UNIVERSITAT POLITÈCNICA DE VALÈNCIA

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA APLICADA
UNIVERSIDAD POLITÉCNICA DE VALENCIA

RECURRÈNCIA FREQÜENT EN LA DINÀMICA D'OPERADORS

Memòria presentada per
Antoni López-Martínez

per a optar al títol de
Màster en Investigació Matemàtica

realitzada baix la direcció del professor
Alfred Peris Manguillot

Introducció

La Teoria de Sistemes Dinàmics és la branca de les matemàtiques que estudia el comportament a llarg termini d'un sistema, és a dir, el comportament d'un "objecte complex", les parts o components del qual "evolucionen" amb el pas del temps. Alguns exemples de sistemes serien: una població d'alguna espècie animal (de la qual es pot estudiar la seua grandària, la proporció d'individus complint certa propietat, ...); un sistema econòmic (on es pot estudiar la recessió o acceleració econòmica, l'estabilitat del sistema, ...); un sistema físic (del qual ens interessen la posició, velocitat i acceleració de les seues partícules, ...).

En general considerem un conjunt no buit X com la col·lecció de tots els possibles estats d'un sistema (biològic, econòmic, físic, ..., o **abstracte**), el qual sol anomenar-se *espai de configuració* o *espai de fases*, i assumim que l'evolució del sistema ve donada per una transformació o aplicació $T : X \to X$, de manera que si $x_n \in X$ és l'estat del sistema en el temps $n \geq 0$ llavors

$$x_{n+1} = T(x_n), \qquad n = 0, 1, 2, ...$$

El parell (X, T) sol anomenar-se *sistema dinàmic (discret)*, i donat un "estat inicial" del sistema $x \in X$, observar la seua evolució és equivalent a estudiar l'*òrbita* d'aquest punt, és a dir, el conjunt

$$\mathrm{orb}(x, T) = \{x, T(x), T^2(x), ...\}, \text{ on } T^n = T \circ ... \circ T \quad (n \text{ vegades}).$$

Per poder analitzar el comportament d'un sistema dinàmic (X, T) es sol exigir l'existència d'una estructura sobre el conjunt X i de certes restriccions sobre l'aplicació T. Tal com s'exposa en [50], els tres casos més estudiats al llarg de la història són quan:

1. X és una *varietat diferenciable* i T és un *difeomorfisme*, és el cas de la *Dinàmica Diferencial* (Differentiable Dynamics);

2. X és un *espai de mesura* i T és una *aplicació mesurable*, sent aquest el cas de la *Teoria Ergòdica* (Ergodic Theory);

3. X és un *espai topològic* (de vegades un *espai mètric*) i T és una aplicació *contínua* (en ocasions complint propietats com la *transitivitat topològica* (pàg. 2) o l'existència d'una *òrbita densa*), aquest és el cas de la *Dinàmica Topològica* (Topological Dynamics).

Encara que en aquest treball ens centrarem en l'últim cas, és a dir, en la Dinàmica Topològica, les tres branques se solapen en molts exemples donant distints punts de vista a un mateix sistema dinàmic, i obtenint resultats on interaccionen tant hipòtesis topològiques, com qüestions pròpies de Teoria de la Mesura més relacionades amb la Teoria Ergòdica. Un exemple d'aquest fet serien les conseqüències del teorema Ergòdic de Birkhoff (pàg. 56) sobre l'existència d'*òrbites freqüentment denses* en Dinàmica Topològica (pàg. 27), o del teorema de Recurrència de Poincaré (pàg. 54) sobre l'existència de *punts recurrents* (pàg. 31).

Normalment, l'estudi d'un objecte matemàtic se simplifica trencant o descomponent aquest en parts més petites i estudiant aquestes parts per separat. Si aquesta descomposició no és possible, se sol dir que l'objecte és *irreductible*. En el cas de la Dinàmica Topològica la idea de la irreductibilitat pot representar-se amb la *transitivitat topològica* (pàg. 2), propietat que connecta totes les parts no trivials d'un sistema dinàmic (X, T), és a dir, per a tot parell $U, V \subset X$ d'oberts no buits existeix un natural $n \in \mathbb{N}_0$ de manera que $T^n(U) \cap V \neq \emptyset$. Aquesta és una propietat global d'un sistema dinàmic, que segons mencionen Kolyada i Snoha en [41], ja va ser emprada per Birkhoff en 1920 en el context d'aplicacions contínues en subconjunts compactes de $\mathbb{R}^n$.

El teorema de Transitivitat de Birkhoff (pàg. 5) estableix que la propietat anterior és equivalent a l'existència d'una òrbita densa en espais mètrics complets, i a més, amb una mètrica sobre l'espai subjacent, podem mesurar distàncies entre punts i saber com de lluny estan les prediccions obtingudes (per exemple a partir del càlcul d'una òrbita), d'un cert estat fixat $x \in X$. Per tant, no és estrany que usualment l'espai topològic X passe a ser un espai mètric. En particular, nosaltres tractarem la Dinàmica Topològica des del punt de vista de la Dinàmica Lineal i treballarem amb espais vectorials topològics, metritzables i complets, entrant en el món dels F-espais (pàg. 48).

La Dinàmica Lineal connecta l'Anàlisi Funcional i la Dinàmica Topològica, estudiant la dinàmica d'operadors lineals des d'un punt de vista topològic igual que en sistemes dinàmics clàssics. L'origen de l'estudi d'aquesta branca es troba en la hiperciclicitat (pàg. 18), i a partir d'aquest concepte s'han anat derivant distintes línies de treball com la recurrència en hiperciclicitat (tema que tractarem amb profunditat), propietats barrejants, caos (en diferents sentits), polinomis hipercíclics, propietats de disjunció dels operadors hipercíclics, etc. Recordem que la hiperciclicitat és l'estudi dels operadors lineals que posseeixen una òrbita densa (veure Definició 2.2.1). Si bé Birkhoff (en 1929 [11]), MacLane (en 1952 [44]) i Rolewicz (en 1969 [53]) van obtenir exemples d'operadors lineals hipercíclics (veure Exemple A.3.11), podem fixar el naixement de la Dinàmica Lineal en 1982 amb la tesi de Kitai [40] i l'obtenció del criteri de Kitai (pàg. 19).

Des de llavors molts matemàtics han contribuït al desenvolupament d'aquesta branca de l'Anàlisi Matemàtic, i de fet, durant els últims 30 anys l'estudi de la Dinàmica Lineal s'ha convertit en un àrea d'investigació molt activa. En l'any 2000 es va introduir la nova classificació 47A16 de la *Mathematics Subject Classification* (MSC) "Vectors cíclics i hipercíclics", la descripció del qual va canviar en *MSC 2010* a "Vectors cíclics, operadors hipercíclics i caòtics", sens dubte fruit de l'ampli desenvolupament que ha tingut en els darrers 20 anys la hiperciclicitat i el caos d'operadors.

Els investigadors en Teoria d'Operadors es van interessar en la hiperciclicitat motivats pel *problema del subespai invariant* (resolt en espais de Banach per Enflo [20] proposant un contraexemple en 1975 que degut a la seua complexitat va retardar la publicació a 1987, veure pàg. 18), i en el cas general del *problema del subconjunt invariant*, ja que un operador no té un subconjunt tancat invariant no trivial, precisament quan cada vector no nul és hipercíclic per a dit operador. Read en [52] va mostrar que tal tipus d'operador existeix en espais de Banach clàssics com ℓ^1, deixant ambdós problemes obert en espais de Hilbert. En definitiva, els treballs de Kitai [40], Gethner i Shapiro [25], Godefroy i Shapiro [27] i Herrero [35, 36], van establir les bases de la teoria.

Per altra banda, la noció de *caos de Devaney* (pàg. 7) va introduir un nou aspecte en la hiperciclicitat. A aquest fet el van seguir més extensions, com els semigrups hipercíclics i els operadors supercíclics, consolidant el que hui es considera com la Teoria dels Sistemes Dinàmics Lineals. Les monografies de Bayart i Matheron [5] i de Grosse-Erdmann i Peris [32], representen un bon compendi dels últims avanços en la teoria de la hiperciclicitat i el caos, i les emprarem en els primers dos capítols del treball per a establir una bona base teòrica sobre Dinàmica Topològica (capítol 1) i en particular sobre Dinàmica Lineal (capítol 2), amb l'objectiu d'emmarcar aquest treball dins de la línia natural d'evolució de la Teoria de Sistemes Dinàmics Lineals.

Des dels seus principis, la hiperciclicitat ha estat en la frontera de vàries àrees de les matemàtiques, i a més de prendre els seus exemples i tècniques d'aquestes altres branques, els seus resultats han trobat aplicacions i també han motivat més investigació fora del propi camp de la hiperciclicitat. Un exemple d'aquest fet són les diverses noves connexions de la hiperciclcicitat amb altres rames de les matemàtiques que han aparegut en els últims anys i que s'estan explorant, com:

1. Teoria d'equacions lineals en derivades parcials i sistemes infinits d'equacions diferencials lineals.
2. Caos Li-Yorke, caos distribucional, entropia.
3. Dinàmica complexa i dinàmica no lineal.
4. Mesures de probabilitat invariants i Teoria Ergòdica.
5. Teoria Combinatòria de Nombres (matèria que també abordarem amb certa profunditat).

En quant a la part de *recurrència d'operadors* hem de mencionar que la noció de *recurrència* en sistemes dinàmics té una llarga història i el seu estudi sistemàtic es remunta als treballs en 1955 de Gottschalk i Hedlund [28], i en 1981 de Furstenberg [23], junt amb alguns avanços més recents com [26] en 2004 i [49] en 2013. Però, en la Dinàmica Lineal, els operadors recurrents i per tant la recurrència d'operadors que es menciona en el títol del treball únicament s'ha començat a estudiar sistemàticament a partir dels articles de Costakis, Manoussos i Parissis [17, 18], detall que dota el present treball de certa novetat i interés en relació a la Recurrència en la Dinàmica Lineal.

Recordem que la recurrència és l'estudi de les òrbites d'un sistema dinàmic que "retornen prop" del punt de partida, és a dir, l'estudi d'aquells punts amb una òrbita que talla a tot entorn de dit punt (veure pàg. 31). La literatura sobre sistemes dinàmics (no lineals) és abundant en nocions similars a la recurrència (veure Nota 3.1.5), i encara que la periodicitat és una forma molt forta de recurrència i és fonamental en qualsevol teoria dinàmica, algunes altres formes de recurrència (provinents de la dinàmica no lineal) han sigut considerades recentment en Dinàmica Lineal, com per exemple: en [31] o [57], on es parla de punts "quasi-periòdics" que anomenarem *uniformement recurrents* (pàg. 33); en [15] on s'estudia el concepte de "recurrència múltiple"; en [24] o [33] on s'empren els punts "recurrents per producte" per a estudiar conceptes com l'entropia i el caos dels operadors desplaçament cap arrere sobre espais de successions.

Sent coherents amb allò exposat fins ara, i amb la idea de relacionar els camps anteriorment introduïts fixarem la següent notació (que recordarem convenientment a l'interior del treball): X serà un *F-espai* (de vegades un *espai de Fréchet*) i $T : X \to X$ serà un *operador*, és a dir, una aplicació *lineal* i *contínua* (encara que en el primer capítol considerarem aplicacions simplement contínues en *espais mètrics* en general). Açò ens portarà a considerar els *conjunts de retorn*:

$$N(x, W) := \{n \in \mathbb{N}_0 : T^n x \in W\}, \text{ i també } N(U, V) := \{n \in \mathbb{N}_0 : T^n(U) \cap V \neq \emptyset\},$$

on W serà, unes vegades un entorn del punt $x \in X$ (quan parlem de recurrència) i altres un obert no buit de X (quan parlem de hiperciclicitat), i per altra banda $U, V \subset X$ seran dos d'oberts no buits (quan parlem de conceptes més pareguts a la transitivitat com les propietats *barrejant* i *feblement barrejant* (pàg. 7 i 8), l'*ergodicitat topològica* (pàg. 10), etc). L'estudi de la grandària i forma dels conjunts de retorn relaciona la dinàmica (en el nostre cas d'operadors) amb la branca coneguda com Teoria Combinatòria de Nombres, a la que dedicarem un apèndix complet (pàg. 57) exposant una lleugera introducció que ens permeta donar un caràcter auto-contingut a la memòria. Aquesta línia de treball està despertant l'interés de molts autors entre els quals destaquem els recents treballs de Bès, Menet, Peris i Puig [8, 9], Bonilla i Grosse-Erdmann [12], i Ernst i Mouze [21].

Dins de la Teoria Combinatòria de Nombres i amb l'objectiu de relacionar-la amb la Dinàmica Lineal, ens interessaran les *famílies de Furstenberg* $\mathcal{F} \subset \mathscr{P}(\mathbb{N}_0)$ (pàg. 68), i en particular els *conjunts de hiperciclicitat* (pàg. 28), que ofereixen informació tant en la recurrència d'operadors (punt en el que ens centrarem en el present treball), com en altres aspectes relacionats amb la Teoria Ergòdica i nocions de caos en sentit topològic. Per altra banda, emprant les propietats de grandària (Secció B.1) i les densitats dels conjunts de nombres naturals (Secció B.2) que la Teoria Combinatòria de Nombres posa a la nostra disposició, estudiem i analitzem la mida del conjunt de vectors recurrents en relació amb el conjunt de vectors hipercíclics per a les nocions de recurrència més importants (veure Exemple 3.2.5 i Teoremes 3.2.3, 3.3.2 i 3.3.4), i també trobem una condició suficient que permet obtindre algunes nocions de hiperciclicitat a partir de les respectives nocions de recurrència (Teorema 3.3.6). Aquests resultats són completament nous, constitueixen la part central del treball i formen part d'un article enviat a publicació recentment de A. Bonilla, K.-G. Grosse-Erdmann, A. López-Martínez i A. Peris [13].

L'estructura de l'estudi que hem seguit és la següent:

1. A la primera part del treball presentem les definicions bàsiques sobre Dinàmica Topològica per a sistemes dinàmics (X, T), on (X, d) és un espai mètric arbitrari i T és simplement una aplicació contínua. Aquestes propietats seran la *transitivitat topològica* (pàg. 2), el concepte de *caos de Devaney* (pàg. 7), les propietats de ser *barrejant* (pàg. 7) o *feblement barrejant* (pàg. 8) i l'*ergodicitat topològica* (pàg. 10). Seguint [9], també incloem la generalització de les propietats anteriors en termes de la $\mathcal{F}$-*transitivitat* (pàg. 12). Cal remarcar que tota la teoria que incloguem en aquest capítol és coneguda en el camp de la Dinàmica Topològica i que únicament pretenem introduir-nos en els conceptes bàsics d'aquesta.

2. El segon capítol reescriu els conceptes anteriorment introduïts, però, des del punt de vista de la Dinàmica Lineal, i per tant, des del punt de vista de la *hiperciclicitat* (pàg. 18). Incloem també les definicions de *F-espai* i *espai de Fréchet* (pàg. 15), necessàries ja que aquests tipus de espais no s'estudien en cursos previs. A més, seguint [8, 9] presentem les generalitzacions d'operadors transitius i hipercíclics en termes dels $\mathcal{F}$-*operadors* (pàg. 24) on $\mathcal{F}$ és una família de Furstenberg, i la $\mathcal{F}$-*hiperciclicitat* (pàg. 28) on $\mathcal{F}$ és un *conjunt de hiperciclicitat*. Encara que aquest capítol té també un objectiu introductori, els resultats i comentaris de la secció 2.5 sobre la $\mathcal{F}$-hiperciclicitat són claus al tercer capítol, ja que la relacionarem amb la $\mathcal{F}$-recurrència.

3. En l'últim capítol estudiem els distints conceptes de *recurrència* (Definicions 3.1.1, 3.1.4, 3.1.6), començant amb els resultats bàsics coneguts en Dinàmica Topològica en general (pàg. 32), i passant després a la Dinàmica Lineal relacionant la recurrència i la hiperciclicitat. Sent aquesta la part central del treball, exposem els nous resultats obtinguts en [13] començant per la caracterització de la hiperciclicitat reiterada (Teorema 3.2.3), la hiperciclicitat superior-freqüent (Teorema 3.3.2) i la hiperciclicitat freqüent (Teorema 3.3.4) en termes de les respectives nocions de recurrència, i mostrem una condició suficient per a obtindre la hiperciclicitat reiterada i superior-freqüent a partir dites nocions de recurrència (Teorema 3.3.6). Per altra banda, també donem un exemple mostrant que el *conjunt de vectors reiteradament recurrents* no és sempre de categoria-II (Exemple 3.2.5). A l'última secció exposem les generalitzacions dels resultats obtinguts per al cas dels *operadors* $\mathcal{F}$-*recurrents* (veure Definició 3.4.1 i Teoremes 3.4.6 i 3.4.10) emprant el concepte de família *superior* i *dreta-invariant* (Definicions 3.4.2 i 3.4.7), i plantegem la definició d'*operador topològicament* $\mathcal{F}$-*recurrent* (veure Nota 3.4.4).

4. Hem inclòs un apèndix de prerequisits on reunim els conceptes coneguts de Topologia en Espais Mètrics (pàg. 43), Anàlisi Funcional (pàg. 46 i 48) i Teoria Ergòdica (pàg. 53) que són de gran utilitat en diverses parts del treball.

5. També incloem un segon apèndix en el qual presentem els resultats bàsics i necessaris de la Teoria Combinatòria de Nombres on estudiem: alguns conceptes de grandària per a conjunts infinits de nombres naturals, relacionats amb les propietats de la compactació de Stone-Čech dels naturals $\beta\mathbb{N}_0$ (pàg. 57); les densitats asimptòtiques i densitats de Banach amb les seues propietats bàsiques (pàg. 60); les famílies de Furstenberg (nom establert per Akin en [1]), els filtres i les famílies de partició regular (pàg. 68).

Els apèndix tenen la finalitat de donar un caràcter auto-contingut al text encara que per motius d'extensió del treball, no s'inclouen totes les proves dels resultats enunciats deixant en aquests casos les referències pertinents.

Índex

Capítol 1

Dinàmica Topològica

En aquest capítol presentem les definicions bàsiques sobre Dinàmica Topològica per a sistemes dinàmics (X, T), on (X, d) és un espai mètric arbitrari i T és simplement una aplicació contínua. A la primera secció introduïm la definició de *sistema dinàmic discret* (Definició 1.1.1) que anem a emprar al llarg de tot el treball, i per altra banda, el concepte d'equivalència entre dos sistemes dinàmics que serà la *conjugació* (Definició 1.1.3).

Dedicarem les seccions segona, tercera, quarta i cinquena a la *transitivitat topològica* (pàg. 2), el *caos de Devaney* (pàg. 7), les propietats de ser *barrejant* o *feblement barrejant* (pàg. 7) i a l'*ergodicitat topològica* (pàg. 10) respectivament. També incloem les relacions que existeixen entre aquestes propietats, des del punt de vista del producte de sistemes dinàmics (pàg. 11).

A l'última secció i seguint el desenvolupament de [9], exposem la generalització de les propietats anteriors en termes de la $\mathcal{F}$-*transitivitat* (pàg. 12) per a famílies de Furstenberg $\mathcal{F} \subset \mathscr{P}(\mathbb{N}_0)$. Cal remarcar que tota la teoria que incloguem en aquest capítol és coneguda en el camp de la Dinàmica Topològica i que únicament pretenem introduir-nos en els conceptes bàsics d'aquesta. En particular, seguirem el desenvolupament realitzat en el primer capítol de [32].

1.1 Sistemes Dinàmics

El concepte clau necessari per desenvolupar la teoria d'aquest primer capítol és el de sistema dinàmic (discret). Encara que es pot treballar amb espais topològics de Hausdorff, exigir que l'espai subjacent siga un espai mètric ens permet mesurar distàncies entre punts, i per tant, quantificar els canvis que ocorren en el sistema dinàmic. Aquesta idea junt al fet que a partir del segon capítol treballarem amb espais metritzables, ens porta a desenvolupar la teoria per a espais mètrics.

Definició 1.1.1. Un *sistema dinàmic (discret)* es un parell (X, T), format per un espai mètric X i una aplicació contínua $T : X \to X$.

Usualment donarem per fet l'espai X subjacent de manera que simplement anomenarem i denotarem per T al sistema dinàmic o bé per $T : X \to X$. També adoptarem la notació usada en Teoria d'Operadors i escriurem Tx en lloc de $T(x)$. Definim $T^n : X \to X$, la *iteració n-èsima* de T com

$$T^n = T \circ ... \circ T \quad (n \text{ vegades}), \text{ per a tot } n \in \mathbb{N}_0,$$

amb $T^0 = I$ la identitat en X. Fixat $n \in \mathbb{N}_0$ i un conjunt $A \subset X$ denotarem la seua *antiimatge* per l'aplicació T^n amb

$$T^{-n}(A) := (T^n)^{-1}(A) = \{x \in X : T^n x \in A\}.$$

Definició 1.1.2. Siga $T : X \to X$ un sistema dinàmic. Donat un punt $x \in X$ anomenarem *òrbita de x respecte de T* o simplement *òrbita*, al conjunt de les seues iteracions

$$\{x, Tx, T^2x, ...\} = \{T^n x \ : \ n \in \mathbb{N}_0\},$$

i el denotarem per $\operatorname{orb}(x, T)$.

Tota teoria matemàtica té la seua noció d'isomorfisme. Quan considerarem que dos sistemes dinàmics $T : X \to X$ i $S : Y \to Y$ són iguals? Deuria existir un *homeomorfisme* $\phi : X \to Y$ tal que si a $x \in X$ li fem correspondre $y \in Y$ via ϕ, llavors a Tx hauríem de fer-li correspondre Sy via ϕ. En altres paraules, si $y = \phi(x)$ aleshores $Sy = S\phi(x) = \phi(Tx)$, és a dir, $S \circ \phi = \phi \circ T$. Recordem que un *homeomorfisme* és una aplicació bijectiva contínua i amb inversa contínua, però, en moltes ocasions és suficient demanar que ϕ siga contínua i amb rang dens (imatge densa).

Definició 1.1.3. Siguen $T : X \to X$ i $S : Y \to Y$ dos sistemes dinàmics.

(a) Direm que S és *quasi-conjugada* a T si existeix una aplicació contínua $\phi : X \to Y$ amb rang dens (imatge densa) de manera que $S \circ \phi = \phi \circ T$, és a dir, el diagrama

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{T} & X \\ \phi\downarrow & & \downarrow\phi \\ Y & \xrightarrow{S} & Y \end{array}$$

commuta. En aquest cas, direm que $S : Y \to Y$ és *quasi-conjugat* a $T : X \to X$ via ϕ.

(b) Si ϕ es por triar de manera que siga un homeomorfisme, llavors direm que S i T són *conjugades*. En aquest cas, direm que $S : Y \to Y$ i $T : X \to X$ són sistemes dinàmics *conjugats* via ϕ.

La conjugació és una relació d'equivalència entre sistemes dinàmics, i és clar que dos sistemes dinàmics conjugats tenen el mateix comportament dinàmic.

Definició 1.1.4. Direm que una propietat $\mathcal{P}$ de sistemes dinàmics *es conserva per (quasi-)conjugació* si: donat un sistema dinàmic $T : X \to X$ complint la propietat $\mathcal{P}$, llavors, tot sistema dinàmic $S : Y \to Y$ que siga (quasi-)conjugat a $T : X \to X$ també té la propietat $\mathcal{P}$.

Les propietats dels sistemes dinàmics que solen interessar són aquelles que es conserven per (quasi-)conjugació. Evidentment, tota propietat que es conserva per quasi-conjugació també es conserva per conjugació. L'altra implicació no és certa ja que per exemple: la propietat de ser *bijectiva* es conserva per conjugació però no per quasi-conjugació. En les següents seccions introduirem aquelles propietats que es conserven per quasi-conjugació que emprarem al llarg del treball.

1.2 Transitivitat Topològica

Definició 1.2.1. Direm que un sistema dinàmic $T : X \to X$ és *topològicament transitiu* o simplement *transitiu* si, per a cada parell $U, V \subset X$ d'oberts no buits existeix un $n \in \mathbb{N}_0$ de manera que $T^n(U) \cap V \neq \emptyset$. Direm que l'aplicació T és *topològicament transitiva* o simplement *transitiva*.

La transitivitat pot interpretar-se dient que T connecta totes les parts no trivials de X com veurem a la proposició 1.2.3, on obtenim l'equivalència de ser transitiva amb no poder descompondre l'espai en dos subconjunts disjunts d'interior no buit, sent algun d'ells T-*invariant*.

Definició 1.2.2. Siga $T : X \to X$ un sistema dinàmic i $A \subset X$ un subconjunt de X no buit. Direm que A és un conjunt T-*invariant* o bé que és *invariant respecte de* T, si $T(A) \subset A$.

Proposició 1.2.3 ([32, **Proposició 1.10**]). *Siga $T : X \to X$ un sistema dinàmic. Les següents afirmacions són equivalents:*

(i) *T és topològicament transitiva;*

(ii) *X no es pot descompondre com $X = A \cup B$ amb A i B conjunts disjunts amb interior no buit, i amb A invariant respecte de T;*

(iii) *per a tot obert no buit $U \subset X$, el conjunt $\bigcup_{n \in \mathbb{N}_0} T^n(U)$ és dens;*

(iv) *per a tot obert no buit $U \subset X$, el conjunt $\bigcup_{n \in \mathbb{N}_0} T^{-n}(U)$ és dens.*

Demostració. (i) $\Longrightarrow$ (ii) Si suposem $X = A \cup B$ amb $A \cap B = \emptyset$, $T(A) \subset A$ i $\mathrm{int}(A) \neq \emptyset \neq \mathrm{int}(B)$, llavors existeix $n \in \mathbb{N}_0$ de manera que $\emptyset \neq T^n(\mathrm{int}(A)) \cap \mathrm{int}(B) \subset A \cap B = \emptyset$, contradicció.

(ii) $\Longrightarrow$ (iii) Donat un obert no buit $U \subset X$ prenem $A = \bigcup_{n \in \mathbb{N}_0} T^n(U)$ i $B = X \setminus A$. Com A és T-invariant i conté a U, llavors té interior no buit i per tant $\mathrm{int}(B) = \emptyset$ i A és dens.

(i) $\Longleftrightarrow$ (iii) És evident. Per a (i) $\Longleftrightarrow$ (iv) recordem que per a cada parell $U, V \subset X$ d'oberts no buits es compleix $T^n(U) \cap V \neq \emptyset$ si i només si $U \cap T^{-n}(V) \neq \emptyset$. □

Com exposàvem al final de la secció anterior, ens interessen les propietats que es conserven per quasi-conjugació i la transitivitat ho és. Per demostrar aquest fet emprarem els *conjunts de retorn*.

Definició 1.2.4. Siguen $T : X \to X$ un sistema dinàmic, A i B dos subconjunts de l'espai X i $x \in X$. Definim el *conjunt de retorn de x en A* respecte de l'aplicació T com el conjunt

$$N_T(x, A) = \{n \in \mathbb{N}_0 : T^n x \in A\}.$$

Definim el *conjunt de retorn de A en B* respecte de l'aplicació T com el conjunt

$$N_T(A, B) = \{n \in \mathbb{N}_0 : T^n(A) \cap B \neq \emptyset\}.$$

Definim la *família dels conjunts de retorn* com el conjunt

$$\mathcal{N}_T = \{E \subset \mathbb{N}_0 \ : \ \text{existeixen } U, V \subset X \text{ oberts no buits amb } N_T(U, V) \subset E\}.$$

Usualment ometrem el subíndex T (referent a l'aplicació) quan açò no cause cap ambigüitat i denotarem per $N(x, A)$ i $N(A, B)$ els respectius conjunts de retorn. Notem que la transitivitat topològica és equivalent a que per a cada parell $U, V \subset X$ d'oberts no buits el conjunt $N(U, V)$ siga no buit, en altres paraules, que $\emptyset \notin \mathcal{N}_T$. En posteriors seccions introduirem altres propietats que també seran equivalents a que tots els elements de $\mathcal{N}_T$ siguen d'una certa *grandària*, i per tant, el següent lema ens resultarà de gran utilitat per demostrar que aquest tipus de propietats (inclosa la transitivitat topològica) es conserven per quasi-conjugació.

Lema 1.2.5. *Siga $S : Y \to Y$ un sistema dinàmic quasi-conjugat a $T : X \to X$ via $\phi : X \to Y$, $U, V \subset Y$ dos oberts no buits i $x \in X$. Llavors $\phi^{-1}(U)$ i $\phi^{-1}(V)$ són oberts no buits de X i a més:*

(a) $N_T(\phi^{-1}(U), \phi^{-1}(V)) = N_S(U, V)$.

(b) $N_T(x, \phi^{-1}(U)) = N_S(\phi(x), U)$.

Demostració. La densitat del rang de ϕ i la seua continuïtat impliquen que $\phi^{-1}(U)$ i $\phi^{-1}(V)$ són subconjunts oberts no buits de X. A més, tenim que $n \in N_S(U,V)$ si i només si $U \cap S^{-n}(V) \neq \emptyset$, és a dir, si i només si

$$\emptyset \neq \phi^{-1}\Big(U \cap S^{-n}(V)\Big) = \phi^{-1}(U) \cap \phi^{-1}\Big(S^{-n}(V)\Big) = \phi^{-1}(U) \cap T^{-n}\Big(\phi^{-1}(V)\Big),$$

i per tant si i només si $n \in N_T(\phi^{-1}(U), \phi^{-1}(V))$. Per altra banda, $m \in N_S(\phi(x), U)$, és a dir, $\phi(T^m x) = S^m \phi(x) \in U$ si i només si $T^m x \in \phi^{-1}(U)$, i per tant si i només si $m \in N_T(x, \phi^{-1}(U))$. □

Proposició 1.2.6. *La transitivitat topològica es conserva per quasi-conjugació.*

Demostració. És conseqüència del lema 1.2.5(a). □

Els resultats i la teoria que inclourem a partir d'aquesta secció deixaran de banda els espais mètrics amb punts aïllats. Un dels motius d'aquest fet és que els espais amb els quals treballarem a partir del segon capítol són espais vectorials metritzables, i per tant sense punts aïllats. L'altre motiu de pes és, com podem observar en la següent proposició, que la transitivitat en sistemes dinàmics amb punts aïllats no és massa interessant.

Proposició 1.2.7 ([32, **Exercici 1.2.3**]). *Siga $T : X \to X$ un sistema dinàmic tal que X tinga almenys un punt aïllat. Llavors T és topològicament transitiva si i només si X és finit i podem enumerar els seus elements $X = \{x_0, x_1, ..., x_n\}$ amb $T(x_i) = x_{i+1}$ per a $0 \leq i < n$ i $T(x_n) = x_0$.*

Demostració. És clar que la nova condició es suficient. Per altra banda, si X té un únic punt és evident que és necessària. Suposem per tant que X té més d'un punt, i siguen x_0 un punt aïllat de X i $C \subset X$ una component connexa no buida de X distinta de $\{x_0\}$. Aquests dos conjunts són oberts i per tant existeixen $k, m \in \mathbb{N}_0$ tals que $T^k x_0 \in C$ i $T^m(C) \cap \{x_0\} \neq \emptyset$. La continuïtat de l'aplicació $T^m : X \to X$ implica que $A = T^{-m}(\{x_0\}) \cap C$ i $B = T^{-m}(X \setminus \{x_0\}) \cap C$ és una partició per conjunts oberts i disjunts de C. Com C es connex i $A \neq \emptyset$, deduïm $B = \emptyset$, és a dir, $T^m x = x_0$ per a tot $x \in C$. Llavors $T^{k+m} x_0 = x_0$ i per tant $\mathrm{orb}(x_0, T)$ que és densa, és un conjunt finit. En tot espai mètric un conjunt finit és dens si i només si és tot l'espai (Proposició A.1.4). L'enumeració dels elements és obvia calculant de manera recursiva l'òrbita de x_0. □

La proposició anterior permet donar una nova condició equivalent a la transitivitat topològica, que aparentment és més forta que la original, en termes dels *conjunts de retorn* entre conjunts oberts, és a dir, en termes de la *família dels conjunts de retorn*.

Proposició 1.2.8 ([32, **Exercici 1.2.4**]). *Un sistema dinàmic $T : X \to X$ és topològicament transitiu si i només si tot conjunt de $\mathcal{N}_T$ és infinit.*

Demostració. És clar que la nova condició es suficient. La proposició 1.2.7 justifica que és necessària si X té algun punt aïllat. Suposem per tant que (X, d) no té punts aïllats, llavors donats $U, V \subset X$ és suficient observar que per a cada $n \in N(U,V)$ existeix $k \in N(U,V)$ amb $k > n$. En efecte, si prenem el conjunt $U_0 = U \cap T^{-n}(V)$ obert i no buit per la continuïtat de $T^n : X \to X$, aleshores podem considerar $x, y \in U_0$ amb $\delta = d(x,y) > 0$ i per tant existeix $m > 0$ tal que $T^m(U_x) \cap U_y \neq \emptyset$ on

$$U_x = U_0 \cap B_d\Big(x, \delta/2\Big), \text{ i per altra banda } U_y = U_0 \cap B_d\Big(y, \delta/2\Big).$$

Existeix $z \in U_x \subset U$ tal que $T^{m+n} z = T^n T^m z \in T^n(U_0) \subset V$ i $k := m + n \in N(U,V)$. □

Considerant ja espais mètrics sense punts aïllats, és important notar que l'existència d'òrbites denses implica la transitivitat topològica. En efecte, donats U i V oberts no buits en X i fixant $x \in X$ un punt amb òrbita densa existeix $n \in \mathbb{N}_0$ tal que $T^n x \in U$, i considerant el conjunt $V_0 := V \setminus \{x, Tx, ..., T^n x\}$ que torna a ser un obert no buit (per no tindre X punts aïllats), existeix $m \in \mathbb{N}_0$ amb $m > n$ complint $T^m x \in V_0$. D'aquesta manera obtenim

$$T^n x \in U, \text{ i a més } T^{m-n}(T^n x) = T^m x \in V_0 \subset V,$$

és a dir, $T^{m-n}(U) \cap V \neq \emptyset$. També acabem de demostrar de manera indirecta, que per a un punt amb òrbita densa $x \in X$ i un obert no buit qualsevol $V \subset X$ en un espai mètric sense punts aïllats, el conjunt de retorn $N(x, V)$ és infinit.

No és tan obvi que en espais mètrics complets i separables, el recíproc d'aquest resultat també és cert: les aplicacions transitives tenen una òrbita densa. Aquest important resultat per a la Teoria de Sistemes Dinàmics va ser obtingut en 1920 per Birkhoff, en el context de les aplicacions en subconjunts compactes de $\mathbb{R}^n$.

Teorema 1.2.9 (**Teorema de Transitivitat de Birkhoff**). *Siga $T : X \to X$ una aplicació contínua en un espai mètric complet i separable X, sense punts aïllats. Les següents afirmacions són equivalents:*

(i) *T és topològicament transitiva;*

(ii) *existeix algun $x \in X$ tal que $\mathrm{orb}(x, T)$ és densa en X.*

Si alguna d'aquestes condicions es compleix, llavors el conjunt de punts de X amb òrbita densa és un conjunt G_δ dens.

Demostració. Ja hem vist que (ii) implica (i). Per altra banda, com X es separable podem considerar $\{U_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una base numerable de la topologia, i llavors si $\mathcal{D}(T)$ és el conjunt de punts amb òrbita densa tenim

$$\mathcal{D}(T) = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \left(\bigcup_{m=0}^{\infty} T^{-m}(U_n) \right).$$

Per la continuïtat de T i la proposició 1.2.3(iv), $\mathcal{D}(T)$ és una intersecció numerable d'oberts densos. Com X és complet, pel teorema de Baire (Teorema A.1.7) sabem que $\mathcal{D}(T)$ és un G_δ dens. $\square$

Proposició 1.2.10. *La propietat de tindre una òrbita densa es conserva per quasi-conjugació.*

Demostració. És conseqüència del lema 1.2.5(b). $\square$

1.3 El Caos de Devaney

Encara que ens restringim a l'estudi de sistemes dinàmics deterministes, els matemàtics han donat diverses respostes a la pregunta de "què és el caos?", és a dir, al concepte de comportament caòtic d'un sistema dinàmic. Nosaltres seguirem la definició proposta per Devaney en 1986. Aquesta, exigeix tres requisits: l'anomenat "efecte papallona", la irreductibilitat del sistema i per últim, l'existència de "moltes" òrbites amb un comportament regular.

En primer lloc, quan parlem d'"efecte papallona" ens referim a que petits canvis en l'estat inicial del sistema dinàmic poden produir, després de cert temps, grans canvis en l'òrbita estudiada. Com a conseqüència de la proposició 1.2.7, únicament estudiarem espais mètrics sense punts aïllats.

Definició 1.3.1. Un sistema dinàmic $T : X \to X$, on (X, d) és un espai mètric sense punts aïllats, direm que té *dependència sensible respecte de les condicions inicials* si existeix algun $\delta > 0$ de manera que per a tot $x \in X$ i tot $\varepsilon > 0$, existeix algun $y \in X$ amb $d(x, y) < \varepsilon$ tal que per a algun $n \in \mathbb{N}_0$ es compleix $d(T^n x, T^n y) > \delta$. El nombre δ és anomenat *constant de sensibilitat* de T.

La irreductibilitat del sistema, és a dir, que l'aplicació T connecte les parts no trivials de l'espai és una idea perfectament representada per la *transitivitat topològica* (veure Proposició 1.2.3). Finalment, quan parlem de l'existència de "moltes" òrbites amb un comportament regular, ens referim a que el sistema dinàmic tinga un conjunt dens de *punts periòdics*.

Definició 1.3.2. Siga $T : X \to X$ un sistema dinàmic.

(a) Direm que $x \in X$ és un *punt fix* o *punt fixat* si $Tx = x$.

(b) Direm que $x \in X$ és un *punt periòdic* o *punt d'òrbita periòdica* si existeix algun $n \in \mathbb{N}$ tal que $T^n x = x$. Al menor dels naturals complint aquesta propietat se l'anomena *període* de x i si aquest natural és n direm que x és un punt n-periòdic. Denotarem per $\mathrm{Per}(T)$ el *conjunt de tots els punt periòdics* del sistema dinàmic $T : X \to X$. Denotarem per $\mathrm{Per}_n(T)$ el *conjunt de punts n-periòdics* de dit sistema dinàmic.

Proposició 1.3.3. *La densitat del conjunt de punts periòdics es conserva per quasi-conjugació.*

Demostració. Siga $S : Y \to Y$ quasi-conjugat a $T : X \to X$ via $\phi : X \to Y$ i suposem que $\mathrm{Per}(T)$ es dens en X. Aleshores $\phi(\mathrm{Per}(T))$ serà dens en $\phi(X)$ per ser ϕ contínua (veure Proposició A.1.5), i per tant és suficient observar que la imatge d'un punt periòdic per ϕ és un punt periòdic de S. En efecte, si $x \in X$ és n-periòdic llavors $T^n x = x$ i $S^n \phi(x) = \phi(T^n x) = \phi(x)$. □

Definició 1.3.4. Un sistema dinàmic $T : X \to X$, on (X, d) és un espai mètric sense punts aïllats, direm que és *caòtic (en el sentit de Devaney)* si compleix les condicions:

(i) T té dependència sensible respecte de les condicions inicials;

(ii) T és topològicament transitiva;

(iii) T té un conjunt dens de punts periòdics.

L'anterior definició presenta un inconvenient: la dependència sensible respecte de les condicions inicials no es conserva per conjugació.

Exemple 1.3.5 ([**38**, **Exercici 9.3**]). Siga $T :]1, \infty[\to]1, \infty[$ el sistema dinàmic donat per $Tx = x^2$ i siga $S :]0, 1[\to]0, 1[$ donada per $Sx = x^2$. Per una part, si $x, y \in]1, \infty[$ amb $x < y$ llavors $|Tx - Ty| > 2|x - y|$ ja que

$$Ty = (x + (y - x))^2 = x^2 + 2x(y - x) + (y - x)^2 > Tx + 2(y - x),$$

i en general $|T^n x - T^n y| > 2^n |x - y|$, T té dependència sensible respecte de les condicions inicials.

D'altra banda, donat $0 < \delta < 1$ podem considerar $x_0 = \delta/2 = \varepsilon$ complint que per a tot $x \in]0, 1[$ amb $|x_0 - x| < \varepsilon$ i per a tot $n \in \mathbb{N}$:

$$S^n x_0 = x_0^{2^n} < x_0, \text{ i } S^n x = x^{2^n} < x, \text{ d'on } S^n x_0, S^n x \in]0, \delta[,$$

i per tant $|S^n x_0 - S^n x| < \delta$ i S no té dependència sensible respecte de les condicions inicials.

És clar que $\phi :]1, \infty[\to]0, 1[$ amb $\phi(x) = 1/x$ és un homeomorfisme, i $\phi(Tx) = S\phi(x)$ per a cada $x \in]1, \infty[$, d'on obtenim que els dos sistemes són conjugats.

Més d'un autor (veure [41]), per exemple Banks, Brooks, Cairns, Davis i Stacy en [2], han demostrat que es pot ometre la condició de la dependència sensible respecte de les condicions inicials ja que es pot deduir a partir de les altres dos.

Teorema 1.3.6 (Banks-Brooks-Cairns-Davis-Stacy). *Siga $T : X \to X$ un sistema dinàmic, on (X, d) és un espai mètric sense punts aïllats. Si T és topològicament transitiva i té un conjunt dens de punts periòdics llavors T té dependència sensible respecte de les condicions inicials amb qualsevol mètrica que definisca la topologia de X.*

No inclourem una prova degut a que és tracta d'un resultat conegut en Dinàmica Topològica, i a més, a partir del capítol 2 en sistemes dinàmics lineals, la transitivitat topològica serà suficient per a obtindre la dependència sensible respecte de les condicions inicials (veure Proposició 2.3.2). Per a una demostració es pot consultar [32, Teorema 1.29]. Finalment, la definició de *caos* en el sentit de Devaney es redueix a la transitivitat topològica i la densitat del conjunt de punts periòdics.

Definició 1.3.7. Direm que un sistema dinàmic $T : X \to X$ és *caòtic (en el sentit de Devaney)* si compleix les condicions:

(i) T és topològicament transitiva;

(ii) T té un conjunt dens de punts periòdics.

En aquest cas direm que l'aplicació T és *caòtica*.

Emprant ara la proposició 1.2.7 és obvi que si l'espai mètric subjacent té algun punt aïllat, llavors la transitivitat topològica és equivalent al concepte de caos.

Proposició 1.3.8. *El caos de Devaney es conserva per quasi-conjugació.*

Demostració. És conseqüència de les proposicions 1.2.6 i 1.3.3. □

1.4 Aplicacions Barrejants i Feblement Barrejants

Tal com comentàvem després de la definició dels conjunts de retorn (Definició 1.2.4), podem obtenir altres propietats similars a la transitivitat topològica, però, exigint que els conjunts de $\mathcal{N}_T$ siguen d'una grandària determinada. Per la proposició 1.2.8, la simple exigència que tot element de $\mathcal{N}_T$ siga no buit implica que tots siguen infinits, i per tant, haurem de quantificar la grandària dels subconjunts infinits de $\mathbb{N}_0$ (veure Apèndix B). És evident que les propietats que introduirem a continuació implicaran la transitivitat topològica.

Començarem per l'altre extrem, és a dir, exigint que els conjunts de retorn siguen el més gran possible. Aquest concepte de grandària és el de ser un conjunt *cofinit*, complementari d'un conjunt finit: $T^n(U)$ tallarà a V per a tot $n \in \mathbb{N}_0$ suficientment gran.

Definició 1.4.1. Direm que un sistema dinàmic $T : X \to X$ és *barrejant*, si per a cada parell $U, V \subset X$ d'oberts no buits, existeix un $N \in \mathbb{N}_0$ de manera que $T^n(U) \cap V \neq \emptyset$ per a tot $n \geq N$. En aquest cas direm que l'aplicació T és *barrejant*.

Com avançàvem abans de la definició, en termes de conjunts de retorn aquesta propietat és equivalent a que per a cada parell $U, V \subset X$ d'oberts no buits el conjunt $N(U, V)$ siga cofinit, és a dir, que tot element de la família $\mathcal{N}_T$ siga cofinit, i per tant pel lema 1.2.5 aquesta propietat es conserva per quasi-conjugació.

Proposició 1.4.2. *La propietat de ser un sistema dinàmic barrejant es conserva per quasi-conjugació.*

Per parlar de la segona propietat protagonista d'aquesta secció necessitem introduir la noció de *producte de sistemes dinàmics*:

Definició 1.4.3. Siguen $T : X \to X$ i $S : Y \to Y$ dos sistemes dinàmics. Definim el *producte dels sistemes dinàmics* T i S com el sistema dinàmic

$$T \times S : X \times Y \longrightarrow X \times Y,$$

on $(T \times S)(x, y) = (Tx, Sy)$ per a cada $(x, y) \in X \times Y$ i $X \times Y$ és l'espai topològic producte.

Nota 1.4.4. La definició anterior és coherent amb la de sistema dinàmic (Definició 1.1.1), ja que el producte de dos espais mètrics és de nou un espai mètric. En particular, si (X, d_X) i (Y, d_Y) són dos espais mètrics considerarem la mètrica $d((x_1, y_1), (x_2, y_2)) = d_X(x_1, x_2) + d_Y(y_1, y_2)$ que engendra la topologia producte. Recordem que una base de la topologia producte en l'espai $X \times Y = \{(x, y) : x \in X, y \in Y\}$ ve donada per la família de conjunts

$$\{U \times V : U \text{ obert en } X, V \text{ obert en } Y\}.$$

És clar que l'aplicació $T \times S$ és contínua per ser-ho T i S. A més, la iteració n-èsima del sistema dinàmic seria

$$(T \times S)^n = T^n \times S^n : X \times Y \longrightarrow X \times Y.$$

Les aplicacions $\phi_1 : X \times Y \longrightarrow X$ i $\phi_2 : X \times Y \longrightarrow Y$ definides per $\phi_1(x, y) = x$ i $\phi_2(x, y) = y$ per a cada $(x, y) \in X \times Y$ són contínues i tenen rang dens, és a dir, T i S són quasi-conjugades a $T \times S$.

Aquests fets poden generalitzar-se de manera inductiva a qualsevol producte finit de sistemes dinàmics, a la aplicació ϕ_i se l'anomena *projecció i-èsima*, i cada sistema dinàmic dels que formen el producte és quasi-conjugat a dit producte via la respectiva projecció.

Tot sistema dinàmic barrejant $T : X \to X$ compleix que el producte $T \times T$ és topològicament transitiu. Tal com s'exposa en [32, Definició 1.44], aquest és el fet que motiva la definició de sistema dinàmic *feblement barrejant*.

Definició 1.4.5. Direm que un sistema dinàmic $T : X \to X$ és *feblement barrejant*, si $T \times T$ és topològicament transitiu. En aquest cas direm que l'aplicació T és *feblement barrejant*.

Com que la transitivitat topològica és suficient comprovar-la en una base de la topologia de l'espai, l'anterior definició és equivalent a: per a cada quatre oberts no buits $U_1, U_2, V_1, V_2 \subset X$ existeix algun $n \in \mathbb{N}_0$ de manera que $T^n(U_1) \cap V_1 \neq \emptyset$ i $T^n(U_2) \cap V_2 \neq \emptyset$, és a dir, en termes dels conjunts de retorn equival a exigir $N(U_1, V_1) \cap N(U_2, V_2) \neq \emptyset$. Emprant de nou el lema 1.2.5 és clar que aquesta propietat es conserva per quasi-conjugació.

Proposició 1.4.6. *La propietat de ser feblement barrejant es conserva per quasi-conjugació.*

Donat un sistema dinàmic és obvi que és compleixen les implicacions

$$\text{barrejant} \implies \text{feblement barrejant} \implies \text{transitivitat topològica}.$$

Però, com afecta la condició de ser feblement barrejant als conjunts de retorn $N(U, V)$, i per tant, a la família $\mathcal{N}_T$? Demostrem a continuació que en aquest cas $\mathcal{N}_T$ és un *filtre* (veure Definició B.3.6).

Teorema 1.4.7 (Teorema de Furstenberg). *Siga $T : X \to X$ un sistema dinàmic. Llavors T és feblement barrejant si i només si $\mathcal{N}_T$ és un filtre. En particular, si T és un sistema dinàmic feblement barrejant, aleshores el sistema dinàmic $T \times \cdots \times T$, producte n vegades de T, és feblement barrejant per a tot $n \geq 2$.*

Demostració. Si $\mathcal{N}_T$ és un filtre, llavors $\emptyset \notin \mathcal{N}_T$ i la intersecció de dos conjunts de $\mathcal{N}_T$ torna a estar en $\mathcal{N}_T$ i per tant és no buida (veure Definició B.3.6). Per veure que és una condició necessària siguen $U_1, U_2, V_1, V_2 \subset X$ quatre oberts no buits. Aleshores existeix $n \in N(U_1, U_2) \cap N(V_1, V_2)$ d'on obtenim els oberts no buits $U_0 := U_1 \cap T^{-n}(U_2)$ i $V_0 := V_1 \cap T^{-n}(V_2)$. Donat $m \in N(U_0, V_0)$ existeix $x \in U_0 \subset U_1$ amb $T^m x \in V_0 \subset V_1$ i a més $T^n x \in U_2$ amb $T^m T^n x = T^n T^m x \in T^n(V_0) \subset V_2$, és a dir

$$N(U_0, V_0) \subset N(U_1, V_1) \cap N(U_2, V_2),$$

d'on es dedueix que $\mathcal{N}_T$ és un filtre. Com que qualsevol intersecció finita d'elements de $\mathcal{N}_T$ torna a ser un element d'aquesta família tenim que $T \times \cdots \times T$ és feblement barrejant per a tot $n \geq 2$. $\square$

Així com els conceptes de conjunt infinit o cofinit són coneguts, necessitem introduir el concepte de grandària corresponent a la propietat feblement barrejant, és a dir, el de ser un conjunt *gros*. Aquest és equivalent a que continga "intervals" de "longitud" arbitrària (veure Secció B.1).

Definició 1.4.8. Siga $A \subset \mathbb{N}_0$. Direm que A és un conjunt *gros* (*thick*), si per a cada $m \in \mathbb{N}$ existeix $x \in A$ de manera que $[x, x+m] \subset A$.

Teorema 1.4.9 ([32, Teorema 1.54]). *Un sistema dinàmic $T : X \to X$ és feblement barrejant si i només si tot conjunt de $\mathcal{N}_T$ és gros.*

Demostració. Si T és feblement barrejant, donats $U, V \subset X$ dos oberts no buits i $m \in \mathbb{N}$ el conjunt $T^{-k}(V)$ és un obert no buit per a cada $k = 0, 1, ..., m$. Pel teorema de Furstenberg $\mathcal{N}_T$ és un filtre, i per tant existeix $n \in \mathbb{N}_0$ amb

$$n \in \bigcap_{k=0}^{m} N(U, T^{-k}(V)),$$

d'on obtenim $[n, n+m] \subset N(U, V)$.

Per veure que la condició de tindre els conjunts de retorn grossos és suficient afirmem que: donats $U, V, W \subset X$ oberts no buits llavors $N(U, V) \cap N(U, W) \neq \emptyset$. En efecte, existeix $m \in N(V, W)$ per ser aquest conjunt gros, i podem considerar l'obert no buit $V_0 = V \cap T^{-m}(W)$. Llavors existeix $n \in \mathbb{N}_0$ de manera que $[n, n+m] \subset N(U, V_0)$, i per tant, existeix $x \in U$ amb $T^n x \in V_0$ que implica $T^{n+m} x = T^m T^n x \in T^m(V_0) \subset W$, és a dir, $n + m \in N(U, V) \cap N(U, W)$.

Finalment, si $U_1, U_2, V_1, V_2 \subset X$ són oberts no buits existeix $k \in N(U_1, U_2) \cap N(U_1, V_2)$, i per tant $U = U_1 \cap T^{-k}(U_2)$ i $T^{-k}(V_2)$ són oberts no buits. De nou emprant l'afirmació del paràgraf anterior existeix $l \in N(U, V_1) \cap N(U, T^{-k}(V_2))$, i per tant existeix $x \in U$ amb $T^l x \in T^{-k}(V_2)$. Deduïm $T^k x \in U_2$ i $T^l T^k x = T^k T^l x \in V_2$, és a dir, $l \in N(U_1, V_1) \cap N(U_2, V_2)$. $\square$

1.5 Ergodicitat Topològica

A continuació introduïm una nova noció relacionada amb la transitivitat topològica i la grandària dels conjunts de la família $\mathcal{N}_T$, aquesta vegada definint el concepte directament des del punt de vista dels propis conjunts de retorn. Necessitarem el concepte de conjunt *sindètic*.

Definició 1.5.1. Siga $A \subset \mathbb{N}_0$. Direm que A és un conjunt *sindètic* (*syndetic*), si existeix $m \in \mathbb{N}$ de manera que per a tot $x \in \mathbb{N}_0$ es compleix $[x, x+m] \cap A \neq \emptyset$.

L'anterior definició és equivalent a que el conjunt A tinga "forats" o "buits" acotats. És clar que A és sindètic si i només si $\mathbb{N}_0 \setminus A$ no és gros (veure Secció B.1).

Definició 1.5.2. Direm que un sistema dinàmic $T : X \to X$ és *topològicament ergòdic* si, per a cada parell $U, V \subset X$ d'oberts no buits el conjunt de retorn $N(U, V)$ és sindètic. En aquest cas direm que l'aplicació T és *topològicament ergòdica*.

Aplicant el lema 1.2.5 obtenim:

Proposició 1.5.3. *L'ergodicitat topològica es conserva per quasi-conjugació.*

Estem en condicions d'exposar les relacions que existeixen entre les propietats introduïdes en aquest primer capítol. Encara que moltes de les implicacions són obvies per la grandària del conjunts de $\mathcal{N}_T$, també podem relacionar el caos amb l'ergodicitat topològica.

Proposició 1.5.4 ([32, **Exercici 1.5.6**]). *Siga $T : X \to X$ un sistema dinàmic. Si T és caòtica, llavors és topològicament ergòdica.*

Demostració. Si T és caòtica i considerem $U, V \subset X$ oberts no buits existeix $k \in N(U, V)$. Per la densitat dels punts periòdics existeix $n \in \mathbb{N}$ i $x \in \mathrm{Per}_n(T) \cap \left(U \cap T^{-k}(V)\right)$, d'on deduïm que $k + j \cdot n \in N(U, V)$ per a tot $j \in \mathbb{N}$, és a dir, $N(U, V)$ és sindètic. □

Les relacions entre les propietats descrites en aquest primer capítol es recullen en la Figura 1.1.

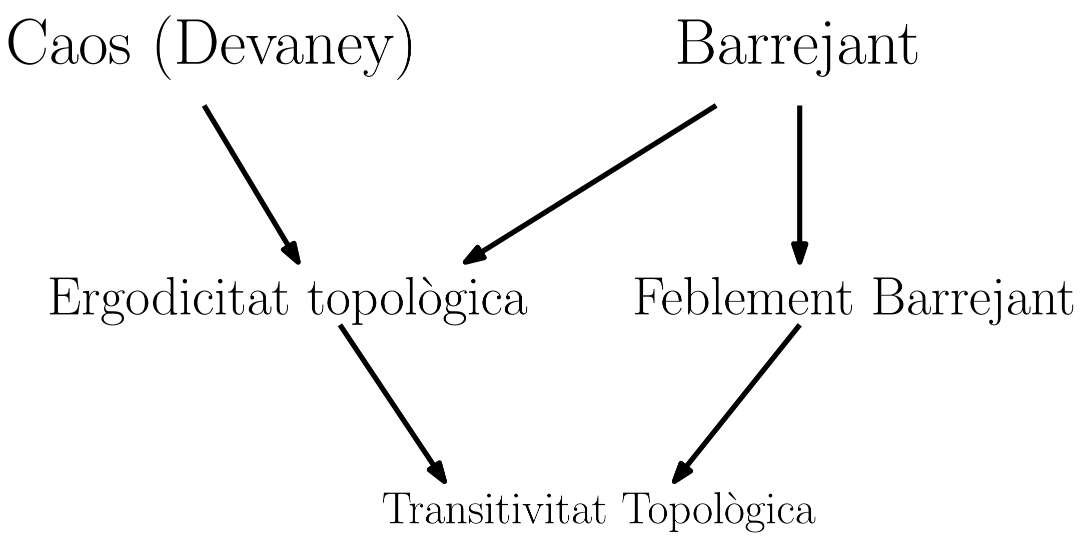

Figura 1.1: Relacions entre les propietats introduïdes en el capítol 1.

Per altra banda, també podem observar com es comporten aquestes propietats des del punt de vista del producte de sistemes dinàmics. La majoria de relacions es dedueixen de la conservació per quasi-conjugació que hem anat enunciant a les seccions prèvies.

Proposició 1.5.5 ([32, **Proposició 1.42**]). *Siguen $T : X \to X$ i $S : Y \to Y$ dos sistemes dinàmics. Es compleixen les següents afirmacions:*

(a) *Si $T \times S$ és topològicament transitiva, llavors T i S són topològicament transitives.*

(b) *Si $T \times S$ té una òrbita densa, llavors T i S tenen una òrbita densa.*

(c) *Si $T \times S$ és caòtica, llavors T i S són caòtiques.*

(d) *Si $T \times S$ és feblement barrejant, llavors T i S són feblement barrejant.*

(e) *Si $T \times S$ és topològicament ergòdica, llavors T i S són topològicament ergòdiques.*

(f) *$T \times S$ és barrejant si i només si T i S són barrejants.*

(g) *Si T és topològicament transitiva i S és barrejant, llavors $T \times S$ és transitiva.*

(h) *Si T és topològicament ergòdica i S és feblement barrejant, llavors $T \times S$ és transitiva.*

Demostració. Per la nota 1.4.4 sabem que T i S són quasi-conjugades a $T \times S$. Els apartats (a), (b), (c), (d), (e) i la implicació cap a la dreta de (f) es dedueixen de la conservació d'aquestes propietats per quasi-conjugació (veure Proposicions 1.2.6, 1.2.10, 1.3.8, 1.4.6, 1.5.3 i 1.4.2).

Per a l'altra direcció de (f) i les afirmacions (g) i (h), notem que donats dos oberts no buits $U, V \subset X \times Y$, existeixen oberts no buits $U_1, V_1 \subset X$ i $U_2, V_2 \subset Y$ amb $U_1 \times U_2 \subset U$ i $V_1 \times V_2 \subset V$, d'on obtenim $N_T(U_1, V_1) \cap N_S(U_2, V_2) \subset N(U, V)$ ja que per a cada $n \in \mathbb{N}_0$ tenim

$$(T \times S)^n(U_1 \times U_2) \cap (V_1 \times V_2) = (T^n(U_1) \cap V_1) \times (S^n(U_2) \cap V_2).$$

En particular, la intersecció de dos conjunts cofinits (en el cas de (f)) és un conjunt cofinit, i per altra banda la intersecció d'un conjunt infinit amb un cofinit (en el cas de (g)) i d'un conjunt sindètic amb un gros (en el cas de (h)) sempre és no buida (veure Proposició B.1.3(a)). ☐

1.6 $\mathcal{F}$-transitivitat

Fins ara, les propietats d'un sistema dinàmic $T : X \to X$ que hem vist relacionades amb la transitivitat topològica, és a dir, excepte el caos de Devaney, seguien la idea de garantir que conjunts de $\mathcal{N}_T$ foren no buits (o infinits), cofinits, grossos o sindètics. En general, donada una col·lecció de conjunts $\mathcal{F} \subset \mathscr{P}(\mathbb{N}_0)$ complint alguna propietat determinada podem pensar en exigir la inclusió $\mathcal{N}_T \subset \mathcal{F}$. Aquest és el cas de la $\mathcal{F}$-transitivitat tal com es defineix en [9], on $\mathcal{F}$ serà una *família de Furstenberg*. En aquest capítol, inclourem únicament les definicions estrictament necessàries sobre famílies de Furstenberg. Per a un major estudi es pot veure la secció B.3.

Direm que $\mathcal{F} \subset \mathscr{P}(\mathbb{N}_0)$ és una *família de Furstenberg* o simplement una *família*, si per a tot $A \in \mathcal{F}$ es compleix que A és infinit, i que si $A \subset B \subset \mathbb{N}_0$ llavors $B \in \mathcal{F}$ (veure Definició B.3.1). Recordem que

$$\mathcal{N}_T = \{A \subset \mathbb{N}_0 \ : \ \text{existeixen } U, V \subset X \text{ oberts no buits amb } N_T(U, V) \subset A\},$$

i per tant $\mathcal{N}_T$ serà una família si i només si T és topològicament transitiva (Proposició 1.2.8). Per altra banda, donada una família $\mathcal{F}$ denotarem per $\mathcal{F}^*$ la *família dual*, que és la col·lecció de conjunts

$$\mathcal{F}^* := \{A \subset \mathbb{N}_0 \text{ infinit} : A \cap B \neq \emptyset, \text{ per a tot } B \in \mathcal{F}\}.$$

Seguint [9] donem la definició de $\mathcal{F}$-transitivitat.

Definició 1.6.1. Donada una família de Furstenberg $\mathcal{F}$, direm que un sistema dinàmic $T : X \to X$ és *$\mathcal{F}$-transitiu* si, per a cada parell $U, V \subset X$ d'oberts no buits el conjunt $N(U, V) \in \mathcal{F}$. En aquest cas direm que l'aplicació T és *$\mathcal{F}$-transitiva*.

Nota 1.6.2. L'anterior definició és equivalent a $\mathcal{N}_T \subset \mathcal{F}$. Considerant la família $\mathcal{F}$ adequada podem recuperar les definicions que hem donat en aquest primer capítol. Per exemple, si prenem:

(a) $\mathcal{I} = \{A \subset \mathbb{N}_0 : A$ és infinit$\}$, llavors la *$\mathcal{I}$-transitivitat* és exactament la *transitivitat topològica*.

(b) $\mathcal{I}^* = \{A \subset \mathbb{N}_0 : A$ és cofinit$\}$, un sistema dinàmic és *$\mathcal{I}^*$-transitiu* si i només si és *barrejant*.

(c) $\mathcal{T} = \{A \subset \mathbb{N}_0 : A$ és gros$\}$, la *$\mathcal{T}$-transitivitat* és equivalent a la propietat *feblement barrejant*.

(d) $\mathcal{S} = \{A \subset \mathbb{N}_0 : A$ és sindètic$\}$, obtenim que la *$\mathcal{S}$-transitivitat* és l'*ergodicitat topològica*.

Altres famílies i les seues propietats s'han introduït a les seccions B.1, B.2 i B.3.

És clar que si tenim la inclusió $\mathcal{F}_1 \subset \mathcal{F}_2$ entre dues famílies i T és $\mathcal{F}_1$-transitiva llavors també és $\mathcal{F}_2$-transitiva. Però, com veurem en la nota 2.4.2(d), per a algunes famílies es compleix el contrari, és a dir, que T siga $\mathcal{F}_2$-transitiva pot implicar la $\mathcal{F}_1$-transitivitat. Donada una família $\mathcal{F}$ podem considerar la subfamília:

$$\widetilde{\mathcal{F}} := \{A \subset \mathbb{N}_0 : \text{donat } N \in \mathbb{N}_0 \text{ existeix } B \in \mathcal{F} \text{ amb } (B + [-N, N]) \cap \mathbb{N}_0 \subset A\}.$$

Aquesta subfamília serà d'especial importància quan estudiem sistemes dinàmics lineals, sent la base del criteri de $\mathcal{F}$-transitivitat (Teorema 2.4.4). Com $\widetilde{\mathcal{F}} \subset \mathcal{F}$, tota aplicació $\widetilde{\mathcal{F}}$-transitiva és també $\mathcal{F}$-transitiva. Incloem a continuació una espècie de recíproc.

Lema 1.6.3 ([9, **Lema 2.3**]). *Siga $\mathcal{F}$ una família i $T : X \to X$ un sistema dinàmic $\mathcal{F}$-transitiu. Les següents afirmacions són equivalents:*

(i) *T és feblement barrejant;*

(ii) *T és $\widetilde{\mathcal{F}}$-transitiva.*

Demostració. (i) $\Longrightarrow$ (ii) Pel teorema de Furstenberg (Teorema 1.4.7) $\mathcal{N}_T$ és un filtre, i per tant donats dos oberts no buits $U, V \subset X$ i $N \in \mathbb{N}_0$ existeixen oberts $U', V' \subset X$ amb

$$N(U', V') \subset N(T^{-m}(U), V) \cap N(U, T^{-m}(V)), \text{ per a } m = 0, ..., N, \tag{1.1}$$

ja que per transitivitat els conjunts $T^{-m}(U)$ i $T^{-m}(V)$ són oberts no buits per a cada $m = 0, ..., N$. Per ser T una aplicació $\mathcal{F}$-transitiva tenim $N(U', V') \in \mathcal{F}$, i emprant l'equació (1.1) és clar que $(N(U', V') + [-N, N]) \cap \mathbb{N}_0 \subset N(U, V)$ d'on obtenim $N(U, V) \in \widetilde{\mathcal{F}}$ i T és $\widetilde{\mathcal{F}}$-transitiva.

(ii) $\Longrightarrow$ (i) Estem suposant $\mathcal{N}_T \subset \widetilde{\mathcal{F}}$. Tot element de $\widetilde{\mathcal{F}}$ és un conjunt gros, i per tant el teorema 1.4.9 ens assegura que T és feblement barrejant. □

Definició 1.6.4. Donada una família de Furstenberg $\mathcal{F}$, direm que un sistema dinàmic $T : X \to X$ és *hereditàriament $\mathcal{F}$-transitiu* si, per a cada parell $U, V \subset X$ d'oberts no buits i cada $A \in \mathcal{F}$, el conjunt $N(U, V) \cap A \in \mathcal{F}$. En aquest cas direm que l'aplicació T és *hereditàriament $\mathcal{F}$-transitiva*.

Nota 1.6.5. Denotant el *producte de dues famílies* $\mathcal{F}_1$ *i* $\mathcal{F}_2$ com $\mathcal{F}_1 \cdot \mathcal{F}_2 := \{A \cap B : A \in \mathcal{F}_1, B \in \mathcal{F}_2\}$ (veure Definició B.3.4), l'anterior definició equival a $\mathcal{N}_T \cdot \mathcal{F} := \{A \cap B : A \in \mathcal{N}_T, B \in \mathcal{F}\} \subset \mathcal{F}$.

És clar que tota aplicació hereditàriament $\mathcal{F}$-transitiva és també $\mathcal{F}$-transitiva i $\mathcal{F}^*$-transitiva, ja que $\mathcal{N}_T \subset \mathcal{F} \cap \mathcal{F}^*$. De fet, si $\mathcal{F}$ és un *filtre*, és a dir, $\mathcal{F} \cdot \mathcal{F} \subset \mathcal{F}$ (veure Definició B.3.6), els conceptes de $\mathcal{F}$-transitivitat i hereditària $\mathcal{F}$-transitivitat són equivalents com mostrem a la següent proposició. Abans de demostrar aquest fet és recomanable veure la secció B.3, on s'inclou:

(a) Per a tota família $\mathcal{F}$ es compleix $\mathcal{F}^{**} := (\mathcal{F}^*)^* = \mathcal{F}$ (Nota B.3.2).

(b) Una família $\mathcal{F}$ és de *partició regular*, si per a cada $A \in \mathcal{F}$ i cada parell $A_1, A_2 \subset \mathbb{N}_0$ amb $A = A_1 \cup A_2$ existeix $i \in \{1, 2\}$ amb $A_i \in \mathcal{F}$ (Definició B.3.8).

(c) Una família $\mathcal{F}$ és de partició regular si i només si $\mathcal{F}^*$ és un filtre, i també si i només si es compleix la inclusió $\mathcal{F} \cdot \mathcal{F}^* \subset \mathcal{F}$ (Lema B.3.10).

Proposició 1.6.6 ([9, **Proposició 2.7**])**.** *Siga $T : X \to X$ una aplicació contínua en un espai mètric complet i separable X, sense punts aïllats.*

(a) *Si $\mathcal{F}$ és una família de partició regular, les següents afirmacions són equivalents:*

  (i) *T és $\mathcal{F}^*$-transitiva;*

  (ii) *T és hereditàriament $\mathcal{F}^*$-transitiva;*

  (iii) *T és hereditàriament $\mathcal{F}$-transitiva;*

  (iv) *$\mathcal{D}_A(T) := \{x \in X : \overline{\{T^n x : n \in A\}} = X\}$ és un conjunt G_δ dens per a cada $A \in \mathcal{F}$.*

(b) *Si $\mathcal{F}$ és un filtre, les següents afirmacions són equivalents:*

  (i) *T és $\mathcal{F}$-transitiva;*

  (ii) *T és hereditàriament $\mathcal{F}$-transitiva;*

  (iii) *T és hereditàriament $\mathcal{F}^*$-transitiva;*

  (iv) *$\mathcal{D}_A(T) := \{x \in X : \overline{\{T^n x : n \in A\}} = X\}$ és un conjunt G_δ dens per a cada $A \in \mathcal{F}^*$.*

Demostració. Una família és de partició regular quan la família dual és un filtre (Lema B.3.10), i per tant és suficient demostrar (a) ja que (b) és simètric. Veiem primer l'equivalència de les tres primeres condicions: si suposem (i), és a dir $\mathcal{N}_T \subset \mathcal{F}^*$, llavors per ser $\mathcal{F}^*$ un filtre tenim que $\mathcal{N}_T \cdot \mathcal{F}^* \subset \mathcal{F}^* \cdot \mathcal{F}^* \subset \mathcal{F}^*$ que implica (ii), i també $\mathcal{N}_T \cdot \mathcal{F} \subset \mathcal{F}^* \cdot \mathcal{F} \subset \mathcal{F}$ (Lema B.3.10(b)) que implica (iii). A més, per la nota 1.6.5 s'obté que tant (ii) com (iii) impliquen (i).

(i) $\Longrightarrow$ (iv) Argumentant com al teorema de Transitivitat de Birkhoff (Teorema 1.2.9), donada $\{U_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una base numerable de la topologia i $A \in \mathcal{F}$ tenim

$$\mathcal{D}_A(T) = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \left(\bigcup_{m\in A} T^{-m}(U_n) \right),$$

que per la continuïtat de T i la $\mathcal{F}^*$-transitivitat és una intersecció numerable d'oberts densos. Com X és complet, pel teorema de Baire (Teorema A.1.7) sabem que $\mathcal{D}_A(T)$ és un G_δ dens.

(iv) $\Longrightarrow$ (i) Donats dos oberts no buits $U, V \subset X$ i $A \in \mathcal{F}$, per densitat existeixen $x \in \mathcal{D}_A(T) \cap U$ i $n \in A$ amb $T^n x \in V$ d'on obtenim $n \in N(U, V) \cap A \neq \emptyset$, és a dir, $N(U, V) \in \mathcal{F}^*$ i $\mathcal{N}_T \subset \mathcal{F}^*$. $\square$

Nota 1.6.7. És convenient remarcar que el teorema anterior no és una generalització del teorema de Transitivitat de Birkhoff (Teorema 1.2.9). En efecte, si apliquem el teorema anterior a la família de conjunts infinits $\mathcal{I}$, que és de partició regular, llavors la família $\mathcal{I}^*$ és la col·lecció de conjunts cofinits, que és un filtre, i obtenim l'equivalència:

(i) T és barrejant;

(ii) $\mathcal{D}_A(T) := \{x \in X : \overline{\{T^n x : n \in A\}} = X\}$ és un G_δ dens per a cada $A \subset \mathbb{N}_0$ conjunt infinit.

Finalitzem la secció i el capítol amb la conservació per quasi-conjugació i les propietats productives de la $\mathcal{F}$-transitivitat.

Proposició 1.6.8. *Per a cada família de Furstenberg $\mathcal{F} \subset \mathscr{P}(\mathbb{N}_0)$, la $\mathcal{F}$-transitivitat, hereditària $\mathcal{F}$-transitivitat i $\widetilde{\mathcal{F}}$-transitivitat es conserven per quasi-conjugació.*

Demostració. És conseqüència del lema 1.2.5(a). □

Proposició 1.6.9 ([9, **Proposició 3.5**]). *Siguen $\mathcal{F}$ una família i $T_i : X_i \to X_i$ per a $1 \leq i \leq m$ una col·lecció de sistemes dinàmics. Es compleixen les següents afirmacions:*

(a) *Si $T_1 \times T_2$ és $\mathcal{F}$-transitiva, llavors T_1 i T_2 són $\mathcal{F}$-transitives.*

(b) *Si T_1 és $\mathcal{F}$-transitiva i T_2 és $\mathcal{F}^*$-transitiva, llavors $T_1 \times T_2$ és topològicament transitiva.*

(c) *Si $\mathcal{F}$ és un filtre, aleshores $T_1 \times \cdots \times T_m$ és $\mathcal{F}$-transitiva si i només si T_i és $\mathcal{F}$-transitiva per a cada $1 \leq i \leq m$.*

Demostració. (a) Per la nota 1.4.4 sabem que T_1 i T_2 són quasi-conjugades a $T_1 \times T_2$ i podem aplicar la proposició 1.6.8.

(b) Donats dos oberts no buits $U, V \subset X_1 \times X_2$, existeixen oberts no buits $U_1, V_1 \subset X_1$ i $U_2, V_2 \subset X_2$ amb $U_1 \times U_2 \subset U$ i $V_1 \times V_2 \subset V_2$ d'on obtenim $\emptyset \neq N_{T_1}(U_1, V_1) \cap N_{T_2}(U_2, V_2) \subset N(U, V)$.

(c) De nou per la nota 1.4.4 sabem que per a cada $1 \leq i \leq m$ l'aplicació T_i és quasi-conjugada a $T_1 \times \cdots \times T_m$ via ϕ_i, la projecció i-èsima. Per tant, sols hem de comprovar el cas en que cada T_i és $\mathcal{F}$-transitiva. Donats dos oberts no buits $U, V \subset \prod_{i=1}^m X_i$, existeixen oberts no buits $U_i, V_i \subset X_i$ per a cada $1 \leq i \leq m$ complint

$$\prod_{i=1}^m U_i \subset U, \text{ i també } \prod_{i=1}^m V_i \subset V,$$

d'on es dedueix que $N(U, V) \supset \bigcap_{i=1}^m N_{T_i}(U_i, V_i) \in \mathcal{F}$, per ser un filtre. □

Nota 1.6.10. Emprant l'anterior proposició podem recuperar els resultats de la proposició 1.5.5 que no involucren el caos de Devaney. En particular, de l'apartat:

(a) es poden deduir els apartats (a), (d) i (e) de la proposició 1.5.5.

(b) es poden deduir els apartats (g) i (h) de la proposició 1.5.5, ja que $\mathcal{T}^* = \mathcal{S}$ (Exemple B.3.3(a)).

(c) es pot deduir l'apartat (f) de la proposició 1.5.5, ja que $\mathcal{I}^*$ és un filtre.

Tornarem a parlar de $\mathcal{F}$-transitivitat, però, per a sistemes dinàmics lineals on estudiarem el concepte de $\mathcal{F}$-operador (veure Secció 2.4).

Capítol 2

Dinàmica Lineal

En aquest segon capítol reescriurem els conceptes sobre sistemes dinàmics anteriorment introduïts, però, des del punt de vista de la Dinàmica Lineal, és a dir, considerant sistemes dinàmics lineals que seran aquells per als quals l'aplicació que defineix dit sistema, és una aplicació lineal. Un exemple natural d'aquest tipus d'aplicació seria el simple fet de prendre derivades

$$D : f \mapsto f',$$

sobre l'espai de funcions enteres (Exemple A.3.11), aplicació lineal de gran importància en el camp de l'Anàlisi Matemàtic. En aquest cas i emprant la notació introduïda al primer capítol, la funció exponencial és un punt fixat de l'operador D i les funcions sinus i cosinus són punts 4-periòdics. La linealitat d'una aplicació únicament té sentit si l'espai subjacent, a més de l'estructura d'espai mètric (o topològic), té una estructura lineal, és a dir, si es tracta d'un espai vectorial topològic. Desenvoluparem la teoria sobre *F-espais*, els quals introduïm entre la primera secció d'aquest capítol i la secció A.3, ja que generalitzen els conceptes d'espai de Hilbert, Banach i Fréchet (veure Exemples A.2.5 i A.3.8), on apareixen el exemples més naturals d'operadors hipercíclics (Exemple A.3.11).

A la segona secció introduïm el concepte de *hiperciclicitat* (Definició 2.2.1) i exposem els detalls més rellevants sobre aquesta, incloent el criteri de Kitai (Teorema 2.2.7) i el criteri de hiperciclicitat (Teorema 2.2.8). A la tercera revisem el concepte de *caos lineal* (Definició 2.3.1), demostrant algunes de les relacions d'aquesta propietat amb l'ergodicitat topològica (Proposició 2.3.9).

A la quarta secció seguim amb la $\mathcal{F}$-transitivitat que havíem exposat al capítol anterior, però, des del punt de vista dels *$\mathcal{F}$-operadors* (Definició 2.4.1) incloent el criteri de $\mathcal{F}$-transitivitat de [9] (Teorema 2.4.4). A l'última secció revisem les generalitzacions de la hiperciclicitat més importants, i seguint [8] incloem la *$\mathcal{F}$-hiperciclicitat* per a *conjunts de hiperciclicitat* $\mathcal{F}$ (Definició 2.5.3).

2.1 Sistemes Dinàmics Lineals

Un *espai vectorial topològic* és un espai vectorial X sobre el cos d'escalars $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$, dotat amb una topologia de Hausdorff, de manera que les operacions suma de vectors i producte per un escalar

$$\begin{aligned} + \quad &: \quad X \times X \longrightarrow X, \quad (x, y) \mapsto x + y, \\ \cdot \quad &: \quad \mathbb{K} \times X \longrightarrow X, \quad (\lambda, x) \mapsto \lambda x, \end{aligned} \tag{2.1}$$

siguen contínues. El mode més estàndard d'introduir una topologia d'aquest tipus en un espai vectorial X és mitjançant una *norma*, que usualment és denotada per $\|\cdot\|$. En aquest cas, la topologia ve induïda per la mètrica d (invariant per translacions) obtinguda a partir de la fórmula $d(x,y) = \|x-y\|$ per a cada $x,y \in X$. La continuïtat de les operacions anteriors es dedueix de les propietats de la norma

$$\begin{aligned}\|(x+y)-(x'+y')\| &\leq \|x-x'\|+\|y-y'\|,\\ \|\lambda x-\lambda' x'\| &\leq |\lambda|\cdot\|x-x'\|+|\lambda-\lambda'|\cdot\|x'\|.\end{aligned}$$

En aquest cas els espais resultants són *localment convexos* (veure Definició A.2.1), i si X és complet amb la mètrica d es diu que X és un *espai de Banach*. Si a més la norma ve donada per un producte escalar, direm que X és un *espai de Hilbert*. Encara que l'estudi d'aquests tipus d'espai és habitual en els graus de matemàtiques, hem inclòs la definició de norma i alguns exemples a la secció A.2.

Un cas més general i menys conegut és quan la topologia s'introdueix amb una *F-norma*, és a dir, quan sobre l'espai vectorial X definim un funcional $\|\cdot\| : X \to \mathbb{R}_+$ que per a cada $x,y \in X$ i $\lambda \in \mathbb{K}$ compleix

(i) $\|x+y\| \leq \|x\|+\|y\|$;

(ii) $\|\lambda x\| \leq \|x\|$ si $|\lambda| \leq 1$;

(iii) $\lim_{\lambda\to 0} \|\lambda x\| = 0$;

(iv) $\|x\| = 0$ si i només si $x = 0$.

Com al cas de les normes, la topologia ve induïda per la mètrica d (invariant per translacions) obtinguda a partir de la fórmula $d(x,y) = \|x-y\|$ per a cada $x,y \in X$, i la continuïtat de les operacions (2.1) és dedueix quasi igual que al cas de les normes, emprant ara les propietats (i) (ii) i (iii) de les F-normes. Si X és complet amb la mètrica d es diu que X és un *F-espai*.

De les propietats (i) i (ii) anteriors es dedueix $\|\lambda x\| \leq (|\lambda|+1)\|x\|$ per a tot $x \in X$ i $\lambda \in \mathbb{K}$. Amb aquesta última propietat, el concepte de F-norma permet donar moltes proves per a F-espais quasi com si treballarem en un espai de Banach, parant atenció i anant amb compte quan s'empra la propietat d'homogeneïtat de les normes. Òbviament, tota norma és una F-norma, però, els F-espais no són necessàriament espais localment convexos (veure Exemple A.3.3).

Un cas particular de F-espai són els espais de Fréchet. En aquests, la F-norma de l'espai X es defineix amb una successió *creixent* de semi-normes $\{p_n\}_{n=1}^{\infty}$ amb la propietat addicional que si $p_n(x) = 0$ per a tot $n \in \mathbb{N}$ llavors $x = 0$, és a dir, la successió de semi-normes *separa punts de l'espai* (veure Definició A.3.4). Llavors

$$\|x\| := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \min\{1, p_n(x)\},$$

és una *F-norma* (veure Proposició A.3.7). Els espais de Fréchet sí són localment convexos, i a més, tot espai de Banach és un espai de Fréchet (veure Exemple A.3.8(a)). A la secció A.3 hem desenvolupat una introducció més detallada sobre F-espais i espais de Fréchet en la que revisem els conceptes de F-norma, alguns resultats bàsics i exemples sobre aquests tipus d'espai.

Incloem a continuació un lema bàsic que emprarem en diversos punts del capítol. Donats $A, B \subset X$ dos subconjunts d'un espai vectorial X, denotem per $A+B := \{a+b : a \in A, b \in B\}$ la *suma algebraica de A i B*.

Lema 2.1.1. *Siga X un espai vectorial topològic, i $U, V \subset X$ un parell d'oberts no buits. Per a cada $x \in U$ i $y \in V$ podem trobar dos oberts no buits $U_x, V_y \subset X$ amb $x \in U_x$ i $y \in V_y$, i un entorn W del vector $0 \in X$ complint $U_x + W \subset U$ i $V_y + W \subset V$.*

Demostració. La continuïtat de l'aplicació suma, $+ : X \times X \to X$, que porta cada $(x_1, x_2) \mapsto x_1 + x_2$, les igualtats $x + 0 = x$ i $y + 0 = y$, i el fet que U i V són entorns de x i y respectivament, ens assegura l'existència d'un entorn obert U_x de x, un entorn obert U_y de y i dos entorns W_x i W_y oberts del 0 complint $U_x + W_x \subset U$ i $V_y + W_y \subset V$. El resultat s'obté prenent $W := W_x \cap W_y$. $\square$

Amb aquestes condicions i per poder parlar de sistemes dinàmics lineals solament ens queda introduir el concepte d'*operador*. Encara que podríem treballar amb espais vectorials topològics, ens limitarem a parlar de sistemes dinàmics lineals on l'espai vectorial subjacent és un F-espai.

Definició 2.1.2. Siguen X i Y dos F-espais. Direm que una aplicació $T : X \to Y$ és un *operador* si és lineal i contínua. Denotarem per $L(X, Y)$ l'*espai d'operadors* de X a Y. Si $Y = X$ direm que T és un *operador sobre* X, i en aquest cas escriurem $L(X) = L(X, X)$.

Definició 2.1.3. Un *sistema dinàmic lineal* és un parell (X, T) format per un F-espai X i un operador $T : X \to X$.

Igual que amb els sistemes dinàmics discrets (Definició 1.1.1) usualment denotarem un sistema dinàmic lineal per $T : X \to X$ o T, i simplement direm que $T : X \to X$ és un operador. Com que estem interessats en l'existència d'òrbites denses usualment suposarem els F-espais amb els quals treballem són **separables**. Introduïm ara la notació que emprarem per al producte entre dos sistemes dinàmics lineals, i per a l'espai producte entre dos F-espais.

Nota 2.1.4. Considerem $T : X \to X$ i $S : Y \to Y$ dos sistemes dinàmics lineals, on X i Y són dos F-espais amb topologies engendrades per les F-normes $\|\cdot\|_X$ i $\|\cdot\|_Y$ respectivament. Recordant la definició 1.4.3, denotarem el *sistema dinàmic producte* de T i S per

$$T \oplus S : X \oplus Y \longrightarrow X \oplus Y,$$

on $(T \oplus S)(x, y) = (Tx, Sy)$, i $X \oplus Y = \{(x, y) : x \in X, y \in Y\}$ és la suma directa dels espais X i Y, que amb la topologia engendrada per la F-norma

$$(x, y) \mapsto \|x\|_X + \|y\|_Y, \text{ per a cada } (x, y) \in X \oplus Y,$$

torna a ser un F-espai.

Per concloure la secció demostrem un lema fonamental que emprarem en diverses parts del capítol i que ens recorda que tota aplicació lineal té el vector 0 com a punt fix.

Lema 2.1.5. *Siguen $T : X \to X$ un operador, W un entorn del $0 \in X$ i $N \in \mathbb{N}_0$. Llavors existeix $W_N \subset X$ entorn obert del 0 de manera que $T^n(W_N) \subset W$ per a cada $n = 0, ..., N$.*

Demostració. Prenent l'obert no buit $U := \text{int}(W)$ que conté al $0 \in X$, per la linealitat i continuïtat de T tenim que el conjunt

$$W_N := \bigcap_{n=0}^{N} T^{-n}(U), \text{ compleix } T^n(W_N) \subset U \subset W \text{ per a cada } n = 0, ..., N,$$

i és un entorn obert del $0 \in X$. $\square$

2.2 Hiperciclicitat

Tal com hem vist al primer capítol l'existència d'una òrbita densa és una propietat important en sistemes dinàmics. En el cas dels sistemes dinàmics lineals aquesta rep un nom propi.

Definició 2.2.1. Direm que un operador $T : X \to X$ és *hipercíclic*, si existeix $x \in X$, l'òrbita del qual respecte de T siga densa en X. En aquest cas, direm que x és un *vector hipercíclic* de T. Denotarem per $\mathrm{HC}(T)$ el *conjunt de vectors hipercíclics* de T.

L'origen d'aquesta terminologia es deu a que en un principi es van estudiar els *vectors cíclics*, en relació al problema del subespai invariant. Més tard aparegueren, amb una propietat més restrictiva, els *vectors supercíclics*.

Definició 2.2.2. Siga $T : X \to X$ un operador. Direm que $x \in X$ és un *vector cíclic* de T, si l'expansió lineal de la seua òrbita

$$\mathrm{LIN}\{T^n x : n \in \mathbb{N}_0\},$$

és densa en X. Direm que $x \in X$ és un *vector supercíclic* de T, si la projecció de la seua òrbita

$$\{\lambda T^n x : n \in \mathbb{N}_0, \lambda \in \mathbb{K}\},$$

és densa en X. Els operadors que tenen un vector cíclic (o supercíclic) són anomenats *operadors cíclics* (o *supercíclics*).

Aquestes definicions van suggerir el nom de *hipercíclic* per a aquells vectors amb la pròpia òrbita densa. El *problema del subespai invariant*, que actualment continua obert, qüestiona si tot operador sobre un espai de Hilbert separable té un subespai tancat i invariant que no siga el trivial $\{0\}$, o l'espai total. Òbviament, si $T : X \to X$ és un operador, el subespai de X tancat i T-invariant més petit que conté a un punt donat $x \in X$ coincideix amb la clausura de l'expansió lineal de l'òrbita de x. Per tant, un operador té un subespai tancat i invariant no trivial, precisament si tot vector no nul és cíclic. Aquest problema fou resolt en espais de Banach per Enflo [20] proposant un contraexemple en 1975 que degut a la seua complexitat va retardar la publicació fins 1987. De la mateixa forma, existeix una connexió entre la hiperciclicitat i el *problema del subconjunt invariant*, és a dir, la qüestió de si tot operador sobre un espai de Hilbert separable té un subconjunt tancat i invariant que no siga el trivial $\{0\}$, o l'espai total. Amb arguments similars al cas anterior és clar que, un operador complirà aquesta condició si i només si tot vector no nul és hipercíclic. Existeixen contraexemples en espais de Banach clàssics com ℓ^1 [52].

El primer detall rellevant que hem de comentar sobre la hiperciclicitat, és que es tracta d'un fenomen de dimensió infinita. És a dir, si prenem un espai vectorial de dimensió $N \in \mathbb{N}$, i per tant, isomorf a $\mathbb{K}^N$ [54, Teorema 1.21], no podem trobar operadors amb òrbites denses.

Teorema 2.2.3. *No existeixen operadors hipercíclics en espais de dimensió finita* $X \neq \{0\}$.

Aquest és un fet conegut i una demostració d'aquest pot trobar-se tant en [5, Proposició 1.1] com en [32, Corol·lari 2.59]. La segona particularitat que cal recordar és que els espais vectorials topològics (no trivials) no tenen punts aïllats, i per tant, si treballem amb F-espais, que són metritzables i complets, podem aplicar tot el treball realitzat a la secció 1.2 obtenint la versió del teorema de Transitivitat de Birkhoff (Teorema 1.2.9) per a sistemes dinàmics lineals.

Teorema 2.2.4 (Teorema de Transitivitat de Birkhoff). *Un operador* $T : X \to X$ *sobre un F-espai separable* X *és hipercíclic si i només si és topològicament transitiu. En aquest cas, el conjunt de vectors hipercíclics* $\mathrm{HC}(T)$ *és un conjunt* G_δ *dens.*

També per les proposicions 1.2.10, 1.5.5(b) i la nota 2.1.4 obtenim els resultats:

Proposició 2.2.5. *La hiperciclicitat es conserva per quasi-conjugació.*

Proposició 2.2.6. *Siguen $T : X \to X$ i $S : Y \to Y$ dos operadors. Si $T \oplus S$ és hipercíclic, llavors T i S són hipercíclics.*

La implicació contraria de la proposició anterior no és certa en general, ja que en F-espais la transitivitat topològica i la hiperciclicictat són equivalents i si aquesta implicació fora certa obtindríem que tot operador hipercíclic $T : X \to X$ és també feblement barrejant prenent $S = T$. Però, el problema de demostrar que no tot operador hipercíclic és feblement barrejant, proposat per D. Herrero en 1992, fou un problema obert fins 2006 quan De La Rosa i Read van trobar certs operadors hipercíclics i no feblement barrejants en alguns espais de Banach [19]. Més tard, refinant la tècnica de De La Rosa i Read, Bayart i Matheron mostraren que dits operadors poden construir-se en els espais ℓ^p, amb $1 \leq p < \infty$, i c_0, en particular en espais de Hilbert [4]. La complexitat d'aquests exemples indica la proximitat que hi ha entre la hiperciclicitat i la propietat de ser feblement barrejant per a sistemes dinàmics lineals.

A continuació exposem alguns criteris "computables" baix els quals un operador és barrejant, feblement barrejant, i per tant hipercíclic. En primer lloc presentem un criteri per a la propietat de ser barrejant, degut a Kitai-Gethner-Shapiro; va ser obtingut per Carol Kitai en 1982 a la seua tesi doctoral [40], i de manera independent en 1987 per Gethner i Shapiro [25].

Teorema 2.2.7 (Criteri de Kitai). *Siga $T : X \to X$ un operador. Si existeixen dos subconjunts densos $X_0, Y_0 \subset X$ i una aplicació $S : Y_0 \to Y_0$ de manera que per a cada $x \in X_0$ i $y \in Y_0$*

(i) $T^n x \to 0$,

(ii) $S^n y \to 0$,

(iii) $TSy = y$,

llavors T és barrejant.

A pesar de l'aparença tècnica, aquest criteri ens diu que per verificar la hiperciclicitat d'un operador sobre un F-espai separable sols hem de:

1. trobar un conjunt dens amb òrbites respecte de T convergents a 0;
2. trobar un conjunt dens on T tinga un "operador" invers per la dreta (és a dir, S), encara que no ha de ser necessàriament ni lineal ni continu;
3. que les òrbites respecte de S en dit conjunt dens convergeixen a 0.

Demostració del Teorema 2.2.7. Donats dos oberts no buits $U, V \subset X$ prenem $x \in U \cap X_0$ i $y \in V \cap Y_0$. Aleshores, per (iii) tenim

$$T^n(x + S^n y) = T^n x + y, \text{ per a cada } n \in \mathbb{N}_0.$$

Com U i V són entorns de x i y respectivament, les hipòtesis (i) i (ii) impliquen que existeix $N \in \mathbb{N}_0$ de manera que per a tot $n \geq N$ es compleix $x + S^n y \in U$ i $T^n x + y \in V$, i per tant $\{n \in \mathbb{N}_0 : n \geq N\} \subset N(U, V)$ és cofinit, d'on T és barrejant. □

Originalment, Kitai va provar que baix les seues hipòtesis, si X és separable llavors T és un operador hipercíclic construint mitjançant un procés recursiu un vector hipercíclic. Encara que la demostració que hem inclòs (extreta de [32, Teorema 3.4]) és mes curta i demostra la condició de ser barrejant, la construcció de Kitai és útil en moltes altres ocasions on els mètodes abstractes no poden aplicar-se, per exemple en el *criteri de hiperciclicitat freqüent* [32, Teorema 9.9], o en alguns casos concrets com veurem en la proposició 2.5.5. Per altra banda, si s'estudia acuradament la demostració del teorema 2.2.7, és clar que podem afeblir les condicions del teorema si únicament volem garantir la hiperciclicitat. De fet es suficient que:

1. les condicions (i), (ii) i (iii), es mantinguen únicament per a una subsuccessió $\{n_k\}_{k=1}^{\infty} \subset \mathbb{N}$ en lloc de fer-ho per a la successió completa $\{n\}_{n=1}^{\infty}$;
2. les iteracions $S^n : Y_0 \to Y_0$ d'una única aplicació poden ser reemplaçades per una successió arbitraria $S_n : Y_0 \to X$;
3. la condició (iii), és a dir, que S siga l'invers per la dreta de T en Y_0, pot ser substituïda per la condició asimptòtica $T^n S_n y \to y$ per a cada $y \in Y_0$.

Amb aquestes observacions Bés i Peris obtenen en 1999 el *criteri de hiperciclicitat* [10].

Teorema 2.2.8 (**Criteri de hiperciclicitat**). *Siga $T : X \to X$ un operador sobre un F-espai separable X. Si existeixen dos subconjunts densos $X_0, Y_0 \subset X$, una successió creixent de naturals $\{n_k\}_{k=1}^{\infty} \subset \mathbb{N}$ i per a cada $k \in \mathbb{N}$ una aplicació $S_{n_k} : Y_0 \to X$ tal que per a cada $x \in X_0$ i $y \in Y_0$*

(i) $T^{n_k} x \to 0$,

(ii) $S_{n_k} y \to 0$,

(iii) $T^{n_k} S_{n_k} y \to y$,

llavors T és feblement barrejant, i en particular hipercíclic.

Demostració. Donats quatre oberts no buits $U_1, U_2, V_1, V_2 \subset X$ prenem $x_j \in U_j \cap X_0$ i $y_j \in V_j \cap Y_0$ per a cada $j = 1, 2$. Emprant (i) i (iii) sabem que

$$T^{n_k}(x_j + S_{n_k} y_j) = T^{n_k} x_j + T^{n_k} S_{n_k} y_j \longrightarrow y_j, \text{ per a cada } j = 1, 2.$$

Emprant també (ii), existeix un $k_0 \in \mathbb{N}$ de manera que per a cada $k \geq k_0$, es compleix $x_j + S_{n_k} y_j \in U_j$ i $T^{n_k} x_j + T^{n_k} S_{n_k} y_j \in V_j$ per a cada $j = 1, 2$, i per tant $\{n_k : k \geq k_0\} \subset N(U_1, V_1) \cap N(U_2, V_2)$, d'on T és feblement barrejant i en particular hipercíclic. □

En aquest mateix article [10], Bés i Peris van demostrar que un operador és feblement barrejant si i només si compleix el criteri de hiperciclicitat, i plantejaren la pregunta de si tot operador hipercíclic compleix dit criteri. De nou apareix la proximitat entre els conceptes de hiperciclicitat i feblement barrejant en dinàmica lineal, que com hem comentat abans va ser resolta en 2006 per De La Rosa i Read [19]. A la secció 2.4 inclourem la generalització d'aquests criteris en termes de $\mathcal{F}$-transitivitat i $\mathcal{F}$-operadors per a una família de Furstenberg $\mathcal{F}$ complint certes propietats.

Per tancar la secció i seguint [32] incloem la resposta a una pregunta que sorgeix de manera natural: com de gran és el conjunt de vectors hipercíclics d'un operador hipercíclic? Pel teorema de Transitivitat de Birkhoff sabem que $\mathrm{HC}(T)$ és un conjunt G_δ dens. Aquest fet implica el sorprenent resultat que per a un operador hipercíclic tot vector és una suma de dos vectors hipercíclics.

Proposició 2.2.9 (**[32, Proposició 2.52]**). *Siga $T : X \to X$ un operador hipercíclic. Llavors*

$$X = \mathrm{HC}(T) + \mathrm{HC}(T),$$

és a dir, tot vector de X es pot expressar com a suma de dos vectors hipercíclics.

Demostració. Donat $x \in X$ l'aplicació $\phi_x : X \to X$ que porta cada $z \in X$ al vector $\phi_x(z) = x - z$ és bijectiva, contínua i la seua pròpia aplicació inversa. Per ser ϕ_x un homeomorfisme deduïm que $\phi_x(\mathrm{HC}(T)) = x - \mathrm{HC}(T)$ és de nou un conjunt G_δ dens i pel teorema de Baire (Teorema A.1.7) tenim que la intersecció $\mathrm{HC}(T) \cap (x - \mathrm{HC}(T))$ és no buida. Per tant, $x \in \mathrm{HC}(T) + \mathrm{HC}(T)$. □

2.3 Caos Lineal

Tal com s'ha estudiat en el capítol anterior el *caos de Devaney* (Definició 1.3.7), demanava la transitivitat topològica i la densitat del conjunt de punts periòdics. Emprant la versió lineal del teorema de Transitivitat de Birkhoff (Teorema 2.2.4), podem reescriure la definició com:

Definició 2.3.1. Direm que un operador $T : X \to X$ és *caòtic (en el sentit de Devaney)* si compleix les condicions:

(i) T és hipercíclic;

(ii) T té un conjunt dens de punts periòdics.

Recordem que la dependència sensible respecte de les condicions inicials era una conseqüència del caos en espais mètrics sense punts aïllats (veure Teorema 1.3.6), però, per a operadors la hiperciclicictat i en particular la transitivitat topològica és suficient per a obtindre aquesta propietat.

Proposició 2.3.2. *Siga $T : X \to X$ un operador topològicament transitiu. Llavors T té dependència sensible respecte de les condicions inicials amb qualsevol mètrica invariant per translacions que definisca la topologia de X.*

Demostració. Siga d una mètrica invariant per translacions que definisca la topologia de X. Donats $\varepsilon, \delta > 0$ arbitraris, podem considerar els oberts

$$U := \{z \in X : d(0, z) < \varepsilon\}, \text{ i també } V := \{z \in X : d(0, z) > \delta\}.$$

La transitivitat topològica garanteix l'existència de $z \in U$ i $n \in \mathbb{N}_0$ de manera que $T^n z \in V$, i per a cada $x \in X$, prenent $y := x + z$ es compleix $d(x, y) = d(0, z) < \varepsilon$ i $d(T^n x, T^n y) = d(0, T^n z) > \delta$. □

Nota 2.3.3. (a) El caos de Devaney ha sigut acceptat de manera general en Dinàmica Lineal. Però, existeixen altres definicions de caos, com per exemple el *caos en el sentit d'Auslander i York* on un sistema dinàmic $T : X \to X$ és caòtic si és topològicament transitiu i té dependència sensible respecte de les condicions inicials. Per la proposició anterior tot operador hipercíclic és caòtic en el sentit d'Auslander i York.

(b) Donada una aplicació lineal sobre un espai vectorial $T : X \to X$, el conjunt de punts periòdics de T és un subespai vectorial de X. En efecte, si $x, y \in X$ són periòdics amb $T^n x = x$ i $T^m y = y$ per a $n, m \in \mathbb{N}$ llavors $T^{nm}(\alpha x + \beta y) = \alpha(T^n)^m x + \beta(T^m)^n y = \alpha x + \beta y$ per a cada $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$, i per tant $\alpha x + \beta y$ és de nou un punt periòdic. En particular, si el cos d'escalars és $\mathbb{C}$, es pot obtindre una caracterització dels punts periòdics en termes de vectors propis associats a cert tipus de valors propis unimodulars.

Proposició 2.3.4 (**[32, Proposició 2.33]**). *Siga $T : X \to X$ una aplicació lineal sobre un espai vectorial complex X. Llavors el conjunt de punts periòdics de T ve donat per*

$$\mathrm{Per}(T) = \mathrm{LIN}\{x \in X : Tx = e^{\alpha\pi i}x, \text{ per a algun } \alpha \in \mathbb{Q}\}.$$

Una conseqüència d'aquesta caracterització purament algebraica és que, per a un operador, una gran quantitat de vectors propis (adequats) implica el caos. Parlem del criteri de Godefroy-Shapiro establert en 1991 per aquests dos autors [25].

Teorema 2.3.5 (**Criteri de Godefroy-Shapiro**). *Siga $T : X \to X$ un operador sobre un F-espai separable X. Si els subespais*

$$X_0 := \mathrm{LIN}\{x \in X : Tx = \lambda x, \text{ per a algun } \lambda \in \mathbb{K} \text{ amb } |\lambda| < 1\},$$

$$Y_0 := \mathrm{LIN}\{x \in X : Tx = \lambda x, \text{ per a algun } \lambda \in \mathbb{K} \text{ amb } |\lambda| > 1\},$$

són densos en X, llavors T és barrejant, i en particular hipercíclic.

Si a més, X és un espai vectorial complex i també el subespai

$$Z_0 := \mathrm{LIN}\{x \in X : Tx = e^{\alpha\pi i}x, \text{ per a algun } \alpha \in \mathbb{Q}\},$$

és dens en X, aleshores T és caòtic.

Demostració. Veiem que es compleixen les hipòtesis del criteri de Kitai (Teorema 2.2.7) per a una successió d'aplicacions $S_n : Y_0 \to X$. En efecte, donats $x \in X_0$ i $y \in Y_0$ aquests poden expressar-se com

$$x = \sum_{k=1}^{m} \alpha_k x_k, \text{ i també } y = \sum_{k=1}^{m} \beta_k y_k, \tag{2.2}$$

on es compleix $Tx_k = \lambda_k x_k$ i $Ty_k = \mu_k y_k$, per a certs escalars $\alpha_k, \lambda_k, \beta_k, \mu_k \in \mathbb{K}$, amb $|\lambda_k| < 1$ i $|\mu_k| > 1$ per a cada $k = 1, ..., m$. A més, podem definir $S_n : Y_0 \to X$ com l'aplicació

$$S_n y := \sum_{k=1}^{m} \beta_k \frac{1}{\mu_k^n} y_k, \text{ per a cada } y \text{ expressat com en (2.2).}$$

Llavors és clar que $T^n x \to 0$, $S_n y \to 0$ i $T^n S_n y = y$. Si a més Z_0 és dens, per la proposició 2.3.4 $Z_0 = \mathrm{Per}(T)$ i tenim un conjunt dens de punts periòdics. □

Per tancar la secció, demostrem una propietat addicional del caos lineal que en general no es presenta en sistemes dinàmics no lineals: el producte de dos sistemes dinàmics lineals caòtics és de nou caòtic. Coneixent la relació entre el caos i l'ergodicitat topològica (veure Proposició 1.5.4), començarem per demostrar que l'ergodicitat amb linealitat implica que els elements de la família de conjunts de retorn $\mathcal{N}_T$ siguen més grans que únicament sindètics (veure Definició 1.5.2), en particular seran *grossament sindètics*.

Definició 2.3.6. Siga $A \subset \mathbb{N}_0$. Direm que A és un conjunt *grossament sindètic* (*thickly syndetic*), si per a cada $m \in \mathbb{N}$ existeix un conjunt sindètic $A_m \subset \mathbb{N}_0$ complint $A_m + [0, m] \subset A$.

Parlant informalment, la definició anterior és equivalent a que el conjunt continga a "distància" acotada, "intervals" de nombres naturals de cada "longitud" fixada (veure Secció B.1).

Proposició 2.3.7 (**[32, Exercici 2.5.4]**). *Siga $T : X \to X$ un operador. Es compleixen les següents afirmacions:*

(a) *Si per a cada $U \subset X$ obert no buit i cada $W \subset X$ entorn del vector $0 \in X$ el conjunt $N(U, W)$ és sindètic, llavors tots aquests conjunts són grossament sindètics.*

(b) *Si per a cada $U \subset X$ obert no buit i cada $W \subset X$ entorn del vector $0 \in X$ el conjunt $N(W, U)$ és sindètic, llavors tots aquests conjunts són grossament sindètics.*

(c) *T és topològicament ergòdic si i només si tot conjunt de $\mathcal{N}_T$ és grossament sindètic.*

Demostració. Siguen $U \subset X$ un obert no buit, $W \subset X$ un entorn del vector $0 \in X$ i $m \in \mathbb{N}$ arbitrari. Pel lema 2.1.5 podem trobar W_m entorn obert del $0 \in X$ complint $T^n(W_m) \subset W$ per a cada $n = 0, ..., m$. Aleshores tenim

$$N(U, W_m) + [0, m] \subset N(U, W), \text{ i } ((N(W_m, U) - m) \cap \mathbb{N}_0) + [0, m] \subset N(W, U).$$

Els conjunts $N(U, W_m)$ i $(N(W_m, U) - m) \cap \mathbb{N}_0$ són sindètics baix les hipòtesis de (a) i (b) respectivament (veure Proposicions B.2.8(e) i B.2.10(a)), i per tant es compleixen (a) i (b).

Tot conjunt grossament sindètic és sindètic (veure Proposició B.1.3(d)) i per tant la nova condició introduïda en (c) és suficient per a obtindre l'ergodicitat topològica. Per veure que és necessària, donat un parell d'oberts no buits $U, V \subset X$, pel lema 2.1.1 existeixen oberts no buits $U_1, V_1 \subset X$ i un entorn W del $0 \in X$ de manera que $U_1 + W \subset U$ i $V_1 + W \subset V$. Llavors per (a) i (b) els conjunts $N(U_1, W)$ i $N(W, V_1)$ són grossament sindètics, i per la proposició B.1.3(c), la intersecció $N(U_1, W) \cap N(W, V_1)$ és un conjunt grossament sindètic. Si $n \in N(U_1, W) \cap N(W, V_1)$ existeixen $x \in U_1$ i $y \in W$ complint $T^n x \in W$ i $T^n y \in V_1$ i per tant

$$x + y \in U_1 + W \subset U, \text{ i } T^n(x + y) = T^n x + T^n y \in V_1 + W \subset V, \text{ és a dir, } n \in N(U, V),$$

d'on es dedueix que $N(U_1, W) \cap N(W, V_1) \subset N(U, V)$ és un conjunt grossament sindètic. □

Nota 2.3.8. La base de l'anterior proposició, i principal diferència entre els sistemes dinàmics lineals i els sistemes dinàmics en general és que per a tot operador, el vector 0 sempre és un punt fixat (veure Lema 2.1.5).

Corol·lari 2.3.9 ([**32**, **Exercici 2.5.7**]). *Siguen $T : X \to X$ i $S : Y \to Y$ dos operadors sobre dos F-espais separables X, Y. Es compleixen les següents afirmacions:*

(a) *$T \oplus S$ és topològicament ergòdic si i només si T i S són topològicament ergòdics.*

(b) *$T \oplus S$ és caòtic si i només si T i S són caòtics.*

Demostració. (a) Per la proposició 2.3.7, sabem que $\mathcal{N}_T, \mathcal{N}_S \subset \mathcal{TS}$. Per la proposició B.1.3(c) sabem que $\mathcal{TS}$ és un filtre. Aplicant la proposició 1.6.9(c) deduïm que $T \oplus S$ és topològicament ergòdic si i només si T i S són topològicament ergòdics.

(b) Si T i S són caòtics, per 1.5.4 són topològicament ergòdics i per (a) sabem que $T \oplus S$ és topològicament ergòdic i per tant hipercíclic. Finalment, el conjunt $\mathrm{Per}(T) \oplus \mathrm{Per}(S) \subset X \oplus Y$ és un conjunt dens de punts periòdics per a $T \oplus S$ i deduïm que és caòtic. L'altra implicació és certa en general (veure Proposició 1.5.5(c)). □

Com a comentari final d'aquesta secció, notem que per a sistemes dinàmics lineals tant el caos com l'ergodicitat topològica impliquen la condició de ser feblement barrejant.

2.4 $\mathcal{F}$-operadors

Continuem ara l'estudi de la $\mathcal{F}$-transitivitat basat en [9] que començàvem a la secció 1.6, però en aquest cas, des del punt de vista de la dinàmica lineal i els operadors. Recordem que a la secció B.3 s'inclou l'estudi del concepte de *família de Furstenberg* i les definicions bàsiques que anem a emprar, i que ja hem comentat a la secció 1.6 (definició de família, família dual, producte de dues famílies, filtre, família de partició regular, ...). Amb aquestes condicions podem reescriure les definicions de $\mathcal{F}$-transitivitat (Definició 1.6.1) i hereditària $\mathcal{F}$-transitivitat (Definició 1.6.4) com:

Definició 2.4.1. Donada una família de Furstenberg $\mathcal{F} \subset \mathscr{P}(\mathbb{N}_0)$ i un operador $T : X \to X$, direm que T és un *operador $\mathcal{F}$-transitiu* o simplement un *$\mathcal{F}$-operador* si $\mathcal{N}_T \subset \mathcal{F}$. Per altra banda, direm que T és un *operador hereditàriament $\mathcal{F}$-transitiu* si $\mathcal{N}_T \cdot \mathcal{F} \subset \mathcal{F}$.

Nota 2.4.2. Considerant la família $\mathcal{F}$ adequada podem recuperar les definicions estudiades sobre transitivitat. Per exemple, si prenem:

(a) $\mathcal{I} = \{A \subset \mathbb{N}_0 : A \text{ és infinit}\}$, un *$\mathcal{I}$-operador* és un *operador topològicament transitiu*, i per tant si X és un F-espai separable, un *operador hipercíclic*.

(b) $\mathcal{I}^* = \{A \subset \mathbb{N}_0 : A \text{ és cofinit}\}$, els *$\mathcal{I}^*$-operadors* són els *operadors barrejants*.

(c) $\overline{\mathcal{BD}}_1 = \mathcal{T} = \{A \subset \mathbb{N}_0 : A \text{ és gros}\}$, un *$\mathcal{T}$-operador* és un *operador feblement barrejant*.

(d) $\underline{\mathcal{BD}} = \mathcal{S} = \{A \subset \mathbb{N}_0 : A \text{ és sindètic}\}$, els *$\mathcal{S}$-operadors* són els *operadors topològicament ergòdics*. Per la proposició 2.3.7 coincidixen amb els *$\mathcal{TS}$-operadors* encara que $\mathcal{S} \not\subset \mathcal{TS}$ (ja que per exemple el conjunt de nombres parells és sindètic però no grossament sindètic).

Altres famílies estudiades a les seccions B.1, B.2 i B.3 donarien com a resultat els conceptes de Δ^*-operador, $\mathcal{IP}^*$-operador, $\underline{\mathcal{BD}}_1$-operador, $\underline{\mathcal{D}}_1$-operador, $\underline{\mathcal{D}}$-operador, $\overline{\mathcal{D}}_1$-operador, $\overline{\mathcal{D}}$-operador i $\overline{\mathcal{BD}}$-operador, estudiats plenament en [9] on s'estableixen relacions entre aquests.

El principal objectiu d'aquesta secció és incloure la demostració del criteri de $\mathcal{F}$-transitivitat desenvolupat en [9] i remarcar que aquest generalitza els criteris de Kitai (Teorema 2.2.7) i de hiperciclicitat (Teorema 2.2.8). Donada una família $\mathcal{F}$ necessitarem les definicions de *$\mathcal{F}$-límit*, i la subfamília $\widetilde{\mathcal{F}}$ la qual ja ha aparegut a les seccions 1.6 i B.3.

Definició 2.4.3. Donada una família $\mathcal{F} \subset \mathscr{P}(\mathbb{N}_0)$, un F-espai X i una successió $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset X$, direm que $x \in X$ és un *$\mathcal{F}$-límit* de $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ si $\{n \in \mathbb{N} : x_n \in U\} \in \mathcal{F}$ per a tot entorn $U \subset X$ de x. En aquest cas escriurem

$$\mathcal{F} - \lim_{n\to\infty} x_n = x.$$

Per altra banda, denotarem per

$$\begin{aligned} \widetilde{\mathcal{F}}_+ &:= \{A \subset \mathbb{N}_0 : \text{donat } N \in \mathbb{N}_0 \text{ existeix } B \in \mathcal{F} \text{ amb } B + [0, N] \subset A\}, \\ \widetilde{\mathcal{F}} &:= \{A \subset \mathbb{N}_0 : \text{donat } N \in \mathbb{N}_0 \text{ existeix } B \in \mathcal{F} \text{ amb } (B + [-N, N]) \cap \mathbb{N}_0 \subset A\}. \end{aligned}$$

Notem que per ser $\mathcal{F}$ una família, es compleixen les inclusions $\widetilde{\mathcal{F}} \subset \widetilde{\mathcal{F}}_+ \subset \mathcal{F}$.

Amb les definicions anteriors incloem el criteri de $\mathcal{F}$-transitivitat establit en [9]. Recordem que als critèris de Kitai i de hiperciclicitat, donat un operador $T : X \to X$, s'exigeix l'existència d'un subconjunt $X_0 \subset X$ dens amb òrbites convergents a 0, i per altra part, una successió d'aplicacions fent el paper d'una espècie d'aplicació "inversa" de T per a un altre subconjunt dens $Y_0 \subset X$.

Teorema 2.4.4 ([9, **Criteri de $\mathcal{F}$-transitivitat**]). *Siga $T : X \to X$ un operador i $\mathcal{F}$ una família complint que $\widetilde{\mathcal{F}}$ és un filtre. Si existeixen dos subconjunts densos $X_0, Y_0 \subset X$ i aplicacions $S_n : Y_0 \to X$ per a $n \in \mathbb{N}_0$, de manera que per a cada $x \in X_0$ i $y \in Y_0$*

(i) $\mathcal{F} - \lim_{n\to\infty} T^n x = 0$,

(ii) $\mathcal{F} - \lim_{n\to\infty} (S_n y, T^n S_n y) = (0, y) \in X \times X$,

llavors T és un $\widetilde{\mathcal{F}}$-operador.

Demostració. En primer lloc notem que donat $x \in X_0$ es compleix

$$\widetilde{\mathcal{F}}_+ - \lim_{n\to\infty} T^n x = 0. \tag{2.3}$$

En efecte, per a cada entorn W del $0 \in X$ i cada $N \in \mathbb{N}_0$, pel lema 2.1.5 existeix W_N entorn obert del $0 \in X$ complint $T^n(W_N) \subset W$ per a cada $n = 0, ..., N$, i per tant, $N(x, W_N) + [0, N] \subset N(x, W)$. Per (i) tenim que per a cada $N \in \mathbb{N}_0$ el conjunt $N(x, W_N) \in \mathcal{F}$ i per tant $N(x, W) \in \widetilde{\mathcal{F}}_+$.

Siguen $U, V \subset X$ dos oberts no buits. Pel lema 2.1.1 existeixen oberts no buits $U_1, V_1 \subset X$ i un entorn W del vector $0 \in X$ de manera que $U_1 + W \subset U$ i $V_1 + W \subset V$. Donat $N \in \mathbb{N}_0$ arbitrari triem $x \in T^{-N}(U_1) \cap X_0$ i $y \in T^{-N}(V_1) \cap Y_0$. Per (2.3) tenim $N(x, W) \subset N(T^{-N}(U_1), W) \in \widetilde{\mathcal{F}}_+$ i per tant existeix $A \in \mathcal{F}$ complint $A + [0, 2N] \subset N(T^{-N}(U_1), W)$ d'on obtenim

$$(A + [-N, N]) \cap \mathbb{N}_0 \subset (N(T^{-N}(U_1), W) - N) \cap \mathbb{N}_0 \subset N(U_1, W),$$

i com N és arbitrari $N(U_1, W) \in \widetilde{\mathcal{F}}$.

Per altra banda, aplicant els lemes 2.1.1 i 2.1.5 trobem W_{2N} entorn obert del $0 \in X$ complint $y + W_{2N} \subset T^{-N}(V_1)$ i $W_{2N} \subset T^{-n}(W)$ per a $n = 0, ..., 2N$. Per (ii) existeix $A \in \mathcal{F}$ complint $S_n y \in W_{2N}$ i $T^n S_n y \in y + W_{2N}$ per a cada $n \in A$. En particular, donat $k = n + j \in (A + [-N, N]) \cap \mathbb{N}_0$ amb $n \in A$ i $j \in [-N, N]$, llavors $j - N \in [-2N, 0]$ i tenim

$$S_n y \in W_{2N} \subset T^{j-N}(W), \text{ i també } T^n S_n y \in T^{-N}(V_1).$$

Aleshores $n \in N(T^{j-N}(W), T^{-N}(V_1))$, d'on deduïm $k = n + j \in N(W, V_1)$. Per tant

$$(A + [-N, N]) \cap \mathbb{N}_0 \subset N(W, V_1),$$

i de nou com N és arbitrari deduïm $N(W, V_1) \in \widetilde{\mathcal{F}}$. Unint el que tenim

$$N(U, V) \supset N(U_1 + W, V_1 + W) \supset N(U_1, W) \cap N(W, V_1) \in \widetilde{\mathcal{F}} \cdot \widetilde{\mathcal{F}} \subset \widetilde{\mathcal{F}},$$

és a dir, T és un $\widetilde{\mathcal{F}}$-operador. □

Nota 2.4.5. En vista de l'anterior criteri, donada una família $\mathcal{F}$ és important saber si $\widetilde{\mathcal{F}}$ és un filtre. El lema B.3.14 ens garanteix aquesta propietat sempre que $\widetilde{\mathcal{F}} \cdot \widetilde{\mathcal{F}} \subset \mathcal{F}$, en particular, si $\mathcal{F}$ és un filtre llavors $\widetilde{\mathcal{F}} \cdot \widetilde{\mathcal{F}} \subset \mathcal{F} \cdot \mathcal{F} \subset \mathcal{F}$.

Notem que no és necessari que $\mathcal{F}$ siga un filtre per aplicar el teorema anterior: si prenem $\mathcal{F} = \mathcal{S}$, per definició de conjunt grossament sindètic $\widetilde{\mathcal{F}} = \mathcal{TS}$, i per la proposició B.1.3(c) la família $\mathcal{TS}$ és un filtre mentre que $\mathcal{S}$ no ho és (veure Exemple B.3.12(a)). En aquest cas tenim les inclusions $\mathcal{TS} \cdot \mathcal{TS} \subset \mathcal{TS} \subset \mathcal{S}$ complint les condicions del lema B.3.14, i per tant, tot operador que satisfà el criteri de $\mathcal{S}$-transitivitat és un $\mathcal{TS}$-operador.

Exemple 2.4.6. Donada una successió estrictament creixent de nombres naturals $\{n_k\}_{k=1}^{\infty} \subset \mathbb{N}_0$ podem considerar el filtre

$$\mathcal{F} := \{A \subset \mathbb{N}_0 : \text{existeix } j \in \mathbb{N} \text{ amb } \{n_k : k \geq j\} \subset A\}.$$

En aquest cas, el criteri de $\mathcal{F}$-transitivitat coincideix exactament amb el criteri de hiperciclicitat (Teorema 2.2.8). Recordem que Bés i Peris demostraren que complir el criteri de hiperciclicitat caracteritza els operadors feblement barrejant [10, Teorema 2.3] en F-espais separables. Es dedueix que per a cada operador feblement barrejant T existeix una successió estrictament creixent de nombres naturals $\{n_k\}_{k=1}^{\infty} \subset \mathbb{N}_0$ de manera que T és un $\mathcal{F}_0$-operador amb

$$\mathcal{F}_0 := \{A \subset \mathbb{N}_0 : \text{per a tot } N \in \mathbb{N}_0, \text{ existeix } j \in \mathbb{N} \text{ amb } \{n_k : k \geq j\} + [-N, N] \subset A\}.$$

Si per altra banda la successió per a la que es compleix l'afirmació anterior és $\{n\}_{n=1}^{\infty}$, és a dir, per a tot $\mathbb{N}_0$, llavors el criteri de $\mathcal{F}$-transitivitat és equivalent al criteri de Kitai.

Per finalitzar la secció, incloem la proposició 1.6.6 aplicada a la família $\mathcal{TS}$, caracteritzant completament els operadors topològicament ergòdics i mostrant una aplicació de tota la teoria desenvolupada en [9], i que hem inclòs entre aquesta i la secció 1.6.

Proposició 2.4.7 ([**9, Proposició 5.1**]). *Siga $T : X \to X$ un operador. Les següents afirmacions són equivalents:*

(i) *T és topològicament ergòdic;*

(ii) *T és un $\mathcal{TS}$-operador;*

(iii) *T és hereditàriament $\mathcal{TS}$-transitiu;*

(iv) *T és hereditàriament $\mathcal{PS}$-transitiu;*

(v) *$\mathcal{D}_A(T) := \{x \in X : \overline{\{T^n x : n \in A\}} = X\}$ és un conjunt G_δ dens per a cada $A \in \mathcal{PS}$.*

Demostració. Per la proposició B.1.3 la família $\mathcal{TS}$ és un filtre i $\mathcal{PS} = \mathcal{TS}^*$. Aplicant la proposició 1.6.6(b) a $\mathcal{TS}$ obtenim la equivalència entre (ii), (iii), (iv) i (v). La proposició 2.3.7(c) implica que (i) és equivalent a (ii). Alternativament, per (i) T és un $\mathcal{S}$-operador, pel corol·lari 2.3.9(a) és feblement barrejant, i el lema 1.6.3 implica que T és un $\widetilde{\mathcal{S}}$-operador, on $\widetilde{\mathcal{S}} = \mathcal{TS}$ per definició. $\square$

2.5 $\mathcal{F}$-hiperciclicitat

Fins ara ens hem dedicat a exposar la teoria elemental sobre Dinàmica Topològica (primer capítol) i la seua extensió natural a la Dinàmica Lineal (segon capítol), parant atenció al context històric en el qual sorgeix la hiperciclicitat (Definició 2.2.1), seguint les monografies [5] i [32], i incloent alguns conceptes d'aparició posterior a aquestes referències com la $\mathcal{F}$-transitivitat [9], amb els objectius: en primer lloc donar un caràcter auto-contingut a aquesta memòria; i en segon lloc, emmarcar aquest treball dins de la línia natural d'evolució de la Dinàmica Lineal. És a partir d'aquesta secció quan començarem amb la part central del treball, que desenvoluparem plenament en el tercer capítol, i que tracta l'estudi de les diverses generalitzacions de la hiperciclicitat en termes de famílies de Furstenberg, junt amb la recurrència en la dinàmica d'operadors hipercíclics. En particular, introduïm a continuació els casos més importants de $\mathcal{F}$-hiperciclicitat i seguint [8] revisem el concepte de *conjunt de hiperciclicitat*.

Recordem que en un sistema dinàmic $T : X \to X$ amb (X, d) un espai mètric sense punts aïllats, un punt $x \in X$ té òrbita densa si i només si per a tot obert no buit $U \subset X$ el conjunt $N(x, U)$ és infinit (pàg. 5). En particular, si es tracta d'un sistema dinàmic lineal, l'operador T és hipercíclic si existeix un vector $x \in X$ de manera que els conjunts $N(x, U)$ són infinits. Igual que amb la $\mathcal{F}$-transitivitat on s'exigeix que els conjunts del tipus $N(U, V)$ estiguen en la família $\mathcal{F}$ (veure Seccions 1.6 i 2.4), podem generalitzar la hiperciclicitat exigint l'existència d'un vector $x \in X$ amb els conjunts $N(x, U)$ d'una certa grandària.

La primera generalització d'aquest tipus va ser l'aparició dels *operadors freqüentment hipercíclics* introduïts en 2006 per Bayart i Grivaux [3], mentre que en 2009 Shkarin va introduir el concepte d'*operador superior-freqüentment hipercíclic* [55]. Els dos casos empren les densitats asimptòtiques que hem definit a la secció B.2.

Definició 2.5.1. Siga $T : X \to X$ un operador. Direm que $x \in X$ és un *vector freqüentment hipercíclic* de T, si per a cada obert no buit $U \subset X$ es compleix

$$\underline{\mathrm{dens}}(N(x, U)) := \liminf_{N\to\infty} \frac{\mathrm{card}(N(x, U) \cap [0, N])}{N + 1} > 0.$$

Denotarem per FHC(T) el *conjunt de vectors freqüentment hipercíclics* de T.

Direm que $x \in X$ és un *vector superior-freqüentment hipercíclic* de T, si per a cada obert no buit $U \subset X$ es compleix

$$\overline{\mathrm{dens}}(N(x, U)) := \limsup_{N\to\infty} \frac{\mathrm{card}(N(x, U) \cap [0, N])}{N + 1} > 0.$$

Denotarem per UFHC(T) el *conjunt de vectors superior-freqüentment hipercíclics* de T.

Els operadors que tenen un vector freqüentment hipercíclic (o superior-freqüentment hipercíclic) són anomenats *operadors freqüentment hipercíclics* (o *superior-freqüentment hipercíclics*).

Tal com s'exposa en [3, Proposició 3.12], [5, Proposició 6.23] i en [32, Secció 9.1], aquests conceptes apareixen de manera natural a partir de la Teoria Ergòdica (veure Secció A.4) i el teorema Ergòdic de Birkhoff (Teorema A.4.7). En efecte, si prenem un operador $T : X \to X$ i suposem l'existència d'una mesura de probabilitat μ definida sobre la σ-àlgebra de Borel $\mathscr{B}(X)$ (veure Definició A.4.6) llavors T és mesurable per ser contínua. Si a més T és:

(a) *μ-invariant*: $\mu(T^{-1}(A)) = \mu(A)$ per a tot $A \in \mathscr{B}(X)$ (veure Definició A.4.1);

(b) *μ-ergòdica*: per a cada parell $A, B \in \mathscr{B}(X)$ amb $\mu(A) > 0$ i $\mu(B) > 0$, existeix $n \in \mathbb{N}_0$ de manera que $\mu(T^{-n}(A) \cap B) > 0$ (veure Definició A.4.3 i Proposició A.4.4(c));

i com a condició final exigim que μ siga de *suport complet*, és a dir, $\mu(U) > 0$ per a cada obert $U \subset X$ (veure Definició A.4.6), llavors és clar que l'ergodicitat implica la transitivitat topològica de T, i si X és separable, la hiperciclicitat. Però, el teorema Ergòdic de Birkhoff (Teorema A.4.7) ens dona més informació, ja que donada una base d'oberts $\{U_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ de X podem aplicar dit teorema a les *funcions característiques* $\mathbb{1}_{U_n}$, obtenint per a cada $n \in \mathbb{N}$ fixat

$$\mathrm{dens}(N(x, U_n)) = \lim_{N\to\infty} \frac{\mathrm{card}(N(x, U) \cap [0, N])}{N + 1} = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{N + 1} \sum_{k=0}^{N} \mathbb{1}_{U_n}(T^k x) = \int_X \mathbb{1}_{U_n}\, d\mu = \mu(U_n),$$

i per tant $\overline{\mathrm{dens}}(N(x, U_n)) = \underline{\mathrm{dens}}(N(x, U_n)) = \mu(U_n) > 0$ quasi per a tot punt $x \in X$. És a dir, per a cada $n \in \mathbb{N}$ existeix un conjunt $A_n \subset X$ amb $\mu(A_n) = 1$, de manera que per a tot $x \in A_n$,

$\operatorname{dens}(N(x, U_n)) > 0$. Com que tot obert no buit de X conté algun U_n i la intersecció $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n$ és un conjunt de mesura 1 deduïm que existeix $x \in \bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n \subset X$ amb

$$\operatorname{dens}(N(x, U)) > 0, \text{ per a tot obert no buit } U \subset X,$$

és a dir, T és freqüentment hipercíclic.

Un segon exemple de generalització de la hiperciclicitat serien els *operadors reiteradament hipercíclics* introduïts en [8] i que en lloc de la densitat asimptòtica empra la densitat de Banach que també hem definit i estudiat a la secció B.2.

Definició 2.5.2. Siga $T : X \to X$ un operador. Direm que $x \in X$ és un *vector reiteradament hipercíclic* de T, si per a cada obert no buit $U \subset X$ es compleix

$$\overline{\mathrm{Bd}}(N(x, U)) := \limsup_{N\to\infty} \left(\sup_{m\geq 0} \frac{\operatorname{card}(N(x, U) \cap [m, m + N])}{N + 1} \right) > 0.$$

Denotarem per $\mathrm{RHC}(T)$ el *conjunt de vectors reiteradament hipercíclics* de T. Els operadors que tenen un vector reiteradament hipercíclic són anomenats *operadors reiteradament hipercíclics.*

De la relació entre les densitats asimptòtiques i de Banach (veure Desigualtat (B.1)), és clar que per a tot operador $T : X \to X$ es compleix

$$\mathrm{FHC}(T) \subset \mathrm{UFHC}(T) \subset \mathrm{RHC}(T) \subset \mathrm{HC}(T), \tag{2.4}$$

i per tant

$$\text{freqüent hiperciclicitat} \implies \text{superior-freqüent hiperciclicitat} \implies \text{reiterada hiperciclicitat},$$

que impliquen la hiperciclicitat. Però, que compleix exactament un vector $x \in X$ per a ser freqüentment hipercíclic (superior-freqüentment hipercíclic o reiteradament hipercíclic)? Si prenem $\|\cdot\|$ com la F-norma que defineix la topologia de X, i $\{x_k\}_{k=1}^{\infty} \subset X$ un conjunt dens i numerable, aleshores deuen existir conjunts amb densitat asimptòtica inferior (asimptòtica superior o de Banach superior) positiva $A(k, \nu) \subset \mathbb{N}_0$ per a cada $k, \nu \in \mathbb{N}$, de manera que

$$d(T^n x, x_k) = \|T^n x - x_k\| < \frac{1}{\nu}, \tag{2.5}$$

per a cada $n \in A(k, \nu)$. Evidentment en (2.5) podem canviar el $\frac{1}{\nu}$ per qualsevol funció de ν convergint a 0, com per exemple $\frac{1}{2^{\nu-1}}$ (veure Proposició 2.5.5), però el que sí s'ha de complir és: si $x_k \neq x_l$ llavors els conjunts $A(k, \nu)$ i $A(l, \rho)$ deuen ser disjunts per a $\nu, \rho \in \mathbb{N}$ suficientment grans. És a dir, necessitem l'existència d'una successió de conjunts de densitat asimptòtica inferior (asimptòtica superior o de Banach superior) positiva complint certes condicions de separació entre ells. En general, per a la *$\mathcal{F}$-hiperciclicitat* en espais de Banach és necessari que la família $\mathcal{F}$ continga una successió de conjunts suficientment separats, i aquesta condició dona lloc als *conjunts de hiperciclicitat.*

Definició 2.5.3 ([**8, Definició 1**])**.** Donada una família de Furstenberg $\mathcal{F} \subset \mathscr{P}(\mathbb{N}_0)$, direm que un operador $T : X \to X$ és *$\mathcal{F}$-hipercíclic* si existeix $x \in X$ complint $N(x, U) \in \mathcal{F}$ per a tot obert no buit $U \subset X$. En aquest cas direm que x és un *vector $\mathcal{F}$-hipercíclic* de T i denotarem per $\mathcal{F}\mathrm{HC}(T)$ el *conjunt de vectors $\mathcal{F}$-hipercíclics.*

Si $\mathcal{F}$ conté una successió de conjunts $\{A_k\}_{k=1}^{\infty}$, disjunts dos a dos i de manera que per a tot $j \in A_k$ i $j' \in A_{k'}$ amb $j \neq j'$ llavors $|j - j'| \geq \max\{k, k'\}$, direm que $\mathcal{F}$ és un *conjunt de hiperciclicitat.*

Nota 2.5.4. Considerant la família $\mathcal{F}$ adequada podem recuperar les definicions de hiperciclicitat que hem introduït fins ara. Per exemple, si prenem:

(a) $\mathcal{I} = \{A \subset \mathbb{N}_0 : A$ és infinit$\}$, llavors la *$\mathcal{I}$-hiperciclicitat* és exactament la *hiperciclicitat*.

(b) $\underline{\mathcal{D}} = \{A \subset \mathbb{N}_0 : \underline{\mathrm{dens}}(A) > 0\}$, un operador és *$\underline{\mathcal{D}}$-hipercíclic* si i només si és *freqüentment hipercíclic*.

(c) $\overline{\mathcal{D}} = \{A \subset \mathbb{N}_0 : \overline{\mathrm{dens}}(A) > 0\}$, la *$\overline{\mathcal{D}}$-hiperciclicitat* es correspon amb la *superior-freqüent hiperciclicitat*.

(d) $\overline{\mathcal{BD}} = \{A \subset \mathbb{N}_0 : \overline{\mathrm{Bd}}(A) > 0\}$, la *$\overline{\mathcal{BD}}$-hiperciclicitat* coincideix amb la *reiterada hiperciclicitat*.

Tal com exposàvem en (2.5), la condició de ser $\mathcal{F}$ un conjunt de hiperciclicitat és la necessària per a que obtindre l'existència d'un operador que siga $\mathcal{F}$-hipercíclic:

Proposició 2.5.5. *Siga $\mathcal{F}$ un conjunt de hiperciclicitat. Llavors l'operador desplaçament cap arrere sobre l'espai ω, de totes les successions en $\mathbb{K}$, és $\mathcal{F}$-hipercíclic.*

Demostració. Siga $\{A_k\}_{k=1}^{\infty} \subset \mathcal{F}$ una successió de conjunts disjunts dos a dos i de manera que per a tot $j \in A_k$ i $j' \in A_{k'}$ amb $j \neq j'$ es compleix $|j - j'| \geq \max\{k, k'\}$. Considerem l'aplicació $\phi : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ definida per

$$\phi(j, \nu) = \nu + \sum_{i=1}^{j+\nu-2} i, \text{ per a cada } (j, \nu) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}.$$

Notem que ϕ és bijectiva i compleix $\phi(j, \nu) \geq \max\{j, \nu\}$. Per altra banda, considerem l'operador desplaçament cap avant $F : \omega \to \omega$ (veure Exemple A.3.11(d)) i pel lema A.3.9 una successió densa $\{x^{(j)}\}_{j=1}^{\infty} \subset \omega$ tal que: per a cada $j \in \mathbb{N}$ el vector $\{x_k^{(j)}\}_{k=1}^{\infty} \in \omega$ compleix $x_k^{(j)} = 0$ si $k > j$. Aleshores la sèrie

$$x \quad := \sum_{\substack{n \in A_{\phi(j,\nu)} \\ (j,\nu) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}}} F^n x^{(j)},$$

convergeix incondicionalment en ω i $x \in \omega$ és un vector $\mathcal{F}$-hipercíclic de l'operador desplaçament cap arrere $B : \omega \to \omega$ (veure Exemple A.3.11(c)). En efecte, per cada obert no buit $U \subset X$ existeix $j \in \mathbb{N}$ i $\nu \in \mathbb{N}$ amb $B_d(x^{(j)}, \frac{1}{2^{\nu-1}}) \subset U$. Pel lema A.3.5(a) obtenim

$$d(B^n x, x^{(j)}) < \frac{1}{2^{\nu-1}}, \text{ per a tot } n \in A_{\phi(j,\nu)},$$

d'on deduïm que $A_{\phi(j,\nu)} \subset N(x, U)$ i per tant $N(x, U) \in \mathcal{F}$. □

Corol·lari 2.5.6. *Per a tot conjunt de hiperciclicitat $\mathcal{F}$ existeix un operador $\mathcal{F}$-hipercíclic.*

En [8] s'obté una espècie de recíproc amb el resultat:

Proposició 2.5.7 ([8, Proposició 1]). *Siga $T : X \to X$ un operador sobre un espai de Banach $X \neq \{0\}$, i $\mathcal{F} \subset \mathscr{P}(\mathbb{N}_0)$ una família. Si T és $\mathcal{F}$-hipercíclic llavors $\mathcal{F}$ és un conjunt de hiperciclicitat.*

Si X no és de Banach, i en particular si $X = \omega$, tal com es mostra en [8, Exemple 1] existeix un vector $x \in \omega$ que és $\mathcal{F}$-hipercíclic per al operador desplaçament cap arrere i per a una família $\mathcal{F}$ que no és un conjunt de hiperciclicitat. De fet, si revisem la demostració de la proposició 2.5.5

podríem rebaixar les condicions de separació dels conjunts $\{A_k\}_{k=1}^{\infty} \subset \mathcal{F}$ per exemple exigint que siguen disjunts dos a dos, i que per a cada $j \in A_k$ i $j' \in A_{k'}$ amb $j < j'$ llavors $j' - j \geq k$.

Seguint la teoria desenvolupada en [8] observem que les famílies $\mathcal{F} = \underline{\mathcal{BD}}$ o $\overline{\mathcal{BD}}_\delta$ amb $0 < \delta \leq 0$ no són conjunts de hiperciclicitat demostrant que no existeix cap operador $\mathcal{F}$-hipercíclic:

Proposició 2.5.8 (**[8, Proposició 2]**). *Siga $T : X \to X$ un operador sobre un F-espai separable, $X \neq \{0\}$. Si $\mathcal{F} = \underline{\mathcal{BD}}$ llavors T no és un operador $\mathcal{F}$-hipercíclic.*

Demostració. Suposem que $x \in X$ és un vector $\mathcal{F}$-hipercíclic. Siguen $U, V \subset X$ dos oberts no buits amb $U \cap V = \emptyset$ i de manera que $0 \in V$. Com $\underline{\mathrm{Bd}}(N(x,U)) > 0$ i per tant el conjunt $N(x,U)$ és sindètic (veure Proposició B.2.10(a)), existeix $m \in \mathbb{N}$ complint $[k, k+m] \cap N(x,U) \neq \emptyset$ per a tot $k \in \mathbb{N}_0$. Pel lema 2.1.5 existeix $W_m \subset X$ entorn obert del 0 de manera que $T^n(W_m) \subset V$ per a cada $n = 0, ..., m$. Si ara prenem $k \in \mathbb{N}_0$ amb $T^k x \in W$, llavors $T^{k+n}x \in V$ per a tot $n = 0, ..., m$ i arribem a la contradicció $[k, k+m] \cap N(x,U) = \emptyset$. $\square$

Proposició 2.5.9 (**[8, Proposició 2]**). *Siga $T : X \to X$ un operador sobre un F-espai separable, $X \neq \{0\}$ i $0 < \delta \leq 1$. Si $\mathcal{F} = \overline{\mathcal{BD}}_\delta$ llavors T no és un operador $\mathcal{F}$-hipercíclic.*

Demostració. Suposem que $x \in X$ és un vector $\mathcal{F}$-hipercíclic i siga $N \in \mathbb{N}$ complint $N > 2/\delta$. Fixat un obert no buit $U \subset X$ tenim $\overline{\mathrm{Bd}}(N(x,U)) \geq \delta$, i pel lema B.2.12 existeix $n \in \mathbb{N}_0$ de manera que $\mathrm{card}(N(x,U) \cap [n, n+N]) \geq 2$. Per tant, per a cada obert no buit $U \subset X$ existeix $k \in \{1, ..., N\}$ complint $T^k(U) \cap U \neq \emptyset$. Siga $\varepsilon_1 := \min\{\|x - T^k x\| : 1 \leq k \leq N\}$, que és un nombre real positiu ja que $T^k x \neq x$ per a tot $k \in \mathbb{N}$. Per la continuïtat de T podem trobar $\varepsilon_2 > 0$ amb $\varepsilon_2 < \varepsilon_1/2$ de manera que $U := \{y \in X : \|x - y\| < \varepsilon_2\}$ siga un obert complint $T^k(U) \subset \{y \in X : \|T^k x - y\| < \varepsilon_1/2\}$ per a cada $k = 1, ..., N$. Aleshores $T^k(U) \cap U = \emptyset$ per a $k = 1, ..., N$, contradicció. $\square$

Les dues proposicions anteriors i per a cada $0 < \delta \leq 1$ les inclusions

$$\underline{\mathcal{D}}_\delta \subset \overline{\mathcal{D}}_\delta \subset \overline{\mathcal{BD}}_\delta,$$

impliquen que per a famílies definides amb les densitats estudiades a la secció B.2 únicament té sentit considerar la $\mathcal{F}$-hiperciclicitat per als casos $\mathcal{F} = \underline{\mathcal{D}}, \overline{\mathcal{D}}$ o $\overline{\mathrm{Bd}}$, és a dir, la freqüent hipercilcicitat, la freqüent-superior hiperciclicitat i la reiterada hiperciclicitat respectivament.

Tanquem la secció i el capítol incloent el resultat de [8] que relaciona la $\mathcal{F}$-hiperciclicitat amb la $\mathcal{F}$-transitivitat, demostrant que per a $\mathcal{F} = \underline{\mathcal{D}}, \overline{\mathcal{D}}$ o $\overline{\mathrm{Bd}}$, llavors tenim l'ergodicitat topològica.

Proposició 2.5.10 (**[8, Proposició 4]**). *Siga $T : X \to X$ un operador reiteradament hipercíclic. Llavors T és topològicament ergòdic.*

Demostració. Siguen $U, V \subset X$ dos oberts no buits i $n \in N(U,V)$. Considerem l'obert no buit $U_0 := U \cap T^{-n}(V)$ i siga $x \in \mathrm{RHC}(T)$ i per tant complint $\overline{\mathrm{Bd}}(N(x,U_0)) > 0$. Notem que

$$\Big((N(x,U_0) - N(x,U_0)) \cap \mathbb{N}_0 \Big) + n \subset N(U,V).$$

En efecte, donats $s_1, s_2 \in N(x,U_0)$ amb $s_1 \geq s_2$, tenim

$$T^{s_2}x \in U, \text{ i també } T^{s_1 - s_2 + n}(T^{s_2}x) = T^n(T^{s_1}x) \in V.$$

Per B.2.10(d) el conjunt $\Big((N(x,U_0) - N(x,U_0)) \cap \mathbb{N}_0 \Big)$ és sindètic d'on $N(U,V)$ és sindètic. $\square$

En el següent capítol continuarem estudiant amb major profunditat la freqüent, superior-freqüent i reiterada hiperciclicitat relacionant-les amb les corresponents nocions de recurrència.

Capítol 3

Recurrència

En aquest últim capítol estudiem la *recurrència* (Definició 3.1.1) començant amb les definicions bàsiques en Dinàmica Topològica i revisant un resultat per a sistemes dinàmics sobre espais mètrics complets (Proposició 3.1.3), que ens permet passar a Dinàmica Lineal sobre F-espais generalitzant la recurrència en termes de punts *freqüentment* i *reiteradament recurrents* (Definició 3.1.6).

L'objectiu de les seccions segona i tercera és estudiar la relació que existeix entre la recurrència i la hiperciclicitat. Obtenim tres resultats caracteritzant la hiperciclicitat reiterada (Teorema 3.2.3), superior-freqüent (Teorema 3.3.2) i freqüent (Teorema 3.3.4) en termes de les respectives nocions de recurrència, i establim una condició suficient per a obtindre la hiperciclicitat reiterada i superior-freqüent a partir dites nocions de recurrència (Teorema 3.3.6). També donem un exemple mostrant que el *conjunt de vectors reiteradament recurrents* no és sempre de categoria-II (Exemple 3.2.5).

A l'última secció comentem les distintes possibilitats de generalització que presenten els raonaments que exposem al llarg del capítol si, com amb la transitivitat i la hiperciclicitat, pensem en la recurrència des del punt de vista de les famílies de Furstenberg (Definició 3.4.1).

3.1 Definicions Bàsiques

Encara que la propietat més estudiada sobre sistemes dinàmics lineals ha sigut la hiperciclicitat (Definició 2.2.1), un concepte important en qualsevol subapartat de la Teoria de Sistemes Dinàmics és el de *recurrència*. Aquesta noció es referix a l'existència de punts de l'espai, per als quals part de la seua òrbita "retorna" al punt inicial. Tal com s'exposa en [23, Introducció, Secció 4], el primer resultat conegut sobre aquest tipus de propietat s'emmarca dins de la Teoria Ergòdica i és el teorema de Recurrència de Poincaré (Teorema A.4.2), plantejat ja en 1890 per Poincaré i demostrat en 1919 per Carathéodory baix la hipòtesi de invariància respecte d'una mesura de probabilitat (veure Definició A.4.1). Aquest implica que quasi tots els punts d'un conjunt de mesura no nul·la retornen a dit conjunt en algun moment de la seua òrbita (veure Teorema A.4.2).

Amb exemples com l'anterior, l'estudi sistemàtic de la *recurrència* per a sistemes dinàmics es remunta als treballs de Gottschalk i Hedlund [28] i Furstenberg [23] (veure [26, 49] per a avanços recents). Per contra, en la Dinàmica Lineal els operadors recurrents únicament s'han començat a estudiar a partir dels articles de Costakis, Manoussos i Parissis [17, 18], en els quals aborden la recurrència d'operadors en espais de Banach des del punt de vista de la Dinàmica Topològica.

Definició 3.1.1. Direm que un sistema dinàmic $T : X \to X$ és *recurrent* si, per a cada obert no buit $U \subset X$ existeix un $n \in \mathbb{N}$ de manera que $T^n(U) \cap U \neq \emptyset$. Direm que l'aplicació T és *recurrent*.

Direm que $x \in X$ és un *punt recurrent* de T, si existeix una successió creixent $\{k_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathbb{N}_0$ de manera que $\lim_{n\to\infty} T^{k_n}x = x$. Denotarem per $\mathrm{Rec}(T)$ el *conjunt de punts recurrents* de T.

Nota 3.1.2. En termes de conjunts de retorn: T és recurrent si per a cada obert no buit $U \subset X$ la intersecció $N(U,U) \cap \mathbb{N}$ és no buida. En aquest cas, tal com passava amb la transitivitat topològica, dits conjunts són infinits. En efecte, si $T^n(U) \cap U \neq \emptyset$ llavors $U_0 := U \cap T^{-n}(U)$ és un obert no buit i existeix $k \in \mathbb{N}$ amb $T^k(U_0) \cap U_0 \neq \emptyset$, i per tant

$$\emptyset \neq T^k(U \cap T^{-n}(U)) \cap (U \cap T^{-n}(U)) \subset T^k(U) \cap T^{-n}(U),$$

d'on deduïm $T^{k+n}(U) \cap U \neq \emptyset$. Per altra banda, $x \in X$ és un punt recurrent de T si i només si per a tot entorn U de x el conjunt $\mathrm{orb}(x,T) \cap U$ és infinit, i per tant, si i només si $N(x,U)$ és infinit. Aquest fet també és equivalent a que x siga un punt d'acumulació del conjunt $\mathrm{orb}(x,T)$.

Amb idees similars a les de la prova del teorema de Transitivitat de Birkhoff (Teorema 1.2.9), en [17] demostren la relació entre la recurrència i l'existència de punts recurrents per a sistemes dinàmics on l'espai mètric subjacent és complet.

Proposició 3.1.3 ([**17**, **Proposició 2.1**])**.** *Siga $T : X \to X$ una aplicació contínua en un espai mètric complet X. Les següents afirmacions són equivalents:*

(i) *T és recurrent;*

(ii) *el conjunt $\mathrm{Rec}(T)$ és dens en X.*

A més, $\mathrm{Rec}(T)$ és un conjunt G_δ, i per tant, si es compleix alguna de les condicions anteriors és un conjunt G_δ dens.

Demostració. (ii) $\Longrightarrow$ (i) Donat un obert no buit $U \subset X$ podem considerar un punt recurrent $x \in U \cap \mathrm{Rec}(T)$. Aleshores existeix $n \in \mathbb{N}$ complint $T^n x \in U$ i per tant $T^n(U) \cap U \neq \emptyset$.

(i) $\Longrightarrow$ (ii) Fixem un obert no buit $U \subset X$. Per ser T recurrent existeix $k_1 \in \mathbb{N}$ i $x_1 \in X$ amb $x_1 \in U \cap T^{-k_1}(U)$. Com T és contínua existeix $0 < \varepsilon_1 < 1/2$ complint $\overline{B(x_1,\varepsilon_1)} \subset U \cap T^{-k_1}(U)$. Donat $m \in \mathbb{N}$, suposem construïdes dues seqüències $\{B(x_n,\varepsilon_n)\}_{n=1}^m$ i $\{k_n\}_{n=1}^m$ complint

$$\overline{B(x_n,\varepsilon_n)} \subset B(x_{n-1},\varepsilon_{n-1}) \cap T^{-k_n}\Big(B(x_{n-1},\varepsilon_{n-1})\Big), \quad 0 < \varepsilon_n < \tfrac{1}{2^n}, \quad \text{amb } k_n > k_{n-1}$$

per a cada $1 < n \leq m$. Llavors, com T és recurrent existeix $k_{m+1} > k_m$ i $x_m \in X$ complint $x_m \in B(x_m,\varepsilon_m) \cap T^{-k_{m+1}}(B(x_m,\varepsilon_m))$, i per ser T contínua existeix $0 < \varepsilon_{m+1} < 1/2^{m+1}$ amb $\overline{B(x_{m+1},\varepsilon_{m+1})} \subset B(x_m,\varepsilon_m) \cap T^{-k_{m+1}}(B(x_m,\varepsilon_m))$. De manera recursiva obtenim una successió de boles $\{B(x_n,\varepsilon_n)\}_{n=1}^\infty$ i una successió estrictament creixent de naturals $\{k_n\}_{n=1}^\infty \subset \mathbb{N}$ complint $\overline{B(x_n,\varepsilon_n)} \subset B(x_{n-1},\varepsilon_{n-1}) \cap T^{-k_n}(B(x_{n-1},\varepsilon_{n-1}))$ i $0 < \varepsilon_n < 1/2^n$ per a cada $n \geq 2$. Com $\lim_{n\to\infty} \mathrm{diam}\Big(\overline{B(x_n,\varepsilon_n)}\Big) = 0$, pel teorema A.1.6 existeix $x \in X$ amb

$$\{x\} = \bigcap_{n=1}^{\infty} \overline{B(x_n,\varepsilon_n)} \subset U.$$

Donat $n \in \mathbb{N}$ tenim $x \in \overline{B(x_n,\varepsilon_n)} \subset B(x_{n-1},\varepsilon_{n-1}) \cap T^{-k_n}(B(x_{n-1},\varepsilon_{n-1}))$ d'on obtenim que $T^{k_n}x \in B(x_{n-1},\varepsilon_{n-1})$ i per tant $d(x,T^{k_n}x) < \frac{1}{2^n}$. Deduïm $\lim_{n\to\infty} T^{k_n}x = x$, és a dir, $x \in U \cap \mathrm{Rec}(T)$.

Finalment, observem que

$$\mathrm{Rec}(T) = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \left(\bigcup_{m=1}^{\infty} \left\{ x \in X : d(T^m x, x) < \frac{1}{n} \right\} \right),$$

i per tant $\mathrm{Rec}(T)$ és un G_δ ja que l'aplicació $d(T^m\cdot,\cdot) : X \to \mathbb{R}_+$ és continua per a cada $m \in \mathbb{N}$. □

Si apliquem el teorema anterior a la Dinàmica Lineal, i en particular als sistemes dinàmics lineals que hem considerat al treball, és a dir, aquells operadors $T : X \to X$ per als quals X és un F-espai, l'anterior resultat ens assegura que la recurrència és equivalent a que el conjunt de vectors recurrents $\mathrm{Rec}(T)$ siga un conjunt G_δ dens.

La literatura sobre sistemes dinàmics (no lineals) és abundant en nocions similars a la de "punt recurrent". Evidentment, la periodicitat és un tipus molt fort de recurrència i és fonamental en qualsevol teoria dinàmica, ja que un vector $x \in X$ és *periòdic* si existeix algun $n \in \mathbb{N}$ de manera que $T^n x = x$. Denotarem per $\mathrm{Per}(T)$ el *conjunt de vectors periòdics* de T (veure Definició 1.3.2). Per altra banda, també existeix la noció de *vector uniformement recurrent*, concepte estudiat amb certa profunditat en [31].

Definició 3.1.4. Siga $T : X \to X$ un operador. Direm que $x \in X$ és un *vector uniformement recurrent* de T, si per a cada entorn $U \subset X$ de x el conjunt de retorn $N(x, U)$ és sindètic. Denotarem per $\mathrm{URec}(T)$ el *conjunt de vectors uniformement recurrents* de T i direm que T és un *operador uniformement recurrent* si $\mathrm{URec}(T)$ és dens en X.

Nota 3.1.5. Els vectors uniformement recurrents són anomenats de vegades "punts quasi-periòdics" (veure [34, 57]), o també "sindèticament recurrents" o "fortament recurrents" (veure [42]). Recordem que els conjunts sindètics (Definició B.1.1) coincidixen amb aquells que tenen densitat de Banach inferior positiva (veure Definició B.2.6 i Proposició B.2.10(a)).

Per a la resta de treball fixarem la següent notació:

Definició 3.1.6. Siga $T : X \to X$ un operador. Direm que un vector $x \in X$ és:

(a) *freqüentment recurrent*, si per a cada entorn $U \subset X$ de x es compleix

$$\underline{\mathrm{dens}}(N(x,U)) := \liminf_{N\to\infty} \frac{\mathrm{card}(N(x,U) \cap [0,N])}{N+1} > 0.$$

Denotarem per $\mathrm{FRec}(T)$ el *conjunt de vectors freqüentment recurrents* de T. Si aquest conjunt és dens en X direm que l'operador T és *freqüentment recurrent*.

(b) *superior-freqüentment recurrent*, si per a cada entorn $U \subset X$ de x es compleix

$$\overline{\mathrm{dens}}(N(x,U)) := \limsup_{N\to\infty} \frac{\mathrm{card}(N(x,U) \cap [0,N])}{N+1} > 0.$$

Denotarem per $\mathrm{UFRec}(T)$ el *conjunt de vectors superior-freqüentment recurrents* de T. Si aquest conjunt és dens en X direm que l'operador T és *superior-freqüentment recurrent*.

(c) *reiteradament recurrent*, si per a cada entorn $U \subset X$ de x es compleix

$$\overline{\mathrm{Bd}}(N(x,U)) := \limsup_{N\to\infty} \left(\sup_{m\geq 0} \frac{\mathrm{card}(N(x,U) \cap [m, m+N])}{N+1} \right) > 0.$$

Denotarem per $\mathrm{RRec}(T)$ el *conjunt de vectors reiteradament recurrents* de T. Si aquest conjunt és dens en X direm que l'operador T és *reiteradament recurrent*.

Nota 3.1.7. Totes les densitats emprades poden trobar-se definides a la secció B.2. Per a altres definicions equivalents de la densitat superior de Banach es pot consultar la nota B.2.7.

El concepte de *recurrència superior-freqüent* fou introduït per Costakis i Parissis [18], mentre que Grivaux i Matheron en [30] defineixen *recurrència freqüent* de manera (almenys formalment) més feble que la nostra.

En dinàmica no lineal, els punts freqüentment recurrents típicament han sigut anomenats com "punts feblement quasi-periòdics"; els punts superior-freqüentment recurrents s'han anomenat "punts quasi-feblement quasi-periòdics" o "ergòdics"; i els punts reiteradament recurrents usualment s'han anomenat "punts de densitat de Banach superior positiva", "punts recurrents de Banach", o "essencialment recurrents" (veure [34], [43], [58], [56], [7]).

Igual que a la secció 2.5 tenim les inclusions (2.4), les relacions entre les distintes densitats (Desigualtat (B.1)) impliquen que per a tot operador $T : X \to X$ es compleixen les inclusions

$$\mathrm{Per}(T) \subset \mathrm{URec}(T) \subset \mathrm{FRec}(T) \subset \mathrm{UFRec}(T) \subset \mathrm{RRec}(T) \subset \mathrm{Rec}(T).$$

Tal com ja hem comentat, existeix una simetria entre les quatre nocions intermèdies i les densitats introduïdes a la secció B.2: els conjunts sindètics que defineixen la *uniforme recurrència* són exactament els conjunts que tenen densitat de Banach inferior positiva; els conjunts amb densitat asimptòtica inferior (o superior) positiva defineixen la *recurrència freqüent* (o *superior-freqüent*); i els conjunts de densitat de Banach superior positiva defineixen la *reiterada recurrència*.

Si recordem les distintes generalitzacions de la hiperciclicitat que hem estudiat a la secció 2.5, és evident que es compleixen les inclusions

$$\mathrm{FHC}(T) \subset \mathrm{FRec}(T), \qquad \mathrm{UFHC}(T) \subset \mathrm{UFRec}(T), \qquad \mathrm{RHC}(T) \subset \mathrm{RRec}(T),$$

i que cada noció de hiperciclicitat (freqüent, superior-freqüent i reiterada) implica la respectiva noció de recurrència (per 2.5.8 la uniforme recurrència no té una categoria de hiperciclicitat anàloga). La implicació contraria no és certa en general, ja que sobre qualsevol F-espai l'operador identitat té tots els punts fixats però no és hipercíclic. L'objectiu d'aquest capítol i part central del treball és relacionar la hiperciclicitat amb la recurrència i trobar alguna condició suficient baix la qual la implicació contraria passe a ser certa.

3.2 Operadors Reiteradament Recurrents

Dedicarem aquesta a caracteritzar els operadors reiteradament hipercíclics en termes del conjunt de vectors reiteradament recurrents $\mathrm{RRec}(T)$. Aquesta caracterització està basada en un resultat de Bés, Menet, Peris i Puig sobre la reiterada hiperciclicitat [8, Teorema 14].

Teorema 3.2.1 ([**8, Teorema 14**]). *Siga $T : X \to X$ un operador reiteradament hipercíclic. Llavors el conjunt de vectors reiteradament hipercíclics coincideix amb el de vectors hipercíclics.*

En [8] demostren aquest teorema i afegixen en forma de nota el següent corol·lari la demostració del qual és exactament igual a la del teorema anterior, ja que únicament es necessita que el conjunt de vectors reiteradament recurrents siga dens i és evident que si un operador és reiteradament hipercíclic, aleshores és hipercíclic i també reiteradament recurrent.

Corol·lari 3.2.2 ([**8, Nota 3**]). *Siga $T : X \to X$ un operador hipercíclic i també reiteradament recurrent, llavors* $\mathrm{HC}(T) = \mathrm{RHC}(T)$.

Demostració. Siga $x \in \mathrm{HC}(T)$ i $U \subset X$ un obert no buit. Prenem $y \in U \cap \mathrm{RRec}(T)$ i donat $n \in \mathbb{N}_0$ considerem el conjunt $U_n := \bigcap_{j \in N(y,U) \cap [0,n]} T^{-j}(U)$. Per la continuïtat de T el conjunt U_n és un obert. A més, U_n és no buit ja que $T^j y \in U$ per a cada $j \in N(y,U)$, i per tant $y \in U_n$. La hiperciclicitat de x implica l'existència de $k_n \in \mathbb{N}_0$ complint $T^{k_n} x \in U_n$, i per tant, $T^{k_n+j} x \in U$ per a cada $j \in N(y,U) \cap [0,n]$. Deduïm $(N(y,U) \cap [0,n]) + k_n \subset N(x,U)$ i pel lema B.2.13 obtenim $\overline{\mathrm{Bd}}(N(x,U)) \geq \overline{\mathrm{Bd}}(N(y,U)) > 0$, és a dir, $x \in \mathrm{RHC}(T)$. $\square$

Amb la potència de l'anterior teorema i respectiu corol·lari caracteritzem els operadors reiteradament hipercíclics emprant els vectors reiteradament recurrents i el conjunt $\mathrm{RRec}(T)$.

Teorema 3.2.3. *Siga $T : X \to X$ un operador. Les següents afirmacions són equivalents:*

(i) *T és reiteradament hipercíclic;*

(ii) *T és hipercíclic i $\mathrm{RRec}(T)$ és un conjunt residual;*

(iii) *T és hipercíclic i $\mathrm{RRec}(T)$ és de categoria-II;*

(iv) *T és hipercíclic i també reiteradament recurrent;*

(v) *T és hipercíclic i tot vector hipercíclic és reiteradament hipercíclic;*

(vi) *T admet un vector hipercíclic que també és reiteradament recurrent.*

Si alguna d'aquestes condicions es compleix, llavors $\mathrm{RHC}(T) = \mathrm{HC}(T)$ és un G_δ dens.

Demostració. (i) $\implies$ (ii) Pel teorema 3.2.1, si T és reiteradament hipercíclic tenim la igualtat entre conjunts $\mathrm{HC}(T) = \mathrm{RHC}(T)$, i pel teorema de Transitivitat de Birkhoff (Teorema 2.2.4) $\mathrm{RHC}(T)$ és un G_δ dens. De la inclusió $\mathrm{RHC}(T) \subset \mathrm{RRec}(T)$ i la nota A.1.10, $\mathrm{RRec}(T)$ és residual.

(ii) $\implies$ (iii) En un F-espai tot conjunt residual és de categoria-II (veure Nota A.1.9).

(ii) $\implies$ (iv) En un F-espai tot conjunt residual és dens (veure Nota A.1.10).

(iii) $\implies$ (vi) El conjunt $\mathrm{HC}(T)$ és residual i per tant $\mathrm{HC}(T)\cap\mathrm{RRec}(T) \neq \emptyset$ (veure Nota A.1.10).

(iv) $\implies$ (v) Aquesta implicació és el corol·lari 3.2.2.

(v) $\implies$ (vi) Tot vector reiteradament hipercíclic és hipercíclic i també reiteradament recurrent.

(vi) $\implies$ (i) Siguen $x \in \mathrm{HC}(T) \cap \mathrm{RRec}(T)$ i $U \subset X$ un obert no buit. Per la hiperciclicitat de x existeix $m \in \mathbb{N}_0$ amb $T^m x \in U$, i per la continuïtat de T existeix un entorn $V \subset X$ de x complint $T^m(V) \subset U$. Com x és reiteradament recurrent el conjunt $N(x, V)$ té densitat de Banach superior positiva. Per la proposició B.2.8, també el conjunt $N(x, V) + m$ té densitat de Banach superior positiva. La inclusió

$$N(x, V) + m \subset N(x, U),$$

i la monotonia de la densitat (veure Proposició B.2.8) impliquen $\overline{\mathrm{Bd}}(N(x, U)) > 0$, i com U era arbitrari $x \in \mathrm{RHC}(T)$. □

En particular, com que $\mathrm{Per}(T) \subset \mathrm{RRec}(T)$, obtenim com a corol·lari un resultat de Menet [46].

Corol·lari 3.2.4. *Tot operador caòtic és reiteradament hipercíclic.*

Si $T : X \to X$ és un operador recurrent, $\mathrm{Rec}(T)$ és un conjunt residual pel teorema 3.1.3. Per altra banda, si T és reiteradament hipercíclic, pel teorema 3.2.3 el conjunt $\mathrm{RHC}(T)$ és un G_δ dens i per tant residual. Podríem pensar que aquest comportament s'hauria de repetir per al conjunt $\mathrm{RRec}(T)$ en cas que T siga reiteradament recurrent. Sorprenentment, al següent exemple demostrem que aquest no és el cas.

Exemple 3.2.5. Existeix un operador reiteradament recurrent per al qual el conjunt $\mathrm{RRec}(T)$ és de categoria-I. Considerem l'espai de Banach $(X, \|\cdot\|)$ on $X = \ell^p$, $1 \leq p < \infty$, o c_0 amb la norma usual (veure Exemple A.2.5). Definim l'aplicació lineal $T : X \to X$ de manera que $Te_1 = e_1$ i

$$Te_k = \begin{cases} 2 \cdot e_{k+1}, & \text{si } 2^m < k < 2^{m+1} - 1, \\ \frac{1}{2^{(2^m-1)}} \cdot e_{2^m+1}, & \text{si } k = 2^{j+1} - 1, \end{cases}$$

per a cada $m \geq 0$, on $e_k = \{\delta_{k,n}\}_{n=1}^{\infty}$ denota el k-èsim vector canònic. Es compleix $\|Tx\| \leq 2\|x\|$ i per tant T és un operador. Notem que per a cada $k \in \mathbb{N}$ el vector e_k és periòdic de T, per tant, $c_{00} \subset \mathrm{Per}(T)$ i T admet un conjunt dens de punts periòdics. En particular, la inclusió $\mathrm{Per}(T) \subset \mathrm{RRec}(T)$ implica que T és reiteradament recurrent.

Per demostrar que $\mathrm{RRec}(T)$ és de categoria-I, és suficient trobar un conjunt residual G amb $G \cap \mathrm{RRec}(T) = \emptyset$ (veure Nota A.1.10). Per a cada $n \in \mathbb{N}$ considerem el conjunt

$$G_n = \bigcup_{m>n} \{x \in X : |x_{2^m+1}| > \tfrac{1}{m}\},$$

que és unió d'oberts i un conjunt dens. En efecte, donat $x \in X \setminus G_n$ i $\varepsilon > 0$ tenim $G_n \cap B(x, \varepsilon) \neq \emptyset$, ja que el punt $y := x + (\frac{3}{m})e_{2^m+1}$ per a $m > n$ amb $\frac{3}{m} < \varepsilon$ compleix

$$\|x - y\| = |x_{2^m+1} - y_{2^m+1}| = \tfrac{3}{m} < \varepsilon,$$

i també $y \in G_n$ perquè $|y_{2^m+1}| = \left|\frac{3}{m} + x_{2^m+1}\right| \geq \left|\frac{3}{m} - |x_{2^m+1}|\right| \geq \frac{3}{m} - \frac{1}{m} > \frac{1}{m}$. Aleshores el conjunt

$$G = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} G_n,$$

és un G_δ dens i per tant un conjunt residual. Per finalitzar comprovem $G \cap \mathrm{RRec}(T) = \emptyset$.

Siga $x \in G$ i $U = \{y \in X : \|y - x\| < \frac{1}{2}\}$. Com $x = \{x_k\}_{k=1}^{\infty} \in X$, existeix $k_0 \in \mathbb{N}$ de manera que $|x_k| < \frac{1}{2}$ per a tot $k \geq k_0$, i per tant, si $y \in U$ necessàriament tenim $|y_k| < 1$ per a cada $k \geq k_0$. Per altra banda, com $x \in G$ existeix un conjunt infinit $H \subset \mathbb{N}$ complint $2^m + 1 \geq k_0$ i $|x_{2^m+1}| > \frac{1}{m}$ per a cada $m \in H$.

Fixat $m \in H$ podem considerar el quocient $\mathbb{Z}/2^m\mathbb{Z}$. Per a cada $[j] \in \mathbb{Z}/2^m\mathbb{Z}$ amb $j \in \mathbb{N}$ i $[j] > [m]$ tenim $T^j x \notin U$. En efecte, si $j = k + n2^m$ amb $k, n \in \mathbb{N}$ i $m < k < 2^m$ tenim

$$\left|[T^j x]_{2^m+1+k}\right| = 2^k \cdot |x_{2^m+1}| > \left|\tfrac{2^k}{m}\right| > \left|\tfrac{2^m}{m}\right| > 1.$$

Per tant es compleix $\mathrm{card}(N(x, U) \cap [i, i + 2^m - 1]) \leq m$ per a tot $i \in \mathbb{N}_0$.

Finalment, si suposem $x \in \mathrm{RRec}(T)$ es compleix $\overline{\mathrm{Bd}}(N(x, U)) = \delta > 0$, i emprant la expressió amb límits de la densitat de Banach superior (veure Nota B.2.7), deduïm que existeix $N_0 \in \mathbb{N}$ tal que per a tot $N \geq N_0$ compleix

$$\sup_{i\geq 0} \frac{\mathrm{card}(N(x, U) \cap [i, i + N - 1])}{N} > \frac{\delta}{2}.$$

Com H és infinit podem triar $m \in H$ complint $2^m \geq N_0$ i $\frac{m}{2^m} < \frac{\delta}{2}$, arrivant a la contradicció

$$\frac{\delta}{2} < \sup_{i\geq 0} \frac{\mathrm{card}(N(x, U) \cap [i, i + 2^m - 1])}{2^m} \leq \frac{m}{2^m} < \frac{\delta}{2}.$$

3.3 Operadors Freqüentment Recurrents

Dedicarem aquesta secció a discutir resultats anàlegs al teorema 3.2.3 per als casos de la superior-freqüent i freqüent hiperciclicitat. En primer lloc revisem que el conjunt $\mathrm{UFHC}(T)$ sempre és residual. Aquest resultat fou demostrat per Bayart i Rusza [6, Proposició 21], i posteriorment millorat per Bonilla i Grosse-Erdmann [12, Corol·lari 3.4] caracteritzant la superior-freqüent hiperciclicitat.

Corol·lari 3.3.1 (**[12, Corol·lari 3.4]**). *Siga $T : X \to X$ un operador sobre un F-espai separable X. Les següents afirmacions són equivalents:*

(i) *per a tot obert no buit $U \subset X$ existeix algun $\delta > 0$ tal que: per a cada obert no buit $V \subset X$, existeix $x \in V$ complint*
$$\overline{\operatorname{dens}}(N(x,U)) > \delta;$$

(ii) *per a tot obert no buit $U \subset X$ existeix algun $\delta > 0$ tal que: per a cada obert no buit $V \subset X$ i cada $n \in \mathbb{N}_0$, existeix $x \in V$ i $N \geq n$ complint*
$$\frac{\operatorname{card}(N(x,U) \cap [0,N])}{N+1} > \delta;$$

(iii) *T és superior-freqüentment hipercíclic.*

Si alguna d'aquestes condicions es compleix, llavors $\mathrm{UFHC}(T)$ *és un conjunt residual.*

Demostració. (i) $\Longrightarrow$ (ii) Donat un obert no buit $U \subset X$, per (i) podem prendre $\varepsilon > 0$ de manera que per a cada obert no buit $V \subset X$ existeix $x \in V$ amb
$$\overline{\operatorname{dens}}(N(x,U)) := \limsup_{N\to\infty} \frac{\operatorname{card}(N(x,U) \cap [0,N])}{N+1} > \varepsilon,$$
i per tant, per a cada $n \in \mathbb{N}_0$ existeix $N \geq n$ amb
$$\frac{\operatorname{card}(N(x,U) \cap [0,N])}{N+1} > \frac{\varepsilon}{2}.$$
Considerant $\delta := \varepsilon/2$ obtenim (ii).

(ii) $\Longrightarrow$ (iii) Siga $\{U_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ una base numerable de la topologia de X i per (ii) fixem valors $\delta_k > 0$ associats a U_k per a cada $k \in \mathbb{N}$. Per a cada parell $k, n \in \mathbb{N}$ definim el conjunt
$$U_{k,n} := \left\{ x \in X : \text{ existeix } N \geq n \text{ amb } \frac{\operatorname{card}(N(x,U_k) \cap [0,N])}{N+1} \geq \frac{\delta_k}{2} \right\},$$
que és dens per (ii). A més és obert, ja que si prenem un element $x \in U_{k,n}$ amb
$$\frac{\operatorname{card}(N(y,U_k) \cap [0,N])}{N+1} \geq \frac{\delta_k}{2}, \text{ per a algun } N \geq n,$$
podem considerar el conjunt $U_x := \bigcap_{j\in N(x,U_k)\cap[0,N]} T^{-j}(U_k)$ que per la continuïtat de T és un entorn obert no buit de x, i llavors donat $y \in U_x$ es compleix $T^j y \in U_k$ per a cada $j \in N(x,U_k) \cap [0,N]$ d'on deduïm
$$\frac{\operatorname{card}(N(y,U_k) \cap [0,N])}{N+1} \geq \frac{\operatorname{card}(N(x,U_k) \cap [0,N])}{N+1} \geq \frac{\delta_k}{2}, \text{ i per tant } y \in U_{k,n}.$$
Pel teorema de Baire (Teorema A.1.7) obtenim que $\bigcap_{k,n\in\mathbb{N}} U_{k,n}$ és un conjunt G_δ dens. Finalment, donat $x \in \bigcap_{k,n\in\mathbb{N}} U_{k,n}$ i un obert no buit $U \subset X$ existeix $k \in \mathbb{N}$ amb $U_k \subset U$ i es compleix
$$\overline{\operatorname{dens}}(N(x,U)) \geq \overline{\operatorname{dens}}(N(x,U_k)) \geq \frac{\delta_k}{2} > 0.$$
Per tant $x \in \mathrm{UFHC}(T)$, aquest és un conjunt residual (veure Nota A.1.10), i l'operador T és superior-freqüentment hipercíclic.

(iii) $\Longrightarrow$ (i) Fixat un vector $x \in \mathrm{UFHC}(T)$ i donat un obert no buit $U \subset X$ prenem el valor $\delta := \overline{\operatorname{dens}}(N(x,U))/2 > 0$. Llavors per a cada obert no buit $V \subset X$ existeix $n \in \mathbb{N}_0$ complint $T^n x \in V$ i llavors $\overline{\operatorname{dens}}(N(T^n x,U)) = \overline{\operatorname{dens}}(N(x,U)) > \delta$. □

Mostrem ara un resultat anàleg al teorema 3.2.3, caracteritzant els operadors superior-freqüentment hipercíclics. Encara que la situació és una mica distinta a la dels operadors reiteradament hipercíclics, moltes de les condicions continuen sent certes per a la superior-freqüent hiperciclicitat.

Teorema 3.3.2. *Siga $T : X \to X$ un operador. Les següents afirmacions són equivalents:*

(i) *T és superior-freqüentment hipercíclic;*

(ii) *T és hipercíclic i $\mathrm{UFRec}(T)$ és un conjunt residual;*

(iii) *T és hipercíclic i $\mathrm{UFRec}(T)$ és de categoria-II;*

(iv) *T admet un vector hipercíclic que també és superior-freqüentment recurrent.*

Si alguna d'aquestes condicions es compleix, llavors $\mathrm{UFHC}(T)$ és un conjunt residual i tenim la inclusió $\mathrm{HC}(T) \cap \mathrm{UFRec}(T) \subset \mathrm{UFHC}(T)$.

Demostració. (i) $\Longrightarrow$ (ii) $\Longrightarrow$ (iii) $\Longrightarrow$ (iv) Pel corol·lari 3.3.1 el conjunt $\mathrm{UFHC}(T)$ és residual. La inclusió $\mathrm{UFHC}(T) \subset \mathrm{UFRec}(T)$ implica que $\mathrm{UFRec}(T)$ és també residual, i per tant de categoria-II. En aquest cas tenim $\mathrm{HC}(T) \cap \mathrm{UFRec}(T) \neq \emptyset$ (veure Notes A.1.9 i A.1.10).

(iv) $\Longrightarrow$ (i) Aquesta implicació és completament anàloga a la del teorema 3.2.3. En efecte, donats $x \in \mathrm{HC}(T) \cap \mathrm{UFRec}(T)$ i $U \subset X$ un obert no buit, per la hiperciclicitat de x existeix $m \in \mathbb{N}_0$ amb $T^m x \in U$ i per la continuïtat de T existeix un entorn $V \subset X$ de x complint $T^m(V) \subset U$. Com x és superior-freqüentment recurrent el conjunt $N(x, V)$ té densitat asimptòtica superior positiva. Per la proposició B.2.4, també el conjunt $N(x, V) + m$ té densitat asimptòtica superior positiva. La inclusió

$$N(x, V) + m \subset N(x, U),$$

i la monotonia de la densitat (veure Proposició B.2.4) impliquen $\overline{\mathrm{dens}}(N(x, U)) > 0$, i com U era arbitrari $x \in \mathrm{UFHC}(T)$. □

Exemple 3.3.3 ([46])**.** El resultat anàleg a l'apartat (iv) del teorema 3.2.3 no es compleix per a superior-freqüent recurrència. Menet [46] dona un exemple d'operador caòtic T sobre ℓ^1 que no és superior-freqüentment hipercíclic. Com que $\mathrm{Per}(T) \subset \mathrm{UFRec}(T)$, l'operador T és hipercíclic i superior-freqüentment recurrent sense ser superior-freqüentment hipercíclic. Sobre aquest mateix exemple, notem que per l'apartat (iii) del teorema 3.3.2 el conjunt $\mathrm{UFRec}(T)$ d'aquest operador ha de ser necessàriament de categoria-I. Aquest fet contrasta amb el corol·lari 3.3.1 que implica la naturalesa residual del conjunt $\mathrm{UFHC}(T)$.

Per al cas de la freqüent hiperciclicitat tenim encara menys condicions equivalents. La demostració és exactament igual a la part corresponent dels teoremes 3.2.3 i 3.3.2.

Teorema 3.3.4. *Siga $T : X \to X$ un operador. Les següents afirmacions són equivalents:*

(i) *T és freqüentment hipercíclic;*

(ii) *T admet un vector hipercíclic que també és freqüentment recurrent.*

A més, és compleix la inclusió $\mathrm{HC}(T) \cap \mathrm{FRec}(T) \subset \mathrm{FHC}(T)$.

Hi ha una diferencia clau en la hiperciclicitat quan passem de densitat inferior a superior: mentre que els vectors freqüentment hipercíclics sempre formen un conjunt de categoria-I (veure [47, Teorema 1], [6, Corol·lari 19]), el conjunt de vectors superior-freqüentment hipercíclics, si no és buit, és un conjunt residual (veure Corol·lari 3.3.1). Degut a la inclusió $\mathrm{Per}(T) \subset \mathrm{FRec}(T)$, el mateix exemple 3.3.3 mostra un cas en el qual el conjunt $\mathrm{FRec}(T)$ és de categoria-I.

Si tractem d'estudiar d'igual forma els vectors uniformement recurrents obtenim: aquests vectors mai són hipercíclics. En particular, la proposició 2.5.8 mostra aquest fet.

Teorema 3.3.5. *Per a tot operador $T : X \to X$ es compleix $\mathrm{HC}(T) \cap \mathrm{URec}(T) = \emptyset$.*

Aquest resultat sols ens deixa la possibilitat d'estudiar operadors hipercíclics que també tinguen un conjunt dens de punts uniformement recurrents, com per exemple els operadors caòtics.

Per finalitzar aquestes dues seccions, on s'ha emprat el fet que cada noció de hiperciclicitat implicava la respectiva noció de recurrència, demostrem una condició suficient que garanteix (menys per a la freqüent hiperciclicitat) la implicació contraria. Aquest resultat ve motivat pel resultat de Grivaux, Menet i Matheron [31, Corol·lari 5.20], on mostren que tot operador uniformement recurrent T, amb un conjunt dens de vectors amb òrbita convergent a 0, és un operador superior-freqüentment hipercíclic. Una versió millorada del resultat seria:

Teorema 3.3.6. *Siga $T : X \to X$ un operador sobre un F-espai separable, i suposem que existeix un conjunt dens $X_0 \subset X$ amb $\lim_{n\to\infty} T^n x = 0$ per a tot $x \in X_0$. Es compleixen les següents afirmacions:*

(a) *Si T és recurrent llavors T és hipercíclic.*

(b) *Si T és reiteradament recurrent llavors T és reiteradament hipercíclic.*

(c) *Si T és superior-freqüentment recurrent llavors T és superior-freqüentment hipercíclic.*

Demostració. (a) Siguen $U, V \subset X$ dos oberts no buits i $x \in V \cap \mathrm{Rec}(T)$. Pel lema 2.1.1 podem trobar un entorn obert $V_0 \subset V$ de x i un entorn obert W del $0 \in X$ complint $V_0 + W \subset V$. Prenent un punt $y \in (U - x) \cap X_0$ podem considerar $z := x + y \in U$. Per ser x recurrent el conjunt $N(x, V_0)$ és infinit i com $\lim_{n\to\infty} T^n y = 0$ obtenim

$$T^n z = T^n x + T^n y \in V_0 + W \subset V,$$

per a $n \in N(x, V_0)$ suficientment gran. Com U, V són arbitraris deduïm que T és topològicament transitiu i pel teorema de Transitivitat de Birkhoff (Teorema 2.2.4) T és hipercíclic.

(b) La inclusió $\mathrm{RRec}(T) \subset \mathrm{Rec}(T)$ i l'apartat anterior impliquen que T és hipercíclic. Pel teorema 3.2.3 sabem que T és reiteradament hipercíclic.

(c) Siga $U \subset X$ un obert no buit i $x \in U \cap \mathrm{UFRec}(T)$. Pel lema 2.1.1 podem trobar un entorn obert $U_0 \subset U$ de x i un entorn obert W del $0 \in X$ complint $U_0 + W \subset U$. Llavors $\overline{\mathrm{dens}}(N(x, U_0)) > 0$ i podem fixar un valor $0 < \delta < \overline{\mathrm{dens}}(N(x, U_0))$. Si ara considerem un obert no buit arbitrari $V \subset X$, per hipòtesis existeix $y \in (U - x) \cap X_0$. Llavors el vector $z := x + y \in V$ compleix

$$T^n z = T^n x + T^n y \in U_0 + W \subset U,$$

per a $n \in N(x, U_0)$ suficientment gran. Les propietats de les densitats (veure Proposició B.2.4) impliquen

$$\overline{\mathrm{dens}}(N(z, U)) \geq \overline{\mathrm{dens}}(N(x, U_0)) > \delta,$$

i pel corol·lari 3.3.1 tenim que T és superior-freqüentment hipercíclic. □

3.4 $\mathcal{F}$-recurrència

L'objectiu d'aquest capítol era relacionar els distints tipus de recurrència amb els respectius tipus de hiperciclicitat. Encara que l'escenari més general hauria sigut considerar la $\mathcal{F}$-recurrència per a una família de Furstenberg arbitraria $\mathcal{F} \subset \mathscr{P}(\mathbb{N}_0)$, per a un estudi més detallat dels tipus més importants de hiperciclicitat hem decidit concentrar-nos en aquelles famílies engendrades per les diverses densitats que defineixen les principals formes de hiperciclicitat. Incloem ara les definicions bàsiques de la possible generalització.

Definició 3.4.1. Siguen $T : X \to X$ un operador i $\mathcal{F} \subset \mathscr{P}(\mathbb{N}_0)$ una família de Furstenberg. Direm que un vector $x \in X$ és *$\mathcal{F}$-recurrent*, si per a cada entorn $U \subset X$ de x el conjunt $N(x, U) \in \mathcal{F}$. Denotarem per $\mathcal{F}\mathrm{Rec}(T)$ el *conjunt de vectors $\mathcal{F}$-recurrents* de T. Si aquest conjunt és dens en X direm que l'operador T és *$\mathcal{F}$-recurrent.*

Tal com veurem a aquesta secció, per poder obtindre resultats com els teoremes 3.2.3, 3.3.2 i 3.3.4 per a famílies de Furstenberg $\mathcal{F}$ en general, haurem d'exigir una propietat extra a la família $\mathcal{F}$, que ja compleixen les famílies $\overline{\mathcal{BD}}$, $\overline{\mathcal{D}}$ i $\underline{\mathcal{D}}$, ja que qualsevol conjunt amb densitat positiva segueix tenint la mateixa densitat encara que el traslladem sumant-li qualsevol natural.

Definició 3.4.2. Direm que una família de Furstenberg $\mathcal{F} \subset \mathscr{P}(\mathbb{N}_0)$ és *dreta-invariant*, si per a tot $A \in \mathcal{F}$ i tot $n \in \mathbb{N}_0$ es compleix $A + n := \{k + n : k \in A\} \in \mathcal{F}$.

Exemple 3.4.3. De les famílies estudiades en el apèndix B tenim:

(a) $\mathcal{I}$, $\mathcal{I}^*$, $\mathcal{T}$, $\mathcal{S}$, $\mathcal{PS}$, $\mathcal{TS}$ són clarament famílies dreta-invariants.

(b) Les famílies $\mathcal{IP}$ i Δ no són dreta-invariants. En efecte, si prenem $A \subset \mathbb{N}_0$ el conjunt de nombres parells, que és un IP-conjunt ja que conté les sumes finites de la successió $\{2n\}_{n=0}^{\infty}$ i per tant és un Δ-conjunt (veure Proposició B.1.3(g)), llavors $A + 1 \notin \mathcal{IP}, \Delta$ perquè la suma i la resta de dos nombres parells (o imparells) és sempre un nombre parell.

(c) Tal com exposàvem abans de la definició 3.4.1, les famílies construïdes a partir de les densitats asimptòtiques i de Banach, és a dir, $\overline{\mathcal{BD}}$, $\underline{\mathcal{BD}}$, $\overline{\mathcal{D}}$, $\underline{\mathcal{D}}$ i també $\overline{\mathcal{BD}}_\delta$, $\underline{\mathcal{BD}}_\delta$, $\overline{\mathcal{D}}_\delta$, $\underline{\mathcal{D}}_\delta$ per a $0 < \delta \leq 1$, són dreta-invariants per les proposicions B.2.4(e) i B.2.8(e).

Nota 3.4.4. Seguint a Costakis, Manoussos i Parissis [17] i en general a la literatura existent sobre recurrència de sistemes dinàmics, hem definit la recurrència (Definició 3.1.1) d'un operador $T : X \to X$ com la propietat que el conjunt de retorn $\{n \in \mathbb{N} : T^n(U) \cap U \neq \emptyset\}$ siga no buit per a tot obert no buit $U \subset X$, i per tant infinit (veure Nota 3.1.2). Per la proposició 3.1.3 aquesta definició és equivalent a que $\mathrm{Rec}(T)$ siga dens en X, i aquest tipus de propietat és la que hem emprat per definir les diverses generalitzacions de la recurrència.

La idea de considerar famílies de conjunts d'enters per quantificar propietats dinàmiques, tal com hem fet amb la transitivitat i la hiperciclicitat, ja va ser emprada per Gottschalk i Hedlund [28, Secció 3] on parlen de col·leccions de "conjunts admissibles" en relació amb el fenomen de la recurrència. Furstenberg va fer que aquests conjunts jugaren un paper fonamental en [23], on considera ja la $\mathcal{F}$-recurrència per a famílies com $\mathcal{IP}^*$ o Δ^* en el capítol 9. Aquest fet va motivar Akin a introduir la noció de "famílies de Furstenberg", que hem emprat al treball i introduït a la secció B.3, estudiant en [1] nocions com la $\mathcal{F}$-recurrència i la $\mathcal{F}$-transitivitat amb certa profunditat.

Alternativament, pot ser interessant estudiar els operadors T amb la propietat: per a tot conjunt no buit $U \subset X$, el conjunt $N(U, U) \in \mathcal{F}$. Tal com es suggereix en [18], aquests podrien anomenar-se *operadors topològicament $\mathcal{F}$-recurrents*. Un resultat que podem deduir ràpidament sobre aquest tipus d'operadors i que els relaciona amb la $\mathcal{F}$-transitivitat (veure Seccions 1.6 i 2.4) seria:

Proposició 3.4.5 ([26]). *Siga $\mathcal{F}$ una família de Furstenberg dreta-invariant i $T : X \to X$ un operador topològicament $\mathcal{F}$-recurrent. Llavors T és un $\mathcal{F}$-operador si i només si T és transitiu.*

Demostració. Si T és un $\mathcal{F}$-operador és transitiu. Per a la implicació contraria, donats dos oberts no buits $U, V \subset X$ i $n \in N(U, V)$, llavors $U_0 := U \cap T^{-n}(V)$ és un obert no buit i es compleix la inclusió $N(U_0, U_0) + n \subset N(U, V) \in \mathcal{F}$ per ser dreta-invariant. □

Repetint la demostració de les inclusions adequades dels teoremes 3.2.3, 3.3.2 i 3.3.4 obtenim el resultat per al cas general de la $\mathcal{F}$-recurrència:

Teorema 3.4.6. *Siguen $T : X \to X$ un operador sobre un F-espai separable i $\mathcal{F}$ una família de Furstenberg dreta-invariant. Llavors un vector $x \in X$ és $\mathcal{F}$-hipercíclic si i només si és hipercíclic i també $\mathcal{F}$-recurrent. En particular, T és un operador $\mathcal{F}$-hipercíclic si i només si admet un vector hipercíclic que també és $\mathcal{F}$-recurrent.*

Demostració. Donats $x \in \mathrm{HC}(T) \cap \mathcal{F}\mathrm{Rec}(T)$ i $U \subset X$ un obert no buit, per la hiperciclicitat de x existeix $m \in \mathbb{N}_0$ amb $T^m x \in U$ i per la continuïtat de T existeix un entorn $V \subset X$ de x complint $T^m(V) \subset U$. Com x és $\mathcal{F}$-recurrent tenim $N(x, V) \in \mathcal{F}$. Com $\mathcal{F}$ és invariant cap a la dreta obtenim $N(x, V) + m \in \mathcal{F}$. La inclusió

$$N(x, V) + m \subset N(x, U),$$

implica $N(x, U) \in \mathcal{F}$ i com U era arbitrari $x \in \mathcal{F}\mathrm{HC}(T)$. □

Podem millorar l'anterior resultat si exigim més condicions sobre la família de Furstenberg $\mathcal{F}$. Notem que el teorema 3.4.6 és exactament igual al teorema 3.3.4, ja que en principi no podem afirmar que el conjunt $\mathcal{F}\mathrm{HC}(T)$ (si no és buit) siga de categoria-II, però si assegurem aquest fet es poden recuperar les equivalències establides al teorema 3.3.2 per a aquest tipus de famílies de Furstenberg. Per complir aquesta propietat podem exigir que la família siga *superior*, concepte introduït per Bonilla i Grosse-Erdmann en [12, Definició 2.8].

Definició 3.4.7. Direm que una família de Furstenberg $\mathcal{F} \subset \mathscr{P}(\mathbb{N}_0)$ és *superior*, si es pot escriure com

$$\mathcal{F} = \bigcup_{\delta \in D} \mathcal{F}_\delta \quad \text{amb} \quad \mathcal{F}_\delta = \bigcap_{\mu \in M} \mathcal{F}_{\delta,\mu}$$

per a conjunts $\mathcal{F}_{\delta,\mu} \subset \mathscr{P}(\mathbb{N}_0)$ amb $\delta \in D$ i $\mu \in M$, on D és arbitrari, M és numerable i compleixen

(i) per a cada $\mathcal{F}_{\delta,\mu}$ i cada $A \in \mathcal{F}_{\delta,\mu}$ existeix un conjunt finit $F \subset \mathbb{N}_0$ complint

$$A \cap F \subset B \text{ implica } B \in \mathcal{F}_{\delta,\mu};$$

(ii) per a cada $A \in \mathcal{F}$ existeix algun $\delta \in D$ tal que per a tot $n \in \mathbb{N}_0$ es compleix

$$(A - n) \cap \mathbb{N}_0 \in \mathcal{F}_\delta.$$

Exemple 3.4.8. Encara que l'anterior definició pareix artificial, està basada en una generalització de les famílies definides a partir de *densitats superiors*. Per exemple:

(a) La família $\overline{\mathcal{D}}$ és superior, ja que podem prendre $\mathcal{F}_{\delta,n} \subset \mathscr{P}(\mathbb{N}_0)$ per a cada $0 < \delta \leq 1$ i cada $n \in \mathbb{N}_0$ com el conjunt

$$\mathcal{F}_{\delta,n} := \left\{ A \subset \mathbb{N}_0 : \text{ existeix } N \geq n \text{ amb } \frac{\mathrm{card}(A \cap [0, N])}{N+1} > \delta \right\}.$$

És clar que $\overline{\mathcal{D}} = \bigcup_{\delta \in D} \bigcap_{n \in \mathbb{N}_0} \mathcal{F}_{\delta,n}$ i a més, fixat $A \in \mathcal{F}_{\delta,n}$ amb $N \geq n$ complint la desigualtat $\mathrm{card}(A \cap [0,N]) > (N+1)\delta$, llavors considerant $F := A \cap [0,N]$ es compleix (i) de la definició anterior, i per altra banda (ii) és conseqüència de la proposició B.2.4(e).

(b) $\overline{\mathcal{BD}}$ és una família superior, ja que podem prendre $\mathcal{F}_{\delta,n} \subset \mathscr{P}(\mathbb{N}_0)$ per a cada $0 < \delta \leq 1$ i cada $n \in \mathbb{N}_0$ com el conjunt

$$\mathcal{F}_{\delta,n} := \left\{ A \subset \mathbb{N}_0 : \text{ existeixen } N \geq n, n_N \in \mathbb{N}_0 \text{ amb } \frac{\mathrm{card}(A \cap [n_N, n_N + N])}{N+1} > \delta \right\}.$$

Clarament $\overline{\mathcal{BD}} = \bigcup_{\delta \in D} \bigcap_{n \in \mathbb{N}_0} \mathcal{F}_{\delta,n}$ i les condicions de família superior es dedueixen com al cas anterior, però emprant ara la proposició B.2.8(e).

(c) La família dels conjunts infinits $\mathcal{I}$ és també superior, ja que podem considerar $\mathcal{F}_n \subset \mathscr{P}(\mathbb{N}_0)$ per a cada $n \in \mathbb{N}_0$ com el conjunt

$$\mathcal{F}_n := \{A \subset \mathbb{N}_0 : \text{ existeix } N \geq n \text{ amb } N \in A\}.$$

Tenim $\mathcal{I} = \bigcap_{n \in \mathbb{N}_0} \mathcal{F}_n$ i a més, fixat $A \in \mathcal{F}_n$ amb $N \geq n$ i $N \in A$, llavors prenent $F := \{N\}$ es compleix (i) de la definició de família superior, i és clar que es compleix (ii).

L'avantatge de considerar famílies de Furstenberg superiors és el següent teorema de [12] del qual ja hem donat un esquema de la demostració per al cas particular de $\mathcal{F} = \overline{\mathcal{D}}$ al corol·lari 3.3.1.

Teorema 3.4.9 ([**12**, **Teorema 3.1**]). *Siga $T : X \to X$ un operador sobre un F-espai separable X i $\mathcal{F} = \bigcup_{\delta \in D} \bigcap_{\mu \in M} \mathcal{F}_{\delta,\mu}$ una família de Furstenberg superior. Les següents afirmacions són equivalents:*

(i) *per a tot obert no buit $U \subset X$ existeix algun $\delta \in D$ tal que: per a cada obert no buit $V \subset X$, existeix $x \in V$ complint*
$$N(x,U) \in \mathcal{F}_\delta;$$

(ii) *per a tot obert no buit $U \subset X$ existeix algun $\delta \in D$ tal que: per a cada obert no buit $V \subset X$ i cada $\mu \in M$, existeix $x \in V$ complint*
$$N(x,U) \in \mathcal{F}_{\delta,\mu};$$

(iii) *T és $\mathcal{F}$-hipercíclic.*

Si alguna d'aquestes condicions es compleix, llavors $\mathcal{F}\mathrm{HC}(T)$ és un conjunt residual.

Seguint ara les demostracions dels teoremes 3.2.3 i 3.3.2, i emprant l'anterior teorema podem deduir:

Teorema 3.4.10. *Siga $T : X \to X$ un operador sobre un F-espai X, i $\mathcal{F}$ una família de Furstenberg superior i dreta-invariant. Les següents afirmacions són equivalents:*

(i) *T és $\mathcal{F}$-hipercíclic;*

(ii) *T és hipercíclic i $\mathcal{F}\mathrm{Rec}(T)$ és un conjunt residual;*

(iii) *T és hipercíclic i $\mathcal{F}\mathrm{Rec}(T)$ és de categoria-II;*

(iv) *T admet un vector hipercíclic que també és $\mathcal{F}$-recurrent.*

Si alguna d'aquestes condicions es compleix, llavors $\mathcal{F}\mathrm{HC}(T)$ és un conjunt residual i tenim la inclusió $\mathrm{HC}(T) \cap \mathcal{F}\mathrm{Rec}(T) \subset \mathcal{F}\mathrm{HC}(T)$.

Apèndix A

Prerequisits

En aquest apèndix incloem tant les definicions com els resultats bàsics sobre espais mètrics, espais de Banach, F-espais, espais de Fréchet i Teoria Ergòdica que hem necessitat al treball. L'objectiu és dotar al treball d'un caràcter auto-contingut, encara que per motius d'extensió no inclourem les demostracions de tots els resultats que necessitem.

Denotarem per $\mathbb{N}_0$ el conjunt dels nombres naturals amb el 0 i emprarem $\mathbb{N}$ per a referir-nos als nombres enters estrictament positius. Escriurem $\mathbb{Z}$ i $\mathbb{Q}$ per als conjunts de nombres enters i racionals respectivament, i denotarem per $\mathbb{K}$ simultàniament el cos dels reals ($\mathbb{R}$) i dels complexos ($\mathbb{C}$). També emprarem la notació $\mathbb{R}_+$ per al conjunt de nombres reals no negatius, i donat $n \in \mathbb{N}$ denotarem per $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ l'espai quocient de classes d'equivalència mòdul n dels nombres enters.

Donat un conjunt no buit X i dos subconjunts $A, B \subset X$, denotarem la *diferència simètrica* de A i B per $A \triangle B := (A \cup B) \setminus (A \cap B)$, on $\cup$ i $\cap$ són les operacions d'unió i intersecció de conjunts.

A.1 Topologia en Espais mètrics

A la present secció exposarem la notació bàsica i la teoria general d'espais mètrics que hem emprat en gran part del treball. Molts dels conceptes i resultats que inclourem a continuació poden trobar-se en [39, Capítol 2]. Comencem recordant el concepte de *mètrica* o *distància*.

Definició A.1.1. Direm que una aplicació $d : X \times X \to \mathbb{R}_+$ és una *mètrica* o una *distància* en un conjunt no buit X si que per a cada $x, y, z \in X$ compleix

(i) $d(x, y) = 0$ si i només si $x = y$;

(ii) $d(x, y) = d(y, x)$ (simetria);

(iii) $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$ (desigualtat triangular).

Al parell (X, d) se l'anomena *espai mètric*.

De vegades, quan no cause ambigüitat, donarem per fet la mètrica d de manera que simplement anomenarem i denotarem per X a l'espai mètric (X, d). També adoptarem la notació estàndard per a boles obertes en espais mètrics, i donats $x \in X$ i $\varepsilon > 0$ denotarem per

$$B_d(x, \varepsilon) = \{y \in X : d(x, y) < \varepsilon\}.$$

De nou, si la mètrica a la que ens referim no causa ambigüitat denotarem la bola únicament per $B(x,\varepsilon)$. Donat un conjunt $A \subset X$ denotarem el seu *interior* per $\mathrm{int}(A)$ i la seua *clausura* amb $\overline{A}$. Denotarem el *diàmetre* de A per $\mathrm{diam}(A) := \sup\{d(x,y) : x, y \in A\}$. Recordem que una base de la topologia engendrada per d en X és el conjunt

$$\{B_d(x,\varepsilon) \ : \ x \in X, \ \varepsilon > 0\}.$$

Un espai mètric (X,d) és *separable* si existeix un subconjunt numerable dens. És conegut que un espai mètric és separable si i només si té una base numerable de la topologia. En particular, si $S \subset X$ és dens i numerable, podem refinar la base anterior per a que siga numerable considerant

$$\left\{B_d(x, \tfrac{1}{n}) \ : \ x \in S, \ n \in \mathbb{N}\right\}.$$

Definició A.1.2. Direm que dues mètriques d_1 i d_2 en un conjunt no buit X són *mètriques equivalents* si engendren la mateixa topologia en X. Direm que d_1 i d_2 són *mètriques uniformement equivalents*, si per a cada $\varepsilon > 0$ existeix $\delta > 0$ de manera que

(i) si $d_1(x,y) < \delta$ llavors $d_2(x,y) < \varepsilon$;

(ii) si $d_2(x,y) < \delta$ llavors $d_1(x,y) < \varepsilon$.

Nota A.1.3 ([39, **Exemple 2.4**]). Mentre que les mètriques equivalents únicament conserven la topologia de l'espai, les uniformement equivalents conserven les successions de Cauchy, ja que l'aplicació identitat de (X,d_1) a (X,d_2) és un homeomorfisme si d_1 i d_2 són equivalents, i en el cas de ser d_1 i d_2 uniformement equivalents passa a ser un homeomorfisme uniformement continu. Per exemple, si considerem l'espai $X = \{1/n : n \in \mathbb{N}\}$ amb la mètrica induïda per la distància usual en $\mathbb{R}$, aquest és un espai discret i a més la successió $\{1/n\}_{n=1}^{\infty}$ és de Cauchy. Per contra, si sobre X considerem la mètrica discreta, de nou l'espai és discret (i per tant homeomorf a l'anterior) però no conté successions de Cauchy.

A continuació demostrem els resultats bàsics sobre espais mètrics que hem necessitat al treball.

Proposició A.1.4. *Siguen (X,d) un espai mètric i $F \subset X$ un subconjunt finit. Llavors F és dens si i només si $F = X$.*

Demostració. Si existeix $x \in X \setminus F$ podem prendre $\varepsilon = \min\{d(x,y) : y \in F\} > 0$ i llavors $B(x,\varepsilon)$ és un obert que no interseca a F, contradicció. □

Proposició A.1.5. *Siguen X i Y dos espais mètrics, $f : X \to Y$ una aplicació contínua i $D \subset X$ un conjunt dens en X. Llavors $f(D)$ és dens en $f(X)$.*

Demostració. La continuïtat de f implica que per a tot obert $U \subset Y$ amb $U \cap f(X) \neq \emptyset$ aleshores $f^{-1}(U \cap f(X)) = f^{-1}(U)$ és un obert no buit en X i per tant $f^{-1}(U) \cap D \neq \emptyset$. Deduïm

$$\emptyset \neq f\left(f^{-1}(U) \cap D\right) \subset (U \cap f(X)) \cap f(D).$$ □

Direm que un espai mètric és *complet*, si tota successió de Cauchy és convergent. El següent conegut teorema ens serveix de resultat previ per a més d'una demostració del treball.

Teorema A.1.6 (**Teorema de la Intersecció de Cantor**). *Siga (X,d) un espai mètric complet i $\{C_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una col·lecció de conjunts tancats en X amb $C_{n+1} \subset C_n$ per a cada $n \in \mathbb{N}$ i amb $\lim_{n\to\infty} \mathrm{diam}(C_n) = 0$. Llavors existeix un únic punt $x \in X$ complint*

$$\{x\} = \bigcap_{n=1}^{\infty} C_n.$$

Demostració. Com els diàmetres convergeixen a 0, el conjunt intersecció de tots els C_n ha de tindre diàmetre 0, i per tant, o bé és buit o bé conté un únic punt. Per a cada $n \in \mathbb{N}$ prenem un element arbitrari però fixat $x_n \in C_n$ i considerem la successió $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$. Fixat $N \in \mathbb{N}$, la inclusió entre els tancats implica $\{x_n\}_{n=N}^{\infty} \subset C_N$ i per tant, $d(x_n, x_m) < \operatorname{diam}(C_N)$ per a cada $n, m \geq N$. Deduïm que $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ és de Cauchy, i com l'espai és complet existeix $x \in X$ límit de la successió. Com C_N és tancat i x és també límit de $\{x_n\}_{n=N}^{\infty}$, deduïm que $x \in C_N$ per a cada $N \in \mathbb{N}$. □

Una primera conseqüència important de l'anterior teorema és el conegut teorema de Categories de Baire. Seguirem la demostració exposada en [45, Proposició 3.2].

Teorema A.1.7 (**Teorema de Categories de Baire**)**.** *Siga (X, d) un espai mètric complet. Llavors la intersecció numerable d'oberts densos en X és un conjunt dens en X.*

Demostració. Si $\{A_k\}_{k=1}^{\infty}$ és una successió d'oberts densos en X i $A \subset X$ és un obert no buit, aleshores $A \cap A_1$ és un obert no buit i podem trobar $x_1 \in A_1$ i $0 < \varepsilon_1 < 1/2$ de manera que $\overline{B(x_1, \varepsilon_1)} \subset A \cap A_1$. Donat $n \in \mathbb{N}$, suposem construïda una seqüència $\{B(x_k, \varepsilon_k)\}_{k=1}^{n}$ complint

$$\overline{B(x_k, \varepsilon_k)} \subset A_k \cap B(x_{k-1}, \varepsilon_{k-1}), \quad \text{amb } 0 < \varepsilon_k < \frac{1}{2^k},$$

per a cada $1 < k \leq n$. Llavors $A_{n+1} \cap B(x_n, \varepsilon_n)$ és un obert no buit, i podem trobar $x_{n+1} \in A_{n+1}$ i $0 < \varepsilon_{n+1} < 1/2^{n+1}$ amb $\overline{B(x_{n+1}, \varepsilon_{n+1})} \subset A_{n+1} \cap B(x_n, \varepsilon_n)$. De manera recursiva obtenim una successió de boles $\{B(x_k, \varepsilon_k)\}_{k=1}^{\infty}$ complint $\overline{B(x_k, \varepsilon_k)} \subset A_k \cap B(x_{k-1}, \varepsilon_{k-1})$ i $0 < \varepsilon_k < 1/2^k$ per a cada $k \geq 2$. Com $\lim_{k\to\infty} \operatorname{diam}\left(\overline{B(x_k, \varepsilon_k)}\right) = 0$, pel teorema A.1.6, existeix $x \in X$ amb

$$\{x\} = \bigcap_{k=1}^{\infty} \overline{B(x_k, \varepsilon_k)} \subset A \cap \left(\bigcap_{k=1}^{\infty} A_k\right). \qquad \square$$

Definició A.1.8. Siga (X, d) un espai mètric i $A \subset X$. Direm que A és un conjunt:

(a) *dens enlloc*, si l'interior de la seua clausura és buit, és a dir, $\operatorname{int}(\overline{A}) = \emptyset$;

(b) *de categoria-I*, si pot expressar-se com una unió numerable de conjunts densos enlloc;

(c) *de categoria-II*, si no és un conjunt de categoria-I;

(d) *residual*, si el seu complementari $X \setminus A$ és un conjunt de categoria-I;

(e) G_δ, si pot expressar-se com una intersecció numerable d'oberts.

Nota A.1.9. Existeixen varies enunciacions alternatives del teorema de Categories de Baire:

(i) *Siga (X, d) un espai mètric complet i $\{C_n\}_{n=1}^{\infty}$ conjunts tancats amb $X = \bigcup_{n=1}^{\infty} C_n$. Llavors existeix $n \in \mathbb{N}$ amb $\operatorname{int}(C_n) \neq \emptyset$. Equivalentment no tots els C_n són de categoria-I.*

(ii) *Tot espai mètric complet és de categoria-II.*

(iii) *En un espai mètric complet, tot conjunt residual és de categoria-II.*

La implicació contraria de (iii) no és certa en general. Per exemple, $X = \{1, 2\}$ amb la mètrica discreta és un espai mètric complet, i tant el conjunt $\{1\}$ com $\{2\}$ són de categoria-II.

Nota A.1.10. Reunim a continuació algunes observacions que sorgixen a partir de les definicions anteriors. Siga (X, d) un espai mètric complet i $A, B \subset X$. Llavors:

(a) El conjunt A és un G_δ dens si i només si tots els oberts de la intersecció que el formen són densos, i per tant, tot G_δ dens és un conjunt residual. En efecte, si $\{A_n\}_{n=1}^\infty$ són oberts amb $A = \bigcap_{n=1}^\infty A_n$ i A és dens, dits oberts han de ser densos. L'altra implicació és el teorema de Categories de Baire. En aquest cas, els conjunts $X \setminus A_n$ són tancats amb interior buit i per tant densos enlloc, d'on obtenim que $X \setminus A$ és de categoria-I i A és residual.

(b) Si A i B són G_δ densos, $A \cap B$ és un G_δ dens. En efecte, si $A = \bigcap_{n=1}^\infty A_n$ i $B = \bigcap_{n=1}^\infty B_n$ sent $\{A_n\}_{n=1}^\infty$ i $\{B_n\}_{n=1}^\infty$ oberts densos, llavors $A \cap B = \bigcap_{n=1}^\infty (A_n \cap B_n)$ és un G_δ dens.

(c) Si A és de categoria-I i $B \subset A$, aleshores B és de categoria-I. En efecte, si $A = \bigcup_{n=1}^\infty A_n$ amb $\{A_n\}_{n=1}^\infty$ conjunts densos enlloc, tenim que $B = \bigcup_{n=1}^\infty (A_n \cap B)$ on $\{A_n \cap B\}_{n=1}^\infty$ són evidentment conjunts densos enlloc.

(d) El conjunt A és residual si i només si conté a un conjunt G_δ dens. En efecte, si $A = X \setminus \bigcup_{n=1}^\infty A_n$ amb $\{A_n\}_{n=1}^\infty$ conjunts densos enlloc, llavors $C := \bigcap_{n=1}^\infty (X \setminus \overline{A_n}) \subset A$, on C és un G_δ dens. La implicació contraria es dedueix dels apartats anteriors.

A.2 Espais de Banach

L'objectiu d'aquesta i la propera secció és exposar els coneixements bàsics d'Anàlisi Funcional que hem necessitat al treball. En particular, per a aquesta secció seguirem les definicions i exemples de [22]. Començarem recordant els conceptes d'*espai vectorial topològic* i d'*espai localment convex*.

Definició A.2.1. Un *espai vectorial topològic* és un espai vectorial X sobre $\mathbb{K}$, dotat amb una topologia de Hausdorff de manera que les operacions

$$+ \; : \; X \times X \longrightarrow X, \quad (x, y) \mapsto x + y \text{ (suma de vectors)},$$
$$\cdot \; : \; \mathbb{K} \times X \longrightarrow X, \quad (\lambda, x) \mapsto \lambda x \text{ (producte per escalar)},$$

són contínues. Si a més cada punt de l'espai X té una base d'entorns formada per conjunts convexos, se l'anomena *espai localment convex*.

Donat un subconjunt $A \subset X$ d'un espai vectorial topològic sobre $\mathbb{K}$, denotarem la expansió lineal del conjunt A per

$$\mathrm{LIN}(A) := \left\{ \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i : x_i \in A, \lambda_i \in \mathbb{K} \text{ per a cada } 1 \le i \le n, \text{ amb } n \in \mathbb{N} \right\}.$$

A continuació, recordem el concepte de *norma* i d'*espai normat*.

Definició A.2.2. Direm que un funcional $\|\cdot\| : X \times X \to \mathbb{R}_+$ en un espai vectorial X sobre $\mathbb{K}$ és una *norma*, si per a cada $x, y \in X$ i $\lambda \in X$ compleix

(i) $\|x\| = 0$ si i només si $x = 0$;

(ii) $\|\lambda x\| = |\lambda| \cdot \|x\|$ (homogeneïtat);

(iii) $\|x + y\| \le \|x\| + \|y\|$ (desigualtat triangular).

Al parell $(X, \|\cdot\|)$ se l'anomena *espai normat*.

Els espais normats són espais vectorials topològics, i en particular són espais localment convexos ja que les boles d'una norma són conjunts convexos (per la desigualtat triangular i l'homogeneïtat), i el conjunt de boles centrades en un punt x i de radi major que 0 és un sistema fonamental d'entorns de dit punt en la topologia induïda per la norma. A més, són espais mètrics perquè l'aplicació $d : X \times X \to \mathbb{R}_+$ definida a partir de la norma i que assigna $d(x,y) = \|x-y\|$ per a cada $x, y \in X$, és una distància invariant per translacions en X. Aquesta última afirmació es compleix ja que donats $x, y, z \in X$ llavors

$$d(x+z, y+z) = \|(x+z) - (y+z)\| = \|x-y\| = d(x,y).$$

Dins d'aquest grup d'espais es troben els *espais de Banach*.

Definició A.2.3. Direm que un espai normat $(X, \|\cdot\|)$ és un *espai de Banach* si és un espai mètric complet amb la mètrica induïda per la norma.

Una subfamília dels espais de Banach són els *espais de Hilbert*.

Definició A.2.4. Direm que un espai de Banach $(X, \|\cdot\|)$ és un *espai de Hilbert* si la norma prové d'un producte escalar

$$\langle \cdot, \cdot \rangle : X \times X \to \mathbb{K},$$

via la igualtat $\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$.

Exemple A.2.5. Incloem alguns dels espais de Banach i de Hilbert clàssics més importants:

(a) Siga $1 \leq p < \infty$, llavors l'espai

$$\ell^p = \left\{ \{x_k\}_{k=1}^\infty \in \mathbb{K}^\mathbb{N} \ : \ \sum_{k=1}^\infty |x_k|^p < \infty \right\},$$

de *successions p-sumables*, amb la *norma p*

$$\|x\|_p := \left(\sum_{k=1}^\infty |x_k|^p \right)^{1/p}, \text{ per a cada } x = \{x_k\}_{k=1}^\infty \in \ell^p,$$

és un espai de Banach. En particular, ℓ^2 és un espai de Hilbert amb el producte escalar definit per $\langle x, y \rangle = \sum_{k=1}^\infty x_k \overline{y_k}$. A més, l'*espai de successions finites*, és a dir, amb una quantitat finita de termes distints de 0 i que denotarem per

$$c_{00} = \left\{ \{x_k\}_{k=1}^\infty \in \mathbb{K}^\mathbb{N} \ : \ \text{existeix } N \in \mathbb{N} \text{ amb } x_k = 0 \text{ per a tot } k > N \right\}$$

encara que no és de Banach, constitueix un subespai dens de ℓ^p. Considerant únicament les successions finites amb entrades en $\mathbb{Q}$ (si estem treballant en $\mathbb{R}$) o $\mathbb{Q} + i\mathbb{Q}$ (si ho fem amb $\mathbb{C}$) és clar que ℓ^p és un espai separable per a cada $1 \leq p < \infty$. L'espai $\ell^p(\mathbb{Z})$ de successions p-sumables indexades en $\mathbb{Z}$ es defineix de manera anàloga.

(b) L'*espai de successions acotades* $\ell^\infty = \left\{ \{x_k\}_{k=1}^\infty \in \mathbb{K}^\mathbb{N} \ : \ \sup_{k \in \mathbb{N}} |x_k| < \infty \right\}$ amb la *norma infinit* o *norma suprem* $\|x\|_\infty := \sup_{k \in \mathbb{N}} |x_k|$ per a cada $x = \{x_k\}_{k=1}^\infty \in \ell^\infty$, és també un espai de Banach. Com que no és separable ens interessarà més el seu subespai tancat

$$c_0 = \left\{ \{x_k\}_{k=1}^\infty \in \mathbb{K}^\mathbb{N} \ : \ \lim_{k \to \infty} x_k = 0 \right\},$$

de *successions convergents a* 0. Aquest espai és separable perquè com a l'apartat anterior c_{00} és un subespai dens de c_0.

(c) Siguen $a, b \in \mathbb{R}$ amb $a < b$. Llavors l'espai

$$\mathscr{C}([a,b]) = \{f : [a,b] \to \mathbb{K} \ : \ f \text{ és una funció contínua}\},$$

de *funcions contínues* amb la *norma infinit* o *norma suprem* $\|f\|_\infty := \sup_{t\in[a,b]} |f(t)|$ per a cada $f \in \mathscr{C}([a,b])$, és un espai de Banach.

Els exemples exposats i les afirmacions realitzades són resultats clàssics en Anàlisi Funcional i poden trobar-se en [22, Capítol 1] o [32, Capítol 2].

A.3 F-espais i espais de Fréchet

Donat un espai vectorial, podem introduir una topologia de Hausdorff de manera anàloga a la dels espais de Banach, però, en lloc d'emprar una norma, a partir d'una *F-norma*.

Definició A.3.1. Direm que un funcional $\|\cdot\| : X \to \mathbb{R}_+$ en un espai vectorial X sobre $\mathbb{K}$ és una *F-norma* si per a cada $x, y \in X$ i $\lambda \in \mathbb{K}$ es compleix

(i) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$;

(ii) $\|\lambda x\| \leq \|x\|$ si $|\lambda| \leq 1$;

(iii) $\lim_{\lambda\to 0} \|\lambda x\| = 0$;

(iv) $\|x\| = 0$ si i només si $x = 0$.

De les propietats (i) i (ii) anteriors es dedueix $\|\lambda x\| \leq (|\lambda| + 1)\|x\|$ per a tot $x \in X$ i $\lambda \in \mathbb{K}$. Els espais vectorials acompanyats amb una F-norma són també espais mètrics, ja que l'aplicació $d : X \times X \to \mathbb{R}_+$ definida a partir de la F-norma i que assigna $d(x,y) = \|x-y\|$ per a cada $x, y \in X$ és una distància invariant per translacions en X. Aquesta última afirmació es dedueix igual que al cas dels espasi de Banach ja que donats $x, y, z \in X$, llavors

$$d(x + z, y + z) = \|(x + z) - (y + z)\| = \|x - y\| = d(x, y).$$

Dins del grup dels espais vectorials sobre els que existeix una F-norma es troben els *F-espais*.

Definició A.3.2. Direm que un espai vectorial X sobre el que tenim definida una F-norma és un *F-espai*, si és un espai mètric complet amb la mètrica induïda per la F-norma.

Òbviament tota norma és una F-norma i per tant, tot espai de Banach és un F-espai. A més, amb les propietats (i), (ii) i (iii) d'una F-norma, la continuïtat de les operacions vectorials que doten a l'espai X de la categoria d'espai vectorial topològic pot justificar-se de manera similar al cas dels espais normats i espais de Banach. Però, la falta d'homogeneïtat en els F-espais implica que aquests no són necessàriament localment convexos.

Exemple A.3.3 ([54, Exemple 1.49]). Siga $0 < p < 1$. Llavors l'espai

$$L^p[0,1] := \left\{ f : [0,1] \to \mathbb{K} \ : \ f \text{ és mesurable i } \int_{[0,1]} |f|^p \, d\boldsymbol{\lambda} < \infty \right\},$$

on $\boldsymbol{\lambda}$ denota la mesura de Lebesgue en $\mathbb{R}$, és un F-espai amb la F-norma

$$\|f\| = \int_{[0,1]} |f|^p \, d\boldsymbol{\lambda},$$

però, tal com es mostra en [54] no és un espai localment convex. De fet, menys el conjunt total no existeix cap obert no buit que siga convex.

Un cas particular de F-espai és el concepte d'*espai de Fréchet* que generalitza el d'espai de Banach sense perdre la categoria d'espai localment convex, definint la topologia amb una successió de semi-normes. Recordem el concepte de *semi-norma* i algunes de les propietats que pot tindre una successió d'aquestes.

Definició A.3.4. Direm que un funcional $p : X \times X \to \mathbb{R}_+$ en un espai vectorial X sobre $\mathbb{K}$ és una *semi-norma* si per a cada $x, y \in X$ i $\lambda \in \mathbb{K}$ compleix

(i) si $x = 0$ llavors $\|x\| = 0$;

(ii) $p(\lambda x) = |\lambda| \cdot p(x)$ (homogeneïtat);

(iii) $p(x + y) \leq p(x) + p(y)$ (desigualtat triangular).

Direm que una successió $\{p_n\}_{n=1}^{\infty}$ de semi-normes en X *separa punts*, si la condició de $p_n(x) = 0$ per a tot $n \in \mathbb{N}$ implica $x = 0 \in X$. La successió és *creixent* si $p_n(x) \leq p_{n+1}(x)$ per a tot $x \in X$.

Lema A.3.5. *Siguen X un espai vectorial sobre $\mathbb{K}$ i $\{p_n\}_{n=1}^{\infty}$ una successió creixent de semi-normes en X que separa punts. Llavors les aplicacions $d_1 : X \times X \to \mathbb{R}_+$ i $d_2 : X \times X \to \mathbb{R}_+$ definides per*

$$d_1(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \min\{1, p_n(x - y)\}, \quad i \quad d_2(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \frac{p_n(x - y)}{(1 + p_n(x - y))},$$

per a cada $x, y \in X$, són dues mètriques en X invariants per translacions i uniformement equivalents. A més, en l'espai mètric (X, d_1), donada una successió $\{x_k\}_{k=0}^{\infty} \subset X$, dos punts de l'espai $x, y \in X$ i $U \subset X$, es compleixen les següents afirmacions:

(a) *Donat $n \in \mathbb{N}$, si $p_n(x - y) < \frac{1}{2^n}$ llavors $d_1(x, y) < \frac{1}{2^{n-1}}$.*

(b) *Donat $n \in \mathbb{N}$, si $d_1(x, y) < \frac{1}{2^{2n}}$ llavors $p_k(x - y) < \frac{1}{2^k}$ per a cada $1 \leq k \leq n$.*

(c) *$\lim_{k\to\infty} x_k = x$ si i només si $\lim_{k\to\infty} p_n(x_k - x) = 0$ per a cada $n \in \mathbb{N}$.*

(d) *$\{x_k\}_{k=0}^{\infty}$ és de Cauchy si i només si $\lim_{k,l\to\infty} p_n(x_k - x_l) = 0$ per a cada $n \in \mathbb{N}$.*

(e) *U és un entorn de x si i només si existeixen $n \in \mathbb{N}$ i $\varepsilon > 0$ de manera que*

$$\{y \in X \ : \ p_n(x - y) < \varepsilon\} \subset U.$$

Demostració. La hipòtesi de separar punts implica $d_1(x, y) = 0$ (respectivament $d_2(x, y) = 0$) si i només si $x = y$. La propietat simètrica es dedueix de $p_n(x - y) = p_n(-(y - x)) = p_n(y - x)$ per a cada $x, y \in X$ i cada $n \in \mathbb{N}$. La desigualtat triangular és una conseqüència immediata de la desigualtat triangular de cada semi-norma p_n amb $n \in \mathbb{N}$. La igualtat

$$p_n(x - y) = p_n((x + z) - (y + z)), \text{ per a cada } x, y, z \in X, \text{ i cada } n \in \mathbb{N},$$

demostra que d_1 i d_2 són invariants per translacions. Completarem la prova demostrant primer que fixats $x, y \in X$ i $n \in \mathbb{N}$ es compleixen les propietats:

(1) Si $p_n(x - y) < 1/2^n$ llavors $d_2(x, y) \leq d_1(x, y) < 1/2^{n-1}$. En efecte, com que la successió de semi-normes és creixent tenim

$$d_2(x, y) \leq d_1(x, y) < \left(\frac{1}{2^n}\right) \cdot \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2^k}\right) + \left(\sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{2^k}\right) < \frac{2}{2^n} = \frac{1}{2^{n-1}}.$$

(2) Si $d_1(x,y) < 1/2^{2n}$ llavors $p_n(x-y) < 1/2^n$. En efecte, si suposem $p_n(x-y) \geq 1/2^n$ tenim una contradicció amb
$$\frac{1}{2^{2n}} \leq \frac{1}{2^n} \cdot \min\{1, p_n(x-y)\} \leq d_1(x,y).$$

(3) Si $d_2(x,y) < 1/2^{2n}$ llavors $p_n(x-y) < 1/2^{n-1}$. Si suposem $p_n(x-y) \geq 1/2^{n-1} \geq 1/(2^n-1)$ obtenim
$$\frac{p_n(x-y)}{1+p_n(x-y)} \geq \frac{1}{2^n}, \text{ d'on } \frac{1}{2^{2n}} \leq \frac{1}{2^n} \cdot \frac{p_n(x-y)}{1+p_n(x-y)} \leq d_2(x,y).$$

Les dues mètriques són uniformement equivalents, ja que donat $\varepsilon > 0$ podem prendre $n \in \mathbb{N}$ de manera que $1/2^{n-2} < \varepsilon$ i amb $\delta = 1/2^{2n}$ obtenim: si $d_1(x,y) < \delta$ llavors $d_2(x,y) < 1/2^{n-1} < \varepsilon$; si $d_2(x,y) < \delta$ aleshores $p_{n-1}(x-y) < 1/2^{n-1}$ d'on es compleix $d_1(x,y) < 1/2^{n-2} < \varepsilon$.

Amb les desigualtats obtingudes en (1) i (2) i tenint en compte que la successió de semi-normes és creixent obtenim (a), (b) i podem deduir:

(c) $\lim_{k\to\infty} d_1(x_k, x) = 0$ si i només si $\lim_{k\to\infty} p_n(x_k - x) = 0$ per a cada $n \in \mathbb{N}$.

(d) $\lim_{k,l\to\infty} d_1(x_k, x_l) = 0$ si i només si $\lim_{k,l\to\infty} p_n(x_k - x_l) = 0$ per a cada $n \in \mathbb{N}$.

(e) $B_{d_1}(x, \frac{1}{2^{2n}}) \subset \{y \in X : p_n(x-y) < \frac{1}{2^n}\} \subset B_d(x, \frac{1}{2^{n-1}})$ per a cada $n \in \mathbb{N}$. □

Recordem que dues mètriques uniformement equivalents engendren la mateixa topologia i les mateixes successions de Cauchy (veure Definició A.1.2). Per tant és indiferent emprem la mètrica d_1 (com en [32]) o la mètrica d_2 (com en [45]) per determinar si l'espai mètric resultant és complet. Nosaltres emprarem la mètrica d_1 que denotarem simplement per d.

Definició A.3.6. Un *espai de Fréchet* és un espai vectorial sobre $\mathbb{K}$ junt amb una successió creixent de semi-normes $\{p_n\}_{n=1}^{\infty}$ que separen punts de l'espai, i de manera que (X,d) és un espai mètric complet, on
$$d(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \min\{1, p_n(x-y)\}, \text{ per a cada } x, y \in X.$$

Com havíem afirmat abans, els espais de Fréchet són un cas particular dels F-espais.

Proposició A.3.7. *Siga X un espai de Fréchet. Llavors, el funcional*
$$\|x\| := d(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \min\{1, p_n(x)\}, \textit{ per a cada } x \in X,$$
és una F-norma.

Demostració. Les propietats (i), (ii) i (iv) de F-norma són conseqüència del lema A.3.5 i del fet que d és una mètrica. La propietat (iii) és directa per l'expressió de la F-norma. L'espai mètric (X,d) és complet ja que d coincideix amb la mètrica de la definició d'espai de Fréchet. □

També podríem haver triat la mètrica d_2 del lema A.3.5 per a definir una F-norma completament equivalent a l'anterior. Finalment, i abans de veure alguns exemples, cal remarcar que els espais de Fréchet són espais vectorials topològics (per ser F-espais) i també espais localment convexos, ja que les boles de cada semi-norma són conjunts convexos, i per el lema A.3.5, la unió de totes aquestes boles formen una base d'entorns.

Exemple A.3.8. Incloem a continuació alguns exemples fonamentals d'espais de Fréchet:

(a) Siga $(X, \|\cdot\|)$ un espai de Banach. Llavors prenent $p_n = \|\cdot\|$ per a cada $n \in \mathbb{N}$, és clar que X és un espai de Fréchet amb la definició A.3.6.

(b) L'*espai de funcions enteres*

$$H(\mathbb{C}) = \{f : \mathbb{C} \to \mathbb{C} \ : \ f \text{ és holomorfa}\}.$$

El concepte natural de convergència per a funcions enteres és la convergència uniforme local, és a dir, la convergència uniforme en cada subconjunt compacte. Recordem que tota funció entera no constant és no acotada, i per tant, difícilment anem a poder controlar la convergència uniforme global amb una única norma. En contrast amb els espais de Banach, la convergència ve descrita per una família infinita numerable de condicions. En particular, pel lema A.3.5 tenim que una successió $\{f_k\}_{k=0}^{\infty} \subset H(\mathbb{C})$ convergeix a $f \in H(\mathbb{C})$ si i només si $\{p_n(f_k - f)\}_{k=0}^{\infty}$ convergeix a 0 per a tot $n \in \mathbb{N}$, on

$$p_n(f) := \sup_{|z|<n} |f(z)|, \text{ per a cada } f \in H(\mathbb{C}).$$

Clarament $\{p_n\}_{n=1}^{\infty}$ és una successió creixent de semi-normes que separa punts de $H(\mathbb{C})$. Com que la sèrie de Taylor d'una funció entera convergeix uniformement en cada conjunt compacte, el conjunt de polinomis formen un subconjunt dens de $H(\mathbb{C})$ i considerant únicament els polinomis amb coeficients en $\mathbb{Q} + i\mathbb{Q}$ és clar que $H(\mathbb{C})$ és un espai de Fréchet separable.

(c) Encara que molts dels espais més naturals de successions són de Banach (com ℓ^p o c_0, veure Exemple A.2.5), l'*espai (real o complex) de totes les successions*

$$\omega = \mathbb{K}^{\mathbb{N}} = \{\{x_k\}_{k=1}^{\infty} \ : \ x_k \in \mathbb{K}, \text{ per a cada } k \in \mathbb{N}\},$$

no té una estructura natural d'espai de Banach, ja que les successions no són (necessàriament) acotades, i per tant, no es pot dotar l'espai d'una norma natural que controle la convergència coordenada a coordenada. Podem donar una successió creixent de semi-normes $\{p_n\}_{n=1}^{\infty}$ amb

$$p_n(x) := \max_{1 \le k \le n} |x_k|, \text{ per a cada } x = \{x_k\}_{k=1}^{\infty} \in \omega.$$

És clar que aquesta successió de semi-normes separa punts, i una successió $\{x^{(j)}\}_{j=0}^{\infty} \subset \omega$ convergeix a $x \in \omega$ si i només si $\{p_n(x^{(j)} - x)\}_{j=0}^{\infty}$ convergeix a 0 per a tot $n \in \mathbb{N}$. Com ocorre amb els espais ℓ^p i c_0, el subespai c_{00} és dens en ω, i considerant únicament les successions finites amb entrades $\mathbb{Q}$ o $\mathbb{Q} + i\mathbb{Q}$, és clar que ω és també un espai de Fréchet separable.

Lema A.3.9. *L'espai ω conté un conjunt numerable dens $\{x^{(j)}\}_{j=1}^{\infty} \subset \omega$ tal que per a cada $j \in \mathbb{N}$ el vector $x^{(j)} = \{x_k^{(j)}\}_{k=1}^{\infty}$ compleix $x_k^{(j)} = 0$ si $k > j$.*

Demostració. L'espai ω és separable i per tant existeix un conjunt dens i numerable que podem enumerar $\{y^{(j)}\}_{j=1}^{\infty}$. Per a cada $j \in \mathbb{N}$ considerem el vector $\{x_k^{(j)}\}_{k=1}^{\infty} \in \omega$ amb

$$x_k^{(j)} = \begin{cases} y_k^{(j)}, & \text{si } k \le j, \\ 0, & \text{si } j < k. \end{cases}$$

Llavors la successió $\{x^{(j)}\}_{j=1}^{\infty}$ compleix la condició de l'enunciat i és un conjunt dens, ja que donat $x \in \omega$ i $\varepsilon > 0$ existeix $n \in \mathbb{N}$ amb $3 < 2^n \cdot \varepsilon$, i per ser $\{y^{(j)}\}_{j=1}^{\infty}$ dens existeix $m > n$ amb el vector $y^{(m)} \in B_d(x, \frac{1}{2^n}) \setminus \{y^{(1)}, y^{(2)}, ..., y^{(n)}\}$. Finalment, pel lema A.3.5(a) deduïm

$$d(x, x^{(m)}) \le d(x, y^{(m)}) + d(y^{(m)}, x^{(m)}) < \frac{1}{2^n} + \frac{2}{2^n} < \varepsilon. \qquad \square$$

A la secció 2.1, definim *operador* com una aplicació lineal i continua entre dos F-espais (veure Definició 2.1.2). És convenient que caracteritzem la continuïtat quan l'operador està definit entre dos espais de Fréchet en termes de les semi-normes.

Proposició A.3.10. *Siguen X i Y dos espais de Fréchet amb topologies engendrades per les successions creixents de semi-normes $\{p_n\}_{n=1}^{\infty}$ i $\{q_n\}_{n=1}^{\infty}$ respectivament. Llavors una aplicació lineal $T : X \to Y$ és un operador si i només si per a cada $m \in \mathbb{N}$ existeix $n \in \mathbb{N}$ i $M > 0$ de manera que*

$$q_m(Tx) \leq M p_n(x), \text{ per a tot } x \in X.$$

Demostració. La condició és suficient, ja que si $\{x_k\}_{k=0}^{\infty} \subset X$ convergeix a $x \in X$ llavors per a cada $m \in \mathbb{N}$ es compleix

$$0 \leq \lim_{k\to\infty} q_m(Tx_k - Tx) \leq \lim_{k\to\infty} M p_n(x_k - x) = 0,$$

i pel lema A.3.5 $\{Tx_k\}_{k=0}^{\infty}$ convergeix a $Tx \in Y$. Per contra, donat $m \in \mathbb{N}$ el lema A.3.5 ens assegura que $V = \{y \in Y : q_m(y) < 1\}$ és un entorn del $0 \in Y$ i per continuïtat existeix un entorn U del $0 \in X$ complint $T(U) \subset V$. De nou pel lema A.3.5, existeix $n \in \mathbb{N}$ i $\varepsilon > 0$ complint que $p_n(x) < \varepsilon$ implica $x \in U$, i per tant, $q_m(Tx) < 1$. Si prenem ara qualsevol $x \in X$ i $\delta > 0$ tenim

$$p_n\left(\frac{\varepsilon}{p_n(x)+\delta}x\right) < \varepsilon,$$

d'on obtenim

$$q_m(Tx) < \frac{p_n(x)+\delta}{\varepsilon}.$$

L'arbitrarietat de $\delta > 0$ implica $q_m(Tx) \leq M p_n(x)$ amb $M = 1/\varepsilon$ per a tot $x \in X$. □

Exemple A.3.11. A partir dels exemples d'espais de Fréchet que hem introduït podem exposar alguns exemples d'operadors:

(a) Donat $a \in \mathbb{C}$ amb $a \neq 0$, l'aplicació

$$T_a : H(\mathbb{C}) \to H(\mathbb{C}),$$

que porta cada funció $f(z) \in H(\mathbb{C})$ a la traslladada $T_a f(z) = f(z+a) \in H(\mathbb{C})$ està ben definida i és lineal. Si prenem $M \in \mathbb{N}$ amb $M > |a|$, deduïm que T_a és un operador ja que

$$p_n(T_a f) = \sup_{|z|\leq n} |f(z+a)| \leq \sup_{|z|\leq M+n} |f(z)| = p_{M+n}(f), \text{ per a cada } f \in H(\mathbb{C}).$$

Aquest és l'*operador de Birkhoff* [11], introduït en 1922.

(b) L'aplicació

$$D : H(\mathbb{C}) \to H(\mathbb{C}),$$

que porta cada funció $f \in H(\mathbb{C})$ a la seua derivada $Df = f' \in H(\mathbb{C})$ està ben definida perquè tota funció holomorfa és de classe $\mathscr{C}^{\infty}$. És clar que D és lineal i les acotacions de Cauchy per a les derivades d'una funció holomorfa justifiquen que D siga un operador, ja que per a cada $n \in \mathbb{N}$ es compleix

$$p_n(Df) = \sup_{|z|\leq n} |f'(z)| \leq \sup_{|z|\leq n+1} |f(z)| = p_{n+1}(f), \text{ per a cada } f \in H(\mathbb{C}).$$

Aquest és l'*operador de MacLane* [44], introduït en 1952.

(c) Siga $1 \leq p < \infty$, llavors podem considerar els espais de Banach $X = \ell^p$, c_0 (Exemple A.2.5(a)) o bé l'espai de Fréchet ω. L'*operador desplaçament cap arrere* $B : X \to X$ es defineix com

$$B(x_1, x_2, x_3, ...) = (x_2, x_3, x_4, ...),$$

i de nou és immediat comprovar que B és un operador ja que $\|Bx\|_p \leq \|x\|_p$ per a cada $x \in \ell^p$, $\|Bx\|_\infty \leq \|x\|_\infty$ per a cada $x \in c_0$, i també donat $n \in \mathbb{N}$ es compleix

$$p_n(Bx) = \max_{1\leq k\leq n} |x_{k+1}| \leq \max_{1\leq k\leq n+1} |x_k| = p_{n+1}(x), \text{ per a cada } x = \{x_k\}_{k=1}^{\infty} \in \omega.$$

En 1969 Rolewicz va estudiar sobre els espais ℓ^p i c_0 els operadors $\lambda \cdot B$ per a $\lambda \in \mathbb{K}$ amb $|\lambda| > 1$, demostrant que són hiperciclics [53], els quals van ser anomenats posteriorment com *operadors de Rolewicz*.

(d) Prenent els mateixos espais $(X, \|\cdot\|)$ que a l'apartat anterior, l'*operador desplaçament cap avant* $F : X \to X$ es defineix com

$$F(x_1, x_2, x_3, ...) = (0, x_1, x_2, ...),$$

i de nou és immediat que F és un operador ja que $\|Fx\|_p = \|x\|_p$ per a cada $x \in \ell^p$, també $\|Fx\|_\infty = \|x\|_\infty$ per a cada $x \in c_0$, i donat $n \in \mathbb{N}$ es compleix

$$p_n(Fx) = \max_{2\leq k\leq n} |x_{k-1}| \leq \max_{1\leq k\leq n} |x_k| = p_n(x), \text{ per a cada } x = \{x_k\}_{k=1}^{\infty} \in \omega.$$

Aquest fa el paper d'operador "invers" per la dreta de l'operador desplaçament cap arrere.

A.4 Teoria Ergòdica

Dedicarem aquesta secció a introduir la teoria bàsica que permet parlar de Teoria Ergòdica. En particular, donarem les definicions necessàries per poder comprendre l'enunciat del teorema d'Ergòdic de Birkhoff (Teorema A.4.7). Seguint la teoria desenvolupada en [51], treballarem amb un conjunt no buit X, amb $\mathscr{A}$ una σ-àlgebra sobre X, i μ una mesura de probabilitat definida sobre $\mathscr{A}$, és a dir, la terna $(X, \mathscr{A}, \mu)$ serà un *espai de probabilitat* i $T : X \to X$ serà una aplicació mesurable. Encara que amb aquestes condicions el parell (X, T) no és necessàriament un sistema dinàmic respecte de la definició 1.1.1, emprarem la mateixa notació introduïda a la secció 1.1 per a l'òrbita i l'evaluació d'un punt respecte de T.

Donada una propietat $\mathcal{P}$ dels punts del conjunt X, direm que es compleix *quasi per a tot punt* i ho denotarem per *q.t.p.* , si es compleix en tots els punts de X excepte en un subconjunt μ-nul. Per a definicions bàsiques sobre teoria de la mesura es pot consultar [16].

El primer ingredient bàsic de la Teoria Ergòdica és la invariància o conservació de la mesura per part d'una aplicació (o transformació) del conjunt X.

Definició A.4.1. Siguen $(X, \mathscr{A}, \mu)$ un espai de probabilitat i $T : X \to X$ una aplicació mesurable. Direm que T *conserva la mesura* μ, o simplement que T és *μ-invariant*, si per a tot $A \in \mathscr{A}$ es compleix

$$\mu(A) = \mu\left(T^{-1}(A)\right).$$

Una conseqüència de la μ-invariància d'una aplicació és el teorema de Recurrència de Poincaré: quasi per a tot punt, l'òrbita d'aquest torna al conjunt de partida.

Teorema A.4.2 (Teorema de Recurrència de Poincaré). *Siguen $(X, \mathscr{A}, \mu)$ un espai de probabilitat, $T : X \to X$ una aplicació μ-invariant i $A \in \mathscr{A}$ amb $\mu(A) > 0$. Llavors es compleix $\{T^n x : n \in \mathbb{N}\} \cap A \neq \emptyset$ quasi per a tot punt de A (excepte per a un subconjunt μ-nul de A).*

Demostració. Siga $F = \{x \in A : T^n x \notin A, \text{ per a tot } n \geq 1\} = A \setminus \left(\bigcup_{n\geq 1} T^{-n}(A)\right) \in \mathscr{A}$, i comprovem que és un conjunt nul. Donats $n, m \in \mathbb{N}$ amb $n > m \geq 0$ tenim $T^{-n}(F) \cap T^{-m}(F) = \emptyset$ ja que en cas contrari existeix $w \in T^{-n}(F) \cap T^{-m}(F)$, i llavors $T^m w \in F \subset A$ i $T^{n-m} T^m w \in F \subset A$ contradient la definició de F.

Per tant, com els conjunts $\{T^{-n}(F)\}_{n=0}^{\infty}$ són disjunts dos a dos tenim

$$\sum_{n=0}^{\infty} \mu\left(T^{-n}(F)\right) = \mu\left(\bigcup_{n=0}^{\infty} T^{-n}(F)\right) \leq \mu(X) = 1.$$

Com T és μ-invariant es compleix $\mu(F) = \mu\left(T^{-n}(F)\right)$ per a tot $n \in \mathbb{N}$ i deduïm $\mu(F) = 0$. □

Tal com s'exposa en [23, Introducció, Secció 4], l'anterior resultat és un dels primers teoremes que estudien la recurrència en sistemes dinàmics, ja que va ser discutit per Poincaré en 1890 i demostrat per Carathéodory emprant la teoria de la mesura en 1919.

El segon primer ingredient que necessitem de la Teoria Ergòdica és la propietat que va donar nom a aquesta teoria: l'ergodicitat. Aquesta propietat ens diu que els conjunts invariants per la transformació T, o bé són nuls, o bé és el total excepte un nul.

Definició A.4.3. Siguen $(X, \mathscr{A}, \mu)$ un espai de probabilitat i $T : X \to X$ una aplicació μ-invariant. Direm que T és *ergòdica respecte de la mesura* μ, o simplement que T és *μ-ergòdica* si

$$\text{per a cada } A \in \mathscr{A} \text{ amb } A = T^{-1}(A), \text{ llavors } \mu(A) \in \{0, 1\}.$$

Proposició A.4.4. *Siga $(X, \mathscr{A}, \mu)$ un espai de probabilitat i $T : X \to X$ una aplicació μ-invariant. Les següents afirmacions són equivalents:*

(i) *T es μ-ergòdica;*

(ii) *per a cada $A \in \mathscr{A}$ amb $\mu(T^{-1}(A) \triangle A) = 0$, llavors $\mu(A) \in \{0, 1\}$;*

(iii) *per a tot parell $A, B \in \mathscr{A}$ amb $\mu(A) > 0$ i $\mu(B) > 0$ existeix $n \in \mathbb{N}_0$ amb $\mu(T^{-n}(A) \cap B) > 0$.*

Demostració. (i) $\Longrightarrow$ (ii) Siga $A \in \mathscr{A}$ amb $\mu\left(T^{-1}(A) \triangle A\right) = 0$. Hem de comprovar $\mu(A) \in \{0, 1\}$. Per inducció sobre $k \in \mathbb{N}$ tenim $\mu\left(T^{-k}(A) \triangle A\right) = 0$. En efecte, si suposem cert per a k i denotem

$$B_k := T^{-k}(A) \setminus A = T^{-k}(A) \cap (X \setminus A), \qquad C_k := A \setminus T^{-k}(A),$$

tenim $T^{-k}(A) = B_k \cup (A \setminus C_k)$ i per hipòtesi inductiva $0 = \mu\left(T^{-k}(A) \triangle A\right) = \mu(B_k) + \mu(C_k)$ d'on B_k i C_k són conjunts μ-nuls. A més,

$$T^{-(k+1)}(A) = T^{-1}\left(T^{-k}(A)\right) = T^{-1}\Big(B_k \cup (A \setminus C_k)\Big) = T^{-1}(B_k) \cup \left(T^{-1}(A) \setminus T^{-1}(C_k)\right),$$

i per ser μ-invariant sabem que $T^{-1}(B_k)$ i $T^{-1}(C_k)$ són conjunts nuls i aleshores

$$\mu\left(T^{-(k+1)}(A) \triangle T^{-1}(A)\right) = 0.$$

Junt a $\mu\left(T^{-1}(A) \triangle A\right) = 0$ obtenim $\mu\left(T^{-(k+1)}(A) \triangle A\right) = 0$ finalitzant la inducció.

Prenem ara el conjunt

$$U := \left\{x \in X : \{k \geq 1 : T^k x \in A\} \text{ és infinit}\right\} = \bigcap_{n=1}^{\infty} \left(\bigcup_{k=n}^{\infty} T^{-k}(A) \right),$$

que compleix $U = T^{-1}(U)$ ja que

$$\begin{aligned}
\bigcap_{n=1}^{\infty} \left(\bigcup_{k=n}^{\infty} T^{-k}(A) \right) &= \bigcap_{n=2}^{\infty} \left(\bigcup_{k=n}^{\infty} T^{-k}(A) \right) = \bigcap_{n=2}^{\infty} \left(\bigcup_{k=n}^{\infty} T^{-1}\left(T^{-k+1}(A)\right) \right) = T^{-1}\left(\bigcap_{n=2}^{\infty} \left(\bigcup_{k=n}^{\infty} T^{-k+1}(A) \right) \right) \\
&= T^{-1}\left(\bigcap_{n=2}^{\infty} \left(\bigcup_{k=n-1}^{\infty} T^{-k}(A) \right) \right) = T^{-1}\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} \left(\bigcup_{k=n}^{\infty} T^{-k}(A) \right) \right).
\end{aligned}$$

Per (i) sabem que $\mu(U) \in \{0, 1\}$ i també:

- donat $x \in U \setminus A$, llavors existeix $k \in \mathbb{N}$ complint $x \in T^{-k}(A) \setminus A$;
- si $x \in A \setminus U$, llavors existeix $k \in \mathbb{N}$ complint $x \notin T^{-k}(A)$, és a dir, $x \in A \setminus T^{-k}(A)$.

Deduïm $A \triangle U \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} \left(T^{-k}(A) \triangle A\right)$, que és unió numerable de conjunts nuls. Finalment tenim $\mu(A \triangle U) = 0$, i per tant, $\mu(A) = \mu(U) \in \{0, 1\}$.

(ii) $\Longrightarrow$ (iii) Suposem $A, B \in \mathscr{A}$ amb $\mu(A) > 0$ i $\mu(B) > 0$ de manera que per a tot $n \in \mathbb{N}_0$ tenim $\mu\left(T^{-n}(A) \cap B\right) = 0$. Prenem el conjunt $U := \bigcup_{n=0}^{\infty} T^{-n}(A)$. Llavors

$$\begin{aligned}
\mu\left(T^{-1}(U) \triangle U\right) &= \mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} T^{-n}(A) \triangle \bigcup_{n=0}^{\infty} T^{-n}(A) \right) = \mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} T^{-n}(A) \triangle \left(A \cup \bigcup_{n=1}^{\infty} T^{-n}(A) \right) \right) \\
&= \mu\left(A \setminus \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} T^{-n}(A) \right) \right) = \mu\left(\{x \in A : T^n x \notin A, \text{ per a tot } n \geq 1\}\right) = 0,
\end{aligned}$$

on l'última igualtat és el teorema A.4.2. Per (ii) tenim $\mu(U) \in \{0, 1\}$, i com $A \subset U$ i $\mu(A) > 0$, llavors $\mu(U) = 1$. Aleshores $\mu(X \setminus U) = 0$ i també tenim

$$\mu(U \cap B) = \mu\left(\bigcup_{n=0}^{\infty} (T^{-n}(A) \cap B) \right) = 0.$$

Arribem a la contradicció

$$0 < \mu(B) = \mu(B \cap U) + \mu(B \cap (X \setminus U)) = 0.$$

(iii) $\Longrightarrow$ (i) Si no és així, existeix $A \in \mathscr{A}$ amb $A = T^{-1}(A)$, però, $0 < \mu(A) < 1$. Prenent $B := X \setminus A$ obtenim $0 < \mu(B) = 1 - \mu(A) < 1$. Donat $n \in \mathbb{N}_0$ es compleix $A = T^{-n}(A)$, i per tant, $T^{-n}(A) \cap B = \emptyset$. Llavors per a tot $n \in \mathbb{N}_0$ tenim $\mu\left(T^{-n}(A) \cap B\right) = 0$ contradient (iii). □

Nota A.4.5. Suposem que $(X, \mathscr{A}, \mu)$ és un espai de probabilitat, i que $T : X \to X$ és un sistema dinàmic (Definició 1.1.1). La continuïtat de T implica que és una aplicació mesurable. Així com la transitivitat topològica pot interpretar-se dient que T connecta totes les parts no trivials de X (veure Proposició 1.2.3) entenent que els oberts de l'espai són les "part no trivials", l'ergodicitat por interpretar-se com la "irreductibilitat" del sistema dinàmic respecte de la mesura μ, és a dir, entenent que les "parts no trivials" són els conjunts amb mesura positiva. En efecte, si T és μ-ergòdica, per l'equivalència (iii) de la proposició anterior, donat $A \in \mathscr{A}$ amb $\mu(A) > 0$ tenim

$$\text{per a tot } B \in \mathscr{A} \text{ amb } \mu(B) > 0 \text{ existeix } k \in \mathbb{N}_0 \text{ complint } \mu(T^{-k}(A) \cap B) > 0, \text{ i per tant,}$$

$$\text{per a tot } B \in \mathscr{A} \text{ amb } \mu(B) > 0 \text{ tenim } \mu\left(\bigcup_{k=0}^{\infty}(T^{-k}(A) \cap B)\right) > 0.$$

Llavors $A^* = \bigcup_{k=0}^{\infty} T^{-k}(A)$ ha de mesurar 1. En altres paraules, quasi totes les òrbites de l'espai (menys les d'un conjunt μ-nul) cauen en algun moment en el conjunt A.

Baix la situació que (X, T) siga un sistema dinàmic i a més $(X, \mathscr{A}, \mu)$ un espai de probabilitat, pels comentaris anteriors és clar que podem obtenir implicacions entre Dinàmica Topològica i Teoria Ergòdica si tots els oberts de X tenen μ-mesura positiva.

Definició A.4.6. Siga (X, d) un espai mètric. A la menor de les σ-àlgebres que conté tots els oberts de X l'anomenem *σ-àlgebra de Borel* de X i la denotarem per $\mathscr{B}(X)$.

Per altra banda, donada una σ-àlgebra $\mathscr{A} \subset \mathscr{P}(X)$ complint la inclusió $\mathscr{B}(X) \subset \mathscr{A}$, i una mesura de probabilitat $\mu : \mathscr{A} \to \mathbb{R}_+$, direm que μ és una *mesura de suport complet* si per a cada obert $U \subset X$ es compleix $\mu(U) > 0$.

Teorema A.4.7 (Teorema Ergòdic de Birkhoff). *Siguen $(X, \mathscr{A}, \mu)$ un espai de probabilitat, $T : X \to X$ una aplicació μ-ergòdica i $f \in \mathscr{L}^1(X, \mathscr{A}, \mu)$. Llavors es compleix*

$$\lim_{N\to\infty} \frac{1}{N+1} \sum_{n=0}^{N} f(T^n x) = \int_X f \, d\mu, \textit{ quasi per a tot punt } x \in X.$$

Per motius d'extensió no inclourem la prova, la qual pot trobar-se en diverses referències com per exemple [51, Teorema 10.2]. Aquesta secció és merament introductòria a la Teoria Ergòdica amb l'únic objectiu de poder mostrar a la secció 2.5 la motivació de l'aparició del concepte de hiperciclicitat freqüent (veure la pàgina 27). Aquestes idees mostren que existeixen relacions entre la Dinàmica Topològica i la Teoria Ergòdica, baix algunes hipòtesis raonables com que la mesura siga de suport complet (Definició A.4.6), quan apliquem el teorema anterior a *funcions característiques* $\mathbb{1}_A$ on $A \subset X$ és un obert.

Apèndix B

Teoria Combinatòria de Nombres

La Teoria Combinatòria de Nombres juga un paper fonamental quan tractem de generalitzar conceptes com la transitivitat, la hiperciclicitat o la recurrència en termes de famílies de Furstenberg. En aquest segon apèndix reunim definicions, resultats i exemples que ajuden a desenvolupar la resta de treball i que pretenen formar una base de coneixement sòlida a l'hora de treballar amb la $\mathcal{F}$-transitivitat, la $\mathcal{F}$-hiperciclicitat o la $\mathcal{F}$-recurrència.

Hem dedicat una primera secció a introduir alguns conceptes de grandària per a conjunts infinits de nombres naturals (Definició B.1.1) relacionats amb les propietats topològiques i algebraiques de la compactació de Stone-Čech dels naturals $\beta\mathbb{N}_0$. També incloem algunes de les relacions més importants entre aquests tipus de conjunts (Proposició B.1.3) les quals s'han emprat a diverses seccions del treball (veure Seccions 1.5, 1.6, 2.3 i 2.4).

A la segona part de l'apèndix exposem les nocions de densitats asimptòtiques (Definició B.2.1) i densitats de Banach (Definició B.2.6), estudiant les seues propietats fonamentals (veure Proposicions B.2.4 i B.2.8), les quals són de gran utilitat quan parlem de famílies de Furstenberg. Aquestes famílies (Definició B.3.1) seran les protagonistes de l'última secció d'aquest apèndix, on estudiarem els filtres (Definició B.3.6), les famílies de partició regular (Definició B.3.8) i les relacions de dualitat entre aquests conceptes (veure Lema B.3.10).

Abans de començar amb l'apèndix establim la següent notació (emprada en tot el treball): donats $n, m \in \mathbb{Z}$ amb $n \leq m$ i $A \subset \mathbb{N}_0$ escriurem $[n, m] := \{n, n+1, ..., m\}$, $n \cdot A := \{n \cdot x : x \in A\}$, i $A + n := \{x + n : x \in A\}$. També escriurem

$$A + [n, m] := \bigcup_{j=n}^{m} (A + j).$$

Si a més $B \subset \mathbb{N}_0$, denotarem els conjunts:

$$A + B := \{x + y : x \in A, y \in B\}, \text{ i també } A - B := \{x - y : x \in A, y \in B\}.$$

Denotarem el *cardinal* d'un conjunt A per $\mathrm{card}(A)$.

B.1 Els Nombres Naturals

L'operació definida en un semigrup topològic discret $(S, \cdot)$ té una extensió natural, usualment denotada igual, a la compactació de Stone-Čech $\beta S := \{p \subset \mathscr{P}(S) : p \text{ és ultrafiltre de } S\}$, tal com s'exposa en [37, Part I]. Amb aquesta extensió, $(\beta S, \cdot)$ és un semigrup topològic compacte que conté a S en forma d'ultrafiltres principals com a centre (veure [37, Part II]). L'estudi de les propietats algebraiques i topològiques del semigrup $(\beta S, \cdot)$ té aplicacions en diversos camps de les matemàtiques com Teoria de Ramsey, Teoria Combinatòria de Nombres [37, Part III], Teoria Ergòdica i Dinàmica Topològica [37, Part IV].

En particular, si denotem per $\mathbb{N}$ el conjunt de nombres naturals i per $\mathbb{N}_0 := \mathbb{N} \cup \{0\}$ podem considerar el semigrup topològic discret $(\mathbb{N}_0, +)$, on l'operació $+ : \mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0 \to \mathbb{N}_0$ és la suma usual que porta $(n, m) \mapsto n + m$ per a cada $n, m \in \mathbb{N}_0$. Llavors $\beta\mathbb{N}_0 := \{p \subset \mathscr{P}(\mathbb{N}_0) : p \text{ és ultrafiltre de } \mathbb{N}_0\}$ amb l'extensió de l'operació $+ : \beta\mathbb{N}_0 \times \beta\mathbb{N}_0 \to \beta\mathbb{N}_0$ és un semigrup topològic compacte que aporta interessants relacions entre la Teoria Combinatòria de Nombres i la Dinàmica Topològica.

De fet, moltes nocions originades en Dinàmica Topològica com els conjunts *sindètics*, *sindètics a trossos* o els conjunts *IP* són importants per a descriure l'estructura algebraica i topològica de $(\beta\mathbb{N}_0, +)$. Per exemple, un punt p de $\beta\mathbb{N}_0$ està en la clausura del menor ideal de $\beta\mathbb{N}_0$ si i només si tot entorn U de p compleix que $U \cap \mathbb{N}_0$ és sindètic a trossos [37, Teorema 4.40]. També és cert que donat $A \subset \mathbb{N}_0$, aleshores existeix una successió $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathbb{N}_0$ de manera que

$$\left\{ \sum_{n \in F} x_n : F \text{ subconjunt finit de } \mathbb{N} \right\} \subset A,$$

si i només si existeix $p \in \beta\mathbb{N}_0$ idempotent (és a dir $p + p = p$) amb $A \in p$ [37, Teorema 5.12]. Degut a l'extensió d'aquesta teoria, ens reduïm a incloure únicament els conceptes bàsics sobre la grandària dels subconjunts infinits de nombres naturals, així com algunes de les relacions que existeixen entre aquests i que necessitem al treball. Per a un desenvolupament més profund i complet es pot consultar [37]. Comencem per les definicions amb que treballarem.

Definició B.1.1. Siga $A \subset \mathbb{N}_0$. Direm que:

(a) A és un conjunt *gros* (*thick*), si per a cada $m \in \mathbb{N}$ existeix $x \in A$ de manera que $[x, x+m] \subset A$.

(b) A és un conjunt *sindètic* (*syndetic*), si existeix $m \in \mathbb{N}$ de manera que per a tot $x \in \mathbb{N}_0$ es compleix $[x, x+m] \cap A \neq \emptyset$.

(c) A és un conjunt *sindètic a trossos* (*piecewise syndetic*), si existeixen $B, C \subset \mathbb{N}_0$ amb $A = B \cap C$ on B és gros i C és sindètic.

(d) A és un conjunt *grossament sindètic* (*thickly syndetic*), si per a cada $m \in \mathbb{N}$ existeix un conjunt sindètic $A_m \subset \mathbb{N}_0$ complint $A_m + [0, m] \subset A$.

(e) A és un conjunt *IP* o un *IP-conjunt* (*IP-set*), si existeix una successió $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathbb{N}_0$ complint

$$\left\{ \sum_{n \in F} x_n : F \text{ subconjunt finit de } \mathbb{N} \right\} \subset A.$$

(f) A és un Δ-*conjunt* (Δ-*set*), si existeix un conjunt infinit $B \subset \mathbb{N}_0$ complint $(B - B) \cap \mathbb{N} \subset A$.

Nota B.1.2. És clar que qualsevol dels conjunts anteriors és de cardinal infinit. Denotarem per

$$\mathcal{I} := \{A \subset \mathbb{N}_0 : A \text{ és infinit}\}.$$

Sobre les definicions anteriors:

(a) Parlant informalment, els conjunts grossos són aquells que contenen "intervals" de nombres naturals de "longitud" arbitràriament llarga. Denotarem la família de conjunts grossos per

$$\mathcal{T} := \{A \subset \mathbb{N}_0 : A \text{ és gros}\}.$$

(b) De manera informal, els conjunts sindètics són aquells que tenen "forats" o "buits" acotats, és a dir, aquells $A \subset \mathbb{N}_0$ de manera que si $\{n_k\}_{k=1}^{\infty}$ és la seqüència estrictament creixent de nombres naturals que formen dit conjunt, llavors

$$\sup_{k \in \mathbb{N}} (n_{k+1} - n_k) < \infty.$$

Denotarem la família de conjunts sindètics per

$$\mathcal{S} := \{A \subset \mathbb{N}_0 : A \text{ és sindètic}\}.$$

(c) De nou parlant informalment, els conjunts sindètics a trossos seran aquells que contenen "intervals" de nombres naturals de "longitud" arbitràriament llarga, però, intersecats amb un conjunt sindètic. En efecte, si $A = B \cap C$ amb B gros i C sindètic, llavors podem trobar $m \in \mathbb{N}$ de manera que $[x, x+m] \cap C \neq \emptyset$ per a tot $x \in \mathbb{N}_0$. Aleshores per a tot $n \in \mathbb{N}$ amb $n > m$ podem trobar $j \in B$ complint $[j, j+n] \subset B$, i per tant, per a cada $x \in [j, j+(n-m)]$ és compleix $[x, x+m] \cap A = [x, x+m] \cap C \neq \emptyset$. Denotarem la família de conjunts sindètics a trossos per

$$\mathcal{PS} := \{A \subset \mathbb{N}_0 : A \text{ és sindètic a trossos}\}.$$

(d) Els grossament sindètics seran els conjunts que contenen a "distància" acotada, "intervals" de cada "longitud" fixada. Denotarem la família de conjunts grossament sindètics per

$$\mathcal{TS} := \{A \subset \mathbb{N}_0 : A \text{ és grossament sindètic}\}.$$

(e) Encara que no els emprarem massa, els IP-conjunts apareixen de forma natural quan estudiem recurrència en un sistema dinàmic, ja que per a tot punt recurrent (Definició 3.1.1) el conjunt de retorn a qualsevol dels seus entorns és un IP [23, Teorema 2.17]. Denotarem la família dels conjunts IP per

$$\mathcal{IP} := \{A \subset \mathbb{N}_0 : A \text{ és un IP-conjunt}\}.$$

(f) Els Δ-conjunts apareixen també en dinàmica (Proposició 2.5.10) i són un important element de la Teoria Combinatòria de Nombres (veure Proposició B.2.10(d)). Denotarem la família dels Δ-conjunts per

$$\Delta := \{A \subset \mathbb{N}_0 : A \text{ és un } \Delta\text{-conjunt}\}.$$

Recollim les relacions bàsiques entre els conceptes anteriors en la següent proposició.

Proposició B.1.3. *Siguen $A, B \subset \mathbb{N}_0$. Es compleixen les següents afirmacions:*

(a) *A és sindètic si i només si $\mathbb{N}_0 \setminus A$ no és gros.*

(b) *A és sindètic a trossos si i només si $\mathbb{N}_0 \setminus A$ no és grossament sindètic.*

(c) *Si A i B són grossament sindètics, llavors $A \cap B$ és grossament sindètic.*

(d) *Si A és grossament sindètic, llavors A és gros i sindètic.*

(e) *Si A és gros o sindètic, llavors A és sindètic a trossos.*

(f) *Si A és gros, llavors A és un IP-conjunt.*

(g) *Si A és un IP-conjunt, llavors A és un Δ-conjunt.*

Demostració. (a) A és sindètic si i només si existeix $m \in \mathbb{N}$ de manera que per a tot $x \in \mathbb{N}_0$ es compleix $[x, x+m] \cap A \neq \emptyset$, i per tant, si i només si existeix $m \in \mathbb{N}$ amb $[x, x+m] \not\subseteq A \setminus \mathbb{N}_0$ per a tot $x \in \mathbb{N}_0$, és a dir, si i només si $A \setminus \mathbb{N}_0$ no és gros.

(b) A és sindètic a trossos si i només si existeix $m \in \mathbb{N}$ de manera que per a cada $n \in \mathbb{N}$ amb $n > m$, podem trobar $j \in \mathbb{N}$ complint que per a tot $x \in [j, j+(n-m)]$, el conjunt $[x, x+m] \not\subseteq \mathbb{N}_0 \setminus A$ (veure Nota B.1.2(c)), és a dir, si i només si no existeix un conjunt sindètic B_m complint $B_m + [0, m] \subset \mathbb{N}_0 \setminus A$, i per tant, si i només si $\mathbb{N}_0 \setminus A$ no és grossament sindètic.

(c) Donat $m \in \mathbb{N}$ considerem $A_m \subset \mathbb{N}_0$ un conjunt sindètic amb $A_m + [0, m] \subset A$ i fixem $k \in \mathbb{N}$ de manera que $A_m \cap [x, x+k] \neq \emptyset$ per a cada $x \in \mathbb{N}_0$. Considerem també $B_{m+k} \subset \mathbb{N}_0$ un conjunt sindètic amb $B_{m+k} + [0, m+k] \subset B$. Aleshores el conjunt $C_m := A_m \cap (B_{m+k} + [0, k])$ és sindètic i compleix $C_m + [0, m] \subset A \cap B$.

(d) Es dedueix del fet que $A = A \cap \mathbb{N}_0$ i que $\mathbb{N}_0$ és tant gros com sindètic.

(e) Suposem que per a $k \in \mathbb{N}$ tenim construïda una seqüència $\{x_n\}_{n=1}^k \subset \mathbb{N}_0$ complint

$$\left\{ \sum_{n \in F} x_n : F \subset \{1, ..., k\} \right\} \subset A.$$

Aleshores triem un element $x_{k+1} \in A$ complint que $[x_{k+1}, x_{k+1} + \sum_{n=1}^k x_n] \subset A$ i es compleix

$$\left\{ \sum_{n \in F} x_n : F \subset \{1, ..., k+1\} \right\} \subset A.$$

De manera recursiva obtenim una successió $\{x_n\}_{n=1}^\infty$ que garanteix que A és un IP-conjunt.

(f) Siga $\{x_n\}_{n=1}^\infty \subset \mathbb{N}_0$ una successió complint

$$\left\{ \sum_{n \in F} x_n : F \text{ subconjunt finit de } \mathbb{N} \right\} \subset A,$$

i prenem el conjunt

$$B := \left\{ \sum_{n=1}^k x_n : k \in \mathbb{N} \right\} \subset A.$$

Aleshores és clar que

$$(B - B) \cap \mathbb{N} \subset \left\{ \sum_{n \in F} x_n : F \text{ subconjunt finit de } \mathbb{N} \right\} \subset A. \qquad \square$$

B.2 Densitats

En el cos del treball emprem diversos conceptes de grandària per als subconjunts dels nombres naturals. A la secció anterior aquestes nocions estaven extretes de la teoria de les propietats algebraiques i topològiques del semigrup $(\beta\mathbb{N}_0, +)$. Una altra forma de "mesurar" la grandària d'un conjunt de nombres naturals és emprant les densitats.

El concepte de densitat ha jugat un paper fonamental en el desenvolupament de la Teoria Probabilística, Additiva i Combinatòria de Nombres, i en certes àrees de l'anàlisi i la Teoria Ergòdica.

Una de les raons és que les densitats proporcionen una alternativa efectiva a les mesures quan es tracta d'estudiar la relació entre "l'estructura" d'un conjunt d'enters o naturals, i algun tipus d'informació sobre "l'amplitud" de dit conjunt. Les més habituals són les *densitats asimptòtiques* i les *densitats de Banach*. Aquestes les que hem usat al treball i incloem ací les seues definicions, algunes equivalències i la prova dels resultats elementals que hem necessitat de manera necessària en capítols anteriors. Comencem per les *densitats asimptòtiques*.

Definició B.2.1. Siga $A \subset \mathbb{N}_0$. Definim la *densitat asimptòtica inferior* o simplement *densitat inferior* del conjunt A com

$$\underline{\operatorname{dens}}(A) := \liminf_{N\to\infty} \frac{\operatorname{card}(A \cap [0,N])}{N+1}.$$

Definim la *densitat asimptòtica superior* o simplement *densitat superior* del conjunt A com

$$\overline{\operatorname{dens}}(A) := \limsup_{N\to\infty} \frac{\operatorname{card}(A \cap [0,N])}{N+1}.$$

Si es compleix la igualtat $\underline{\operatorname{dens}}(A) = \overline{\operatorname{dens}}(A)$ direm que $\operatorname{dens}(A) := \underline{\operatorname{dens}}(A) = \overline{\operatorname{dens}}(A)$ és la *densitat asimptòtica* o simplement la *densitat* del conjunt A.

Nota B.2.2. És clar que per a cada conjunt $A \subset \mathbb{N}_0$ es compleix

$$0 \leq \underline{\operatorname{dens}}(A) \leq \overline{\operatorname{dens}}(A) \leq 1.$$

A més, en la definició anterior la igualtat $\underline{\operatorname{dens}}(A) = \overline{\operatorname{dens}}(A)$ implica l'existència del límit

$$\lim_{N\to\infty} \frac{\operatorname{card}(A \cap [0,N])}{N+1},$$

i en aquest cas és exactament igual a $\operatorname{dens}(A)$. Per altra banda, sempre es compleix la igualtat $\underline{\operatorname{dens}}(A) + \overline{\operatorname{dens}}(\mathbb{N}_0 \setminus A) = 1$. En efecte

$$\begin{aligned} \underline{\operatorname{dens}}(A) &= \liminf_{N\to\infty} \frac{\operatorname{card}(A \cap [0,N])}{N+1} = \liminf_{N\to\infty} \left(1 - \frac{\operatorname{card}((\mathbb{N}_0 \setminus A) \cap [0,N])}{N+1}\right) \\ &= 1 - \limsup_{N\to\infty} \frac{\operatorname{card}((\mathbb{N}_0 \setminus A) \cap [0,N])}{N+1} = 1 - \underline{\operatorname{dens}}(\mathbb{N}_0 \setminus A). \end{aligned}$$

A l'hora de calcular les densitats d'un conjunt $A \subset \mathbb{N}_0$, si aquest és finit llavors és clar que la seua densitat existeix, és nul·la i a més a més el seu complementari és cofinit i té densitat igual a 1, la màxima possible. En general, per a un conjunt A infinit existeix una manera alternativa a la definició de calcular les seues densitats asimptòtiques.

Teorema B.2.3 (**[48, Teorema 11.1]**). *Siguen $A \subset \mathbb{N}_0$ un conjunt infinit i $\{n_k\}_{k=1}^{\infty}$ la seqüència estrictament creixent de nombres naturals que formen el conjunt A. Llavors es compleixen les igualtats*

$$\underline{\operatorname{dens}}(A) = \liminf_{k\to\infty} \frac{k}{n_k}, \quad \overline{\operatorname{dens}}(A) = \limsup_{k\to\infty} \frac{k}{n_k}.$$

Si ambdós límits existeixen i són iguals, aleshores

$$\operatorname{dens}(A) = \lim_{k\to\infty} \frac{k}{n_k}.$$

Demostració. Donat $k \in \mathbb{N}$ amb $0 < n_k \leq N < n_{k+1}$, llavors

$$\frac{k}{n_{k+1}} \leq \frac{\operatorname{card}(A \cap [0, N])}{N+1} < \frac{k}{n_k}.$$

El resultat s'obté prenent límits, primer inferiors i després superiors, a les desigualtats de l'equació anterior i emprant el criteri de l'entrepà. □

Aquestes equivalències ens permeten demostrar de manera ràpida algunes de les següents propietats, ben conegudes, de dites densitats asimptòtiques.

Proposició B.2.4. *Siguen $A, B \subset \mathbb{N}_0$ i $p, q \in \mathbb{N}_0$. Es compleixen les següents afirmacions:*

(a) *Si $A \subset B$, llavors $\overline{\operatorname{dens}}(A) \leq \overline{\operatorname{dens}}(B)$ i també $\underline{\operatorname{dens}}(A) \leq \underline{\operatorname{dens}}(B)$.*

(b) $\overline{\operatorname{dens}}(A \cup B) \leq \overline{\operatorname{dens}}(A) + \overline{\operatorname{dens}}(B)$. *Si $\operatorname{dens}(A \cap B) = 0$, llavors $\underline{\operatorname{dens}}(A) + \underline{\operatorname{dens}}(B) \leq \underline{\operatorname{dens}}(A \cup B)$.*

(c) *Si $\operatorname{dens}(A \triangle B) = 0$, llavors $\overline{\operatorname{dens}}(A) = \overline{\operatorname{dens}}(B)$ i també $\underline{\operatorname{dens}}(A) = \underline{\operatorname{dens}}(B)$.*

(d) *Si $p \geq 1$, llavors $\overline{\operatorname{dens}}(p \cdot A) = \frac{1}{p} \cdot \overline{\operatorname{dens}}(A)$ i també $\underline{\operatorname{dens}}(p \cdot A) = \frac{1}{p} \cdot \underline{\operatorname{dens}}(A)$.*

(e) $\overline{\operatorname{dens}}((A-q) \cap \mathbb{N}_0) = \overline{\operatorname{dens}}(A) = \overline{\operatorname{dens}}(A+q)$ *i també* $\underline{\operatorname{dens}}((A-q) \cap \mathbb{N}_0) = \underline{\operatorname{dens}}(A) = \underline{\operatorname{dens}}(A+q)$.

(f) *Si $\overline{\operatorname{dens}}(A \cup B) > 0$, llavors $\overline{\operatorname{dens}}(A) > 0$ o bé $\overline{\operatorname{dens}}(B) > 0$ o ambdues.*

(g) *Si $\operatorname{dens}((A+p) \cap (A+q)) = 0$, llavors $\overline{\operatorname{dens}}((A+p) \cup (A+q)) = \overline{\operatorname{dens}}(A+p) + \overline{\operatorname{dens}}(A+q)$.*

Demostració. (a) Es dedueix de la definició de les densitats asimptòtiques.

(b) Demostrem sols el cas de la densitat superior ja que l'altre és anàleg:

$$\begin{aligned}
\overline{\operatorname{dens}}(A \cup B) &= \limsup_{N \to \infty} \frac{\operatorname{card}((A \cup B) \cap [0, N])}{N+1} \\
&\leq \limsup_{N \to \infty} \left(\frac{\operatorname{card}(A \cap [0, N])}{N+1} + \frac{\operatorname{card}(B \cap [0, N])}{N+1} \right) \\
&\leq \limsup_{N \to \infty} \left(\frac{\operatorname{card}(A \cap [0, N])}{N+1} \right) + \limsup_{M \to \infty} \left(\frac{\operatorname{card}(A \cap [0, M])}{M+1} \right) \\
&= \overline{\operatorname{dens}}(A) + \overline{\operatorname{dens}}(B).
\end{aligned}$$

(c) De nou, com que els dos casos són anàlegs, demostrem sols el de la densitat superior. Notem que $\operatorname{dens}(A \triangle B) = 0$ implica $\overline{\operatorname{dens}}(A \cup B) = \overline{\operatorname{dens}}(A \cap B)$. En efecte

$$\begin{aligned}
\overline{\operatorname{dens}}(A \cup B) &= \overline{\operatorname{dens}}((A \cap B) \cup (A \triangle B)) \\
&= \limsup_{N \to \infty} \left(\frac{\operatorname{card}((A \cap B) \cap [0, N])}{N+1} + \frac{\operatorname{card}((A \triangle B) \cap [0, N])}{N+1} \right) \\
&= \overline{\operatorname{dens}}(A \cap B).
\end{aligned}$$

Com que $A \cap B \subset A, B \subset A \cup B$, emprant (a) obtenim $\overline{\operatorname{dens}}(A) = \overline{\operatorname{dens}}(B)$.

(d) Si A és finit el resultat és clar. Suposem que A és infinit i siga $\{n_k\}_{k=1}^{\infty}$ la seqüència estrictament creixent de nombres naturals que formen el conjunt A, llavors $p \cdot A = \{p \cdot n_k\}_{k=1}^{\infty}$ i pel teorema B.2.3 tenim

$$\overline{\mathrm{dens}}(A) = \limsup_{k\to\infty} \frac{k}{p \cdot n_k} = \frac{1}{p} \cdot \overline{\mathrm{dens}}(A), \quad \underline{\mathrm{dens}}(p \cdot A) = \liminf_{k\to\infty} \frac{k}{p \cdot n_k} = \frac{1}{p} \cdot \underline{\mathrm{dens}}(A).$$

(e) De nou Si A és finit el resultat és clar. Podem suposar $\{n_k\}_{k=1}^{\infty}$ és la seqüència estrictament creixent que forma el conjunt A. Tenim que $A+q = \{n_k+q\}_{k=1}^{\infty}$ i $(A-q)\cap\mathbb{N}_0 = \{n_k-q\}_{k=k_0}^{\infty}$ on $k_0 = \min\{k \in \mathbb{N} : n_k \geq q\}$. Llavors pel teorema B.2.3 i abusant de la notació, en el sentit de $\frac{1}{\infty} = 0$, obtenim

$$\begin{aligned}\overline{\mathrm{dens}}(A+q) &= \limsup_{k\to\infty} \frac{k}{n_k+q} = \left(\liminf_{k\to\infty} \frac{n_k+q}{k}\right)^{-1} \\ &= \left(\liminf_{k\to\infty} \frac{n_k}{k}\right)^{-1} = \limsup_{k\to\infty} \frac{k}{n_k} = \overline{\mathrm{dens}}(A),\end{aligned}$$

i per altra banda

$$\begin{aligned}\overline{\mathrm{dens}}((A-q)\cap\mathbb{N}_0) &= \limsup_{k\to\infty} \frac{(k-k_0)+1}{n_k-q} = \limsup_{k\to\infty} \frac{k}{n_k-q} \\ &= \left(\liminf_{k\to\infty} \frac{n_k-q}{k}\right)^{-1} = \left(\liminf_{k\to\infty} \frac{n_k}{k}\right)^{-1} = \limsup_{k\to\infty} \frac{k}{n_k} = \overline{\mathrm{dens}}(A).\end{aligned}$$

El cas de la densitat inferior és completament simètric.

(f) Es dedueix de l'apartat (b) ja que si $\overline{\mathrm{dens}}(A) = 0 = \overline{\mathrm{dens}}(B)$ aleshores

$$0 \leq \overline{\mathrm{dens}}(A \cup B) \leq \overline{\mathrm{dens}}(A) + \overline{\mathrm{dens}}(B) = 0.$$

(g) Sense pèrdua de generalitat podem suposar $q < p$. Emprant l'apartat (b) obtenim la desigualtat $\overline{\mathrm{dens}}((A+p)\cup(A+q)) \leq \overline{\mathrm{dens}}(A+p) + \overline{\mathrm{dens}}(A+q)$. A més, de l'apartat (e) sabem que $\overline{\mathrm{dens}}(A+p) = \overline{\mathrm{dens}}(A) = \overline{\mathrm{dens}}(A+q)$ i llavors existeix una successió estrictament creixent de naturals $\{N_k\}_{k=1}^{\infty}$ de manera que

$$\overline{\mathrm{dens}}(p+A) = \lim_{k\to\infty} \frac{\mathrm{card}((A+p)\cap[0,N_k])}{N_k+1}.$$

Per a cada $k \in \mathbb{N}$ es compleix $\mathrm{card}((A+p)\cap[0,N_k]) \leq \mathrm{card}((A+q)\cap[0,N_k])$ i amb la mateixa successió obtenim

$$\begin{aligned}\overline{\mathrm{dens}}(A+q) &\geq \limsup_{k\to\infty} \frac{\mathrm{card}((A+q)\cap[0,N_k])}{N_k+1} \geq \liminf_{k\to\infty} \frac{\mathrm{card}((A+q)\cap[0,N_k])}{N_k+1} \\ &\geq \liminf_{k\to\infty} \frac{\mathrm{card}((A+p)\cap[0,N_k])}{N_k+1} = \overline{\mathrm{dens}}(A+p) = \overline{\mathrm{dens}}(A+q).\end{aligned}$$

Per tant, com que el límit inferior i superior són iguals, el límit superior de l'equació anterior es pot canviar per un límit. Finalment

$$\begin{aligned}\overline{\mathrm{dens}}((A+p)\cup(A+q)) &\geq \limsup_{k\to\infty}\frac{\mathrm{card}(((A+p)\cup(A+q))\cap[0,N_k])}{N_k+1}\\ &= \limsup_{k\to\infty}\left(\frac{\mathrm{card}((A+p)\cap[0,N_k])}{N_k+1}+\frac{\mathrm{card}((A+q)\cap[0,N_k])}{N_k+1}\right.\\ &\quad\left.-\frac{\mathrm{card}((A+p)\cap(A+q)\cap[0,N_k])}{N_k+1}\right)\\ &= \overline{\mathrm{dens}}(p+A)+\overline{\mathrm{dens}}(q+A).\end{aligned}$$

□

Nota B.2.5. Cal remarcar la propietat (g) de la proposició anterior, ja que encara que la densitat superior no és additiva, sí que ho és per a translacions d'un conjunt fixat. A més, podem generalitzar la propietat a una quantitat finita de translacions sempre que assegurem interseccions dos a dos amb densitat 0, és a dir: donat $A\subset\mathbb{N}_0$ i una seqüència finita $\{p_n\}_{n=1}^k\subset\mathbb{N}_0$ complint la igualtat $\mathrm{dens}((A+p_n)\cap(A+p_l))=0$ per a cada $1\leq n<l\leq k$, aleshores, repetint la demostració de la propietat original però emprant el principi d'inclusió-exclusió s'obté

$$\overline{\mathrm{dens}}\left(\bigcup_{n=1}^k A+p_n\right)=\sum_{n=1}^k\overline{\mathrm{dens}}(A+p_n)=k\cdot\overline{\mathrm{dens}}(A).$$

Ara és el torn de les *densitats de Banach*. Igual que a les densitats asimptòtiques donarem la seua definició, algunes equivalències i comprovarem que les propietats de la proposició B.2.4 es compleixen de manera anàloga per a aquest nou concepte de densitat.

Definició B.2.6. Siga $A\subset\mathbb{N}_0$. Definim la *densitat de Banach inferior* del conjunt A com

$$\underline{\mathrm{Bd}}(A):=\liminf_{N\to\infty}\left(\inf_{m\geq 0}\frac{\mathrm{card}(A\cap[m,m+N])}{N+1}\right).$$

Definim la *densitat de Banach superior* del conjunt A com

$$\overline{\mathrm{Bd}}(A):=\limsup_{N\to\infty}\left(\sup_{m\geq 0}\frac{\mathrm{card}(A\cap[m,m+N])}{N+1}\right).$$

Si es compleix la igualtat $\underline{\mathrm{Bd}}(A)=\overline{\mathrm{Bd}}(A)$ direm que $\mathrm{Bd}(A):=\underline{\mathrm{Bd}}(A)=\overline{\mathrm{Bd}}(A)$ és la *densitat de Banach* del conjunt A.

Com veurem aquestes tenen un comportament molt paregut a les densitats asimptòtiques. En primer lloc, per a cada conjunt $A\subset\mathbb{N}_0$ es compleix $0\leq\underline{\mathrm{Bd}}(A)\leq\overline{\mathrm{Bd}}(A)\leq 1$ i a més, si A és finit la seua densitat existeix, és nul·la i el seu complementari és cofinit amb densitat 1. Per altra banda, existeix una clara relació entre aquestes densitats i les estudiades anteriorment ja que les desigualtats

$$\inf_{m\geq 0}\frac{\mathrm{card}(A\cap[m,m+N])}{N+1}\leq\frac{\mathrm{card}(A\cap[0,N])}{N+1}\leq\sup_{m\geq 0}\frac{\mathrm{card}(A\cap[m,m+N])}{N+1},$$

impliquen

$$0\leq\underline{\mathrm{Bd}}(A)\leq\underline{\mathrm{dens}}(A)\leq\overline{\mathrm{dens}}(A)\leq\overline{\mathrm{Bd}}(A)\leq 1, \tag{B.1}$$

per a tot $A\subset\mathbb{N}_0$.

Nota B.2.7. En la definició de densitat de Banach inferior i superior podem canviar l'ínfim i el suprem per un mínim i un màxim respectivament. A més, es pot demostrar que els límits inferiors i superiors són en aquest cas límits obtenint les fórmules alternatives:

$$\begin{aligned}\underline{\mathrm{Bd}}(A) &= \lim_{N\to\infty}\left(\inf_{m\geq 0}\frac{\mathrm{card}(A\cap[m,m+N])}{N+1}\right) = \lim_{N\to\infty}\left(\min_{m\geq 0}\frac{\mathrm{card}(A\cap[m,m+N])}{N+1}\right)\\ &= \lim_{N\to\infty}\left(\liminf_{m\to\infty}\frac{\mathrm{card}(A\cap[m,m+N])}{N+1}\right),\end{aligned} \tag{B.2}$$

i per a la densitat de Banach superior

$$\begin{aligned}\overline{\mathrm{Bd}}(A) &= \lim_{N\to\infty}\left(\sup_{m\geq 0}\frac{\mathrm{card}(A\cap[m,m+N])}{N+1}\right) = \lim_{N\to\infty}\left(\max_{m\geq 0}\frac{\mathrm{card}(A\cap[m,m+N])}{N+1}\right)\\ &= \lim_{N\to\infty}\left(\limsup_{m\to\infty}\frac{\mathrm{card}(A\cap[m,m+N])}{N+1}\right).\end{aligned} \tag{B.3}$$

Aquests resultats són coneguts i per motius d'extensió no inclourem la prova. Una demostració pot trobar-se en [29], article completament dedicat a establir les igualtats prèvies de manera simple.

Emprant les versions amb límits, mínims i màxims de les densitats de Banach, és clar que la igualtat $\underline{\mathrm{Bd}}(A) = \overline{\mathrm{Bd}}(A)$ implica l'existència del límit

$$\lim_{N\to\infty}\frac{\mathrm{card}(A\cap[m_N,m_N+N])}{N+1},$$

per a qualsevol successió arbitrària $\{m_N\}_{N=0}^{\infty}\subset\mathbb{N}_0$, i per tant en aquest cas el límit anterior coincideix amb $\mathrm{Bd}(A) = \mathrm{dens}(A)$. També és rutinari comprovar la igualtat $\underline{\mathrm{Bd}}(A)+\overline{\mathrm{Bd}}(\mathbb{N}_0\setminus A) = 1$. Veiem ara la proposició B.2.4 adaptada a les densitats de Banach.

Proposició B.2.8. *Siguen $A,B\subset\mathbb{N}_0$ i $p,q\in\mathbb{N}_0$. Es compleixen les següents afirmacions:*

(a) *Si $A\subset B$, llavors $\overline{\mathrm{Bd}}(A)\leq\overline{\mathrm{Bd}}(B)$ i també $\underline{\mathrm{Bd}}(A)\leq\underline{\mathrm{Bd}}(B)$.*

(b) *$\overline{\mathrm{Bd}}(A\cup B)\leq\overline{\mathrm{Bd}}(A)+\overline{\mathrm{Bd}}(B)$. Si $\mathrm{Bd}(A\cap B)=0$, llavors $\underline{\mathrm{Bd}}(A)+\underline{\mathrm{Bd}}(B)\leq\underline{\mathrm{Bd}}(A\cup B)$.*

(c) *Si $\mathrm{Bd}(A\triangle B)=0$, llavors $\overline{\mathrm{Bd}}(A)=\overline{\mathrm{Bd}}(B)$ i també $\underline{\mathrm{Bd}}(A)=\underline{\mathrm{Bd}}(B)$.*

(d) *Si $p\geq 1$, llavors $\overline{\mathrm{Bd}}(p\cdot A)=\frac{1}{p}\cdot\overline{\mathrm{Bd}}(A)$ i també $\underline{\mathrm{Bd}}(p\cdot A)=\frac{1}{p}\cdot\underline{\mathrm{Bd}}(A)$.*

(e) *$\overline{\mathrm{Bd}}((A-q)\cap\mathbb{N}_0)=\overline{\mathrm{Bd}}(A)=\overline{\mathrm{Bd}}(A+q)$ i també $\underline{\mathrm{Bd}}((A-q)\cap\mathbb{N}_0)=\underline{\mathrm{Bd}}(A)=\underline{\mathrm{Bd}}(A+q)$.*

(f) *Si $\overline{\mathrm{Bd}}(A\cup B)>0$, llavors $\overline{\mathrm{Bd}}(A)>0$ o bé $\overline{\mathrm{Bd}}(B)>0$ o ambdues.*

(g) *Si $\mathrm{Bd}((A+p)\cap(A+q))=0$, llavors $\overline{\mathrm{Bd}}((A+p)\cup(A+q))=\overline{\mathrm{Bd}}(A+p)+\overline{\mathrm{Bd}}(A+p)$.*

Demostració. La demostració és anàloga a la prova de la proposició B.2.4, emprant en cada cas l'expressió adequada de les densitats inferior i superior de Banach exposades en la nota B.2.7. □

Nota B.2.9. Igual que en la nota B.2.5 però en aquest cas per a la densitat de Banach, cal remarcar que la densitat de Banach superior és additiva per a translacions d'un conjunt fixat, és a dir: donat $A\subset\mathbb{N}_0$ i una seqüència finita $\{p_n\}_{n=1}^{k}\subset\mathbb{N}_0$ complint $\mathrm{Bd}((A+p_n)\cap(A+p_l))=0$ per a cada $1\leq n<l\leq k$, aleshores

$$\overline{\mathrm{Bd}}\left(\bigcup_{n=1}^{k}A+p_n\right)=\sum_{n=1}^{k}\overline{\mathrm{Bd}}(A+p_n)=k\cdot\overline{\mathrm{Bd}}(A).$$

Recollim ara algunes relacions entre la densitat i l'estructura d'un conjunt de naturals.

Proposició B.2.10. *Siguen $A, B \subset \mathbb{N}_0$. Es compleixen les següents afirmacions:*

(a) *A és gros si i només si $\overline{\mathrm{Bd}}(A) = 1$. Equivalentment, A és sindètic si i només si $\underline{\mathrm{Bd}}(A) > 0$.*

(b) *Si A és sindètic a trossos, llavors $\overline{\mathrm{Bd}}(A) > 0$.*

(c) *Si $\underline{\mathrm{Bd}}(A) = 1$, llavors A és grossament sindètic.*

(d) *Si $\overline{\mathrm{Bd}}(A) > 0$, llavors $(A - A) \cap \mathbb{N}_0$ és sindètic.*

(e) *Si $\underline{\mathrm{dens}}(A) + \overline{\mathrm{dens}}(B) > 1$, llavors $A \cap B \neq \emptyset$. També si $\underline{\mathrm{Bd}}(A) + \overline{\mathrm{Bd}}(B) > 1$, llavors $A \cap B \neq \emptyset$.*

Demostració. (a) Si A és gros, per a cada $N \in \mathbb{N}$ existeix un $m \in A$ de manera que $[m, m+N] \subset A$ i per tant

$$\overline{\mathrm{Bd}}(A) = \lim_{N\to\infty} \left(\max_{m\geq 0} \frac{\mathrm{card}(A \cap [m, m+N])}{N+1} \right) = 1.$$

Si A és sindètic, llavors existeix $m \in \mathbb{N}$ de manera que per a tot $n \in \mathbb{N}_0$ es compleix que $A \cap [n+1, n+m] \neq \emptyset$, i per tant

$$\begin{aligned}\underline{\mathrm{Bd}}(A) &= \lim_{N\to\infty} \left(\min_{n\geq 0} \frac{\mathrm{card}(A \cap [n, n+N])}{N+1} \right) = \lim_{N\to\infty} \left(\min_{n\geq 0} \frac{\mathrm{card}(A \cap [n, n+(m\cdot N)])}{m\cdot N+1} \right) \\ &\geq \lim_{N\to\infty} \frac{N}{m\cdot N+1} = \frac{1}{m} > 0.\end{aligned}$$

Finalment, si $\overline{\mathrm{Bd}}(A) = 1$ aleshores $\underline{\mathrm{Bd}}(\mathbb{N}_0 \setminus A) = 0$, és a dir, $\mathbb{N}_0 \setminus A$ no és sindètic i A és gros.

(b) Suposem $A = B \cap C$ amb B un conjunt gros i C un conjunt sindètic. Si $m \in \mathbb{N}$ de manera que $C \cap [n+1, n+m] \neq \emptyset$ per a cada $n \in \mathbb{N}_0$, aleshores per a cada $N \in \mathbb{N}$ existeix un $x_N \in B$ complint $[x_N, x_N + (m\cdot N)] \subset B$. Llavors

$$\mathrm{card}(A \cap [x_N, x_N + (m\cdot N)]) = \mathrm{card}(C \cap [x_N, x_N + (m\cdot N)]) \geq N,$$

i per tant obtenim

$$\begin{aligned}\overline{\mathrm{Bd}}(A) &= \lim_{N\to\infty} \left(\max_{n\geq 0} \frac{\mathrm{card}(A \cap [n, n+N])}{N+1} \right) = \lim_{N\to\infty} \left(\max_{n\geq 0} \frac{\mathrm{card}(A \cap [n, n+(m\cdot N)])}{m\cdot N+1} \right) \\ &\geq \lim_{N\to\infty} \frac{\mathrm{card}(A \cap [x_N, x_N + (m\cdot N)])}{m\cdot N+1} \geq \lim_{N\to\infty} \frac{N}{m\cdot N+1} = \frac{1}{m} > 0.\end{aligned}$$

(c) Si $\underline{\mathrm{Bd}}(A) = 1$, aleshores $\overline{\mathrm{Bd}}(\mathbb{N}_0 \setminus A) = 0$ i per l'apartat (c) sabem que $\mathbb{N}_0 \setminus A$ no es sindètic a trossos. Emprant ara la proposició B.1.3(b) deduïm que A és grossament sindètic.

(d) Si $(A - A) \cap \mathbb{N}_0$ no és sindètic, llavors $B = \mathbb{N}_0 \setminus (A - A)$ és un conjunt gros, i per tant és un IP-conjunt i un Δ-conjunt (veure Proposició B.1.3(f)(g)). Aleshores existeix $C = \{x_i\}_{i=1}^{\infty} \subset \mathbb{N}_0$ de manera que $(C - C) \subset B$, és a dir, $(C - C) \cap (A - A) = \emptyset$. Siga $k \in \mathbb{N}$ amb $\overline{\mathrm{Bd}}(A) > 1/k$. Com que $(A + x_i) \cap (A + x_j) = \emptyset$ per a cada $1 \leq i < j \leq k$, per la nota B.2.9 arribem a la contradicció

$$\overline{\mathrm{Bd}}\left(\bigcup_{i=1}^{k} A + x_i \right) = \sum_{i=1}^{k} \overline{\mathrm{Bd}}(A + x_i) = k \cdot \overline{\mathrm{Bd}}(A) > 1.$$

(e) Si $A \cap B = \emptyset$ tenim que $B \subset \mathbb{N}_0 \setminus A$ i arribem a la contradicció

$$1 < \underline{\mathrm{dens}}(A) + \overline{\mathrm{dens}}(B) \leq \underline{\mathrm{dens}}(A) + \overline{\mathrm{dens}}(\mathbb{N}_0 \setminus A) = 1. \qquad \square$$

Nota B.2.11. Seguint [9] denotarem les famílies de conjunts amb densitat positiva per:

$$\overline{\mathcal{D}} := \{A \subset \mathbb{N}_0 : \overline{\mathrm{dens}}(A) > 0\}, \qquad \underline{\mathcal{D}} := \{A \subset \mathbb{N}_0 : \underline{\mathrm{dens}}(A) > 0\},$$
$$\overline{\mathcal{BD}} := \{A \subset \mathbb{N}_0 : \overline{\mathrm{Bd}}(A) > 0\}, \qquad \underline{\mathcal{BD}} := \{A \subset \mathbb{N}_0 : \underline{\mathrm{Bd}}(A) > 0\}.$$

A més, donat $0 < \delta \leq 1$ denotarem les famílies de conjunts amb densitat major o igual que δ per:

$$\overline{\mathcal{D}}_\delta := \{A \subset \mathbb{N}_0 : \overline{\mathrm{dens}}(A) \geq \delta\}, \qquad \underline{\mathcal{D}}_\delta := \{A \subset \mathbb{N}_0 : \underline{\mathrm{dens}}(A) \geq \delta\},$$
$$\overline{\mathcal{BD}}_\delta := \{A \subset \mathbb{N}_0 : \overline{\mathrm{Bd}}(A) \geq \delta\}, \qquad \underline{\mathcal{BD}}_\delta := \{A \subset \mathbb{N}_0 : \underline{\mathrm{Bd}}(A) \geq \delta\}.$$

Amb l'anterior notació, incloem dos lemes tècnics que emprem en la proposició 2.5.9 i al teorema 3.2.1 respectivament.

Lema B.2.12 (**[8, Proposició 3]**). *Siga $0 < \delta \leq 1$ i $N \in \mathbb{N}$ complint $N > 2/\delta$. Llavors per a cada $A \in \overline{\mathcal{BD}}_\delta$ existeix $n \in \mathbb{N}_0$ de manera que*

$$\mathrm{card}(A \cap [n, n+N]) \geq 2.$$

Demostració. Si és fals, per a tot $n \in \mathbb{N}_0$ tenim $\mathrm{card}(A \cap [n, n+N]) \leq 1$ i arribem a la contradicció

$$\overline{\mathrm{Bd}}(A) = \lim_{K\to\infty} \left(\max_{n\geq 0} \frac{\mathrm{card}(A \cap [n, n+(N\cdot K)])}{N\cdot K+1} \right) \leq \lim_{K\to\infty} \frac{K}{N\cdot K+1} = \frac{1}{N} < \frac{\delta}{2}. \qquad \square$$

Lema B.2.13 (**[8, Teorema 14]**). *Siguen $A, B \subset \mathbb{N}_0$ complint que per a cada $n \in \mathbb{N}_0$ existeix $k_n \in \mathbb{N}_0$ de manera que*

$$(A \cap [0, n]) + k_n \subset B.$$

Llavors $\overline{\mathrm{Bd}}(A) \leq \overline{\mathrm{Bd}}(B)$.

Demostració. Fixat $N \in \mathbb{N}$, existeix $n_N \in \mathbb{N}_0$ de manera que

$$\max_{n\geq 0} \mathrm{card}(A \cap [n, n+N]) = \mathrm{card}(A \cap [n_N, n_N+N]).$$

Prenent $n := n_N + N \in \mathbb{N}_0$, per hipòtesi existeix $k_n \in \mathbb{N}_0$ de manera que $(A \cap [0, n]) + k_n \subset B$, i per tant $(A \cap [n_N, n_N+N]) + k_n \subset B$. Llavors

$$\max_{j\geq 0} \mathrm{card}(B \cap [j, j+N]) \geq \mathrm{card}(A \cap [n_N, n_N+N]),$$

i tenim

$$\overline{\mathrm{Bd}}(B) = \lim_{N\to\infty} \left(\max_{j\geq 0} \frac{\mathrm{card}(B \cap [j, j+N])}{N+1} \right) \geq \lim_{N\to\infty} \left(\max_{j\geq 0} \frac{\mathrm{card}(A \cap [j, j+N])}{N+1} \right) = \overline{\mathrm{Bd}}(A). \qquad \square$$

B.3 Famílies de Furstenberg

Les *famílies de Furstenberg* ens serviran per a generalitzar la *transitivitat topològica*, la *hiperciclicitat* i al *recurrència* en termes de *$\mathcal{F}$-transitivitat*, *$\mathcal{F}$-hiperciclicitat* i *$\mathcal{F}$-recurrència*.

Definició B.3.1. Donada una col·lecció no buida de subconjunts de nombres naturals $\mathcal{F} \subset \mathscr{P}(\mathbb{N}_0)$ direm que $\mathcal{F}$ és una *família de Furstenberg*, o simplement una *família*, si per a tot $A \in \mathcal{F}$ es compleix

(i) A és infinit;

(ii) si $A \subset B \subset \mathbb{N}_0$, llavors $B \in \mathcal{F}$.

Definim la *família dual* de $\mathcal{F}$ com la col·lecció de conjunts

$$\mathcal{F}^* := \{A \subset \mathbb{N}_0 \text{ infinit} : A \cap B \neq \emptyset, \text{ per a tot } B \in \mathcal{F}\}.$$

Nota B.3.2. Donada una família $\mathcal{F}$, si denotem per $\mathcal{F}^{**} := (\mathcal{F}^*)^*$, és compleix la igualtat $\mathcal{F}^{**} = \mathcal{F}$. En efecte, donat $A \in \mathcal{F}$ llavors per a tot $B \in \mathcal{F}^*$ tenim $A \cap B \neq \emptyset$ i per tant $A \in \mathcal{F}^{**}$, d'on deduïm $\mathcal{F} \subset \mathcal{F}^{**}$. Per a la inclusió contraria, donat $A \in \mathcal{F}^{**}$ és clar que $\mathbb{N}_0 \setminus A \notin \mathcal{F}^*$, i per tant existeix $B \in \mathcal{F}$ amb $B \cap (\mathbb{N}_0 \setminus A) = \emptyset$, d'on $B \subset A$ i $A \in \mathcal{F}$.

Aquest fet ens assegura que tota família és una família dual, en particular, la família dual de la seua família dual. Per altra banda, donades dues famílies $\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2$ és evident que la inclusió $\mathcal{F}_1 \subset \mathcal{F}_2$ implica $\mathcal{F}_2^* \subset \mathcal{F}_1^*$

Exemple B.3.3. Recollim les famílies que hem estudiat a les seccions B.1 i B.2:

(a) Per la nota B.1.2 sabem que les col·leccions de conjunts $\mathcal{I}$, $\mathcal{T}$, $\mathcal{S}$, $\mathcal{PS}$, $\mathcal{TS}$, $\mathcal{IP}$ i Δ són les famílies de Furstenberg dels conjunts infinits, grossos, sindètics, sindètics a trossos, grossament sindètics, IP-conjunts i Δ-conjunts respectivament. Per la proposició B.1.3 sabem que $\mathcal{T}^* = \mathcal{S}$, $\mathcal{PS}^* = \mathcal{TS}$, $\mathcal{TS} \subset \mathcal{T} \cap \mathcal{S} \subset \mathcal{PS}$ i també

$$\mathcal{TS} \subset \mathcal{T} \subset \mathcal{IP} \subset \Delta \subset \mathcal{I}.$$

Prenent les inclusions duals i notant que $\mathcal{I}^* = \{A \subset \mathbb{N}_0 : A \text{ és cofinit}\}$ tenim

$$\mathcal{I}^* \subset \Delta^* \subset \mathcal{IP}^* \subset \mathcal{S} \subset \mathcal{PS}.$$

(b) Per la nota B.2.11 i la monotonia de les densitats (Proposicions B.2.4(a) i B.2.8(a)) sabem que les col·leccions de conjunts $\overline{\mathcal{D}}$, $\underline{\mathcal{D}}$, $\overline{\mathcal{BD}}$, $\underline{\mathcal{BD}}$ i per a cada $0 < \delta \leq 1$ les col·leccions $\overline{\mathcal{D}}_\delta$, $\underline{\mathcal{D}}_\delta$, $\overline{\mathcal{BD}}_\delta$, $\underline{\mathcal{BD}}_\delta$ són també famílies de Furstenberg. Per la proposició B.2.10 sabem que $\overline{\mathcal{BD}}_1 = \mathcal{T}$, $\underline{\mathcal{BD}} = \mathcal{S}$, i que es compleixen les inclusions

$$\mathcal{PS} \subset \overline{\mathcal{BD}}, \text{ i també } \underline{\mathcal{BD}}_1 \subset \mathcal{TS}.$$

Per l'apartat B.2.10(e) sabem que

$$\underline{\mathcal{BD}}_1 = \overline{\mathcal{BD}}^*, \quad \underline{\mathcal{D}}_1 = \overline{\mathcal{D}}^*, \quad \overline{\mathcal{D}}_1 = \underline{\mathcal{D}}^*, \quad \overline{\mathcal{BD}}_1 = \underline{\mathcal{BD}}^*. \tag{B.4}$$

Definició B.3.4. Donades dos famílies $\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2$, definim el *producte de $\mathcal{F}_1$ i $\mathcal{F}_2$* com la col·lecció de conjunts

$$\mathcal{F}_1 \cdot \mathcal{F}_2 := \{A \cap B : A \in \mathcal{F}_1, B \in \mathcal{F}_2\}.$$

Nota B.3.5. El producte de dues famílies no és necessàriament una família. En efecte, el producte $\mathcal{I} \cdot \mathcal{I}$ no és una família ja que conté al conjunt buit $\emptyset$ (per exemple intersecant el conjunt de nombres imparells amb el de nombres parells). Per altra banda, com que tota família conté el conjunt $\mathbb{N}_0$, és clar que

$$\mathcal{F}_1 \subset \mathcal{F}_1 \cdot \mathcal{F}_2, \text{ i també } \mathcal{F}_2 \subset \mathcal{F}_1 \cdot \mathcal{F}_2.$$

Definició B.3.6. Direm que una família $\mathcal{F}$ és un *filtre*, si $\mathcal{F} \cdot \mathcal{F} \subset \mathcal{F}$.

Nota B.3.7. La definició anterior és equivalent a: per a cada parell d'elements $A, B \in \mathcal{F}$ es compleix $A \cap B \in \mathcal{F}$. De manera inductiva, també equival a: per a cada seqüència finita $\{A_i\}_{i=1}^k \subset \mathcal{F}$ aleshores $\bigcap_{i=1}^k A_i \in \mathcal{F}$. Per tant la definició de *filtre* es pot reescriure com:

(i) donat $A \in \mathcal{F}$ tenim que A és infinit;

(ii) donat $A \in \mathcal{F}$ i $A \subset B \subset \mathbb{N}_0$ llavors $B \in \mathcal{F}$;

(iii) per a tot parell $A, B \in \mathcal{F}$ es compleix $A \cap B \in \mathcal{F}$.

És important recordar que aquesta no és la definició clàssica de *filtre*. De fet, en [14] i [37] la definició de filtre relaxa la condició (i) anterior exigint únicament que $\emptyset \notin \mathcal{F}$. Però, serà suficient emprar aquesta definició de filtre ja que ens interessen les famílies $\mathcal{N}_T$, les quals estan formades per conjunts infinits amb el simple fet d'exigir que siguen no buits (veure Proposició 1.2.8).

Definició B.3.8. Direm que una família $\mathcal{F}$ és de *partició regular*, si per a cada $A \in \mathcal{F}$ i cada parell $A_1, A_2 \subset \mathbb{N}_0$ amb $A = A_1 \cup A_2$ existeix $i \in \{1, 2\}$ amb $A_i \in \mathcal{F}$.

Nota B.3.9. De manera inductiva, la definició anterior és equivalent a: per a cada $A \in \mathcal{F}$ i cada seqüència finita $\{A_i\}_{i=1}^k \subset \mathcal{F}$ amb $A = \bigcup_{i=1}^k A_i$ existeix $i \in \{1, ..., k\}$ amb $A_i \in \mathcal{F}$.

A continuació emprem la dualitat per relacionar els filtres amb les famílies de partició regular.

Lema B.3.10 ([9, **Lema 2.1**]). *Donada una família $\mathcal{F}$, les següents afirmacions són equivalents:*

(i) *$\mathcal{F}$ és de partició regular;*

(ii) *$\mathcal{F} \cdot \mathcal{F}^* \subset \mathcal{F}$;*

(iii) *$\mathcal{F}^*$ és un filtre.*

Demostració. (i) $\Longrightarrow$ (ii) Donats $A \in \mathcal{F}$ i $B \in \mathcal{F}^*$ llavors $A \cap B \neq \emptyset$ i $A = (A \cap B) \cup (A \setminus B)$, i per tant, per ser de partició regular o bé $A \cap B \in \mathcal{F}$ o bé $A \setminus B \in \mathcal{F}$. Com $(A \setminus B) \cap B = \emptyset$, per definició de família dual tenim que necessàriament $A \cap B \in \mathcal{F}$ i per tant $\mathcal{F} \cdot \mathcal{F}^* \subset \mathcal{F}$.

(ii) $\Longrightarrow$ (iii) Donats $B, C \in \mathcal{F}^*$, per a cada $A \in \mathcal{F}$ tenim $A \cap B \in \mathcal{F}$ i per tant, de la igualtat $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C \neq \emptyset$ obtenim $B \cap C \in \mathcal{F}^*$ d'on es dedueix que $\mathcal{F}^* \cdot \mathcal{F}^* \subset \mathcal{F}^*$ és un filtre.

(iii) $\Longrightarrow$ (ii) Donats $A \in \mathcal{F}$ i $A_1, A_2 \subset \mathbb{N}_0$ amb $A = A_1 \cup A_2$ hem de comprovar que $A_i \in \mathcal{F} = \mathcal{F}^{**}$ (veure Nota B.3.2) per a algun $i \in \{1, 2\}$. Si no fora cert existirien $B_1, B_2 \in \mathcal{F}^*$ complint $A_i \cap B_i = \emptyset$ per a cada $i \in \{1, 2\}$, i la condició de filtre implicaria $C = B_1 \cap B_2 \in \mathcal{F}^*$ arribant a la contradicció

$$\emptyset \neq A \cap C \subset (A_1 \cap B_1) \cup (A_2 \cap B_2) = \emptyset. \qquad \square$$

Nota B.3.11. Per la nota B.3.2 sabem que per a tota família $\mathcal{F}$ es compleix $\mathcal{F} = \mathcal{F}^{**}$, i llavors el lema anterior també ens assegura que $\mathcal{F}$ és un filtre si i només si $\mathcal{F}^*$ és de partició regular.

Exemple B.3.12. De les famílies que hem estudiat a seccions B.1 i B.2 podem dir:

(a) $\mathcal{S}$ i $\mathcal{T}$ no són filtres ja que $\emptyset \in \mathcal{S} \cdot \mathcal{S}, \mathcal{T} \cdot \mathcal{T}$. En efecte, la intersecció del conjunt de nombres imparells amb el de parells, que són sindètics, i la dels conjunts $A = \bigcup_{n=1}^{\infty}[2^n, 2^n + n]$ i $\mathbb{N}_0 \setminus A$, que són grossos, és buida. Com que $\mathcal{T}^* = \mathcal{S}$, tampoc són famílies de partició regular.

(b) Per la proposició B.1.3(c) és compleix $\mathcal{TS} \cdot \mathcal{TS} \subset \mathcal{TS}$. Deduïm que $\mathcal{PS} = \mathcal{TS}^*$ és una família de partició regular. Per altra banda, és immediat comprovar que $\mathcal{I}$ és de partició regular i que la família de conjunts cofinits $\mathcal{I}^*$ és un filtre.

(c) Per motius d'extensió no demostrarem que tant $\mathcal{IP}$ com Δ són famílies de partició regular, i que per tant $\mathcal{IP}^*$ i Δ^* són filtres. Una manera de comprovar-ho seria demostrar que dites famílies són unions d'ultrafiltres [7, Definicions 1.2, 1.3].

(d) Per les proposicions B.2.4(f) i B.2.8(f) sabem que $\overline{\mathcal{D}}$ i $\overline{\mathcal{BD}}$ són famílies de partició regular i per les igualtats (B.4) deduïm que $\underline{\mathcal{D}}_1$ i $\underline{\mathcal{BD}}_1$ són filtres. Per l'apartat (a) sabem que $\overline{\mathcal{BD}}_1 = \mathcal{T}$ i $\underline{\mathcal{BD}} = \mathcal{S}$ no són ni filtres ni de partició regular. Per altra banda, $\overline{\mathcal{D}}_1$ no és una família de partició regular, ja que si A és el conjunt de nombres parells tenim $A \cup (\mathbb{N}_0 \setminus A) = \mathbb{N}_0 \in \overline{\mathcal{D}}_1$. Tampoc és un filtre, ja que no és massa complex construir $A \subset \mathbb{N}_0$ de manera que $\overline{\mathrm{dens}}(A) = 1$ i $\underline{\mathrm{dens}}(A) = 0$, i per tant A i $\mathbb{N}_0 \setminus A$ estan en $\overline{\mathcal{D}}_1$ però la seua intersecció és buida.

Definició B.3.13. Donada una família $\mathcal{F}$, denotarem per

$$\widetilde{\mathcal{F}} := \{A \subset \mathbb{N}_0 : \text{donat } N \in \mathbb{N}_0 \text{ existeix } B \in \mathcal{F} \text{ amb } (B + [-N, N]) \cap \mathbb{N}_0 \subset A\}.$$

Aquesta subfamília de $\mathcal{F}$ és d'especial importància quan parlem de $\mathcal{F}$-operadors, ja que ens permeten establir el criteri de $\mathcal{F}$-transitivitat (Teorema 2.4.4). En aquest criteri és fonamental saber quan la família $\widetilde{\mathcal{F}}$ és un filtre.

Lema B.3.14 (**[9, Lema 2.2]**)**.** *Siga $\mathcal{F}$ una família. Si $\widetilde{\mathcal{F}} \cdot \widetilde{\mathcal{F}} \subset \mathcal{F}$ llavors $\widetilde{\mathcal{F}}$ és un filtre. En particular, si $\mathcal{F}$ és un filtre aleshores $\widetilde{\mathcal{F}}$ també ho és.*

Demostració. Siguen $A_1, A_2 \in \widetilde{\mathcal{F}}$ i comprovem que $A_1 \cap A_2 \in \widetilde{\mathcal{F}}$. Per a cada $N \in \mathbb{N}$ existeixen conjunts $B_1(N), B_2(N) \in \mathcal{F}$ complint $(B_i(N) + [-2N, 2N] \cap \mathbb{N}_0) \subset A_i$ per a cada $i \in \{1, 2\}$, i per tant podem definir els conjunts

$$A_i^*(N) := \bigcup_{J=N}^{\infty} (B_i(J) + [-J, J]) \cap \mathbb{N}_0, \text{ per a cada } i \in \{1, 2\}.$$

Per definició sabem que $A_1^*(N), A_2^*(N) \in \widetilde{\mathcal{F}}$, i emprant l'hipòtesi $\widetilde{\mathcal{F}} \cdot \widetilde{\mathcal{F}} \subset \mathcal{F}$ obtenim que el conjunt $B(N) := A_1^*(N) \cap A_2^*(N) \in \mathcal{F}$ per a cada $N \in \mathbb{N}$. Per finalitzar la prova és suficient demostrar que $(B(N) + [-N, N]) \cap \mathbb{N}_0 \subset A_1 \cap A_2$ per a cada $N \in \mathbb{N}$. En efecte, donat $N \in \mathbb{N}$ i $m \in (B(N) + [-N, N]) \cap \mathbb{N}_0$ podem escriure $m = k(N) + l(N)$ amb $k(N) \in B(N)$ i $l(N) \in [-N, N]$. Per definició de $B(N)$ tenim

$$k(N) = k_1(J_1) + l_1(J_1) = k_2(J_2) + l_2(J_2),$$

per a algun $k_i(J_i) \in B_i(J_i)$, $l_i(J_i) \in [-J_i, J_i]$, on $J_i \geq N$ per a cada $i \in \{1, 2\}$. Llavors

$$m = k_i(J_i) + l_i(J_i) + l(N) \in (B_i(J_i) + [-2J_i, 2J_i]) \cap \mathbb{N}_0 \subset A_i. \qquad \square$$

Bibliografia

[1] E. Akin: *Recurrence in topological dynamics. Furstenberg families and Ellis actions.* Plenum Press, New York, 1997.

[2] J. Banks, J. Brooks, G. Cairns, G. Davis i P. Stacey: On Devaney's definition of chaos. *Amer. Math. Monthly*, **99** (4), 332–334, 1992.

[3] F. Bayart i S. Grivaux: Frequently hypercyclic operators. *Trans. Amer. Math. Soc.*, **358**, 5083–5117, 2006.

[4] F. Bayart i E. Matheron: Hypercyclic operators failing the Hypercyclicity Criterion on classical Banach spaces. *Journal of Functional Analysis*, **250**, no. 2, 426–441, 2007.

[5] F. Bayart i E. Matheron: *Dynamics of linear operators.* Cambridge University Press, 2009.

[6] F. Bayart i I.Z. Ruzsa: Difference sets and frequently hypercyclic weighted shifts, *Ergodic Theory Dynam. Systems* **35**, 691–709, 2015.

[7] V. Bergelson i T. Downarowicz: Large sets of integers and hierarchy of mixinf properties of measure preserving systems. *Colloquium Mathematicum*, **110**, no. 1, 117–150, 2008.

[8] J. Bès, Q. Menet, A. Peris i Y. Puig: Recurrence properties of hypercyclic operators. *Math. Ann.*, **366**, no. 1-2, 545–572, 2016.

[9] J. Bès, Q. Menet, A. Peris i Y. Puig: Strong transitivity properties for operators. *J. Differential Equations*, **266**, no. 2-3, 1313–1337, 2019.

[10] J. Bès i A. Peris: Hereditarily Hyperciclic Operators. *Journal of Functional Analysis*, **167**, 94–112, 1999.

[11] G.D. Birkhoff: Surface transformations and their dynamical applications. *Acta Math.*, **43**, no. 1, 1–119, 1922.

[12] A. Bonilla i K.-G. Grosse-Erdmann: Upper frequent hypercyclicity and related notions. *Rev. Mat. Complut.*, **31**, no. 3, 673–711, 2018.

[13] A. Bonilla, K.-G. Grosse-Erdmann, A. López-Martínez i A. Peris: Frequently recurrent operators. Actualment en arXiv:2006.11428, 2020.

[14] N. Bourbaki: *General Topology*, Chaps. 1-4. Springer, 1989.

[15] R. Cardeccia i S. Muro: Arithmetic progressions and chaos in linear dynamics. Actualment en arXiv:2003.07161, 2020.

[16] D.L. Cohn: *Measure Theory*, second edition. Birkhauser, 2013.

[17] G. Costakis, A. Manoussos i I. Parissis: Recurrent linear operators. *Complex Anal. Oper. Theory*, **8**, 1601–1643, 2014.

[18] G. Costakis i I. Parissis: Szemerédi's theorem, frequent hypercyclicity and multiple recurrence. *Math. Scand.*, **110**, 251–272, 2012.

[19] M. De La Rosa i C. Read: A hyperciclic operator whose direct sum $T \oplus T$ is not hyperciclic. *Journal of Operator Theory*, **61**, no. 2, 369–380, 2009 (preprint 2006).

[20] P. Enflo: On the invariant subspace problem for Banach. *Acta Mathematica*, **158**, no. 3, 213–313, 1987.

[21] R. Ernst i A. Mouze: A quantitative interpretation of the frequent hypercyclicity criterion. *Ergodic Theory Dynam. Systems*, **39**, no. 4, 898–924, 2019.

[22] M. Fabian, P. Habala, P. Hájek, V. Montesinos i V. Zizler: *Banach Space Theory. The Basis for Linear and Nonlinear Analysis.* Springer, 2010.

[23] H. Furstenberg: *Recurrence in Ergodic Theory and Combinatorial Number Theory.* Princeton University Press, 1981.

[24] V.J. Galán, F. Martínez-Giménez, P. Oprocha i A. Peris: Product recurrence for weighted backward shifts. *Appl. Math. Inf. Sci.*, **9**, 2361–2365, 2015.

[25] R.M. Gethner i J.H. Shapiro: Universal vectors for operators on spaces of holomorphic functions. *Proc. Amer. Math. Soc.*, **100**, no. 2, 281–288, 1987.

[26] E. Glasner: Classifying dynamical systems by their recurrence properties. *Topol. Methods Nonlinear Anal.*, **24**, 21–40, 2004.

[27] G. Godefroy i J.H. Shapiro: Operators with dense, invariant, cyclic vector manifolds. *J. Funct. Anal.*, **98**, no. 2, 229–269, 1991.

[28] W.H. Gottschalk i G.H. Hedlund: *Topological dynamics.* American Mathematical Society, Providence, R.I. 1955.

[29] G. Grekos, V. Toma i J. Tomanová: A note on uniform or Banach density. *Ann. Math. Blaise Pascal*, **17**, no. 1, 153–163, 2010.

[30] S. Grivaux i É. Matheron: Invariant measures for frequently hypercyclic operators. *Adv. Math.*, **265**, 371–427, 2014

[31] S. Grivaux, É. Matheron i Q. Menet, Linear dynamical systems on Hilbert spaces: Typical properties and explicit examples, *Mem. Amer. Math. Soc.*, to appear (preprint 2017).

[32] K.-G. Grosse-Erdmann i A. Peris Manguillot: *Linear chaos.* Springer, London 2011.

[33] S. He, Y. Huang i Z. Yin: $J^{\mathcal{F}}$-class weighted backward shifts. *Internat. J. Bifur. Chaos Appl. Sci. Engrg.*, **28**, 1850076, 11 pp, 2018.

[34] W. He, J. Yin i Z. Zhou: On quasi-weakly almost periodic points. *Sci. China Math.*, **56**, 597–606, 2013.

[35] D.A. Herrero: Limits of hypercyclic and supercyclic operators. *J. Funct. Anal.*, **99**, no. 1, 179–190, 1991.

[36] D.A. Herrero: Hypercyclic operators and chaos. *J. Operator Theory*, **28**, no. 1, 93–103, 1992.

[37] N. Hindman i D. Strauss: *Algebra in the Stone-Čech Compactification*, Second Edition. De Gruyter, 1998.

[38] R.A. Holmgren: *A First Course in Discrete Dynamical Systems.* Springer, New York, 1994.

[39] G.J.O. Jameson: *Topology and Normed Spaces.* John Wiley and Sons, New York, 1974.

[40] C. Kitai: *Invariant closed sets for linear operators.* Ph.D. thesis, University of Toronto, 1982.

[41] S. Kolyada i L. Snoha: Some aspects of topological transitivity - A survey. *It. Theory and Grazer Math. Ber.*, **334**, 3–35, 1997.

[42] S. Kolyada i L. Snoha: Minimal dynamical systems. *Scholarpedia*, **4(11)**, 2009.

[43] R. Li, A note on stronger forms of sensitivity for dynamical systems. *Chaos Solitons Fractals*, **45**, 753–758, 2012.

[44] R. MacLane: Sequences of derivatives and normal families. *J. Analyse Math.*, **2**, 72–87, 1952.

[45] R. Meise i D. Vogt: *Introduction to Functional Analysis.* Clarendon Press, Oxford, 1992.

[46] Q. Menet: Linear chaos and frequent hypercyclicity, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **369**, 4977–4994, 2017.

[47] T.K.S. Moothathu: Two remarks on frequent hypercyclicity, *J. Math. Anal. Appl.*, **408**, 843–845, 2013.

[48] I. Niven, H.S. Zuckerman i H.L. Montgomery: *An Introduction to the Theory of Numbers*, fifth edition. Jhon Wiley and Sons, New York, 1991.

[49] P. Oprocha i G. Zhang: On weak product recurrence and synchronization of return times. *Adv. Math.*, **244**, 395–412, 2013.

[50] K.E. Petersen: *Ergodic theory*, Cambridge university Press, 1983.

[51] M. Pollicott i M. Yuri: *Dynamical systems and ergodic theory.* Cambridge University Press, 1998.

[52] C.J. Read: The invariant subspace problem for a class of Banach spaces. II. Hypercyclic operators. *Israel J. Math.*, **63**, no. 1, 1–40, 1988.

[53] S. Rolewicz: On orbits of elements. *Studia Math.*, **32**, 17–22, 1969.

[54] W. Rudin: *Functional Analysis.* McGraw-Hill Science/Engineering/Math, 1991.

[55] S. Shkarin: On the spectrum of frequently hypercyclic operators. *Ame. Math. Soc.*, **137**, no. 1, 123–134, 2009.

[56] X.Y. Wang i Y. Huang: Recurrence of transitive points in dynamical systems with the specification property, *Acta Math. Sin.*, **34**, 1879–1891, 2018.

[57] Z. Yin i Y. Wei: Recurrence and topological entropy of translation operators. *J. Math. Anal. Appl.*, **460**, 203–215, 2018.

[58] J. Yin i Z. Zhou: Positive upper density points and chaos. *Acta Math. Sci.* **32**, 1408–1414, 2012.

Índex de símbols

Índex alfabètic