LA ECUACIÓN DE SCHRÖDINGER EN EL CONTEXTO DE LA MECÁNICA DE FLUIDOS

THE SCHRÖDINGER EQUATION IN THE CONTEXT OF FLUID MECHANICS

D. Cabrera[a], P. Fernández de Córdoba[a], J.M. Isidro[a], J.M. Valdés Placeres[b] y J. Vazquez Molina[a†]

a) Instituto Universitario de Matemática Pura y Aplicada, Universitat Politècnica de València, España; joavzmo@doctor.upv.es[†]
b) Departamento de Matemáticas, Universidad de Pinar del Río “Hermanos Saíz Montes de Oca”, Cuba
† autor para la correspondencia

Recibido 16/9/2016; Aceptado 17/10/2016

Se deriva un mapeo entre la ecuación de Schrödinger y la de Navier-Stokes, que generaliza el que propuso Madelung en 1926 con la ecuación de Euler. Dado que la mecánica de fluidos es el paradigma de teoría emergente, estos mapeos apoyan la interpretación de la mecánica cuántica como una teoría efectiva, emergente a partir de otra más fundamental. En el nuevo mapeo, además, el potencial cuántico se identifica con el término viscoso, en línea con recientes estudios que afirman que la cuanticidad tiene un origen disipativo.

We derive a mapping between the Schrödinger equation and the Navier-Stokes equation, which generalizes the one proposed by Madelung in 1926 with the Euler equation. Since fluid mechanics is the paradigm of an emergent theory, these maps support the interpretation of quantum mechanics as an effective theory, emerging from a more fundamental one. In the new mapping, moreover, the quantum potential is identified with the viscous term, in line with recent studies that claim that quantumness has a dissipative origin.

PACS: Foundations of quantum mechanics, 03.65.Ta. Navier-Stokes equations, 47.10.ad. partial differential equations, 02.30.Jr

I. INTRODUCCIÓN

La interpretación ontológica y epistemológica de la mecánica cuántica ha sido una cuestión a debate desde sus inicios. El mismo Einstein nunca aceptó que las leyes fundamentales de la naturaleza tuvieran un carácter indeterminista intrínseco [1].

La interpretación de Copenhague, que fue la dominante durante décadas, ha dado paso a multitud de interpretaciones hasta hoy. J. S. Bell divide las principales interpretaciones en románticas (en otras palabras, idealistas), y no románticas [2]. Románticas serían *la interpretación de los muchos mundos*, según la cual existe un universo para cada posible resultado de una medida; *la complementariedad* de Bohr, que establece una separación de escalas y pide que aceptemos la coexistencia de un mundo cuántico con uno clásico, regidos por diferentes reglas; y *el dualismo materia-mente*, defendido entre otros por Wigner y Wheeler, que afirma que la mente no se rige por las mismas reglas que el mundo material y ahí radica el colapso de la función de onda. Interpretaciones no románticas serían la introducción de *elementos no lineales o estocásticos* en la ecuación de Schrödinger; *la teoría de la onda-piloto* de Bohm y de Broglie, según la cual la mecánica cuántica emerge como teoría efectiva de una realidad determinista; y la propia *actitud pragmática* de Copenhague, que ve la mecánica cuántica como un método de cálculo de probabilidades y la despoja de toda ontología. “Esta filosofía pragmática es, pienso, consciente o inconscientemente la filosofía de trabajo de todos los que trabajan con la teoría cuántica de forma práctica...mientras trabajan. [Los físicos] nos diferenciamos sólo en el grado de preocupación o complacencia con el que vemos...fuera de horas de trabajo...la ambigüedad intrínseca de la teoría” [2][1].

Ya en 1926, tan sólo unos meses después de la publicación de la ecuación de Schrödinger, Erwin Madelung propuso una interpretación hidrodinámica de la misma, que podemos tomar como el primer antecedente de una interpretación emergentista. [3]. En su artículo, Madelung establece un mapeo entre la ecuación de Schrödinger, que describe la dinámica de una partícula cuántica, y la ecuación de Euler, que describe la dinámica de un fluido perfecto. Es habitual que la comunidad física vea estos mapeos como curiosidades matemáticas, sin ninguna consecuencia física. Sin embargo, existe un renovado interés en la propuesta de Madelung (e.g. [4], [5]) en un contexto en el que la posibilidad de la mecánica cuántica como teoría emergente cobra fuerza (e.g. [6], [7], [8]).

Pero ¿por qué limitarse a un fluido perfecto? Los fluidos reales son viscosos y la ecuación que describe su comportamiento es la de Navier-Stokes. La diferencia entre las ecuaciones de Euler y Navier-Stokes, aunque formalmente consiste únicamente en el término viscoso, va mucho más allá en cuanto a propiedades matemáticas y significado físico. Por ejemplo, la cuestión de la existencia y unicidad de soluciones de un problema de valores iniciales de la ecuación de Navier-Stokes es uno de los problemas abiertos más importantes de la matemática actual, cuya solución está recompensada con un millón de dólares [9]. En cambio, se conocen contraejemplos a la unicidad y existencia en el caso de la ecuación de Euler [10], lo que no es más que una evidencia del carácter ideal de esta ecuación. La viscosidad nula no existe, aunque en muchas aplicaciones sirva como

[1] Todas las citas que se incluyen en este artículo cuyo original no está en español son traducciones propias.

aproximación. Así, es interesante estudiar la existencia e interpretación de un potencial mapeo entre la ecuación de Schrödinger y la de Navier-Stokes, en lugar de la de Euler.

II. MECÁNICA DE FLUIDOS *vs* CUÁNTICA

El objetivo de esta sección es establecer sendos mapeos entre la ecuación de Schrödinger y las ecuaciones de Euler y Navier-Stokes, respectivamente. Primero, recordamos los fundamentos físicos necesarios para una correcta interpretación de las ecuaciones involucradas.

II.1. Fluidos, Euler y Navier-Stokes

La mecánica de fluidos es una rama de la mecánica del medio continuo. "Esto significa que cualquier pequeño elemento de volumen en el fluido se asume siempre lo bastante grande como para contener un gran número de moléculas" [8]. Se asume que todas las funciones que se emplean están bien definidas y son lo suficientemente suaves a trozos como para permitir las operaciones estándar del cálculo infinitesimal. Estas funciones macroscópicas, por lo general medibles, se asume que son el promediado de variables mecánicas válidas a una escala más fundamental (las posiciones y velocidades de las *moléculas* que menciona Landau), lo que hace que la mecánica del medio continuo sea el paradigma de teoría emergente.

¿Cuál es el espacio de estados de un fluido? "La descripción matemática del estado de un fluido en movimiento se efectúa mediante funciones que dan la distribución de la velocidad del fluido y dos cantidades termodinámicas, por ejemplo la presión y la densidad [...] Por tanto mediante cinco cantidades [...] el estado del fluido en movimiento está completamente determinado [...] En consecuencia, un sistema de ecuaciones de dinámica de fluidos debería contener cinco ecuaciones para ser completo" [11].

Es decir, el estado de un fluido viene descrito por un campo vectorial: $\mathbf{v}, p, \rho : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+$, que a cada punto del espacio-tiempo (x, t) le asigna una velocidad, presión y densidad.

Las cinco ecuaciones que describen la dinámica del campo son:

- La ecuación de continuidad.
- Una ecuación termodinámica, como la del flujo de calor.
- Una ecuación (vectorial) que describa la dinámica del campo de velocidades

Para fluidos viscosos, en los que existe transferencia tangencial de momento, ésta última ecuación es la ecuación de Navier-Stokes. En la notación de [11], ésta es:

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla)\mathbf{v} + \frac{1}{\rho}\nabla p - \frac{\eta}{\rho}\nabla^2 \mathbf{v} - \frac{1}{\rho}\left(\zeta + \frac{\eta}{3}\right)\nabla(\nabla \cdot \mathbf{v}) = 0, \tag{1}$$

donde $\eta, \zeta > 0$ son los denominados coeficientes de viscosidad (¿por qué hay *dos* coeficientes de viscosidad si el tensor de tensiones, a priori, tiene nueve componentes? Véase e.g. [12] para una derivación matemáticamente rigurosa y [13] para una derivación más amigable). Si recordamos la identidad del cálculo vectorial: $\nabla^2\mathbf{v} = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{v}) - \nabla \times (\nabla \times \mathbf{v})$, la ecuación de Navier-Stokes para un flujo irrotacional se simplifica a:

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla)\mathbf{v} + \frac{1}{\rho}\nabla p - \frac{\eta'}{\rho}\nabla^2 \mathbf{v} = 0, \tag{2}$$

donde se ha definido:

$$\eta' := \frac{4}{3}\eta + \zeta. \tag{3}$$

Para el caso de fluidos perfectos, no existen fuerzas microscópicas entre partículas y toda la transferencia de momento se debe a la presión. Esto se traduce en que la viscosidad es nula, y la dinámica del fluido viene descrita por la ecuación de Euler:

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla)\mathbf{v} + \frac{1}{\rho}\nabla p = 0. \tag{4}$$

II.2. La ecuación de Schrödinger

En mecánica cuántica, la dinámica de la función de onda $\psi(x, t)$ de una partícula de masa m sujeta a un potencial $V(x)$ viene descrita por la ecuación de Schrödinger:

$$i\hbar\frac{\partial \psi}{\partial t} + \frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2\psi - V\psi = 0. \tag{5}$$

II.3. Ansatz

La función de onda se puede separar en amplitud y fase como:

$$\psi = \psi_0 \exp\left(S + \frac{i}{\hbar}I\right) = \psi_0 A \exp\left(\frac{i}{\hbar}I\right), \tag{6}$$

donde I tiene unidades de acción mecánica, al igual que $\hbar$; S es adimensional; y hemos definido $A := \exp(S)$ por simplicidad en lo sucesivo.

Sustituyendo ψ en la ecuación de Schrödinger, se obtiene una ecuación cuya parte imaginaria es:

$$\frac{\partial S}{\partial t} + \frac{1}{m}\nabla S \cdot \nabla I + \frac{1}{2m}\nabla^2 I = 0, \tag{7}$$

y cuya parte real es:

$$\frac{\partial I}{\partial t} + \frac{1}{2m}(\nabla I)^2 + V + U = 0, \tag{8}$$

donde aparece un nuevo término potencial U, puramente cuántico, que hemos definido como:

$$U := \frac{-\hbar^2}{2m}\frac{\nabla A^2}{A} = \frac{-\hbar^2}{2m}\left[(\nabla S)^2 + \nabla^2 S\right]. \tag{9}$$

Si definimos $\nabla I = m\mathbf{v}$, el gradiente de la parte real (ec. 8), dividido por m, queda:

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla)\mathbf{v} + \frac{1}{m}\nabla U + \frac{1}{m}\nabla V = 0, \tag{10}$$

donde se ha empleado la identidad vectorial $\nabla(\mathbf{v}^2) = 2(\mathbf{v} \cdot \nabla)\mathbf{v} + 2\mathbf{v} \times (\nabla \times \mathbf{v})$ y el hecho de que el rotacional de un gradiente es nulo.

II.4. Sendos mapeos

Las siguientes identificaciones permiten, por tanto, mapear la ecuación de Schrödinger con la de Navier-Stokes, como algunos de los autores ya observamos en [14]:

Tabla 1. Mapeo de términos entre la ecuación de Navier-Stokes y la de Schrödinger

Navier-Stokes	Schrödinger
$m\mathbf{v}$	∇I
$\nabla p/\rho$ y eventuales Fuerzas externas	$\nabla V/m$
$-\frac{\eta'}{\rho}\nabla^2\mathbf{v}$	$\nabla U/m$

Por otro lado, el mapeo que Madelung observó en [3], en nuestra notación, establece que:

Tabla 2. Mapeo de términos entre la ecuación de Euler y la de Schrödinger.

Euler	Schrödinger
$m\mathbf{v}$	∇I
Fuerzas externas	$\nabla V/m$
$\nabla p/\rho$	$\nabla U/m$

III. DISCUSIÓN

Ambos mapeos difieren fundamentalmente en la interpretación del potencial cuántico U. En el mapeo de Madelung éste se identifica con la presión, que, en mecánica del medio continuo y para fluidos perfectos, es una variable que emerge de la velocidad de las moléculas (véase e.g. [15]). Es decir, U tiene una interpretación puramente cinética y conservativa.

En nuestro mapeo, en cambio, U se identifica con el término viscoso, que siempre es disipativo. La disipación, como mecanismo de pérdida de información, se puede entender por tanto como el origen de los efectos cuánticos en un sistema. Este hecho cobra especial relevancia si se tiene en cuenta que "hay un número creciente de modelos deterministas de objetos cuánticos que se basan en conjeturar mecanismos disipativos o pérdida de información fundamental" [16]. Nótese que no se habla aquí de una transición *de cuántico a clásico*, sino *de clásico a cuántico* gracias a mecanismos de pérdida de información. 't Hooft ya afirmó que "para todo sistema cuántico existe al menos un modelo determinista que reproduce toda su dinámica tras precuantización", y sus modelos son válidos, al menos, para sistemas finito-dimensionales [17]. Además, recientemente se ha observado experimentalmente esta transición en un sistema fotónico abierto con fuertes interacciones [18].

En cualquier caso, en palabras de Madelung, "vemos por tanto que [la ecuación de Schrödinger] es completamente explicable en términos hidrodinámicos, y que solo aparece una peculiaridad en un término, el que representa el mecanismo interno del continuo", esto es, en U [3].

IV. CONCLUSIONES

El estudio de mapeos entre las ecuaciones fundamentales de diferentes teorías es de interés para la matemática aplicada puesto que los resultados de una teoría se pueden trasladar, a través del mapeo, a la otra teoría. En este caso, más allá del interés matemático, hay un interés físico puesto que la existencia de este mapeo apoya la idea de la mecánica cuántica como teoría emergente. Es decir, como descripción fenomenológica de una teoría subyacente más fundamental.

La mecánica de fluidos es el paradigma de teoría emergente, que maneja variables en una escala macroscópica como la densidad, la temperatura, etc. promediadas a partir de variables de una escala microscópica subyacente sobre la que no es necesario tener información detallada. Para la mecánica del medio continuo, esa teoría subyacente debería ser la mecánica clásica, es decir, el espacio de fases finito-dimensional de las posiciones y las velocidades de las partículas que se considere fundamentales (a las que hemos venido llamando *moléculas*). El paso del espacio de fases *micro* al *macro*, esto es, de un conjunto finito de partículas a un medio continuo, es uno de los problemas fundamentales de la mecánica estadística (véase [15] para una discusión detallada de diferentes técnicas de promediado).

Si la mecánica cuántica se puede entender como una mecánica de fluidos, parece evidente que sus variables (función de onda, potencial, etc.) también son el resultado del promediado de *algo* más fundamental. Construir ese espacio de fases *micro* sobre el que hacer un promediado que tenga como resultado las ecuaciones de la mecánica cuántica es uno de los retos fundamentales de las líneas de investigación enmarcadas bajo el nombre de *mecánica cuántica emergente*.

El hecho de que *la peculiaridad cuántica* que menciona Madelung aparezca precisamente en *el mecanismo interno del continuo* conecta las cuestiones interpretativas fundamentales de la mecánica cuántica y la mecánica del medio continuo.

Nuestro grupo de investigación espera, además, aprovechar los citados mapeos para resolver problemas de cosmología newtoniana (que no es más que mecánica de fluidos a escalas cosmológicas) mediante técnicas de mecánica cuántica.

V. AGRADECIMIENTOS

J. Vazquez agradece a Manuel Monleón Pradas las referencias y discusiones sobre mecánica del medio continuo, y agradece la financiación al Programa de Becas de Movilidad Académica de la AUIP y al Programa de Ayudas de Investigación y Desarrollo de la UPV. D. Cabrera agradece la financiación del proyecto con Ref. FIS2014-51948-C2-1-P del Ministerio de Economía y Competitividad (España).

VI. CONTRIBUCIONES

Todos los autores contribuyeron por igual en la redacción del artículo.

REFERENCIAS

[1] A. Einstein, B. Podolsky and N. Rosen, Physical Review 47, 777 (1935).

[2] J. S. Bell, Proceedings of Nobel Symposium 65, 359 (1989).

[3] E. Madelung, Zeitschrift fur Physik 40, 322 (1927).

[4] M. Reddiger, The madelung picture as a foundation of geometric quantum theory, arxiv:1509.00467v3 [quant-ph] (2016).

[5] D. Fusca, The madelung transform as a momentum map, arxiv:1512.04611v2 [math.sg] (2016).

[6] I. Licata, ed., Beyond peaceful coexistence. The emergence of space, time and quantum (Imperial College Press, 2016).

[7] S. L. Adler, Quantum theory as an emergent phenomenon (Cambridge University Press, 2004).

[8] G. t'Hooft, The Cellular Automaton Interpretation of Quantum Mechanics, arXiv:1405.1548v3 [quant-ph] (2015).

[9] C. L. Fefferman, Existence and smoothness of the navier stokes equations, Technical report, Clay Mathematics Institute, available at http://www.claymath.org/(accessed 2016).

[10] J. Glimm, D. H. Sharp, H. Lim, K. Ryan and W. Hu, Philosophical Transactions of the Royal Society A 373 (2015).

[11] L. Landau and E. M. Lifshitz, Fluid Mechanics 2nd edition (Pergamon Press, 1987).

[12] L. A. Segel, Mathematics applied to continuum mechanics (Society for Industrial and Applied Mathematics, 1977).

[13] A. J. Chorin and J. E. Marsden, A mathematical introduction to uid mechanics (3ed) (Springer, 1992).

[14] P. Fernández de Córdoba, J. M. Isidro and J. Vazquez Molina, Entropy 18 (2016).

[15] E. B. Tadmor and R. E. Miller, Modeling materials. Continuum, atomistic and multiscale techniques, chapter Atomistic foundations of continuum concepts (Cambridge University Press, 2011).

[16] H. T. Elze, Journal of Physics: Conference Series 171 (2009).

[17] G. 't Hooft, AIP Conference Proceedings 957, 154 (2007).

[18] J. Raftery, D. Sadri, S. Schmidt, H. E. Türeci and A. A. Houck, Physical Review X 4 (2014).