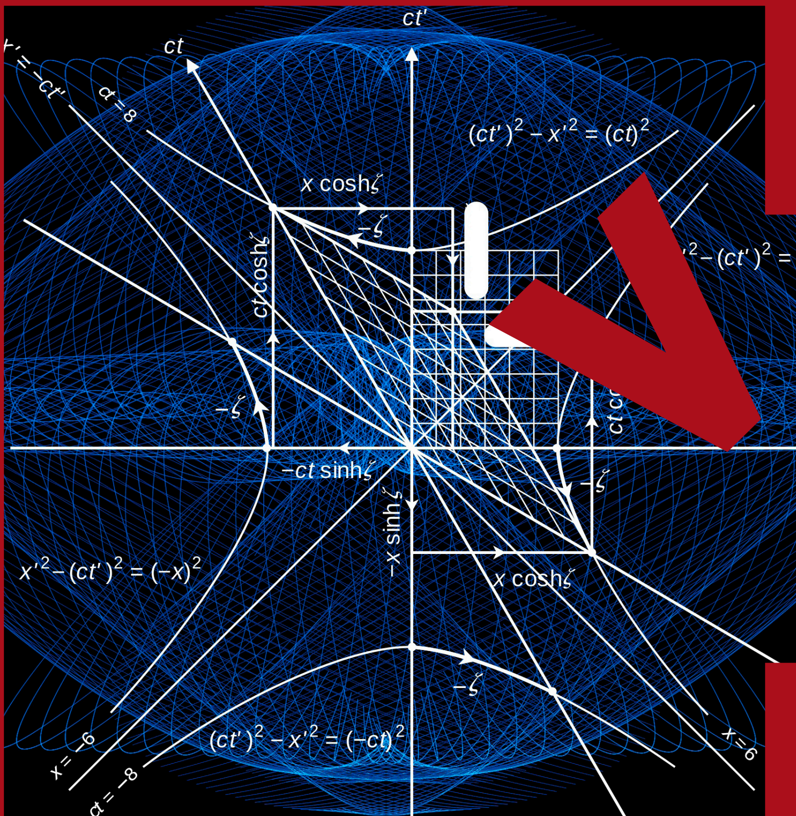
MATEMÁTICAS



LECCIONES BREVES DE ÁLGEBRA

Valentín Gregori Gregori | Bernardino Roig Sala | Almanzor Sapena Piera

UPV punto de partida

Editorial Universitat Politècnica de València

Valentín Gregori Gregori
Bernardino Roig Sala
Almanzor Sapena Piera

Lecciones breves de Álgebra

Editorial
Universitat Politècnica
de València

Colección *Punto de Partida*

Para referenciar esta publicación utilice la siguiente cita: Gregori Gregori, V.; Roig Sala, B.; Sapena Piera, A. (2020). *Lecciones breves de Álgebra.* Valencia: Editorial Universitat Politècnica de València

Venta: www.lalibreria.upv.es / Ref.: 0225_04_01_01

Imprime: Byprint Percom, sl

ISBN: 978-84-9048-920-8
Impreso bajo demanda

Si el lector detecta algún error en el libro o bien quiere contactar con los autores, puede enviar un correo a edicion@editorial.upv.es

Impreso en España

Presentación

La Universidad Española emprendió la década pasada una etapa inédita con el denominado Plan Bolonia. En dicho plan el tiempo del que dispone el profesorado para la impartición de la docencia matemática se ha reducido drásticamente. De esta manera la clásica clase magistral del siglo anterior se vuelve, en ocasiones, menos expositiva y más orientada hacia la búsqueda de conocimientos en los que el universitario deberá involucrarse de una manera más activa.

El presente libro es una versión abreviada de la segunda edición del libro Lecciones de Álgebra. Se trata pues de un texto elemental sobre Álgebra Lineal concebido para los alumnos del grado en telecomunicaciones que se graduan en estos nuevos planes aunque básicamente el contenido corresponde al curso que los autores han impartido en la Escuela Politécnica Superior de Gandia en anteriores cursos académicos. El poco tiempo de que se dispone para su impartición queda patente, en cierta manera, en la ausencia de demostraciones que sólo aparecen esporádicamente en el desarrollo del capítulo. Ello, sin embargo, permite una lectura fluida del texto.

No obstante lo dicho en el párrafo anterior, y aun usando terminología sencilla, la argumentación de los contenidos del texto es constante y rigurosa en su exposición. Los epígrafes que aparecen en letra pequeña contienen demostraciones o ponen énfasis en algunos aspectos matemáticos, y su lectura no es imprescindible para la comprensión del texto. En ocasiones, el uso de la letra cursiva nos permite eludir la formalización de conceptos, cuando éstos parecen intuitivos.

Los autores se han esmerado sobre todo en la exposición didáctica del texto que han estructurado en capítulos. La exposición de resultados de cada capítulo se ilustra con ejemplos que aclaran los conceptos. Al término de cada capítulo se dan ejercicios resueltos con todo detalle, y después se proponen unos pocos que motiven al estudioso.

Los siete capítulos que componen el programa que se desarrolla, en este orden son: teoría de conjuntos, espacios vectoriales, matrices, aplicaciones lineales, determinantes, sistemas de ecuaciones lineales y diagonalización de matrices.

Para la comprensión del texto sólo se requieren nociones elementales de bachillerato.

Los autores agradecerán cualquier sugerencia tendente a mejorar el presente texto en ediciones sucesivas.

Los autores

Notación

En este texto se ha evitado un lenguaje excesivamente simbólico. No obstante, el lector debe conocer la siguiente terminología básica que se usa en matemáticas y ciencias tecnológicas:

$\forall$	Cuantificador universal. Se lee "para todo" o "para cada"
$\exists$	Cuantificador existencial. Se lee "existe"
$\Longleftrightarrow$	Equivalencia proposicional. Se lee "si y sólo si"
sii	Abreviatura de "si y sólo si"
$\equiv$	Equivalencia (o cambio convencional de notación)
$\Rightarrow$	Implicación proposicional. La proposición de la izquierda implica la de la derecha. Se lee "implica"
$\vert$	Se lee "tal (tales) que"
$:$	Se lee "tal (tales) que"
$\square$	Indica final de una demostración
i.e.	En latín *id est* y se lee "es decir"
$\in$	Símbolo de pertenencia
$\subset$	Símbolo de inclusión
$\cup$	Símbolo de unión
$\cap$	Símbolo de intersección
$\mathbb{N}$	Conjunto de los números naturales (incluye al cero)
$\mathbb{N}^*$	El conjunto $\mathbb{N}$ sin el cero
$\mathbb{Z}$	El anillo de los números enteros
$\mathbb{Q}$	El cuerpo de los números racionales
$\mathbb{R}$	El cuerpo de los números reales
$\mathbb{C}$	El cuerpo de los números complejos
$\mathbb{K}$	Cuerpo ($\mathbb{R}$ ó $\mathbb{C}$, generalmente)

Sumario

Capítulo 1

TEORÍA DE CONJUNTOS

En este capítulo se ofrece una (ingenua) introducción a la teoría de conjuntos que es suficiente para establecer y estudiar los conceptos que se definen a lo largo del texto. Se ha puesto especial interés en el concepto de aplicación, para concluir con unas nociones elementales de combinatoria.

El **Principio de Inducción** establece para una *proposición* $\mathcal{P}_n$ donde $n \in \mathbb{N}$, que:

$$[\mathcal{P}_1 \text{ cierto y } (\mathcal{P}_n \to \mathcal{P}_{n+1}) \text{ cierto }] \to (\mathcal{P}_n \text{ cierto }) \;\; \forall n \in \mathbb{N}$$

En este Principio se fundamentan las demostraciones por inducción y los conceptos que se definen por recurrencia (o inducción).

En la prueba de $\mathcal{P}_n \to \mathcal{P}_{n+1}$ se asume (**hipótesis de inducción**) que $\mathcal{P}_n$ es cierta. En la práctica este Principio admite variantes, en cuanto a su aplicación.

1.1 EL ÁLGEBRA DE BOOLE DE LA TEORÍA DE CONJUNTOS

1.1.1 Conjuntos

Un **conjunto** es una colección de elementos. Los conjuntos suelen denotarse con letras mayúsculas. Cuando se explicitan sus elementos, éstos, sin repetirse, se encierran entre llaves separados por comas. En ciertos contextos se utilizan los términos **sistema, colección** y **familia** como sinónimos de conjunto. Así se habla de "familia de conjuntos" en vez de "conjunto de conjuntos" y "sistema de vectores" en vez de "conjunto de vectores".

Designaremos por $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ y $\mathbb{C}$ a los conjuntos de los números naturales, enteros, racionales, reales y complejos, respectivamente. Así, por ejemplo:

$$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots\} \text{ y } \mathbb{Z} = \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}.$$

Un **conjunto unitario** es aquél que posee un único elemento. Esta terminología se extiende a conjuntos de dos o más elementos, de manera obvia.

Para expresar que un elemento a **pertenece** a un conjunto S (o que está en S) se escribe $a \in S$. Si a no está en S se escribe $a \notin S$. Para expresar que un conjunto A está **contenido** (o **incluido**) en otro B (i.e., todo elemento de A está en B) se escribe $A \subset B$ (o $B \supset A$), en tal caso se dice que A es un **subconjunto** de B. Si A no está incluido en B se escribe $A \not\subset B$.

Se designa por $\emptyset$ al conjunto **vacío** que no posee elementos. Todo subconjunto no vacío S posee dos subconjuntos **impropios**: $\emptyset$ y S. Los demás subconjuntos de S se llaman **propios**.

Dos conjuntos A y B son **iguales**, y se escribe $A = B$, cuando poseen los mismos elementos, lo cual sucede sii $A \subset B$ y $B \subset A$.

Un conjunto también se describe a través de una expresión caracterizadora de sus elementos dentro de un contexto (conjunto **referencial**). Así, el conjunto $\{0, 1, 2, 3, 4\}$ también se puede escribir de las dos formas siguientes:

$$\{x \in \mathbb{N} : x < 5\} \text{ o } \{x \in \mathbb{Z} : 0 \leq x \leq 4\}.$$

1.1.2 Ejemplos

(a) El conjunto V de las vocales es $V = \{a, e, i, o, u\}$ (o también $V = \{e, i, a, o, u\}$ pues el orden de aparición de los elementos es irrelevante).
Se tiene que $\{a, e, o\} \subset V$ pero $\{a, m\} \not\subset V$ pues $m \notin V$.

(b) $-2 \in \mathbb{Z}$ pero $-2 \notin \mathbb{N}$

(c) Se tienen las inclusiones *numéricas* $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$, $\mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$, $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$ y $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$. Sin embargo las inclusiones *contrarias* no se verifican.

(d) El conjunto *binario* $\{-1, 1\}$ se puede escribir $\{x \in \mathbb{Z} : 1 \leq x^2 \leq 2\}$.

(e) Se tiene que
$$\{x \in \mathbb{R} : x^2 = -1\} = \emptyset.$$
Obsérvese que el conjunto $\emptyset$ viene determinado por una condición imposible de cumplir.

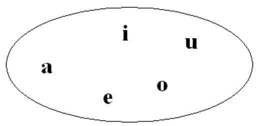
(f) El conjunto $\{0, 2, 4, \dots\}$ que contiene el 0 y los pares es el conjunto $\{2n : n \in \mathbb{N}\}$ por lo que habitualmente se representa por $2\mathbb{N}$. Análogamente si $p \in \mathbb{N}^*$, $p\mathbb{N}$ representa los naturales múltiples de p, que también suelen denotarse $\dot{p}$.

1.1.3 Nota

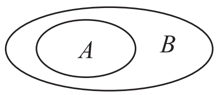
Si $a \in S$ podemos escribir $\{a\} \subset S$ pero la notación $a \subset S$ es incorrecta. En la actualidad, en argumentaciones matemáticas, se acepta la notación $a, b \in S$ para indicar que ambos elementos a y b pertenecen a S.

1.1.4 Representaciones gráficas

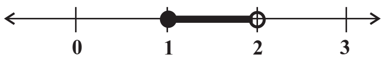
En ocasiones los conjuntos se describen (definen) mediante gráficos. Así, un **diagrama de Venn** es una representación gráfica plana de un conjunto, en la que sus elementos quedan encerrados por una línea, como se muestra en la figura siguiente en la que se representa el conjunto de vocales.



El gráfico siguiente *muestra* que $A \subset B$.



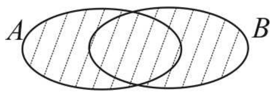
En un **diagrama lineal** los elementos del conjunto son los que resaltan sobre el segmento o la recta donde se representan. Este tipo de representación es interesante cuando se desea entrever un *orden* entre los elementos. En la figura inferior se representa en $\mathbb{R}$ el conjunto $I = \{x \in \mathbb{R} : 1 \le x < 2\}$ que es el intervalo $[1, 2[$.



1.1.5 Unión, intersección y complementación de conjuntos

Sean A y B dos conjuntos. Se define la **unión** de los conjuntos A y B, y se denota $A \cup B$ (se lee A unión B), como el conjunto

$$A \cup B = \{x : x \in A \;\text{ o }\; x \in B\}.$$

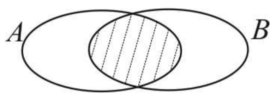


$A \cup B$ es el conjunto rayado.

De esta manera, $A \cup B$ contiene los elementos de A o B (recordar que la "o" lógica no es excluyente). Este concepto se extiende de forma natural a una familia cualquiera de conjuntos de manera que la unión de éstos está formada por los elementos que pertenecen a alguno de los conjuntos de la familia.

Se define la **intersección** de los conjuntos A y B, que se denota $A \cap B$ (se lee A intersección B), como el conjunto

$$A \cap B = \{x : x \in A \ \text{ y } \ x \in B\}.$$



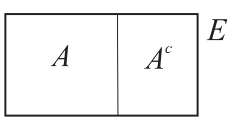
$A \cap B$ es el conjunto rayado.

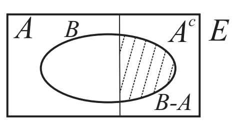
De esta manera, $A \cap B$ contiene los elementos comunes a A y a B. Si A y B no tienen elementos comunes se dice que son **disjuntos**. Al igual que antes este concepto se generaliza a una familia cualquiera de conjuntos.

De las definiciones se desprenden las siguientes propiedades inmediatas:

$A \subset A \cup B$,
$A \cap B \subset A$,
$A \subset B \Leftrightarrow A \cup B = B \Leftrightarrow A \cap B = A$

Si A y B son conjuntos dentro de un referencial E, se define el **complementario** de A (respecto E), y se denota por A^c (se lee A complementario), como el conjunto formado por los elementos de E que no están en A. De manera más general se define el conjunto $B - A$ (**diferencia** de B y A), como el conjunto de los elementos de B que no están en A. Es fácil observar que $B - A = B \cap A^c$. En la siguiente figura $B - A$ es el conjunto rayado.





Se define la **diferencia simétrica** de dos conjuntos A y B, y se denota $A \triangle B$ como $A \triangle B = (A \cup B) - (A \cap B)$. Este concepto se corresponde con la iterpretación de la "o" exclusiva, en lógica. Es obvio que $A \triangle B = (A - B) \cup (B - A)$. La diferencia simétrica es una operación asociativa y conmutativa.

Para seguir leyendo, inicie el proceso de compra, click aquí