



UNIVERSITAT
POLITÈCNICA
DE VALÈNCIA



UNIVERSITAT
DE VALÈNCIA

TRABAJO FIN DE MÁSTER

Solución numérica de ecuaciones diferenciales con incertidumbre y aplicaciones

Alumna: **Ainhoa Azorín Penalva**

Director: Juan Carlos Cortés López
María Dolores Roselló Ferragud

MÁSTER EN INVESTIGACIÓN MATEMÁTICA

Septiembre 2020

Resumen

En el presente trabajo se estudian los métodos numéricos de Euler y Runge-Kutta para aproximar la solución de ecuaciones diferenciales aleatorias utilizando el cálculo estocástico en media cuadrática. Para facilitar la comprensión del estudio, el método de Euler se estudia primero en el caso escalar y, posteriormente, se extiende a problemas matriciales. La memoria concluye con la aplicación de los métodos numéricos al estudio de un circuito eléctrico con ruido aleatorio.

Abstract

In the present dissertation, the Euler and Runge Kutta numerical methods for random differential equations are studied in the sense of mean square calculus. For the sake of clarity, first the scalar Euler method is presented and, afterwards, it is extended to the matrix setting. In the last chapter, both numerical methods are applied to study an electrical circuit with random noise.

Resum

En el present treball s'estudien els mètodes numèrics d'Euler i Runge-Kutta per a aproximar la solució d'equacions diferencials aleatòries utilitzant el càlcul estocàstic en mitjana quadràtica. Per a facilitar la comprensió de l'estudi, el mètode d'Euler s'estudia primer en el cas escalar i, posteriorment, s'extén a problemes matricials. La memòria conclueix amb l'aplicació dels mètodes numèrics a l'estudi d'un circuit elèctric amb soroll aleatori.

Índice general

Resumen	III
Abstract	V
Resum	VII
Índice general	IX
1 Motivación y Preliminares	1
2 Estudio del esquema de Euler para ecuaciones diferenciales aleatorias	7
2.1 El método aleatorio de Euler y su convergencia en media cuadrática.	7
2.2 El caso matricial	10
3 Estudio del esquema de Runge-Kutta para ecuaciones diferenciales aleatorias	15
4 Ejemplos numéricos	21
4.1 Determinación del desplazamiento por un movimiento terrestre	21
4.2 Problema matricial lineal bilateral completo de Sylverter	24
4.3 Problema escalar lineal con termino fuente Browniano	24
4.4 Problema de ruido blanco Gaussiano	33
5 Estudio de un circuito eléctrico con ruido aleatorio	41
6 Conclusiones	47

Bibliografía

49

Índice de figuras

4.1. Comparación entre los valores teóricos y numéricos por el Ejemplo 4.1.	23
4.2. Valores numéricos de \mathbb{E}^{11} de la matriz esperanza del Problema Matricial 4.2. . .	25
4.3. Valores numéricos de \mathbb{E}^{12} de la matriz esperanza del Problema Matricial 4.2. . .	25
4.4. Valores numéricos de \mathbb{E}^{21} de la matriz esperanza del Problema Matricial 4.2. . .	26
4.5. Valores numéricos de \mathbb{E}^{22} de la matriz esperanza del Problema Matricial 4.2. . .	26
4.6. Esperanza $X(t)$ mediante el método Runge-Kutta de orden 4 y $h = \frac{1}{20}$ del Problema Browniano 4.3.	31
4.7. Esperanza X_n mediante el método Runge-Kutta de orden 4 y $h = \frac{1}{20}$ del Problema Browniano 4.3.	31
4.8. Esperanza $X(t)$ y X_n mediante el método Runge-Kutta de orden 4 y $h = \frac{1}{20}$ del Problema Browniano 4.3.	32
4.9. Varianza $X(t)$ mediante el método Runge-Kutta de orden 4 y $h = \frac{1}{20}$ del Problema Browniano 4.3.	32
4.10. Varianza X_n con el método Runge-Kutta de orden 4 y $h = \frac{1}{20}$ del Problema Browniano 4.3.	32
4.11. Varianza $X(t)$ y X_n con el método Runge-Kutta de orden 4 y $h = \frac{1}{20}$ del Problema Browniano 4.3.	33
4.12. Esperanza $X(t)$ mediante el método Runge-Kutta de orden 4 y $h = \frac{1}{20}$ del Problema de ruido blanco Gaussiano 4.4.	37
4.13. Esperanza X_n mediante el método Runge-Kutta de orden 4 y $h = \frac{1}{20}$ del Problema de ruido blanco Gaussiano 4.4.	37
4.14. Esperanza $X(t)$ y X_n mediante el método Runge-Kutta de orden 4 y $h = \frac{1}{20}$ del Problema de ruido blanco Gaussiano 4.4.	37

4.15. Varianza $X(t)$ mediante el método Runge-Kutta de orden 4 y $h = \frac{1}{20}$ del Problema de ruido blanco Gaussiano 4.4.	38
4.16. Varianza X_n mediante el método Runge-Kutta de orden 4 y $h = \frac{1}{20}$ del Problema de ruido blanco Gaussiano 4.4.	38
4.17. Varianza $X(t)$ y X_n mediante el método Runge-Kutta de orden 4 y $h = \frac{1}{20}$ del Problema de ruido blanco Gaussiano 4.4.	38
5.1. Esperanza $X(t)$ mediante el método Runge-Kutta de orden 4 y $h = \frac{1}{20}$ del estudio de un circuito eléctrico con ruido aleatorio 5.	44
5.2. Esperanza X_n mediante el método Runge-Kutta de orden 4 y $h = \frac{1}{20}$ del estudio de un circuito eléctrico con ruido aleatorio 5.	44
5.3. Esperanza $X(t)$ y X_n mediante el método Runge-Kutta de orden 4 y $h = \frac{1}{20}$ del estudio de un circuito eléctrico con ruido aleatorio 5.	45
5.4. Varianza $X(t)$ mediante el método Runge-Kutta de orden 4 y $h = \frac{1}{20}$ del estudio de un circuito eléctrico con ruido aleatorio 5.	45
5.5. Varianza X_n mediante el método Runge-Kutta de orden 4 y $h = \frac{1}{20}$ del estudio de un circuito eléctrico con ruido aleatorio 5.	45
5.6. Varianza $X(t)$ y X_n mediante el método Runge-Kutta de orden 4 y $h = \frac{1}{20}$ del estudio de un circuito eléctrico con ruido aleatorio 5.	46

Índice de cuadros

4.1. Error absoluto de la esperanza de $X(t)$ con Euler y Runge-Kutta de orden 4 del Problema Browniano 4.3.	30
4.2. Error absoluto de la varianza de $X(t)$ con Euler y Runge-Kutta de orden 4 del Problema Browniano 4.3.	31
4.3. Error absoluto de la esperanza de $X(t)$ con Euler y Runge-Kutta de orden 4 del Problema de ruido blanco Gaussiano 4.4.	36
4.4. Error absoluto de la varianza de $X(t)$ con Euler y Runge-Kutta de orden 4 del Problema de ruido blanco Gaussiano 4.4.	36
5.1. Error absoluto de la esperanza y la varianza de Q_n con $h = \frac{1}{20}$ del estudio de un circuito eléctrico con ruido aleatorio 5.	44

Capítulo 1

Motivación y Preliminares

Cuando queremos aplicar las Matemáticas a situaciones del mundo real nos encontramos a menudo con problemas que no pueden ser resueltos analíticamente o de manera exacta y cuya solución debe ser abordada mediante la resolución de métodos numéricos. Por ello, para resolver diferentes problemas como el análisis de un circuito eléctrico, dado que sus datos son medidas tomadas en la realidad, tenemos la necesidad de tener modelos aleatorios. De manera que, en el presente trabajo de fin de máster, se va a realizar la construcción numérica de soluciones para ecuaciones diferenciales aleatorias a partir del esquema aleatorio de Euler, y se demostrarán algunas condiciones para que la convergencia en media cuadrática sea estable, y se calculará el valor esperado y la varianza del proceso de aproximación.

Cuando un problema físico se traduce a un conjunto de ecuaciones matemáticas, a fin de estudiarlo, se producen ciertos niveles de incertidumbre y de complejidad debido a los errores en las ecuaciones diferenciales y por ello se hace necesaria la utilización de métodos numéricos para resolverlos.

Debido a la aleatoriedad de algunos de sus elementos en el estudio de las ecuaciones diferenciales aleatorias se hace necesaria la exposición de sucesiones de variables aleatorias de segundo orden. Estas variables son aquellas cuyo rango está formado por una cantidad finita de elementos, definida como $\sigma^2 = \mathbb{E}(X^2) - [\mathbb{E}(X)]^2$.

La convergencia, la continuidad y la analiticidad en media cuadrática, proporcionan alternativas sobre construcciones numéricas de soluciones de valores iniciales aleatorios para problemas diferenciales. Veremos las ecuaciones diferenciales aleatorias y algunos teoremas de existencia y unicidad de soluciones en media cuadrática, el movimiento Browniano y la ecuación diferencial estocástica del lema de Itô, su expresión en forma integral y la representación de ruido blanco aplicado a un ejemplo de circuito eléctrico.

Consideremos un problema de valor inicial de la forma

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{X}}(t) = \mathbf{F}(\mathbf{X}(t), t), & t \in I = [t_0, T], \\ \mathbf{X}(t_0) = \mathbf{X}_0, \end{cases} \quad (1.1)$$

donde \mathbf{X}_0 es una variable aleatoria y $\mathbf{X}(t)$ y $\mathbf{F}(\mathbf{X}(t), t)$ son procesos estocásticos.

Vamos a trabajar en un espacio de probabilidad completo, (Ω, \mathcal{F}, P) . Específicamente trabajaremos con variables aleatorias reales, $Y : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, denominadas de segundo orden y que poseen una función de densidad de probabilidad, $f_Y(y)$, que son aquellas que cumplen:

$$\mathbb{E}[Y^2] = \int_{-\infty}^{\infty} y^2 f_Y(y) dy < +\infty,$$

donde $\mathbb{E}[\cdot]$ denota el operador esperanza. El conjunto de variables aleatorias de segundo orden con la norma

$$\|Y\| = (\mathbb{E}[Y^2])^{\frac{1}{2}}, \quad (1.2)$$

tiene estructura de espacio de Banach y en lo sucesivo se denotará por $(L_2, \|\cdot\|)$.

Si $\{X^{ij} : 1 \leq i \leq r, 1 \leq j \leq s\}$ es un conjunto de $r \times s$ de variables aleatorias de segundo orden, entonces:

$$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} X^{11} & \dots & X^{1s} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ X^{r1} & \dots & X^{rs} \end{bmatrix} \quad (1.3)$$

denota una matriz aleatoria de segundo orden de tamaño $r \times s$. Se puede demostrar que este conjunto con la norma

$$\|\mathbf{X}\|_{r \times s} = \max_{1 \leq i \leq r} \sum_{j=1}^s \|X^{ij}\|, \quad (1.4)$$

tiene estructura de espacio de Banach, y se denotará $(L_2^{r \times s}, \|\cdot\|_{r \times s})$.

Dado un proceso estocástico $\{X(t), t \in T\}$ definido sobre (Ω, \mathcal{F}, P) , se denomina de segundo orden si para cada $t \in T$, $X(t)$ es una variable aleatoria de segundo orden. De forma análoga, si para cada $t \in T$, $\mathbf{X}(t)$ es una matriz aleatoria de segundo orden de tamaño $r \times s$, entonces $\{\mathbf{X}(t), t \in T\}$ se denomina proceso estocástico matricial de segundo orden.

Una sucesión de matrices aleatorias de segundo orden, $\{\mathbf{X}_n\}_{n \geq 0}$ se dice que es convergente en media cuadrática a $\mathbf{X} \in L_2^{r \times s}$, y se denota por $\mathbf{X}_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{m.c.} \mathbf{X}$, si

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|\mathbf{X}_n - \mathbf{X}\|_{r \times s} = 0. \quad (1.5)$$

Utilizando la siguiente propiedad clave [4, p. 88] para sucesiones de variables aleatorias convergentes en media cuadrática

$$X_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{m.c.} X \implies \mathbb{E}[X_n] \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} \mathbb{E}[X],$$

se puede demostrar que si $\{\mathbf{X}_n\}_{n \geq 0}$ es una sucesión de matrices aleatorias en $L_2^{r \times s}$ convergente en media cuadrática convergente a \mathbf{X} , entonces

$$\mathbb{E}[\mathbf{X}_n] \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} \mathbb{E}[\mathbf{X}], \quad (1.6)$$

donde hemos utilizado, según (1.3), que $\mathbb{E}[\mathbf{X}] = (\mathbb{E}[X^{ij}])_{r \times s}$. En el caso particular en que $\mathbf{X}(t)$ es un vector, lo denotaremos $\vec{X}(t)$ y su función esperanza es la función vectorial determinista $\mathbb{E}[\vec{X}(t)] = (\mathbb{E}[X^i(t)])_{r \times 1}$ y por definición obtenemos $\mathbb{E}[\vec{X}^T(t)] = (\mathbb{E}[\vec{X}(t)])^T$, donde $\vec{X}^T(t)$ es el vector transpuesto de $\vec{X}(t)$. La función de covarianza matricial de $\{\vec{X}(t), t \in T\}$ se define como

$$\mathbf{\Lambda}_{\vec{X}(t)} = \mathbb{E}[(\vec{X}(t) - \mathbb{E}[\vec{X}(t)])(\vec{X}(t) - \mathbb{E}[\vec{X}(t)])^T] = (v^{ij}(t))_{r \times r}, \quad (1.7)$$

donde

$$\begin{aligned} v^{ij}(t) &= \mathbb{E}[(X^i(t) - \mathbb{E}[X^i(t)])(X^j(t) - \mathbb{E}[X^j(t)])] \\ &= \mathbb{E}[X^i(t)X^j(t)] - \mathbb{E}[X^i(t)]\mathbb{E}[X^j(t)], \quad 1 \leq i, j \leq r, \quad t \in T. \end{aligned} \quad (1.8)$$

Obsérvese que $v^{ii}(t) = \mathbb{V}[X^i(t)] = \mathbb{E}[(X^i(t))^2] - (\mathbb{E}[X^i(t)])^2$ es la varianza de la variable aleatoria. Si $\mathbb{E}[\vec{X}(t)] = \vec{0}$, entonces $\mathbf{\Lambda}_{\vec{X}(t)}$ se llama la función de correlación matricial $\{\vec{X}(t), t \in T\}$. Además, se puede demostrar (ver, [4, p. 88])

$$\vec{X}_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{m.c.} \vec{X} \implies \mathbf{\Lambda}_{\vec{X}_n} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} \mathbf{\Lambda}_{\vec{X}}. \quad (1.9)$$

Dada una matriz $\mathbf{A} = (a^{ij})$ en $\mathbb{R}^{r \times r}$, consideremos la norma

$$\|\mathbf{A}\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq r} \sum_{j=1}^r |a^{ij}|. \quad (1.10)$$

El siguiente lema permite acotar la norma matricial estocástica definida anteriormente de un producto de una matriz determinista por una matriz aleatoria en términos de las correspondientes normas de cada factor.

Lema 1.0.1. *Dadas las matrices deterministas $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{r \times r}$, $\mathbf{B} \in \mathbb{R}^{s \times s}$ y las matrices aleatorias $\mathbf{X}, \mathbf{Y} \in L_2^{r \times s}$, entonces*

$$\|\mathbf{A}\mathbf{X}\|_{r \times s} \leq \|\mathbf{A}\|_\infty \|\mathbf{X}\|_{r \times s}, \quad \|\mathbf{Y}\mathbf{B}\|_{r \times s} \leq \|\mathbf{B}\|_\infty \|\mathbf{Y}\|_{r \times s}. \quad (1.11)$$

Prueba 1.0.1. *Como el procedimiento para establecer estas dos desigualdades es análogo, solo probamos la primera. Por (1.4) y (1.10) se deduce que*

$$\begin{aligned}
 \|\mathbf{A}\mathbf{X}\|_{r \times s} &= \max_{1 \leq i \leq r} \sum_{j=1}^s \left\| \sum_{k=1}^r a^{ik} X^{kj} \right\| \leq \max_{1 \leq i \leq r} \sum_{j=1}^s \sum_{k=1}^r |a^{ik}| \|X^{kj}\| \\
 &\leq \max_{1 \leq i \leq r} \sum_{k=1}^r \sum_{j=1}^s |a^{ik}| \|X^{kj}\| = \max_{1 \leq i \leq r} \sum_{k=1}^r |a^{ik}| \sum_{j=1}^s \|X^{kj}\| \\
 &\leq \max_{1 \leq i \leq r} \sum_{k=1}^r |a^{ik}| \max_{1 \leq k \leq r} \sum_{j=1}^s \|X^{kj}\| = \max_{1 \leq i \leq r} \sum_{k=1}^r |a^{ik}| \|\mathbf{X}\|_{r \times s} \\
 &= \|\mathbf{A}\|_{\infty} \|\mathbf{X}\|_{r \times s}.
 \end{aligned}$$

A continuación introduciremos los conceptos de continuidad y diferenciabilidad de matrices aleatorias en el sentido de la media cuadrática.

Decimos que un proceso matricial de segundo orden $\{\mathbf{X}(t) : t \in T\}$ perteneciente al conjunto $L_2^{r \times s}$ es continuo en media cuadrática en el punto $t \in T$, siendo T un intervalo de la recta real, si

$$\lim_{\tau \rightarrow 0} \|\mathbf{X}(t + \tau) - \mathbf{X}(t)\|_{r \times s} = 0, \quad t, t + \tau \in T.$$

Diremos que dicho proceso es diferenciable en media cuadrática si existe un proceso de segundo orden $\{\dot{\mathbf{X}}(t) : t \in T\}$ tal que

$$\lim_{\tau \rightarrow 0} \left\| \frac{\mathbf{X}(t + \tau) - \mathbf{X}(t)}{\tau} - \dot{\mathbf{X}}(t) \right\|_{r \times s} = 0, \quad t, t + \tau \in T. \quad (1.12)$$

Ejemplo 1.0.1. Sea Y una variable aleatoria de segundo orden y consideremos el proceso estocástico de segundo orden $Y(t) = Y \cdot t$ definido en un intervalo T . Veamos que $Y(t)$ es diferenciable en media cuadrática con respecto a t . Tomando un número real τ , y tal que $t + \tau \in T$,

$$\left\| \frac{Y(t + \tau) - Y(t)}{\tau} - Y \right\|^2 = \mathbb{E} \left[\left(\frac{Y \cdot (t + \tau) - Y \cdot t}{\tau} - Y \right)^2 \right] = \mathbb{E}[Y^2] \left(\frac{t + \tau - t}{\tau} - 1 \right)^2 \xrightarrow{\tau \rightarrow 0} 0.$$

A continuación introduciremos el concepto de función proceso estocástico uniformemente continuo sobre ventanas temporales acotadas.

Definición 1.0.1. Sea S un conjunto acotado en $L_2^{r \times s}$, consideremos un intervalo $T \subseteq \mathbb{R}$ y $h > 0$, decimos que la transformación $\mathbf{F} : S \times T \rightarrow L_2^{r \times s}$ es uniformemente continua en S , sobre ventanas temporales acotadas, si

$$\lim_{h \rightarrow 0} \omega(S, h) = 0, \quad (1.13)$$

donde

$$\omega(S, h) = \sup_{\mathbf{X} \in S} \sup_{L_2^{r \times s} |t - t'| \leq h} \|\mathbf{F}(\mathbf{X}, t) - \mathbf{F}(\mathbf{X}, t')\|_{r \times s}. \quad (1.14)$$

Ejemplo 1.0.2. Consideremos el proceso estocástico vectorial de segundo orden $\mathbf{F}(\mathbf{X}, t) = \mathbf{A}(t)\mathbf{X} + \mathbf{G}(t)$, $0 \leq t \leq t_e$, donde

$$\vec{X} = \mathbf{X} = \begin{bmatrix} X^1 \\ X^2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{A}(t) = \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\omega_0^2 & -2\omega_0\xi \end{bmatrix}, \quad \vec{G}(t) = \mathbf{G}(t) = \begin{bmatrix} 0 \\ -Y(t) \end{bmatrix}, \quad (1.15)$$

(por conveniencia, identificamos la notación vectorial con la notación matricial) siendo

$$Y(t) = \sum_{j=1}^m ta_j e^{-\alpha_j t} \cos(\omega_j t + \theta_j), \quad t \geq 0, \quad (1.16)$$

ya a_j, α_j, ω_j y ξ números reales positivos, y θ_j variables aleatorias uniformemente distribuidas en el intervalo $[0, 2\pi]$ e independientes dos a dos. Observemos que

$$(\mathbf{A}(t)\mathbf{X} + \mathbf{G}(t))^T = [X^2, -\omega_0^2 X^1 - 2\omega_0\xi X^2 - Y(t)], \quad (1.17)$$

y

$$(\mathbf{F}(\mathbf{X}, t) - \mathbf{F}(\mathbf{X}, t'))^T = [0, Y(t') - Y(t)]. \quad (1.18)$$

Considerando la siguiente relación

$$\mathbb{E}[\cos(\omega_j t + \theta_j) \cos(\omega_k t' + \theta_k)] = \begin{cases} 0 & \text{si } j \neq k, \\ \frac{1}{2} \cos(\omega_j(t - t')) & \text{si } j = k, \end{cases} \quad (1.19)$$

se obtiene

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[(Y(t') - Y(t))^2] &= \sum_{j=1}^m \frac{1}{2} a_j^2 (t^2 e^{-2\alpha_j t} + (t')^2 e^{-2\alpha_j t'}) \\ &\quad - \sum_{j=1}^m a_j^2 (tt' e^{-\alpha_j(t+t')} \cos(\omega_j(t - t'))). \end{aligned} \quad (1.20)$$

Por lo tanto, utilizando el hecho de que las funciones determinísticas exponenciales y cosenos involucradas en (1.20) son continuas con respecto a la variable t , de la Definición 1.0.1 se deduce que, $\mathbf{F}(\mathbf{X}, t)$ es uniformemente continua sobre ventanas temporales acotadas.

Para hacer más autocontenida la exposición del trabajo, a continuación enunciamos varios resultados que necesitaremos posteriormente y cuya demostración puede encontrarse en [4, Cap. 4].

Teorema 1.0.1 (Integración por partes en media cuadrática). Consideremos $\{X(t), t \in T\}$ un proceso estocástico diferenciable en media cuadrática sobre el intervalo $T = [t_0, t]$, y una función determinista $h(t, u)$ continua en $T \times T$ y cuya derivada parcial $\partial h(t, u)/\partial u$ existe. Denotemos

$$Y(t) = \int_{t_0}^t h(t, u) \dot{X}(u) du, \quad (1.21)$$

(donde la integral anterior se considera en el sentido de Riemann en media cuadrática) entonces se cumple

$$Y(t) = [h(t, u)X(u)]_{u=t_0}^{u=t} - \int_{t_0}^t \frac{\partial h(t, u)}{\partial u} X(u) du. \quad (1.22)$$

Tomando $h(t, u) \equiv 1$ en (1.21) – (1.22), se deduce el siguiente resultado

Teorema 1.0.2 (Teorema fundamental del cálculo en media cuadrática). *Sea $\{X(t), t \in T\}$ un proceso estocástico diferenciable en media cuadrática en $T = [t_0, t]$ tal que $\dot{X}(t)$ es integrable Riemann sobre T de media cuadrática, entonces*

$$\int_{t_0}^t \dot{X}(u) du = X(t) - X(t_0). \quad (1.23)$$

Ejemplo 1.0.3. *En el contexto del Ejemplo 1.0.1, y teniendo en cuenta la diferenciable en media cuadrática del proceso $X(t) = Y \cdot t$, aplicando la fórmula de integración por partes se obtiene*

$$\int_{t_0}^t Y du = Y(t - t_0). \quad (1.24)$$

Proposición 1.0.1. *Si $\{X(t), t \in T\}$ es un proceso estocástico continuo en media cuadrática en $T = [t_0, t]$, entonces*

$$\left\| \int_{t_0}^t X(u) du \right\| \leq \int_{t_0}^t \|X(u)\| du \leq M_X(t - t_0), \quad M_X = \max_{t_0 \leq u \leq t} \|X(u)\|. \quad (1.25)$$

Teorema 1.0.3. *Sea $X(t)$ un proceso estocástico de segundo orden en $I = [t_0, T]$ y media cuadrática continua en él. Entonces existe $\eta \in I$ tal que*

$$X(t) - X(t_0) = \dot{X}(\eta)(t - t_0).$$

La prueba de este resultado puede encontrarse en [7].

Estudio del esquema de Euler para ecuaciones diferenciales aleatorias

2.1 El método aleatorio de Euler y su convergencia en media cuadrática

Consideremos el problema de valor inicial (1.1) bajo las siguientes hipótesis $F : S \times T \rightarrow L_2$, con $S \subset L_2$:

1. H1: $F(X, t)$ es uniformemente continua sobre ventanas temporales acotadas en media cuadrática. Véase Definición 1.0.1.
2. H2: $F(X, t)$ satisface la condición de Lipschitz en media cuadrática

$$\|F(X, t) - F(Y, t)\| \leq k(t)\|X - Y\|, \quad \int_{t_0}^{t_e} k(t)dt < +\infty. \quad (2.1)$$

La condición H2 garantiza la continuidad en media cuadrática de $F(X, t)$ con respecto a la primera variable, mientras que H1 garantiza la continuidad de $F(X, t)$ con respecto a la segunda variable. De ahí y de la desigualdad

$$\|F(X, t) - F(Y, t')\| \leq \|F(X, t) - F(Y, t)\| + \|F(Y, t) - F(Y, t')\|,$$

obtenemos la continuidad en media cuadrática de $F(X, t)$ con respecto a las dos variables.

Consideremos el método aleatorio de Euler para el problema de valor inicial

$$\begin{cases} X_{n+1} = X_n + hF(X_n, t_n), & n \geq 0, \\ X_0 = X(t_0), \end{cases} \quad (2.2)$$

donde $h = t_n - t_{n-1}$, con $t_n = t_0 + nh$, para $n = 1, 2, 3, \dots$. Demostraremos que bajo las hipótesis H1 y H2, el método de Euler (2.2) es convergente en media cuadrática en el sentido de estación fija, *i.e.* el error de la media cuadrática

$$e_n = X_n - X(t) = X_n - X(t_n), \quad (2.3)$$

tiende a cero en L_2 , cuando $h \rightarrow 0$, $n \rightarrow \infty$ con $t - t_0 = nh$.

Bajo las hipótesis H1 y H2, el Teorema 5.1.2 [4, p. 118] garantiza la existencia y unicidad de la solución de la media cuadrática $X(t)$ en $[t_n, t_{n+1}] \subset [t_0, t_e]$, y por el Teorema 1.0.2, deducimos

$$X(t_{n+1}) = X(t_n) + \int_{t_n}^{t_{n+1}} \dot{X}(u) du, \quad n \geq 0. \quad (2.4)$$

De (2.2)-(2.4) obtenemos

$$e_{n+1} - e_n = (X_{n+1} - X_n) - (X(t_{n+1}) - X(t_n)) = hF(X_n, t_n) - \int_{t_n}^{t_{n+1}} \dot{X}(u) du. \quad (2.5)$$

El término $F(X_n, t_n) \in L_2$ de la ecuación (2.5) se puede escribir como

$$hF(X_n, t_n) = F(X_n, t_n)(t_{n+1} - t_n) = \int_{t_n}^{t_{n+1}} F(X_n, t_n) du. \quad (2.6)$$

Por (2.5), (2.6) y usando $\dot{X}(u) = F(X(u), u)$ obtenemos

$$\begin{aligned} e_{n+1} &= e_n + \int_{t_n}^{t_{n+1}} [F(X_n, t_n) - \dot{X}(u)] du \\ &= e_n + \int_{t_n}^{t_{n+1}} [F(X_n, t_n) - F(X(u), u)] du. \end{aligned} \quad (2.7)$$

Dado que en las hipótesis H1 y H2, $F(X, t)$ es continuo en media cuadrática con respecto a ambas variables, el proceso estocástico de segundo orden

$$G(u) = F(X_n, t_n) - F(X(u), u), \quad (2.8)$$

es continuo en media cuadrática para $u \in [t_n, t_{n+1}]$. Tomando las normas en (2.7) y usando la Proposición 1.0.1 se deduce que

$$\|e_{n+1}\| \leq \|e_n\| + \int_{t_n}^{t_{n+1}} \|F(X_n, t_n) - F(X(u), u)\| du. \quad (2.9)$$

Ahora acotaremos el integrando que aparece en la fórmula (2.9):

$$\begin{aligned} \|F(X_n, t_n) - F(X(u), u)\| &\leq \|F(X_n, t_n) - F(X(t_n), t_n)\| \\ &\quad + \|F(X(t_n), t_n) - F(X(u), t_n)\| \\ &\quad + \|F(X(u), t_n) - F(X(u), u)\|. \end{aligned} \quad (2.10)$$

Para los dos primeros términos, usando la hipótesis H2, obtenemos

$$\|F(X_n, t_n) - F(X(t_n), t_n)\| \leq k(t_n)\|X_n - X(t_n)\| = k(t_n)\|e_n\|, \quad (2.11)$$

$$\|F(X(t_n), t_n) - F(X(u), t_n)\| \leq k(t_n)\|X(t_n) - X(u)\|, \quad u \in [t_n, t_{n+1}]. \quad (2.12)$$

Aplicando (2.4) en $[t_n, u] \subset [t_n, t_{n+1}]$ y usando nuevamente la Proposición 1.0.1, deducimos

$$\|X(u) - X(t_n)\| = \left\| \int_{t_n}^u \dot{X}(v) dv \right\| \leq \int_{t_n}^u \|\dot{X}(v)\| dv \leq M_{\dot{X}}(u - t_n), \quad (2.13)$$

donde

$$M_{\dot{X}} = \sup \left\{ \left\| \dot{X}(v) \right\|; t_0 \leq v \leq t_e \right\}. \quad (2.14)$$

De (2.12)-(2.14) obtenemos

$$\|F(X(t_n), t_n) - F(X(u), t_n)\| \leq k(t_n)hM_{\dot{X}}. \quad (2.15)$$

S_X es un conjunto acotado en L_2 definido por la solución teórica exacta del problema de valor inicial,

$$S_X = \{X(t), t_0 \leq t \leq t_e\}. \quad (2.16)$$

Luego, por la hipótesis H1 y la Definición 1.0.1, obtenemos

$$\|F(X(u), t_n) - F(X(u), u)\| \leq \omega(S_X, h), \quad (2.17)$$

y por (2.11), (2.15) y (2.17), deducimos que (2.10) se puede escribir como

$$\|F(X_n, t_n) - F(X(u), u)\| \leq k(t_n)\|e_n\| + hM_{\dot{X}}k(t_n) + \omega(S_X, h),$$

y por lo tanto, (2.9) toma la forma

$$\|e_{n+1}\| \leq \|e_n\|[1 + hk(t_n)] + h[\omega(S_X, h) + hM_{\dot{X}}k(t_n)]. \quad (2.18)$$

Por (2.18) y el Lema 1.2 [5, p. 28] obtenemos

$$\|e_n\| \leq e^{nhk(t_n)} \|e_0\| + \frac{e^{nhk(t_n)} - 1}{k(t_n)} [\omega(S_X, h) + hM_{\dot{X}}k(t)],$$

y como $nh = t - t_0$, $\|e_0\| = 0$, la anterior inecuación se escribe como

$$\|e_n\| \leq \frac{e^{(t-t_0)k(t)} - 1}{k(t)} [\omega(S_X, h) + hM_{\dot{X}}k(t)]. \quad (2.19)$$

De (2.19), deducimos que $\{e_n\}$ es convergente a cero en media cuadrática.

Teorema 2.1.1. *Bajo las hipótesis H1 y H2, el método aleatorio de Euler (2.2) es convergente en media cuadrática y el error de discretización e_n , definido por (2.3), satisface la desigualdad (2.19) para $t = t_0 + nh$, $h > 0$, $t_0 \leq t \leq t_e$.*

2.2 El caso matricial

Consideremos el problema del valor inicial aleatorio donde $\mathbf{X}(t)$ es $\mathbf{F} : S \times T \rightarrow L_2^{r \times s}$ procesos estocásticos matriciales de tamaño $r \times s$ y \mathbf{X}_0 es una matriz aleatoria de tamaño $r \times s$. Estudiaremos en esta sección la convergencia de la media cuadrática del método aleatorio de Euler en el marco matricial. Denotemos

$$\mathbf{X}(t) = \left(X^{ij}(t) \right)_{r \times s}, \quad \mathbf{F}(\mathbf{X}, t) = \left(F^{ij}(\mathbf{X}, t) \right)_{r \times s},$$

y el método de Euler matricial asociado a (1.1)

$$\begin{cases} \mathbf{X}_{n+1} = \mathbf{X}_n + h\mathbf{F}(\mathbf{X}_n, t_n), & n \geq 0 \\ \mathbf{X}_0 = \mathbf{X}(t_0), \end{cases} \quad (2.20)$$

donde X_n^{ij} es la entrada (i, j) de la matriz aleatoria \mathbf{X}_n y $F^{ij}(\mathbf{X}_n, t_n)$ es la entrada (i, j) de $\mathbf{F}(\mathbf{X}_n, t_n)$. El error de e_n tiene su correspondiente entrada (i, j) ,

$$e_n^{ij} = X_n^{ij} - X^{ij}(t_n). \quad (2.21)$$

Asumimos las mismas hipótesis H1 y H2 con la única diferencia de que la norma en $L_2^{r \times s}$ es $\|\cdot\|_{r \times s}$ y que $\mathbf{F} : S \times T \rightarrow L_2^{r \times s}$, $S \subset L_2^{r \times s}$, satisface

1. **H1:** $\mathbf{F}(\mathbf{X}, t)$ es uniformemente acotado en media cuadrática para ventanas temporales acotadas.
2. **H2:** $\mathbf{F}(\mathbf{X}, t)$ satisface la condición de Lipschitz de media cuadrática

$$\|\mathbf{F}(\mathbf{X}, t) - \mathbf{F}(\mathbf{Y}, t)\|_{r \times s} \leq k(t) \|\mathbf{X} - \mathbf{Y}\|_{r \times s}, \quad \int_{t_0}^{t_e} k(t) dt < +\infty.$$

Si $\mathbf{X}(t)$ es la solución teórica del problema matricial (2.20), entonces cada una de sus funciones de entrada $X^{ij}(t)$ es diferenciable en media cuadrática y aplicando el teorema fundamental del cálculo en el intervalo $[t_n, t_{n+1}] \subset [t_0, t_e]$, y considerando la entrada (i, j) de $\dot{\mathbf{X}}(u) = \mathbf{F}(\mathbf{X}(u), u)$, obtenemos

$$X^{ij}(t_{n+1}) - X^{ij}(t_n) = \int_{t_n}^{t_{n+1}} \dot{X}^{ij}(u) du = \int_{t_n}^{t_{n+1}} F^{ij}(\mathbf{X}(u), u) du. \quad (2.22)$$

Teniendo en cuenta la entrada (i, j) de (2.20) y el Ejemplo 1.0.3 con $Y = F^{ij}(\mathbf{X}_n, t_n) \in L_2$ obtenemos

$$X_{n+1}^{ij} - X_n^{ij} = h F^{ij}(\mathbf{X}_n, t_n) = \int_{t_n}^{t_{n+1}} F^{ij}(\mathbf{X}_n, t_n) du. \quad (2.23)$$

De (2.21)-(2.23) se deduce que

$$e_{n+1}^{ij} = e_n^{ij} + \int_{t_n}^{t_{n+1}} [F^{ij}(\mathbf{X}_n, t_n) - F^{ij}(\mathbf{X}(u), u)] du. \quad (2.24)$$

Para probar la convergencia en la media cuadrática, tenemos que probar que el error $e_n = (e_n^{ij})$ tiene una matriz nula en el espacio $L_2^{r \times s}$. Como $F(X, t)$ es continua en media cuadrática, por la Proposición 1.0.1 se deduce que

$$\begin{aligned} & \max_{1 \leq i \leq r} \sum_{j=1}^s \left\| \int_{t_n}^{t_{n+1}} [F^{ij}(\mathbf{X}_n, t_n) - F^{ij}(\mathbf{X}(u), u)] du \right\| \\ & \leq \max_{1 \leq i \leq r} \sum_{j=1}^s \int_{t_n}^{t_{n+1}} \left\| F^{ij}(\mathbf{X}_n, t_n) - F^{ij}(\mathbf{X}(u), u) \right\| du \\ & \leq \int_{t_n}^{t_{n+1}} \max_{1 \leq i \leq r} \sum_{j=1}^s \left\| F^{ij}(\mathbf{X}_n, t_n) - F^{ij}(\mathbf{X}(u), u) \right\| du. \end{aligned} \quad (2.25)$$

Al aplicar la desigualdad (2.10) a cada componente (i, j) de $\mathbf{F}(\mathbf{X}, t)$ para $u \in [t_n, t_{n+1}]$, obtenemos

$$\begin{aligned} \left\| F^{ij}(\mathbf{X}_n, t_n) - F^{ij}(\mathbf{X}(u), u) \right\| & \leq \left\| F^{ij}(\mathbf{X}_n, t_n) - F^{ij}(\mathbf{X}(t_n), t_n) \right\| \\ & + \left\| F^{ij}(\mathbf{X}(t_n), t_n) - F^{ij}(\mathbf{X}(u), t_n) \right\| \\ & + \left\| F^{ij}(\mathbf{X}(u), t_n) - F^{ij}(\mathbf{X}(u), u) \right\|. \end{aligned} \quad (2.26)$$

Ahora aplicaremos la condición de Lipschitz dada por **H2** y la definición de $\|\cdot\|_{r \times s}$, de este modo obtenemos

$$\begin{aligned} \left\| F^{ij}(\mathbf{X}_n, t_n) - F^{ij}(\mathbf{X}(t_n), t_n) \right\| &\leq \left\| \mathbf{F}(\mathbf{X}_n, t_n) - \mathbf{F}(\mathbf{X}(t_n), t_n) \right\|_{r \times s} \\ &\leq k(t_n) \|\mathbf{X}_n - \mathbf{X}(t_n)\|_{r \times s} \\ &= k(t_n) \|\mathbf{e}_n\|_{r \times s}, \end{aligned} \quad (2.27)$$

$$\|F^{ij}(\mathbf{X}(u), t_n) - F^{ij}(\mathbf{X}(u), u)\| \leq \|\mathbf{F}(\mathbf{X}(u), t_n) - \mathbf{F}(\mathbf{X}(u), u)\|_{r \times s} \leq \omega(S_{\mathbf{X}}, h), \quad (2.28)$$

donde $S_{\mathbf{X}}$ definido en (2.16) y $\mathbf{X}(t)$ es la solución teórica exacta del problema matricial (1.1). Para acotar la expresión $\|F^{ij}(\mathbf{X}(t_n), t_n) - F^{ij}(\mathbf{X}(u), t_n)\|$, en primer lugar observaremos que $\mathbf{F}(\mathbf{X}(t_n), t_n)$ y $\mathbf{F}(\mathbf{X}(u), t_n)$ dependen de $(r \times s) + 1$ argumentos, y expresaremos la diferencia anterior como la suma de $r \times s$ términos donde en cada término solo cambia un argumento y todas las entradas restantes se mantienen constantes. Por lo tanto, escribamos

$$\mathbf{F}(\mathbf{X}(t_n), t_n) = F^{ij}(X^{11}(t_n), \dots, X^{1s}(t_n); \dots; X^{r1}(t_n), \dots, X^{rs}(t_n); t_n),$$

$$\mathbf{F}(\mathbf{X}(u), t_n) = F^{ij}(X^{11}(u), \dots, X^{1s}(u); \dots; X^{r1}(u), \dots, X^{rs}(u); t_n),$$

y al descomponer la diferencia $F^{ij}(\mathbf{X}(t_n), t_n) - F^{ij}(\mathbf{X}(u), t_n)$ en $r \times s$ términos y aplicar la condición de Lipschitz tenemos

$$\|F^{ij}(\mathbf{X}(t_n), t_n) - F^{ij}(\mathbf{X}(u), t_n)\| \leq rsk(t_n) \max_{1 \leq i \leq r} \sum_{j=1}^s \|X^{ij}(u) - X^{ij}(t_n)\|, \quad (2.29)$$

ya que

$$\begin{aligned} &\|F^{ij}(\mathbf{X}(t_n), t_n) - F^{ij}(\mathbf{X}(u), t_n)\| \\ &\leq \|\mathbf{F}(\mathbf{X}(t_n), t_n) - \mathbf{F}(\mathbf{X}(u), t_n)\| \\ &\leq \|\mathbf{F}(X^{11}(t_n), X^{12}(t_n), \dots, X^{1s}(t_n); \dots; X^{r1}(t_n), X^{r2}(t_n), \dots, X^{rs}(t_n), t_n) \\ &\quad - \mathbf{F}(X^{11}(u), X^{12}(t_n), \dots, X^{1s}(t_n); \dots; X^{r1}(t_n), X^{r2}(t_n), \dots, X^{rs}(t_n), t_n)\| \\ &\quad + \|\mathbf{F}(X^{11}(u), X^{12}(t_n), X^{13}(t_n), \dots, X^{1s}(t_n); \dots; X^{r1}(t_n), \dots, X^{rs}(t_n), t_n) \\ &\quad - \mathbf{F}(X^{11}(u), X^{12}(t_n), X^{13}(t_n), \dots, X^{1s}(t_n); \dots; X^{r1}(t_n), \dots, X^{rs}(t_n), t_n)\| \\ &\quad + \dots + \\ &\quad + \|\mathbf{F}(X^{11}(u), X^{12}(u), \dots, X^{1s}(u); \dots; X^{r1}(u), \dots, X^{rs-1}(u), X^{rs}(t_n), t_n) \\ &\quad - \mathbf{F}(X^{11}(u), X^{12}(u), \dots, X^{1s}(u); \dots; X^{r1}(u), \dots, X^{rs-1}(u), X^{rs}(u), t_n)\| \\ &\leq rsk(t_n) \|\mathbf{X}(u) - \mathbf{X}(t_n)\|_{r \times s} \\ &= rsk(t_n) \max_{1 \leq i \leq r} \sum_{j=1}^s \|X^{ij}(u) - X^{ij}(t_n)\|. \end{aligned}$$

Como cada entrada $X^{ij}(t)$ de la solución $\mathbf{X}(t)$ del problema matricial (1.1) es diferenciable en media cuadrática, se deduce que

$$\|X^{ij}(t_n) - X^{ij}(u)\| = \left\| \int_{t_n}^u \dot{X}^{ij}(v) dv \right\| \leq \int_{t_n}^u \|\dot{X}^{ij}(v)\| dv \leq hM_{\dot{\mathbf{X}}}, \quad (2.30)$$

donde $\mathbf{X}(t)$ es la solución teórica del problema matricial (1.1) y hemos aplicado

$$\|\dot{X}^{ij}(v)\| \leq \|\dot{\mathbf{X}}(v)\|_{r \times s} \leq M_{\dot{\mathbf{X}}} = \sup \left\{ \|\dot{\mathbf{X}}(t)\|_{r \times s} : t_0 \leq t \leq t_e \right\}. \quad (2.31)$$

Por (2.29)-(2.31) obtenemos

$$\left\| F^{ij}(\mathbf{X}(t_n), t_n) - F^{ij}(\mathbf{X}(u), t_n) \right\| \leq s^2 r k(t_n) h M_{\dot{\mathbf{X}}}, \quad 1 \leq i \leq r, 1 \leq j \leq s. \quad (2.32)$$

De (2.26)-(2.27) y (2.32) deducimos

$$\left\| F^{ij}(\mathbf{X}_n, t_n) - F^{ij}(\mathbf{X}(u), u) \right\| \leq k(t_n) [\|e_n\|_{r \times s} + s^2 r h M_{\dot{\mathbf{X}}}] + \omega(S_{\mathbf{X}}, h), \quad (2.33)$$

$$\max_{\substack{1 \leq i \leq r \\ 1 \leq j \leq s}} \sum_{j=1}^s \left\| F^{ij}(\mathbf{X}_n, t_n) - F^{ij}(\mathbf{X}(u), u) \right\| \leq s k(t_n) \left[\|e_n\|_{r \times s} + s^2 r h M_{\dot{\mathbf{X}}} \right] + s \omega(S_{\mathbf{X}}, h). \quad (2.34)$$

Tomando normas en (2.24), y usando (2.25), (2.34), obtenemos

$$\begin{aligned} \|e_{n+1}^{ij}\| &\leq \|e_n^{ij}\| + \left\| \int_{t_n}^{t_{n+1}} \left[F^{ij}(\mathbf{X}_n, t_n) - F^{ij}(\mathbf{X}(u), u) \right] du \right\| \\ &\leq \|e_n^{ij}\| + \left\| \int_{t_n}^{t_{n+1}} \left[\mathbf{F}(\mathbf{X}_n, t_n) - \mathbf{F}(\mathbf{X}(u), u) \right] du \right\|_{r \times s} \\ &\leq \|e_n^{ij}\| + h s k(t_n) \|e_n\|_{r \times s} + r h^2 s^3 k(t_n) M_{\dot{\mathbf{X}}} + h s \omega(S_{\mathbf{X}}, h). \end{aligned}$$

Por lo tanto

$$\begin{aligned} \|e_{n+1}\|_{r \times s} &\leq \|e_n\|_{r \times s} + h s^2 k(t_n) \|e_n\|_{r \times s} + r h^2 s^4 k(t_n) M_{\dot{\mathbf{X}}} + h s^2 \omega(S_{\mathbf{X}}, h) \\ &= (1 + h s^2 k(t_n)) \|e_n\|_{r \times s} + h [s^2 \omega(S_{\mathbf{X}}, h) + r h s^4 k(t_n) M_{\dot{\mathbf{X}}}] \end{aligned}$$

De esta desigualdad y del Lema 1.2 [5, p. 28], deducimos

$$\|e_{n+1}\|_{r \times s} \leq e^{n h s^2 k(t_n)} \|e_0\|_{r \times s} + \frac{e^{n h s^2 k(t_n)} - 1}{k(t_n)} \left[k(t_n) r s^4 h M_{\dot{\mathbf{X}}} + s^2 \omega(S_{\mathbf{X}}, h) \right].$$

Como $e_0 = 0$ y $n h = t_n - t_0 = t - t_0$, la última expresión se puede escribir de la siguiente forma

$$\|e_{n+1}\|_{r \times s} \leq \frac{e^{(t-t_0)s^2k(t)} - 1}{k(t)} \left[k(t)rs^4hM_{\mathbf{X}} + s^2\omega(S_{\mathbf{X}}, h) \right]. \quad (2.35)$$

Por la hipótesis **H1**, $\omega(S_{\mathbf{X}}, h) \rightarrow 0$ cuando $h \rightarrow 0$ y, por (2.35), obtenemos que $\|e_{n+1}\|_{r \times s} \rightarrow 0$ cuando $h \rightarrow 0$, $n \rightarrow \infty$, $nh = t - t_0$.

Teorema 2.2.1. *Con la notación introducida en esta sección, bajo las hipótesis **H1** y **H2**, el método aleatorio de Euler (2.20) es convergente en media cuadrática y el error \mathbf{e}_n "definido por (2.21)" satisface la desigualdad (2.35) para $t = t_0 + nh$, $h > 0$, $t_0 \leq t \leq t_e$.*

Estudio del esquema de Runge-Kutta para ecuaciones diferenciales aleatorias

Los métodos numéricos son metodologías que utilizan técnicas meramente algebraicas y aritméticas para resolver de forma aproximada ecuaciones o sistemas de ecuaciones complejos, que analíticamente resultan muy difíciles e incluso imposible de resolver. La convergencia lenta del método de Euler y lo restringido de su región de estabilidad absoluta, nos lleva a considerar métodos de orden de convergencia mayor. En cada paso, el método de Euler, se mueve a lo largo de la tangente de una cierta curva que esta “cerca” a la curva desconocida o buscada. Los métodos Runge-Kutta, extienden esta idea geométrica utilizando varias derivadas o tangentes intermedias en lugar de solo una, para aproximar la función desconocida. En concreto, un método Runge-Kutta explícito de s etapas se puede escribir siguiendo la siguiente estructura:

$$\begin{aligned}
 \mathbf{K}_1 &= h\mathbf{F}(t_n, \mathbf{X}_n), \\
 \mathbf{K}_2 &= h\mathbf{F}(t_n + c_2h, \mathbf{X}_n + a_{2,1}\mathbf{K}_1), \\
 \mathbf{K}_3 &= h\mathbf{F}(t_n + c_3h, \mathbf{X}_n + (a_{3,1}\mathbf{K}_1 + a_{3,2}\mathbf{K}_2)), \\
 &\vdots \\
 \mathbf{K}_s &= h\mathbf{F}(t_n + c_sh, \mathbf{X}_n + \sum_{j=1}^{s-1} a_{s,j}\mathbf{K}_j), \\
 \mathbf{X}_{n+1} &= \mathbf{X}_n + \sum_{l=1}^s b_l\mathbf{K}_l,
 \end{aligned} \tag{3.1}$$

donde los cálculos se van realizando de forma recursiva. De

$$\mathbf{X}_{n+1} = \mathbf{X}_n + \frac{1}{6}(\mathbf{K}_1 + 2\mathbf{K}_2 + 2\mathbf{K}_3 + \mathbf{K}_4), \quad n = 0, 1, 2, \dots, \tag{3.2}$$

observemos que el coste computacional viene dado básicamente por el número de evaluaciones de la función \mathbf{F} en cada paso. Los métodos Runge-Kutta explícitos de s pasos requieren de s evaluaciones de la función \mathbf{F} .

En particular, el método de Euler dado en (2.2) se puede escribir como un método de Runge-Kutta de 1 etapa y por tanto requerirá en cada paso de una evaluación de la función \mathbf{F} . En

particular, en este capítulo vamos a centrarnos en el método estándar Runge-Kutta de orden 4, que posiblemente se trata del método Runge-Kutta más conocido y utilizado al mantener un buen equilibrio entre coste computacional y precisión. Se trata de un método cuyo orden de convergencia global es 4.

Teorema 3.0.1. *Consideremos $\mathbf{F}(\mathbf{X}(t), t)$ definida de $S \times I$ en L_2 , donde S es un conjunto acotado en L_2 . Si $\mathbf{F}(\mathbf{X}(t), t)$ satisface las siguientes condiciones*

(C₁) $F(X, t)$ es aleatoria uniformemente continua y acotada.

(C₂) $F(X, t)$ satisface la condición de Lipschitz en media cuadrática, es decir,

$$\| F(X, t) - F(Y, t) \| \leq K(t) \| X - Y \|, \quad (3.3)$$

donde

$$\int_{T_0}^T K(t) dt < \infty,$$

entonces, el esquema aleatorio de Runge-Kutta de cuarto orden (3.2) es convergente en media cuadrática.

Prueba 3.0.1. *Bajo las hipótesis (C₁) y (C₂), estamos interesados en que el error,*

$$\mathbf{e}_n = \mathbf{X}_n - \mathbf{X}(t_n), \quad (3.4)$$

converja a cero en media cuadrática, donde $\mathbf{X}(t)$ es la solución teórica de la Ecuación 1.1 y \mathbf{X}_n , $n \geq 0$ es la aproximación numérica dada por el esquema aleatorio de Runge-Kutta de cuarto orden.

Del Teorema 1.0.3, resulta que

$$\mathbf{X}(t_{n+1}) = \mathbf{X}(t_n) + h\mathbf{F}(\mathbf{X}(t_n), t_n), \quad t_n \in (t_n, t_{n+1}). \quad (3.5)$$

De (3.4) tenemos

$$e_{n+1} = X_{n+1} - X(t_{n+1}) + X_n - X_n - X(t_n) + X(t_n).$$

Reordenando, tomando normas y usando (3.4) y (3.1)-(3.2)

$$\begin{aligned} \| e_{n+1} \| &\leq \| \mathbf{X}_n - \mathbf{X}(t_n) \| + \| \mathbf{X}(t_n) - \mathbf{X}(t_{n+1}) + \mathbf{X}_{n+1} - \mathbf{X}_n \| \\ &= \| e_n \| + \| -h\mathbf{F}(\mathbf{X}(t_n), t_n) + \frac{h}{6}\mathbf{F}(\mathbf{X}_n, t_n) + \frac{h}{3}\mathbf{F}\left(\mathbf{X}_n + \frac{\mathbf{K}_1}{2}, t_n + \frac{h}{2}\right) + \\ &\quad + \frac{h}{3}\mathbf{F}\left(\mathbf{X}_n + \frac{\mathbf{K}_2}{2}, t_n + \frac{h}{2}\right) + \frac{h}{6}\mathbf{F}(\mathbf{X}_n + \mathbf{K}_3, t_n + h) \|. \end{aligned} \quad (3.6)$$

Tomando

$$M = \sup_{t_0 \leq t \leq T} \|\dot{\mathbf{X}}(t)\|, \quad (3.7)$$

y usando (C_1) , (C_2) y el Teorema 1.0.3 tenemos

$$\begin{aligned} \|\mathbf{F}(\mathbf{X}_n, t_n) - \mathbf{F}(\mathbf{X}(t_\eta), t_\eta)\| &\leq \|\mathbf{F}(\mathbf{X}_n, t_n) - \mathbf{F}(\mathbf{X}(t_n), t_n)\| + \|\mathbf{F}X(\mathbf{X}(t_n), t_n) - \mathbf{F}(\mathbf{X}(t_\eta), t_\eta)\| \\ &\quad + \|\mathbf{F}(\mathbf{X}(t_\eta), t_n) - \mathbf{F}(\mathbf{X}(t_\eta), t_\eta)\| \\ &\leq \mathbf{K}(t_n)\|e_n\| + \mathbf{K}(t_n)Mh + \omega(S, h) \end{aligned} \quad (3.8)$$

y

$$\left\| \mathbf{F}\left(\mathbf{X}_n + \frac{\mathbf{K}_1}{2}, t_n + \frac{h}{2}\right) - \mathbf{F}(\mathbf{X}(t_\eta), t_\eta) \right\| \leq \mathbf{K}\left(t_n + \frac{h}{2}\right)\|e_n\| + \frac{3}{2}Mh\mathbf{K}\left(t_n + \frac{h}{2}\right) + \omega(S, h), \quad (3.9)$$

$$\left\| \mathbf{F}\left(\mathbf{X}_n + \frac{\mathbf{K}_2}{2}, t_n + \frac{h}{2}\right) - \mathbf{F}(\mathbf{X}(t_\eta), t_\eta) \right\| \leq \mathbf{K}\left(t_n + \frac{h}{2}\right)\|e_n\| + \frac{3}{2}Mh\mathbf{K}\left(t_n + \frac{h}{2}\right) + \omega(S, h), \quad (3.10)$$

$$\|\mathbf{F}(\mathbf{X}_n + \mathbf{K}_3, t_n + h) - \mathbf{F}(\mathbf{X}(t_\eta), t_\eta)\| \leq \mathbf{K}(t_n + h)\|e_n\| + 2Mh\mathbf{K}(t_n + h) + \omega(S, h). \quad (3.11)$$

Sustituyendo las expresiones (3.8), (3.9), (3.10) y (3.11) en la ecuación (3.6) obtenemos

$$\begin{aligned} \|e_{n+1}\| &\leq \left[1 + \frac{h}{6}\mathbf{K}(t_n) + \frac{2h}{3}\mathbf{K}\left(t_n + \frac{h}{2}\right) + \frac{h}{6}\mathbf{K}(t_n + h) \right] \|e_n\| \\ &\quad + M\frac{h^2}{6}\mathbf{K}(t_n) + Mh^2\mathbf{K}\left(t_n + \frac{h}{2}\right) + M\frac{h^2}{3}\mathbf{K}(t_n + h) + h\omega(S, h), \end{aligned} \quad (3.12)$$

y tomando

$$a_n = 1 + \frac{h}{6}\mathbf{K}(t_n) + \frac{2h}{3}\mathbf{K}\left(t_n + \frac{h}{2}\right) + \frac{h}{6}\mathbf{K}(t_n + h), \quad (3.13)$$

$$b_n = M\frac{h^2}{6}\mathbf{K}(t_n) + Mh^2\mathbf{K}\left(t_n + \frac{h}{2}\right) + M\frac{h^2}{3}\mathbf{K}(t_n + h) + h\omega(S, h) \quad (3.14)$$

la desigualdad (3.12) se puede reescribir como:

$$\|e_{n+1}\| \leq a_n\|e_n\| + b_n, \quad n = 0, 1, 2, \dots, \quad (3.15)$$

y por sustitución sucesiva en la ecuación (3.15) se llega a

$$\|e_{n+1}\| \leq \left(\prod_{i=0}^n a_i \right) \|e_0\| + \sum_{i=0}^n \left(\prod_{j=i+1}^n a_j \right) b_i, \quad n = 0, 1, 2, \dots, \quad (3.16)$$

Para probar que $e_n \rightarrow 0$ cuando $n \rightarrow \infty$, con $nh = T$ y $h \rightarrow 0$, supondremos que la función de acotación de Lipschitz, $K(t)$, introducida en la condición (C_2) (véase expresión (3.3)) está uniformemente ecotada en el intervalo $[T_0, T]$ (esto por ejemplo se cumple si $K(t)$ es una función continua), es decir,

$$K = \max_{T_0 \leq t \leq T} K(t).$$

Bajo esta hipótesis se cumple

$$\begin{aligned} \prod_{i=0}^n a_i &\leq \prod_{i=0}^n \exp \left(\frac{h}{6} \left[K(t_i) + 4K(t_i + \frac{h}{2}) + K(t_i + h) \right] \right) \\ &\leq \prod_{i=0}^n \exp \left(\frac{h}{6} [K + 4K + K] \right) \\ &= \prod_{i=0}^n \exp(Kh) \\ &= e^{K(n+1)h}, \end{aligned} \quad (3.17)$$

donde en la primera acotación hemos aplicado la siguiente desigualdad: $1 + x \leq e^x$, $x \geq -1$.

Aplicando que $K(t) \leq K$, $\forall t \in [T_0, T]$, a partir de (3.14), también se cumple la siguiente acotación

$$\begin{aligned} b_n &\leq M \frac{h^2}{6} K + Mh^2 K + M \frac{h^2}{3} K + h\omega(S, h) \\ &= Mh^2 K \left[\frac{1}{6} + 1 + \frac{1}{3} \right] + h\omega(S, h) \\ &= \frac{3}{2} Mh^2 + h\omega(S, h). \end{aligned} \quad (3.18)$$

Ahora sustituimos las acotaciones (3.17) y (3.18) en (3.16), teniendo en cuenta que $e_0 = 0$, y que (3.17) se aplica sobre un producto que tiene $n - i$ factores,

$$\begin{aligned}
\|e_{n+1}\| &\leq \sum_{i=0}^n \left(\prod_{j=i+1}^n a_j \right) b_i \\
&\leq \sum_{i=0}^n e^{K(n-i)h} \left(\frac{3}{2} Mh^2 K + h\omega(S, h) \right) \\
&= \left(\frac{3}{2} Mh^2 K + h\omega(S, h) \right) e^{Knh} \sum_{i=0}^n e^{-iKh} \\
&= \left(\frac{3}{2} Mh^2 K + h\omega(S, h) \right) e^{KT} \frac{1 - e^{-K(n+1)h}}{1 - e^{-Kh}},
\end{aligned} \tag{3.19}$$

donde en el último paso hemos usado que $nh = T$ (sentido de estación fija) y que

$$\sum_{i=0}^n r_i = \frac{1 - r^{n+1}}{1 - r}, \quad r = e^{-Kh}.$$

Observemos que, usando $nh = T$, (3.19) se puede escribir de la siguiente forma

$$\begin{aligned}
\|e_{n+1}\| &\leq \left(\frac{3}{2} MhK + \omega(S, h) \right) e^{KT} \frac{h(1 - e^{-Knh}e^{-Kh})}{1 - e^{-Kh}} \\
&= \left(\frac{3}{2} MhK + \omega(S, h) \right) e^{KT} \frac{h(1 - e^{-KT}e^{-Kh})}{1 - e^{-Kh}}.
\end{aligned} \tag{3.20}$$

Usando la regla de L'Hôpital se tiene

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{h(1 - e^{-KT}e^{-Kh})}{1 - e^{-Kh}} = \left\{ \frac{0}{0} \right\} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(1 - e^{-KT}e^{-Kh}) + hKe^{-KT}e^{-Kh}}{Ke^{-Kh}} = \frac{1 - e^{-KT}}{K}. \tag{3.21}$$

Por otra parte,

$$\lim_{h \rightarrow 0} \left(\frac{3}{2} MhK + \omega(S, h) \right) = 0, \tag{3.22}$$

ya que $\omega(S, h) \rightarrow 0$ cuando $h \rightarrow 0$.

Por tanto, tomando límites cuando $h \rightarrow 0$, $n \rightarrow \infty$ con $nh = T$ en (3.20), y usando (3.21) y (3.22), se deduce que $\|e_{n+1}\| \rightarrow 0$ cuando $n \rightarrow \infty$, lo que prueba la convergencia del método de Runge-Kutta.

Ejemplos numéricos

En este capítulo se presentan varios ejemplos de carácter, principalmente, numérico donde se muestra cómo se puede obtener las soluciones aproximadas de ciertas ecuaciones diferenciales con condiciones iniciales usando los métodos de Euler y Runge-Kutta aleatorios.

4.1 Determinación del desplazamiento por un movimiento terrestre

Consideremos el problema de determinar el efecto sobre una estructura terrestre de una perturbación de tipo terremoto. Supongamos que la estructura está en reposo en $t = 0$, y sea $X(t) > 0, t \geq 0$, el desplazamiento (relativo) horizontal del techo con respecto al suelo. Basándose en un modelo lineal idealizado, el desplazamiento relativo $X(t)$ se rige por la ecuación diferencial

$$\begin{cases} \ddot{X}(t) + 2\xi\omega_0\dot{X}(t) + \omega_0^2X(t) = -Y(t), & t \geq 0, \\ X(0) = 0, \dot{X}(0) = 0, \end{cases} \quad (4.1)$$

donde $Y(t)$ es el proceso estocástico de segundo orden dado por (1.16). La solución en media cuadrática del problema (4.1) tiene la forma, [4, p. 165],

$$X(t) = - \int_0^t h(t-z)Y(z)dz, \quad (4.2)$$

con $\xi < 1$, y donde $h(t)$ es la respuesta impulsiva

$$h(t) = \frac{1}{\hat{\omega}_0} e^{-\xi\omega_0 t} \sin(\hat{\omega}_0 t), \quad t \geq 0, \quad \hat{\omega}_0 = \omega_0 \sqrt{1 - \xi^2}. \quad (4.3)$$

La esperanza y la función de autocorrelación del proceso estocástico de segundo orden $Y(t)$ están dadas por

$$\mathbb{E}[Y(t)] = 0, \quad t \geq 0, \quad (4.4)$$

y

$$\Gamma_Y(u, v) = \mathbb{E}[Y(u)Y(v)] = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^m u v a_j^2 e^{-\alpha_j(u+v)} \cos((u-v)\omega_j), \quad u, v \geq 0. \quad (4.5)$$

Por lo tanto, de las ecuaciones (4.2)-(4.5), se deduce que

$$\mathbb{E}[X(t)] = 0, \quad t \geq 0,$$

y

$$\text{Var}[X(t)] = \mathbb{E}[X(t)X(t)] = \int_0^t \int_0^t h(t-u)h(t-v)\Gamma_Y(u, v)dudv, \quad t \geq 0. \quad (4.6)$$

Para aplicar el esquema aleatorio de Euler al problema, convertiremos la ecuación diferencial de segundo orden (5.1) en un sistema de ecuaciones diferenciales de primer orden. Dejando $X^1(t) = X(t)$, $X^2(t) = \dot{X}(t)$ y $(\mathbf{X}(t))^T = [X^1(t), X^2(t)]$, la forma de la matriz vectorial de la ecuación (4.1) es

$$\dot{\mathbf{X}}(t) = \mathbf{A}(t)\mathbf{X}(t) + \mathbf{G}(t),$$

donde $\mathbf{A}(t)$ y $\mathbf{G}(t)$ se han obtenido en (1.15) y $(\mathbf{X}(0))^T = \mathbf{0}^T = [0, 0]$. Como $\mathbf{X}_0^T = [0, 0]$, la expresión del método aleatorio de Euler en este caso toma la forma

$$\mathbf{X}_n = (\mathbf{I} + h\mathbf{A})^n \mathbf{X}_0 + h \sum_{i=0}^{n-1} (\mathbf{I} + h\mathbf{A})^{n-i-1} \mathbf{G}(t_i) = h \sum_{i=0}^{n-1} (\mathbf{I} + h\mathbf{A})^{n-i-1} \mathbf{G}(t_i),$$

donde \mathbf{I} denota la matriz de identidad de tamaño 2. Es importante señalar, que las hipótesis H1 y H2 se cumplen, luego la convergencia en media cuadrática del método aleatorio de Euler está garantizada. De hecho, H1 se cumple con el Ejemplo 1.0.2 y, según el Lema 1.0.1, se obtiene la condición de Lipschitz

$$\|\mathbf{F}(\mathbf{X}, t) - \mathbf{F}(\mathbf{Y}, t)\|_{r \times s} \leq \|\mathbf{A}\|_{\infty} \|\mathbf{X} - \mathbf{Y}\|_{r \times s} = k \|\mathbf{X} - \mathbf{Y}\|_{r \times s},$$

donde

$$k = \max\{1, \omega_0^2 + 2\omega_0\xi\} \quad , \quad \int_{t_0}^{t_e} k dt < +\infty$$

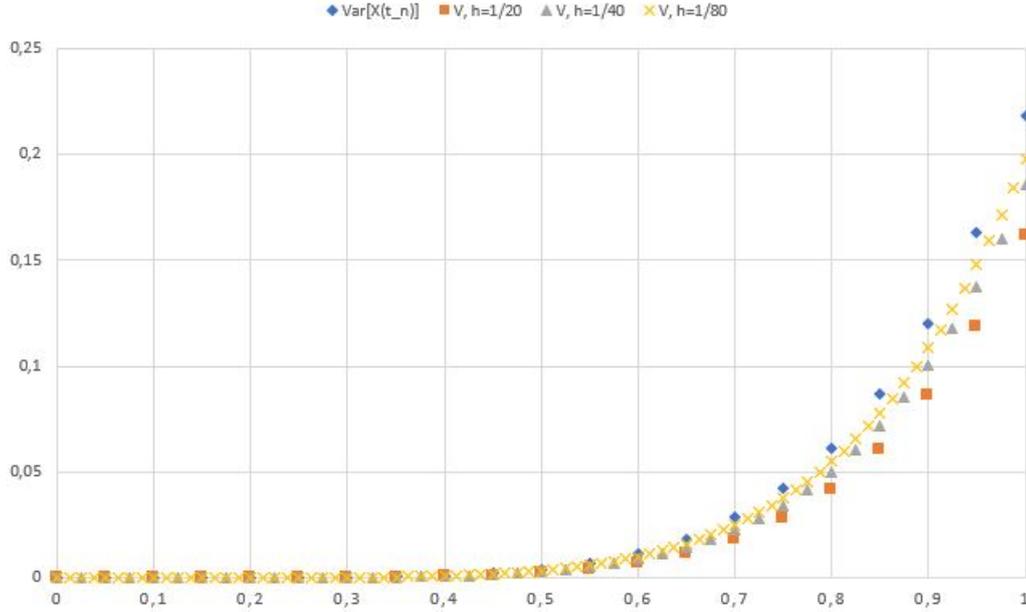


Figura 4.1: Comparación entre los valores teóricos y numéricos por el Ejemplo 4.1.

Teniendo en cuenta que como $\mathbb{E}[Y(t_i)] = 0$, obtenemos que $\mathbb{E}[\mathbf{X}_n] = \mathbf{0}$ y $\mathbb{E}[\mathbf{X}_n](\mathbb{E}[\mathbf{X}_n])^T = 0$, luego la matriz de covarianza del vector aleatorio \mathbf{X}_n sería

$$\begin{aligned} \mathbf{\Lambda}_{X_n} &= \mathbb{E}[X_n(X_n)^T] \\ &= h^2 \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{j=0}^{n-1} (\mathbf{I} + h\mathbf{A})^{n-i-1} \mathbb{E}[\mathbf{G}(t_i)\mathbf{G}(t_j)^T] ((\mathbf{I} + h\mathbf{A})^{n-j-1})^T, \end{aligned} \quad (4.7)$$

siendo

$$\mathbb{E}[\mathbf{G}(t_i)(\mathbf{G}(t_j))^T] = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \mathbb{E}[Y(t_i)Y(t_j)] \end{bmatrix},$$

donde $\mathbb{E}[Y(t_i)Y(t_j)]$ está definido por (4.5). Teniendo en cuenta que si $\mathbf{\Lambda}_{X_n} = (V^{ij})_{2 \times 2}$, denota la matriz cuadrada de tamaño 2 dada por (4.7), entonces V^{11} es la varianza aproximada del proceso estocástico de segundo orden (4.1), obtenida del método aleatorio escalar de Euler. La Figura 4.1 muestra $V^{11} = \text{Var}[X_n]$ para $h = 1/20$, $h = 1/40$, $h = 1/80$ y la varianza teórica $\text{Var}[X(t_n)]$ dado por (4.6), tomando en (4.1) $\xi = 0,05$ y $\omega_j = 1$, $a_j = (1/2)^j$, $0 \leq j \leq 20$ para $Y(t)$ dado por (1.16). Dicha gráfica ilustra, que los valores numéricos y exactos están más cerca cuando h disminuye. Este comportamiento está de acuerdo con la propiedad (1.9).

4.2 Problema matricial lineal bilateral completo de Sylvester

Consideremos el sistema diferencial aleatorio matricial no homogéneo dado por

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{X}}(t) = \mathbf{A}(t)\mathbf{X}(t) + \mathbf{X}(t)\mathbf{B}(t) + \mathbf{C}(t), & t \geq 0, \\ \mathbf{X}(0) = \mathbf{X}_0, \end{cases} \quad (4.8)$$

donde

$$\mathbf{A}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \mathbf{B}(t) = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \mathbf{C}(t) = \begin{bmatrix} B(t) & 0 \\ 0 & (B(t))^2 \end{bmatrix}, \mathbf{X}_0 = \mathbf{0} \quad (4.9)$$

siendo $\mathbf{0}$ la matriz nula de tamaño 2×2 y $B(t)$ un proceso de movimiento Browniano. Ya que $\mathbb{E}[(B(t))^2] = t$ y $[(B(t))^4] = 3t^2$, entonces para $0 \leq t \leq t'$ resulta que

$$\begin{aligned} \|\mathbf{F}(\mathbf{X}, t) - \mathbf{F}(\mathbf{X}, t')\|_{r \times s} &= \max\{\|B(t) - B(t')\|, \|(B(t))^2 - (B(t'))^2\|\} \\ &\quad \max\{|t - t'|^{1/2}, |-t^2 + 3(t')^2 - 2tt'|^{1/2}\}, \end{aligned}$$

y por el Lema 1.0.1 se obtiene

$$\begin{aligned} \|\mathbf{F}(\mathbf{X}, t) - \mathbf{F}(\mathbf{Y}, t)\|_{r \times s} &\leq \|\mathbf{A}(\mathbf{X} - \mathbf{Y})\|_{r \times s} + \|(\mathbf{X} - \mathbf{Y})\mathbf{B}\|_{r \times s} \\ &\leq (\|\mathbf{A}\|_\infty + \|\mathbf{B}\|_\infty)\|\mathbf{X} - \mathbf{Y}\|_{r \times s}, \end{aligned}$$

entonces la ecuación del problema (4.8) satisface las hipótesis **H1** y **H2**, por lo tanto, el método aleatorio de Euler es convergente en media cuadrática.

Vamos a denotar por $\mathbb{E}[\mathbf{X}_n] = (\mathbb{E}^{ij})_{2 \times 2}$ la esperanza de la matriz de tamaño 2×2 de las aproximaciones de Euler. Las Figuras 4.3 y 4.5, proporcionan los valores de esta matriz para diferentes valores del paso h . A partir de los resultados, se observa que, los valores numéricos obtenidos están más cerca a medida que disminuye el valor del paso h , como cabe esperar por la convergencia en media cuadrática, y por tanto también de la media y la varianza.

4.3 Problema escalar lineal con termino fuente Browniano

Consideremos el problema

$$\begin{cases} \dot{X}(t) = 2tX(t) + \exp(-t) + B(t), & t \in [0, 1], \\ X(t_0) = X_0, \end{cases} \quad (4.10)$$

donde $B(t)$ es el proceso movimiento Browniano estándar y X_0 es la variable aleatoria, $X_0 \sim N\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{12}\right)$ independiente del movimiento Browniano $B(t)$ para cada $t \in [0, 1]$.

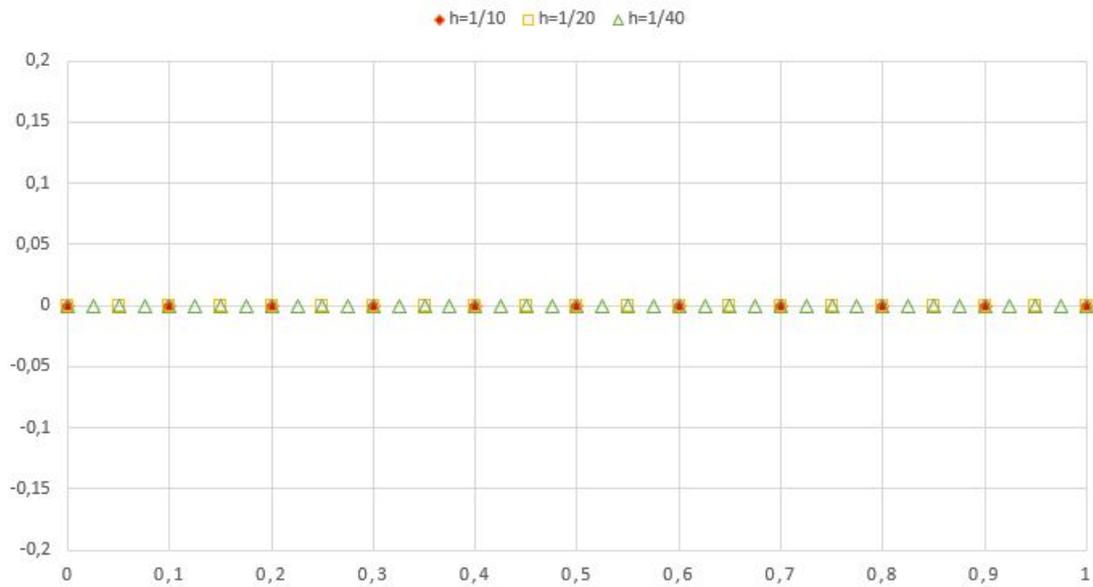


Figura 4.2: Valores numéricos de \mathbb{E}^{11} de la matriz esperanza del Problema Matricial 4.2.

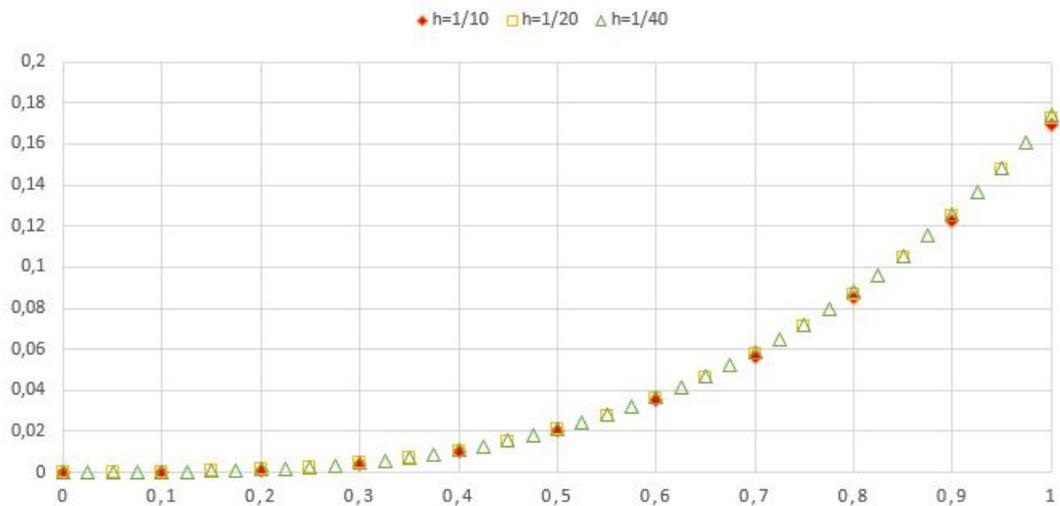


Figura 4.3: Valores numéricos de \mathbb{E}^{12} de la matriz esperanza del Problema Matricial 4.2.

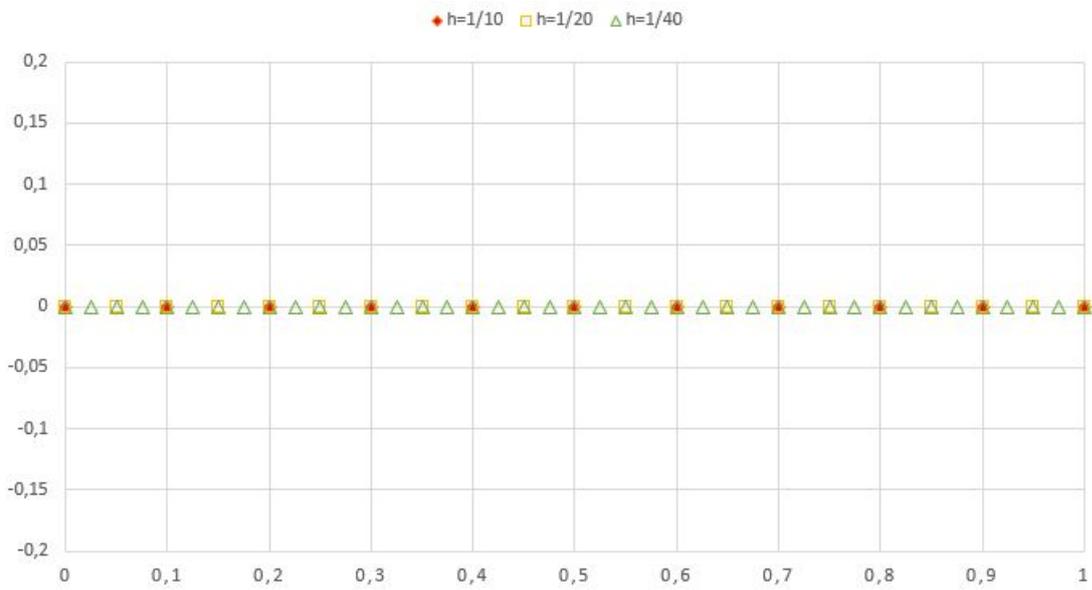


Figura 4.4: Valores numéricos de \mathbb{E}^{21} de la matriz esperanza del Problema Matricial 4.2.

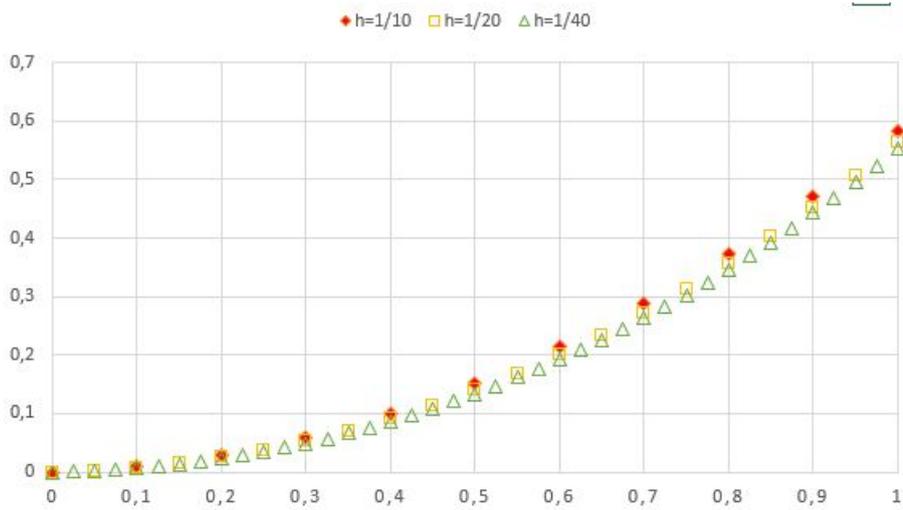


Figura 4.5: Valores numéricos de \mathbb{E}^{22} de la matriz esperanza del Problema Matricial 4.2.

Para calcular la solución exacta del problema, multiplicamos la ecuación (4.10) por $\exp(-t^2)$ y usando $W(t) = \frac{dB(t)}{dt}$, se obtiene

$$-2t \exp(-t^2)X(t)dt + \exp(-t^2)dX(t) = \exp(-t^2)(\exp(-t) + B(t))dt.$$

Usando la fórmula de Itô [3], se deduce

$$d(\exp(-t^2)X(t)) = -2t \exp(-t^2)X(t)dt + \exp(-t^2)dX(t) = \exp(-t^2)(\exp(-t) + B(t))dt$$

por lo que

$$X(t) = \exp(t^2) \left\{ X_0 + \int_0^t \exp(-s^2)(\exp(-s) + B(s))ds \right\}. \quad (4.11)$$

Notemos que $F(X,t)$ cumple la condición de Lipschitz **H2**, ya que

$$\begin{aligned} \|F(X,t) - F(X^*,t)\| &= \|2tX + \exp(-t) + B(t) - 2tX^* - \exp(-t) - B(t)\| \\ &= \|2tX - 2tX^*\| = 2t\|X - X^*\|. \end{aligned}$$

Si $F(X,t) = 2tX + \exp(-t) + B(t)$, entonces

$$\|F(X,t) - F(X,t^*)\| \leq (2\|X\| + 1)|t - t^*| + |t - t^*|^{1/2} \quad (4.12)$$

y $F(X,t)$ esta acotada aleatoriamente de manera uniforme continua en cualquier conjunto acotado $S \subset L^2$. Para este problema, el método aleatorio de cuarto orden de Runge-Kutta es

$$X_{n+1} = X_n + \frac{1}{6}(K_1 + 2K_2 + 2K_3 + K_4), \quad (4.13)$$

donde

$$\begin{aligned}
 K_1 &= 2ht_n X_n + h(\exp(-t_n) + B(t_n)), \\
 K_2 &= 2h\left(t_n + \frac{h}{2}\right)(1 + ht_n)X_n + h^2\left(t_n + \frac{h}{2}\right)(\exp(-t_n) + B(t_n)) \\
 &\quad + h\left(\exp\left(-\left(t_n + \frac{h}{2}\right)\right) + B\left(t_n + \frac{h}{2}\right)\right), \\
 K_3 &= 2h\left(t_n + \frac{h}{2}\right)\left(1 + h\left(t_n + \frac{h}{2}\right)(1 + ht_n)\right)X_n + h^3\left(t_n + \frac{h}{2}\right)^2(\exp(-t_n) + B(t_n)) \\
 &\quad + h\left(1 + h\left(t_n + \frac{h}{2}\right)\right)\left(\exp\left(-\left(t_n + \frac{h}{2}\right)\right) + B\left(t_n + \frac{h}{2}\right)\right), \\
 K_4 &= 2h(t_n + h)\left(1 + 2h\left(t_n + \frac{h}{2}\right)\left(1 + h\left(t_n + \frac{h}{2}\right)(1 + ht_n)\right)\right)X_n + 2h^4(t_n + h) \\
 &\quad \times \left(t_n + \frac{h}{2}\right)^2(\exp(-t_n) + B(t_n)) + 2h^2(t_n + h)\left(1 + h\left(t_n + \frac{h}{2}\right)\right) \\
 &\quad \times \left(\exp\left(-\left(t_n + \frac{h}{2}\right)\right) + B\left(t_n + \frac{h}{2}\right)\right) + h(\exp(-(t_n + h)) + B(t_n + h)),
 \end{aligned}$$

y denotando

$$\begin{aligned}
 a_n &= 1 + \frac{h}{3}t_n + \frac{2h}{3}\left(t_n + \frac{h}{2}\right)\left(1 + (1 + ht_n)\left(1 + h\left(t_n + \frac{h}{2}\right)\right)\right) \\
 &\quad + \frac{h}{3}(t_n + h)\left(1 + 2h\left(t_n + \frac{h}{2}\right)\left(1 + h\left(t_n + \frac{h}{2}\right)(1 + ht_n)\right)\right), \\
 b_n &= \frac{h}{6}\left(1 + 2h\left(t_n + \frac{h}{2}\right) + 2h^2\left(t_n + \frac{h}{2}\right)^2 + 2h^3(t_n + h)\left(t_n + \frac{h}{2}\right)^2\right)(\exp(-t_n) + B(t_n)) \\
 &\quad + \frac{h}{3}\left(2 + h\left(t_n + \frac{h}{2}\right) + h(t_n + h)\left(1 + h\left(t_n + \frac{h}{2}\right)\right)\right) \\
 &\quad \times \left(\exp\left(-\left(t_n + \frac{h}{2}\right)\right) + B\left(t_n + \frac{h}{2}\right)\right) + \frac{h}{6}(\exp(-(t_n + h)) + B(t_n + h)),
 \end{aligned}$$

tenemos

$$X_{n+1} = a_n X_n + b_n, \quad n = 0, 1, 2, \dots, \quad (4.14)$$

por lo que

$$X_n = \left(\prod_{i=0}^{n-1} a_i\right) X_0 + \sum_{i=0}^{n-1} \left(\prod_{j=i+1}^{n-1} a_j\right) b_i, \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (4.15)$$

De (4.11) y (4.15), obtenemos la esperanza y la varianza de $X(t)$ y X_n .

$$\mathbb{E}[X(t)] = \exp(t^2) \left[\frac{1}{2} + \int_0^t \exp(-s^2 - s) ds \right], \quad (4.16)$$

$$\mathbb{E}[X_n] = \frac{1}{2} \prod_{i=0}^{n-1} a_i + \sum_{i=0}^{n-1} \left(\prod_{j=i+1}^{n-1} a_j \right) \mathbb{E}[b_i], \quad n = 1, 2, 3, \dots, \quad (4.17)$$

donde

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[b_i] = & \frac{h}{6} \left(1 + 2h \left(t_i + \frac{h}{2} \right) + 2h^2 \left(t_i + \frac{h}{2} \right)^2 + 2h^3 (t_i + h) \left(t_i + \frac{h}{2} \right)^2 \right) \exp(-t_i) \\ & + \frac{h}{3} \left(2 + h \left(t_i + \frac{h}{2} \right) + h(t_i + h) \left(1 + h \left(t_i + \frac{h}{2} \right) \right) \right) \exp \left(- \left(t_i + \frac{h}{2} \right) \right) \\ & + \frac{h}{6} \exp(-(t_i + h)) \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} \text{Var}[X(t)] = & \exp(2t^2) \left[\frac{1}{12} + \int_0^t \int_0^t \exp(-s^2 - r^2) \text{mín}(s, r) ds dr \right] \\ = & \exp(2t^2) \left[\frac{1}{12} + \int_0^t (\exp(-s^2) - \exp(-2s^2)) ds \right], \end{aligned} \quad (4.18)$$

$$\text{Var}[X_n] = \frac{1}{12} \left(\prod_{i=0}^{n-1} a_i \right)^2 + \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{k=0}^{n-1} \left(\prod_{j=i+1}^{n-1} a_j \right) \left(\prod_{l=k+1}^{n-1} a_l \right) \text{Cov}[b_i, b_k] \quad n = 0, 1, 2, 3, \dots, \quad (4.19)$$

donde

$$\begin{aligned} \text{Cov}[b_i, b_k] = & A_{i,k} \text{mín}(t_i, t_k) + B_{i,k} \text{mín} \left(t_i, t_k + \frac{h}{2} \right) \\ & + C_i \text{mín}(t_i, t_k + h) + B_{k,i} \text{mín} \left(t_i + \frac{h}{2}, t_k \right) \\ & + D_{i,k} \text{mín} \left(t_i + \frac{h}{2}, t_k + \frac{h}{2} \right) + E_i \text{mín} \left(t_i + \frac{h}{2}, t_k + h \right) + C_k \text{mín}(t_i + h, t_k) \\ & + E_k \text{mín} \left(t_i + h, t_k + \frac{h}{2} \right) + \frac{h^2}{36} \text{mín}(t_i + h, t_k + h), \end{aligned}$$

siendo

t	Euler		Runge-Kutta de orden 4	
	$h = \frac{1}{20}$	$h = \frac{1}{50}$	$h = \frac{1}{20}$	$h = \frac{1}{50}$
0,1	$1,0400 \times 10^{-4}$	$2,3400 \times 10^{-4}$	$2,3928 \times 10^{-7}$	$3,8298 \times 10^{-8}$
0,2	$1,2609 \times 10^{-3}$	$9,9530 \times 10^{-4}$	$1,6616 \times 10^{-6}$	$2,6515 \times 10^{-7}$
0,3	$3,8050 \times 10^{-3}$	$2,3808 \times 10^{-3}$	$4,8646 \times 10^{-6}$	$7,7577 \times 10^{-7}$
0,4	$8,0600 \times 10^{-3}$	$4,5799 \times 10^{-3}$	$1,0045 \times 10^{-5}$	$1,6045 \times 10^{-6}$
0,5	$1,4602 \times 10^{-2}$	$7,9072 \times 10^{-3}$	$1,7175 \times 10^{-5}$	$2,7424 \times 10^{-6}$
0,6	$2,4361 \times 10^{-2}$	$1,2859 \times 10^{-2}$	$2,6128 \times 10^{-5}$	$4,1668 \times 10^{-6}$
0,7	$3,8779 \times 10^{-2}$	$2,0206 \times 10^{-2}$	$3,6763 \times 10^{-5}$	$5,8493 \times 10^{-6}$
0,8	$6,0083 \times 10^{-2}$	$3,1145 \times 10^{-2}$	$4,9002 \times 10^{-5}$	$7,7672 \times 10^{-6}$
0,9	$9,1709 \times 10^{-2}$	$4,7538 \times 10^{-2}$	$6,2899 \times 10^{-5}$	$9,9122 \times 10^{-6}$
1,0	$1,3899 \times 10^{-1}$	$7,3744 \times 10^{-2}$	$7,8726 \times 10^{-5}$	$1,2299 \times 10^{-5}$

Cuadro 4.1: Error absoluto de la esperanza de $X(t)$ con Euler y Runge-Kutta de orden 4 del Problema Browniano 4.3.

$$\begin{aligned}
 A_{i,k} &= \frac{h^2}{36} \left(1 + 2h \left(t_i + \frac{h}{2} \right) + 2h^2 \left(t_i + \frac{h}{2} \right)^2 + 2h^3 (t_i + h) \left(t_i + \frac{h}{2} \right)^2 \right), \\
 &\quad \times \left(1 + 2h \left(t_k + \frac{h}{2} \right) + 2h^2 \left(t_k + \frac{h}{2} \right)^2 + 2h^3 (t_k + h) \left(t_k + \frac{h}{2} \right)^2 \right), \\
 B_{i,k} &= \frac{h^2}{18} \left(1 + 2h \left(t_i + \frac{h}{2} \right) + 2h^2 \left(t_i + \frac{h}{2} \right)^2 + 2h^3 (t_i + h) \left(t_i + \frac{h}{2} \right)^2 \right) \\
 &\quad \times \left(2 + h \left(t_k + \frac{h}{2} \right) + h(t_k + h) \left(1 + h \left(t_k + \frac{h}{2} \right) \right) \right), \\
 C_i &= \frac{h^2}{36} \left(1 + 2h \left(t_i + \frac{h}{2} \right) + 2h^2 \left(t_i + \frac{h}{2} \right)^2 + 2h^3 (t_i + h) \left(t_i + \frac{h}{2} \right)^2 \right), \\
 D_{i,k} &= \frac{h^2}{9} \left(2 + h \left(t_i + \frac{h}{2} \right) + h(t_i + h) \left(1 + h \left(t_i + \frac{h}{2} \right) \right) \right) \\
 &\quad \times \left(2 + h \left(t_k + \frac{h}{2} \right) + h(t_k + h) \left(1 + h \left(t_k + \frac{h}{2} \right) \right) \right), \\
 E_i &= \frac{h^2}{18} \left(2 + h \left(t_i + \frac{h}{2} \right) + h(t_i + h) \left(1 + h \left(t_i + \frac{h}{2} \right) \right) \right), \quad i, k = 0, 1, 2, \dots, n - 1.
 \end{aligned}$$

El error absoluto de la esperanza y la varianza de $X(t)$ con los métodos de Euler y Runge-Kutta de orden 4, en $h = \frac{1}{20}$ y $h = \frac{1}{50}$, se presentan en el Cuadro 4.1 y en el Cuadro 4.2. En la Figura 4.8 y la Figura 4.11 hemos representado, para su comparación, la esperanza y la varianza exacta y aproximada, respectivamente, del Ejemplo 4.3 con el método de Runge-Kutta de orden 4 y $h = \frac{1}{20}$. Además, las Tablas 4.1 y 4.2 muestran que los valores numéricos de $\mathbb{E}[X_n]$ y $\text{Var}[X_n]$ están más cerca de los valores teóricos $\mathbb{E}[X(t_n)]$ y $\text{Var}[X(t_n)]$ cuando el parámetro h disminuye, siendo las aproximaciones obtenidas por el método de Runge Kutta de orden 4 bastante mejores que las proporcionadas por el método de Euler.

t	Euler		Runge-Kutta de orden 4	
	$h = \frac{1}{20}$	$h = \frac{1}{50}$	$h = \frac{1}{20}$	$h = \frac{1}{50}$
0,1	$2,0204 \times 10^{-3}$	$1,9717 \times 10^{-3}$	$7,0459 \times 10^{-6}$	$1,1263 \times 10^{-6}$
0,2	$9,3422 \times 10^{-3}$	$9,4287 \times 10^{-3}$	$1,4670 \times 10^{-5}$	$2,345 \times 10^{-6}$
0,3	$3,7520 \times 10^{-2}$	$2,5607 \times 10^{-2}$	$2,3546 \times 10^{-5}$	$3,7642 \times 10^{-6}$
0,4	$5,4110 \times 10^{-2}$	$5,5446 \times 10^{-2}$	$3,4562 \times 10^{-5}$	$5,5264 \times 10^{-6}$
0,5	$1,0430 \times 10^{-1}$	$1,0679 \times 10^{-1}$	$4,8999 \times 10^{-5}$	$7,8369 \times 10^{-6}$
0,6	$1,8845 \times 10^{-1}$	$1,9249 \times 10^{-1}$	$6,8810 \times 10^{-5}$	$1,101 \times 10^{-5}$
0,7	$3,2798 \times 10^{-1}$	$3,3400 \times 10^{-1}$	$9,7109 \times 10^{-5}$	$1,5548 \times 10^{-5}$
0,8	$5,5950 \times 10^{-1}$	$5,6795 \times 10^{-1}$	$1,3903 \times 10^{-4}$	$2,2279 \times 10^{-5}$
0,9	$9,9469 \times 10^{-1}$	$9,5833 \times 10^{-1}$	$2,0328 \times 10^{-4}$	$3,2615 \times 10^{-5}$
1,0	1,6045	1,6194	$3,0505 \times 10^{-4}$	$4,9026 \times 10^{-5}$

Cuadro 4.2: Error absoluto de la varianza de $X(t)$ con Euler y Runge-Kutta de orden 4 del Problema Browniano 4.3.

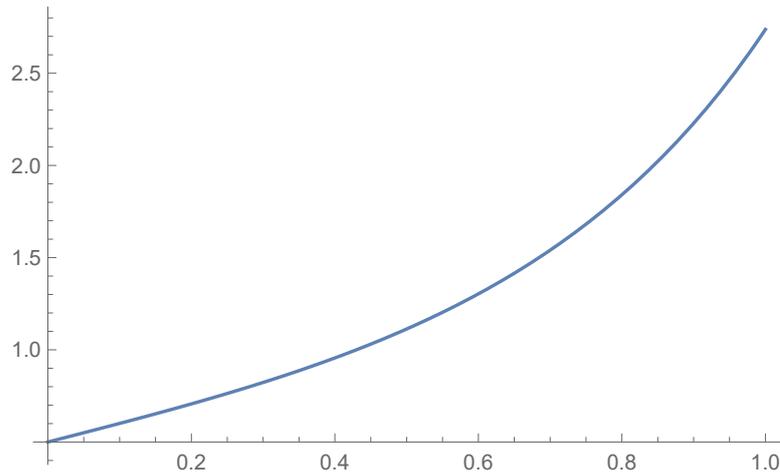


Figura 4.6: Esperanza $X(t)$ mediante el método Runge-Kutta de orden 4 y $h = \frac{1}{20}$ del Problema Browniano 4.3.

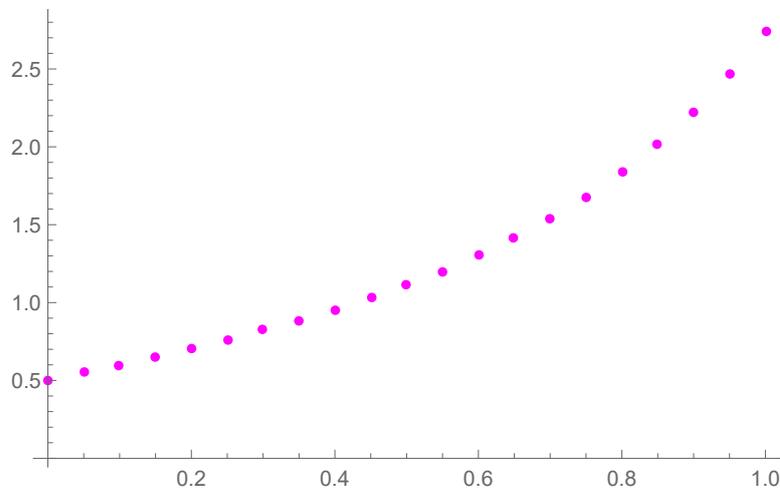


Figura 4.7: Esperanza X_n mediante el método Runge-Kutta de orden 4 y $h = \frac{1}{20}$ del Problema Browniano 4.3.

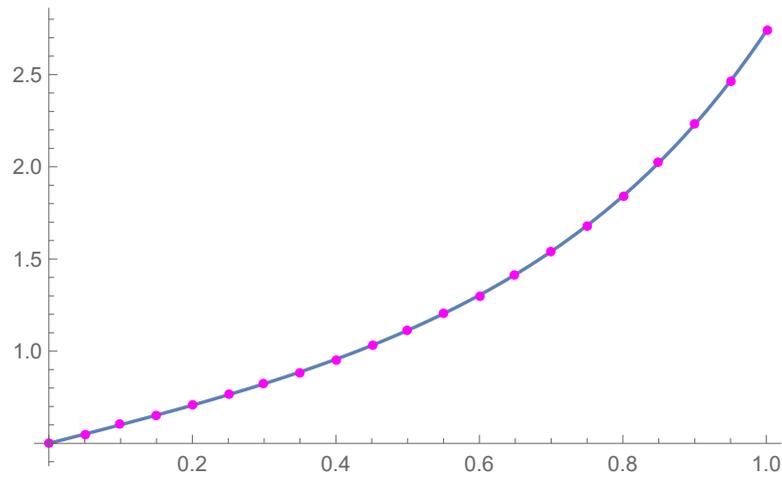


Figura 4.8: Esperanza $X(t)$ y X_n mediante el método Runge-Kutta de orden 4 y $h = \frac{1}{20}$ del Problema Browniano 4.3.

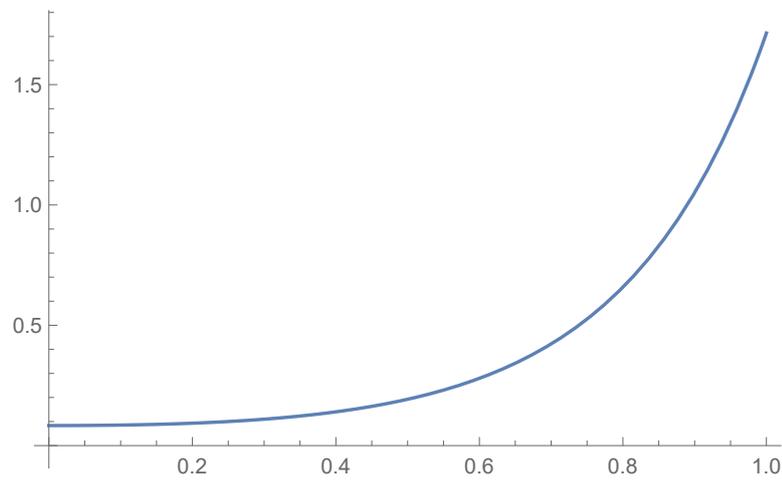


Figura 4.9: Varianza $X(t)$ mediante el método Runge-Kutta de orden 4 y $h = \frac{1}{20}$ del Problema Browniano 4.3.

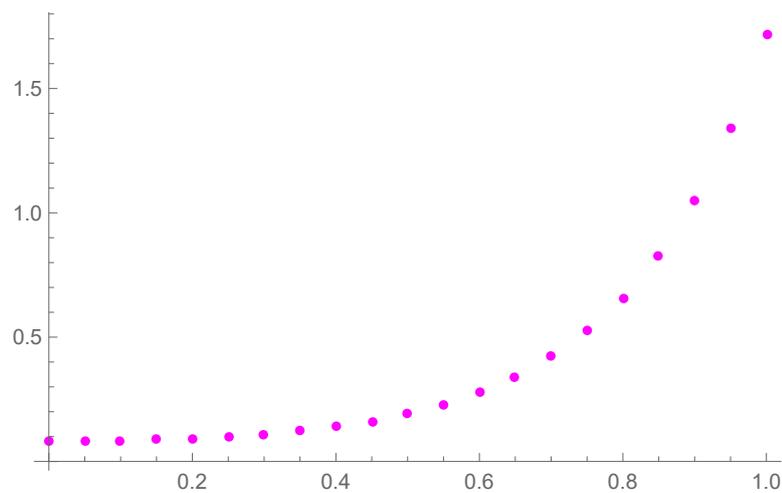


Figura 4.10: Varianza X_n con el método Runge-Kutta de orden 4 y $h = \frac{1}{20}$ del Problema Browniano 4.3.

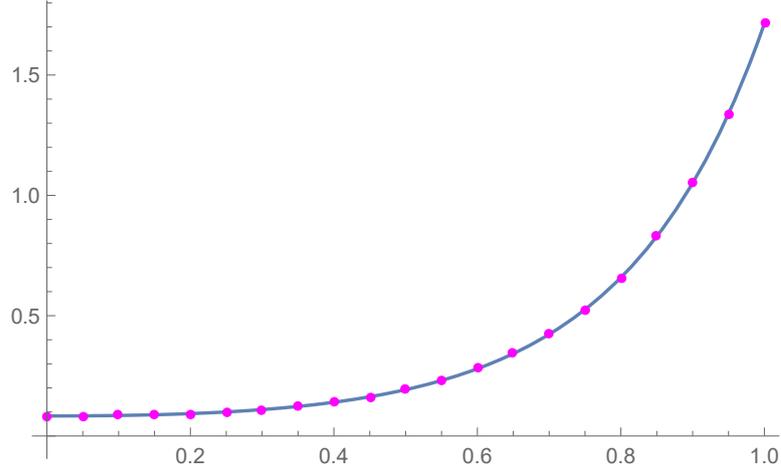


Figura 4.11: Varianza $X(t)$ y X_n con el método Runge-Kutta de orden 4 y $h = \frac{1}{20}$ del Problema Browniano 4.3.

4.4 Problema de ruido blanco Gaussiano

Consideremos el problema

$$\begin{cases} \dot{X}(t) = t^2 X(t) + W(t), & t \in [0, 1], \\ X(0) = X_0, \end{cases} \quad (4.20)$$

donde $W(t)$ es un proceso de ruido blanco Gaussiano con media cero y X_0 es una variable exponencial aleatoria con el parámetro $\lambda = \frac{1}{2}$, independiente de $W(t)$ para cada $t \in [0, 1]$. En este ejemplo tenemos $F(X, t) = t^2 X + W(t)$.

La covarianza de $W(t)$ es

$$\text{Cov}[W(t), W(s)] = \delta(t - s), \quad (4.21)$$

donde $\delta(t)$ es la función delta generalizada. Siempre existe una convolución con la función delta, ver [6], y la función delta juega el mismo papel para la convolución que la unidad para la multiplicación, esto es,

$$\delta * g = g.$$

Por tanto, si tomamos $g(s) = h(s)\mathcal{X}[0, t](s)$, donde $h(s)$ es una función C^∞ y $\mathcal{X}[0, t](s)$ denota la función característica de la función en el intervalo $[0, t]$, de (4.21) se tiene que

$$\int_{-\infty}^{\infty} g(s)\delta(s - r)ds = \int_{-\infty}^{\infty} h(s)\mathcal{X}[0, t](s)\delta(s - r)ds = \int_0^t h(s)\delta(s - r)ds = h(r).$$

Para calcular la solución exacta del problema, multiplicaremos ambos lados de (4.20) por $\exp\left(\frac{-t^3}{3}\right)$, y usando $W(t) = \frac{dB(t)}{dt}$, tenemos

$$-t^2 \exp\left(\frac{-t^3}{3}\right)X(t)dt + \exp\left(\frac{-t^3}{3}\right)dX(t) = \exp\left(\frac{-t^3}{3}\right)dB(t),$$

usando la fórmula de Itô, [3], concluimos

$$d\left(\exp\left(\frac{-t^3}{3}\right)X(t)\right) = -t^2 \exp\left(\frac{-t^3}{3}\right)X(t)dt + \exp\left(\frac{-t^3}{3}\right)dX(t) = \exp\left(\frac{-t^3}{3}\right)dB(t),$$

y entonces

$$X(t) = \exp\left(\frac{-t^3}{3}\right)\left[X_0 + \int_0^t \exp\left(\frac{-s^3}{3}\right)dB(s)\right]. \quad (4.22)$$

Ahora, calculamos las aproximaciones X_n usando el método aleatorio de Runge-Kutta de cuarto orden,

$$X_{n+1} = X_n + \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4), \quad (4.23)$$

donde

$$\begin{aligned} k_1 &= ht_n^2 X_n + hW(t_n), \\ k_2 &= h\left(t_n + \frac{h}{2}\right)^2 \left(1 + \frac{h}{2}t_n^2\right) X_n + \frac{h^2}{2}\left(t_n + \frac{h}{2}\right)^2 W(t_n) + hW\left(t_n + \frac{h}{2}\right), \\ k_3 &= h\left(t_n + \frac{h}{2}\right)^2 \left(1 + \frac{h}{2}\left(t_n + \frac{h}{2}\right)^2 \left(1 + \frac{h}{2}t_n^2\right)\right) X_n + \frac{h^3}{4}\left(t_n + \frac{h}{2}\right)^4 W(t_n) \\ &\quad + h\left(1 + \frac{h}{2}\left(t_n + \frac{h}{2}\right)^2\right)W\left(t_n + \frac{h}{2}\right), \\ k_4 &= h(t_n + h)^2 \left(1 + h\left(t_n + \frac{h}{2}\right)^2 \left(1 + \frac{h}{2}\left(t_n + \frac{h}{2}\right)^2 \left(1 + \frac{h}{2}t_n^2\right)\right)\right) X_n + \frac{h^4}{4}\left(t_n + \frac{h}{2}\right)^4 \\ &\quad \times (t_n + h)^2 W(t_n) + h^2(t_n + h)^2 \left(1 + \frac{h}{2}\left(t_n + \frac{h}{2}\right)^2\right)W\left(t_n + \frac{h}{2}\right) + hW(t_n + h), \end{aligned}$$

y tomando

$$\begin{aligned} a_n &= 1 + \frac{1}{6}t_n^2 + \frac{h}{3}\left(t_n + \frac{h}{2}\right)^2 \left(1 + \left(1 + \frac{h}{2}t_n^2\right)\left(1 + \frac{h}{2}\left(t_n + \frac{h}{2}\right)^2\right)\right) \\ &\quad + \frac{h}{6}(t_n + h)^2 \left(1 + h\left(t_n + \frac{h}{2}\right)^2 \left(1 + \frac{h}{2}\left(t_n + \frac{h}{2}\right)^2 \left(1 + \frac{h}{2}t_n^2\right)\right)\right), \\ b_n &= \frac{h}{6}\left(1 + h\left(t_n + \frac{h}{2}\right)^2 + \frac{h^2}{2}\left(t_n + \frac{h}{2}\right)^4 \left(1 + \frac{h}{2}(t_n + h)^2\right)\right)W(t_n) \\ &\quad + \frac{h}{3}\left(1 + \left(1 + \frac{h}{2}\left(t_n + \frac{h}{2}\right)^2\right)\left(1 + \frac{h}{2}(t_n + h)^2\right)\right)W\left(t_n + \frac{h}{2}\right) + \frac{h}{6}W(t_n + h), \end{aligned}$$

tenemos

$$X_{n+1} = a_n X_n + b_n, \quad n = 0, 1, 2, \dots,$$

y procediendo de forma recurrente obtenemos

$$X_n = \left(\prod_{i=0}^{n-1} a_i \right) X_0 + \sum_{i=0}^{n-1} \left(\prod_{j=i+1}^{n-1} a_j \right) b_i, \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (4.24)$$

De (4.22) y (4.24), obtenemos las esperanzas y las varianzas de $X(t)$ y X_n :

$$\mathbb{E}[X(t)] = 2 \exp\left(\frac{t^3}{3}\right), \quad (4.25)$$

$$\mathbb{E}[X_n] = 2 \prod_{i=0}^{n-1} a_i + \sum_{i=0}^{n-1} \left(\prod_{j=i+1}^{n-1} a_j \right) \mathbb{E}[b_i] = 2 \prod_{i=0}^{n-1} a_i, \quad (4.26)$$

y

$$\text{Var}[X(t)] = \exp\left(\frac{2t^3}{3}\right) \left[4 + \int_0^t \exp\left(\frac{-2s^3}{3}\right) ds \right], \quad (4.27)$$

$$\text{Var}[X_n] = 4 \left(\prod_{i=0}^{n-1} a_i \right)^2 + \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{k=0}^{n-1} \left(\prod_{j=i+1}^{n-1} a_j \right) \left(\prod_{l=k+1}^{n-1} a_l \right) \mathbb{E}[b_i b_k], \quad (4.28)$$

donde

$$\mathbb{E}[b_i b_k] = A_{i,k} \delta(t_i - t_k) + B_{i,k} \delta\left(t_i - t_k - \frac{h}{2}\right) + B_{i,k} \delta\left(t_i - t_k + \frac{h}{2}\right) + C_i \delta(t_i - t_k - h) + C_k \delta(t_i - t_k + h),$$

con

t	Euler		Runge-Kutta de orden 4	
	$h = \frac{1}{20}$	$h = \frac{1}{50}$	$h = \frac{1}{20}$	$h = \frac{1}{50}$
0,1	$8,3335 \times 10^{-5}$	$2,1868 \times 10^{-4}$	$2,1709 \times 10^{-10}$	$2,2227 \times 10^{-12}$
0,2	$1,8389 \times 10^{-3}$	$4,2813 \times 10^{-3}$	$4,3522 \times 10^{-10}$	$4,4555 \times 10^{-12}$
0,3	$2,9353 \times 10^{-3}$	$1,8305 \times 10^{-2}$	$6,5759 \times 10^{-10}$	$6,7342 \times 10^{-12}$
0,4	$5,9445 \times 10^{-3}$	$4,9066 \times 10^{-2}$	$8,9216 \times 10^{-10}$	$9,1442 \times 10^{-12}$
0,5	$1,0166 \times 10^{-2}$	$1,0493 \times 10^{-1}$	$1,1604 \times 10^{-9}$	$1,1963 \times 10^{-11}$
0,6	$1,5858 \times 10^{-2}$	$1,9749 \times 10^{-1}$	$1,5255 \times 10^{-9}$	$1,6213 \times 10^{-11}$
0,7	$2,3460 \times 10^{-2}$	$3,4425 \times 10^{-1}$	$2,1834 \times 10^{-9}$	$2,5666 \times 10^{-11}$
0,8	$3,3671 \times 10^{-2}$	$5,7317 \times 10^{-1}$	$3,7346 \times 10^{-9}$	$5,3311 \times 10^{-11}$
0,9	$4,7596 \times 10^{-2}$	$9,3076 \times 10^{-1}$	$7,9493 \times 10^{-9}$	$1,4031 \times 10^{-10}$
1,0	$6,6954 \times 10^{-2}$	1,4968	$1,9803 \times 10^{-8}$	$4,0766 \times 10^{-10}$

Cuadro 4.3: Error absoluto de la esperanza de $X(t)$ con Euler y Runge-Kutta de orden 4 del Problema de ruido blanco Gaussiano 4.4.

t	Euler		Runge-Kutta de orden 4	
	$h = \frac{1}{20}$	$h = \frac{1}{50}$	$h = \frac{1}{20}$	$h = \frac{1}{50}$
0,1	$6,0089 \times 10^{-2}$	$5,9641 \times 10^{-2}$	$1,0005 \times 10^{-1}$	$1,0005 \times 10^{-1}$
0,2	$1,7228 \times 10^{-1}$	$1,6825 \times 10^{-1}$	$2,0080 \times 10^{-1}$	$2,0080 \times 10^{-1}$
0,3	$3,3247 \times 10^{-1}$	$3,2120 \times 10^{-1}$	$3,0408 \times 10^{-1}$	$3,0408 \times 10^{-1}$
0,4	$5,3849 \times 10^{-1}$	$5,1617 \times 10^{-1}$	$4,1304 \times 10^{-1}$	$4,1304 \times 10^{-1}$
0,5	$7,9087 \times 10^{-1}$	$7,5330 \times 10^{-1}$	$5,3239 \times 10^{-1}$	$5,3239 \times 10^{-1}$
0,6	1,0930	1,0353	$6,6898 \times 10^{-1}$	$6,6898 \times 10^{-1}$
0,7	1,4516	1,3676	$8,3267 \times 10^{-1}$	$8,3267 \times 10^{-1}$
0,8	1,8769	1,7586	1,0380	1,0380
0,9	2,3832	2,2199	1,3075	1,3075
1,0	2,9899	2,7663	1,6764	1,6764

Cuadro 4.4: Error absoluto de la varianza de $X(t)$ con Euler y Runge-Kutta de orden 4 del Problema de ruido blanco Gaussiano 4.4.

$$\begin{aligned}
 A_{i,k} &= \frac{h^2}{36} \left(1 + \left[1 + h \left(t_i + \frac{h}{2} \right)^2 + \frac{h^2}{2} \left(t_i + \frac{h}{2} \right)^4 \left(1 + \frac{h}{2} (t_i + h)^2 \right) \right] \right. \\
 &\quad \times \left. \left[1 + h \left(t_k + \frac{h}{2} \right)^2 + \frac{h^2}{2} \left(t_k + \frac{h}{2} \right)^4 \left(1 + \frac{h}{2} (t_k + h)^2 \right) \right] \right) \\
 &\quad + \frac{h^2}{9} \left[1 + \left(1 + \frac{h}{2} \left(t_i + \frac{h}{2} \right)^2 \right) \left(1 + \frac{h}{2} (t_i + h)^2 \right) \right] \\
 &\quad \times \left[1 + \left(1 + \frac{h}{2} \left(t_k + \frac{h}{2} \right)^2 \right) \left(1 + \frac{h}{2} (t_k + h)^2 \right) \right], \\
 B_{i,k} &= \frac{h^2}{18} \left(1 + \left(1 + \frac{h}{2} \left(t_i + \frac{h}{2} \right)^2 \right) \left(1 + \frac{h}{2} (t_i + h)^2 \right) + \left[1 + h \left(t_i + \frac{h}{2} \right)^2 + \frac{h^2}{2} \left(t_i + \frac{h}{2} \right)^4 \right. \right. \\
 &\quad \times \left. \left. \left(1 + \frac{h}{2} (t_i + h)^2 \right) \right] \left[1 + \left(1 + \frac{h}{2} \left(t_k + \frac{h}{2} \right)^2 \right) \left(1 + \frac{h}{2} (t_k + h)^2 \right) \right] \right), \\
 C_i &= \frac{h^2}{36} \left(1 + h \left(t_i + \frac{h}{2} \right)^2 + \frac{h^2}{2} \left(t_i + \frac{h}{2} \right)^4 \left(1 + \frac{h}{2} (t_i + h)^2 \right) \right), \quad i, k = 0, 1, 2, \dots, n-1.
 \end{aligned}$$

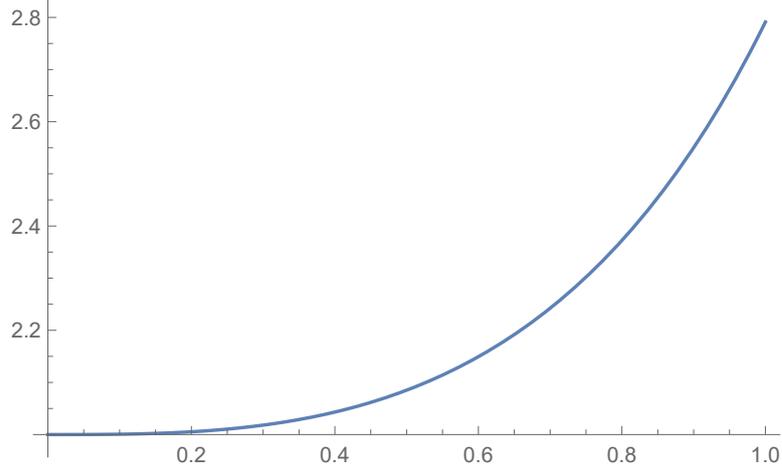


Figura 4.12: Esperanza $X(t)$ mediante el método Runge-Kutta de orden 4 y $h = \frac{1}{20}$ del Problema de ruido blanco Gaussiano 4.4.

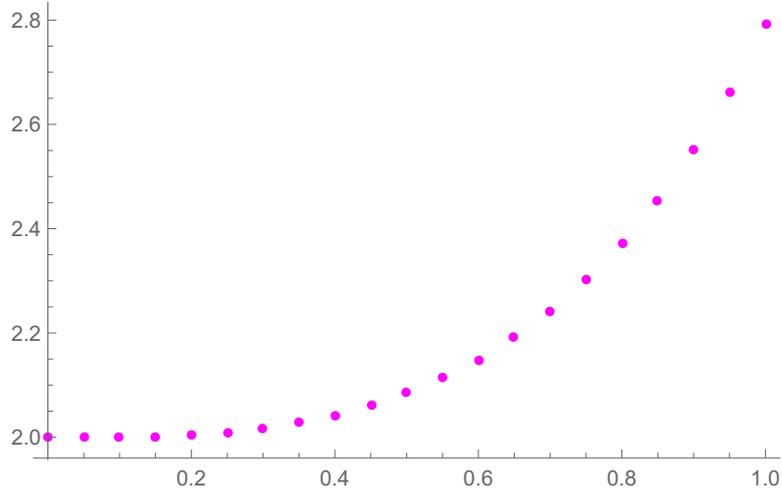


Figura 4.13: Esperanza X_n mediante el método Runge-Kutta de orden 4 y $h = \frac{1}{20}$ del Problema de ruido blanco Gaussiano 4.4.

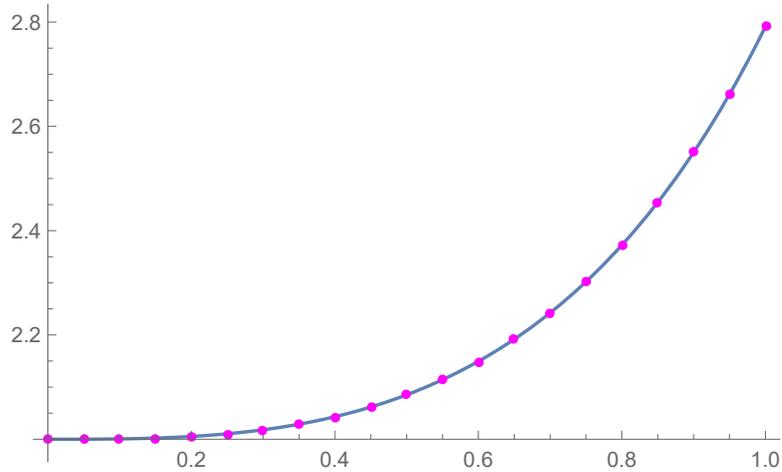


Figura 4.14: Esperanza $X(t)$ y X_n mediante el método Runge-Kutta de orden 4 y $h = \frac{1}{20}$ del Problema de ruido blanco Gaussiano 4.4.

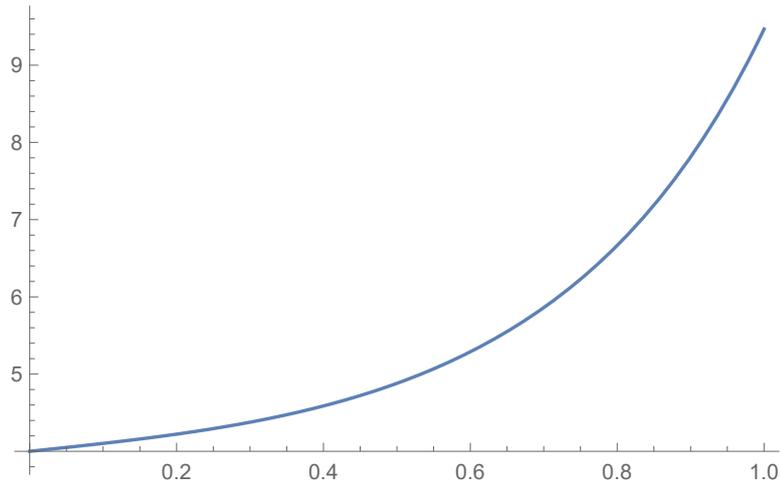


Figura 4.15: Varianza $X(t)$ mediante el método Runge-Kutta de orden 4 y $h = \frac{1}{20}$ del Problema de ruido blanco Gaussiano 4.4.

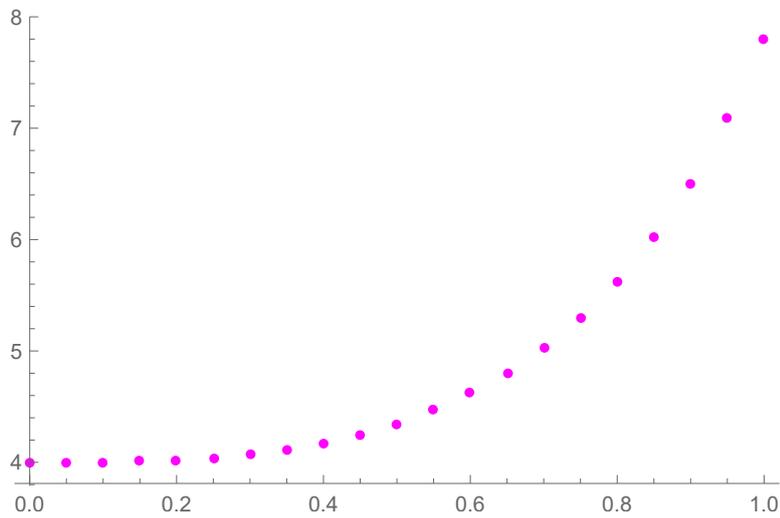


Figura 4.16: Varianza X_n mediante el método Runge-Kutta de orden 4 y $h = \frac{1}{20}$ del Problema de ruido blanco Gaussiano 4.4.

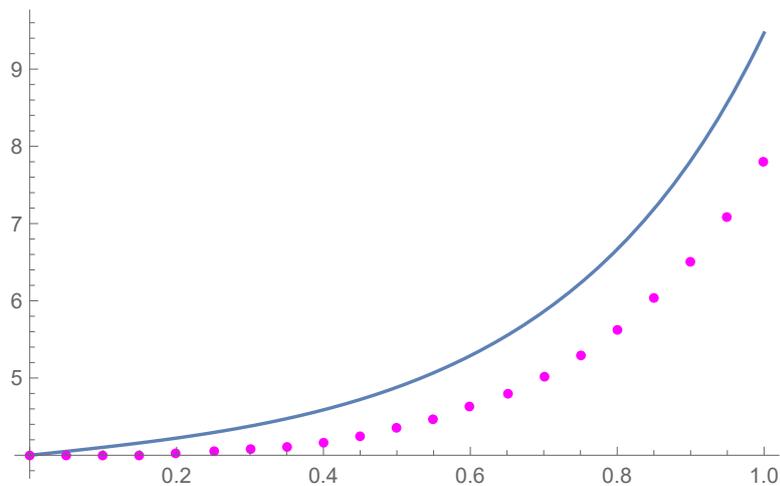


Figura 4.17: Varianza $X(t)$ y X_n mediante el método Runge-Kutta de orden 4 y $h = \frac{1}{20}$ del Problema de ruido blanco Gaussiano 4.4.

El error absoluto de la esperanza y la varianza de $X(t)$ con los métodos de Euler y Runge-Kutta de orden 4, en $h = \frac{1}{20}$ y $h = \frac{1}{50}$, se representan en los Cuadros 4.3 y 4.4. Se observa que se obtienen mejores aproximaciones con el método de Runge-Kutta. Las Figuras 4.14 y 4.17, representan la comparación de la esperanza y la varianza exacta y aproximada del Ejemplo 4.4 con el método de Runge-Kutta de orden 4 en $h = \frac{1}{20}$. Se observa que la aproximación de la varianza no es buena ya que el método es apropiado para ruidos cuyo comportamiento muestral no es tan irregular como el ruido blanco (no es diferenciable en ningún punto). Para tratar este tipo de incertidumbre se deben aplicar métodos numéricos para ecuaciones diferenciales estocásticas de tipo Itô como el método de Euler-Maruyama.

Estudio de un circuito eléctrico con ruido aleatorio

Consideremos el siguiente circuito RC con parámetros constantes:

$$\begin{cases} R \frac{dQ(t)}{dt} + \frac{1}{C} Q(t) = V(t) + \alpha(t)W(t), \\ Q(0) = Q_0, \end{cases} \quad (5.1)$$

donde $Q(t)$ es la carga eléctrica en el tiempo t y Q_0 es la variable aleatoria exponencial con el parámetro $\lambda = \frac{1}{3}$, independiente de $W(t)$ para cada $t \in [0, 1]$, lo que significa la carga inicial en el momento $t = 0$, y $V(t)$ son las funciones no aleatorias de la variable tiempo, lo que significa que el voltaje en el tiempo t y $W(t) = \frac{dB(t)}{dt}$ es el proceso unidimensional del ruido blanco, $B(t)$ es el movimiento unidimensional Browniano y $\alpha(t)$ es una función no aleatoria que modeliza la intensidad del ruido en el tiempo t .

Ahora, resolviendo la ecuación diferencial estocástica, tenemos

$$e^{\frac{t}{RC}} dQ(t) + \frac{1}{RC} e^{\frac{t}{RC}} Q(t) dt = \frac{1}{R} e^{\frac{t}{RC}} V(t) dt + \frac{1}{R} \alpha(t) e^{\frac{t}{RC}} dB(t). \quad (5.2)$$

Obsérvese que el miembro izquierdo puede escribirse en forma diferencial

$$d(e^{\frac{t}{RC}} Q(t)) = \frac{1}{RC} e^{\frac{t}{RC}} Q(t) dt + e^{\frac{t}{RC}} dQ(t). \quad (5.3)$$

Por (5.2) y (5.3) tenemos

$$Q(t) = e^{-\frac{t}{RC}} \left[Q_0 + \frac{1}{R} \int_0^t e^{\frac{s}{RC}} V(s) ds + \frac{1}{R} \int_0^t \alpha(s) e^{\frac{s}{RC}} dB(s) \right]. \quad (5.4)$$

Ahora, calculamos Q_n por el método aleatorio de Runge-Kutta,

$$Q_{n+1} = Q_n + \frac{1}{6}(K_1 + 2K_2 + 2K_3 + K_4), \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (5.5)$$

donde

$$\begin{aligned} K_1 &= \frac{h}{R} \left[-\frac{1}{C} Q_n + V(t_n) + \alpha(t_n) W(t_n) \right], \\ K_2 &= \frac{h}{R} \left[-\frac{1}{C} \left(1 - \frac{h}{2RC} \right) Q_n - \frac{h}{2RC} (V(t_n) + \alpha(t_n) W(t_n)) + V\left(t_n + \frac{h}{2}\right) + \alpha\left(t_n + \frac{h}{2}\right) W\left(t_n + \frac{h}{2}\right) \right], \\ K_3 &= \frac{h}{R} \left[-\frac{1}{C} \left(1 - \frac{h}{2RC} + \frac{h^2}{4R^2C^2} \right) Q_n + \frac{h^2}{4R^2C^2} (V(t_n) + \alpha(t_n) W(t_n)) \right. \\ &\quad \left. + \left(1 - \frac{h}{2RC} \right) \left(V\left(t_n + \frac{h}{2}\right) + \alpha\left(t_n + \frac{h}{2}\right) W\left(t_n + \frac{h}{2}\right) \right) \right], \\ K_4 &= \frac{h}{R} \left[-\frac{1}{C} \left(1 - \frac{h}{RC} + \frac{h^2}{2R^2C^2} - \frac{h^3}{4R^3C^3} \right) Q_n - \frac{h^3}{4R^3C^3} (V(t_n) + \alpha(t_n) W(t_n)) \right. \\ &\quad \left. - \frac{h}{RC} \left(1 - \frac{h}{2RC} \right) \left(V\left(t_n + \frac{h}{2}\right) + \alpha\left(t_n + \frac{h}{2}\right) W\left(t_n + \frac{h}{2}\right) \right) + V(t_n + h) + \alpha(t_n + h) W(t_n + h) \right], \end{aligned}$$

y denotando

$$\begin{aligned} a &= 1 - \frac{h}{RC} + \frac{h^2}{2R^2C^2} - \frac{h^3}{6R^3C^3} + \frac{h^4}{24R^4C^4}, \\ b_n &= \frac{h}{6R} \left[1 - \frac{h}{RC} + \frac{h^2}{2R^2C^2} - \frac{h^3}{4R^3C^3} \right] (V(t_n) + \alpha(t_n) W(t_n)) + \frac{h}{3R} \left[1 + \left(1 - \frac{h}{2RC} \right)^2 \right] \\ &\quad \times \left(V\left(t_n + \frac{h}{2}\right) + \alpha\left(t_n + \frac{h}{2}\right) W\left(t_n + \frac{h}{2}\right) \right) + \frac{h}{6R} (V(t_n + h) + \alpha(t_n + h) W(t_n + h)), \end{aligned}$$

tenemos

$$Q_{n+1} = aQ_n + b_n, \quad n = 1, 2, 3, \dots,$$

y resolviendo esta recurrencia

$$Q_n = a^n Q_0 + \sum_{i=0}^{n-1} a^{n-i-1} b_i, \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (5.6)$$

De (5.4) y (5.6), obtenemos las esperanzas y las varianzas de $Q(t)$ y Q_n .

$$\mathbb{E}[Q(t)] = e^{\frac{-t}{RC}} \left[3 + \frac{1}{R} \int_0^t e^{\frac{s}{RC}} V(s) ds \right], \quad (5.7)$$

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[Q_n] = & 3a^n + \sum_{i=0}^{n-1} a^{n-i-1} \left(\frac{h}{6R} \left[1 - \frac{h}{RC} + \frac{h^2}{2R^2C^2} - \frac{h^3}{4R^3C^3} \right] V(t_i) \right. \\ & \left. + \frac{h}{3R} \left[1 + \left(1 - \frac{h}{2RC} \right)^2 \right] V\left(t_i + \frac{h}{2}\right) + \frac{h}{6R} V(t_i + h) \right),\end{aligned}\quad (5.8)$$

y

$$\text{Var}[Q(t)] = \exp\left(\frac{-2t}{RC}\right) \left[9 + \frac{1}{R^2} \int_0^t \alpha^2(s) \exp\left(\frac{2s}{RC}\right) ds \right], \quad (5.9)$$

$$\text{Var}[Q_n] = 9a^{2n} + \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{k=0}^{n-1} a^{2n-i-k-2} \text{Cov}[b_i, b_k], \quad (5.10)$$

donde

$$\text{Cov}[b_i, b_k] = A_{i,k} \delta(t_i - t_k) + B_{i,k} \delta\left(t_i - t_k - \frac{h}{2}\right) + B_{k,i} \delta\left(t_i - t_k + \frac{h}{2}\right) + C_{i,k} \delta(t_i - t_k - h) + C_{k,i} \delta(t_i - t_k + h),$$

donde

$$\begin{aligned}A_{i,k} = & \frac{h^2}{36R^2} \left[1 - \frac{h}{RC} + \frac{h^2}{2R^2C^2} - \frac{h^3}{4R^3C^3} \right]^2 \alpha(t_i) \alpha(t_k) + \frac{h^2}{9R^2} \left[1 + \left(1 - \frac{h}{2RC} \right)^2 \right]^2 \\ & \times \alpha\left(t_i + \frac{h}{2}\right) \alpha\left(t_k + \frac{h}{2}\right) + \frac{h^2}{36R^2} \alpha(t_i + h) \alpha(t_k + h), \\ B_{i,k} = & \frac{h^2}{18R^2} \left[1 - \frac{h}{RC} + \frac{h^2}{2R^2C^2} - \frac{h^3}{4R^3C^3} \right] \left[1 + \left(1 - \frac{h}{2RC} \right)^2 \right] \alpha(t_i) \alpha\left(t_k + \frac{h}{2}\right) \\ & + \frac{h^2}{18R^2} \left[1 + \left(1 - \frac{h}{2RC} \right)^2 \right] \alpha\left(t_i + \frac{h}{2}\right) \alpha(t_k + h), \\ C_{i,k} = & \frac{h^2}{36R^2} \left[1 - \frac{h}{RC} + \frac{h^2}{2R^2C^2} - \frac{h^3}{4R^3C^3} \right] \alpha(t_i) \alpha(t_k + h), \quad i, k = 0, 1, 2, \dots, n-1.\end{aligned}$$

El error absoluto de la esperanza y la varianza de Q_n con $V(t) = \exp(t)$, $\alpha(t) = \frac{\sin(t)}{25}$, $R = 1$ y $C = 2$ esta representada en el Cuadro 5.1.

El error absoluto de la esperanza y varianza de Q_n con $V(t) = \exp(t)$, $\alpha(t) = \frac{\sin(t)}{25}$, $R = 1$ y $C = 2$ están representadas en la Figura 5.3 y 5.6.

t	Esperanza	Varianza
0.1	$1,8186 \times 10^{-9}$	$7,4434 \times 10^{-8}$
0.2	$3,6829 \times 10^{-9}$	$1,1779 \times 10^{-6}$
0.3	$5,6077 \times 10^{-9}$	$5,6969 \times 10^{-6}$
0.4	$7,6086 \times 10^{-9}$	$1,7054 \times 10^{-5}$
0.5	$9,7022 \times 10^{-9}$	$3,9168 \times 10^{-5}$
0.6	$1,1906 \times 10^{-8}$	$7,5901 \times 10^{-5}$
0.7	$1,4240 \times 10^{-8}$	$1,3052 \times 10^{-4}$
0.8	$1,6725 \times 10^{-8}$	$2,0527 \times 10^{-4}$
0.9	$1,9383 \times 10^{-8}$	$3,0096 \times 10^{-4}$
1.0	$2,2239 \times 10^{-8}$	$4,1676 \times 10^{-4}$

Cuadro 5.1: Error absoluto de la esperanza y la varianza de Q_n con $h = \frac{1}{20}$ del estudio de un circuito eléctrico con ruido aleatorio 5.

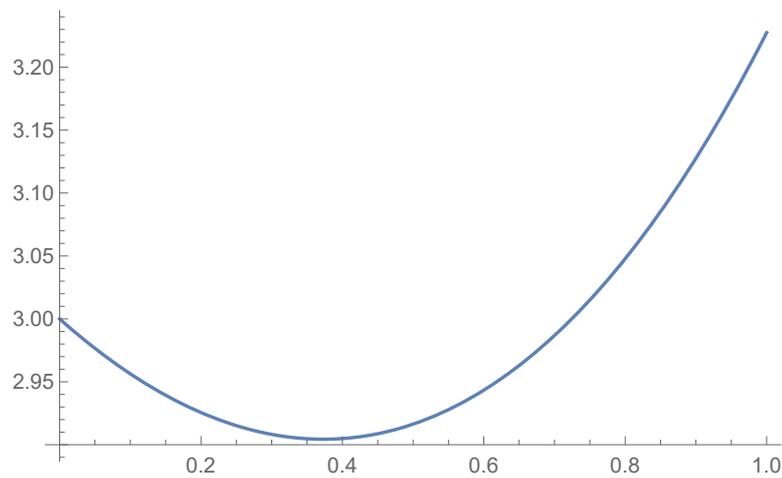


Figura 5.1: Esperanza $X(t)$ mediante el método Runge-Kutta de orden 4 y $h = \frac{1}{20}$ del estudio de un circuito eléctrico con ruido aleatorio 5.

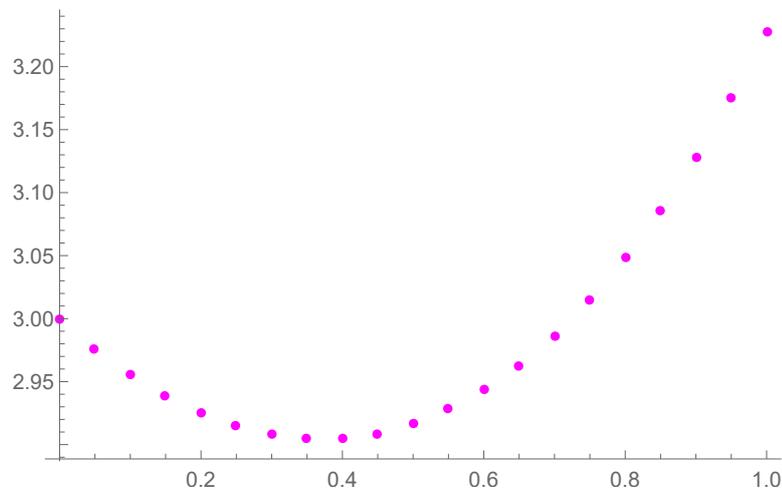


Figura 5.2: Esperanza X_n mediante el método Runge-Kutta de orden 4 y $h = \frac{1}{20}$ del estudio de un circuito eléctrico con ruido aleatorio 5.

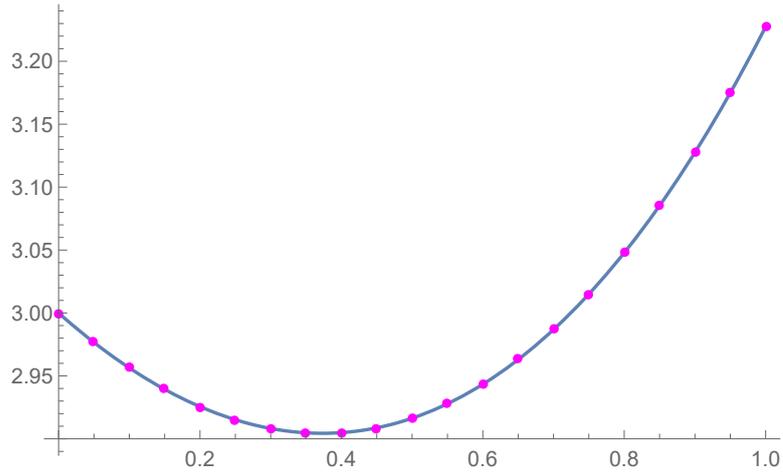


Figura 5.3: Esperanza $X(t)$ y X_n mediante el método Runge-Kutta de orden 4 y $h = \frac{1}{20}$ del estudio de un circuito eléctrico con ruido aleatorio 5.

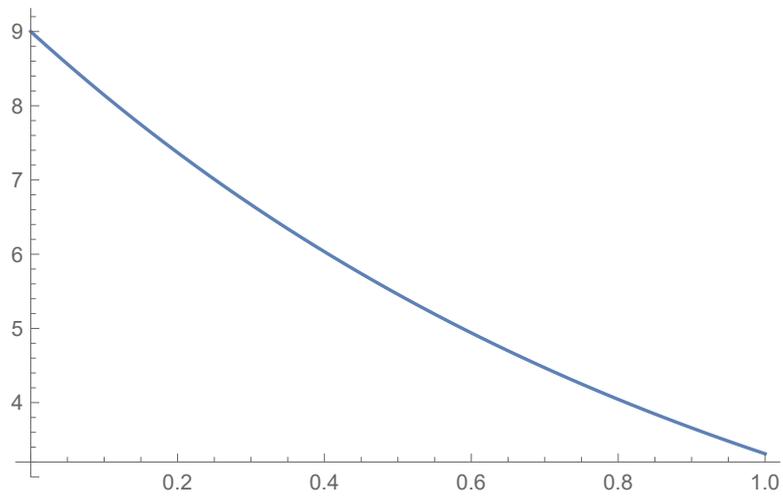


Figura 5.4: Varianza $X(t)$ mediante el método Runge-Kutta de orden 4 y $h = \frac{1}{20}$ del estudio de un circuito eléctrico con ruido aleatorio 5.

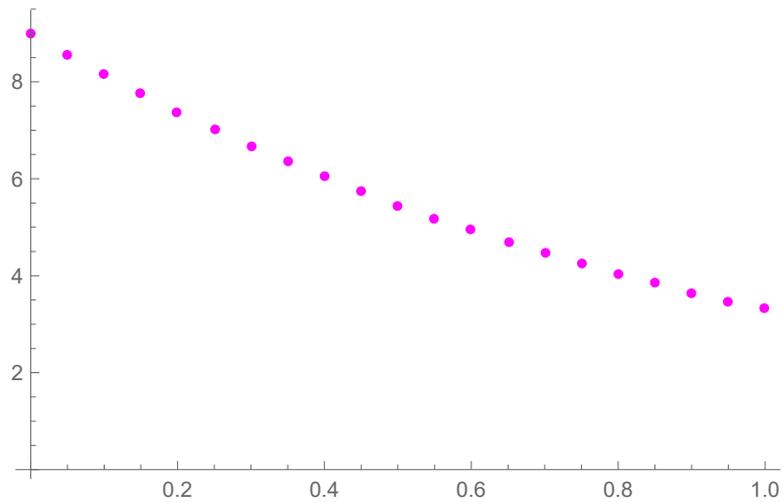


Figura 5.5: Varianza X_n mediante el método Runge-Kutta de orden 4 y $h = \frac{1}{20}$ del estudio de un circuito eléctrico con ruido aleatorio 5.

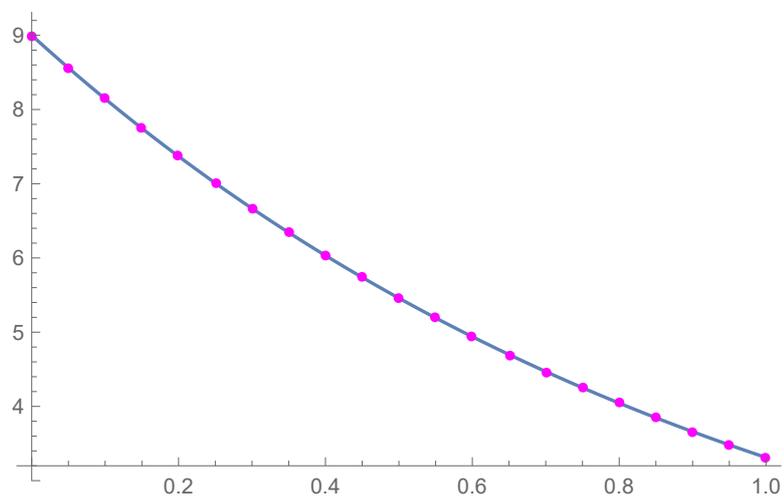


Figura 5.6: Varianza $X(t)$ y X_n mediante el método Runge-Kutta de orden 4 y $h = \frac{1}{20}$ del estudio de un circuito eléctrico con ruido aleatorio 5.

Capítulo 6

Conclusiones

En el presente trabajo de fin de máster se ha introducido la aproximación numérica de ecuaciones diferenciales con aleatoriedad, el estudio de su convergencia y su aplicación. Para ello, en primer lugar se ha explicado el esquema aleatorio de Euler, en el caso escalar, y matricial demostrando algunas condiciones para que la convergencia en media cuadrática sea estable y calculando la esperanza y la varianza exacta y aproximada.

Una vez estudiado el esquema de Euler, se ha llegado a la conclusión de que la convergencia lenta y lo restringido de su región de estabilidad absoluta nos hace considerar otros métodos donde la convergencia es mayor y, por ello, se ha estudiado el esquema aleatorio de Runge-Kutta. Este método es de orden superior al de Euler y, por ello, su orden de convergencia global es cuarto.

Al estudiar el método de Runge-Kutta y Euler nos ha permitido enfocarlo para poder tratar varios ejemplos donde aparecían tipos de ruidos con comportamiento muestral regular. Pero en el caso de ruidos, como el Ruido Blanco que son muy irregulares al no ser diferenciales en ningún punto, conducen a otros tipos de ecuaciones diferenciales con incertidumbre denominadas ecuaciones diferenciales estocásticas y cuya aproximación se aborda con técnicas alternativas, como por ejemplo el método de Euler-Maruyama, u otros de orden superior.

De ambos métodos se ha llegado a la conclusión de que el método de Runge-Kutta de cuarto orden es la mejor elección al proporcionar pequeños márgenes de errores con respecto a la solución real del problema, con la ventaja de que es fácilmente programable en un software para realizar las iteraciones necesarias.

Finalmente, se ha utilizado el método aleatorio de Runge-Kutta de cuarto orden para la resolución de un problema real enfocado en un circuito eléctrico. El resultado obtenido es una esperanza y varianza del tipo senoidal, la cual ha sido producida por la generación de corriente alterna.

Bibliografía

- [1] M. Khodabin y M. Rostami (2015). Mean square numerical solution of stochastic differential equations by fourth order Runge-Kutta method and its application in the electric circuits with noise. *Advances in Difference Equations*, 62, 1-19.
- [2] L. Villafuerte Altúzar (2007). Numerical and Analytical Mean Square Solutions for Random Differential Models. *Tesis Doctoral, Universidad Politécnica de Valencia*.
- [3] B. Oksendal (1998). Stochastic Differential Equations: An Introduction with Applications. *Springer, New York, 5th edn*.
- [4] T.T. Soong (1973). Random Differential Equations in Science and Engineering. *Academic Press, New York*.
- [5] P. Henrici (1962). Discrete Variable Methods in Ordinary Differential Equations. *John Wiley and Sons, New York*.
- [6] M.J. Lighthil (1996). An Introduction to Fourier Analysis and Generalized Functions. *Cambridge University Press, Cambridge*.
- [7] J.C. Cortés, L. Jódar y L. Villafuerte (2007). Numerical solution of random differential equations: a mean square approach. *Math Comput. Model.* 45, 757-765.