

Evaluación del índice de seguridad real en las construcciones

RESUMEN. Este trabajo tiene como intención evaluar el índice de seguridad real calculando la carga última de una construcción y compararla con la que nos proporcionan los métodos de cálculo clásicos. Para este análisis se modeliza en el programa de elementos finitos Ansys la estructura en tres dimensiones y sus secciones como sólidos. Se contempla el comportamiento real de los materiales, teniendo en cuenta la no linealidad, fisuración, aplastamiento, plastificación, fluencia y endurecimiento por tensión de las armaduras. Empleamos nuestro método para poder analizar el índice de seguridad restante cuando existe una patología, como cuando desaparece el armado inferior de una vigueta. El modelo lo hemos contrastado con resultados de ensayos experimentales de elementos sencillos, como una viga armada en T a flexión, y un fragmento de pilar a compresión. En estos momentos estamos realizando el modelo de sólidos de una estructura compleja: viguetas, capa de compresión, vigas y pilares.

PALABRAS CLAVE: Carga última, Hormigón armado, No linealidad, Ansys, Método de los Elementos Finitos.

ABSTRACT. This paper intended to assess the real safety index by calculating the ultimate load of a building and compare it with which is given us by the traditional calculation methods. For this analysis is modelled in the finite element program Ansys the three-dimensional structure and its sections as solids. We include the real behaviour of materials, taking into account the nonlinearity, cracking, crushing, plasticity, creep and reinforce tension-stiffening. We use our method to analyze the safety index remains when there is pathology, as when the bottom reinforcement of a joist disappears. We have contrasted the model with results of experimental tests of isolated elements, such as a reinforced T-beam in flexion, and a fragment of pillar in compression. Nowadays we are making the solid model of a complex structure, joists, compression layer, beams and pillars.

KEYWORDS: Ultimate load, Reinforced concrete, Nonlinearity, Ansys, Finite Element Method.

Enrique Gil Benso

Universidad Politécnica de Valencia
Camino de Vera s/n – egil@mes.upv.es
963879671 (Ext. 79671)

Jose M^a Vercher Sanchis

Universidad Politécnica de Valencia
Camino de Vera s/n – jvercher@csa.upv.es
963877451 (Ext. 74510)

Ángeles Mas Tomás

Universidad Politécnica de Valencia
Camino de Vera s/n – amas@csa.upv.es
963877000 (Ext. 74515)

Biografía

Enrique Gil Benso es profesor titular de la Escuela Técnica Superior de Arquitectura de Valencia. Imparte la asignatura de Estructuras II en el Departamento de Mecánica de los Medios Continuos y Teoría de Estructuras. Es Arquitecto desde 1981 y doctor en el mismo departamento desde 1991. En la actualidad investiga en el campo de la seguridad estructural y su docencia.

Jose M^a Vercher Sanchis es profesor ayudante de la Escuela Técnica Superior de Arquitectura de Valencia. Imparte la asignatura de Materiales de Construcción en el Departamento de Construcciones Arquitectónicas. Es Arquitecto desde 2007 y superó la suficiencia investigadora en 2010 en la Universidad Politécnica de Valencia. En estos momentos se encuentra realizando su tesis doctoral.

Ángeles Mas Tomás es profesor titular de la Escuela Técnica Superior de Arquitectura de Valencia. Es responsable de la asignatura de Construcción I en el Departamento de Construcciones Arquitectónicas. Recibió el título de Arquitecto en 1982 y se doctoró en el Departamento de Construcciones Arquitectónicas en 1991. Actualmente está investigando sobre el proceso constructivo y su enseñanza.

...

Evaluación del índice de seguridad real en las construcciones

Introducción

El estudio de la seguridad real de las construcciones necesita la obtención de la carga última de colapso y su comparación con la de diseño. Para ello es necesario el conocimiento del comportamiento de los materiales y de su realidad constructiva. Por ello, esta investigación es conjunta entre distintos profesores del Departamento de Construcciones Arquitectónicas y del Departamento de Mecánica de los Medios Continuos y Teoría de Estructuras.

La idea de investigar en este campo surge a partir de la observación de obra construida con fenómenos patológicos muy importantes, como son la corrosión completa de las armaduras en las vigas e incluso en las viguetas pretensadas. Si evaluamos la seguridad con los métodos clásicos, como los recogidos por *Calavera* (1986), la obra tendría que encontrarse en ruina, en cambio, nos encontramos que está en uso y sin una sensación de riesgo inmediata. Podemos ver un ejemplo en la Figura 1, donde aparecen viguetas prefabricadas sin recubrimiento inferior de hormigón e incluso sin redondos en alguna zona debido a su completa corrosión. Según los métodos de cálculo comúnmente empleados en la práctica profesional, en ambos casos el elemento debería colapsar, sin embargo la construcción se mantiene en pie, porque la obra tiene unos mecanismos de resistencia adicionales.



Fig. 1. Viguetas existentes en una edificación con armadura corroída.

Esta investigación no es válida para su directa aplicación en una oficina técnica dedicada al cálculo de estructuras a nivel comercial, porque no les resultaría rentable dedicar tanto tiempo al cálculo a cada estructura (*EHE-08* y *CTE-06*). Los métodos con los que se calculan las estructuras para su construcción son adecuados, ya que poseen unos métodos de cálculo relativamente rápidos, aspecto que prevalece cuando hay intereses económicos de por medio, y además incluyen unos coeficientes de seguridad que aseguran la estabilidad de la obra. Estos métodos de cálculo se basan en unas hipótesis de cálculo muy seguras, como son el comportamiento lineal del material, el planteamiento del equilibrio en la estructura sin deformar, la consideración de que un sólido es una línea, de las cargas estadísticas y de las propiedades de los materiales también estadísticos (*Calavera*, 1983).

La finalidad de esta investigación es intentar entender mejor el comportamiento real de las estructuras. Queremos pasar a modelos tridimensionales reales y trabajar con sólidos, donde tendremos toda la precisión que necesitemos en nuestro estudio. Pero esto es viable en investigación, en proyecto no sería sensato por el tiempo necesario para estos modelos. Dentro de este propósito intentamos abarcar desde un elemento aislado como podría ser una vigueta, comúnmente modelizada como una línea, hasta el conjunto de la construcción. Al modelizar y estudiar toda la estructura como conjunto es donde apreciaremos los efectos que queremos estudiar, veremos de qué manera colaboran los distintos elementos estructurales entre sí.

Objetivos de la investigación

El fin primordial de este trabajo conjunto entre varios departamentos es evaluar el índice de seguridad real en las construcciones teniendo en cuenta todos los aspectos que afectan a su comportamiento. Pero queremos dar un paso más. Una vez logremos obtener la carga de colapso la compararemos con la que nos daría cada uno de los métodos clásicos del análisis estructural de barras con comportamiento lineal. En esencia lo que queremos conseguir es saber si un determinado método es seguro, excesivamente seguro o muy poco seguro.

Entre los métodos que vamos a analizar destacamos el método de análisis lineal de las rigideces (*Timoshenko*, 1997), que se impuso con la generalización de los ordenadores y es el más empleado actualmente a la hora de proyectar estructuras. Otro método con el que vamos a realizar comparaciones es el método de análisis plástico de la capacidad (*De Miguel*, 1996), basado en el teorema del límite inferior de la carga, que fundamenta este método estático. El tercer método que tenemos intención de incluir en la comparación es el Método de los Elementos Finitos (M.E.F.),

que no es más que la generalización del primer método a un continuo bi o tridimensional (*Zienkiewicz and Taylor, 1993*).

Para investigar el comportamiento real del conjunto formado por todos los elementos de hormigón armado que componen un edificio simularemos un edificio completo. Modelizamos todas las partes, como son pilares, vigas, viguetas, capa de compresión y armaduras en su ubicación exacta.

Uno de los principales objetivos que tenemos es entender el funcionamiento como conjunto de todos los elementos que componen un forjado, viguetas, capa de compresión y bovedillas. En unas primeras aproximaciones comprobamos que realmente trabajan como si se tratara de una losa nervada. Esto nos justificaría que se puedan cortar viguetas y abrir huecos en forjados ya ejecutados, llegando incluso a ver en qué zonas se pueden abrir con mayor facilidad, ya que habrá zonas que estarán sometidas a menores solicitaciones. La razón de por qué se aguanta esta vigueta cortada en su sitio es que la soportan entre las viguetas colindantes. En la Figura 2 podemos ver de manera gráfica la colaboración entre todo el conjunto formado por el forjado.

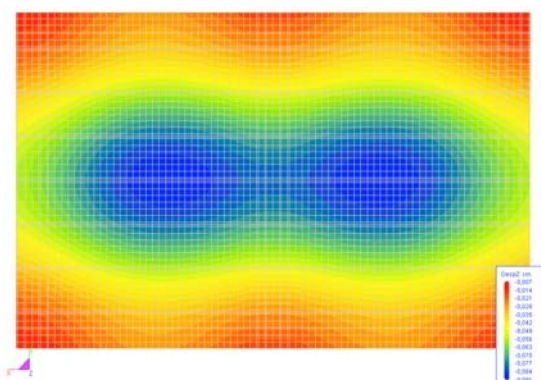


Fig. 2. Deformaciones en el forjado.

Este hecho se confirma al dar el paso de un nervio entendido como una línea a un nervio junto con la capa de compresión modelizados en volumen con sus dimensiones reales y con la armadura colocada en la posición correcta. Considerarlo una línea nos da una buena aproximación, pero estudiarla en tres dimensiones nos deja ver efectos concentrados locales y globales que atañen a varios elementos estructurales que no podríamos observar de otro modo. Como ejemplo se muestra el resultado de una reflexión. Cuando en una obra que tiene cierto tiempo observamos que se ha perdido la capa inferior de hormigón que recubría a las varillas de positivos de la vigueta, hay ocasiones en las que incluso se han corroído los redondos por completo y han desaparecido. Según la teoría clásica aquello debería estar en el suelo. Lo que hace que se mantenga en su posición es, como ya hemos comentado, la colaboración de las viguetas colindantes.

Además creemos que aparece un efecto arco a través del canto del propio nervio, que disminuye la flecha y ayuda a resistir, de manera que parte de la carga a la que está sometida la vigueta se transmite directamente por compresión a lo largo de un arco hasta las vigas. Nos interesará estudiar en qué porcentaje colabora diferenciando las posibles ubicaciones del nervio dentro de un forjado unidireccional. En la Figura 3 se muestran las primeras intuiciones de este efecto arco.

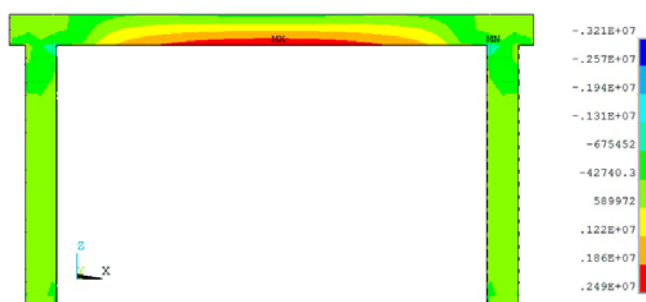


Fig. 3. Tensiones en el nervio.

Queremos evaluar el nivel de seguridad real de una estructura. Entendiendo este nivel de seguridad como el cociente entre la carga que puede soportar y la carga que soporta. Tenemos muy claro que las normas, la teoría y el cálculo elástico nos hacen calcular las estructuras con unos determinados coeficientes de seguridad, pero nosotros queremos investigar acerca de los que existirían de una forma lo más ajustada posible a la realidad. Un buen enfoque aplicado para nuestra investigación sería la peritación de estructuras dañadas. En proyecto se habían empleado unos índices de seguridad elevados, que no queremos decir que sean inadecuados o excesivos para el propósito que tienen. Pero cuando tenemos una patología el coeficiente de seguridad baja. Poniendo un ejemplo, podría pasar de 3,8 a 1,5. Esto es lo que queremos evaluar, el poder decir que esa estructura no se caería, y que además tendría un índice de seguridad X. Pero queremos dejar claro que este trabajo es un estudio teórico, para el mejor entendimiento y no para consistir en un manual de consulta. No vamos a investigar utilizando criterios de proyecto, vamos a intentar ajustarnos al máximo a la realidad en nuestras simulaciones.

Metodología empleada

La forma de proceder que estamos llevando a cabo en este trabajo abarca diversos frentes simultáneos. Como ya hemos dicho, por un lado estudiamos los métodos de cálculo clásicos para poder obtener resultados, y por otro lado necesitamos algún elemento que nos permita comparar los resultados. Llegados aquí vimos que existían dos posibilidades, poder

realizar ensayos experimentales reales de elementos estructurales para comparar los resultados con los de los cálculos teóricos, o utilizar alguna herramienta informática que nos permitiera simular estos ensayos experimentales. Nos decantamos por la segunda opción, debido a la dificultad de poder realizar ensayos experimentales reales.

Utilizando el Método de los Elementos Finitos (M.E.F.) se pueden obtener resultados analíticos mediante cálculos matemáticos, pero son mucho más complejos que en el caso de los métodos clásicos. Como ventaja nos proporcionan unos resultados mucho más aproximados a la realidad, porque las estructuras reales son volumétricas, y con un método de cálculo que tenga en cuenta esto, se pueden obtener resultados numéricos que representen la totalidad de los fenómenos complejos que intervendrían en el comportamiento real de la estructura (plasticidad, no linealidad...). Con la aparición de programas informáticos que calculan con el M.E.F. la ardua tarea se ha facilitado en gran manera. Ahora ya podemos obtener resultados de modelos volumétricos muy complejos, que antes, cuando debíamos calcularlos a mano, eran inabordables.

El cálculo de estructuras mediante ordenador tiene grandes ventajas, que se pueden resumir en que hacen posible el cálculo de estructuras que necesitan un gran número de operaciones para su resolución y que reduce a límites despreciables el riesgo de errores operativos.

Elegimos el programa de cálculo de elementos finitos por ordenador ANSYS (*Theory Reference*, 2009), ya que es el más potente en cuanto a la capacidad de modelizar comportamientos complejos, como podrían ser la fisuración, el aplastamiento o la fluencia. Esta herramienta no se puede emplear a nivel de usuario proyectista, pero sí a nivel de investigador.

La complejidad del empleo de un programa de elementos finitos como ANSYS radica en la gran cantidad de variables que se deben controlar. Debido a ello, decidimos empezar modelizando elementos aislados, como pueden ser una vigueta o un pilar, para calibrar el programa y asegurarnos de que éramos capaces de obtener resultados correctos. Realizamos una búsqueda bibliográfica para documentarnos sobre ensayos experimentales reales.

En el transcurso de la investigación nos hemos encontrado básicamente con dos grandes problemas. El primer problema con el que nos encontramos es con la modelización del comportamiento de los materiales. En nuestro caso teníamos sólo dos, el acero y el hormigón. Existe la posibilidad de implementar las leyes no lineales en los programas de elementos finitos mediante dos procedimientos. En primer lugar, podemos programar el comportamiento del material independientemente del elemento que se vaya a emplear posteriormente. De este modo no tenemos limitaciones en cuanto a la elección del tipo de elemento. Deberíamos encontrar el tipo de elemento que mejor responda a la realidad física del

problema. En segundo lugar existe la posibilidad de programar determinadas propiedades específicas no lineales únicamente en un determinado tipo de elemento. Los desarrolladores de software es lo que han hecho en el caso del ANSYS.

Este programa nos proporciona un elemento sólido tridimensional de ocho nodos, el Solid65, que está especializado en modelizar la respuesta no lineal de materiales frágiles, basándose en el modelo constitutivo de comportamiento triaxial del hormigón utilizando el criterio de *Willam and Warnke* (1975). Tenemos representado este tipo de elemento en la Figura 4. Este elemento se emplea para el modelado de sólidos con o sin barras de refuerzo, y es capaz de fisurar a tracción y aplastar en compresión. El elemento está definido por ocho nodos, teniendo cada nodo tres grados de libertad: traslaciones en las direcciones x, y y z. Es interesante en este elemento el tratamiento de las propiedades no lineales del material, pudiendo calibrarle la fisuración, el aplastamiento, la deformación plástica y la fluencia. Podemos introducirle diversos criterios de plastificación y rotura, a la vez que le definimos perfectamente la curva tensión-deformación que regulará su comportamiento, que suele ser multilíneal.

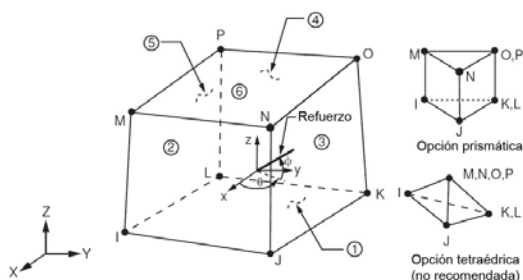


Fig. 4. Elemento Solid65.

Y para las barras de acero de refuerzo, el programa posee un elemento barra, el Link8, que es tridimensional y capaz de desarrollar tracciones y compresiones uniaxiales, pero no flectores. Posee también tres grados de libertad en cada nodo. Se incluye en este elemento la opción de analizar la plasticidad, la fluencia, el endurecimiento por tensión, y la capacidad de grandes deformaciones. Generalmente emplearemos un modelo de comportamiento bilíneal para el acero.

Una vez tenemos definidas las leyes constitutivas que dictan los comportamientos de los materiales, el segundo gran problema consiste en calibrar todas las opciones no lineales, incluyendo los criterios de convergencia. Este segundo frente es más complejo que el primero.

En primera instancia nos interesamos por ensayos de elementos sometidos a flexión. Nos decantamos por el artículo del profesor *Barbosa* (1998). Gracias a él pudimos calibrar el programa Ansys para elementos a flexión

dominados por la rotura del hormigón. Comparamos los diagramas carga-desplazamiento, los patrones de fisuración y la carga de aparición de primera fisura y carga de rotura. A título ilustrativo mostramos a continuación en las Figuras 5, 6, 7 y 8 la evolución de la fisuración a medida que incrementamos la carga en uno de los modelos de viguetas analizados. Mostramos estas imágenes porque es uno de los aspectos del Ansys que más nos hizo decantarnos por él, el poder ver la fisuración gráficamente en distintos intervalos de tiempo.

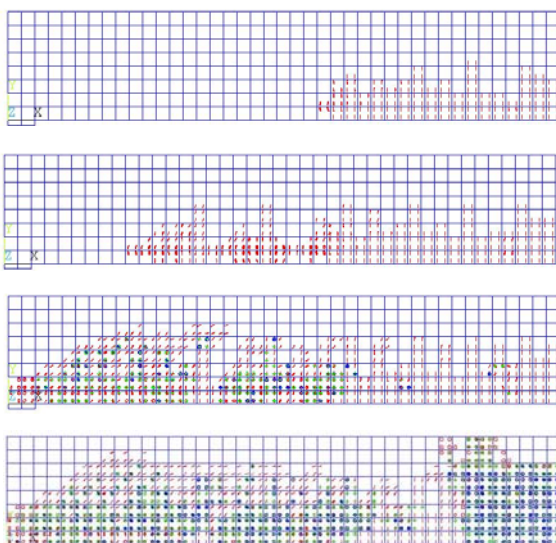


Fig. 5, 6, 7 y 8. Evolución de la fisuración

Se modelizó en este caso la mitad de la viga por cuestiones de simetría. Estaba sometida a una carga repartida vertical. En un primer estado, en la Figura 5, van apareciendo las primeras fisuras por flexión, debidas a la tracción en el hormigón de la parte inferior central de la viga. Más adelante, en la Figura 6, van progresando las fisuras por flexión y aparecen las fisuras por cortante. En la Figura 7 vemos como van avanzando las fisuras por cortante y finalmente la pieza colapsa por la aparición de fisuras de laminación en la parte superior central de la viga debidas a la gran compresión, aspecto que apreciamos en la Figura 8.

Poco después encontramos un artículo de *P. Fanning* (2001), con el que pudimos avanzar en la simulación del hormigón armado, ya que en este caso el elemento sometido a flexión poseía armadura de cortante, por lo que el dominio de rotura estaba gobernado por el acero, completando la modelización de elementos a flexión. Comprobamos en los patrones de fisuración que no aparecían fisuras por cortante. Comparamos los mismos aspectos que en el caso del ensayo del profesor Barbosa. En la Figura 9 apreciamos la gran concordancia entre los diagramas carga-desplazamiento

del ensayo y los de la modelización con Ansys. Se puede ver claramente el punto de aparición de la primera fisura, cuando comienza a plastificar el armado y la carga de rotura.

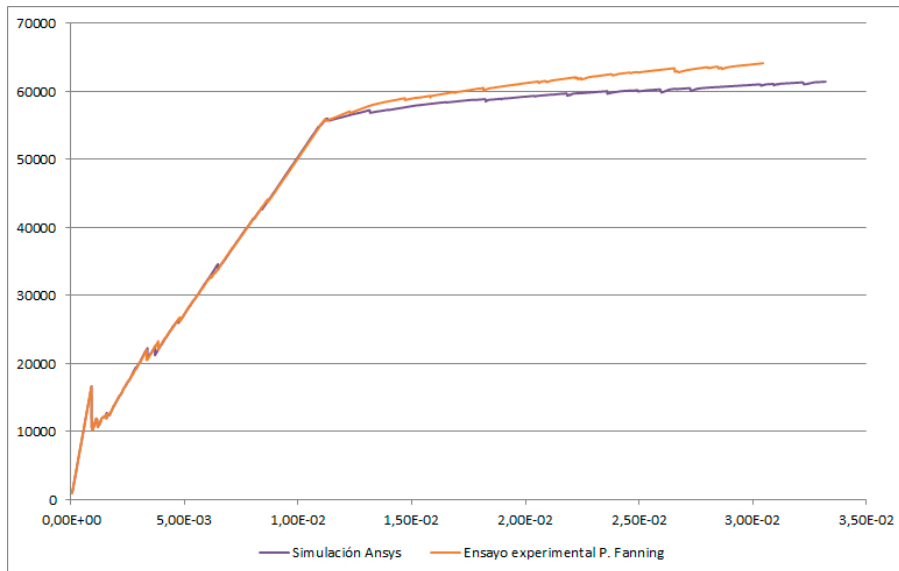


Fig. 9. Gráficas carga-desplazamiento.

Y, finalmente completamos el análisis de elementos aislados con un tercer artículo que ensayaba un elemento a compresión (*Tavio y Tata, 2009*). En el artículo obtenía diagramas carga-desplazamiento para distintas opciones de estribado. En la Figura 10 vemos la deformada de un caso analizado.

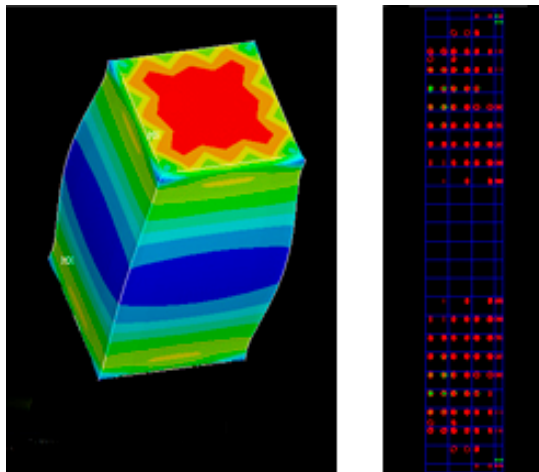


Fig. 10. Deformada total plástica del pilar en el eje Z y patrón de fisuración de un cuarto de pilar.

Situación actual

Hemos comprobado la gran concordancia que existe entre los resultados que obtenemos y los procedentes de ensayos encontrados en la bibliografía relacionada. Después de habernos cerciorado de que controlábamos el comportamiento de elementos aislados y las ecuaciones constitutivas de los materiales empezamos a modelizar el conjunto de una estructura. Teniendo en cuenta con la máxima precisión posible todos los elementos constructivos, capa de compresión, posición real de las armaduras, tanto longitudinales como cada uno de los estribos. Estas armaduras se han puesto en cada una de las viguetas, vigas y pilares, modelizados como sólidos.

Cabe decir también que cuando se trabaja con modelos tan grandes y con tantos nudos y elementos debemos colocarle un paso de carga muy pequeño para lograr la convergencia, lo que conlleva grandes tiempos de ordenador.

A continuación vamos a mostrar una serie de figuras en las que podremos observar el tipo de resultados que estamos obteniendo del conjunto de la estructura y patrones de fisuración. En este ejemplo se ha sometido a la estructura a la acción de su peso propio y se ha cargado con una sobrecarga superficial en los forjados de 5 KN/m².

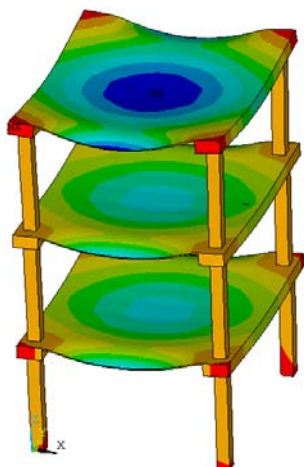


Fig. 11. Deformada de la estructura.

Vemos los resultados de deformada en Z en la Figura 11. El forjado superior es el que está sometido a mayores descensos, ya que no continúan los pilares hacia arriba, con lo que no se coarta el giro de las vigas por la cara de arriba.

En la Figura 12 se observan las tensiones en la dirección de las viguetas, en esta observamos que al aparecer la fisuración no tenemos un gradiente

continuo de tensiones. Aquí comprobamos la colaboración a nivel resistente entre ellas y la aparición del efecto arco.

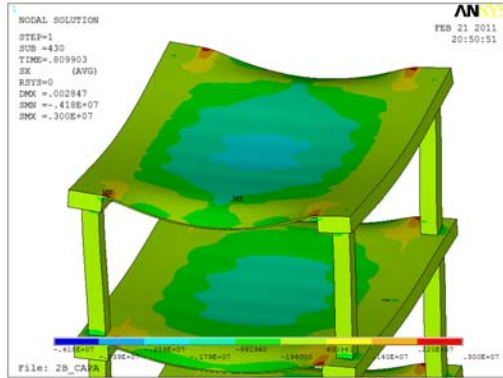


Fig. 12. Tensiones en X.

Respecto a la fisuración en la Figura 13 confirmamos que está fisurando por donde debería, es decir, en el tramo central de las viguetas y de las vigas, y en el arranque de los pilares.

En esta figura se observa la aparición primero de los patrones de fisuración en el centro de vano de las viguetas, posteriormente en el centro de las vigas y, finalmente, en el arranque de los pilares.

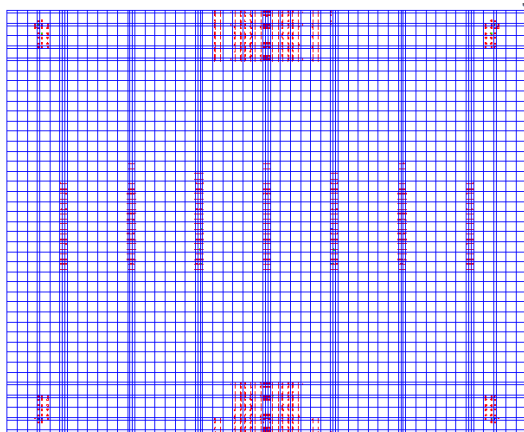


Fig. 13. Fisuración del forjado superior.

Conclusiones

La modelización de las estructuras de edificación parte de unas hipótesis que se han demostrado seguras y que permite el diseño de las mismas. En cambio estas hipótesis cuando las aplicamos a la peritación de una estructura ya construida y con una patología importante no reproducen su comportamiento real.

En la bibliografía específica el estudio de una estructura completa con todas sus dimensiones reales y todos sus refuerzos no se aborda habitualmente. Al simular una estructura en conjunto descubrimos los mecanismos de colaboración entre distintos elementos estructurales que aparecen en la realidad y que no se tienen en cuenta cuando se analiza una estructura de forma simplificada. Estos mecanismos de colaboración no se han investigado porque generalmente se ensayan y estudian elementos aislados (un pilar, una viga, una unión viga-pilar...).

Las herramientas actuales permiten abordar el conjunto de la estructura con todas sus dimensiones y armaduras, y en todo el rango de carga, incluso las no linealidades del material, fisuración y no linealidad geométrica.

En el periodo de investigación que hemos realizado hasta el momento hemos observado una serie de resultados:

- Elementos a flexión

En los análisis efectuados existe una concordancia total en los elementos aislados sometidos a flexión. Esta concordancia se manifiesta en todo el rango de las curvas carga-desplazamiento (Figura 9) y en la evolución de los patrones de fisuración.

Se han comparado los ensayos realizados por Barbosa y Ribeiro (1998) para un elemento sin armadura de cortantes y por Fanning (2001) para un elemento aislado con armadura de cortantes.

- Elementos sometidos a compresión

Análogamente también existe una igualdad en los resultados obtenidos con respecto a los ensayos de elementos aislados sometidos a compresión (Tavio y Tata, 2009). En este caso hemos contrastado diferentes patrones de armado y estribado. Las gráficas obtenidas de carga-desplazamiento se superponen, y los patrones de fisuración se reproducen fielmente (Figura 10).

- Conjunto estructural

Analizando ya el conjunto de la estructura se reproduce fielmente todo el rango elástico y lineal de comportamiento de los materiales. Esto lo hemos contrastado comparando estos análisis realizados con el

programa Ansys con simulaciones de otros programas de cálculo lineal, como el CidCad (Figura 11).

En las simulaciones los patrones de fisuración aparecen de forma lógica, apareciendo primero zonas fisuradas en las zonas de tracción de los elementos más solicitados que evolucionan progresivamente (Figura 13).

La precisión obtenida en los elementos a flexión y a compresión, los patrones de fisuración junto con la validez del modelo en su rango lineal, es lo que nos permite extrapolar a todo el conjunto la validez de las simulaciones propuestas.

El objetivo es encontrar toda la curva de cargas-desplazamientos en donde la pendiente horizontal representa la carga última, y por tanto podemos obtener el coeficiente de seguridad de la misma, que nos ayudará a decidir si puede continuar en uso.

Bibliografía

ANSYS 12.1 Help, THEORY REFERENCE, STRUCTURAL ANALYSIS GUIDE and ELEMENT REFERENCE. ANSYS Release 12.1. 2009.

BARBOSA, A.F. and RIBEIRO, G.O.: Analysis of reinforced concrete structures using Ansys nonlinear concrete model. *Computational Mechanics*, 1(8): 1-7. 1998.

CALAVERA RUÍZ, J.: *Proyecto y cálculo de estructuras de hormigón armado para edificios*. Tomos I y II. Ed. INTEMAC. Madrid. 1983.

CALAVERA RUÍZ, J.: *Cálculo, construcción y patología de forjados de edificación*. Ed. INTEMAC. 3ª Edición. Madrid, 1986.

CÓDIGO TÉCNICO DE LA EDIFICACIÓN. Ministerio de Vivienda. Ed. Boletín Oficial del Estado. 1ª Ed. Madrid. 2006.

FANNING, P.: Nonlinear models of reinforced and post-tensioned concrete beams. *Electronic Journal of Structural Engineering*, 2: 111-119. 2001.

GERE, J.M. and TIMOSHENKO, S.P.: *Mechanics of Materials*, PWS Publishing Company, Boston, Massachusetts, 1997.

INSTRUCCIÓN DEL HORMIGÓN ESTRUCTURAL (EHE-08). Ministerio de Fomento. Ed. Boletín Oficial del Estado. 1ª Ed. Madrid. 2008.

TAVIO, T. and TATA, A.: Predicting nonlinear behavior and stress-strain relationship of rectangular confined reinforced concrete columns with Ansys. *Civil Engineering Dimension*, 11-1: 23-31. 2009.

WILLAM, K.J. and WARNKE, E.D.: Constitutive model for the triaxial behavior of concrete. *Proceedings of the International Association for Bridge and Structural Engineering*, ISMES, Bergamo, Italy, pp.19: 1-30. 1975.

ZIENKIEWICZ, O.C. y TAYLOR, R.L.: *El método de los elementos finitos*, Vol. 1-2, 4ª Ed. CIMNE Barcelona, Mc Graw-Hill, 1993.