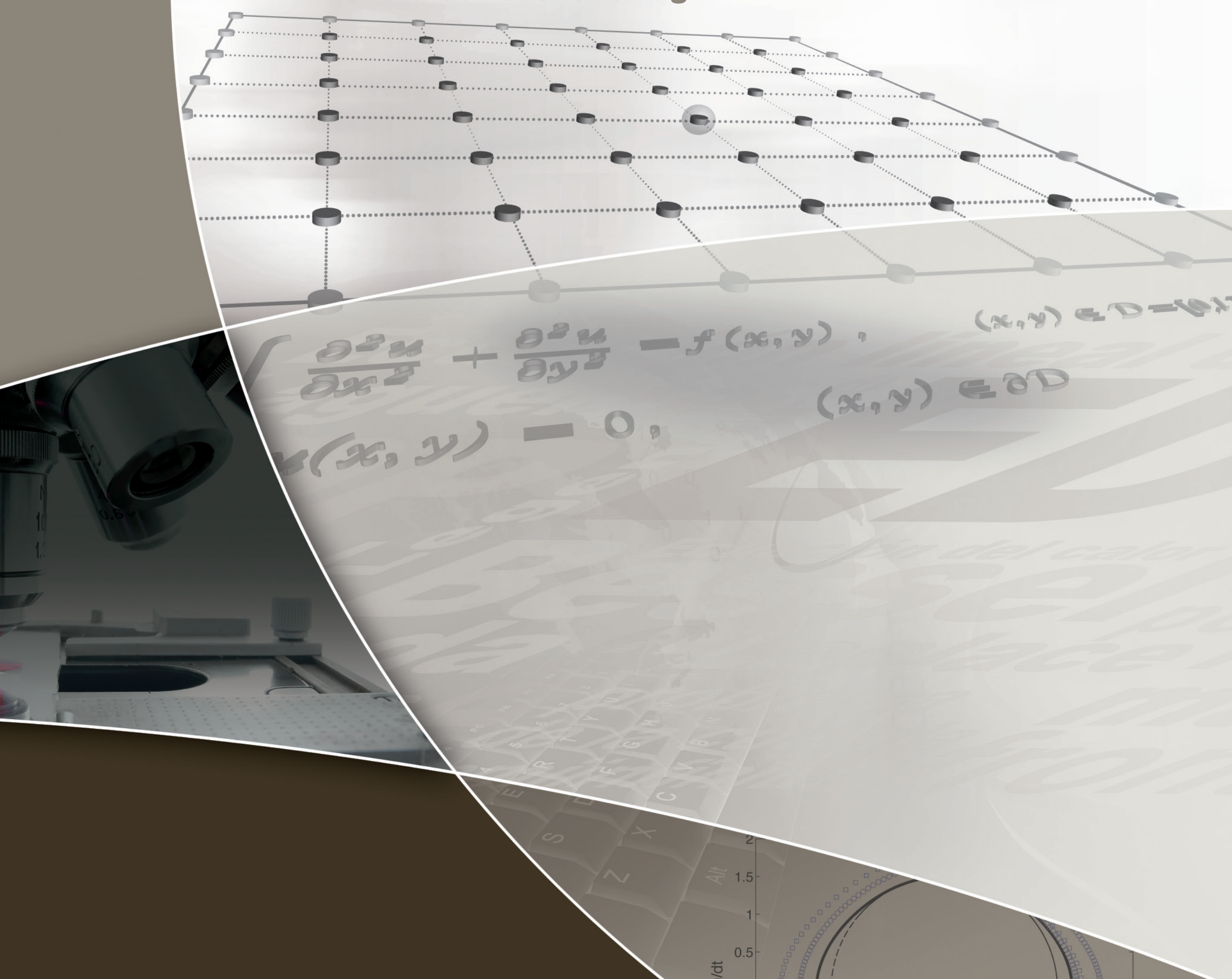
Introducción a los métodos numéricos para ecuaciones diferenciales

3ª edición

Sergio Blanes Zamora
Damián Ginestar Peiró
María Dolores Roselló Ferragud



académica

EDITORIAL
UNIVERSITAT POLITÈCNICA DE VALÈNCIA

Sergio Blanes Zamora
Damián Ginestar Peiró
María Dolores Roselló Ferragud

Introducción a los métodos numéricos para ecuaciones diferenciales

3ª edición

Editorial
Universitat Politècnica
de València

Colección Académica

Para referenciar esta publicación utilice la siguiente cita: Blanes Zamora, S.; Ginestar Peiró, D.; Roselló Ferragud, M.D. 3ª ed. (2020). *Introducción a los métodos numéricos para ecuaciones diferenciales.* Editorial Universitat Politècnica de València

Venta: www.lalibreria.upv.es / Ref.: 0756_03_03_01

Imprime: Byprint Percom, S. L.

ISBN: 978-84-9048-882-9
Impreso bajo demanda

Si el lector detecta algún error en el libro o bien quiere contactar con los autores, puede enviar un correo a edicion@editorial.upv.es

Impreso en España

Índice general

Parte I

Contenidos teóricos

Capítulo 1

Introducción a la modelización matemática en la Ingeniería

Uno de los principales logros de la Matemática es su aplicabilidad a la solución de problemas reales. Algunos de estos problemas aparecen en fenómenos de la naturaleza como, por ejemplo, la propagación de ondas o la predicción del tiempo. Otros muchos aparecen en aplicaciones o procesos industriales y técnicos como, por ejemplo, el control de temperaturas, el diseño de una cadena de montaje, el control de vuelo en un avión, el diseño de una aeronave, etc. Frecuentemente, a la resolución del problema se añaden otro tipo de factores, como pueden ser, la inaccesibilidad de la maquinaria o procesos de corrosión química, que incrementan la dificultad de obtener los resultados deseados y detectar averías. Las matemáticas juegan un papel fundamental en estos casos ya que permiten diseñar modelos que se ajusten al comportamiento del problema, complementando el estudio teórico del modelo con un proceso de simulación que posibilita optimizar los diseños y mejorar los resultados obtenidos.

1.1 Modelización matemática

En esta parte pretendemos dar respuesta, de forma introductoria, a las siguientes preguntas:

¿Qué significa el término modelo?, ¿cómo se construye un modelo? y ¿qué es lo que podemos conseguir con él?.

A grandes rasgos, un modelo matemático es aquel que utiliza las técnicas matemáticas como, por ejemplo, ecuaciones, funciones, probabilidades, etc., para la representación de un determinado proceso o fenómeno del mundo real. Los modelos matemáticos pueden ser de diferentes tipos como, por ejemplo:

- Estáticos: Son modelos invariables en el tiempo. El modelo de una construcción, pieza o dispositivo en los que se relacionen sus variables de estado principales con otras primarias puede considerarse como un modelo estático.
- Dinámicos: Son aquellos modelos que evolucionan con el tiempo. La mayoría de modelos tienen un comportamiento dinámico.
- Continuos: Son los modelos que consideran las variables de estado del sistema como continuas.
- Discretos: Son aquellos que consideran las variables discretas. Los modelos discretos son de gran utilidad en procesos intrínsecamente discretos como los que aparecen en procesos económicos o en diseño de procesos informáticos.
- Deterministas: Son modelos donde no hay incertidumbre y se puede conocer de manera puntual la forma del resultado. Los principales *modelos deterministas de procesos continuos* suelen estar representados por ecuaciones o sistemas de ecuaciones diferenciales ordinarias o en derivadas parciales. Los principales *modelos deterministas de procesos discretos* suelen estar representados por ecuaciones o sistemas de ecuaciones en diferencias.
- Estocásticos: Son modelos en los que no se conoce el resultado esperado, sino su probabilidad y existe, por tanto, incertidumbre. Los *modelos estocásticos* permiten extraer información acerca de una causa-efecto o hacer predicciones sobre algún proceso. Estos modelos vienen representados por ecuaciones que involucran probabilidades. Cuando un parámetro

o variable involucra aleatoriedad se le suele llamar variable aleatoria y, si se trata de una función, proceso estocástico.

La solución de los modelos matemáticos se puede obtener por métodos analíticos o por métodos numéricos. La resolución analítica consiste en la obtención de una expresión que nos proporcione toda la información necesaria sobre dicha solución. La resolución numérica consiste en encontrar una aproximación de la solución buscada dentro de un orden de tolerancia.

Uno de los propósitos de un modelo es que permita predecir la respuesta de un sistema dadas unas condiciones. Por una parte, el modelo debe ser una buena aproximación al sistema real e incorporar la mayor parte de sus características. Por otra parte, no debe ser tan complejo que sea imposible de entender o experimentar con él. También hay que tener en cuenta el coste de la construcción y resolución del modelo, ya que en muchas ocasiones necesitaremos una respuesta rápida. Además, el modelo debe ser flexible, esto es, deber ser capaz de responder adecuadamente a cambios en el sistema.

Resumiendo, para elaborar un modelo matemático hay que tener en cuenta las siguientes propiedades:

- Fidelidad.
- Complejidad.
- Coste.
- Flexibilidad.

Un buen modelo debe mantener el equilibrio entre realidad y simplicidad. Es conveniente empezar con un modelo sencillo e ir completándolo de forma gradual.

El proceso para elaborar un modelo matemático es el siguiente:

Paso 1. Identificación del problema: Identificar el problema real que hay que resolver y determinar qué se quiere hacer o encontrar.

Paso 2. Formulación del modelo matemático: Determinar la información relevante y los datos que son de utilidad y hacer hipótesis. Básicamente se realizarán dos tareas:

a. Determinación de variables: Identificar las variables involucradas en el proceso, estableciendo si son parámetros, variables dependientes o independientes, especificar las restricciones, etc.

b. Formulación matemática: Realizar hipótesis lo suficientemente simples para tratarse de manera matemática. Formular el tipo de ecuación o procedimiento que mejor describe y se ajusta a la idealización del problema, teniendo en cuenta si existen diferentes alternativas al modelo.

Paso 3. Resolución o interpretación: Aplicar los conocimientos matemáticos para resolver o interpretar el modelo.

Paso 4. Verificación y validación: Comparar los datos obtenidos con datos reales. Esto puede dar lugar a incorporar nuevas necesidades en el modelo para mejorar los resultados. Si los resultados se alejan de los objetivos, reajustar los parámetros y/o el modelo e iniciar el proceso.

En la Figura 1.1 podemos ver de forma esquemática el procedimiento anterior. Se empieza examinando el sistema e identificando el comportamiento particular que deseamos predecir o explicar. Después se identifican las variables y se realizan hipótesis lo suficientemente sencillas para poderlas formular matemáticamente y generar el modelo. Entonces se valida el modelo con las pruebas o ensayos necesarios. Si los resultados son satisfactorios se puede usar el modelo para la finalidad prevista. Si los resultados no son satisfactorios hay varias posibilidades. Se puede decidir que el modelo necesita ser refinado bien incorporando nuevas variables o reestructurando parte del modelo. En algunos casos los resultados pueden ser tan insatisfactorios que el problema original debe ser redefinido porque era demasiado ambicioso.

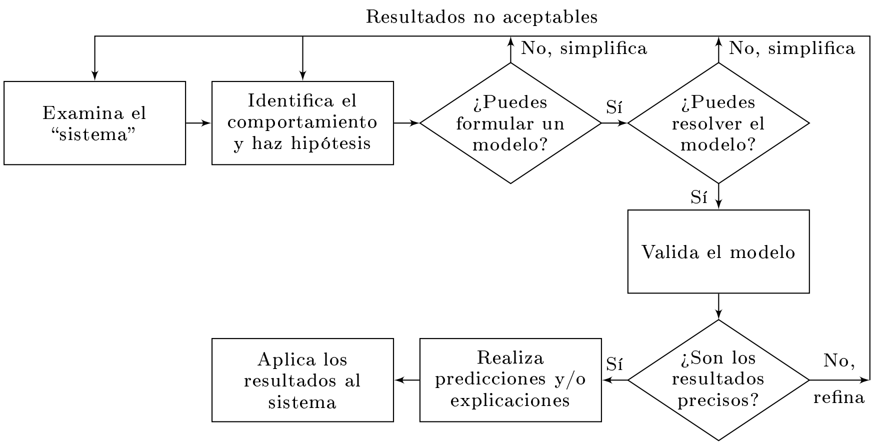


Figura 1.1: La naturaleza iterativa de la construcción de un modelo.

El proceso que se presenta en la Figura 1.1 no sólo hace hincapié en la naturaleza iterativa de la construcción del modelo, sino también introduce el equilibrio entre la simplificación y el refinamiento del modelo. Generalmente se empieza con un modelo simple y se evoluciona en el proceso de modelado, refinándolo según los resultados obtenidos en el proceso de validación. Si no se puede llegar a un modelo adecuado o no puede resolverse, se debe simplificar. Si los resultados no son suficientemente precisos se debe refinar el modelo.

Debido generalmente a los altos costes en la fabricación de prototipos, en los últimos años se ha incrementado considerablemente el uso de la simulación. El uso de la simulación antes de cambiar o elaborar un nuevo producto permite reducir las posibilidades de que no se cumplan las especificaciones deseadas, eliminar obstáculos imprevistos, prevenir el hecho de utilizar excesivos o escasos recursos y optimizar su rendimiento.

En particular, dentro del campo de la aeronáutica, debido al alto coste de la construcción y las pruebas de vuelo en aviones reales, los modelos matemáticos juegan un papel fundamental. Estos modelos se usan conjuntamente con la simulación por ordenador, entre otras cosas, para evaluar las posibilidades de un prototipo de avión y de aquí mejorar el diseño del mismo. Además, una vez obtenido y validado el modelo, se puede utilizar para realizar simulaciones de vuelo, reconstruir las condiciones de vuelo tras un accidente, estudiar efectos en la modificación del diseño, predecir la fatiga producida en cierta parte del fuselaje del avión, etc.

1.2 Algunos modelos diferenciales

En este apartado veremos algunos ejemplos de modelos matemáticos sencillos que se basan en ecuaciones diferenciales ordinarias y en ecuaciones diferenciales en derivadas parciales.

El primer ejemplo describe las oscilaciones de una masa sujeta por un muelle obligada a moverse en línea recta.

Ejemplo 1.1 (Sistema masa-muelle) *Considerar un sistema mecánico constituido por una masa m que se puede trasladar a lo largo de una línea horizontal, por ejemplo, el eje x (ver Figura 1.2). La posición de la masa se identifica por la coordenada de su centro de masas, P, que está atado a un muelle elástico, cuyos extremos son A y P. Escribir las ecuaciones del movimiento del sistema mecánico considerando los siguientes casos de dificultad creciente:*

a) *No hay rozamiento ni fuerzas externas y las oscilaciones son pequeñas.*

b) *No hay rozamiento ni fuerzas externas pero las oscilaciones no son pequeñas, esto es, la ley de Hook no es válida y hay que tener en cuenta fuerzas proporcionales al cuadrado o al cubo del valor del desplazamiento.*

c) *Caso* **b)** *donde además hay rozamiento y se aplican fuerzas externas dependientes del tiempo.*

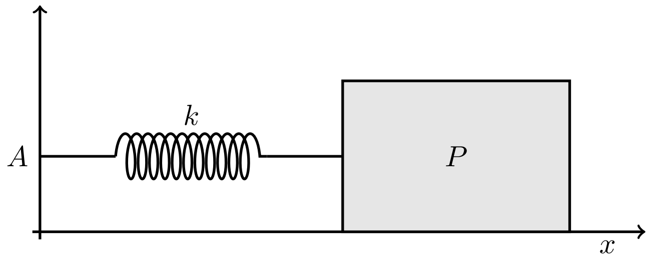


Figura 1.2: Sistema masa-muelle.

Solución:

a) Las hipótesis que definen el sistema mecánico son las siguientes:

- El sistema se comporta como una masa puntual cuya posición se identifica por la variable x.
- La acción del muelle es una fuerza de la forma $F(x) = kx$.
- Las fuerzas de rozamiento son despreciables con respecto a la acción del muelle.

Aplicando la Segunda ley de Newton de la mecánica clásica tenemos

$$m\frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}\, t^2} = -kx. \tag{1.1}$$

El modelo matemático es una ecuación de evolución para el siguiente vector de variables:

$$\mathbf{u} = \begin{pmatrix} x \\ \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} \end{pmatrix}.$$

Utilizando las variables anteriores y llamando $v = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$, $\kappa = \frac{k}{m}$, la ecuación diferencial ordinaria de segundo orden (1.1) queda

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} & = & v, \\ \dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} & = & -\kappa x, \end{array} \right. \tag{1.2}$$

que es un sistema de ecuaciones diferenciales lineales de primer orden. El sistema (1.2) lo escribiremos habitualmente en la forma vectorial,

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\begin{pmatrix} x \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v \\ -\kappa\, x \end{pmatrix}.$$

b) Vamos a considerar un orden superior en el desarrollo de Taylor de la fuerza de restitución, esto es,

$$F(x) = -kx + \epsilon x^2,$$

(ϵ suele ser un parámetro pequeño y, por tanto, la contribución del término ϵx^2 sólo es relevante cuando x toma valores grandes, es decir, con oscilaciones de gran amplitud). En este caso, considerando $\varepsilon = \frac{\epsilon}{m}$ el sistema a resolver será

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\begin{pmatrix} x \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v \\ -\kappa\, x + \varepsilon\, x^2 \end{pmatrix},$$

cuya solución analítica puede adquirir una complejidad considerable.

c) Si consideramos una fuerza de rozamiento en sentido opuesto al movimiento proporcional a la velocidad, con coeficiente de rozamiento α, y una fuerza externa, $f(t)$, la fuerza total será:

$$F(x,t) = -k\, x + \epsilon\, x^2 - \alpha\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + f(t),$$

y denotando $\beta = \frac{\alpha}{m}$ y $\tilde{f}(t) = \frac{f(t)}{m}$, el sistema a resolver será

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\begin{pmatrix} x \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v \\ -\kappa\, x + \varepsilon\, x^2 - \beta v + \tilde{f}(t) \end{pmatrix},$$

que no tiene solución analítica.

■

En el siguiente ejemplo deducimos las ecuaciones que describen el movimiento de un péndulo, particularizando posteriormente el modelo para el caso en que las oscilaciones sean pequeñas.

Ejemplo 1.2 (Movimiento de un péndulo) *Escribir la ecuación que describe el movimiento de un péndulo de longitud l en el que cuelga una bola de masa m, que oscila sin rozamiento bajo la acción de la gravedad, como un sistema de ecuaciones diferenciales de primer orden. Escribir también la ecuación aproximada para oscilaciones pequeñas.*

Solución:

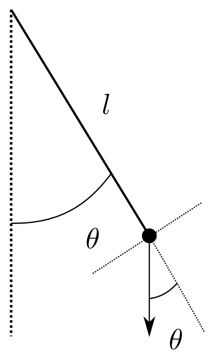


Figura 1.3: Péndulo.

El movimiento de un péndulo viene descrito por la Segunda ley de Newton. A partir de la Figura 1.3, podemos plantear las ecuaciones

$$m\frac{\mathrm{d}^2(l\theta)}{\mathrm{d}t^2} = -mg\,\mathrm{sen}(\theta), \qquad \theta(0) = \theta_0, \quad \theta'(0) = \theta'_0\,,$$

donde g es la constante gravitatoria y θ es el ángulo que forma con la vertical. Simplificando y agrupando términos se tiene

$$\frac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}t^2} = -k^2\,\mathrm{sen}(\theta), \qquad k = \sqrt{\frac{g}{l}}.$$

Si las oscilaciones son pequeñas, podemos tomar $\mathrm{sen}(\theta) \simeq \theta$ y, llamando $\omega = \theta'$, los sistemas de ecuaciones de primer orden para oscilaciones arbitrarias y oscilaciones pequeñas son, respectivamente,

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\begin{pmatrix}\theta \\ \omega\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\omega \\ -k^2 \operatorname{sen}(\theta)\end{pmatrix}, \qquad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\begin{pmatrix}\theta \\ \omega\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\omega \\ -k^2\,\theta\end{pmatrix}.$$

Observamos que el primer sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias es no lineal, mientras que el segundo es lineal.

El problema linealizado se corresponde con un oscilador armónico, cuya solución es fácil de obtener y viene dada por

$$\theta(t) = \theta_0 \cos(kt) + \frac{\theta_0'}{k} \operatorname{sen}(kt).$$

En cambio, la solución del problema no lineal es bastante complicada y viene dada en términos de integrales elípticas de primera especie (cuyo valor hay que calcular numéricamente), por lo que lo más sencillo y rápido suele ser resolver el sistema de ecuaciones numéricamente. ■

Ejemplo 1.3 (Vibraciones) *Bajo condiciones generales, las oscilaciones de una cuerda de masa despreciable vienen descritas por la ecuación de ondas,*

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \alpha^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right).$$

Si en vez de una cuerda se tiene una membrana bidimensional, la ecuación de ondas se puede expresar como

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \alpha^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right) = \alpha^2 \nabla^2 u.$$

Para placas rectangulares, las ondas transversales de pequeña amplitud se pueden describir mediante la ecuación

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \alpha^2 \left(\frac{\partial^4 u}{\partial x^4} + 2\frac{\partial^4 u}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 u}{\partial y^4}\right) = \alpha^2 \nabla^4 u.$$

Ejemplo 1.4 (Ecuaciones de los fluidos) *La ecuación de continuidad para un fluido se escribe, para el campo de velocidades* $\mathbf{v}$, *como*

$$\nabla \mathbf{v} = 0.$$

La ecuación de conservación del momento para un fluido Newtoniano se expresa como

$$\rho \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = \rho \mathbf{g} - \nabla p + \mu \nabla^2 \mathbf{v},$$

donde ρ es la densidad del fluido, $\mathbf{g}$ la aceleración de la gravedad, p la presión y μ el coeficiente de viscosidad.

La ecuación de la conservación de la energía es de la forma

$$\rho c_p \frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}t} = \lambda \nabla^2 T + \Phi,$$

donde T es la temperatura, c_p es el calor específico, λ el coeficiente de conductividad térmica y Φ la función de disipación viscosa.

1.3 Ecuaciones adimensionales

En ocasiones, es interesante expresar los modelos en términos de variables adimensionales; con ello, se obtienen modelos que no dependen de las características concretas del problema particular que se estudia.

Los ejemplos anteriores se pueden reescribir usando variables adimensionales. Este procedimiento siempre se puede aplicar y es útil. En algunos casos es necesario escribir modelos en los que todas las variables, dependientes e independientes, estén escritas en forma adimensional referidas a unas variables de referencia adecuadas. Éstas se pueden elegir de forma que las nuevas variables tomen valores en los dominios $[0, 1]$ o $[-1, 1]$.

Las variables de referencia se pueden elegir considerando razones físicas y/o geométricas relacionadas con el sistema particular que se esté modelizando. Técnicamente, si consideramos w cierta variable (dependiente o independiente), y suponemos que los valores menor y mayor de w son, respectivamente, w_m y w_M, determinados por medidas físicas o geométricas, podemos obtener la siguiente variable adimensional:

$$w^* = \frac{w - w_m}{w_M - w_m}, \qquad w^* \in [0, 1].$$

Por ejemplo, si w representa la temperatura de un material sólido, podemos suponer $w_m = 0$ y $w_M = w_c$, siendo w_c la temperatura de fusión del sólido.

En principio, la descripción del modelo debería definir la evolución dentro del dominio $[0, 1]$. Si esto no ocurriera, el modelo tendría que ser analizado de forma crítica.

Si consideramos las variables espaciales independientes, por ejemplo, x, y y z para un sistema de dimensión finita, entonces podemos adimensionalizarlas tomando como variables de referencia el menor y mayor valor que toman cada una de ellas, respectivamente, x_m, y_m, z_m, y x_M, y_M, z_M.

En algunos casos, puede ser útil referenciar todas las variables con respecto a una única variable espacial, generalmente la que alcanza un valor mayor. Por ejemplo, supongamos que $x_m = y_m = z_m = 0$, y que $y_M = ax_M$, y $z_M = bx_M$, con $a, b < 1$, entonces,

$$x^* = \frac{x}{x_M}, \qquad y^* = \frac{y}{x_M}, \qquad z^* = \frac{z}{x_M},$$

con $x^* \in [0, 1]$, $y^* \in [0, a]$, $z^* \in [0, b]$.

Una cuestión más delicada es la elección del tiempo de referencia. Técnicamente, si el tiempo inicial es t_0 y t es el tiempo real, podemos tomar:

$$t^* = \frac{t - t_0}{T_c - t_0}, \qquad t^* \geq 0.$$

Generalmente podemos tomar $t_0 = 0$ y T_c es un parámetro con dimensiones de tiempo que se elige para que se satisfagan ciertas condiciones.

De modo ilustrativo, vamos a adimensionalizar uno de los ejemplos estudiados en el apartado 1.2.

Ejemplo 1.5 (Adimensionalización del modelo lineal muelle-masa) *Considerar el modelo descrito en el apartado* **a)** *del Ejemplo 1.1, en el que se añade la siguiente hipótesis:*

- *Se aplica una fuerza F en la dirección del eje x.*

Obtener una ecuación adimensionalizada para el modelo descrito.

Solución:
En este caso, el modelo se puede escribir de la siguiente forma:

$$m\frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2} = F - kx. \tag{1.3}$$

Es natural tomar $l = F/k$, $t^* = t/T_c$, y $x^* = x/l$. Entonces la ecuación (1.3) se reescribe

$$\frac{m}{kT_c^2}\frac{\mathrm{d}^2 x^*}{\mathrm{d}t^{*2}} = 1 - x^*.$$

Si elegimos T_c tal que

$$\frac{m}{kT_c^2} = 1 \quad \Longrightarrow \quad T_c^2 = \frac{m}{k},$$

se tiene

$$\frac{\mathrm{d}^2 x^*}{\mathrm{d}t^{*2}} = 1 - x^*,$$

que es un modelo de segundo orden cuya evolución se puede analizar en términos de unidades de T_c. ■

1.4 Cálculo de trayectorias de órbitas de satélites

Para conocer la posición en cada instante de un satélite que orbita alrededor de la Tierra es necesario conocer las ecuaciones diferenciales que describen su evolución. En éstas influyen la distancia al centro de gravedad de la Tierra, pero también el achatamiento de la Tierra, la influencia de la Luna, del Sol, los efectos relativistas, etc. Dependiendo de la precisión que se requiera se utilizarán modelos que incorporen solo los efectos dominantes para el problema a estudiar y su resolución suele requirir de técnicas numéricas más o menos elaboradas en función de la complejidad del modelo a resolver y de la precisión requerida.

Así pues, un modelo simplificado para calcular la órbita de un satélite alrededor de la Tierra consiste en suponer que la masa total de la Tierra se encuentra concentrada en su centro de gravedad y que la única fuerza que interviene es la de la gravedad.

A la hora de plantear las ecuaciones diferenciales que describen el movimiento del satélite consideraremos que la masa del satélite es despreciable frente a la masa de la Tierra y, por tanto, el centro de gravedad del sistema satélite-Tierra es el de la Tierra. Considerando un sistema de referencia en el que la Tierra se encuentra en el origen de coordenadas, las ecuaciones de Newton vienen dadas por

$$m\frac{\mathrm{d}^2\,\mathbf{r}}{\mathrm{d}t^2} = -G\,M\,m\frac{\mathbf{r}}{r^3}, \qquad \mathbf{r}(0) = \mathbf{r}_0, \quad \mathbf{r}'(0) = \mathbf{r}_0', \tag{1.4}$$

donde $\mathbf{r} = (x, y, z)$ es la posición del satélite respecto al origen (el centro de gravedad de la Tierra), $r = \|\mathbf{r}\| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$, $G = 6.67 \cdot 10^{-11}\mathrm{Nm}^2/\mathrm{kg}^2$ es la constante de gravitación universal, $M = 5.972 \cdot 10^{24}\mathrm{kg}$ es la masa de la Tierra, y m es la masa del satélite. Al considerar la masa del satélite despreciable respecto a la de la Tierra obtenemos que las ecuaciones que describen las trayectorias del satélite no dependen de su masa y ésta se puede eliminar de las ecuaciones.

Si denotamos por $\mathbf{v} = \mathbf{r}' = (v_x, v_y, v_z)$, el sistema de ecuaciones diferenciales de segundo orden se puede escribir como un sistema de ecuaciones de primer orden de dimensión doble:

$$\left\{ \begin{array}{rcl} x' &=& v_x\,, \\ y' &=& v_y\,, \\ z' &=& v_z\,, \\ v_x' &=& -\mu \dfrac{x}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}\,, \\ v_y' &=& -\mu \dfrac{y}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}\,, \\ v_z' &=& -\mu \dfrac{z}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}\,, \end{array} \right. \tag{1.5}$$

siendo $\mu = GM$. Si solo consideramos la trayectoria de un satélite podemos suponer que tiene lugar en un plano y tomar $z = 0,\ v_z = 0$, simplificando las ecuaciones a un problema de 4 dimensiones. En el caso de considerar varios satélites moviéndose en diferentes planos y querer estudiar la posición relativa entre ellos será necesario trabajar con las 6 dimensiones.

Si nos centramos en un satélite y no hay rozamiento con la atmósfera, la suma de la energía cinética, T, más la potencial, V, por unidad de masa se debe de conservar, esto es,

$$E = T(\mathbf{v}) + V(\mathbf{r}) = \frac{1}{2}\mathbf{v}^T\mathbf{v} - \mu\frac{1}{r} \tag{1.6}$$

(con $r = \|\mathbf{r}\| = \sqrt{x^2 + y^2}$) debe tener el mismo valor en cualquier instante, aunque $\mathbf{r}, \mathbf{v}$ varien en el tiempo. Para energías negativas (trayectorias elípticas acotadas) el movimiento es periódico de periodo

$$T = \frac{2\pi}{\sqrt{-8\mu E_0^3}} = \frac{2\pi}{\sqrt{\mu}}a^{3/2}, \tag{1.7}$$

donde

$$E_0 = H(\mathbf{v}(0), \mathbf{v}(0)) = \frac{1}{2}\mathbf{v}_0^T\mathbf{v}_0 - \mu\frac{1}{r_0}$$

es la energía en el instante inicial (cuyo valor se mantendrá fijo a lo largo de la trayectoria), $r_0 = \|\mathbf{r}_0\|$ y a es la longitud del semieje mayor de la elipse.

Por sencillez, consideraremos tiempos y distancias de referencia tal que el problema sea adimensional con $\mu = 1$. Esto lo podemos conseguir de la siguiente forma.

Tomamos una longitud de referencia, a, y definimos las variables adimensionalizadas $\mathbf{r}^* = r/a$ y $t^* = t/T_c$. Entonces la ecuación (1.4) se reescribe como

$$\frac{a}{T_c^2}\frac{\mathrm{d}^2\,\mathbf{r}^*}{\mathrm{d}t^{*2}} = -\mu\frac{a\,\mathbf{r}^*}{a^3\|\mathbf{r}^*\|^3},$$

es decir,

$$\frac{\mathrm{d}^2\,\mathbf{r}^*}{\mathrm{d}t^{*2}} = -\frac{\mu\,T_c^2}{a^3}\frac{\mathbf{r}^*}{\|\mathbf{r}^*\|^3}.$$

Para determinar T_c, suponemos

$$\frac{\mu\,T_c^2}{a^3} = 1 \quad\Longrightarrow\quad T_c^2 = \frac{a^3}{\mu}\,,$$

y obtenemos la ecuación adimensionalizada

$$\frac{\mathrm{d}^2\,\mathbf{r}^*}{\mathrm{d}t^{*2}} = -\frac{\mathbf{r}^*}{\|\mathbf{r}^*\|^3}\,. \tag{1.8}$$

Teniendo en cuenta (1.7) y que para el problema adimensional se tiene que $a = \mu = 1$, el periodo de todas las trayectorias elípticas cerradas es $T = 2\pi$. Además, si tomamos, por ejemplo, condiciones iniciales

$$x(0) = 1 - e, \quad y(0) = 0, \quad v_x(0) = 0, \quad v_y(0) = \sqrt{\frac{1+e}{1-e}}, \tag{1.9}$$

es fácil comprobar que si $0 \le e < 1$ la energía total es $E = E_0 = -1/2$, la solución es periódica de periodo 2π, y la trayectoria es una elipse de excentricidad e. Las condiciones iniciales corresponden al pericentro, y el semieje mayor de la elipse es 1.

Este problema todavía tiene solución analítica, aunque viene dada en forma implícita (por lo que para obtener la trayectoria hay que recurrir necesariamente a métodos numéricos).

Por ejemplo, la solución del sistema (1.5), escrita en la forma $(\mathbf{r}(t), \mathbf{v}(t)) = \varphi_t(\mathbf{r}(0), \mathbf{v}(0)) \equiv \varphi_t(q_0, p_0)$ se puede obtener como sigue:

$$\mathbf{r}(t) = f\,\mathbf{r}_0 + g\,\mathbf{v}_0, \qquad \mathbf{v}(t) = f_p\,\mathbf{r}_0 + g_p\,\mathbf{v}_0,$$

donde

$$\begin{aligned} f &= 1 + \frac{(\cos(x) - 1)a}{r_0}, & g &= t + \frac{\operatorname{sen}(x) - x}{w}, \\ f_p &= -\frac{aw\operatorname{sen}(x)}{r_0(1 - \sigma\cos(x) + \psi\sin(x)}, & g_p &= 1 + \frac{\cos(x) - 1}{1 - \sigma\cos(x) + \quad \operatorname{sen}(x)}. \end{aligned} \tag{1.10}$$

La constante x se obtiene resolviendo la siguiente ecuación implícita

$$wt = x - \sigma\operatorname{sen}(x) + \psi(1 - \cos(x)), \tag{1.11}$$

que debe resolverse numéricamente, y el resto de parámetros toma los siguientes valores:

$$= \frac{u}{wa^2}, \quad \sigma = 1 - \frac{r_0}{a}, \quad w = \sqrt{\frac{\mu}{a^3}}, \quad a = -\frac{\mu}{2E}, \quad E = \frac{1}{2}\mathbf{v}_0^T\mathbf{v}_0 - \mu\frac{1}{r_0},$$

$$u = \mathbf{r}_0^T\mathbf{v}_0, \quad r_0 = \|\mathbf{r}_0\|.$$

En la práctica se necesita calcular las trayectorias con gran precisión y, por tanto, hay que considerar modelos más sofisticados (el efecto debido a que la Tierra es achatada, la influencia del Sol y de la Luna, efectos relativistas, etc.) que obviamente dan lugar a ecuaciones que no tienen solución analítica y, por tanto, la única forma de poder calcular las trayectorias de los satélites es mediante métodos numéricos.

Por ejemplo, debido a que la Tierra está ligeramente achatada, si el movimiento del satélite es en el plano del ecuador de la Tierra, un modelo más realista que tiene en cuenta el término dominante del efecto del achatamiento de la Tierra viene dado por

$$\frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} = -\frac{\mathbf{r}}{r^3} - \varepsilon\frac{\mathbf{r}}{r^5},$$

donde ε es una constante. Este modelo sirve también para considerar el efecto relativista sobre la trayectoria de Mercurio alrededor del Sol. El efecto del achatemiento de la Tierra sobre la trayectoria de un satélite en el problema adimensional se traduce básicamente en que el parámetro ε toma valores del orden de $\varepsilon \sim 10^{-3}$ mientras que para el efecto relativista es del orden de

$\varepsilon \sim 10^{-5} - 10^{-6}$. Este problema ya no tiene solución analítica y hay que resolverlo numéricamente. El potencial asociado a esta fuerza viene dado por

$$V(\mathbf{r}) = -\frac{1}{r} - \frac{\varepsilon}{3}\frac{1}{r^3}.$$

Al tratarse de un potencial que sólo depende de la distancia admite órbitas cerradas circulares, pero si ésta no es circular aparecerá una precesión de la misma. Estos resultados se pueden observar al resolver el problema numéricamente, en el que si el satélite sigue una trayectoria elíptica, ésta experimenta una precesión, esto es, la elipse experimenta una rotación.

En cambio, si el satélite sigue una órbita polar, o sea, un modelo asociado al potencial

$$V(\mathbf{r}) = -\frac{1}{r} - \frac{\varepsilon}{3}\left(\frac{1}{r^3} - \frac{3x^2}{r^5}\right),$$

que no es un potencial central (no depende únicamente de la distancia al origen, r). Las trayectorias no serán cerradas y, por tanto, no admite trayectorias circulares. Además, las trayectorias habrá que calcularlas numéricamente.

1.5 Ejercicios resueltos

El siguiente ejercicio trata sobre la modelización del fenómeno de difusión del calor.

Ejercicio 1.1 (Modelo lineal de difusión del calor) *Consideremos el modelo lineal unidimensional de difusión del calor en una barra. Las hipótesis que definen el modelo mecánico son las siguientes:*

- *El estado del sistema se describe por la temperatura $u = u(x,t)$ a lo largo del eje de la barra que podemos identificar por la variable $x \in [0,1]$. Se desprecian variaciones ortogonales a los ejes de la barra, ya que las paredes de la barra están perfectamente aisladas.*
- *El flujo de calor, q, por unidad de área es proporcional al gradiente de temperaturas:*
$$q = -h_0\frac{\partial u}{\partial x}, \tag{1.12}$$
donde h_0 es el coeficiente de conducción del calor.

- *Las propiedades materiales del conductor se identifican por el coeficiente de conducción del calor, h_0, y el calor específico c_0.*

Escribe las ecuaciones que describen dicho modelo.

Solución:
El modelo matemático se puede obtener igualando el flujo neto de calor en el elemento de volumen a la velocidad de crecimiento de la capacidad calorífica en el volumen. Sean q^- y q^+, respectivamente, los flujos de calor entrante y saliente por unidad de área (ver Figura 1.4). El equilibrio anterior lo podemos formular como

$$c_0 A \frac{\partial u}{\partial t}\,\mathrm{d}x = -A\left(q^+ - q^-\right) = -A\frac{\partial q}{\partial x}\,\mathrm{d}x, \tag{1.13}$$

donde A es el área de una sección perpendicular al eje de la barra.

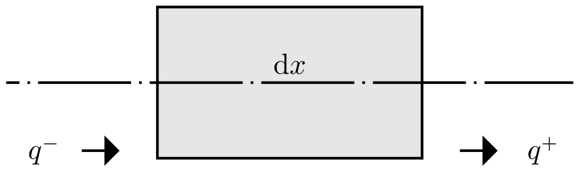


Figura 1.4: Difusión en una dimensión espacial.

Usando la ecuación (1.12) en (1.13) se tiene:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = k_0 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \qquad k_0 = \frac{h_0}{c_0}.$$

Para modelizar la difusión de calor en una barra tridimensional prismática homogénea se tiene el modelo siguiente

$$\frac{\partial u}{\partial t} = k_0 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right) = k_0 \nabla^2 u,$$

que es una ecuación de difusión multidimensional.

El modelo unidimensional anterior también se puede utilizar para describir la distribución de temperaturas estacionaria, que se obtiene igualando a cero la parte derecha de la ecuación,

$$k_0 \frac{\mathrm{d}^2 u}{\mathrm{d}x^2} = 0.$$

Para seguir leyendo, inicie el proceso de compra, click aquí