

LECCIONES BREVES DE ÁLGEBRA

Valentín Gregori Gregori | Bernardino Roig Sala | Almanzor Sapena Piera



Valentín Gregori Gregori
Bernardino Roig Sala
Almanzor Sapena Piera

Lecciones breves de Álgebra

Colección *Punto de Partida*

Para referenciar esta publicación utilice la siguiente cita: Gregori Gregori, V.; Roig Sala, B.; Sapena Piera, A. (2020). *Lecciones breves de Álgebra*. Valencia: Editorial Universitat Politècnica de València

© Valentín Gregori Gregori
Bernardino Roig Sala
Almanzor Sapena Piera

© 2020, Editorial Universitat Politècnica de València
Venta: www.lalibreria.upv.es / Ref.: 0225_04_01_01

Imprime: Byprint Percom, sl

ISBN: 978-84-9048-920-8
Impreso bajo demanda

Si el lector detecta algún error en el libro o bien quiere contactar con los autores, puede enviar un correo a edicion@editorial.upv.es

La Editorial UPV autoriza la reproducción, traducción y difusión parcial de la presente publicación con fines científicos, educativos y de investigación que no sean comerciales ni de lucro, siempre que se identifique y se reconozca debidamente a la Editorial UPV, la publicación y los autores. La autorización para reproducir, difundir o traducir el presente estudio, o compilar o crear obras derivadas del mismo en cualquier forma, con fines comerciales/lucrativos o sin ánimo de lucro, deberá solicitarse por escrito al correo edicion@editorial.upv.es

Impreso en España

Presentación

La Universidad Española emprendió la década pasada una etapa inédita con el denominado Plan Bolonia. En dicho plan el tiempo del que dispone el profesorado para la impartición de la docencia matemática se ha reducido drásticamente. De esta manera la clásica clase magistral del siglo anterior se vuelve, en ocasiones, menos expositiva y más orientada hacia la búsqueda de conocimientos en los que el universitario deberá involucrarse de una manera más activa.

El presente libro es una versión abreviada de la segunda edición del libro Lecciones de Álgebra. Se trata pues de un texto elemental sobre Álgebra Lineal concebido para los alumnos del grado en telecomunicaciones que se gradúan en estos nuevos planes aunque básicamente el contenido corresponde al curso que los autores han impartido en la Escuela Politécnica Superior de Gandia en anteriores cursos académicos. El poco tiempo de que se dispone para su impartición queda patente, en cierta manera, en la ausencia de demostraciones que sólo aparecen esporádicamente en el desarrollo del capítulo. Ello, sin embargo, permite una lectura fluida del texto.

No obstante lo dicho en el párrafo anterior, y aun usando terminología sencilla, la argumentación de los contenidos del texto es constante y rigurosa en su exposición. Los epígrafes que aparecen en letra pequeña contienen demostraciones o ponen énfasis en algunos aspectos matemáticos, y su lectura no es imprescindible para la comprensión del texto. En ocasiones, el uso de la letra cursiva nos permite eludir la formalización de conceptos, cuando éstos parecen intuitivos.

Los autores se han esmerado sobre todo en la exposición didáctica del texto que han estructurado en capítulos. La exposición de resultados de cada capítulo se ilustra con ejemplos que aclaran los conceptos. Al término de cada capítulo se dan ejercicios resueltos con todo detalle, y después se proponen unos pocos que motiven al estudioso.

Los siete capítulos que componen el programa que se desarrolla, en este orden son: teoría de conjuntos, espacios vectoriales, matrices, aplicaciones lineales, determinantes, sistemas de ecuaciones lineales y diagonalización de matrices.

Para la comprensión del texto sólo se requieren nociones elementales de bachillerato.

Los autores agradecerán cualquier sugerencia tendente a mejorar el presente texto en ediciones sucesivas.

Los autores

Notación

En este texto se ha evitado un lenguaje excesivamente simbólico. No obstante, el lector debe conocer la siguiente terminología básica que se usa en matemáticas y ciencias tecnológicas:

\forall	Cuantificador universal. Se lee “para todo” o “para cada”
\exists	Cuantificador existencial. Se lee “existe”
\iff	Equivalencia proposicional. Se lee “si y sólo si”
sii	Abreviatura de “si y sólo si”
\equiv	Equivalencia (o cambio convencional de notación)
\Rightarrow	Implicación proposicional. La proposición de la izquierda implica la de la derecha. Se lee “implica”
	Se lee “tal (tales) que”
:	Se lee “tal (tales) que”
\square	Indica final de una demostración
i.e.	En latín <i>id est</i> y se lee “es decir”
\in	Símbolo de pertenencia
\subset	Símbolo de inclusión
\cup	Símbolo de unión
\cap	Símbolo de intersección
\mathbb{N}	Conjunto de los números naturales (incluye al cero)
\mathbb{N}^*	El conjunto \mathbb{N} sin el cero
\mathbb{Z}	El anillo de los números enteros
\mathbb{Q}	El cuerpo de los números racionales
\mathbb{R}	El cuerpo de los números reales
\mathbb{C}	El cuerpo de los números complejos
\mathbb{K}	Cuerpo (\mathbb{R} ó \mathbb{C} , generalmente)

Sumario

1	TEORÍA DE CONJUNTOS	13
1.1	EL ÁLGEBRA DE BOOLE DE LA TEORÍA DE CONJUNTOS	13
1.1.1	Conjuntos	13
1.1.2	Ejemplos	14
1.1.3	Nota	15
1.1.4	Representaciones gráficas	15
1.1.5	Unión, intersección y complementación de conjuntos	15
1.1.6	Ejemplos	17
1.1.7	El álgebra de Boole de la teoría de conjuntos	18
1.1.8	Partición	19
1.2	PRODUCTOS CARTESIANOS	19
1.2.1	Producto cartesiano	19
1.2.2	Ejemplos	19
1.3	APLICACIONES	20
1.3.1	Correspondencias	20
1.3.2	Ejemplo	20
1.3.3	Nota	21
1.3.4	Ejemplo (Reencuentro del Álgebra y la Geometría)	21
1.3.5	Aplicaciones	22
1.3.6	Ejemplo	22
1.3.7	Clasificación de aplicaciones	22
1.3.8	Ejemplo	23
1.3.9	Inversa de una aplicación biyectiva	23
1.3.10	Ejemplo	24
1.3.11	Composición de aplicaciones	24
1.3.12	Ejemplo	25
1.4	COMBINATORIA	26
1.4.1	Variaciones con repetición	26
1.4.2	Ejemplo	26
1.4.3	Variaciones ordinarias	26

1.4.4	Ejemplo	27
1.4.5	Permutaciones	27
1.4.6	Ejemplo	27
1.4.7	Combinaciones	27
1.4.8	Ejemplo	28
1.4.9	Nota	28
1.4.10	Permutaciones con repetición	28
1.4.11	Números combinatorios. Propiedades	28
1.4.12	Triángulo de Tartaglia	29
1.4.13	Binomio de Newton	30
1.4.14	Ejemplo	30
1.5	EJERCICIOS RESUELTOS	31
1.6	EJERCICIOS PROPUESTOS	36
2	ESPACIOS VECTORIALES	37
2.1	ESPACIOS VECTORIALES	37
2.1.1	El espacio vectorial \mathbb{R}^n	37
2.1.2	Representaciones geométricas	38
2.1.3	Subespacios vectoriales	39
2.1.4	Subespacios de \mathbb{R}^2 y \mathbb{R}^3	39
2.1.5	Combinaciones lineales	39
2.1.6	Rectas vectoriales en \mathbb{R}^n	40
2.1.7	Ejemplo	40
2.1.8	Interpretaciones geométricas	41
2.1.9	Dependencia lineal	42
2.1.10	Ejemplos	42
2.1.11	Consecuencias	43
2.2	BASE DE UN ESPACIO VECTORIAL	43
2.2.1	Base de un espacio vectorial	43
2.2.2	Teorema de la dimensión	43
2.2.3	Bases canónicas	44
2.2.4	Teorema de la base incompleta	44
2.3	PROCESO DE REDUCCIÓN DE GAUSS	44
2.3.1	Lema	45
2.3.2	Nota	45
2.3.3	Ejemplo	45
2.3.4	Proceso de reducción de Gauss	46
2.3.5	Ejemplo	46
2.3.6	Suma de subespacios	47
2.3.7	Nota	47
2.3.8	Ejemplo	47

2.4	EJERCICIOS RESUELTOS	48
2.5	EJERCICIOS PROPUESTOS	52

3 MATRICES **53**

3.1	EL ESPACIO VECTORIAL DE LAS MATRICES	53
3.1.1	Matriz	53
3.1.2	Ejemplos	54
3.1.3	El grupo abeliano $(\mathcal{M}_{m \times n}, +)$	54
3.1.4	El espacio vectorial $\mathcal{M}_{m \times n}$	55
3.1.5	Ejemplos	55
3.1.6	Base de $\mathcal{M}_{m \times n}$	55
3.1.7	Ejemplo	55
3.2	EL ANILLO DE LAS MATRICES CUADRADAS	56
3.2.1	El producto de matrices	56
3.2.2	Ejemplo	56
3.2.3	El anillo de las matrices cuadradas $(\mathcal{M}_n, +, \cdot)$	57
3.3	TIPOS ESPECIALES DE MATRICES	57
3.3.1	Matriz inversible	57
3.3.2	Ejemplos	58
3.3.3	Matrices triangulares	58
3.3.4	Ejemplo	59
3.3.5	Traspuesta de una matriz	59
3.3.6	Ejemplos	59
3.3.7	Nota	59
3.3.8	Propiedades de la matriz traspuesta	60
3.3.9	Otros tipos de matrices	60
3.4	RANGO DE UNA MATRIZ	60
3.4.1	Definición	60
3.4.2	Teorema	60
3.4.3	Ejemplo	60
3.5	MATRICES ELEMENTALES	61
3.5.1	Matrices elementales	61
3.5.2	Ejemplos	61
3.5.3	Cálculo de la inversa de una matriz mediante matrices elementales	62
3.5.4	Ejemplo	62
3.5.5	Teorema	63
3.5.6	Inversas de matrices triangulares	63
3.5.7	Ejemplo	63
3.5.8	Descomposición LU	63
3.5.9	Ejemplo	64
3.5.10	Matrices escalonadas. Descomposición LS	64

3.5.11	Ejemplo	65
3.6	MATRICES POR BLOQUES	66
3.6.1	Matrices por bloques	66
3.6.2	Ejemplo	67
3.7	EJERCICIOS RESUELTOS	68
3.8	EJERCICIOS PROPUESTOS	73
4	APLICACIONES LINEALES	75
4.1	APLICACIONES LINEALES	75
4.1.1	Aplicaciones lineales	75
4.1.2	Propiedades	76
4.1.3	Ejemplos	76
4.1.4	Ejemplo	76
4.1.5	Núcleo	77
4.1.6	Teorema (caracterización de aplicaciones inyectivas)	77
4.1.7	Nota (caracterización de aplicaciones suprayectivas)	77
4.1.8	Ejemplo	77
4.1.9	Proposición	78
4.1.10	Proposición	78
4.1.11	Teorema de la dimensión (de aplicaciones lineales)	78
4.1.12	Corolario (idoneidad de las aplicaciones lineales)	78
4.2	MATRICES Y APLICACIONES LINEALES	78
4.2.1	Matriz asociada a una aplicación lineal	78
4.2.2	Ejemplo	80
4.2.3	Rango de una aplicación lineal	80
4.2.4	Ejemplo	80
4.2.5	Matriz de la aplicación identidad I	82
4.2.6	Isomorfismo entre aplicaciones lineales y matrices	83
4.2.7	Nota	83
4.2.8	Proposición	83
4.3	APLICACIONES LINEALES Y MATRICES INVERSIBLES	83
4.3.1	Proposición	83
4.3.2	Nota	83
4.3.3	Proposición	84
4.3.4	Composición de aplicaciones lineales	84
4.3.5	Ejemplo	84
4.3.6	Proposición	84
4.3.7	Teorema	84
4.3.8	Corolario	85
4.4	CAMBIOS DE BASE	85
4.4.1	Expresión matricial del cambio de base en un espacio vectorial	85

4.4.2	Ejemplo	86
4.4.3	Matrices asociadas a una aplicación lineal	87
4.4.4	Nota	88
4.5	EJERCICIOS RESUELTOS	88
4.6	EJERCICIOS PROPUESTOS	93
5	DETERMINANTES	95
5.1	DETERMINANTE DE ORDEN n	95
5.1.1	Signatura de una permutación	95
5.1.2	Determinante de orden n	96
5.1.3	Determinante de orden 3 y de orden 2	97
5.1.4	Ejemplos	97
5.1.5	Propiedades de los determinantes de orden n	98
5.1.6	Ejemplos	99
5.2	DESARROLLO DE UN DETERMINANTE	100
5.2.1	Menor complementario y adjunto	100
5.2.2	Ejemplo	101
5.2.3	Proposición	101
5.2.4	Proposición (desarrollo de un determinante)	101
5.2.5	Proposición (determinante de una matriz triangular)	102
5.2.6	Cálculo práctico de determinantes	102
5.2.7	Ejemplo	102
5.3	MATRIZ INVERSIBLE	103
5.3.1	Proposición	103
5.3.2	Teorema	103
5.3.3	Corolario	104
5.3.4	Nota	104
5.3.5	Proposición	104
5.3.6	Cálculo de la matriz inversa	104
5.3.7	Ejemplo	105
5.3.8	Aplicación al cálculo del rango de una matriz	105
5.3.9	Ejemplo	106
5.4	EJERCICIOS RESUELTOS	106
5.5	EJERCICIOS PROPUESTOS	110
6	SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES	113
6.1	SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES	113
6.1.1	Sistemas de ecuaciones lineales	113
6.1.2	Solución de un sistema de ecuaciones lineales	114
6.1.3	Matriz ampliada	115
6.1.4	Proposición	115

6.1.5	Ejemplo	115
6.1.6	Clasificación de sistemas	116
6.1.7	Teorema de Rouché-Fröbenius	116
6.1.8	Ejemplos	117
6.2	RESOLUCIÓN DE SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES	119
6.2.1	Regla de Cramer	119
6.2.2	Ejemplos	120
6.2.3	Método de reducción de Gauss	121
6.2.4	Ejemplo	122
6.2.5	Sistema homogéneo	123
6.2.6	Ejemplo	123
6.2.7	Resolución de un sistema de Cramer por descomposición LU	124
6.2.8	Resolución de un sistema por descomposición LS	124
6.2.9	Interpolación polinómica	125
6.2.10	Sistemas sobredeterminados	126
6.3	ECUACIONES DE LOS SUBESPACIOS DE \mathbb{R}^n	126
6.3.1	Ecuaciones vectorial y paramétricas de un subespacio vectorial	126
6.3.2	Nota	127
6.3.3	Ecuaciones de un subespacio vectorial (Eliminación de parámetros)	127
6.3.4	Ejemplo	128
6.4	RESOLUCIÓN NUMÉRICA DE SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES	130
6.4.1	Aproximaciones sucesivas	130
6.4.2	Métodos iterativos. Convergencia	130
6.4.3	Método de Jacobi	131
6.4.4	Método de Gauss-Seidel	132
6.4.5	Nota	132
6.5	EJERCICIOS RESUELTOS	133
6.6	EJERCICIOS PROPUESTOS	143
7	DIAGONALIZACIÓN DE MATRICES	145
7.1	SUBESPACIOS PROPIOS	145
7.1.1	Introducción	145
7.1.2	Vectores propios	146
7.1.3	Nota	146
7.1.4	Subespacio propio	146
7.1.5	Ejemplo	146
7.1.6	El polinomio característico	146
7.1.7	Unicidad del polinomio característico	147
7.1.8	Ejemplo	148
7.2	DIAGONALIZACIÓN DE MATRICES	148
7.2.1	Definición	148

7.2.2	Proposición	148
7.2.3	Nota	148
7.2.4	Proposición	149
7.2.5	Ejemplo	149
7.2.6	Teorema (caracterización de los endomorfismos diagonalizables)	150
7.2.7	Ejemplo	150
7.2.8	Nota	150
7.2.9	Matriz de paso	150
7.2.10	Potencia de una matriz	150
7.2.11	Matrices simétricas	151
7.2.12	Nota	151
7.3	EJERCICIOS RESUELTOS	151
7.4	EJERCICIOS PROPUESTOS	156
	Bibliografía	159

Capítulo 1

TEORÍA DE CONJUNTOS

En este capítulo se ofrece una (ingenua) introducción a la teoría de conjuntos que es suficiente para establecer y estudiar los conceptos que se definen a lo largo del texto. Se ha puesto especial interés en el concepto de aplicación, para concluir con unas nociones elementales de combinatoria.

El **Principio de Inducción** establece para una *proposición* \mathcal{P}_n donde $n \in \mathbb{N}$, que:

$$[\mathcal{P}_1 \text{ cierto y } (\mathcal{P}_n \rightarrow \mathcal{P}_{n+1}) \text{ cierto}] \rightarrow (\mathcal{P}_n \text{ cierto}) \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

En este Principio se fundamentan las demostraciones por inducción y los conceptos que se definen por recurrencia (o inducción).

En la prueba de $\mathcal{P}_n \rightarrow \mathcal{P}_{n+1}$ se asume (**hipótesis de inducción**) que \mathcal{P}_n es cierta. En la práctica este Principio admite variantes, en cuanto a su aplicación.

1.1 EL ÁLGEBRA DE BOOLE DE LA TEORÍA DE CONJUNTOS

1.1.1 Conjuntos

Un **conjunto** es una colección de elementos. Los conjuntos suelen denotarse con letras mayúsculas. Cuando se explicitan sus elementos, éstos, sin repetirse, se encierran entre llaves separados por comas. En ciertos contextos se utilizan los términos **sistema**, **colección** y **familia** como sinónimos de conjunto. Así se habla de “familia de conjuntos” en vez de “conjunto de conjuntos” y “sistema de vectores” en vez de “conjunto de vectores”.

Designaremos por \mathbb{N} , \mathbb{Z} , \mathbb{Q} , \mathbb{R} y \mathbb{C} a los conjuntos de los números naturales, enteros, racionales, reales y complejos, respectivamente. Así, por ejemplo:

$$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots\} \text{ y } \mathbb{Z} = \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}.$$

Un **conjunto unitario** es aquél que posee un único elemento. Esta terminología se extiende a conjuntos de dos o más elementos, de manera obvia.

Para expresar que un elemento a **pertenece** a un conjunto S (o que está en S) se escribe $a \in S$. Si a no está en S se escribe $a \notin S$. Para expresar que un conjunto A está **contenido** (o **incluido**) en otro B (i.e., todo elemento de A está en B) se escribe $A \subset B$ (o $B \supset A$), en tal caso se dice que A es un **subconjunto** de B . Si A no está incluido en B se escribe $A \not\subset B$.

Se designa por \emptyset al conjunto **vacío** que no posee elementos. Todo subconjunto no vacío S posee dos subconjuntos **impropios**: \emptyset y S . Los demás subconjuntos de S se llaman **propios**.

Dos conjuntos A y B son **iguales**, y se escribe $A = B$, cuando poseen los mismos elementos, lo cual sucede si $A \subset B$ y $B \subset A$.

Un conjunto también se describe a través de una expresión caracterizadora de sus elementos dentro de un contexto (conjunto **referencial**). Así, el conjunto $\{0, 1, 2, 3, 4\}$ también se puede escribir de las dos formas siguientes:

$$\{x \in \mathbb{N} : x < 5\} \text{ o } \{x \in \mathbb{Z} : 0 \leq x \leq 4\}.$$

1.1.2 Ejemplos

- (a) El conjunto V de las vocales es $V = \{a, e, i, o, u\}$ (o también $V = \{e, i, a, o, u\}$ pues el orden de aparición de los elementos es irrelevante).

Se tiene que $\{a, e, o\} \subset V$ pero $\{a, m\} \not\subset V$ pues $m \notin V$.

- (b) $-2 \in \mathbb{Z}$ pero $-2 \notin \mathbb{N}$

- (c) Se tienen las inclusiones *numéricas* $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$, $\mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$, $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$ y $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$. Sin embargo las inclusiones *contrarias* no se verifican.

- (d) El conjunto *binario* $\{-1, 1\}$ se puede escribir $\{x \in \mathbb{Z} : 1 \leq x^2 \leq 2\}$.

- (e) Se tiene que

$$\{x \in \mathbb{R} : x^2 = -1\} = \emptyset.$$

Obsérvese que el conjunto \emptyset viene determinado por una condición imposible de cumplir.

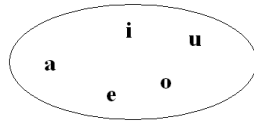
- (f) El conjunto $\{0, 2, 4, \dots\}$ que contiene el 0 y los pares es el conjunto $\{2n : n \in \mathbb{N}\}$ por lo que habitualmente se representa por $2\mathbb{N}$. Análogamente si $p \in \mathbb{N}^*$, $p\mathbb{N}$ representa los naturales múltiples de p , que también suelen denotarse \dot{p} .

1.1.3 Nota

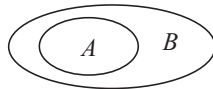
Si $a \in S$ podemos escribir $\{a\} \subset S$ pero la notación $a \subset S$ es incorrecta. En la actualidad, en argumentaciones matemáticas, se acepta la notación $a, b \in S$ para indicar que ambos elementos a y b pertenecen a S .

1.1.4 Representaciones gráficas

En ocasiones los conjuntos se describen (definen) mediante gráficos. Así, un **diagrama de Venn** es una representación gráfica plana de un conjunto, en la que sus elementos quedan encerrados por una línea, como se muestra en la figura siguiente en la que se representa el conjunto de vocales.



El gráfico siguiente *muestra* que $A \subset B$.



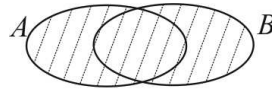
En un **diagrama lineal** los elementos del conjunto son los que resaltan sobre el segmento o la recta donde se representan. Este tipo de representación es interesante cuando se desea entrever un *orden* entre los elementos. En la figura inferior se representa en \mathbb{R} el conjunto $I = \{x \in \mathbb{R} : 1 \leq x < 2\}$ que es el intervalo $[1, 2[$.



1.1.5 Unión, intersección y complementación de conjuntos

Sean A y B dos conjuntos. Se define la **unión** de los conjuntos A y B , y se denota $A \cup B$ (se lee A unión B), como el conjunto

$$A \cup B = \{x : x \in A \text{ o } x \in B\}.$$

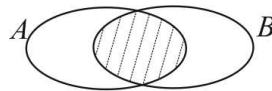


$A \cup B$ es el conjunto rayado.

De esta manera, $A \cup B$ contiene los elementos de A o B (recordar que la “o” lógica no es excluyente). Este concepto se extiende de forma natural a una familia cualquiera de conjuntos de manera que la unión de éstos está formada por los elementos que pertenecen a alguno de los conjuntos de la familia.

Se define la **intersección** de los conjuntos A y B , que se denota $A \cap B$ (se lee A intersección B), como el conjunto

$$A \cap B = \{x : x \in A \text{ y } x \in B\}.$$



$A \cap B$ es el conjunto rayado.

De esta manera, $A \cap B$ contiene los elementos comunes a A y a B . Si A y B no tienen elementos comunes se dice que son **disjuntos**. Al igual que antes este concepto se generaliza a una familia cualquiera de conjuntos.

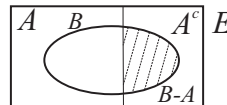
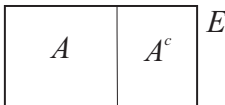
De las definiciones se desprenden las siguientes propiedades inmediatas:

$$A \subset A \cup B,$$

$$A \cap B \subset A,$$

$$A \subset B \Leftrightarrow A \cup B = B \Leftrightarrow A \cap B = A$$

Si A y B son conjuntos dentro de un referencial E , se define el **complementario** de A (respecto E), y se denota por A^c (se lee A complementario), como el conjunto formado por los elementos de E que no están en A . De manera más general se define el conjunto $B - A$ (**diferencia** de B y A), como el conjunto de los elementos de B que no están en A . Es fácil observar que $B - A = B \cap A^c$. En la siguiente figura $B - A$ es el conjunto rayado.



Se define la **diferencia simétrica** de dos conjuntos A y B , y se denota $A \Delta B$ como $A \Delta B = (A \cup B) - (A \cap B)$. Este concepto se corresponde con la interpretación de la “o” exclusiva, en lógica. Es obvio que $A \Delta B = (A - B) \cup (B - A)$. La diferencia simétrica es una operación asociativa y conmutativa.

Para seguir leyendo, inicie el proceso de compra, click aquí