investigados en matemática aplicada que ha dado lugar a una vasta literatura; véase, por ejemplo, Ostrowski [2], Traub [3], Ortega y Rheinboldt [4], Neta [5], McNamee [6] y sus referencias. En el presente trabajo nos ocupamos de los métodos de punto fijo que generan sucesiones presumiblemente convergentes a la solución de una ecuación dada. Esta clase de métodos puede dividirse en esquemas de un paso y multipaso. Los métodos de un paso pueden alcanzar un orden superior mediante el uso de derivadas más altas de la función, lo que resulta costoso desde un punto de vista computacional. Por otro lado, los métodos multipaso nos permiten no desechar información previamente calculada. Este enfoque proporciona la construcción de métodos muy eficientes de búsqueda de raíces, lo que explica el interés en el estudio de métodos con esquemas multipaso.

Según Petković *y col.* en [7], cualquier método iterativo de un paso para encontrar una raíz simple, como el método de Newton, Halley, Laguerre, Euler-Cauchy y miembros de la sucesión básica de Traub-Schröder, que depende explícitamente de f y sus primeras $p - 1$ derivadas, no puede lograr un orden superior a p . Por lo tanto, la eficiencia informativa de Traub, definida en 1.2.4, de los métodos de un paso, expresada como la razón del orden de convergencia y el número de evaluaciones funcionales requeridas por iteración, no puede exceder a 1. Los métodos multipaso son de gran importancia práctica, ya que superan los límites teóricos de cualquier método de un paso con respecto al orden de convergencia y la eficiencia informativa y computacional (véase la sección 1.2). Los llamados métodos óptimos de n -pasos siempre tienen una eficiencia informativa mayor que 1 para $n \geq 2$.

Un renovado interés por los métodos multipaso ha surgido en los primeros años del siglo XXI debido al rápido desarrollo de las computadoras digitales, la aritmética informática avanzada y la computación simbólica. Las mejoras en hardware y software han sido indispensables ya que los métodos multipaso producen aproximaciones de gran precisión y requieren un análisis de convergencia complicado que solo es factible mediante el cálculo simbólico.

Las sucesiones presumiblemente convergentes a la solución de una ecuación son analizadas a través del comportamiento dinámico del método iterativo en términos de sus cuencas de atracción. El análisis dinámico hace referencia al caos, estabilidad y precisión de un método. Los sistemas dinámicos holomórficos no invertibles de la esfera de Riemann son sorprendentemente intrincados y magníficos. A menudo, los conjuntos indescomponibles y completamente invariantes son fractales (véase Mandelbrot [8]) porque, de hecho, son casi auto-similares (véase Sullivan [9]). A veces no son curvas Jordan diferenciables en ninguna parte cuya dimensión de Hausdorff es mayor que 1 (véase Sullivan [10] y Ruelle [11]). Sin embargo, estos conjuntos están determinados por una única función analítica $z_{k+1} = R(z_k)$ de una sola variable compleja, lo que permite el análisis de esquemas iterativos. Así, en el presente trabajo estudiamos la dinámica compleja de una familia de métodos con esquemas iterativos multipaso.

Los contenidos están organizados de la siguiente manera. En el Capítulo 1, presentamos algunos conceptos preliminares sobre los métodos de un paso y multipaso, los criterios de eficiencia utilizados para caracterizar un esquema iterativo, y las herramientas utilizadas para analizar su comportamiento dinámico. En el Capítulo 2, planteamos un esquema iterativo de una familia de métodos multipaso triparamétrica, que es una generalización de un método propuesto por Artidiello *y col.* en [1], y que la llamamos familia ACTV. Con esta familia, estudiamos su orden de convergencia, su reducción a una familia uniparamétrica, y su eficiencia computacional. En el Capítulo 3, abordamos el estudio de la dinámica compleja de la familia ACTV uniparamétrica. En primer lugar, obtenemos el operador racional de la familia y calculamos los puntos fijos y críticos del operador aplicado sobre polinomios cuadráticos. Luego, analizamos la estabilidad de la familia mediante la construcción de espacios de parámetros y planos dinámicos. En el Capítulo 4, realizamos pruebas numéricas con varios métodos de la familia estudiada, y comparamos los resultados con cinco métodos diferentes dados en la literatura. Finalmente, en el Capítulo 5, introducimos las conclusiones del trabajo, y exponemos las líneas futuras.

Marlon Ernesto Moscoso Martínez
marmosma@posgrado.upv.es

Índice general

Resumen	VII
Prefacio	IX
Índice general	XI
1 Preliminares	1
1.1 Métodos iterativos de un paso y multipaso	1
1.2 Criterios de eficiencia de un método iterativo	4
1.3 Dinámica compleja.	8
2 Familia de métodos iterativos ACTV	15
2.1 Esquema iterativo	15
2.2 Análisis de convergencia	16
2.3 Eficiencia computacional	24
3 Dinámica compleja de la familia ACTV	27
3.1 Operador racional	27

3.2	Análisis y estabilidad de puntos fijos	29
3.3	Análisis de puntos críticos	32
3.4	Espacios de parámetros	33
3.5	Planos dinámicos	36
4	Resultados numéricos	49
4.1	Métodos iterativos de sexto orden	49
4.2	Experimentos numéricos	51
5	Conclusiones y líneas futuras	75
5.1	Conclusiones	75
5.2	Líneas futuras	76
	Bibliografía	77

Capítulo 1

Preliminares

En este capítulo presentamos los conceptos preliminares de métodos iterativos, criterios de eficiencia y dinámica compleja. Así, en la sección 1.1 nos introducimos en los métodos iterativos con esquemas de un paso y multipaso. En la sección 1.2 citamos los principales criterios de eficiencia utilizados para caracterizar un método iterativo. En la sección 1.3 abordamos las definiciones básicas y conceptos de dinámica compleja utilizados para analizar el caos y la estabilidad de un método iterativo en función de sus cuencas de atracción.

1.1 Métodos iterativos de un paso y multipaso

Muchos fenómenos o problemas reales son representados mediante modelos matemáticos que conllevan el planteamiento de ecuaciones o sistemas de ecuaciones generalmente no lineales, dada la naturaleza no lineal de dichos fenómenos. En este sentido, el objetivo radica entonces en resolver las ecuaciones o sistemas de ecuaciones planteados.

En el presente trabajo citaremos diferentes métodos para resolver ecuaciones no lineales, centrándonos en el análisis de la estabilidad de uno de ellos, y dejando abierta la posibilidad de extender los resultados para sistemas de ecuaciones.

Así, nuestro objetivo consistirá en encontrar una raíz simple ξ de una función no lineal f , es decir, una solución de la ecuación no lineal

$$f(x) = 0, \tag{1.1}$$

donde $f : I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ es una función real definida en un intervalo abierto I . Véase la figura 1.1.

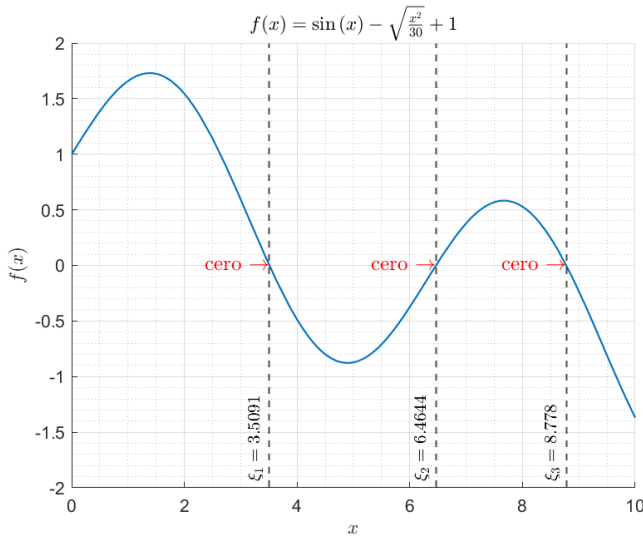


Figura 1.1: Raíces simples de una función no lineal.

Definición 1.1.1 (Raíz simple) Se define a ξ como una raíz simple de una función f , donde $f : I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ es una función real definida en un intervalo abierto I , si

$$f(\xi) = 0, \quad \text{y} \quad f'(\xi) \neq 0.$$

Definición 1.1.2 (Raíz múltiple) Se define a ξ como una raíz con multiplicidad m de una función f , donde $f : I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ es una función real definida en un intervalo abierto I , si

$$f(\xi) = 0, \quad f'(\xi) = f''(\xi) = \dots = f^{(m-1)}(\xi) = 0, \quad \text{y} \quad f^{(m)}(\xi) \neq 0.$$

Ciertos métodos permiten encontrar soluciones exactas, y otros, soluciones aproximadas. Dada la escasez de métodos analíticos para hallar soluciones

exactas, nos centraremos en métodos iterativos que aproximen la solución, y específicamente, en métodos iterativos de punto fijo que, bajo ciertas condiciones de la función f y de la aproximación inicial x_0 , aproximan la raíz simple ξ de la ecuación no lineal (1.1).

Los métodos iterativos pueden ser clasificados en métodos de un paso y multipaso, y éstos a su vez subdivididos en métodos con o sin memoria; no obstante, solo nos ocuparemos de los métodos iterativos sin memoria.

Definición 1.1.3 (Método de un paso) *Los métodos iterativos de un paso son aquellos en los cuales la iteración $(k + 1)$ -ésima se obtiene utilizando evaluaciones funcionales solo de la iteración k -ésima, es decir*

$$x_{k+1} = \Phi(x_k), \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

Uno de los métodos iterativos de un paso más conocido y comúnmente utilizado es el método de Newton, dado por

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}, \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (1.2)$$

Es bien sabido que un método iterativo de un paso, que usa d evaluaciones funcionales por paso, tiene orden de convergencia como máximo $p = d$. Además, Traub en [3] demostró que para diseñar un método de un paso de orden p , la expresión iterativa debe contener derivadas al menos del orden $p - 1$. Por lo tanto, los métodos de un paso no son una buena idea para aumentar el orden de convergencia y la eficiencia computacional [12].

Estas restricciones de los métodos de un paso han dado lugar al diseño de métodos iterativos multipaso.

Definición 1.1.4 (Método multipaso) *Los métodos iterativos multipaso, también llamados esquemas predictor-corrector, son aquellos en los cuales la iteración $(k + 1)$ -ésima se obtiene utilizando evaluaciones funcionales de la iteración k -ésima y también de otros pasos intermedios. Por ejemplo, un método de dos pasos tendrá la expresión iterativa*

$$\begin{aligned} y_k &= \Psi(x_k) \\ x_{k+1} &= \Phi(x_k, y_k), \quad k = 0, 1, 2, \dots \end{aligned}$$

Uno de los métodos iterativos multipaso más conocido y comúnmente utilizado es el método de Ostrowski [13], dado por

$$\begin{aligned} y_k &= x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)} \\ x_{k+1} &= y_k - \frac{f(x_k)}{f(x_k) - 2f(y_k)} \frac{f(y_k)}{f'(x_k)}, \quad k = 0, 1, 2, \dots \end{aligned} \tag{1.3}$$

Los métodos iterativos multipaso pertenecen a la clase de los métodos más eficientes para resolver ecuaciones no lineales. El interés en la investigación y el desarrollo de este tipo de métodos ha surgido de su capacidad para superar los límites teóricos de los métodos de un paso con respecto al orden de convergencia y la eficiencia computacional [7].

Teorema 1.1.1 (Orden de métodos compuestos [14]) *Sean $\Phi_1(x)$ y $\Phi_2(x)$ dos funciones de punto fijo de la ecuación no lineal $f(x) = 0$. Sean los métodos iterativos $x_{k+1} = \Phi_1(x_k)$ y $x_{k+1} = \Phi_2(x_k)$ de órdenes p_1 y p_2 , respectivamente. Entonces, el orden de convergencia del método iterativo correspondiente a la función de punto fijo*

$$\Phi(x) = \Phi_2(\Phi_1(x))$$

es $p = p_1 \cdot p_2$.

En este sentido, para incrementar el orden de convergencia y la eficiencia computacional se utilizan métodos iterativos multipaso. En el presente trabajo citaremos y analizaremos una familia de métodos multipaso.

1.2 Criterios de eficiencia de un método iterativo

En el análisis de un método iterativo se utilizan diferentes criterios que, de manera general, nos permiten conocer qué tan eficiente o no es el método. Entre los principales criterios se citan los siguientes: orden de convergencia, eficiencia informativa de Traub, índice de eficiencia de Ostrowski, e índice de eficiencia computacional de Cordero y Torregrosa.

Definición 1.2.1 (Orden de convergencia [3, 12, 15]) *Sea $\{x_k\}_{k \geq 0}$ una sucesión generada por un método iterativo que converge a ξ . Sea $e_k = x_k - \xi$*

el error de aproximación en la k -ésima iteración. Si existe un número real p y una constante positiva C tales que

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{|x_{k+1} - \xi|}{|x_k - \xi|^p} = \lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{|e_{k+1}|}{|e_k|^p} = C, \quad (1.4)$$

entonces $p \in [1, +\infty)$ es el **orden de convergencia** y C es la constante de estimación asintótica del error. Asimismo, un método iterativo de orden p satisface la ecuación

$$e_{k+1} = e_k^p + O(e_k^{p+1}), \quad (1.5)$$

que es la **ecuación de error del método**.

Entonces, un esquema iterativo tiene convergencia lineal si $p = 1$ con $0 < C < 1$; y convergencia cuadrática, cúbica, cuártica, etc., si $p > 1$ con $C > 0$. El orden de convergencia p puede ser determinado de la ecuación del error del método.

Además, se dice que el orden de convergencia es al menos p (*al menos* se supone implícitamente) si se permite que la constante C en (1.4) sea 0, o el equivalente, si existe una constante C y un índice k_0 tal que $|x_{k+1} - \xi| \leq C|x_k - \xi|^p$ para cualquier $k \geq k_0$.

Al analizar un método iterativo (véase la sección 4.2), ya sea para verificar el orden de convergencia o para estimar cuánto difiere del orden teórico en la implementación práctica, se recurre a la utilización del orden computacional de convergencia (COC) introducido por Weerakoon y Fernando en [16].

Definición 1.2.2 (Orden computacional de convergencia) Sea ξ una raíz de la función $f(x)$, y supongamos que x_{k+1} , x_k y x_{k-1} son las tres iteraciones consecutivas más cercanas a ξ . Entonces, el orden computacional de convergencia COC puede ser calculado como

$$p \approx \text{COC} = \frac{\ln |(x_{k+1} - \xi)/(x_k - \xi)|}{\ln |(x_k - \xi)/(x_{k-1} - \xi)|}, \quad (1.6)$$

donde $k = 1, 2, \dots$

Sin embargo, el valor de la raíz ξ es desconocido en la práctica, lo que hace inviable la utilización del COC en la forma en que está definido. Entonces, el orden computacional de convergencia aproximado (ACOC), introducido por Cordero y Torregrosa en [17], es con frecuencia utilizado.

Definición 1.2.3 (Orden computacional de convergencia aproximado)

Sea ξ una raíz de la función $f(x)$, y supongamos que x_{k+1} , x_k , x_{k-1} y x_{k-2} son cuatro iteraciones consecutivas que convergen a ξ . Entonces, el orden computacional de convergencia aproximado ACOC puede ser calculado como

$$p \approx \text{ACOC} = \frac{\ln |(x_{k+1} - x_k)/(x_k - x_{k-1})|}{\ln |(x_k - x_{k-1})/(x_{k-1} - x_{k-2})|}, \quad (1.7)$$

donde $k = 2, 3, \dots$

El ACOC es en realidad un vector que nos brinda información interesante solo si sus componentes son estables. Además, en la práctica, únicamente se considera el último valor del ACOC dado que éste es calculado con las cuatro iteraciones consecutivas más cercanas a la raíz ξ .

El orden de convergencia se usa para conocer la velocidad de convergencia de sucesiones, entendiendo la velocidad como el número de iteraciones necesarias para alcanzar el límite con la precisión requerida. Supongamos que tenemos dos sucesiones $\{x_k\}_{k \geq 0}$ y $\{x'_k\}_{k \geq 0}$ que convergen al mismo límite ξ , y supongamos que tienen, respectivamente, órdenes de convergencia p y p' , donde $p > p'$. Entonces, es claro que, asintóticamente, la sucesión $\{x_k\}_{k \geq 0}$ converge al límite más rápidamente (con menos iteraciones para la misma aproximación) que la otra sucesión.

En general, una sucesión con mayor orden de convergencia se aproxima a la raíz más rápidamente que una sucesión con menor orden. Sin embargo, a medida que se aumenta el orden de convergencia, la complejidad de la expresión iterativa también aumenta.

Por otro lado, debemos tener en cuenta que, para garantizar la convergencia de un método iterativo $x_{k+1} = \Phi(x_k)$ destinado a resolver una ecuación no lineal $f(x) = 0$, es usualmente necesario comenzar el método desde una estimación inicial x_0 cercana a la raíz ξ . Esta cercanía depende de Φ y f .

Existen otros conceptos para determinar el orden de convergencia, menos restrictivos, introducidos por Ortega y Rheinboldt en [4]. Estos conceptos refieren

al Q- y R-orden de convergencia. Sin embargo, en el presente trabajo utilizaremos el C-orden de Traub definido en 1.2.1.

En la literatura, el más utilizado de estos criterios de eficiencia es el orden de convergencia; sin embargo, éste es el que menos información proporciona sobre el tiempo de computadora necesario para encontrar una raíz con la precisión requerida. Por tal razón, otros criterios más refinados son introducidos a continuación; sin embargo, éstos difieren entre autores.

Definición 1.2.4 (Eficiencia informativa de Traub [3]) *Sea p el orden de convergencia de un método iterativo, y sea d el número de evaluaciones funcionales (uso informativo) por iteración. El índice de eficiencia informativa de Traub se define como*

$$EFF = \frac{p}{d}.$$

Definición 1.2.5 (Índice de eficiencia de Ostrowski [2]) *Sea p el orden de convergencia de un método iterativo, y sea d el número de evaluaciones funcionales por iteración. El índice de eficiencia de Ostrowski se define como*

$$EI = p^{1/d}.$$

El índice de eficiencia de Ostrowski es útil porque nos permite evitar aceleraciones artificiales de un método iterativo. Por ejemplo, supongamos que tenemos un proceso iterativo $x_{k+1} = \Phi(x_k)$ con orden de convergencia p y tomamos un nuevo proceso $x_0^* = x_0$, $x_{k+1}^* = \Phi(\Phi(x_k^*))$. Entonces, está claro que la nueva sucesión es simplemente $x_k^* = x_{2k}$, pero $\{x_k^*\}_{k \geq 0}$, por el Teorema 1.1.1, tiene un orden de convergencia p^2 . Sin embargo, ambas sucesiones $\{x_k\}_{k \geq 0}$ y $\{x_k^*\}_{k \geq 0}$ tienen el mismo índice de eficiencia.

Tanto Traub como Ostrowski consideran, para el cálculo de la eficiencia, únicamente el orden de convergencia p y el número de evaluaciones funcionales d (cualquier evaluación de una función o una de sus derivadas) por iteración. Sin embargo, la cantidad de operaciones efectuadas en cada iteración no es considerada. Estas operaciones juegan un papel importante en las expresiones iterativas, y es la razón por la cual se introduce el criterio de índice de eficiencia computacional definido por Cordero y Torregrosa en [12].

Definición 1.2.6 (Índice de eficiencia computacional) *El índice de eficiencia computacional CEI se define como una combinación entre el índice de*

eficiencia de Ostrowski EI y el índice operacional dado por Ezquerro y col. en [18]. Así

$$CEI = p^{1/(d+op)},$$

donde op es el número de operaciones (productos/cocientes) por iteración.

Sin embargo, debido a que el índice de eficiencia computacional tiene poca influencia sobre ecuaciones, éste es fundamentalmente utilizado en sistemas de ecuaciones. Así, para los métodos que se abordan en este documento, emplearemos el índice de eficiencia de Ostrowski dada su utilidad antes expuesta.

1.3 Dinámica compleja

El análisis de la dinámica compleja consiste en el estudio del comportamiento de la función racional asociada a un método iterativo en términos de las cuencas de atracción de sus puntos fijos, periódicos, etc. Una cuenca de atracción permite comprender visualmente cómo se comporta un método en función de las diversas estimaciones iniciales. Para el efecto, se construye un operador racional asociado al método sobre polinomios no lineales de bajo grado, y se analiza su convergencia y estabilidad utilizando diferentes herramientas como el espacio de parámetros y el plano dinámico.

En esta sección abordamos definiciones básicas y conceptos dinámicos del operador racional. Estas definiciones pueden ser revisadas en [15, 19-22].

Definición 1.3.1 (Operador racional) *Sea una función racional $R : \overline{\mathbb{C}} \rightarrow \overline{\mathbb{C}}$, donde $\overline{\mathbb{C}}$ es la esfera de Riemann. Se define el operador racional como*

$$R(z) = \frac{P(z)}{Q(z)},$$

donde $P(z)$ y $Q(z)$ son polinomios sin factores comunes. Además, el grado de $R(z)$ se determina como

$$\deg(R) = \max\{\deg(P), \deg(Q)\}.$$

En el presente trabajo, consideraremos operadores racionales de grado mayor o igual que dos.

Definición 1.3.2 (Órbita) Sea R un operador racional. Para $z_0 \in \overline{\mathbb{C}}$ se define su órbita como el conjunto

$$\text{orb}(z_0) = \{z_0, R(z_0), R^{\circ 2}(z_0), \dots, R^{\circ n}(z_0), \dots\},$$

donde $R^{\circ n}$ representa la n -ésima composición de R .

Nosotros analizaremos el plano de fase del operador racional R clasificando los puntos de partida del comportamiento asintótico de sus órbitas.

Definición 1.3.3 (Punto fijo) Sea R un operador racional. Un punto $z_0 \in \overline{\mathbb{C}}$ es un punto fijo de R si $R(z_0) = z_0$.

Definición 1.3.4 (Punto periódico) Sea R un operador racional. Un punto periódico $z_0 \in \overline{\mathbb{C}}$ de período $m > 1$ es un punto tal que $R^{\circ m}(z_0) = z_0$, donde m es el entero más pequeño, y $R^{\circ k}(z_0) \neq z_0$ para $k < m$.

Si z_0 es periódico de período m , entonces es un punto fijo para $R^{\circ m}$. Nosotros clasificaremos los puntos fijos de R en función de la magnitud de su derivada.

Definición 1.3.5 (Estabilidad de un punto fijo) Sea R un operador racional. Un punto fijo $z_0 \in \overline{\mathbb{C}}$ de R se llama atractor si $|R'(z_0)| < 1$, repulsor si $|R'(z_0)| > 1$, y parabólico o neutral si $|R'(z_0)| = 1$. Si la derivada también es cero, entonces el punto se llama superatractor.

Definición 1.3.6 (Punto fijo extraño) Sea R un operador racional aplicado a un polinomio no lineal $p(z)$. Un punto fijo $z_0 \in \overline{\mathbb{C}}$ de R es un punto fijo extraño si es diferente a las raíces de $p(z)$.

Definición 1.3.7 (Punto crítico) Sea R un operador racional. Un punto $z_0 \in \overline{\mathbb{C}}$ es un punto crítico de R si $R'(z_0) = 0$.

Definición 1.3.8 (Punto crítico libre) Sea R un operador racional aplicado a un polinomio no lineal $\tilde{p}(z)$. Un punto crítico $z_0 \in \overline{\mathbb{C}}$ de R es un punto crítico libre si es diferente a las raíces de $\tilde{p}(z)$, para métodos de orden $p \geq 2$.

Definición 1.3.9 (Cuenca de atracción) *La cuenca de atracción de un atractor ξ se define como el conjunto de todos los $z_0 \in \overline{\mathbb{C}}$ tal que el método converja a ξ . Es decir,*

$$\mathcal{A}(\xi) = \{z_0 \in \overline{\mathbb{C}} : R^{\circ n}(z_0) \rightarrow \xi, n \rightarrow \infty\}.$$

Para reducir el estudio dinámico a casos más sencillos, se recurre a la utilización de clases de conjugación.

Definición 1.3.10 (Clases de conjugación) *Sean f y g funciones de la esfera de Riemann en sí misma. Una conjugación analítica entre f y g es un difeomorfismo $h : \overline{\mathbb{C}} \rightarrow \overline{\mathbb{C}}$ tal que $h \circ f = g \circ h$.*

Definición 1.3.11 (Transformación de Möbius) *Sea R_p un operador racional. Si $p(z) = (z - a)(z - b)$, entonces R_p depende de los parámetros a y b . Para eliminar esta dependencia, $O_p(z) = (h \circ R_p \circ h^{-1})(z)$, donde*

$$h(z) = \frac{z - a}{z - b},$$

que satisface

$$h(\infty) = 1, \quad h(a) = 0 \quad \text{y} \quad h(b) = \infty.$$

En el estudio dinámico, varios conjuntos se definen en la esfera de Riemann. Estos son: conjunto de Fatou, conjunto de Julia y conjunto de Mandelbrot.

Definición 1.3.12 (Conjunto de Fatou) *Sea R un operador racional. El conjunto de Fatou de R , definido como $\mathcal{F}(R)$, es el conjunto de puntos $z_0 \in \overline{\mathbb{C}}$ cuyas órbitas tienden a un atractor (punto fijo, órbita periódica o infinito).*

Definición 1.3.13 (Conjunto de Julia) *Sea R un operador racional. El conjunto de Julia de R , definido como $\mathcal{J}(R)$, es el complemento en $\overline{\mathbb{C}}$ del conjunto de Fatou. Esto significa que la cuenca de atracción de cualquier punto fijo pertenece al conjunto de Fatou y los límites de estas cuencas de atracción pertenecen al conjunto de Julia.*

Definición 1.3.14 (Conjunto de Mandelbrot) Sea $R_\alpha(z)$ un operador racional. El conjunto de Mandelbrot es un subconjunto del espacio de parámetros para la iteración de la función cuadrática compleja $R_\alpha(z) = z^2 + \alpha$. Aquí el parámetro α es complejo. El conjunto de Mandelbrot \mathcal{M} consiste de aquellos valores de α para los cuales la órbita de 0 -la sucesión $0, R_\alpha(0), R_\alpha^{\circ 2}(0), R_\alpha^{\circ 3}(0), \dots$ - es encerrada. Es decir,

$$\mathcal{M} = \{\alpha | R_\alpha^{\circ n}(0) \text{ es encerrada}\}.$$

Así, el conjunto de Mandelbrot \mathcal{M} da una imagen de los valores de α para los cuales la órbita de 0, bajo R_α , no tiende a ∞ . Las bombillas visibles en \mathcal{M} corresponden a los valores de α para los cuales R_α tiene un ciclo de atracción de cierto período. Por ejemplo, la cardioide central principal en \mathcal{M} consiste en los valores α para los cuales R_α tiene un punto fijo atractor.

Finalmente, introducimos dos definiciones más acerca del espacio de parámetros y el plano dinámico. Estas herramientas son de mucha utilidad para el análisis de convergencia y estabilidad de un operador racional asociado a un método iterativo.

Definición 1.3.15 (Espacio o plano de parámetros) Sea $R(z)$ un operador racional asociado a una familia de métodos iterativos. Sea $\alpha \in \mathbb{C}$ un parámetro de la familia y $pc(\alpha)$ un punto crítico de $R(z)$. Un espacio o plano de parámetros se define como un mallado en el plano complejo donde cada punto de este mallado corresponde a un valor distinto de α , y su representación gráfica muestra el análisis de convergencia de un método de la familia asociado a α y aplicado sobre $pc(\alpha)$.

El comportamiento dinámico del operador $R(z)$ depende de los valores del parámetro α . Los espacios de parámetros deben entonces ser construidos para cada punto crítico del operador $R(z)$; sin embargo, nos interesa conocer únicamente los espacios de parámetros asociados a puntos críticos libres donde pueden observarse regiones de estabilidad e inestabilidad del operador.

El espacio de parámetros asociado con un punto crítico libre de una familia de métodos iterativos se obtiene asociando cada punto del plano de parámetros con un valor complejo de α , es decir, con un elemento de la familia. Cada valor de α que pertenece al mismo componente conectado del espacio de parámetros da lugar a subconjuntos de esquemas de la familia con un comportamiento dinámico similar. Por lo tanto, es interesante encontrar regiones del plano de

parámetros lo más estables posibles, porque estos valores de α nos darán los mejores miembros de la familia en términos de estabilidad numérica.

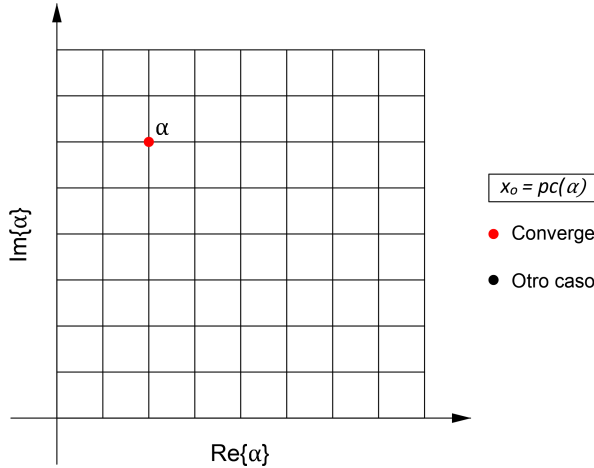


Figura 1.2: Construcción de un espacio de parámetros.

En la figura 1.2 se muestra el proceso seguido para construir un plano de parámetros. Consideremos un punto crítico libre $pc(\alpha)$ de $R(z)$. Fijamos un punto de partida del esquema iterativo de la familia asociada a cada valor complejo de α , haciendo $x_0 = pc(\alpha)$, y construimos un rectángulo $D \subset \mathbb{C}$. En este rectángulo marcamos cada punto $\alpha \in D$ con color rojo (o tonalidades de rojo acorde sea el número de iteraciones) si el método converge a alguna de las raíces a partir de x_0 , y marcamos con negro en otros casos. Varios conjuntos singulares suelen aparecer con características similares a las del conjunto de Mandelbrot (véase [22] y definición 1.3.14).

Un ejemplo de un espacio de parámetros asociado a dos puntos críticos libres de la familia de King, con esquema iterativo dado en (1.8) (véase [23]), se muestra en la figura 1.3 obtenida de [24]. Obsérvese la presencia de una figura negra, con cierta similitud con el conjunto de Mandelbrot, a la izquierda de este espacio de parámetros.

$$\begin{aligned}
 y_k &= x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)} \\
 x_{k+1} &= y_k - \frac{f(x_k) + (2 + \beta)f(y_k)}{f(x_k) + \beta f(y_k)} \frac{f(y_k)}{f'(x_k)}; \quad k = 0, 1, 2, \dots
 \end{aligned} \tag{1.8}$$

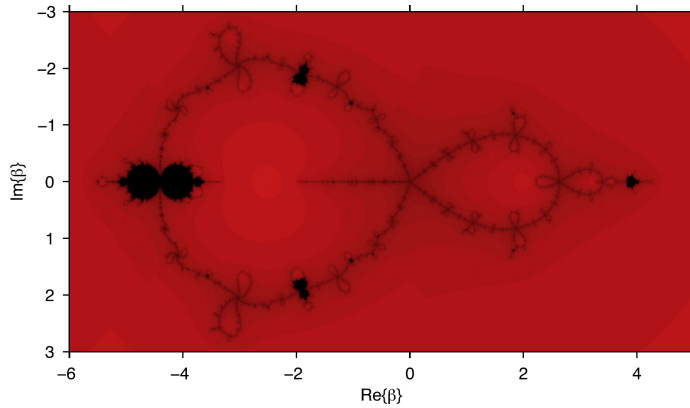


Figura 1.3: Espacio de parámetros de dos puntos críticos libres de la familia de King.

Definición 1.3.16 (Plano dinámico) Sea $R(z)$ un operador racional asociado a un método de una familia iterativa. Sea $x_0 \in \mathbb{C}$ una estimación inicial. Un plano dinámico se define como un mallado en el plano complejo donde cada punto de este mallado corresponde a un valor distinto de x_0 , y su representación gráfica muestra el análisis de convergencia del método a alguna de las raíces partiendo de x_0 .

El comportamiento dinámico del operador $R(z)$ también depende de los valores de x_0 . Los planos dinámicos se construyen para un conjunto de estimaciones iniciales de un método específico de una familia. Por otro lado, considerando que el conjunto de Fatou está formado por los puntos $z_0 \in \overline{\mathbb{C}}$ cuyas órbitas tienden a un atractor, y el conjunto de Julia por su complemento en $\overline{\mathbb{C}}$, los planos dinámicos carecen de interpretación matemática con respecto a estos conjuntos. Sin embargo, en estos planos se distinguen las cuencas de atracción por sus colores.

En la figura 1.4 se muestra el proceso seguido para generar un plano dinámico. Consideremos un método de una familia (parámetro α constante). Construimos un rectángulo $D \subset \mathbb{C}$, y establecemos un conjunto de estimaciones iniciales $x_0 \in D$. En este rectángulo asignamos un color a cada punto x_0 de acuerdo con la raíz a la que converge el método iterativo, cuya intensidad varía en función del número de iteraciones. Si aquella estimación inicial, en un número máximo de iteraciones, no ha convergido a las raíces (ya sea porque el proceso diverge o porque ha convergido a algún punto fijo extraño atractor o a una órbita periódica atractor), asignamos un color negro.

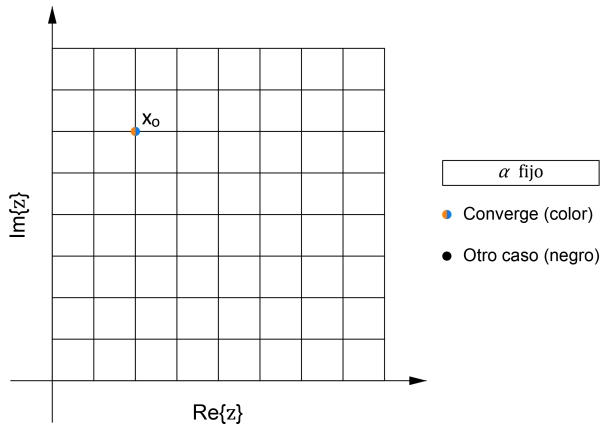


Figura 1.4: Construcción de un plano dinámico.

Un ejemplo de un plano dinámico para un método de la familia de King dada en (1.8) con $\beta = -4.5$, se muestra en la figura 1.5 obtenida de [24]. Obsérvese la presencia de cuatro diferentes cuencas de atracción.

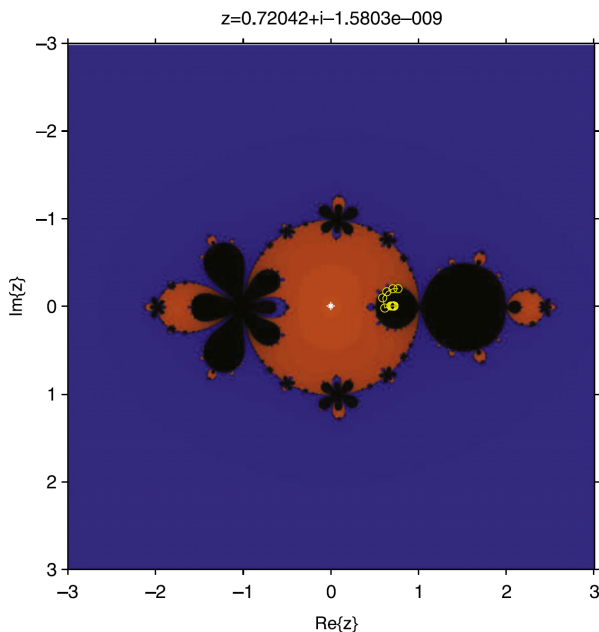


Figura 1.5: Plano dinámico de un método de la familia de King, para $\beta = -4.5$.

Capítulo 2

Familia de métodos iterativos ACTV

En este capítulo presentamos y analizamos una familia de métodos con esquemas iterativos multipaso, que es una generalización de un método propuesto por Artidiello y col. en [1], y que la llamamos familia ACTV por las siglas de los autores del método. Así, en la sección 2.1 definimos el esquema iterativo de la familia propuesta inicialmente con tres parámetros arbitrarios. En la sección 2.2 realizamos el análisis de convergencia de esta familia triparamétrica, y planteamos una estrategia para reducir su esquema iterativo a un esquema uniparamétrico y acelerar su convergencia. En la sección 2.3 abordamos el análisis de la eficiencia computacional de la familia uniparamétrica, utilizando como criterio el índice de eficiencia de Ostrowski.

2.1 Esquema iterativo

En la literatura existen varios métodos y familias de métodos iterativos que han sido diseñados para aproximar la solución de una ecuación no lineal (véase [5, 25] para una visión general). Cada método presenta un comportamiento diferente. Este comportamiento es caracterizado con los criterios de eficiencia mostrados en la sección 1.2 y con las herramientas de dinámica compleja dadas en la sección 1.3.

De los métodos existentes, en el presente trabajo estudiaremos la familia de métodos iterativos ACTV propuesta por Artidiello *y col.* en [1]. El esquema iterativo de la familia fue construido a partir del esquema de Ostrowski, agregando un paso de Newton con una derivada “congelada” y usando un operador de diferencias divididas. Entonces, la familia tiene una expresión iterativa de tres pasos. Además, posee tres parámetros arbitrarios: α , β , γ , que pueden tomar cualesquiera valores reales o complejos; y, un orden de convergencia de al menos cuatro. El orden de convergencia será analizado más adelante.

Así, el esquema iterativo de la familia de métodos ACTV triparamétrica se define como

$$\begin{aligned} y_k &= x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)} \\ z_k &= y_k - \frac{f(y_k)}{2f[x_k, y_k] - f'(x_k)} \\ x_{k+1} &= z_k - (\alpha + \beta u_k + \gamma v_k) \frac{f(z_k)}{f'(x_k)}, \end{aligned} \tag{2.1}$$

donde

$$u_k = 1 - \frac{f[x_k, y_k]}{f'(x_k)}, \quad v_k = \frac{f'(x_k)}{f[x_k, y_k]} \quad \text{y} \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

El operador de diferencias divididas $f[\cdot, \cdot] : I \times I \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{L}(\mathbb{R})$ definido por Ortega y Rheinboldt en [4], satisface

$$f[x, y](x - y) = f(x) - f(y), \quad \forall x, y \in I. \tag{2.2}$$

2.2 Análisis de convergencia

En esta sección, realizamos el análisis de convergencia de la familia de métodos iterativos ACTV triparamétrica. Además, planteamos una estrategia para reducir el esquema iterativo triparamétrico a un esquema uniparamétrico con la finalidad de acelerar la convergencia.

Teorema 2.2.1 *Sea $f : I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una función suficientemente diferenciable en un intervalo abierto I y $\xi \in I$ una raíz simple de la ecuación no lineal*

$f(x) = 0$. Supongamos que $f(x)$ es continua y suficientemente diferenciable en un entorno de la raíz simple ξ , y x_0 es una estimación inicial lo suficientemente cercana a ξ . Entonces, la sucesión $\{x_k\}_{k \geq 0}$ obtenida mediante el uso de la expresión (2.1) converge a ξ con orden de convergencia cuatro, siendo su ecuación del error

$$e_{k+1} = (1 - \alpha - \gamma)C_2 (C_2^2 - C_3) e_k^4 + \mathcal{O}(e_k^5),$$

donde

$$e_k = x_k - \xi, \quad C_q = \frac{1}{q!} \frac{f^{(q)}(\xi)}{f'(\xi)} \quad \text{y} \quad q = 2, 3, \dots$$

Prueba. Sea ξ una raíz simple de $f(x)$ (es decir, $f(\xi) = 0$ y $f'(\xi) \neq 0$) y $x_k = \xi + e_k$. Utilizando la expansión de Taylor de $f(x_k)$ y $f'(x_k)$ alrededor de ξ , tenemos

$$\begin{aligned} f(x_k) &= f(\xi + e_k) \\ &= f(\xi) + f'(\xi)e_k + \frac{1}{2!}f''(\xi)e_k^2 + \frac{1}{3!}f'''(\xi)e_k^3 + \frac{1}{4!}f^{(iv)}(\xi)e_k^4 + \mathcal{O}(e_k^5) \\ &= f'(\xi) \left[e_k + \frac{1}{2!} \frac{f''(\xi)}{f'(\xi)} e_k^2 + \frac{1}{3!} \frac{f'''(\xi)}{f'(\xi)} e_k^3 + \frac{1}{4!} \frac{f^{(iv)}(\xi)}{f'(\xi)} e_k^4 + \mathcal{O}(e_k^5) \right] \\ &= f'(\xi) [e_k + C_2 e_k^2 + C_3 e_k^3 + C_4 e_k^4 + \mathcal{O}(e_k^5)], \end{aligned} \tag{2.3}$$

$$\begin{aligned} f'(x_k) &= f'(\xi + e_k) \\ &= f'(\xi) + f''(\xi)e_k + \frac{1}{2!}f'''(\xi)e_k^2 + \frac{1}{3!}f^{(iv)}(\xi)e_k^3 + \mathcal{O}(e_k^4) \\ &= f'(\xi) \left[1 + \frac{f''(\xi)}{f'(\xi)} e_k + \frac{1}{2!} \frac{f'''(\xi)}{f'(\xi)} e_k^2 + \frac{1}{3!} \frac{f^{(iv)}(\xi)}{f'(\xi)} e_k^3 + \mathcal{O}(e_k^4) \right] \\ &= f'(\xi) [1 + 2C_2 e_k + 3C_3 e_k^2 + 4C_4 e_k^3 + \mathcal{O}(e_k^4)], \end{aligned} \tag{2.4}$$

donde

$$C_q = \frac{1}{q!} \frac{f^{(q)}(\xi)}{f'(\xi)}, \quad q = 2, 3, \dots$$

Dividiendo (2.3) por (2.4), obtenemos

$$\frac{f(x_k)}{f'(x_k)} = e_k - C_2 e_k^2 + 2(C_2^2 - C_3) e_k^3 - (4C_2^3 - 7C_2 C_3 + 3C_4) e_k^4 + \mathcal{O}(e_k^5). \quad (2.5)$$

Reemplazando (2.5) en el primer paso de la familia (2.1), tenemos

$$y_k = \xi + C_2 e_k^2 - 2(C_2^2 - C_3) e_k^3 + (4C_2^3 - 7C_2 C_3 + 3C_4) e_k^4 + \mathcal{O}(e_k^5). \quad (2.6)$$

Utilizando nuevamente la expansión de Taylor, de forma similar a (2.3), para desarrollar $f(y_k)$ alrededor de ξ , obtenemos

$$f(y_k) = f'(\xi) [C_2 e_k^2 - 2(C_2^2 - C_3) e_k^3 + (5C_2^3 - 7C_2 C_3 + 3C_4) e_k^4 + \mathcal{O}(e_k^5)]. \quad (2.7)$$

Con (2.3), (2.6) y (2.7), calculamos el operador de diferencias divididas definido en (2.2), obteniendo

$$f[x_k, y_k] = f'(\xi) [1 + C_2 e_k + (C_2^2 + C_3) e_k^2 - (2C_2^3 - 3C_2 C_3 - C_4) e_k^3 + \mathcal{O}(e_k^4)]. \quad (2.8)$$

Luego, sustituyendo (2.3), (2.4), (2.6), y (2.8) en el segundo paso de la familia (2.1), tenemos

$$z_k = \xi + (C_2^3 - C_2 C_3) e_k^4 + \mathcal{O}(e_k^5). \quad (2.9)$$

Utilizando una vez más la expansión de Taylor, de forma similar a (2.3), para desarrollar $f(z_k)$ alrededor de ξ , obtenemos

$$f(z_k) = f'(\xi) [(C_2^3 - C_2 C_3) e_k^4 + \mathcal{O}(e_k^5)]. \quad (2.10)$$

Sustituyendo (2.4) y (2.8) en u_k y v_k de la familia (2.1), tenemos

$$u_k = C_2 e_k - (3C_2^2 - 2C_3) e_k^2 + (8C_2^3 - 10C_2 C_3 + 3C_4) e_k^3 + \mathcal{O}(e_k^4), \quad (2.11)$$

$$v_k = 1 + C_2 e_k - 2(C_2^2 - C_3) e_k^2 + 3(C_2^3 - 2C_2 C_3 + C_4) e_k^3 + \mathcal{O}(e_k^4). \quad (2.12)$$

Finalmente, reemplazando (2.4), (2.9), (2.10), (2.11) y (2.12) en el tercer paso de la familia (2.1), obtenemos

$$x_{k+1} = \xi + (1 - \alpha - \gamma)C_2 (C_2^2 - C_3) e_k^4 + \mathcal{O}(e_k^5), \quad (2.13)$$

siendo la ecuación del error

$$e_{k+1} = (1 - \alpha - \gamma)C_2 (C_2^2 - C_3) e_k^4 + \mathcal{O}(e_k^5), \quad (2.14)$$

y la prueba está terminada. \square

Del Teorema 2.2.1 se desprende que la familia iterativa ACTV triparamétrica tiene orden de convergencia cuatro para cualesquiera valores reales o complejos de los parámetros α , β y γ . Sin embargo, la convergencia puede ser acelerada si se fija un parámetro y la familia es reducida a un esquema iterativo uniparamétrico. Esto último puede verse en el Teorema 2.2.2.

Teorema 2.2.2 *Sea $f : I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una función suficientemente diferenciable en un intervalo abierto I y $\xi \in I$ una raíz simple de la ecuación no lineal $f(x) = 0$. Supongamos que $f(x)$ es continua y suficientemente diferenciable en un entorno de la raíz simple ξ , y x_0 es una estimación inicial lo suficientemente cercana a ξ . Entonces, la sucesión $\{x_k\}_{k \geq 0}$ obtenida mediante el uso de la expresión (2.1) converge a ξ con orden de convergencia seis, siempre que*

$$\beta = 1 + \alpha \quad \text{y} \quad \gamma = 1 - \alpha,$$

siendo su ecuación del error

$$e_{k+1} = (6C_2^5 - 7C_2^3 C_3 + C_2 C_3^2) e_k^6 + \mathcal{O}(e_k^7),$$

donde

$$e_k = x_k - \xi, \quad C_q = \frac{1}{q!} \frac{f^{(q)}(\xi)}{f'(\xi)} \quad \text{y} \quad q = 2, 3, \dots$$

Prueba. Sea ξ una raíz simple de $f(x)$ (es decir, $f(\xi) = 0$ y $f'(\xi) \neq 0$) y $x_k = \xi + e_k$. Utilizando la expansión de Taylor de $f(x_k)$ y $f'(x_k)$ alrededor de ξ , tenemos

$$\begin{aligned}
 f(x_k) &= f(\xi + e_k) \\
 &= f(\xi) + f'(\xi)e_k + \frac{1}{2!}f''(\xi)e_k^2 + \cdots + \frac{1}{6!}f^{(vi)}(\xi)e_k^6 + \mathcal{O}(e_k^7) \\
 &= f'(\xi) \left[e_k + \frac{1}{2!} \frac{f''(\xi)}{f'(\xi)} e_k^2 + \cdots + \frac{1}{6!} \frac{f^{(vi)}(\xi)}{f'(\xi)} e_k^6 + \mathcal{O}(e_k^7) \right] \\
 &= f'(\xi) [e_k + C_2 e_k^2 + C_3 e_k^3 + C_4 e_k^4 + C_5 e_k^5 + C_6 e_k^6 + \mathcal{O}(e_k^7)],
 \end{aligned} \tag{2.15}$$

$$\begin{aligned}
 f'(x_k) &= f'(\xi + e_k) \\
 &= f'(\xi) + f''(\xi)e_k + \frac{1}{2!}f'''(\xi)e_k^2 + \cdots + \frac{1}{5!}f^{(vi)}(\xi)e_k^5 + \mathcal{O}(e_k^6) \\
 &= f'(\xi) \left[1 + \frac{f''(\xi)}{f'(\xi)} e_k + \frac{1}{2!} \frac{f'''(\xi)}{f'(\xi)} e_k^2 + \cdots + \frac{1}{5!} \frac{f^{(vi)}(\xi)}{f'(\xi)} e_k^5 + \mathcal{O}(e_k^6) \right] \\
 &= f'(\xi) [1 + 2C_2 e_k + 3C_3 e_k^2 + 4C_4 e_k^3 + 5C_5 e_k^4 + 6C_6 e_k^5 + \mathcal{O}(e_k^6)],
 \end{aligned} \tag{2.16}$$

donde

$$C_q = \frac{1}{q!} \frac{f^{(q)}(\xi)}{f'(\xi)}, \quad q = 2, 3, \dots$$

Dividiendo (2.15) por (2.16), obtenemos

$$\begin{aligned}
 \frac{f(x_k)}{f'(x_k)} &= e_k - C_2 e_k^2 + 2(C_2^2 - C_3) e_k^3 - (4C_2^3 - 7C_2 C_3 + 3C_4) e_k^4 + \\
 &\quad (8C_2^4 - 20C_2^2 C_3 + 6C_3^2 + 10C_2 C_4 - 4C_5) e_k^5 - \\
 &\quad (16C_2^5 - 52C_2^3 C_3 + 28C_2^2 C_4 - 17C_3 C_4 + \\
 &\quad C_2(33C_3^2 - 13C_5) + 5C_6) e_k^6 + \mathcal{O}(e_k^7).
 \end{aligned} \tag{2.17}$$

Reemplazando (2.17) en el primer paso de la familia (2.1), tenemos

$$\begin{aligned}
 y_k = & \xi + C_2 e_k^2 - 2(C_2^2 - C_3) e_k^3 + (4C_2^3 - 7C_2 C_3 + 3C_4) e_k^4 - \\
 & (8C_2^4 - 20C_2^2 C_3 + 6C_3^2 + 10C_2 C_4 - 4C_5) e_k^5 + \\
 & (16C_2^5 - 52C_2^3 C_3 + 28C_2^2 C_4 - 17C_3 C_4 + \\
 & C_2(33C_3^2 - 13C_5) + 5C_6) e_k^6 + \mathcal{O}(e_k^7).
 \end{aligned} \tag{2.18}$$

Utilizando nuevamente la expansión de Taylor, de forma similar a (2.15), para desarrollar $f(y_k)$ alrededor de ξ , obtenemos

$$\begin{aligned}
 f(y_k) = & f'(\xi) [C_2 e_k^2 - 2(C_2^2 - C_3) e_k^3 + (5C_2^3 - 7C_2 C_3 + 3C_4) e_k^4 \\
 & - 2(6C_2^4 - 12C_2^2 C_3 + 3C_3^2 + 5C_2 C_4 - 2C_5) e_k^5 + \\
 & (28C_2^5 - 73C_2^3 C_3 + 34C_2^2 C_4 - 17C_3 C_4 + \\
 & C_2(37C_3^2 - 13C_5) + 5C_6) e_k^6 + \mathcal{O}(e_k^7)].
 \end{aligned} \tag{2.19}$$

Con (2.15), (2.18) y (2.19), calculamos el operador de diferencias divididas definido en (2.2), obteniendo

$$\begin{aligned}
 f[x_k, y_k] = & f'(\xi) [1 + C_2 e_k + (C_2^2 + C_3) e_k^2 - \\
 & (2C_2^3 - 3C_2 C_3 - C_4) e_k^3 + \\
 & (4C_2^4 - 8C_2^2 C_3 + 2C_3^2 + 4C_2 C_4 + C_5) e_k^4 + \\
 & (-8C_2^5 + 20C_2^3 C_3 - 11C_2^2 C_4 + 5C_3 C_4 + \\
 & C_2(-9C_3^2 + 5C_5) + C_6) e_k^5 + \mathcal{O}(e_k^6)].
 \end{aligned} \tag{2.20}$$

Luego, sustituyendo (2.15), (2.16), (2.18), y (2.20) en el segundo paso de la familia (2.1), tenemos

$$\begin{aligned}
 z_k = & \xi + (C_2^3 - C_2 C_3) e_k^4 - 2(2C_2^4 - 4C_2^2 C_3 + C_3^2 + C_2 C_4) e_k^5 + \\
 & (10C_2^5 - 30C_2^3 C_3 + 12C_2^2 C_4 - 7C_3 C_4 + \\
 & 3C_2(6C_3^2 - C_5)) e_k^6 + \mathcal{O}(e_k^7).
 \end{aligned} \tag{2.21}$$

Utilizando una vez más la expansión de Taylor, de forma similar a (2.15), para desarrollar $f(z_k)$ alrededor de ξ , obtenemos

$$\begin{aligned}
 f(z_k) = f'(\xi) & [(C_2^3 - C_2C_3) e_k^4 - 2(2C_2^4 - 4C_2^2C_3 + C_3^2 + C_2C_4) e_k^5 + \\
 & (10C_2^5 - 30C_2^3C_3 + 12C_2^2C_4 - 7C_3C_4 + \\
 & 3C_2(6C_3^2 - C_5)) e_k^6 + \mathcal{O}(e_k^7)].
 \end{aligned} \tag{2.22}$$

Sustituyendo (2.16) y (2.20) en u_k y v_k de la familia (2.1), tenemos

$$\begin{aligned}
 u_k = C_2e_k - (3C_2^2 - 2C_3) e_k^2 + (8C_2^3 - 10C_2C_3 + 3C_4) e_k^3 + \\
 (-20C_2^4 + 37C_2^2C_3 - 8C_3^2 - 14C_2C_4 + 4C_5) e_k^4 + \\
 (48C_2^5 - 118C_2^3C_3 + 51C_2^2C_4 - 22C_3C_4 + \\
 C_2(55C_3^2 - 18C_5) + 5C_6) e_k^5 + \mathcal{O}(e_k^6),
 \end{aligned} \tag{2.23}$$

$$\begin{aligned}
 v_k = 1 + C_2e_k - 2(C_2^2 - C_3) e_k^2 + 3(C_2^3 - 2C_2C_3 + C_4) e_k^3 + \\
 (-3C_2^4 + 11C_2^2C_3 - 4C_3^2 - 8C_2C_4 + 4C_5) e_k^4 + \\
 (-10C_2^3C_3 + 14C_2^2C_4 + C_2(11C_3^2 - 10C_5) + \\
 5(-2C_3C_4 + C_6)) e_k^5 + \mathcal{O}(e_k^6).
 \end{aligned} \tag{2.24}$$

Finalmente, reemplazando (2.16), (2.21), (2.22), (2.23) y (2.24) en el tercer paso de la familia (2.1), obtenemos

$$\begin{aligned}
 x_{k+1} = \xi + (1 - \alpha - \gamma)C_2(C_2^2 - C_3) e_k^4 + ((-4 + 6\alpha - \beta + 5\gamma)C_2^4 + \\
 (8 - 10\alpha + \beta - 9\gamma)C_2^2C_3 - 2(1 - \alpha - \gamma)C_3^2 - 2(1 - \alpha - \gamma)C_2C_4) e_k^5 + \\
 ((10 - 22\alpha + 9\beta - 14\gamma)C_2^5 - (30 - 53\alpha + 15\beta - 39\gamma)C_2^3C_3 + \\
 2(6 - 8\alpha + \beta - 7\gamma)C_2^2C_4 - 7(1 - \alpha - \gamma)C_3C_4 + \\
 C_2((18 - 25\alpha + 4\beta - 21\gamma)C_3^2 - 3(1 - \alpha - \gamma)C_5)) e_k^6 + \mathcal{O}(e_k^7),
 \end{aligned} \tag{2.25}$$

siendo la ecuación del error

$$\begin{aligned}
 e_{k+1} = (1 - \alpha - \gamma)C_2(C_2^2 - C_3) e_k^4 + ((-4 + 6\alpha - \beta + 5\gamma)C_2^4 + \\
 (8 - 10\alpha + \beta - 9\gamma)C_2^2C_3 - 2(1 - \alpha - \gamma)C_3^2 - 2(1 - \alpha - \gamma)C_2C_4) e_k^5 + \\
 ((10 - 22\alpha + 9\beta - 14\gamma)C_2^5 - (30 - 53\alpha + 15\beta - 39\gamma)C_2^3C_3 + \\
 2(6 - 8\alpha + \beta - 7\gamma)C_2^2C_4 - 7(1 - \alpha - \gamma)C_3C_4 + \\
 C_2((18 - 25\alpha + 4\beta - 21\gamma)C_3^2 - 3(1 - \alpha - \gamma)C_5)) e_k^6 + \mathcal{O}(e_k^7).
 \end{aligned} \tag{2.26}$$

Para cancelar los factores que acompañan a e_k^4 y e_k^5 en (2.26), debe satisfacerse

$$\begin{cases} \alpha & +\gamma & = & 1 & (a) \\ 6\alpha & -\beta & +5\gamma & = & 4 & (b) \\ 10\alpha & -\beta & +9\gamma & = & 8 & (c) \end{cases} \quad (2.27)$$

Si restamos (b) de (c) en (2.27), obtenemos (a). Por tanto, el sistema tiene infinitas soluciones con

$$\beta = 1 + \alpha \quad \text{y} \quad \gamma = 1 - \alpha. \quad (2.28)$$

De esta manera, sustituyendo (2.28) en (2.26), obtenemos

$$e_{k+1} = (6C_2^5 - 7C_2^3C_3 + C_2C_3^2) e_k^6 + \mathcal{O}(e_k^7), \quad (2.29)$$

y la prueba está terminada. □

Del Teorema 2.2.2 se desprende que, si fijamos el parámetro α en (2.1), la familia de métodos iterativos ACTV triparamétrica se reduce a una familia uniparamétrica con orden de convergencia seis para cualesquiera valores reales o complejos de los parámetros α , β y γ , siempre que se satisfaga (2.28). Por lo tanto, el **esquema iterativo de la familia de métodos ACTV uniparamétrica**, dependiente únicamente del parámetro α , se define como

$$\begin{aligned} y_k &= x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)} \\ z_k &= y_k - \frac{f(y_k)}{2f[x_k, y_k] - f'(x_k)} \\ x_{k+1} &= z_k - (\alpha + (1 + \alpha)u_k + (1 - \alpha)v_k) \frac{f(z_k)}{f'(x_k)}, \end{aligned} \quad (2.30)$$

donde

$$u_k = 1 - \frac{f[x_k, y_k]}{f'(x_k)}, \quad v_k = \frac{f'(x_k)}{f[x_k, y_k]} \quad \text{y} \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

En virtud a los resultados obtenidos con el análisis de convergencia realizado, de aquí en adelante trabajaremos únicamente con la familia de métodos iterativos ACTV uniparamétrica. Un método en particular, propuesto por Artidiello y col. en [1], se da para $\alpha = 1$ con la siguiente expresión iterativa

$$\begin{aligned} y_k &= x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)} \\ z_k &= y_k - \frac{f(y_k)}{2f[x_k, y_k] - f'(x_k)} \\ x_{k+1} &= z_k - \left[3 - 2 \frac{f[x_k, y_k]}{f'(x_k)} \right] \frac{f(z_k)}{f'(x_k)} \end{aligned} \quad (2.31)$$

donde $k = 0, 1, 2, \dots$

2.3 Eficiencia computacional

En esta sección vamos a utilizar la definición de índice de eficiencia de Ostrowski EI , debido a su remarcada utilidad expuesta en la sección 1.2, para analizar la eficiencia computacional de la familia de métodos iterativos ACTV.

Recordemos que $EI = p^{1/d}$ donde p es el orden de convergencia y d es el número de evaluaciones funcionales por iteración. Entonces, para la familia ACTV uniparamétrica con esquema iterativo (2.30), se verifica que

$$p = 6 \quad \text{y} \quad d = 4.$$

Por lo tanto, el índice de eficiencia de Ostrowski es

$$EI = 6^{1/4} \approx 1.565084580. \quad (2.32)$$

Conjetura 2.3.1 (Kung-Traub [26]) *El orden de convergencia de un método iterativo sin memoria, con d evaluaciones funcionales por iteración, no puede ser mayor que la cota 2^{d-1} . Cuando se alcanza esta cota, el método es llamado óptimo.*

Además, de la conjetura Kung-Traub, se obtiene que la cota de la familia ACTV es $2^{4-1} = 8$. Esto verifica que el orden de convergencia difiere del valor de la cota, permitiendo concluir que la familia no es óptima.

Comparando la eficiencia de esta familia con la del método de Newton con esquema iterativo (1.2), cuyo índice de eficiencia es

$$EI = 2^{1/2} \approx 1.414213562. \quad (2.33)$$

Puede observarse que la familia de métodos ACTV uniparamétrica es más eficiente que el método de Newton; sin embargo, la familia ACTV no cumple el criterio de optimalidad, a diferencia del método de Newton que sí lo cumple según la conjetura de Kung-Traub.

Capítulo 3

Dinámica compleja de la familia ACTV

En este capítulo presentamos el estudio de la dinámica compleja de la familia ACTV uniparamétrica. En la sección sección 3.1 construimos el operador racional de la familia, sobre polinomios cuadráticos. En la sección sección 3.2 realizamos el análisis de puntos fijos del operador racional, y estudiamos su estabilidad. En la sección sección 3.3 abordamos el análisis de puntos críticos del operador racional. En la sección 3.4 construimos los espacios de parámetros de los puntos críticos libres de la familia. En la sección 3.5 generamos los planos dinámicos de varios métodos de la familia, para valores buenos y malos del parámetro α .

3.1 Operador racional

El operador racional es utilizado para estudiar la dinámica compleja de un método iterativo. Este operador puede ser construido sobre cualquier función no lineal; sin embargo, en este apartado construimos dicho operador sobre un polinomio cuadrático, dado que el criterio respecto al buen o mal comportamiento de un método sobre este polinomio puede ser generalizado para otras funciones no lineales.

Teorema 3.1.1 Sea $p(x) = (x - a)(x - b)$ un polinomio cuadrático genérico con raíces $a, b \in \mathbb{R}$. Sea $A_{p,\alpha}(x)$ una función racional de la familia (2.30) y aplicada sobre $p(x)$. Entonces, el operador racional asociado a esta familia es

$$R_\alpha(x) = \frac{x^6(x^6 + 5x^5 + 12x^4 + 19x^3 + 21x^2 + 14x + \alpha + 5)}{(\alpha + 5)x^6 + 14x^5 + 21x^4 + 19x^3 + 12x^2 + 5x + 1}, \quad (3.1)$$

con $\alpha \in \mathbb{C}$ un parámetro arbitrario.

Prueba. Sea $p(x) = (x - a)(x - b)$ un polinomio cuadrático genérico con raíces $a, b \in \mathbb{R}$. Si aplicamos el esquema iterativo (2.30) sobre $p(x)$, obtenemos

$$\begin{aligned} A_{p,\alpha} = & \frac{1}{(a + b - 2x)^5 (a^2 - 2x(a + b) + b^2 + 2x^2)^2} \\ & ((a + b - 2x)^4 (a^2 - 2x(a + b) + b^2 + 2x^2) (ab(a^2 + ab + b^2) + \\ & 6abx^2 - 4abx(a + b) - x^4) + \frac{1}{a^2 + a(b - 3x) + b^2 - 3bx + 3x^2} \\ & (a - x)^4 (b - x)^4 (a^4 + a^3(5b - 9x) - a^2((\alpha - 7)b^2 + \\ & (29 - 2\alpha)bx + (\alpha - 28)x^2) + a(5b^3 + (2\alpha - 29)b^2x + \\ & 2(29 - 2\alpha)bx^2 + 2(\alpha - 19)x^3) + b^4 - 9b^3x - \\ & (\alpha - 28)b^2x^2 + 2(\alpha - 19)bx^3 - (\alpha - 19)x^4), \end{aligned} \quad (3.2)$$

que depende de las raíces $a, b \in \mathbb{R}$, y del parámetro $\alpha \in \mathbb{C}$.

Si aplicamos la transformación de Möbius a (3.2) (véase la definición 1.3.11) con

$$h(w) = \frac{w - a}{w - b},$$

que satisface

$$h(\infty) = 1, \quad h(a) = 0, \quad h(b) = \infty,$$

obtenemos

$$\begin{aligned}
R_\alpha(x) &= (h \circ A_{p,\alpha} \circ h^{-1})(x) \\
&= \frac{x^6(x^6 + 5x^5 + 12x^4 + 19x^3 + 21x^2 + 14x + \alpha + 5)}{(\alpha + 5)x^6 + 14x^5 + 21x^4 + 19x^3 + 12x^2 + 5x + 1}, \tag{3.3}
\end{aligned}$$

con $\alpha \in \mathbb{C}$ un parámetro arbitrario, y la prueba está terminada. \square

Nótese que la transformación de Möbius elimina la dependencia de las raíces a, b , haciendo que la raíz a se vaya al 0 y la raíz b al infinito. Además, la divergencia del método original se irá al 1 (véase la sección 1.3).

Por otro lado, debido al factor x^6 presente en el numerador del operador racional $R_\alpha(x)$, se comprueba que el orden de convergencia de la familia ACTV uniparamétrica es 6; sin embargo, no se verifica el test de Cayley.

3.2 Análisis y estabilidad de puntos fijos

En esta sección calculamos los puntos fijos del operador racional $R_\alpha(x)$ asociado a la familia ACTV uniparamétrica (2.30), y analizamos su estabilidad.

Proposición 3.2.1 *Los puntos fijos de $R_\alpha(x)$ son las raíces de la ecuación $R_\alpha(x) = x$, esto es, $x = 0$, $x = \infty$ y los puntos fijos extraños*

- $ex_1 = 1$,
- ex_i que corresponden a las 10 raíces del polinomio $x^{10} + 6x^9 + 18x^8 + 37x^7 + 58x^6 - (\alpha - 67)x^5 + 58x^4 + 37x^3 + 18x^2 + 6x + 1$,

donde $i = 2, \dots, 11$.

De la proposición 3.2.1 se establece que existen 13 puntos fijos. De estos, el 0 y el ∞ corresponden a las raíces; y el punto fijo extraño $ex_1 = 1$ corresponde a la divergencia del método original, antes de la transformación de Möbius.

Está claro que el 0 y el ∞ son siempre puntos fijos superatractores ($|R'_\alpha(0)| = |R'_\alpha(\infty)| = 0$), pero la estabilidad de los puntos fijos extraños cambia según los valores del parámetro α .

Proposición 3.2.2 *La estabilidad del punto fijo extraño $ex_1 = 1$, resultado de evaluar $|R'_\alpha(1)|$, verifica*

- Si $\left| \frac{384}{77 + \alpha} \right| < 1$, entonces ex_1 es atractor,
- Si $\left| \frac{384}{77 + \alpha} \right| > 1$, entonces ex_1 es repulsor,
- Si $\left| \frac{384}{77 + \alpha} \right| = 1$, entonces ex_1 es parabólico.

El punto fijo extraño ex_1 no es superatractor porque $\left| \frac{384}{77 + \alpha} \right| \neq 0, \alpha \in \mathbb{C}$.

En la figura 3.1 se muestra la superficie de estabilidad del punto fijo extraño ex_1 . En esta figura se observan las zonas de atracción y repulsión, siendo la zona de atracción mucho mayor que la de repulsión. Nótese que para valores de α dentro del disco, ex_1 es repulsor; y para valores fuera del disco, ex_1 es atractor. Por tanto, es de nuestro interés trabajar siempre dentro del disco porque el punto fijo extraño $ex_1 = 1$ proviene de la divergencia del método original; y por tanto, debe ser repulsor.

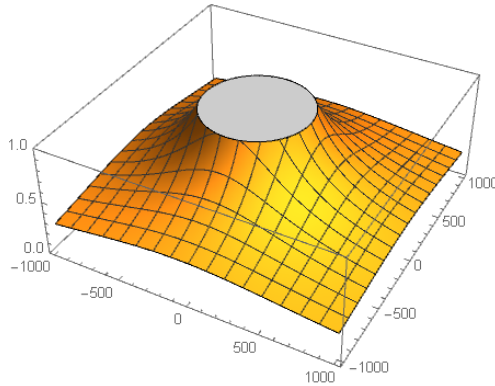


Figura 3.1: Superficie de estabilidad de $ex_1 = 1$.

Proposición 3.2.3 *Los puntos fijos extraños conjugados, que satisfacen $ex_i = \frac{1}{ex_j}$ para $i \neq j$ son*

- ex_2 y ex_3 ,
- ex_4 y ex_5 ,

- ex_6 y ex_9 ,
- ex_7 y ex_8 ,
- ex_{10} y ex_{11} .

Con la proposición 3.2.3, el estudio de la estabilidad de puntos fijos extraños se reduce a la mitad. Esto se debe a que cada par de puntos fijos extraños conjugados presenta similares características de estabilidad.

Proposición 3.2.4 *Los puntos fijos extraños repulsores, que siempre satisfacen $|R'_\alpha(x)| > 1$, son ex_2, ex_3 .*

Debido a las proposiciones 3.2.3 y 3.2.4, en las figuras 3.2, 3.3, 3.4 y 3.5, se muestran las superficies de estabilidad de 8 puntos fijos extraños que pueden ser atractores o repulsores, dependiendo del valor de α .

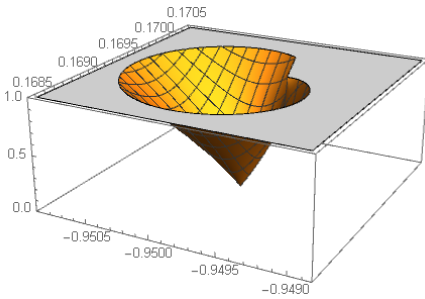


Figura 3.2: Superficie de estabilidad de ex_4, ex_5 .

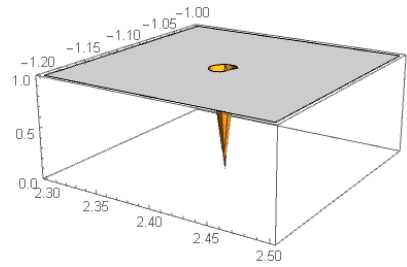


Figura 3.3: Superficie de estabilidad de ex_6, ex_9 .

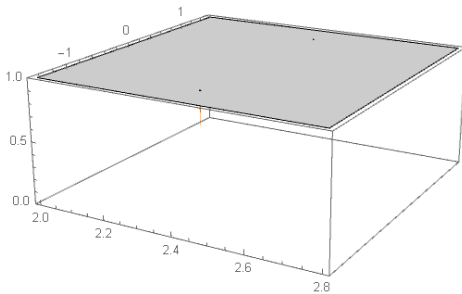


Figura 3.4: Superficie de estabilidad de ex_7, ex_8 .

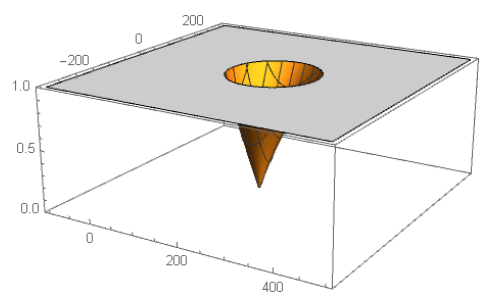


Figura 3.5: Superficie de estabilidad de ex_{10}, ex_{11} .

Proposición 3.2.5 *Los puntos fijos extraños que satisfacen $|R'_\alpha(x)| = 0$ para al menos un valor de α , son*

- ex_4, ex_5 superatractores si $\alpha = -0.949874 \pm 0.16946i$,
- ex_6, ex_9 superatractores si $\alpha = 2.40285 \pm 1.11088i$,
- ex_{10}, ex_{11} superatractores si $\alpha = 178.653$.

Debido a la proposición 3.2.5, existen 6 puntos fijos extraños que pueden llegar a ser superatractores para determinados valores de α . Esto significa que existiría una cuenca de atracción del punto fijo extraño, y podría provocar que el método no converja a la solución.

3.3 Análisis de puntos críticos

En esta sección calculamos los puntos críticos del operador racional $R_\alpha(x)$ asociado a la familia ACTV uniparamétrica (2.30).

Proposición 3.3.1 *Los puntos críticos de $R_\alpha(x)$ son las raíces de la ecuación $R'_\alpha(x) = 0$, esto es, $x = 0$, $x = \infty$ y los puntos críticos libres*

- $cr_1 = -1$,
- $cr_2 = -i$,
- $cr_3 = i$,
- cr_i que corresponden a las 6 raíces del polinomio $(6\alpha+30)x^6 + (\alpha+103)x^5 + (2\alpha+206)x^4 + (-6\alpha+246)x^3 + (2\alpha+206)x^2 + (\alpha+103)x + 6\alpha+30$,

donde $i = 4, \dots, 9$.

De la proposición 3.3.1 se establece que existen 11 puntos críticos. De estos, el 0 y el ∞ corresponden a las raíces.

Además, los puntos críticos libres $cr_1 = -1$, $cr_2 = -i$ y $cr_3 = i$, son preimágenes del punto fijo extraño $ex_1 = 1$ que viene de la divergencia del método original. Por lo tanto, su estabilidad corresponderá a la estabilidad del punto fijo 1 (véase la sección 3.2).

Proposición 3.3.2 *Los puntos críticos libres conjugados, que satisfacen $cr_i = \frac{1}{cr_j}$ para $i \neq j$ son*

- cr_2 y cr_3 ,
- cr_4 y cr_5 ,
- cr_6 y cr_7 ,
- ex_8 y cr_9 .

Con la proposición 3.3.2, el estudio dinámico de los puntos críticos libres se reduce a la mitad. Esto se verá más adelante en la sección 3.4.

Para ilustrar el comportamiento de dos puntos críticos conjugados, en la figura 3.6 se presenta un diagrama de bifurcación de cr_4, cr_5 . En esta figura, el punto crítico cr_4 es representado en color negro, y el punto crítico cr_5 en color naranja. Además, se ha dibujado el punto fijo superatractor 0 en rojo, el punto crítico libre $cr_1 = -1$ en azul, y el punto fijo extraño $ex_1 = 1$ en verde. Nótese la forma en que se complementan cr_4 con cr_5 , y el comportamiento atrayente que se genera en la región central.

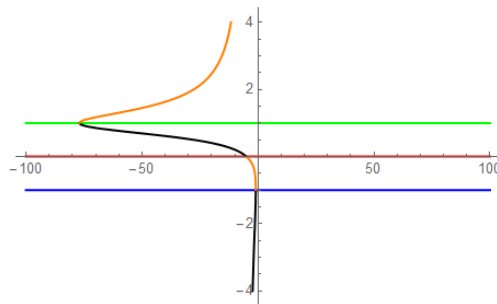


Figura 3.6: Diagrama de bifurcación de cr_4, cr_5 .

3.4 Espacios de parámetros

El comportamiento dinámico del operador $R_\alpha(x)$ depende de los valores del parámetro α . El espacio de parámetros correspondiente a un punto crítico libre de la familia ACTV uniparamétrica dada en (2.30) se obtiene asociando cada punto del plano de parámetros con un valor complejo de α , es decir, con un

elemento de la familia. Cada valor de α que pertenece a la misma componente conexa del espacio de parámetros da lugar a subconjuntos de esquemas de la familia con un comportamiento dinámico similar. Por lo tanto, es interesante encontrar regiones del plano de parámetros lo más estables posible, porque estos valores de α nos darán los mejores miembros de la familia en términos de estabilidad numérica. En este sentido, construimos los espacios de parámetros para los puntos críticos libres independientes obtenidos en la sección 3.3.

En la familia ACTV existen 9 puntos críticos libres. De éstos, los puntos críticos $cr_1 = -1$, $cr_2 = -i$ y $cr_3 = i$, son preimágenes del punto fijo extraño $ex_1 = 1$ (véase la sección 3.3), y por tanto, sus espacios de parámetros son los mismos. Los puntos críticos restantes, cr_4 a cr_9 , son conjugados en pares (véase la sección 3.3), lo que da lugar a 3 diferentes espacios de parámetros.

De esta manera, obtenemos los espacios de parámetros asociados a los puntos críticos $x = cr_i$, $i = 1, 2, 3$; $x = cr_4$, $x = cr_5$; $x = cr_6$, $x = cr_7$; y, $x = cr_8$, $x = cr_9$; llamados P_1 , P_2 , P_3 y P_4 , respectivamente. Estos espacios de parámetros se muestran en las figuras 3.7, 3.8, 3.9 y 3.10, en el orden indicado.

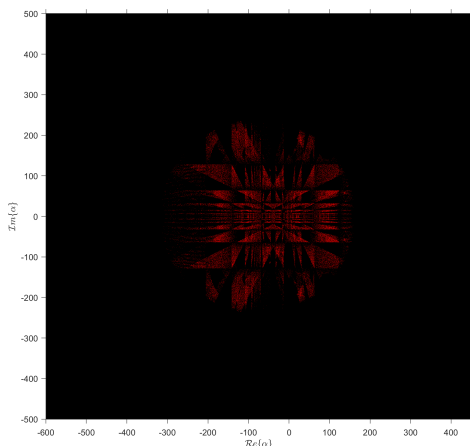


Figura 3.7: Espacio de parámetros P_1 asociado a $x = cr_i$, $i = 1, 2, 3$.

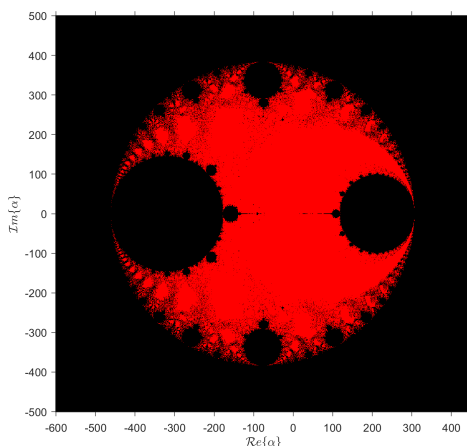


Figura 3.8: Espacio de parámetros P_2 asociado a $x = cr_4$, $x = cr_5$.

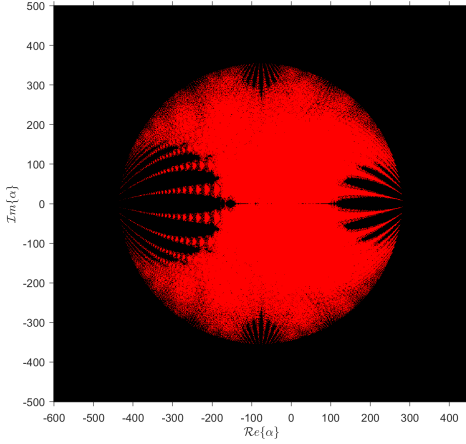


Figura 3.9: Espacio de parámetros P_3 asociado a $x = cr_6$, $x = cr_7$.

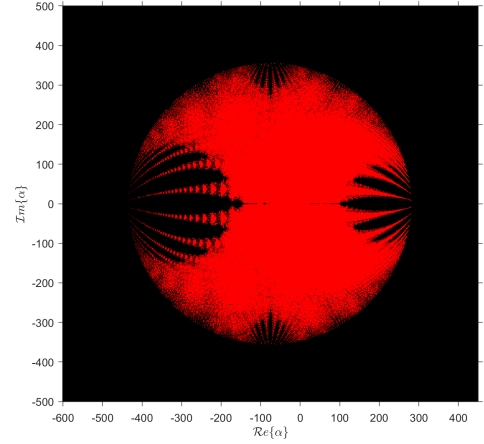


Figura 3.10: Espacio de parámetros P_4 asociado a $x = cr_8$, $x = cr_9$.

Los planos P_3 y P_4 presentan características similares. Poseen detalles que los diferencian, pero para el análisis podemos seleccionar cualquiera de los dos.

En la región central izquierda del espacio de parámetros P_2 , aparece un bulbo con cierta similitud con el conocido conjunto de Mandelbrot (véase la sección 1.3). Este bulbo se muestra en la figura 3.11 y se reproduce a diferentes escalas en todo el plano de parámetros.

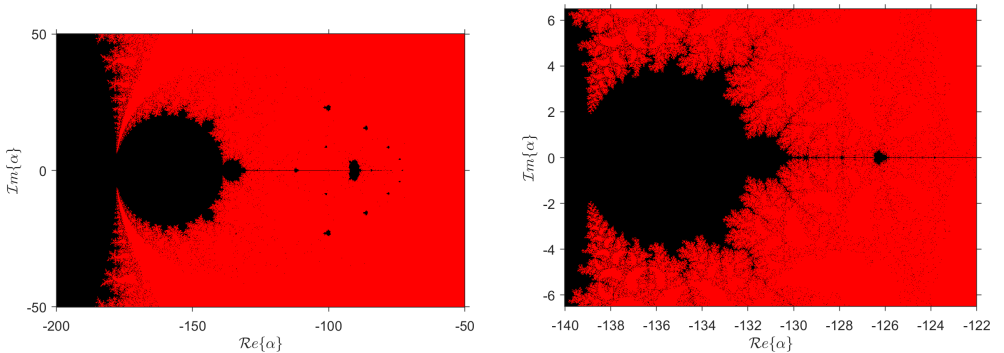


Figura 3.11: Detalles de la región central izquierda y sus antenas de P_2 .

Los valores de $\alpha = -1$, $\alpha = 0$ y $\alpha = 1$, simplifican el esquema iterativo de la familia ACTV uniparamétrica dada en (2.30). Se observa que estos valores

cancelan un término en el tercer paso del esquema iterativo. Esto tiene especial utilidad para mejorar la eficiencia computacional del método asociado porque se reducen los tiempos de procesamiento que se requieren para alcanzar la solución (véase la subsección 4.2.2). Entonces, analizando las regiones de los espacios de parámetros P_2 , P_3 y P_4 , se observa que estos valores de α se encuentran dentro de regiones de estabilidad. Por tanto, los métodos asociados presentan un buen comportamiento dinámico en términos de estabilidad numérica. Lo anterior se ilustra con mayor detalle en la figura 3.12. Estos métodos son estudiados, más adelante, en la subsección 3.5.1.

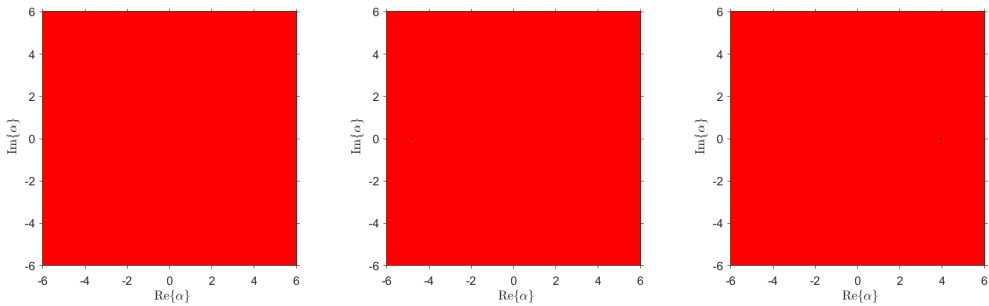


Figura 3.12: Detalles de la región central de P_2 , P_3 y P_4 .

Por otro lado, si elegimos valores fuera de las regiones de estabilidad de los espacios de parámetros, el comportamiento dinámico de los métodos asociados a estos parámetros presentan un mal comportamiento dinámico en términos de estabilidad numérica. Por ejemplo, si elegimos $\alpha = 200$, $\alpha = 400$ y $\alpha = -300$, observamos que estos valores están fuera de las regiones de estabilidad. Los métodos asociados a estos parámetros son estudiados en la subsección 3.5.2.

3.5 Planos dinámicos

En esta sección estudiamos la estabilidad de los métodos de la familia ACTV uniparamétrica propuestos en la sección 3.4, mediante la utilización de planos dinámicos. Los valores del parámetro α han sido tomados dentro y fuera de las regiones de estabilidad observadas en los espacios de parámetros de los puntos críticos libres de la familia. Así, consideramos tres valores dentro de la región de estabilidad: $\alpha = -1$, $\alpha = 0$ y $\alpha = 1$, que a su vez simplifican el esquema iterativo de la familia ACTV uniparamétrica dada en (2.30); y, tres valores fuera de la región de estabilidad: $\alpha = 200$, $\alpha = 400$ y $\alpha = -300$.

Sin embargo, otros valores de α pueden también ser analizados, dado que existe un infinito número de miembros de la familia. Por ejemplo, los puntos $-50 \pm 50i$, $\pm 100i$, $50 \pm 150i$, se encuentran dentro de la región de estabilidad; y, los puntos $-75 \pm 350i$, -155 , -135 , se encuentran fuera de dicha región (véase las figuras 3.8 y 3.9). Inclusive, para el valor de $\alpha = -135$, sería muy interesante conocer el comportamiento dinámico del método asociado, puesto que se encuentra dentro del bulbo que posee cierta similitud con el conjunto de Mandelbrot (véase la figura 3.11).

En los planos dinámicos, los puntos fijos son representados con un círculo ‘○’, los críticos con un cuadrado ‘□’, y los atractores con un asterisco ‘*’.

3.5.1 Métodos dentro de la región de estabilidad

Los planos dinámicos de los métodos asociados a $\alpha = -1$, $\alpha = 0$ y $\alpha = 1$, se muestran en las figuras 3.13, 3.14 y 3.15, respectivamente. Los tres métodos presentan dos cuencas de atracción asociadas a las raíces. La cuenca del 0 se identifica en color naranja, y la cuenca del infinito en color azul.

Para $\alpha = -1$, se observan **11 puntos fijos**: 0 , 1 , $-0.5476 \pm 0.2852i$, $-0.0048 \pm 0.6615i$, $-0.0111 \pm 1.5115i$, $-1.4365 \pm 0.7482i$, ∞ ; y, **8 puntos críticos**: 0 , $\pm i$, $-0.8202 \pm 0.5721i$, $-0.3048 \pm 0.9524i$, ∞ . El punto 0 y el infinito, son puntos fijos y críticos, por tanto superatractores. Existen 9 puntos fijos extraños y 6 puntos críticos libres. Los puntos críticos libres $\pm i$ son preimágenes del 1 que viene de la divergencia del método original, antes de la transformación de Möbius; sin embargo, el punto fijo extraño 1 no es atractor para este valor de α .

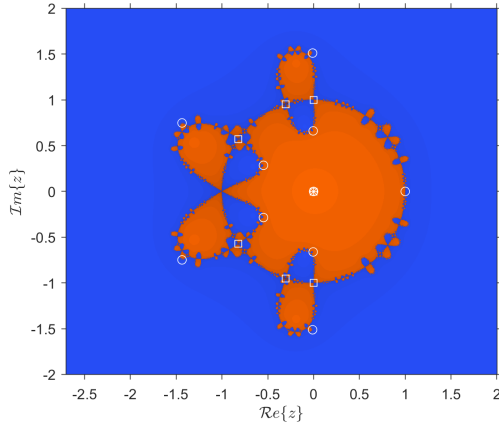


Figura 3.13: Plano dinámico del método asociado a $\alpha = -1$.

Para $\alpha = 0$, se observan **13 puntos fijos**: $0, 1, -0.4816 \pm 0.2014i, -0.0233 \pm 0.6676i, -0.6755 \pm 0.7373i, -0.0523 \pm 1.4961i, -1.7672 \pm 0.7391i, \infty$; y, **11 puntos críticos**: $-1, 0, \pm i, -0.5342 \pm 0.5792i, -0.3220 \pm 0.9467i, -0.8605 \pm 0.9330i, \infty$. El punto 0 y el infinito, son puntos fijos y críticos, por tanto superatractores. Existen 11 puntos fijos extraños y 9 puntos críticos libres. Los puntos críticos libres -1 y $\pm i$ son preimágenes del 1 que viene de la divergencia del método original; sin embargo, el punto fijo extraño 1 es repulsor.

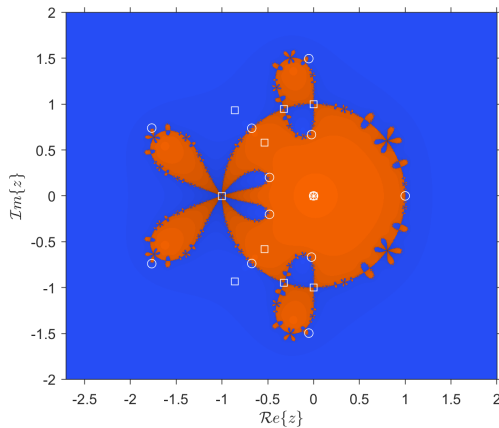


Figura 3.14: Plano dinámico del método asociado a $\alpha = 0$.

Para $\alpha = 1$, se observan **11 puntos fijos**: $0, 1, -0.4476 \pm 0.1881i, -0.0479 \pm 0.6714i, -0.1058 \pm 1.4819i, -1.8987 \pm 0.7980i, \infty$; y, **7 puntos críticos**: $-1, 0, \pm i, -0.4444 \pm 0.8958i, \infty$. El punto 0 y el infinito, son puntos fijos y críticos, por tanto superatractores. Existen 9 puntos fijos extraños y 5 puntos críticos libres. Los puntos críticos libres -1 y $\pm i$ son preimágenes del 1 que viene de la divergencia del método original; sin embargo, el punto fijo extraño 1 no es atractor, con lo que no tiene cuenca propia.

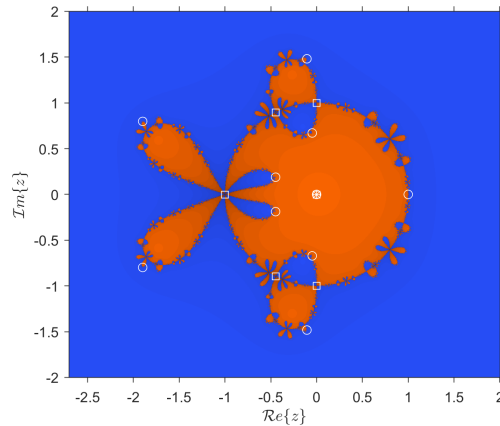


Figura 3.15: Plano dinámico del método asociado a $\alpha = 1$.

En las figuras 3.16, 3.17 y 3.18, se observan algunas órbitas de convergencia a las raíces. No se aprecian zonas negras de no convergencia del método a la solución.

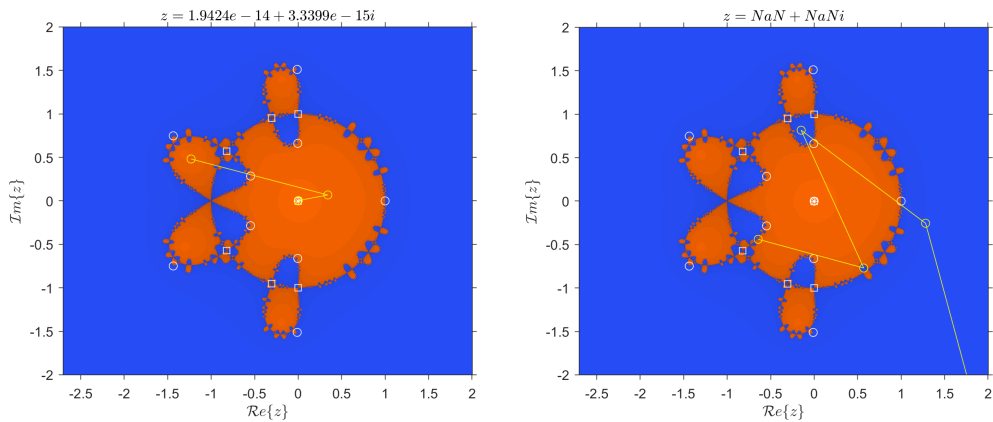


Figura 3.16: Órbitas de convergencia a las raíces para el método asociado a $\alpha = -1$.

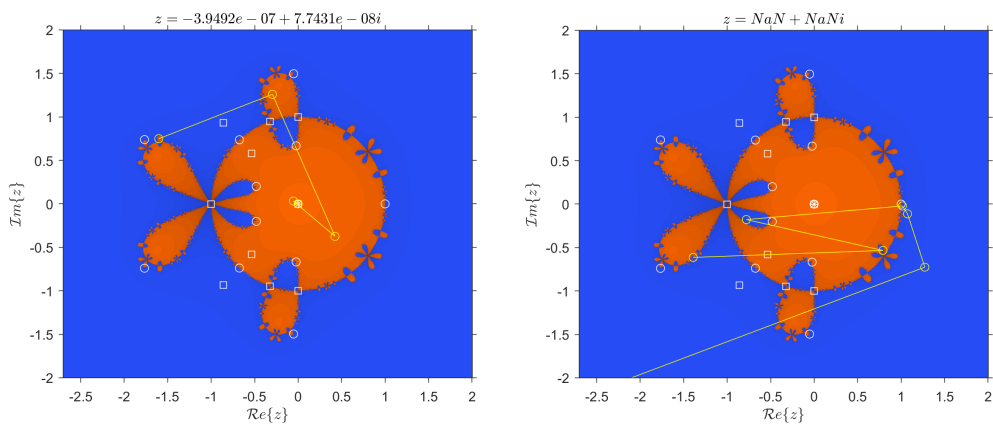


Figura 3.17: Órbitas de convergencia a las raíces para el método asociado a $\alpha = 0$.

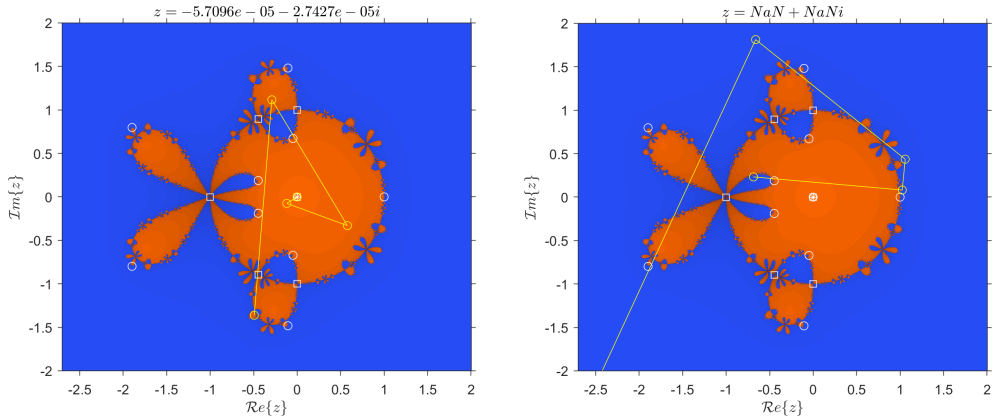


Figura 3.18: Órbitas de convergencia a las raíces para el método asociado a $\alpha = 1$.

En consecuencia, del análisis realizado, estos métodos presentan un buen comportamiento dinámico: son muy estables. De estos métodos destaca el miembro de la familia ACTV para $\alpha = 1$, dado que posee menos puntos fijos extraños y puntos críticos libres.

Los resultados del rendimiento numérico de los tres métodos son presentados en la sección 4.2.

3.5.2 Métodos fuera de la región de estabilidad

El plano dinámico del método asociado a $\alpha = 200$, se muestra en la figura 3.19. El método presenta cuatro cuencas de atracción. La cuenca del 0 en color naranja, la cuenca del infinito en color azul, y otras dos cuencas, que no corresponden a las raíces, en colores verde y rojo. Se aprecian, además, zonas negras de convergencia lenta del método.

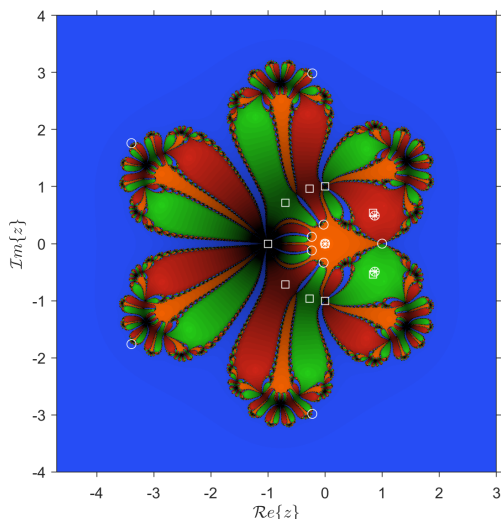


Figura 3.19: Plano dinámico del método asociado a $\alpha = 200$.

El método tiene **13 puntos fijos**: 0 , 1 , $-0.2323 \pm 0.1206i$, $-0.0249 \pm 0.3334i$, $0.8708 \pm 0.4916i$, $-0.2225 \pm 2.9824i$, $-3.3911 \pm 1.7606i$, ∞ ; y, **11 puntos críticos**: -1 , 0 , $\pm i$, $-0.6964 \pm 0.7177i$, $-0.2700 \pm 0.9629i$, $0.8432 \pm 0.5376i$, ∞ .

El punto 0 y el infinito, son puntos fijos y críticos, por tanto superatractores. Existen 11 puntos fijos extraños y 9 puntos críticos libres. Los puntos críticos libres -1 y $\pm i$ son preimágenes del 1 que viene de la divergencia del método original; sin embargo, el punto fijo extraño 1 es repulsor.

Los puntos fijos $0.8708 - 0.4916i$ y $0.8708 + 0.4916i$, son puntos fijos extraños atractores, y se encuentran en las cuencas de atracción representadas con colores verde y rojo, respectivamente. Además, en la cuenca en verde está el punto crítico libre $0.8432 - 0.5376i$; y, en la cuenca en rojo el punto crítico libre $0.8432 + 0.5376i$. Esto genera inestabilidad en el método. Las estimaciones iniciales que caigan en estas cuencas, irán a parar a los puntos fijos extraños atractores mencionados. Lo anterior se ilustra con mayor detalle en la figura 3.20.

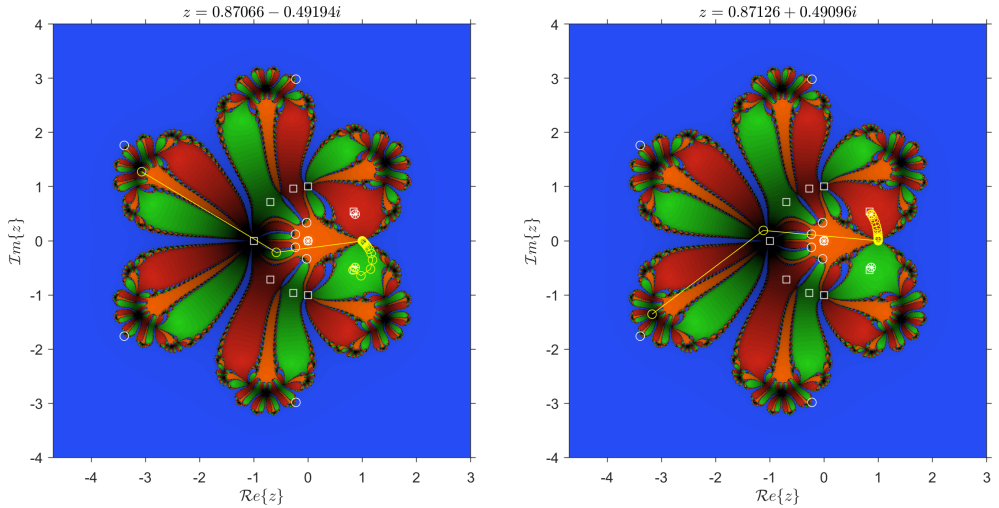


Figura 3.20: Órbitas de convergencia a puntos fijos extraños atractores para el método asociado a $\alpha = 200$.

Además, el área de la cuenca del 0 es pequeña, lo cual disminuye las posibilidades de convergencia del método a la solución. En consecuencia, del análisis realizado, el método asociado a $\alpha = 200$ presenta un mal comportamiento dinámico: es inestable.

El plano dinámico del método asociado a $\alpha = 400$, se muestra en la figura 3.21. El método presenta tres cuencas de atracción. La cuenca del 0 en color naranja, la cuenca del infinito en color azul, y otra cuenca, que no corresponde a las raíces, en color verde. Se aprecian zonas negras de convergencia lenta del método.

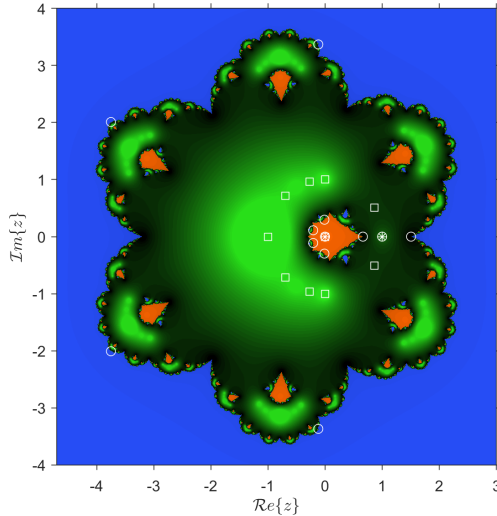


Figura 3.21: Plano dinámico del método asociado a $\alpha = 400$.

El método tiene **13 puntos fijos**: 0 , 1 , $-0.2072 \pm 0.1110i$, $-0.0103 \pm 0.2966i$, 0.6637 , 1.5067 , $-0.1175 \pm 3.3677i$, $-3.7502 \pm 2.0086i$, ∞ ; y, **11 puntos críticos**: -1 , 0 , $\pm i$, $-0.6966 \pm 0.7175i$, $-0.2703 \pm 0.9628i$, $0.8634 \pm 0.5046i$, ∞ .

El punto 0 y el infinito, son puntos fijos y críticos, por tanto superatractores. Existen 11 puntos fijos extraños y 9 puntos críticos libres. Los puntos críticos libres -1 y $\pm i$ son preimágenes del 1 que viene de la divergencia del método original; pero, además, el punto fijo extraño 1 es atractor. La existencia de estos puntos críticos como preimágenes hacen que su cuenca (la del 1) cobre protagonismo.

El punto fijo 1 , que es extraño y atractor, se encuentra en la cuenca de atracción representada en color verde. Además, en esta cuenca se encuentran nueve puntos críticos libres (todos menos el 0). Esto genera una gran inestabilidad en el método. Las estimaciones iniciales que caigan en esta cuenca, irán a parar al 1 ; es decir, a la divergencia del método. Lo anterior se ilustra con mayor detalle en la figura 3.22.

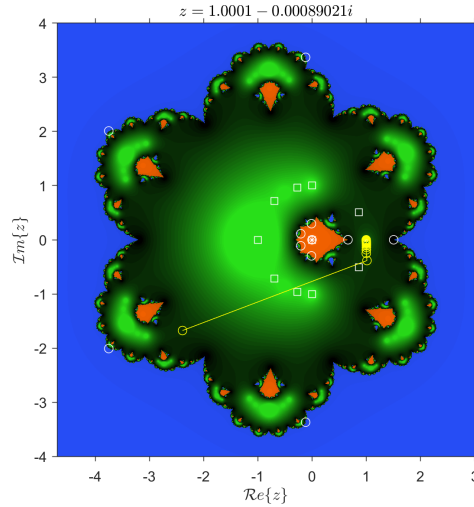


Figura 3.22: Órbita de convergencia a un punto fijo extraño atractor para el método asociado a $\alpha = 400$.

Además, el área de la cuenca del 0 es muy pequeña, lo cual disminuye considerablemente las posibilidades de convergencia del método a la solución. En consecuencia, del análisis realizado, el método asociado a $\alpha = 400$ presenta un mal comportamiento dinámico: es muy inestable.

El plano dinámico del método asociado a $\alpha = -300$, se muestra en la figura 3.23. El método presenta tres cuencas de atracción. La cuenca del 0 en color naranja, la cuenca del infinito en color azul, y otra cuenca, que no corresponde a las raíces, en color negro.

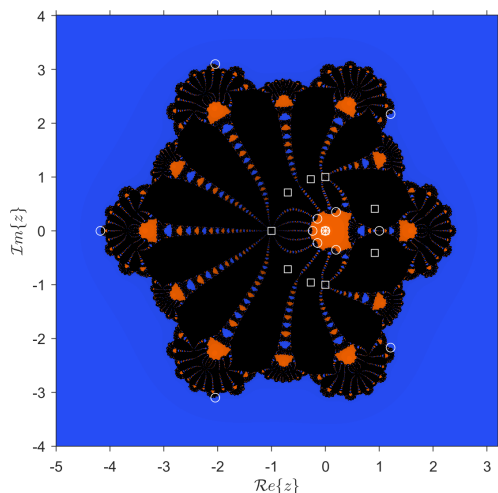


Figura 3.23: Plano dinámico del método asociado a $\alpha = -300$.

El método tiene **13 puntos fijos**: $0, 1, -0.2392, -0.1485 \pm 0.2247i, 0.1961 \pm 0.3517i, 1.2091 \pm 2.1691i, -2.0471 \pm 3.0982i, -4.1801, \infty$; y, **11 puntos críticos**: $-1, 0, \pm i, -0.6971 \pm 0.7170i, -0.2709 \pm 0.9626i, 0.9124 \pm 0.4093i, \infty$.

El punto 0 y el infinito, son puntos fijos y críticos, por tanto superatractores. Existen 11 puntos fijos extraños y 9 puntos críticos libres. Los puntos críticos libres -1 y $\pm i$ son preimágenes del 1 que viene de la divergencia del método original; sin embargo, el punto fijo extraño 1 es repulsor.

La cuenca en negro está asociada a una órbita periódica atractora de período 2 , $\{0.9150 - 0.4034i, 0.9150 + 0.4034i\}$. Esto genera una gran inestabilidad en el método. Las estimaciones iniciales que caigan en esta cuenca, irán a parar a la órbita periódica atractora. Lo anterior se ilustra con mayor detalle en la figura 3.24.

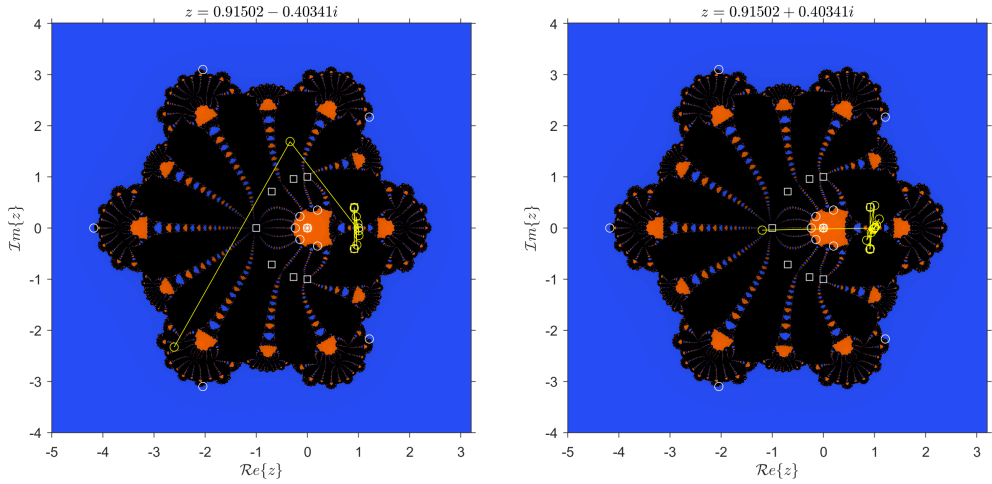


Figura 3.24: Órbita periódica atractora para el método asociado a $\alpha = -300$.

Además, el área de la cuenca del 0 es muy pequeña, lo cual disminuye considerablemente las posibilidades de convergencia del método a la solución. En consecuencia, del análisis realizado, el método asociado a $\alpha = -300$ presenta un mal comportamiento dinámico: es muy inestable.

Los resultados del rendimiento numérico de los tres métodos son presentados en la sección 4.2.

Capítulo 4

Resultados numéricos

En este capítulo presentamos los resultados numéricos de varios experimentos realizados con algunos métodos de la familia ACTV uniparamétrica, utilizando varias funciones no lineales de prueba. Estos resultados son comparados con cinco métodos dados en la literatura: Newton de orden 2, Ostrowski de orden 4 y tres métodos de orden 6 propuestos por Alzahrani y col. en [27], Chun y Ham en [28], y Amat y col. en [29]. Así, en la sección 4.1 definimos los métodos de orden 6 referidos. En la sección 4.2 desarrollamos los experimentos numéricos.

4.1 Métodos iterativos de sexto orden

En esta sección presentamos tres métodos de orden 6 con esquemas iterativos de tres pasos obtenidos de la literatura. Estos métodos son utilizados en la sección 4.2 como métodos referentes durante el desarrollo de los experimentos numéricos.

Definición 4.1.1 (Método iterativo ABA) *El esquema iterativo del método ABA, propuesto por Alzahrani y col. en [27], genera la sucesión de iterados definida a partir de*

$$\begin{aligned}
 y_k &= x_k - \frac{2}{3} \frac{f(x_k)}{f'(x_k)} \\
 z_k &= x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)} \left(\frac{3(f'(y_k) + f'(x_k))}{4(3f'(y_k) - f'(x_k))} + \frac{1}{4} \right) \\
 x_{k+1} &= z_k - \left(-\frac{2}{f'(x_k)} + \frac{6}{f'(x_k) + f'(y_k)} \right) f(z_k)
 \end{aligned} \tag{4.1}$$

donde $k = 0, 1, 2, \dots$; siendo el orden de convergencia del método $p = 6$.

Definición 4.1.2 (Método iterativo CH) *El esquema iterativo del método CH, propuesto por Chun y Ham en [28], genera la sucesión de iterados definida a partir de*

$$\begin{aligned}
 y_k &= x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)} \\
 z_k &= y_k - \frac{f(x_k)}{f(x_k) - 2f(y_k)} \frac{f(y_k)}{f'(x_k)} \\
 x_{k+1} &= z_k - \left(1 + 2 \frac{f(y_k)}{f(x_k)} + \frac{f^2(y_k)}{f^2(x_k)} + \frac{f^3(y_k)}{f^3(x_k)} \right) \frac{f(z_k)}{f'(x_k)}
 \end{aligned} \tag{4.2}$$

donde $k = 0, 1, 2, \dots$; siendo el orden de convergencia del método $p = 6$.

Definición 4.1.3 (Método iterativo AHR) *El esquema iterativo del método AHR, propuesto por Amat y col. en [29], genera la sucesión de iterados definida a partir de*

$$\begin{aligned}
 y_k &= x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)} \\
 z_k &= y_k + \frac{1}{2} L_f(x_k)(y_k - x_k) \\
 x_{k+1} &= z_k - \left(1 + L_f(x_k) + \frac{3}{2} L_f^2(x_k) - \frac{1}{2} \frac{f'''(x_k)}{f'(x_k)} \left(\frac{f(x_k)}{f'(x_k)} \right)^2 \right) \frac{f(z_k)}{f'(x_k)}
 \end{aligned} \tag{4.3}$$

donde

$$L_f(x_k) = \frac{f''(x_k)f(x_k)}{f'(x_k)^2} \quad \text{y} \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

siendo el orden de convergencia del método $p = 6$.

4.2 Experimentos numéricos

En esta sección presentamos varios experimentos numéricos con la finalidad de verificar los resultados teóricos de convergencia, eficiencia computacional y estabilidad de la familia ACTV uniparamétrica, con esquema iterativo (2.30), obtenidos en capítulos anteriores.

En los experimentos utilizamos varios métodos de la familia, con valores buenos y malos del parámetro α . Estos métodos son analizados con algunas funciones no lineales de prueba, y los resultados obtenidos son comparados con cinco diferentes métodos obtenidos de la literatura: Newton de un paso y orden 2; Ostrowski de dos pasos y orden 4; ABA, CH y AHB, de tres pasos y orden 6. Los esquemas iterativos de los métodos de Newton y Ostrowski se dan en las ecuaciones (1.2) y (1.3), respectivamente; mientras que, los esquemas iterativos de los métodos ABA, CH y AHB se definen en la sección 4.1.

Los cálculos son desarrollados en el paquete de programación Matlab R2020a utilizando aritmética de precisión variable con 200 dígitos de mantisa. Para cada método, analizamos el número de iteraciones (iter) necesarias para converger a la solución, de modo que los criterios de parada $|x_{k+1} - x_k| < 10^{-100}$ o $|f(x_{k+1})| < 10^{-100}$ se satisfacen. Notemos que, $|x_{k+1} - x_k|$ representa el error entre dos iteraciones consecutivas, y $|f(x_{k+1})|$ el error residual de la función no lineal de prueba.

Para verificar el orden teórico de convergencia (p), calculamos el orden computacional de convergencia aproximado (ACOC) dado en (1.7). En los resultados numéricos que se presentan más adelante, si las entradas del vector ACOC no estabilizan sus valores a lo largo del proceso iterativo, se marca como '-'; y, si alguno de los métodos utilizados no alcanza la convergencia en un máximo de 50 iteraciones, se marca como 'nc'.

Para ilustrar la eficiencia computacional de cada método utilizado, se mide el tiempo de procesamiento (tcpu) que requiere el esquema iterativo para converger a la solución, en segundos. Este valor se determina como la media aritmética de 10 ejecuciones del método.

Así, en un primer experimento (véase la subsección 4.2.1), realizamos un análisis comparativo entre un método estable de la familia ACTV y los cinco métodos arriba descritos.

En un segundo experimento (véase la subsección 4.2.2), realizamos un análisis de estabilidad de la familia ACTV. Utilizamos seis métodos de la familia, obtenidos con tres valores buenos y tres valores malos del parámetro α .

Todos los métodos son aplicados sobre diez funciones no lineales de prueba, cuyas expresiones y raíces correspondientes son:

$$\begin{aligned}
 f_1(x) &= \sin(x) - x^2 + 1, & \xi &\approx -0.6367326508 \\
 f_2(x) &= x^2 - \exp(x) - 3x + 2, & \xi &\approx 0.2575302854 \\
 f_3(x) &= \cos(x) - x \exp(x) + x^2, & \xi &\approx 0.6391540963 \\
 f_4(x) &= \exp(x) - 1.5 - \arctan(x), & \xi &\approx -14.1012697727 \\
 f_5(x) &= x^3 + 4x^2 - 10, & \xi &\approx 1.3652300134 \\
 f_6(x) &= 8x - \cos(x) - 2x^2, & \xi &\approx 0.1280771028 \\
 f_7(x) &= x \exp(x^2) - \sin^2(x) + 3 \cos(x) + 5, & \xi &\approx -1.2076478271 \\
 f_8(x) &= \sqrt{x^2 + 2x + 5} - 2 \sin(x) - x^2 + 3, & \xi &\approx 2.3319676559 \\
 f_9(x) &= x^4 + \sin\left(\frac{\pi}{x^2}\right) - 5, & \xi &\approx -1.4142135624 \\
 f_{10}(x) &= \sqrt{x^4} + \sin\left(\frac{\pi}{x^2}\right) - \frac{3}{16}, & \xi &\approx -0.9059869793
 \end{aligned}$$

En el desarrollo de las pruebas numéricas comenzamos las iteraciones con diferentes estimaciones iniciales: cercanas ($x_0 \approx \xi \pm 1$), lejanas ($x_0 \approx 10\xi$) y muy lejanas ($x_0 \approx 100\xi$). Esto nos permite medir, hasta cierto punto, cuán exigentes son los métodos con respecto al punto de partida para encontrar una solución.

4.2.1 Primer experimento

En este experimento realizamos un análisis comparativo entre un método estable de la familia ACTV y los métodos de Newton, Ostrowski, ABA, CH y AHB. Consideramos como miembro representante de la familia ACTV el método asociado a $\alpha = 1$. Este método posee buenas características dinámicas (véase la subsección 3.5.1), y su esquema iterativo se presenta en (2.31).

Llevamos a cabo 30 pruebas: 10 para estimaciones iniciales cercanas, 10 para lejanas y 10 para muy lejanas. Cada una de las 10 pruebas es realizada sobre una diferente función no lineal. El rendimiento numérico de los métodos iterativos se muestra en las tablas 4.1, 4.2, 4.3, 4.4, 4.5 y 4.6.

Tabla 4.1: Rendimiento numérico de los métodos iterativos en ecuaciones no lineales académicas, para $\alpha = 1$ y x_0 cercanas a $\xi(1/2)$.

Función	Método	$ x_{k+1} - x_k $	$ f(x_{k+1}) $	iter	ACOC	tcpu
f_1 $x_0 = -1.6$	ACTV	7.6395e-19	1.8769e-110	3	5.5148	0.1257
	Newton	3.2063e-84	7.2243e-168	8	2	0.1225
	Ostrowski	3.6277e-39	2.1775e-155	4	3.9988	0.1036
	ABA	6.3941e-19	5.2542e-111	3	5.5472	0.1201
	CH	3.9619e-19	3.095e-112	3	5.5336	0.1173
	AHR	6.9779e-86	0	4	5.9989	0.1381
f_2 $x_0 = -0.7$	ACTV	2.2577e-30	1.0533e-182	3	6.1514	0.1322
	Newton	3.6017e-61	4.5808e-122	7	2	0.1177
	Ostrowski	1.2063e-58	0	4	4	0.1182
	ABA	1.2981e-29	1.799e-177	3	5.9921	0.144
	CH	1.5916e-30	3.7159e-183	3	6.0159	0.1482
	AHR	3.1267e-24	2.0087e-143	3	5.6634	0.1274
f_3 $x_0 = -0.4$	ACTV	1.1915e-19	3.2336e-114	4	6.0717	0.2913
	Newton	6.977e-101	9.2573e-201	10	2	0.2747
	Ostrowski	3.6009e-28	5.8295e-111	4	3.9993	0.1899
	ABA	6.593e-46	0	4	6.0055	0.4278
	CH	4.0133e-50	6.8135e-208	5	5.9951	0.5636
	AHR	1.4561e-73	0	10	5.9991	0.7038
f_4 $x_0 = -15.1$	ACTV	7.1181e-53	0	3	5.9902	0.2549
	Newton	2.5498e-73	2.2931e-149	7	2	0.2058
	Ostrowski	3.9751e-30	2.0726e-126	3	3.9792	0.2153
	ABA	1.1141e-43	0	3	6.0011	0.2954
	CH	1.2976e-53	0	3	5.989	0.2414
	AHR	1.6219e-37	3.8934e-208	3	6.0057	0.2235
f_5 $x_0 = 0.4$	ACTV	5.868e-64	0	7	5.9957	0.4654
	Newton	3.2665e-83	8.6382e-165	10	2	0.2818
	Ostrowski	1.3665e-51	5.077e-204	5	3.9999	0.1682
	ABA	2.5625e-27	4.3729e-160	5	5.8933	0.224
	CH	2.4971e-24	4.0266e-142	9	5.8498	0.4374
	AHR	2.1589e-36	0	12	5.9521	0.5912

Tabla 4.2: Rendimiento numérico de los métodos iterativos en ecuaciones no lineales académicas, para $\alpha = 1$ y x_0 cercanas a ξ ($2/2$).

Función	Método	$ x_{k+1} - x_k $	$ f(x_{k+1}) $	iter	ACOC	tcpu
f_6 $x_0 = -0.9$	ACTV	6.8262e-24	1.5068e-141	3	5.7745	0.1328
	Newton	9.2708e-98	1.2927e-194	8	2	0.1389
	Ostrowski	1.3627e-50	2.168e-201	4	3.9998	0.129
	ABA	4.2155e-24	6.9985e-143	3	5.7919	0.1458
	CH	2.7131e-24	4.9616e-144	3	5.785	0.1462
	AHR	9.5174e-20	7.8159e-116	3	5.6284	0.1163
f_7 $x_0 = -2.2$	ACTV	6.1743e-58	0	5	5.9997	1.0044
	Newton	1.6896e-83	8.708e-165	12	2	0.8691
	Ostrowski	2.2223e-98	0	6	4	0.8546
	ABA	4.5383e-55	0	5	5.9994	0.9986
	CH	5.8036e-60	0	5	6.0002	0.7767
	AHR	8.1956e-28	1.9902e-160	5	5.9715	0.5559
f_8 $x_0 = 1.3$	ACTV	1.2572e-32	3.2096e-195	3	5.717	0.6075
	Newton	7.2803e-95	1.2821e-189	7	2	0.4947
	Ostrowski	1.0395e-64	1.5574e-207	4	4	0.535
	ABA	4.7735e-26	8.9685e-156	3	5.9419	0.598
	CH	1.6112e-32	1.7919e-194	3	5.6961	0.6046
	AHR	3.0816e-22	1.1423e-131	3	5.6812	0.4497
f_9 $x_0 = -2.4$	ACTV	1.1129e-46	0	4	5.8959	0.5429
	Newton	8.4362e-59	6.7844e-116	9	2	0.4238
	Ostrowski	3.9423e-88	0	5	4	0.4391
	ABA	2.7741e-46	0	4	5.9305	0.5329
	CH	1.317e-47	0	4	5.908	0.5263
	AHR	6.8794e-37	1.2128e-141	4	5.7986	0.5024
f_{10} $x_0 = -1.9$	ACTV	2.5535e-53	6.4242e-207	6	5.9132	1.2222
	Newton	3.4167e-84	8.1562e-167	8	2	0.6295
	Ostrowski	4.1408e-38	2.4627e-142	4	4.0146	0.5521
	ABA	5.637e-65	1.9467e-208	5	6.0107	0.9561
	CH	1.0828e-43	1.0707e-207	6	6.2212	1.1314
	AHR	5.6988e-26	4.6285e-106	4	5.7855	0.5939

Tabla 4.3: Rendimiento numérico de los métodos iterativos en ecuaciones no lineales académicas, para $\alpha = 1$ y x_0 lejanas a ξ (1/2).

Función	Método	$ x_{k+1} - x_k $	$ f(x_{k+1}) $	iter	ACOC	tcpu
f_1 $x_0 = -6$	ACTV	4.3721e-23	6.595e-136	4	5.7093	0.163
	Newton	4.549e-85	1.4542e-169	10	2	0.1527
	Ostrowski	7.5454e-40	4.0753e-158	5	3.9989	0.1487
	ABA	6.5662e-25	6.1621e-147	4	5.775	0.1607
	CH	9.4464e-24	5.6868e-140	4	5.7326	0.1811
	AHR	9.9786e-85	0	5	5.9988	0.1578
f_2 $x_0 = -3$	ACTV	2.0448e-85	0	4	5.9435	0.1848
	Newton	2.193e-58	1.6983e-116	8	2	0.138
	Ostrowski	4.1207e-27	4.9207e-108	4	3.9984	0.123
	ABA	1.0882e-79	0	4	5.9888	0.1983
	CH	2.1957e-80	0	4	5.9837	0.1862
	AHR	1.5693e-52	0	4	5.9765	0.1528
f_3 $x_0 = -6$	ACTV	6.0086e-60	0	16	5.9975	0.9939
	Newton	2.9103e-57	1.6107e-113	12	2	0.2714
	Ostrowski	1.7318e-82	6.8135e-208	8	4	0.3234
	ABA	2.9737e-18	6.4713e-106	10	-	0.6234
	CH	4.8167e-51	0	14	5.9955	0.8618
	AHR	1.0711e-58	0	6	5.9971	0.3006
f_4 $x_0 = -141$	ACTV	nc	nc	nc	nc	nc
	Newton	nc	nc	nc	nc	nc
	Ostrowski	nc	nc	nc	nc	nc
	ABA	nc	nc	nc	nc	nc
	CH	nc	nc	nc	nc	nc
	AHR	nc	nc	nc	nc	nc
f_5 $x_0 = -14$	ACTV	4.2145e-24	1.1268e-140	10	5.8416	0.4353
	Newton	nc	nc	nc	nc	nc
	Ostrowski	2.3325e-76	0	37	4	0.9868
	ABA	9.1479e-18	9.0509e-103	24	6.2542	1.1023
	CH	5.0027e-98	0	17	5.9997	0.7088
	AHR	nc	nc	nc	nc	nc

Tabla 4.4: Rendimiento numérico de los métodos iterativos en ecuaciones no lineales académicas, para $\alpha = 1$ y x_0 lejanas a ξ (2/2).

Función	Método	$ x_{k+1} - x_k $	$ f(x_{k+1}) $	iter	ACOC	tcpu
f_6 $x_0 = -1$	ACTV	8.4195e-23	5.3049e-135	3	5.7466	0.1358
	Newton	2.9466e-93	1.3059e-185	8	2	0.1329
	Ostrowski	1.4171e-48	2.5356e-193	4	3.9998	0.1201
	ABA	5.3476e-23	2.9163e-136	3	5.7654	0.1553
	CH	3.416e-23	1.9764e-137	3	5.7583	0.1379
	AHR	8.8662e-19	5.1082e-110	3	5.5835	0.1176
f_7 $x_0 = -12$	ACTV	nc	nc	nc	nc	nc
	Newton	nc	nc	nc	nc	nc
	Ostrowski	nc	nc	nc	nc	nc
	ABA	nc	nc	nc	nc	nc
	CH	nc	nc	nc	nc	nc
	AHR	nc	nc	nc	nc	nc
f_8 $x_0 = -23$	ACTV	4.6353e-98	2.3361e-207	5	5.9995	0.978
	Newton	9.6577e-79	1.3216e-156	10	2	0.683
	Ostrowski	8.1672e-31	5.8293e-122	5	3.9956	0.6646
	ABA	1.3364e-69	2.3361e-207	5	5.9961	0.9691
	CH	4.543e-99	2.3361e-207	5	5.9996	0.9597
	AHR	1.7793e-56	2.3361e-207	5	5.9898	0.6951
f_9 $x_0 = -14$	ACTV	1.3855e-88	0	7	5.9984	0.8916
	Newton	3.2777e-101	1.0241e-200	16	2	0.7119
	Ostrowski	2.3748e-99	0	8	4	0.6876
	ABA	5.7585e-95	0	7	5.9992	0.9097
	CH	1.3045e-94	0	7	5.999	0.8978
	AHR	1.9665e-39	2.8328e-149	7	5.8394	0.6725
f_{10} $x_0 = -9$	ACTV	3.9117e-41	9.6363e-207	5	6.1766	0.9564
	Newton	1.2423e-55	1.9722e-109	9	2	0.615
	Ostrowski	2.9225e-29	1.7446e-112	5	3.9821	0.6514
	ABA	2.0254e-31	5.3498e-181	5	5.5153	0.9702
	CH	6.524e-29	3.5709e-159	6	6.2558	1.1451
	AHR	1.6141e-41	9.7687e-148	12	5.8222	1.592

Tabla 4.5: Rendimiento numérico de los métodos iterativos en ecuaciones no lineales académicas, para $\alpha = 1$ y x_0 muy lejanas a ξ ($1/2$).

Función	Método	$ x_{k+1} - x_k $	$ f(x_{k+1}) $	iter	ACOC	tcpu
f_1 $x_0 = -60$	ACTV	6.8586e-80	0	6	5.9981	0.2413
	Newton	3.1826e-73	7.1179e-146	13	2	0.2003
	Ostrowski	1.2267e-100	0	7	4	0.1793
	ABA	1.3417e-77	0	6	5.9978	0.273
	CH	1.4971e-82	0	6	5.9984	0.2776
	AHR	8.7686e-61	3.8934e-208	7	5.992	0.2246
f_2 $x_0 = -30$	ACTV	2.116e-51	7.7869e-208	5	6.0914	0.2089
	Newton	1.7215e-66	1.0466e-132	11	2	0.1773
	Ostrowski	1.3046e-61	0	6	4	0.1654
	ABA	1.2854e-56	0	5	5.9146	0.2179
	CH	9.6446e-55	0	5	5.9717	0.2076
	AHR	4.726e-29	2.3954e-172	5	5.7244	0.1694
f_3 $x_0 = -60$	ACTV	5.9893e-27	5.2167e-158	6	6.0379	0.3503
	Newton	1.6537e-59	5.201e-118	15	2	0.3125
	Ostrowski	8.0088e-72	0	8	4	0.2956
	ABA	2.9305e-56	0	10	6.0024	0.5679
	CH	8.4413e-48	0	7	5.994	0.399
	AHR	6.4484e-60	0	7	5.9974	0.318
f_4 $x_0 = -1410$	ACTV	nc	nc	nc	nc	nc
	Newton	nc	nc	nc	nc	nc
	Ostrowski	nc	nc	nc	nc	nc
	ABA	nc	nc	nc	nc	nc
	CH	nc	nc	nc	nc	nc
	AHR	nc	nc	nc	nc	nc
f_5 $x_0 = -140$	ACTV	3.7145e-76	0	13	5.9983	0.6398
	Newton	nc	nc	nc	nc	nc
	Ostrowski	6.9267e-37	3.3507e-145	49	3.999	1.216
	ABA	7.5885e-54	0	11	5.9907	0.4246
	CH	4.8283e-28	2.1045e-164	21	5.8989	0.8005
	AHR	3.4494e-58	6.2295e-207	12	5.9928	0.3997

Tabla 4.6: Rendimiento numérico de los métodos iterativos en ecuaciones no lineales académicas, para $\alpha = 1$ y x_0 muy lejanas a ξ (2/2).

Función	Método	$ x_{k+1} - x_k $	$ f(x_{k+1}) $	iter	ACOC	tcpu
f_6 $x_0 = -10$	ACTV	1.1073e-23	2.7451e-140	4	5.7694	0.159
	Newton	3.1275e-74	1.4712e-147	10	2	0.1485
	Ostrowski	2.2228e-42	1.5349e-168	5	3.9993	0.1329
	ABA	2.6446e-23	4.2665e-138	4	5.7731	0.1619
	CH	2.3224e-24	1.9519e-144	4	5.7865	0.1636
	AHR	2.3835e-18	1.9283e-107	4	5.5618	0.1421
f_7 $x_0 = -120$	ACTV	nc	nc	nc	nc	nc
	Newton	nc	nc	nc	nc	nc
	Ostrowski	nc	nc	nc	nc	nc
	ABA	nc	nc	nc	nc	nc
	CH	nc	nc	nc	nc	nc
	AHR	nc	nc	nc	nc	nc
f_8 $x_0 = -230$	ACTV	9.2602e-68	2.3361e-207	6	5.9954	1.0547
	Newton	8.9492e-96	1.1348e-190	14	2	0.8454
	Ostrowski	7.8874e-37	5.0705e-146	7	3.9985	0.8196
	ABA	2.5587e-21	9.9754e-126	6	6.2382	1.0537
	CH	2.2055e-60	2.3361e-207	6	6.0079	1.0555
	AHR	nc	nc	nc	nc	nc
f_9 $x_0 = -140$	ACTV	6.2816e-51	0	10	5.9519	1.1617
	Newton	6.215e-101	3.6821e-200	24	2	0.9617
	Ostrowski	3.3583e-36	3.0643e-142	11	3.992	0.8514
	ABA	1.8557e-55	0	10	5.9783	1.1717
	CH	8.9074e-56	0	10	5.9723	1.1685
	AHR	6.5041e-50	1.0249e-180	11	5.9926	0.9342
f_{10} $x_0 = -90$	ACTV	2.8545e-38	1.0707e-207	6	6.2665	1.0249
	Newton	9.6307e-58	6.4804e-114	12	2	0.7181
	Ostrowski	6.1241e-52	6.9183e-202	8	3.9999	0.9291
	ABA	1.2306e-20	2.1729e-114	6	6.8491	1.0378
	CH	3.4946e-26	1.6995e-147	6	5.7567	1.0301
	AHR	8.5778e-51	1.0901e-182	25	5.902	3.0345

Los resultados de este experimento se muestran a continuación.

En *estimaciones cercanas* a la raíz:

- En todos los casos se cumple primero el criterio de parada correspondiente al error residual de la función no lineal de prueba. Los métodos de Ostrowski y ABA presentan el menor error en 5 pruebas, seguido del método ACTV en 4 pruebas. En ningún caso, el método de Newton presenta el menor error.
- El método ABA presenta el menor número de iteraciones (*iter*) en 9 pruebas, seguido del método ACTV en 8 pruebas. En ningún caso, el método de Newton presenta el menor número de iteraciones. Estos resultados se muestran en la figura 4.1.
- El método de Ostrowski presenta el menor tiempo de procesamiento (*tcpu*) en 4 pruebas. En ningún caso los métodos ACTV, ABA y CH, presentan el menor tiempo. El método ACTV presenta el mayor tiempo de procesamiento en 4 pruebas. Estos resultados se muestran en la figura 4.2.

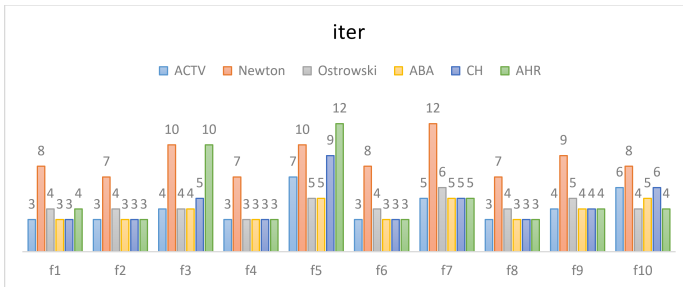


Figura 4.1: Número de iteraciones para x_0 cercanas a ξ .

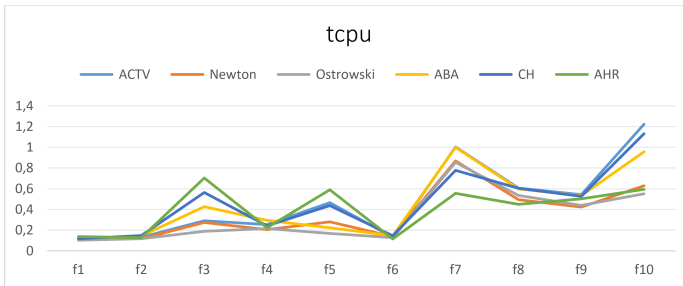


Figura 4.2: Tiempo de procesamiento para x_0 cercanas a ξ .

En *estimaciones lejanas* a la raíz:

- En todos los casos se cumple primero el criterio de parada correspondiente al error residual de la función no lineal de prueba. Los métodos ACTV, CH y AHR, presentan el menor error en 7 pruebas.
- El método ACTV presenta el menor número de iteraciones en 9 pruebas. Estos resultados se muestran en la figura 4.3.
- Los métodos de Newton, Ostrowski y AHR, presentan el menor tiempo de procesamiento en 5 pruebas. El método ABA presenta el mayor tiempo en 6 pruebas. Estos resultados se muestran en la figura 4.4.

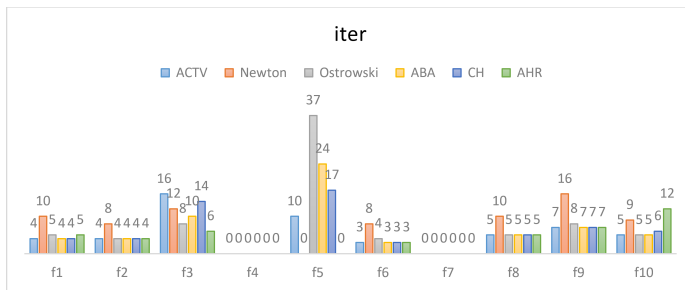


Figura 4.3: Número de iteraciones para x_0 lejanas a ξ .

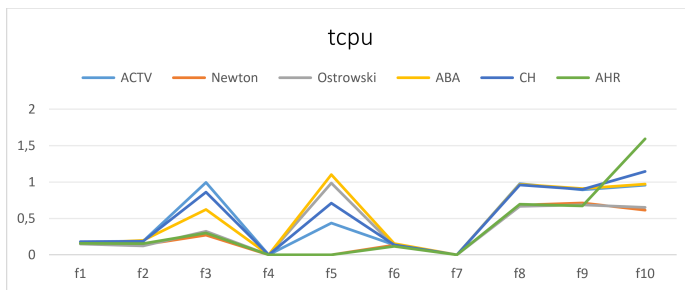


Figura 4.4: Tiempo de procesamiento para x_0 lejanas a ξ .

En *estimaciones muy lejanas* a la raíz:

- En todos los casos se cumple primero el criterio de parada correspondiente al error residual de la función no lineal de prueba. Los métodos ACTV, ABA y CH, presentan el menor error en 7 pruebas.

- Los métodos ACTV y ABA presentan el menor número de iteraciones en 9 pruebas. Estos resultados se muestran en la figura 4.5.
- El método de Ostrowski presenta el menor tiempo de procesamiento en 7 pruebas. Los métodos ABA y CH presentan el mayor tiempo en 5 pruebas. Estos resultados se muestran en la figura 4.6.

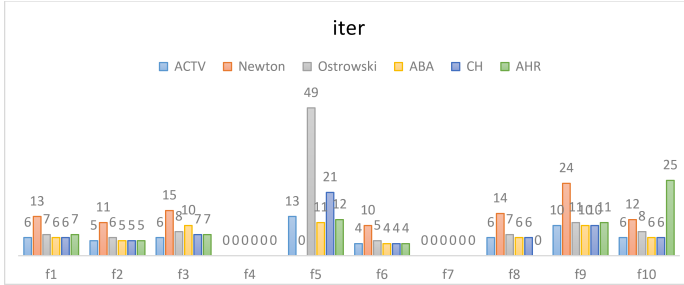


Figura 4.5: Número de iteraciones para x_0 muy lejanas a ξ .

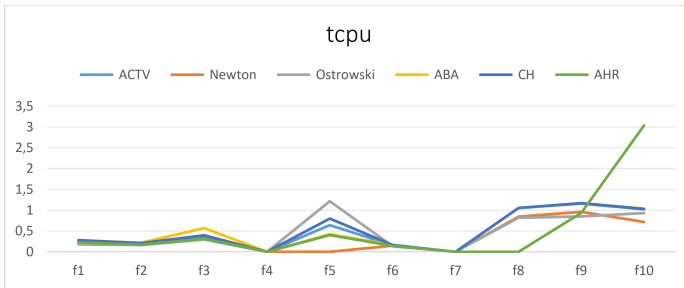


Figura 4.6: Tiempo de procesamiento para x_0 muy lejanas a ξ .

De los resultados del experimento, para la mayoría de las pruebas se concluye que:

- El método ACTV presenta el menor error y el menor número de iteraciones (iter).
- El método ACTV no presenta el menor tiempo de procesamiento (tcpu); incluso, para estimaciones cercanas a la raíz, tiene el mayor tiempo.

En consecuencia, de las tablas de resultados numéricos de los métodos iterativos, se verifica el orden de convergencia teórico del método ACTV. Se observa

que el ACOC se aproxima a 6. Además, de las conclusiones del experimento, la eficiencia computacional no se verifica de manera simple. Por un lado, el método ACTV presenta el menor error y el menor número de iteraciones para converger a la solución; pero, por otro lado está el mayor tiempo de procesamiento que requiere el método. Esto se debe a que el índice de eficiencia de Ostrowski únicamente considera el orden de convergencia y el número de evaluaciones funcionales por iteración, pero no considera otros factores inmersos en el proceso iterativo.

De manera complementaria, y con fines comparativos, los valores teóricos del índice de eficiencia de Ostrowski EI para medir la eficiencia computacional de cada método utilizado, son mostrados en la tabla 4.7, donde p es el orden de convergencia y d el número de evaluaciones funcionales por iteración.

Tabla 4.7: Eficiencia computacional teórica de varios métodos iterativos.

Método	p	d	EI
ACTV	6	4	1.565084580
Newton	2	2	1.414213562
Ostrowski	4	3	1.587401052
ABA	6	4	1.565084580
CH	6	4	1.565084580
AHR	6	5	1.430969081

Los índices de eficiencia de Ostrowski nos brindan una buena idea de la eficiencia computacional de un método iterativo. Sin embargo, en los resultados del experimento se observa que el tiempo de procesamiento depende, en gran medida, de la complejidad y estabilidad del esquema iterativo de un método, así como de la función no lineal de prueba.

4.2.2 Segundo experimento

En este experimento realizamos un análisis de estabilidad de la familia de métodos iterativos ACTV, considerando valores buenos y malos del parámetro α previamente estudiados en el Capítulo 3.

Llevamos a cabo 3 pruebas para cada método: 1 para estimaciones iniciales cercanas, 1 para lejanas y 1 para muy lejanas. Cada prueba consiste en aplicar el método sobre 10 diferentes funciones no lineales.

Iniciamos el análisis con valores buenos del parámetro. Consideramos $\alpha = -1$, $\alpha = 0$ y $\alpha = 1$, cuyos esquemas iterativos asociados demostraron ser estables (véase la subsección 3.5.1). El rendimiento numérico de estos métodos se muestran en las tablas 4.8, 4.9, 4.10, 4.11, 4.12, 4.13, 4.14, 4.15 y 4.16. Nótese que, los resultados para $\alpha = 1$ ya fueron presentados en el primer experimento; sin embargo, estos son nuevamente presentados debido a las diferentes condiciones en que cada experimento es desarrollado (compárese los tiempos de procesamiento entre experimentos).

Tabla 4.8: Rendimiento numérico de la familia ACTV en ecuaciones no lineales académicas, para $\alpha = -1$ y x_0 cercanas a ξ .

Función	x_0	$ x_{k+1} - x_k $	$ f(x_{k+1}) $	iter	ACOC	tcpu
f_1	-1.6	1.8646e-19	2.7591e-114	3	5.5559	0.1216
f_2	-0.7	3.9609e-31	1.4584e-186	3	5.9345	0.1508
f_3	-0.4	1.3898e-46	0	4	6.0038	0.2775
f_4	-15.1	1.3248e-54	0	3	5.9867	0.2417
f_5	0.4	9.0583e-50	0	5	5.9873	0.2321
f_6	-0.9	9.046e-25	5.4723e-147	3	5.7977	0.1526
f_7	-2.2	1.1802e-62	0	5	6.0009	0.8428
f_8	1.3	1.9771e-32	7.3778e-194	3	5.6791	0.6628
f_9	-2.4	7.6494e-49	0	4	5.9218	0.6021
f_{10}	-1.9	4.057e-47	1.606e-206	6	6.0586	1.2462

Tabla 4.9: Rendimiento numérico de la familia ACTV en ecuaciones no lineales académicas, para $\alpha = -1$ y x_0 lejanas a ξ .

Función	x_0	$ x_{k+1} - x_k $	$ f(x_{k+1}) $	iter	ACOC	tcpu
f_1	-6	1.4965e-24	7.3749e-145	4	5.7594	0.1606
f_2	-3	1.2979e-79	0	4	5.993	0.1906
f_3	-6	7.3835e-26	1.1396e-151	14	-	0.8807
f_4	-141	nc	nc	nc	nc	nc
f_5	-14	1.009e-18	1.3833e-108	22	5.7241	0.9937
f_6	-1	1.1662e-23	2.5124e-140	3	5.7725	0.1489
f_7	-12	nc	nc	nc	nc	nc
f_8	-23	3.2059e-100	2.3361e-207	5	5.9996	1.0545
f_9	-14	1.2483e-17	1.7112e-101	6	5.9838	0.86
f_{10}	-9	4.5305e-85	1.168e-207	7	6.0034	1.446

Tabla 4.10: Rendimiento numérico de la familia ACTV en ecuaciones no lineales académicas, para $\alpha = -1$ y x_0 muy lejanas a ξ .

Función	x_0	$ x_{k+1} - x_k $	$ f(x_{k+1}) $	iter	ACOC	tcpu
f_1	-60	1.264e-85	0	6	5.9988	0.2385
f_2	-30	9.4663e-58	0	5	5.9145	0.2206
f_3	-60	8.3236e-19	2.3391e-109	9	6.0055	0.5682
f_4	-1410	nc	nc	nc	nc	nc
f_5	-140	6.8807e-19	1.3913e-109	10	5.7297	0.4723
f_6	-10	3.6254e-25	2.2675e-149	4	5.806	0.194
f_7	-120	nc	nc	nc	nc	nc
f_8	-230	1.1069e-48	2.3361e-207	6	6.0195	1.2992
f_9	-140	7.2859e-63	0	10	5.9866	1.4343
f_{10}	-90	2.3226e-65	1.168e-207	6	5.9808	1.3969

Tabla 4.11: Rendimiento numérico de la familia ACTV en ecuaciones no lineales académicas, para $\alpha = 0$ y x_0 cercanas a ξ .

Función	x_0	$ x_{k+1} - x_k $	$ f(x_{k+1}) $	iter	ACOC	tcpu
f_1	-1.6	3.9254e-19	2.9279e-112	3	5.5334	0.1219
f_2	-0.7	1.559e-30	3.2818e-183	3	6.0156	0.1316
f_3	-0.4	1.0637e-28	1.328e-168	4	6.0263	0.2689
f_4	-15.1	1.2851e-53	0	3	5.9889	0.2568
f_5	0.4	4.828e-30	2.1036e-176	6	5.9174	0.2482
f_6	-0.9	2.677e-24	4.5784e-144	3	5.7847	0.1272
f_7	-2.2	3.6505e-60	0	5	6.0002	0.772
f_8	1.3	1.6112e-32	1.7919e-194	3	5.6961	0.6771
f_9	-2.4	1.2287e-47	0	4	5.9087	0.596
f_{10}	-1.9	3.0345e-27	1.8831e-154	6	6.5022	1.2896

Tabla 4.12: Rendimiento numérico de la familia ACTV en ecuaciones no lineales académicas, para $\alpha = 0$ y x_0 lejanas a ξ .

Función	x_0	$ x_{k+1} - x_k $	$ f(x_{k+1}) $	iter	ACOC	tcpu
f_1	-6	8.7386e-24	3.5638e-140	4	5.7334	0.1602
f_2	-3	1.9103e-80	0	4	5.9838	0.1902
f_3	-6	6.7903e-26	8.9867e-152	9	-	0.6206
f_4	-141	nc	nc	nc	nc	nc
f_5	-14	8.1206e-24	4.7631e-139	11	5.8407	0.491
f_6	-1	3.3658e-23	1.8087e-137	3	5.7581	0.1458
f_7	-12	nc	nc	nc	nc	nc
f_8	-23	4.2612e-99	2.3361e-207	5	5.9996	1.0585
f_9	-14	3.8766e-95	0	7	5.9991	0.9837
f_{10}	-9	4.1362e-41	2.3361e-207	6	5.9265	1.2619

Tabla 4.13: Rendimiento numérico de la familia ACTV en ecuaciones no lineales académicas, para $\alpha = 0$ y x_0 muy lejanas a ξ .

Función	x_0	$ x_{k+1} - x_k $	$ f(x_{k+1}) $	iter	ACOC	tcpu
f_1	-60	1.1445e-82	0	6	5.9985	0.2395
f_2	-30	7.1943e-55	0	5	5.971	0.2309
f_3	-60	3.277e-54	0	7	5.9966	0.4971
f_4	-1410	nc	nc	nc	nc	nc
f_5	-140	3.695e-64	0	37	5.9959	1.6934
f_6	-10	2.1946e-24	1.3896e-144	4	5.7867	0.1992
f_7	-120	nc	nc	nc	nc	nc
f_8	-230	5.2233e-59	2.3361e-207	6	6.0088	1.2644
f_9	-140	2.8579e-56	0	10	5.9738	1.4097
f_{10}	-90	8.2696e-19	2.984e-103	6	5.5602	1.2865

Tabla 4.14: Rendimiento numérico de la familia ACTV en ecuaciones no lineales académicas, para $\alpha = 1$ y x_0 cercanas a ξ .

Función	x_0	$ x_{k+1} - x_k $	$ f(x_{k+1}) $	iter	ACOC	tcpu
f_1	-1.6	7.6395e-19	1.8769e-110	3	5.5148	0.124
f_2	-0.7	2.2577e-30	1.0533e-182	3	6.1514	0.1526
f_3	-0.4	1.1915e-19	3.2336e-114	4	6.0717	0.2474
f_4	-15.1	7.1181e-53	0	3	5.9902	0.2427
f_5	0.4	5.868e-64	0	7	5.9957	0.3128
f_6	-0.9	6.8262e-24	1.5068e-141	3	5.7745	0.154
f_7	-2.2	6.1743e-58	0	5	5.9997	0.7772
f_8	1.3	1.2572e-32	3.2096e-195	3	5.717	0.7052
f_9	-2.4	1.1129e-46	0	4	5.8959	0.617
f_{10}	-1.9	2.5535e-53	6.4242e-207	6	5.9132	1.3006

Tabla 4.15: Rendimiento numérico de la familia ACTV en ecuaciones no lineales académicas, para $\alpha = 1$ y x_0 lejanas a ξ .

Función	x_0	$ x_{k+1} - x_k $	$ f(x_{k+1}) $	iter	ACOC	tcpu
f_1	-6	4.3721e-23	6.595e-136	4	5.7093	0.1619
f_2	-3	2.0448e-85	0	4	5.9435	0.2015
f_3	-6	6.0086e-60	0	16	5.9975	1.0008
f_4	-141	nc	nc	nc	nc	nc
f_5	-14	4.2145e-24	1.1268e-140	10	5.8416	0.446
f_6	-1	8.4195e-23	5.3049e-135	3	5.7466	0.1424
f_7	-12	nc	nc	nc	nc	nc
f_8	-23	4.6353e-98	2.3361e-207	5	5.9995	1.0401
f_9	-14	1.3855e-88	0	7	5.9984	0.9642
f_{10}	-9	3.9117e-41	9.6363e-207	5	6.1766	1.0393

Tabla 4.16: Rendimiento numérico de la familia ACTV en ecuaciones no lineales académicas, para $\alpha = 1$ y x_0 muy lejanas a ξ .

Función	x_0	$ x_{k+1} - x_k $	$ f(x_{k+1}) $	iter	ACOC	tcpu
f_1	-60	6.8586e-80	0	6	5.9981	0.2654
f_2	-30	2.116e-51	7.7869e-208	5	6.0914	0.2183
f_3	-60	5.9893e-27	5.2167e-158	6	6.0379	0.3777
f_4	-1410	nc	nc	nc	nc	nc
f_5	-140	3.7145e-76	0	13	5.9983	0.5816
f_6	-10	1.1073e-23	2.7451e-140	4	5.7694	0.1951
f_7	-120	nc	nc	nc	nc	nc
f_8	-230	9.2602e-68	2.3361e-207	6	5.9954	1.2349
f_9	-140	6.2816e-51	0	10	5.9519	1.8383
f_{10}	-90	2.8545e-38	1.0707e-207	6	6.2665	1.2801

Continuamos el análisis con valores malos del parámetro. Consideramos $\alpha = 200$, $\alpha = 400$ y $\alpha = -300$, cuyos esquemas iterativos asociados demostraron ser inestables (véase la subsección 3.5.2). El rendimiento numérico de estos métodos se muestran en las tablas 4.17, 4.18, 4.19, 4.20, 4.21, 4.22, 4.23, 4.24 y 4.25.

Tabla 4.17: Rendimiento numérico de la familia ACTV en ecuaciones no lineales académicas, para $\alpha = 200$ y x_0 cercanas a ξ .

Función	x_0	$ x_{k+1} - x_k $	$ f(x_{k+1}) $	iter	ACOC	tcpu
f_1	-1.6	2.1496e-56	0	4	5.9921	0.1499
f_2	-0.7	5.3135e-18	6.6576e-106	3	5.875	0.1457
f_3	-0.4	nc	nc	nc	nc	nc
f_4	-15.1	2.3245e-41	3.8934e-208	3	5.9944	0.2507
f_5	0.4	nc	nc	nc	nc	nc
f_6	-0.9	9.713e-82	1.2167e-208	4	5.9991	0.1847
f_7	-2.2	nc	nc	nc	nc	nc
f_8	1.3	4.0045e-33	1.6998e-196	3	5.3325	0.6325
f_9	-2.4	9.9537e-80	0	6	5.9983	0.8148
f_{10}	-1.9	1.3149e-70	9.6363e-207	4	6.0496	0.8213

Tabla 4.18: Rendimiento numérico de la familia ACTV en ecuaciones no lineales académicas, para $\alpha = 200$ y x_0 lejanas a ξ .

Función	x_0	$ x_{k+1} - x_k $	$ f(x_{k+1}) $	iter	ACOC	tcpu
f_1	-6	6.1599e-40	3.8934e-208	7	5.9673	0.2711
f_2	-3	1.0947e-20	5.0919e-122	4	5.9649	0.1757
f_3	-6	nc	nc	nc	nc	nc
f_4	-141	nc	nc	nc	nc	nc
f_5	-14	nc	nc	nc	nc	nc
f_6	-1	1.3927e-75	1.2167e-208	4	5.9985	0.1921
f_7	-12	nc	nc	nc	nc	nc
f_8	-23	4.3946e-33	2.9689e-196	7	5.339	1.4742
f_9	-14	nc	nc	nc	nc	nc
f_{10}	-9	8.369e-63	2.9162e-205	11	5.964	2.0915

Tabla 4.19: Rendimiento numérico de la familia ACTV en ecuaciones no lineales académicas, para $\alpha = 200$ y x_0 muy lejanas a ξ .

Función	x_0	$ x_{k+1} - x_k $	$ f(x_{k+1}) $	iter	ACOC	tcpu
f_1	-60	1.9877e-20	1.8239e-118	14	5.7565	0.5598
f_2	-30	2.3211e-17	4.6259e-102	9	5.4381	0.391
f_3	-60	nc	nc	nc	nc	nc
f_4	-1410	nc	nc	nc	nc	nc
f_5	-140	nc	nc	nc	nc	nc
f_6	-10	3.5236e-80	1.2167e-208	7	5.999	0.3265
f_7	-120	nc	nc	nc	nc	nc
f_8	-230	2.7541e-49	1.5574e-207	15	5.9586	3.1228
f_9	-140	nc	nc	nc	nc	nc
f_{10}	-90	7.8278e-51	9.6363e-207	15	6.1663	3.2771

Tabla 4.20: Rendimiento numérico de la familia ACTV en ecuaciones no lineales académicas, para $\alpha = 400$ y x_0 cercanas a ξ .

Función	x_0	$ x_{k+1} - x_k $	$ f(x_{k+1}) $	iter	ACOC	tcpu
f_1	-1.6	2.9103e-44	0	4	5.9805	0.1439
f_2	-0.7	1.1067e-93	0	4	5.9996	0.1691
f_3	-0.4	nc	nc	nc	nc	nc
f_4	-15.1	2.7954e-39	0	3	5.9942	0.2758
f_5	0.4	nc	nc	nc	nc	nc
f_6	-0.9	3.548e-69	1.2167e-208	4	5.9978	0.1933
f_7	-2.2	nc	nc	nc	nc	nc
f_8	1.3	1.139e-35	1.5574e-207	3	5.2494	0.6218
f_9	-2.4	nc	nc	nc	nc	nc
f_{10}	-1.9	5.8131e-53	3.1147e-207	4	5.754	0.8023

Tabla 4.21: Rendimiento numérico de la familia ACTV en ecuaciones no lineales académicas, para $\alpha = 400$ y x_0 lejanas a ξ .

Función	x_0	$ x_{k+1} - x_k $	$ f(x_{k+1}) $	iter	ACOC	tcpu
f_1	-6	nc	nc	nc	nc	nc
f_2	-3	2.3621e-17	1.0317e-101	4	5.3815	0.1948
f_3	-6	nc	nc	nc	nc	nc
f_4	-141	nc	nc	nc	nc	nc
f_5	-14	nc	nc	nc	nc	nc
f_6	-1	4.6747e-63	1.2167e-208	4	5.9965	0.2256
f_7	-12	nc	nc	nc	nc	nc
f_8	-23	nc	nc	nc	nc	nc
f_9	-14	nc	nc	nc	nc	nc
f_{10}	-9	nc	nc	nc	nc	nc

Tabla 4.22: Rendimiento numérico de la familia ACTV en ecuaciones no lineales académicas, para $\alpha = 400$ y x_0 muy lejanas a ξ .

Función	x_0	$ x_{k+1} - x_k $	$ f(x_{k+1}) $	iter	ACOC	tcpu
f_1	-60	nc	nc	nc	nc	nc
f_2	-30	nc	nc	nc	nc	nc
f_3	-60	nc	nc	nc	nc	nc
f_4	-1410	nc	nc	nc	nc	nc
f_5	-140	nc	nc	nc	nc	nc
f_6	-10	nc	nc	nc	nc	nc
f_7	-120	nc	nc	nc	nc	nc
f_8	-230	nc	nc	nc	nc	nc
f_9	-140	nc	nc	nc	nc	nc
f_{10}	-90	nc	nc	nc	nc	nc

Tabla 4.23: Rendimiento numérico de la familia ACTV en ecuaciones no lineales académicas, para $\alpha = -300$ y x_0 cercanas a ξ .

Función	x_0	$ x_{k+1} - x_k $	$ f(x_{k+1}) $	iter	ACOC	tcpu
f_1	-1.6	1.454e-49	3.8934e-208	4	6.0127	0.1743
f_2	-0.7	2.5508e-99	0	4	6.0002	0.1792
f_3	-0.4	7.7e-75	0	40	6.0006	2.5385
f_4	-15.1	3.2185e-40	3.8934e-208	3	5.9945	0.246
f_5	0.4	nc	nc	nc	nc	nc
f_6	-0.9	4.1691e-75	1.2167e-208	4	6.0014	0.185
f_7	-2.2	nc	nc	nc	nc	nc
f_8	1.3	4.1603e-29	3.3384e-172	3	5.3365	0.621
f_9	-2.4	4.6902e-83	0	12	5.9988	1.6358
f_{10}	-1.9	1.6341e-58	2.5794e-206	5	5.7418	1.1787

Tabla 4.24: Rendimiento numérico de la familia ACTV en ecuaciones no lineales académicas, para $\alpha = -300$ y x_0 lejanas a ξ .

Función	x_0	$ x_{k+1} - x_k $	$ f(x_{k+1}) $	iter	ACOC	tcpu
f_1	-6	nc	nc	nc	nc	nc
f_2	-3	3.4761e-80	0	5	5.9989	0.2579
f_3	-6	nc	nc	nc	nc	nc
f_4	-141	nc	nc	nc	nc	nc
f_5	-14	3.9697e-26	4.0419e-151	7	6.0709	0.328
f_6	-1	6.671e-69	1.2167e-208	4	6.0023	0.1807
f_7	-12	nc	nc	nc	nc	nc
f_8	-23	nc	nc	nc	nc	nc
f_9	-14	4.7617e-74	0	7	5.9975	0.9074
f_{10}	-9	2.8218e-76	6.0348e-207	8	5.9788	1.5886

Tabla 4.25: Rendimiento numérico de la familia ACTV en ecuaciones no lineales académicas, para $\alpha = -300$ y x_0 muy lejanas a ξ .

Función	x_0	$ x_{k+1} - x_k $	$ f(x_{k+1}) $	iter	ACOC	tcpu
f_1	-60	4.4607e-32	3.3463e-187	9	6.0453	0.3717
f_2	-30	4.1584e-28	2.3239e-166	9	5.6304	0.383
f_3	-60	nc	nc	nc	nc	nc
f_4	-1410	nc	nc	nc	nc	nc
f_5	-140	1.7723e-57	0	21	6.0044	0.9822
f_6	-10	1.8762e-62	0	6	6.0037	0.3491
f_7	-120	nc	nc	nc	nc	nc
f_8	-230	1.249e-29	2.4449e-175	39	5.1386	7.4938
f_9	-140	6.0191e-77	0	28	5.998	3.9014
f_{10}	-90	6.6349e-43	4.8668e-209	22	6.0131	4.4952

Los resultados de este experimento se muestran a continuación.

Para *métodos con dinámica estable*:

- En estimaciones cercanas a la raíz, los métodos siempre convergen a la solución. Presentan un número mínimo de iteraciones (iter) de 3, y un máximo de 7.
- En estimaciones lejanas a la raíz, los métodos no convergen a la solución en 2 funciones. Presentan un número mínimo de iteraciones de 3, y un máximo de 22.
- En estimaciones muy lejanas a la raíz, los métodos no convergen a la solución en 2 funciones. Presentan un número mínimo de iteraciones de 4, y un máximo de 37.

Para *métodos con dinámica inestable*:

- En estimaciones cercanas a la raíz, los métodos no convergen a la solución hasta en 4 funciones. Presentan un número mínimo de iteraciones de 3, y un máximo de 40.
- En estimaciones lejanas a la raíz, los métodos no convergen a la solución hasta en 8 funciones. Presentan un número mínimo de iteraciones de 4, y un máximo de 11.
- En estimaciones muy lejanas a la raíz, los métodos no convergen a la solución hasta en la totalidad de las funciones. Presentan un número mínimo de iteraciones de 6, y un máximo de 39.

En consecuencia, los métodos de la familia ACTV con dinámica estable convergen a la solución pero con dependencia de la estimación inicial. Por otra parte, los métodos con dinámica inestable son caóticos, registran los tiempos de procesamiento (tcpu) más altos, y suelen no converger a la solución. Por tanto, se verifican los resultados teóricos acerca del comportamiento dinámico de los métodos analizados.

Capítulo 5

Conclusiones y líneas futuras

5.1 Conclusiones

El diseño de métodos iterativos para resolver ecuaciones no lineales es una tarea relevante y desafiante en el campo del análisis numérico. En el desarrollo de esta memoria nos hemos ocupado de los métodos de punto fijo que generan sucesiones presumiblemente convergentes a la solución de una ecuación dada. Se ha presentado el diseño de una familia de métodos con esquemas iterativos multipaso, que es una generalización de un método propuesto por Artidiello *y col.* en [1], y analizado el orden de convergencia para el esquema triparamétrico inicialmente construido, consiguiendo además, aumentar el orden mediante la propuesta de un esquema uniparamétrico. Varios criterios para medir la eficiencia computacional de esta familia uniparamétrica fueron abordados, así como el estudio de su dinámica compleja sobre polinomios cuadráticos para filtrar aquéllos elementos más y menos estables. Los resultados obtenidos fueron verificados con experimentos numéricos.

Existen diversas formas de comparar esquemas iterativos para resolver ecuaciones no lineales. Con frecuencia, se elige una colección de ecuaciones de prueba que incluyen polinomios de varios órdenes y/o componentes trascendentales. Luego se elige una colección de métodos que pueden incluir diferentes órdenes

de convergencia. Posteriormente, se elige una estimación inicial para cada una de las ecuaciones de prueba y los métodos pueden iterar hasta que se logre un nivel de convergencia dado o hasta que se haya completado un número máximo de iteraciones sin convergencia. Entonces, las comparaciones de los diversos algoritmos se basan en comparaciones del número de iteraciones requeridas para la convergencia, el número de evaluaciones funcionales y/o la cantidad de tiempo de CPU utilizado. Si un método particular no converge o si converge a una solución diferente, entonces ese método particular se considera inferior a los demás. El fallo principal en este tipo de comparación es que la estimación inicial, aunque puede haber sido elegida al azar, representa solo una de un número infinito de otras opciones. Para mejorar esto, se podría elegir un número de otras estimaciones iniciales elegidas al azar. Sin embargo, este es solo un método de comparación mejorado, no dirimente.

El estudio dinámico de un método iterativo, en términos de sus cuencas de atracción, permite comprender visualmente cómo se comporta un método iterativo en función de las diversas estimaciones iniciales. Estos aspectos cualitativos también son utilizados como criterio de comparación de los métodos iterativos, y nos permiten seleccionar, de entre los infinitos miembros de una familia paramétrica de métodos iterativos, aquellos con un comportamiento más estable.

5.2 Líneas futuras

La familia de métodos con esquemas iterativos multipaso presentada, ha sido diseñada para resolver ecuaciones no lineales. Sin embargo, encontrar la solución de un sistema no lineal es un problema clásico y difícil con muchas aplicaciones en ciencias e ingeniería. Las líneas futuras de investigación se enmarcan en la extensión de esta familia para sistemas de ecuaciones, considerando el análisis de convergencia y el estudio de la dinámica compleja con aplicaciones a la teoría de control.

Bibliografía

1. Artidiello, S., Cordero, A., Torregrosa, J. y Penkova, M. Design and multi-dimensional extension of iterative methods for solving nonlinear problems. *Applied Mathematics and Computation* **293**, 194-203 (ene. de 2017) (vid. págs. VII, X, 15, 16, 24, 75).
2. Ostrowski, A. M. *Solution of Equations and Systems of Equations*. (Academic Press, New York, USA, 1960) (vid. págs. IX, 7).
3. Traub, J. F. *Iterative Methods for the Solution of Equations*. (Prentice-Hall, Englewood Cliffs, NJ, USA, 1964) (vid. págs. IX, 3, 4, 7).
4. Ortega, J. M. y Rheinboldt, W. C. *Iterative Solution of Nonlinear Equations in Several Variables* (Academic Press, New York, 1970) (vid. págs. IX, 6, 16).
5. Neta, B. *Numerical methods for the solution of equations*. (Net-A-Sof, California, 1983) (vid. págs. IX, 15).
6. McNamee, J. *Numerical Methods for Roots of Polynomials, Part I* (Elsevier, 2007) (vid. pág. IX).
7. Petković, M., Neta, B., Petković, L. y Džunić, J. Multipoint methods for solving nonlinear equations: A survey. *Applied Mathematics and Computation* **226**, 635-660 (ene. de 2014) (vid. págs. IX, 4).

8. Mandelbrot, B. The Fractal Geometry Of Nature. *Journal of the Royal Statistical Society. Series A (General)* **147**, 616-618 (ene. de 1984) (vid. pág. x).
9. Sullivan, D. *Seminar on Conformal and Hyperbolic Geometry* (IHES Seminar notes, 1982) (vid. pág. x).
10. Sullivan, D. en, 725-752 (nov. de 2006) (vid. pág. x).
11. Ruelle, D. Repellers for real analytic maps. *Ergod. Th. Dynam. Sys.* **2**, 99-107 (1982) (vid. pág. x).
12. Cordero, A. y Torregrosa, J. R. *On the Design of Optimal Iterative Methods for Solving Nonlinear Equations*. (Springer International Publishing Switzerland, 2016) (vid. págs. 3, 4, 7).
13. Ostrowski, A. *Solution of Equations in Euclidean and Banach Spaces*. ISBN: 9780125302609 (Academic Press, 1973) (vid. pág. 4).
14. Traub, J. F. *Iterative Methods for the Solution of Equations*. (Chelsea, New York, 1982) (vid. pág. 4).
15. Varona, J. L. Graphic and numerical comparison between iterative methods. *The Mathematical Intelligencer* **24**, 37-46 (mar. de 2002) (vid. págs. 4, 8).
16. Weerakoon, S. y Fernando, T. A variant of Newton's method with accelerated third-order convergence. *Applied Mathematics Letters* **13**, 87-93. ISSN: 0893-9659 (2000) (vid. pág. 5).
17. Cordero, A. y Torregrosa, J. R. Variants of Newton's Method using fifth-order quadrature formulas. *Applied Mathematics and Computation* **190**, 686-698. ISSN: 0096-3003 (2007) (vid. pág. 6).
18. Ezquerro, J. A., Hernandez, M. A. y Romero, N. Aproximación de soluciones de algunas ecuaciones integrales de Hammerstein mediante métodos iterativos tipo Newton. *XXI Congreso de ecuaciones diferenciales y aplicaciones*, 1-8 (sep. de 2009) (vid. pág. 8).

19. Scott, M., Neta, B. y Chun, C. Basin attractors for various methods. *Applied Mathematics and Computation* **218**, 2584-2599 (nov. de 2011) (vid. pág. 8).
20. Amat, S., Busquier, S. y Plaza, S. Review of some iterative root-finding methods from a dynamical point of view. *SCIENTIA Series A: Mathematical Sciences* **10**, 3-35 (ene. de 2004) (vid. pág. 8).
21. Blanchard, P. Complex analytic dynamics on the Riemann sphere. *Bull. Amer. Math. Soc. (N.S.)* **11**, 85-141 (jul. de 1984) (vid. pág. 8).
22. Devaney, R. L. The Mandelbrot Set, the Farey Tree, and the Fibonacci Sequence. *The American Mathematical Monthly* **106**, 289-302. eprint: <https://doi.org/10.1080/00029890.1999.12005046> (1999) (vid. págs. 8, 12).
23. King, R. F. A Family of Fourth Order Methods for Nonlinear Equations. *SIAM Journal on Numerical Analysis* **10**, 876-879. eprint: <https://doi.org/10.1137/0710072> (1973) (vid. pág. 12).
24. Cordero, A., García-Maimó, J., Torregrosa, J. R., Vassileva, M. P. y Vindel, P. Chaos in King's iterative family. *Applied Mathematics Letters* **26**, 842-848. ISSN: 0893-9659 (2013) (vid. págs. 12, 14).
25. Petković, M., Neta, B., Petković, L. y Džunić, J. *Multipoint Methods for Solving Nonlinear Equations*. 1.^a ed. ISBN: 978-0-12-397013-8 (Academic Press, Boston, 2013) (vid. pág. 15).
26. Kung, H. T. y Traub, J. F. Optimal Order of One-Point and Multipoint Iteration. *Journal of the Association for Computing Machinery*, 643-651 (1974) (vid. pág. 24).
27. Alzahrani, A., Behl, R. y Alshomrani, A. Some higher-order iteration functions for solving nonlinear models. *Applied Mathematics and Computation* **334**, 80-93 (oct. de 2018) (vid. pág. 49).
28. Chun, C. y Ham, Y. Some sixth-order variants of Ostrowski root-finding methods. *Applied Mathematics and Computation* **193**, 389-394 (nov. de 2007) (vid. págs. 49, 50).

29. Amat, S., Hernández, M. y Romero, N. Semilocal convergence of a sixth order iterative method for quadratic equations. *Applied Numerical Mathematics* **62**, 833-841 (jul. de 2012) (vid. págs. 49, 50).