



Física para Ingeniería

Tomo I

Antonio Sanchis Sabater



Editorial

Universitat Politècnica
de València

Antonio Sanchis Sabater

Física para Ingeniería

Tomo I



Editorial
Universitat Politècnica
de València

Colección Académica

Para referenciar esta publicación utilice la siguiente cita: Sanchis Sabater, A. (2020).
Física para Ingeniería. Valencia: Editorial Universitat Politècnica de València

© Antonio Sanchis Sabater

© 2020, Editorial Universitat Politècnica de València
Venta: www.lalibreria.upv.es / Ref.: 0215_04_01_01

Imprime: Byprint Percom, S. L.

ISBN: 978-84-9048-905-5 (Obra completa)

ISBN: 978-84-9048-907-9 (Tomo I)

Impreso bajo demanda

Si el lector detecta algún error en el libro o bien quiere contactar con los autores, puede enviar un correo a edicion@editorial.upv.es

La Editorial UPV autoriza la reproducción, traducción y difusión parcial de la presente publicación con fines científicos, educativos y de investigación que no sean comerciales ni de lucro, siempre que se identifique y se reconozca debidamente a la Editorial UPV, la publicación y los autores. La autorización para reproducir, difundir o traducir el presente estudio, o compilar o crear obras derivadas del mismo en cualquier forma, con fines comerciales/lucrativos o sin ánimo de lucro, deberá solicitarse por escrito al correo edicion@editorial.upv.es

Impreso en España

Prefacio

La física es una materia básica de la ingeniería. A la hora de empezar los estudios de un grado de ingeniería el alumno cuenta con los conocimientos de física que ha adquirido en el bachillerato, tales como unidades, errores, cinemática del punto con el estudio de la caída de graves o los tiros horizontal y parabólico. La dinámica de la partícula, el estudio del trabajo y conservación del movimiento inicio de la termodinámica y el estudio de la electricidad con estudios de circuitos sencillos donde se aplica la ley de Ohm y el efecto Joule obteniendo la potencia eléctrica todos estos adquiridos en primero de Bachillerato, completando sus conocimientos preuniversitarios en el segundo de bachillerato con el campo gravitatorio (leyes de Kepler y ley de Newton) y el eléctrico. También cuenta con los conocimientos de movimiento armónico simple y el movimiento ondulatorio o la óptica geométrica. Además, ha analizado el campo magnético con la ley de Ampere, fuerza de Lorentz o la ley de Laplace, leyes de Faraday y Henry y la ley de Lenz, completando con elementos de física relativista, mecánica cuántica, y física nuclear.

Por ello cabe preguntarse si en un libro es necesario partir de los conceptos más básicos de la Física hasta alcanzar los contenidos que se pretende o hay que partir de lo que ya el estudiante sabe y centrarse en lo que le resulta novedoso. Es difícil saber que enfoque desarrollar en un texto dirigido a estudiantes, principalmente de los grados de ingeniería de la rama industrial. Por ello he buscado por una parte no incidir demasiado en lo que ya conocen para no hacer que el texto sea muy extenso (así y todo hay más de 1000 páginas), pero tampoco se puede omitir algunos conceptos previos que sirvan para centrar la materia, así algunas lecciones como la primera (*la magnitud física y su medida*) repite contenidos que el estudiante ha reproducido durante varios cursos, pero sirve como introducción a la materia objeto del libro, o la lección de óptica geométrica que ya ha estudiado en segundo de bachiller. Está lección de óptica geométrica he creído conveniente incluirla porque en caso contrario parece que quedaría coja la parte de estudio de la óptica, pero está desarrollada de forma que un alumno que no ha estudiado el libro pueda abordarlo, por ello, se repiten conceptos ya vistos en otras lecciones anteriores, como los vistos en el bachillerato. Un alumno podría prescindir de la lección si domina el segundo de bachillerato y además podría estudiar sólo esa lección sin el estudio previo de las anteriores.

Además, como se ha indicado, creo que muchos de los conceptos que se han introducido en el libro, que el alumno conoce del bachillerato, tales como las lecciones del movimiento ondulatorio u ondas mecánicas, si se hubiese prescindido de su reiteración se rompería el esquema coherente de la lección, así que he preferido extenderme en ese caso. También en la dinámica, la electrostática o el electromagnetismo he reproducido ideas que el estudiante ya posee, pero que no se pueden obviar en un texto que pretende estudiar dichas partes de la física.

Sin embargo se han repetido pocos conocimientos que el alumno conoce de cinemática, y se ha partido de que dichos conceptos ya están adheridos al estudiante, entendiendo que la repetición de dichos conceptos no son inevitables para buscar una coherencia en el texto.

Desde 1986 que empecé mis tareas docentes, he ido preparando esta publicación ampliando su contenido desde mi libro apunte “*Física para ingenieros químicos*” he ido reeditando con los títulos “**Fundamentos físicos para ingenieros**”, “**Física básica para ingenieros**” hasta la edición actual con el título “**Física para ingeniería**”. Publicación que se debe acompañar con otras que he elaborado de resolución de ejercicios, pues para no extenderme demasiado, los mismos no están integrados en esta obra, pero si están a disposición del alumnado en otras publicaciones.

Las lecciones de la 2 a la 13 incluyen los contenidos de la asignatura de 9 créditos Física I de los grados de ingeniería que se imparten en la ETSII de la Universidad Politécnica de Valencia, las lecciones de la 15 a 23, con parte de los contenidos de las lecciones siguientes, completan el temario de Física II (asignatura de 6 créditos), siendo ambas asignaturas la que constituyen la materia básica de física que se imparte en primer curso. El resto de contenidos de este libro, según titulaciones de la Escuela, se estudia en la asignatura Física III, al menos la parte de dicha asignatura que corresponde a física aplicada, pero dada la diversidad de grados, a partir de la lección 24, algunas lecciones son de Física II otras de Física III y otras no se estudian en alguna titulación. En alguna titulación de la ETSII de Valencia en vez de estructurarse el temario en Física I y Física II se denominan respectivamente Física y Ampliación de Física, pero su contenido es coincidente con lo indicado.

Es mi deseo que el libro sea de gran utilidad para el estudiante, y con esa intención lo he hecho.

En Valencia, septiembre de 2020

Índice

TOMO I

Lección 1	<i>La magnitud física y su medida</i>	1
Lección 2	<i>Sistemas de vectores</i>	37
Lección 3	<i>Tensores cartesianos</i>	73
Lección 4	<i>Centro de gravedad</i>	101
Lección 5	<i>Momentos de inercia</i>	113
Lección 6	<i>Cinemática de los sistemas indeformables</i>	137
Lección 7	<i>Movimiento plano</i>	159
Lección 8	<i>Cinemática del movimiento relativo</i>	185
Lección 9	<i>Dinámica de los sistemas</i>	193
Lección 10	<i>Dinámica del sólido rígido</i>	235
Lección 11	<i>Dinámica de sólidos planos rígidos con movimiento plano en su plano</i>	253
Lección 12	<i>Dinámica de percusiones</i>	263
Lección 13	<i>Estática</i>	295
Lección 14	<i>Grafoestática</i>	317
Lección 15	<i>Iniciación a la mecánica analítica</i>	325
Lección 16	<i>segunda parte de mecánica analítica. Principio de Hamilton</i> ...	347
Lección 17	<i>Primera ley de la Termodinámica</i>	363
Lección 18	<i>Segunda ley de la Termodinámica</i>	399
Lección 19	<i>Teoría elemental de campos</i>	445
Lección 20	<i>Estática de los fluidos</i>	469
Lección 21	<i>Dinámica de los fluidos</i>	497

TOMO II

Lección 22	<i>Movimiento ondulatorio</i>	539
Lección 23	<i>Ondas mecánicas</i>	587
Lección 24	<i>El campo electrostático en el vacío</i>	655
Lección 25	<i>Conductores y capacidad eléctrica</i>	681
Lección 26	<i>Condensadores. Dieléctricos</i>	705
Lección 27	<i>Corriente continua</i>	739
Lección 28	<i>Redes de conductores</i>	763
Lección 29	<i>El campo magnético en el vacío</i>	785
Lección 30	<i>El campo magnético en la materia</i>	817
Lección 31	<i>Inducción electromagnética</i>	843
Lección 32	<i>Corrientes alternas</i>	869
Lección 33	<i>Óptica geométrica</i>	903
Lección 34	<i>Naturaleza de la luz</i>	965
Lección 35	<i>Fotometría</i>	987
Lección 36	<i>Teoría del color</i>	1011
APÉNDICES	1027
A 1:	Alfabeto griego	1029
A 2:	Factores de conversión	1030
A 3:	Múltiplos y submúltiplos	1034
A 4:	Dimensiones y unidades de las magnitudes en el SI	1035
A 5:	Fórmulas geométrica	1039
A 6:	Funciones trigonométricas	1044
A 7:	Funciones hiperbólicas	1048
A 8:	Centros geométricos	1053
A 9:	Momentos de inercia geométricos	1056
A 10:	Momentos de inercia físicos	1060
A 11:	Propiedades de las sustancias	1065
A 12:	Datos astronómicos	1068
BIBLIOGRAFÍA	1069

LECCIÓN 1

LA MAGNITUD FÍSICA Y SU MEDIDA

Objetivos

- 1. Saber expresar una misma cantidad en distintas unidades.*
- 2. Conocer el Sistema Internacional de Unidades.*
- 3. Conocer los sistemas físicos de unidades.*
- 4. Conocer los sistemas técnicos de unidades.*
- 5. Determinar la ecuación dimensional de cualquier magnitud.*
- 6. Saber aplicar la ley de homogeneidad.*

Contenido

- 1.1. La Ciencia física.*
- 1.2. Magnitudes.*
 - 1.2.1. Observables.*
 - 1.2.2. Magnitudes físicas.*
- 1.3. Unidades y medidas.*
- 1.4. Leyes fundamentales. Constantes universales.*
- 1.5. Sistemas de ecuaciones de definición. Sistema acorde de unidades.*
- 1.6. Sistemas físicos de unidades.*
- 1.7. Sistema internacional de unidades. Unidades Fundamentales*
- 1.8. Unidades derivadas en el Sistema Internacional.*
- 1.9. Otras unidades internacionales*
- 1.10. Sistemas técnicos de unidades.*
- 1.11. Otras unidades mecánicas.*
- 1.12. Errores de medición.*
 - 1.12.1. Clasificación de los errores.*
 - 1.12.2. Cálculo del error en las medidas indirectas.*
 - 1.12.3. Teoría de errores. Curva de Gauss.*
- 1.13. Ecuaciones dimensionales.*
- 1.14. Cambio de unidades.*
- 1.15. Ley de homogeneidad.*

1.1. LA CIENCIA FÍSICA

La ciencia física se divide desde hace tiempo en las fracciones de mecánica, acústica, termodinámica, electricidad, magnetismo y óptica, a las que se añaden las secciones, hoy a la delantera de la investigación, de la naturaleza y estructura de la materia, física atómica y nuclear. Cuanto más se perfeccionan los conocimientos tanto más arbitrarios son los límites entre estas disciplinas. La acústica y la termodinámica se interpretan con ejemplos mecánicos; la óptica y el electromagnetismo se amalgaman en un único campo; la radiación térmica y la luz se consideran una misma cosa. Así con el modelo de onda se explican fenómenos tan distintos, en apariencia, como los acústicos, térmicos u ópticos. Grandes principios, como el de la energía cuya validez se restringía antiguamente a un campo acotado, rebosaron sus propios límites al avanzar la ciencia, abarcando a la totalidad de la física y logrando una posición predominante en todas las ciencias naturales. Todo esto, lleva a que el investigador se obstine en la exploración de teorías que aúnen la exposición de estas partes de forma que, con el mínimo número de principios factibles y reglas, se describan el máximo número de fenómenos.

Excluyendo la biofísica, que en un rápido desarrollo se ha transformado en una ciencia independiente. Los estudios en la física de los fenómenos de la naturaleza inanimada son tan distintos que englobarlos y exponerlos parece, a primera vista, una tarea exasperada. Así y todo, resulta que es posible explicarlos por medio de un conjunto de conceptos que, seleccionados adecuadamente, no son tan considerables como para que no se puedan recopilar en un sencillo sistema conceptual, tal como longitud, tiempo, masa, velocidad, aceleración, carga eléctrica, etc. Su denominación se ha obtenido corrientemente del lenguaje ordinario. Pueden significar lo mismo que en éste último, pero no tiene por que ser así; su peculiaridad consiste en la necesidad de fijar de un modo unívoco su significado. La condición previa para establecer la ciencia física es la definición exacta e inconfundible de cada uno de los conceptos.

El paso siguiente a la mera descripción de la naturaleza es el descubrimiento de unas leyes; para formularlas exactamente, los conceptos físicos tienen que poder considerarse cuantitativamente, es decir, medirse, o sea expresarse mediante unidades y números. Por esta razón, para la formulación de las leyes naturales sólo resulta adecuada una determinada elección de conceptos.

La formulación matemática de un fenómeno físico se le denomina ley física, dicha formulación se puede hacer mediante la observación o mediante la imitación del fenómeno en condiciones engendradas y controladas (experimento físico). Cuando, al contrario, el experimentador provoca un fenómeno que sigue un trayecto apetecido y conocido, las leyes físicas están al beneficio de los fines del hombre. Por eso la física es la base de la técnica. El físico aspira prever las propiedades y leyes de la naturaleza

y en general no se cuestiona la utilidad de la investigación. Pero la historia muestra que todo descubrimiento importante, por muy alejado que esté cuando aparece de toda aplicación práctica, fomenta más tarde el desarrollo de la técnica.

El fin investigador de la física consiste en asentar la teoría de los fenómenos naturales que estudia. El trayecto hasta ella pasa en primer lugar por la elaboración de una hipótesis. Las conclusiones que se derivan han de confirmarse siempre con la experiencia. Si la hipótesis da buenos resultados, ésta se denomina teoría. El concepto de teoría no tiene en la física el defecto de inseguridad que se da en el lenguaje habitual.

Pero la razón de la ley descubierta no es organizar lo observado y sintetizar los fenómenos complicados a lo más sencillo. Debe concebir, sobre todo, la posibilidad de pronosticar cuantitativamente el hecho físico.

1.2. MAGNITUDES

1.2.1. OBSERVABLES

Por medio de la observación de los fenómenos naturales el raciocinio humano construye las entidades utilizadas en Física; se alcanzan por un camino de abstracción que estriba en coger una cualidad común y excluir todas las demás. De esa manera, el concepto de tiempo brota de la contemplación de la duración de las cosas sujetas a cambio, cualesquiera que sean su color, tamaño y naturaleza. Lo mismo sucede con la longitud, el área y el volumen, etc.

Algunos entes físicos son **observables** mediante los sentidos (belleza, color, olor, sabor, velocidad, temperatura, longitud, fuerza, presión, etc.). Otros se conciben como causas de hechos observables. (Tal ocurre con la masa, carga eléctrica, energía, etc.). Se denomina observables tanto a unos como a otros.

La explicación del efecto observable propio de cada ente físico conforma una definición cualitativa, que no debe excluirse. Estas definiciones cualitativas son válidas para conocer de qué se trata y para reconocerlo siempre que se trate con él.

1.2.2. MAGNITUDES FÍSICAS

La física emplea observables que se pueden cuantificar, es decir, han de poder medirse. Se denomina **magnitud física** a todo observable que se puede medir. De esta definición se puede estimar que el objeto de la física es alterable, en función de que los fenómenos físicos observados sean medibles o no; de forma que el progreso en las

tecnologías de instrumentación de medida, sin duda aumentan el dominio de la física tomando conceptos y leyes, derivadas de estas nuevas medidas.

Por ejemplo, conforme la tecnología ha facultado medir los fenómenos vinculados al átomo, su estructura, su núcleo y sus electrones la física se ha ido ampliando hasta incluir en ella una nueva sección, la física atómica y nuclear, que trata de esto.

La longitud, tiempo, velocidad, aceleración, fuerza, masa, color, etc. son ejemplos de magnitudes físicas. La belleza, el sabor, el olor, el amor, la satisfacción, etc. son observables que no constituyen magnitudes físicas ya que no se pueden medir.

Las magnitudes pueden clasificarse en escalares, vectoriales y tensoriales, a su vez, las primeras, se pueden clasificar en extensivas e intensivas. Son magnitudes escalares aquellas que quedan determinadas por un número real, acompañado de un estado elegido de esta magnitud, de entre las magnitudes escalares extensibles se encuentran la masa, energía, tiempo, carga eléctrica, volumen, la cantidad de sustancia, resistencia eléctrica, etc. y de entre las unidades escalares intensivas, se encuentran la temperatura, densidad, volumen específico, carga específica, etc.

Las magnitudes vectoriales necesitan además el conocimiento de una dirección y un sentido, entre las cuales, se encuentran, la velocidad, aceleración, fuerza, cantidad de movimiento, campo eléctrico, etc.

Las magnitudes tensoriales son las que el valor observado de dicha magnitud depende de la dirección en que es observada. Entre dichas magnitudes se encuentran el tensor de inercia, el tensor de esfuerzos, el tensor de deformaciones, el tensor conductividad térmica, el índice de refracción, el tensor dieléctrico en medios anisótropos, ...

1.3. UNIDADES Y MEDIDAS

Se denomina **cantidad** de una magnitud al estado de esa magnitud en un objeto determinado. Por ejemplo, la carga eléctrica es una magnitud; la carga del electrón es una cantidad de la magnitud carga eléctrica.

Un conjunto de observables (A_0) , (A_1) , (A_2) , ..., comparables entre sí dos a dos, son cantidades de una misma magnitud física.

Dos cantidades (A) y (B) de una misma magnitud se dice que son comparables cuando existe una definición operacional y universal de la razón:

$$\frac{(A)}{(B)} = n \quad 1.1$$

siendo n un número que expresa que la cantidad (A) es n veces mayor que la cantidad (B), es decir, $(A)=n.(B)$.

En la definición de comparación, el adjetivo **operacional** señala que se han de especificar los instrumentos usados en la comparación, así como las operaciones a efectuar. El requisito de **universalidad** requiere que la razón obtenida no dependa de la naturaleza de los cuerpos utilizados en la construcción del instrumental.

Definida la razón entre cantidades, quedan definidas la igualdad y la suma, pues de:

$$\frac{(A_1)}{(A_0)} = n_1; \quad \frac{(A_2)}{(A_0)} = n_2; \quad \frac{(A_3)}{(A_0)} = n_3 \quad 1.2$$

Se deduce

$$(A_1) = (A_0) \text{ si } n_1 = 1 \quad 1.3$$

$$(A_1) + (A_2) = (A_3) \text{ si } n_1 + n_2 = n_3 \quad 1.4$$

Recíprocamente, la definición de la razón entre cantidades, puede sustituirse por la definición de la igualdad y de la suma, si se cumple el postulado de divisibilidad indefinida.

El criterio de **igualdad** está implicado en la definición cualitativa de cada magnitud, pues es obvio admitir que dos cantidades son iguales cuando sus efectos son idénticos.

Para la suma de cantidades vale en Física el criterio de equivalencia, según el cual, la suma ha de producir por sí sola el mismo efecto que los sumandos reunidos. Se postula que el resultado es independiente de la manera como se reúnen.

Las magnitudes extensivas, se suman por acumulación, o sea yuxtaponiendo los objetos que les sirven de soporte, mientras que a las magnitudes intensivas no les es aplicable la suma por acumulación, así, por ejemplo, para la densidad, al reunir dos líquidos con densidades conocidas, la densidad que resulta no es la suma de las

densidades de ambos líquidos por separado. Pero la densidad sigue siendo una magnitud física, pues basta que una sustancia de masa constante se le varíe su volumen para que su densidad aumente a medida que disminuye su volumen, y por tanto se puede sin ninguna ambigüedad definir la razón entre dos densidades cualesquiera, así para un volumen dado de una sustancia la densidad se incrementará a medida que aumente la masa que ocupa la totalidad del volumen (entendiéndose una distribución de masa homogénea en el volumen considerado, en caso de no cumplirse, se tendría que estudiar en elementos diferenciales).

Para las magnitudes vectoriales, su suma se realiza mediante la regla del polígono.

La discriminación entre magnitudes y cantidades es indispensable cuando hay que concretar las ideas. Pero es habitual en Física coger lo general por lo particular, y por eso se suele hablar de magnitudes y pocas veces de cantidades, aún en el caso en que el vocablo oportuno sea este último.

Para una magnitud determinada se puede elegir una cantidad de esta magnitud como patrón, a esta cantidad se le denomina **unidad**, la comparación de cantidades de la misma magnitud con la unidad se denomina **medida**, sea la magnitud $\{A\}$, cuya unidad se representa por U_A , y sean (A_1) , (A_2) , cantidades de dicha magnitud, se forman las siguientes razones.

$$\frac{(A_1)}{U_A} = A_1; \quad \frac{(A_2)}{U_A} = A_2 \quad \mathbf{1.5}$$

donde A_1 y A_2 son las medidas de las cantidades (A_1) y (A_2) respectivamente con la

$$(A) = A \cdot U_A \quad \mathbf{1.6}$$

unidad U_A , así a cada cantidad (A) le corresponde una medida A , para la unidad U_A es decir, **cantidad = medida.unidad**

De forma que a cada cantidad (A) , se asocia un número A , que representa el número de veces que (C) es mayor que la unidad. Dicho número como se ha indicado es la medida de la cantidad (A) referida a la unidad.

Cabe destacar la diferencia conceptual entre cantidad y medida, puesto que la cantidad de una magnitud física no depende de la unidad utilizada para medirla, la medida en cambio, si depende de la unidad, de forma que para una misma cantidad, cuanto menor sea la unidad que se utiliza para medirla, mayor será el valor de la medida obtenida.

Sean dos Unidades U_A y U'_A de la magnitud $\{A\}$ al cambiar la unidad U_A por la U'_A se tendrá para la cantidad (A):

$$(A) = A \cdot U_A = A \cdot \left(\frac{U_A}{U'_A}\right) \cdot U'_A = A' \cdot U'_A \Rightarrow A' = A \cdot \frac{U_A}{U'_A} \Rightarrow \frac{A'}{A} = \frac{U_A}{U'_A} \quad \mathbf{1.7}$$

De donde las medidas de una misma cantidad son inversamente proporcionales a las unidades con que se han obtenido.

Las medidas pueden ser: *Directas* al comparar cada cantidad con la unidad y aplicar el criterio de igualdad y suma. *Indirectas*, aquellas que se miden las cantidades de otras magnitudes y mediante una ley física se determina la medida de la cantidad correspondiente; Y las realizadas mediante instrumentos calibrados (balanzas, cronómetros, voltímetros, etc.)

1.4. LEYES FUNDAMENTALES. CONSTANTES UNIVERSALES

Como se ha indicado las leyes físicas relacionan las magnitudes que intervienen en un fenómeno considerado, estas tienen un carácter cuantitativo, pudiéndose elegir relaciones de proporcionalidad entre potencias determinadas de las cantidades que intervienen, así:

$$(A) \propto (B)^b \cdot (C)^c \cdot \dots \quad \mathbf{1.8}$$

que representa una relación de proporcionalidad entre cantidades, por tanto si el fenómeno en cuestión se hace x veces mayor la cantidad (B) y se mantiene constantes el resto de cantidades, la cantidad (A) queda multiplicada por x^b . Dichas relaciones de proporcionalidad entre cantidades tienen un carácter absoluto, puesto que no se introducen elementos convencionales como lo son las unidades.

Al pasar de la relación de proporcionalidad entre cantidades a la ecuación entre medidas, hay que introducir un factor proporcional, K, (este puede valer 1, en cuyo caso se dice que las magnitudes físicas que intervienen son coherentes), que dependerá en un principio de las unidades elegidas de cada magnitud, con lo que resulta

$$A = K \cdot B^b \cdot C^c \cdot \dots \quad \mathbf{1.9}$$

Para hallar K habrá que conocer la relación de proporcionalidad y según las unidades que se adopten, dicho valor se obtendrá al medir en diversos casos particulares las cantidades que figuran en la ecuación; pueden ocurrir dos casos:

- a) Al variar la naturaleza del cuerpo con que se opere, y para el mismo conjunto de unidades, el factor de proporcionalidad varía, por lo que se dice, que K es una constante característica del cuerpo.
- b) Pero puede ocurrir que dicho factor de proporcionalidad sea independiente de la naturaleza del cuerpo. Entonces se denomina **constante universal**, y a la relación entre cantidades **ley universal**.

Las constantes universales poseen un carácter desconcertante. Surgen en las leyes sin definirse a priori. Al no ser propiedades de los cuerpos o medios y no variar, no son magnitudes, puesto que sólo existe un único espécimen de cada una y por tanto no hay comparación, pero no son números fijos, porque su valor numérico depende de las unidades que se elijan para medir las cantidades que comparten con ellas las respectivas ecuaciones.

Las constantes universales trazan al ser descubiertas una nueva era científica, por tanto, ejecutan en Física una función importante.

1.5. SISTEMAS DE ECUACIONES DE DEFINICIÓN. SISTEMA ACORDE DE UNIDADES

Las magnitudes se pueden relacionar con otras de forma cuantitativa, con diferentes fórmulas, así la aceleración se puede relacionar, entre otras con:

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt}; \quad \vec{a} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2}; \quad \vec{a} = \frac{\vec{F}}{m}; \quad \dots \quad \mathbf{1.10}$$

y por tanto se pueden elegir diferentes fórmulas que en su conjunto constituyan un sistema de ecuaciones, una vez elegidas las fórmulas, y fijado el coeficiente de cada una, se tiene un **sistema particular de ecuaciones de definición**, y debe ocurrir que al sustituir los símbolos de las magnitudes por los números que las miden con las unidades, queden satisfechas las ecuaciones. Entonces se habrá constituido un **sistema de unidades acorde** con el sistema particular de ecuaciones de definición.

Esto es posible, puesto que de todas las magnitudes se eligen un conjunto de ellas como **magnitudes fundamentales** de forma que no estén relacionadas entre sí por una ley universal; y a continuación se eligen arbitrariamente las unidades de las magnitudes fundamentales, y definiendo las unidades de las demás magnitudes de tal modo que se cumplan todas las ecuaciones del sistema particular de ecuaciones de definición.

Si en un sistema acorde de unidades se toma como magnitudes fundamentales entre otras la longitud y el tiempo, la velocidad no puede ser magnitud fundamental, puesto que existe una ley física que se relaciona con las dos anteriores, sea dicha ley física la ecuación de definición de la velocidad, tomando el metro como unidad de longitud y el segundo como unidad de tiempo, la unidad de velocidad en dicho sistema acorde de unidades debe ser necesariamente el $m \cdot s^{-1}$, puesto que la velocidad media que debe tener un móvil para recorrer la distancia unidad en el tiempo unidad será:

$$\bar{V} = \frac{\Delta l}{\Delta t}$$

1.11

$$(V)_u = \frac{(l)_u}{(t)_u} = \frac{m}{s}$$

y denominado por v_m , l_m , t_m a las medidas de las cantidades, las cantidades valdrán:

$$(v) = v_m \cdot (v)_u; (l) = l_m \cdot (l)_u; (t) = t_m \cdot (t)_u$$

$$v_m \cdot (v)_u = v_m \cdot \frac{(l)_u}{(t)_u} = (v) = \frac{(l)}{(t)} = \frac{l_m}{t_m} \cdot \frac{(l)_u}{(t)_u} \quad \mathbf{1.12}$$

$$v_m = \frac{l_m}{t_m}$$

Y así se obtendría un sistema coherente, ya que las ecuaciones quedarán satisfechas con los números.

Cada sistema coherente de unidades se corresponde con un sistema particular de ecuaciones de definición, y por lo tanto para caracterizarlo no basta con dar las unidades fundamentales, siendo necesario, además, el sistema de ecuaciones de definición, con los valores de los coeficientes y con su expresión verbal.

Las magnitudes cuyas unidades se definen a partir de las fundamentales mediante el sistema de ecuaciones de definición, se denominan derivadas.

1.6. SISTEMAS FÍSICOS DE UNIDADES

Aunque parezca sorprendente, sólo son necesarias tres magnitudes fundamentales para el estudio de la mecánica, en los sistemas físicos se elige como magnitudes fundamentales mecánicas *longitud, masa y tiempo*. Al estudiar la termodinámica se necesitan dos magnitudes fundamentales más, estas son *cantidad de materia y temperatura*, para el estudio de la electricidad es necesario introducir otra magnitud fundamental, en la mayoría de los sistemas físicos se elige como magnitud fundamental a la *intensidad de corriente eléctrica*, aunque en otros sistemas físicos, los electrostáticos, toman como magnitud fundamental la *carga eléctrica*, con la fotometría resulta necesario introducir una séptima magnitud fundamental, se elige a la *intensidad luminosa*.

De entre los sistemas acordes de unidades cabe destacar el **Sistema Internacional** de Unidades, que se estudiará más adelante con mayor detalle, el sistema **cgs**, que a su vez se divide en sistema **electrostático** y sistema **electromagnético**, el sistema **mts** y el sistema **fps**.

El sistema cegesimal o cgs (centímetro, gramo, segundo) toma como unidades mecánicas fundamentales el centímetro, $1 \text{ cm} = 10^{-2} \text{ m}$; el gramo, $1 \text{ g} = 10^{-3} \text{ kg}$; y el segundo. Las unidades derivadas que tienen un nombre especial son: la dina, $1 \text{ din} = 10^{-5} \text{ N}$, que es la unidad de Fuerza; el ergio, $1 \text{ erg} = 10^{-7} \text{ J}$, unidad de Energía; y la baria, $1 \text{ baria} = 0.1 \text{ Pa}$, unidad de presión.

El sistema mts (metro, tonelada, segundo) fue el sistema legal en Francia durante algunas décadas, aunque no tuvo nunca la aprobación de los físicos. Sus unidades mecánicas fundamentales son el metro; la tonelada métrica, $1 \text{ t} = 10^3 \text{ kg}$; y el segundo. Las unidades derivadas que tienen un nombre especial son: el steno, $1 \text{ sn} = 10^3 \text{ N}$, que es la unidad de Fuerza; el kilojulio, $1 \text{ kJ} = 10^3 \text{ J}$, unidad de Energía; el kilovatio, $1 \text{ kW} = 10^3 \text{ W}$ unidad de potencia; y la pieza, $1 \text{ pz} = 10^3 \text{ Pa}$, unidad de presión.

El sistema fps (foot, pound, second) (pie, libra, segundo) sistema físico utilizado principalmente en el mundo anglosajón. Sus unidades mecánicas fundamentales son el pie, $1 \text{ ft} = 0.3048 \text{ m}$; la libra, $1 \text{ Lb} = 0.45359 \text{ kg}$; y el segundo. El poundal como unidad de fuerza es la unidad derivada con nombre especial $1 \text{ poundal} = 0.138254 \text{ N}$.

1.7. SISTEMA INTERNACIONAL DE UNIDADES. UNIDADES FUNDAMENTALES

El sistema internacional (S.I.) está formado por las unidades del sistema mksA racionalizado (metro, kilogramo, segundo, amperio), y lleva definiciones adicionales para la unidad de temperatura, la unidad de intensidad luminosa y la unidad de cantidad de sustancia.

Este sistema de unidades fue adoptado oficialmente por España en 1967 (B.O.E. de 10-11-1967). La última modificación se ha publicado en el BOE del 29 de abril de 2020. Las unidades fundamentales mecánicas son el metro (m) para la longitud, el kilogramo (kg) para la masa y el segundo (s) para el tiempo. Las siete unidades fundamentales se han definido por última vez en la 26ª Conferencia General de Pesas y Medidas en noviembre de 2018 en su sesión octava, quedando definidas ancladas a constantes universales, constantes fundamentales de la física u otras constantes de la naturaleza.

La masa unidad, es decir, el **kilogramo**, símbolo **kg**, se define al fijar el valor numérico de la constante de Planck, h , en $6,626\ 070\ 15 \times 10^{-34}$, cuando se expresa en la unidad $J \cdot s$, igual a $kg \cdot m^2 \cdot s^{-1}$, donde el metro y el segundo se definen en función de c y $\Delta\nu_{Cs}$. De la relación exacta $h = 6,626\ 070\ 15 \times 10^{-34} kg \cdot m^2 \cdot s^{-1}$ se obtiene la unidad $kg \cdot m^2 \cdot s^{-1}$, y de esta la expresión para el kilogramo en función del valor de la constante de Planck h : $1kg = (299\ 792\ 458)^2 / [(6,626\ 070\ 15 \times 10^{-34}) \cdot (9\ 192\ 631\ 770)] h \cdot \Delta\nu_{Cs} / c^2$

La unidad de longitud, el **metro**, símbolo **m**, se define al fijar el valor numérico de la velocidad de la luz en el vacío, c , en $299\ 792\ 458$, cuando se expresa en la unidad $m \cdot s^{-1}$, donde el segundo se define en función de la frecuencia del cesio 133, $\Delta\nu_{Cs}$. $1m = 9\ 192\ 631\ 770 / 299\ 792\ 458 c / \Delta\nu_{Cs}$

La unidad de tiempo, el **segundo**, símbolo **s**, se define al fijar el valor numérico de la frecuencia de la transición hiperfina del estado fundamental no perturbado del átomo de cesio 133, $\Delta\nu_{Cs}$, en $9\ 192\ 631\ 770$, cuando se expresa en la unidad Hz, igual a s^{-1} .

$$1s = 9\ 192\ 631\ 770 / \Delta\nu_{Cs}$$

La unidad de intensidad de corriente eléctrica, el **amperio**, símbolo **A**, se define al fijar el valor numérico de la carga elemental, e , en $1,602\ 176\ 634 \times 10^{-19}$, cuando se expresa en la unidad C, igual a $A \cdot s$, donde el segundo se define en función de $\Delta\nu_{Cs}$. De la relación exacta $e = 1,602\ 176\ 634 \times 10^{-19} A \cdot s$ se obtiene la expresión para la unidad amperio en función de las constantes e y $\Delta\nu_{Cs}$:

$$1A = e / 1,602\ 176\ 634 \times 10^{-19} s^{-1}$$

La unidad de temperatura, el **kelvin** símbolo **K**, se define al fijar el valor numérico de la constante de Boltzmann, k , en $1,380\ 649 \times 10^{-23}$, cuando se expresa en la unidad $J \cdot K^{-1}$, igual a $kg \cdot m^2 \cdot s^{-2} \cdot K^{-1}$, donde el kilogramo, el metro y el segundo se definen en función de h , c y $\Delta\nu_{Cs}$.

$$1K = 1,380\ 649 \times 10^{-23} / [(6,626\ 070\ 15 \times 10^{-34}) \cdot (9\ 192\ 631\ 770)] \Delta\nu_{Cs} \cdot h / k$$

La unidad de cantidad de sustancia, el **mol** símbolo **mol**, Un mol contiene exactamente $6,022\ 140\ 76 \times 10^{23}$ entidades elementales. Esta cifra es el valor numérico fijo de la constante de Avogadro, N_A , cuando se expresa en la unidad mol^{-1} , y se denomina número de Avogadro.

Junto a la palabra mol, se ha de especificar las entidades elementales, que pueden ser, átomos, moléculas, iones, electrones, etc.

La unidad de intensidad luminosa en una dirección dada, la **candela**, símbolo **cd**, se define al fijar el valor numérico de la eficacia luminosa de la radiación monocromática de frecuencia 540×10^{12} Hz, K_{cd} , en 683, cuando se expresa en la unidad $\text{lm} \cdot \text{W}^{-1}$, unidad igual a $\text{cd} \cdot \text{sr} \cdot \text{W}^{-1}$, o a $\text{cd} \cdot \text{sr} \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{m}^{-2} \cdot \text{s}^3$, donde el kilogramo, el metro y el segundo se definen en función de h , c y ΔV_{Cs} .

$$1 \text{cd} = 1 / [(6,626\ 070\ 15 \times 10^{-34}) \cdot (9\ 192\ 631\ 770)^2 \cdot 683] (\Delta V_{Cs})^2 \cdot h \cdot K_{cd}$$

El efecto de esta definición es que la candela es la intensidad luminosa, en una dirección dada, de una fuente que emite radiación monocromática de frecuencia 540×10^{12} Hz y tiene una intensidad radiante en esa dirección de $(1/683)$ W/sr

El Sistema Internacional, al igual que el resto de sistemas admiten múltiplos y submúltiplos de las unidades, para ello se añaden al nombre de la unidad el prefijo adoptado, por acuerdo internacional, los cuales se encuentran en la tabla I.

Tabla I. Múltiplos y submúltiplos decimales

Factor	Prefijo	Símbolo
10^{24}	Yolta	Y
10^{21}	Zetta	Z
10^{18}	Exa	E
10^{15}	Peta	P
10^{12}	Tera	T
10^6	Mega	M
10^9	Giga	G
10^3	Kilo	K
10^2	Hecto	H
10	Deca	Da
10^{-1}	Deci	D
10^{-2}	Centi	C
10^{-3}	Mili	m
10^{-6}	Micro	μ
10^{-9}	Nano	n
10^{-12}	Pico	p
10^{-15}	Femto	f
10^{-18}	Atto	a
10^{-21}	Zepto	z
10^{-24}	Yocto	y

No se admiten los prefijos compuestos formados por la yuxtaposición de varios prefijos, así los múltiplos o submúltiplos de la unidad fundamental de masa del S.I. serán múltiplos del gramo, es decir, 1000 veces dicha unidad será el megagramo (Mg) y no el kilokilogramo (kkg), algunos múltiplos o submúltiplos de las unidades del Sistema Internacional tienen un nombre propio, de los cuales los más habituales son los que se encuentran reflejados en la tabla II.

Tabla II. Unidades múltiplos y submúltiplos con nombre propio

Unidad	Nombre con prefijo	Equivalente S.I.
Micra (μ)	Micrómetro (μm)	10^{-6} m
milimicra ($\text{m}\mu$)	Nanómetro (nm)	10^{-9} m
Ångström (Å)	-	10^{-10} m
Fermi	Femtometro (fm)	10^{-15} m
Tonelada	Megagramo (Mg)	10^3 kg
Bar	Megabarria (Mbarria)	10^5 Pa

1.8. UNIDADES DERIVADAS EN EL SISTEMA INTERNACIONAL

En el sistema Internacional existe una serie de unidades derivadas que tienen nombre propio estas son: *Radián (rad)* unidad de ángulo plano; *Estereorradián (sr)* unidad de ángulo sólido; *Hercio (Hz)*, $1 \text{ Hz} = 1 \text{ s}^{-1}$ unidad de frecuencia; *Newton (N)*, $1 \text{ N} = 1 \text{ kg} \cdot \text{m} \cdot \text{s}^{-2}$ unidad de fuerza; *Pascal (Pa)*, $1 \text{ Pa} = 1 \text{ N} \cdot \text{m}^{-2}$, unidad de presión; *Julio (J)*, $1 \text{ J} = 1 \text{ N} \cdot \text{m}$, unidad de energía, de trabajo y de cantidad de calor ; *vatio (W)*, $1 \text{ W} = 1 \text{ J} \cdot \text{s}^{-1}$, unidad de potencia; *Culombio (C)*, $1 \text{ C} = 1 \text{ sA}$, unidad de carga eléctrica y de cantidad de electricidad; *Voltio (V)*, $1 \text{ V} = 1 \text{ W} \cdot \text{A}^{-1}$, unidad de diferencia de potencial y de fuerza electromotriz; *Faradio (F)*, $1 \text{ F} = 1 \text{ C} \cdot \text{V}^{-1}$, Unidad de capacidad eléctrica; *Ohmio (Ω)*, $1 \Omega = 1 \text{ V} \cdot \text{A}^{-1}$, unidad de resistencia eléctrica; *Siemens (S)*, $1 \text{ S} = 1 \Omega^{-1} = 1 \text{ A} \cdot \text{V}^{-1}$, unidad conductancia eléctrica; *Weber (Wb)*, $1 \text{ Wb} = 1 \text{ Vs}$, unidad de flujo magnético o flujo de inducción magnética; *Tesla (T)*, $1 \text{ T} = 1 \text{ Wb} \cdot \text{m}^{-2}$, unidad de densidad de flujo magnético o inducción magnética; *Henrio (H)*, $1 \text{ H} = 1 \text{ Wb} \cdot \text{A}^{-1}$, unidad de inductancia; *Grado Celsius (1C)*, $1 \text{ 1C} = 1 \text{ K}$, unidad de temperatura celsius; *Lumen (lm)*, $1 \text{ lm} = 1 \text{ cd sr}$; *Lux (lx)*, $1 \text{ lx} = \text{lm} \cdot \text{m}^{-2}$, unidad de iluminancia; *Becquerel (Bq)*, $1 \text{ Bq} = 1 \text{ s}^{-1}$, unidad de actividad de un radionucléido; *Gray (Gy)*, $1 \text{ Gy} = 1 \text{ J} \cdot \text{kg}^{-1}$, unidad de dosis absorbida, de energía másica (comunicada) y de kerma; *Sievert (Sy)*, $1 \text{ Sy} = 1 \text{ J} \cdot \text{kg}^{-1}$, unidad de dosis equivalente, de dosis equivalente ambiental, de dosis

equivalente direccional y de dosis equivalente individual; *Katal (kat)* $1 \text{ kat} = 1 \text{ mol} \cdot \text{s}^{-1}$, unidad de actividad catalítica.

Las dos primeras unidades derivadas de las indicadas con nombre propio en el párrafo anterior son especiales, al igual que existen otras magnitudes como el índice de refracción y la permeabilidad relativa, que no recibe nombre especial, además existe otras dos con nombre especial que se aplica a muchas magnitudes estas unidades son el *Belio (B)* y el *Neper (Np)*, el Belio lo definimos como el logaritmo decimal del cociente de dos cantidades de una misma magnitud y el Neper al neperiano, (ambas son no pertenecientes al SI pero de aplicación en sectores específicos), Estudiemos algo más las unidades radián y estereorradián. (Ambas antes de las 20ª conferencia eran consideradas suplementarias y a partir de 1995 se consideran derivadas, dicha consideración se ha publicado en España por primera vez en 2010 BOE de 12 de enero).

El radian se define como *el ángulo plano que, teniendo su vértice en el centro de un círculo, intercepta sobre la circunferencia de este círculo, un arco de longitud igual a la del radio.*

Es decir un ángulo expresado en radianes responde al siguiente proceso, se traza una circunferencia de radio R cuyo centro O coincida con el vértice del ángulo. El ángulo θ en radianes es la razón:

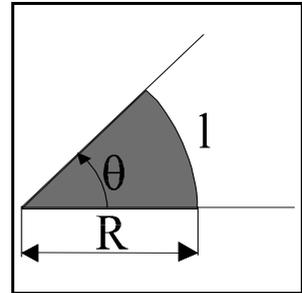


Figura 1.1

$$\theta = \frac{l}{R} \quad 1.13$$

siendo l la longitud del arco abarcado por el ángulo θ .

Análogamente el ángulo sólido es la región del espacio constituida por todas las semirrectas con origen común O y que tienen un punto en común también con un casquete esférico de una esfera de radio R y centro el origen O . Su valor, expresado en estereorradianes, está dado por:

$$\Omega = \frac{S}{R^2} \quad 1.14$$

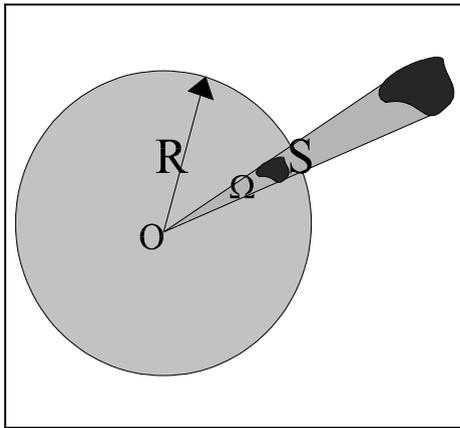


Figura 1.2

siendo S el área del casquete esférico interceptado por el ángulo sólido.

Conforme con 1.14 el estereorradián se define como *el ángulo sólido que, teniendo su vértice en el centro de una esfera, delimita sobre la superficie esférica correspondiente un área igual a la de un cuadrado que tiene como lado el radio de la esfera.*

El ángulo plano correspondiente a todo el plano será aquel que su arco es toda la circunferencia, y por 1.13

$$\theta_t = \frac{2\pi \cdot R}{R} = 2\pi \text{ rad} \quad \mathbf{1.15}$$

que son los radianes equivalentes a 360^0 sexagesimales. En conclusión:

$$1^0 = \frac{2\pi}{360} = 0,017453 \text{ rad}; \quad 1 \text{ rad} = \frac{180}{\pi} = 57^{\circ} \quad 17' \quad 44,8'' \quad \mathbf{1.16}$$

Similarmente, el ángulo sólido correspondiente a todo el espacio será:

$$\Omega_T = \frac{4\pi \cdot R^2}{R^2} = 4\pi \text{ sr} \quad \mathbf{1.17}$$

Obviamente la definición de ángulo sólido se ha hecho utilizando el área interceptada por la superficie de una esfera situada con su centro en el vértice del ángulo, pero frecuentemente habrán situaciones en que la superficie será irregular, de forma que tomando un elemento de área dS no será perpendicular a la recta que lo una con el vértice, formando su vector normal un cierto ángulo plano θ con dicha recta, entonces, es imprescindible proyectar el elemento de superficie sobre un plano perpendicular a la recta, obteniendo como consecuencia de dicha proyección el elemento de área dS' ($dS' = dS \cdot \cos\theta$), y el ángulo sólido elemental $d\Omega$ será:

$$d\Omega = \frac{d'S}{R^2} = \frac{dS \cdot \cos \theta}{R^2} \quad 1.18$$

y por tanto el ángulo sólido subtendido en O por la superficie total se obtiene como resultado de la integración de 1.18 extendida a toda la superficie:

$$\Omega = \iint_S \frac{dS \cdot \cos \theta}{R^2} \quad 1.19$$

En la próxima lección se podrá definir el ángulo sólido en función del vector superficie, y se podrá también definir el vector ángulo plano, como un vector axial.

1.9. OTRAS UNIDADES INTERNACIONALES

Hay unidades de uso internacional no pertenecientes al SI cuyo uso con el Sistema Internacional está aceptado, dado que son ampliamente utilizadas en la vida cotidiana y cada una de ellas tiene una definición exacta en unidades SI. Incluye las unidades tradicionales de tiempo y de ángulo. Contiene también la hectárea, el litro y la tonelada, que son todas de uso corriente a nivel mundial, y que difieren de las unidades SI coherentes correspondientes en un factor igual a una potencia entera de diez. Los prefijos SI se emplean con varias de estas unidades, pero no con las unidades de tiempo. En la tabla III se encuentran estas unidades.

Tabla III. Unidades de uso internacional no pertenecientes al Sistema Internacional

Magnitud	Nombre de la unidad	Símbolo	Valor en unidades SI
Tiempo	Minuto	min	1 min = 60 s
	Hora	h	1 h = 60 min = 3600 s
	Día	d	1 d = 24 h = 86400 s
Ángulo plano	Grado	°	1° = $\pi/180$ rad
	Minuto	'	1' = $(1/60)^\circ = (\pi/10800)$ rad
	Segundo	''	1'' = $(1/60)'$ = $(\pi/648000)$ rad
Área	Hectárea	ha	1 ha = 1 hm ² = 10 ⁴ m ²
Volumen	Litro	L, l	1 L = 1 dm ³ = 10 ³ cm ³ = 10 ⁻³ m ³
Masa	Tonelada	t	1 t = 10 ³ kg

Tabla IV. Unidades no pertenecientes al SI cuyo valor en unidades SI se obtiene experimentalmente

Magnitud	Nombre de la unidad	Símbolo	Valor en unidades SI
Unidades utilizadas con el SI			
Energía	Electronvoltio	eV	1 eV = 1,602 176 487 × 10 ⁻¹⁹ J
Masa	Dalton	Da	1 Da = 1,660 538 782 × 10 ⁻²⁷ kg
	Unidad de masa atómica unificada	u	1u=1Da
Longitud	Unidad astronómica	ua	1 ua = 1,495 978 706 91 × 10 ¹¹ m
Unidades naturales u.n.			
Velocidad (velocidad de la luz en el vacío)	Unidad natural de velocidad	c ₀	299 792 458 m/s
Acción (constante de planck reducida)	Unidad natural de acción	ħ	1,054 571 628 × 10 ⁻³⁴ J s
Masa (masa del electrón)	Unidad natural de masa	m _e	9,109 382 154 × 10 ⁻³¹ kg
Tiempo	Unidad natural de tiempo	ħ/(m _e c ₀ ²)	1,288 088 657 018 × 10 ⁻²¹ s
Unidades atómicas u. a.			
Carga (carga eléctrica elemental)	Unidad atómica de carga	e	1,602 176 487 × 10 ⁻¹⁹ C
Longitud, bohr (radio de Bohr)	Unidad atómica de longitud	a ⁰	0,529 177 208 594 × 10 ⁻¹⁰ m
Energía, hartree (energía de Hartree)	Unidad atómica de energía	Eh	4,359 743 942 × 10 ⁻¹⁸ J
Tiempo	Unidad atómica de tiempo	ħ/E _h	2,418 884 326 505 × 10 ⁻¹⁷ s

Además, habrá que incluir las unidades obtenidas experimentalmente como las de la tabla IV y por último las unidades de uso en sectores especializados, como las indicadas en la tabla V

Tabla V. Unidades de uso en sectores especializados

Magnitud	Unidad		
	Nombre	Símbolo	equivalencia
Distancia	Milla náutica	M	1M=1852 m
Área de las fincas	área	A	1 a = 10 ² m ²
Potencia sistema ópticos	dioptría		1 dioptría = 1 m ⁻¹
Masa de las piedras preciosas	quilate métrico		1 quilate métrico=2.10 ⁻⁴ kg
Masa longitudinal de las fibras textiles	tex	Tex	1 tex = 10 ⁻⁶ kg.m ⁻¹
Velocidad	nudo	Kn	1 kn =(1852/3600) m/s
Presión sanguínea y otros fluidos	mm de mercurio	mm Hg	1 mm Hg = 133322 Pa
Sección eficaz	barn	B	1 b = 10 ⁻²⁸ m ²

1.10. SISTEMAS TÉCNICOS DE UNIDADES

Los sistemas técnicos de unidades, aunque tienden a desaparecer, todavía se utiliza en las tecnologías, las magnitudes mecánicas fundamentales de estos sistemas son **longitud, fuerza, y tiempo**, apareciendo la masa como magnitud derivada, siendo su ecuación de definición:

$$m = \frac{f}{a} \quad 1.20$$

De entre los sistemas acordes de unidades cabe destacar el **Sistema técnico decimal** de Unidades y el sistema **inglés**.

El sistema técnico decimal toma como unidades mecánicas fundamentales el metro como unidad de longitud; el kilogramo como unidad de fuerza; y el segundo como unidad de tiempo. El kilogramo se define como el peso del kilogramo patrón en un punto en que la aceleración de la gravedad sea la normal, por acuerdo adoptado en la 13ª conferencia general de pesas y medidas celebrada en 1968, se toma como valor normal el de la gravedad en Postdam (latitud 52°29' Norte), es decir, $g=9'81260 \text{ m.s}^{-2}$, se eligió Postdam por estar situado en ella uno de los más destacados laboratorios de medidas gravitatorias.

La relación entre el kilogramo y el Newton se deduce fácilmente, puesto que:

El peso en Postdam de una masa de 1 Kg será:

a) Sistema técnico decimal: $P= 1 \text{ kg}$

b) Sistema internacional: $P=m.g=1_x9'81=9'81 \text{ N}$

De donde:

$$1 \text{ kg} = 9'81 \text{ N} \quad 1.21$$

En el sistema técnico, la unidad de masa no tiene nombre especial, denominándola **unidad técnica de masa (UTM)** y de la ecuación de definición se tiene:

$$1 \text{ UTM} = \frac{1 \text{ kg}}{1 \text{ m.s}^{-2}}$$

1.22

$$1 \text{ UTM} = \frac{9'81 \text{ N}}{1 \text{ m.s}^{-2}} = \frac{9'81 \text{ kg.m.s}^{-2}}{1 \text{ m.s}^{-2}} = 9'81 \text{ kg}$$

Es decir, la UTM es 9'81 veces más grande que la masa de 1 kg.

En algunos textos la unidad kilogramo cuando se trata de la magnitud fuerza se le denomina kilopondio, o kilopeso. La unidad de trabajo se le denomina kilográmetro (kgm) (también se conoce dicha unidad como kilopondímetro).

El sistema inglés es el utilizado principalmente en el mundo anglosajón. Sus unidades mecánicas fundamentales son: el pie, $1 \text{ ft} = 0'3048 \text{ m}$ para la longitud; la libra, $1 \text{ Lb} = 0'45359 \text{ kg}$ para la fuerza; y el segundo como unidad de tiempo. El slug como unidad de masa es la unidad derivada con nombre especial, $1 \text{ slug} = 1'488 \text{ UTM} = 14'59 \text{ kg} = 32'174 \text{ lb}$.

1.11. OTRAS UNIDADES MECÁNICAS

Existen otras unidades utilizadas con frecuencia pero que no pertenecen a ninguno de los sistemas mencionados anteriormente, en el apéndice 2 se encuentran las equivalencias más frecuentes, de ellas se destacan las siguientes:

- *Unidades de longitud*

La pulgada: $1 \text{ pulg} = 0'0254 \text{ m}$

La milla: $1 \text{ mi} = 1609 \text{ m}$

La Yarda: $1 \text{ yd} = 3 \text{ ft} = 0'9144 \text{ m}$

- *Unidades de área*

El acre: $1 \text{ acre} = 43560 \text{ ft}^2 = 4046'86 \text{ m}^2$

- *Unidades de volumen*

El cuartillo: $1 \text{ qt} = 946 \cdot 10^{-6} \text{ m}^3$

El galón británico: $1 \text{ galón br} = 4'49661 \cdot 10^{-3} \text{ m}^3$

El galón (E.E.U.U.): $1 \text{ galón} = 3'785 \cdot 10^{-3} \text{ m}^3$

- *Unidades de velocidad*

El kilómetro/hora: $1 \text{ km.h}^{-1} = 0'2778 \text{ m.s}^{-1}$

La milla/hora: $1 \text{ mi.h}^{-1} = 1'467 \text{ ft.s}^{-1} = 1'609 \text{ km.h}^{-1} = 0'447 \text{ m.s}^{-1}$

- *Unidades de fuerza*

La tonelada (EEUU): $1 \text{ ton} = 907.2 \text{ kg} = 8896.91 \text{ N}$

La tonelada grande: $1 t_{\text{grande}} = 1016 \text{ kg} = 9964.52 \text{ N}$

La onza: $1 \text{ oz} = 0.0625 \text{ lb} = 0.02835 \text{ kg} = 0.278 \text{ N}$

- *Unidades de energía*

La caloría: $1 \text{ cal} = 4.186 \text{ J}$

La unidad térmica británica: $1 \text{ BTU} = 778 \text{ ft.lb} = 1055 \text{ J}$

El kilovatio hora: $1 \text{ kw.h} = 3.6 \cdot 10^6 \text{ J}$

El electrón voltio: $1 \text{ eV} = 1.602 \cdot 10^{-19} \text{ J}$

- *Unidades de Potencia*

El caballo de Vapor: $1 \text{ CV} = 75 \text{ kgm.s}^{-1} = 735.75 \text{ W}$

El caballo fuerza: $1 \text{ HP} = 550 \text{ ft.Lb.s}^{-1} = 1.01387 \text{ CV} = 76.04 \text{ kgm.s}^{-1} = 745.95 \text{ W}$

- *Unidades de Presión*

La libra.pulgada⁻²: $1 \text{ lb.pulg}^{-2} = 6895 \text{ Pa}$

La atmósfera: $1 \text{ at} = 101321.6 \text{ Pa}$

La atmósfera técnica: $1 \text{ kg.cm}^{-2} = 98100 \text{ Pa}$

El metro columna de agua: $1 m_{\text{H}_2\text{O}} = 9810 \text{ Pa}$

El torricelli: $1 \text{ torr} = 133.3179 \text{ Pa}$

1.12. ERRORES DE MEDICIÓN

En todas las ciencias aplicadas se trabaja con datos numéricos adquiridos con medidas y observaciones que nunca son totalmente precisas; como causa de que tanto los instrumentos de medida no son perfectos, como que los sentidos no son absolutamente perspicaces. Por otra parte, en muchas ocasiones participan en las fórmulas números irracionales, como $\sqrt{2}$, π , e , etc., que no pueden tomarse con todas las cifras, sino que se deben simplificar, quedando limitada su introducción a cierto número de cifras decimales. Todo esto condiciona los resultados, que, por tanto, no serán precisos

y estarán afectados de cierta **incertidumbre** que se hace necesario determinar en cada caso, pues ésta señala la calidad de la medida efectuada, y debe seguir al resultado en todos los casos. Por ejemplo, no es lo mismo facilitar el resultado de una pesada en la siguiente manera $4'24 \pm 0'01$ g que en esta otra: $4'240 \pm 0'001$ g, pues la primera expresa que la pesada posee una cifra decimal garantizada, mientras que la segunda tiene dos. En ambos casos $\pm 0'01$ g y $\pm 0'001$ g definen respectivamente, la incertidumbre de las medidas. La aproximación con que se ha de realizar una medida, es decir, la incertidumbre del resultado, es función del fin que se desee y del origen mismo de la medida, pero, en último término, lo interesante es preverla de antemano, como error máximo que puede vincular al resultado.

Saber el error que se incurre en una medida tiene también una gran importancia para decidir el mínimo número de cifras decimales que hay que conservar de un número irracional para evitar cálculos desagradables e inservibles.

1.12.1. CLASIFICACIÓN DE LOS ERRORES

Los errores se pueden clasificar según su causa: en sistemáticos y accidentales; según su expresión en absolutos y relativos.

1.12.1.1. Sistemáticos y accidentales

Los errores sistemáticos están causados por un vicio del aparato de medida o por una propensión equivocada del observador, y por tanto se muestran siempre en un sentido; sólo se pueden evidenciar cambiando de instrumento de medida o de observador.

Los errores accidentales son los provocados por pequeñas causas no cuantificables e imposibles de controlar, que modifican, tanto en un sentido como en otro, los valores encontrados. Como pueden ser, por ejemplo, minúsculas alteraciones de la temperatura, presión o sencillamente la imperfección de los sentidos y métodos de medida. Este tipo de errores, que no son evitables, se pueden nivelar asumiendo como medida, por ejemplo, la media aritmética de una serie de medidas.

Los errores accidentales no pueden observarse para las medidas aisladas, ya que su reparto está subordinado a las leyes del azar, y sólo cabe designar un límite superior que está fijado por la sensibilidad de las medidas efectuadas.

La media aritmética de una serie de medidas de una misma cantidad de una magnitud está afectada por un error menor que cualquiera de los resultados individuales.

1.12.1.2. Errores absoluto y relativo

Un error de un centímetro incurrido en la medida de una longitud de algunos centímetros es inaceptable, mientras que el mismo error al medir la distancia entre dos puntos de una carretera que distan varios kilómetros carece de importancia. De ahí la necesidad de considerar el error absoluto y relativo de una medida.

Se denomina error absoluto propio de una medida, o de un número real aproximado, a la diferencia, con su signo, entre el valor aproximado, y el que se estime como correcto puesto que el valor exacto es desconocido:

$$\varepsilon_i = \Delta x_i = x_i - x \quad 1.23$$

En la práctica, como se ha mencionado anteriormente, se toma como correcto el valor medio de un gran número de observaciones o simplemente se asigna al error absoluto un cierto valor o cota superior (o se opta por la menor cantidad capaz de ser medida con el utensilio empleado). Por ejemplo, cuando se mide una longitud con una regla graduada en milímetros se admite que $|\varepsilon_i| \leq 0.001$ m, o cuando se toma el número $\pi = 3.1415927$, se sabe que $|\varepsilon_\pi| \leq 0.0000001$.

Como se ha apuntado, el error absoluto no es útil para apreciar el grado de aproximación o exactitud de una medida; por ello es obligatorio acudir al error relativo, que se define como el valor absoluto del cociente de dividir el error absoluto por el valor de la magnitud, o número exacto que se mide:

$$\varepsilon_{r_i} = \frac{|\varepsilon_i|}{|x|} = \frac{|\varepsilon_i|}{x} \quad 1.24$$

La segunda igualdad de 1.24 se entiende que es para valores positivos de la medida o número exacto.

Como el valor exacto es, en general, desconocido se calcula el límite superior del error relativo dividiendo la cota del error absoluto por el número que resulta sustituyendo por ceros todas las cifras que siguen a la primera significativa del número

aproximado. Así, por ejemplo, el error relativo cometido al tomar el número con cuatro cifras decimales será:

$$\varepsilon_r = \frac{0'0001}{2'7183} \approx \frac{0'0001}{2'0000} = 0'00005 \quad 1.25$$

Frecuentemente, los errores relativos se exponen en porcentaje. El resultado anterior sería de un 0'005 %.

1.12.2. CÁLCULO DEL ERROR EN LAS MEDIDAS INDIRECTAS

Muchas veces se plantea el problema de averiguar el error cometido en la determinación de una cantidad de una magnitud cuando, no siendo posible medirla directamente, se ha recurrido a la medida de otras ligadas a aquélla por una expresión conocida. Para resolverlo hay que conocer los límites de error de las magnitudes que se miden y aplicar el cálculo infinitesimal, hallando la diferencial de función, considerando los errores como diferenciales, o incrementos físicamente pequeños. Sea la función $z=f(x, y, \dots)$, entonces:

$$dz = \frac{\partial f}{\partial x} \cdot dx + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot dy + \dots \quad 1.26$$

y asimilando las diferenciales a errores de medida:

$$\varepsilon_z = \left| \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \varepsilon_x \right| + \left| \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \varepsilon_y \right| + \dots \quad 1.27$$

se obtiene la expresión fundamental del cálculo de errores en las medidas indirectas; en ella $\varepsilon_x, \varepsilon_y, \dots$, representan los errores absolutos cometidos en la medida de x, y, \dots , y ε_z el error absoluto de que vendría afectada la determinación de z .

En algunos casos se puede utilizar la derivada logarítmica de la función, especialmente cuando se trata de funciones monomias.

Sea f una función monomía, de forma que $z=k \cdot x^\alpha \cdot y^\beta \dots$, donde k es un coeficiente real, y los exponente $\alpha, \beta \dots$ son números racionales, entonces:

$$\ln z = \ln k + \alpha \cdot \ln x + \beta \cdot \ln y + \dots \quad 1.28$$

y diferenciando, y asimilando las diferenciales a errores de medida:

$$\frac{dz}{z} = \frac{dk}{k} + \alpha \cdot \frac{dx}{x} + \beta \cdot \frac{dy}{y} + \dots$$

$$\left| \frac{\varepsilon_z}{z} \right| = \left| \frac{\varepsilon_k}{k} \right| + \left| \alpha \cdot \frac{\varepsilon_x}{x} \right| + \left| \beta \cdot \frac{\varepsilon_y}{y} \right| + \dots \quad 1.29$$

$$\varepsilon_{r_z} = \varepsilon_{r_k} + |\alpha| \cdot \varepsilon_{r_x} + |\beta| \cdot \varepsilon_{r_y} + \dots$$

Donde se obtiene que para dicho tipo de funciones resulta muy fácil obtener el error relativo de la magnitud a determinar, para que el coeficiente k no aumente los errores inevitables, se elige dicho coeficiente con un número de cifras decimales tal que su error relativo sea mucho menor que el error relativo producido por las magnitudes, normalmente se impone que el error relativo de los números aproximados sea menor que la décima parte del error relativo total que se obtiene por las magnitudes, es decir:

$$\varepsilon_{r_k} < 0'1 \cdot (|\alpha| \cdot \varepsilon_{r_x} + |\beta| \cdot \varepsilon_{r_y} + \dots) \quad 1.30$$

Por ejemplo para determinar el valor que hay que tomar de π si $\varepsilon_{r_\pi} < 0'005$, $\varepsilon_\pi < 0'005 \cdot 3 = 0'015$ (3 primera cifra significativa), y por tanto basta con tomar $\varepsilon_\pi = 0'01$, lo que implica $\pi = 3'14 \pm 0'01$, puesto que el error relativo que se comete es $\varepsilon_{r_\pi} = 1/300 = 0'0033 < 0'005$.

1.12.3. TEORÍA DE ERRORES: CURVA DE GAUSS

Cuando se realizan un gran número de medidas de una misma cantidad de una magnitud, los errores individuales de cada medida se distribuyen entre una gran diversidad de valores; todos los errores son posibles, aunque siempre son menos probables, es decir, menos frecuentes, los de mayor valor absoluto.

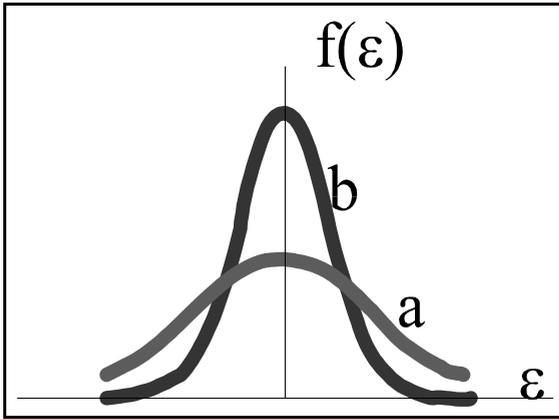


Figura 1.3

Si se representa el número de veces en que el error se encuentra en cada uno de los distintos intervalos, o más correctamente, la probabilidad o frecuencia relativa $n/N=f(\epsilon)$ de cada error, en función del error absoluto (ϵ), se obtiene una curva en forma de campana, mucho más perfecta y continua a medida que aumente el número de medidas realizadas. Esta curva, conocida como curva de **Gauss** (*Gauß*), está representada en la figura 1.3; la curva b pertenece a un buen

conjunto de medidas, es decir, con pequeña dispersión, mientras que la a representa una serie con mayores errores, o sea, la dispersión es mayor.

La curva de Gauss, o de **distribución normal** de los errores, tiene una ecuación que no se deducirá en esta asignatura, la cual se expresa por:

$$\frac{n}{N} = f(\epsilon) = \frac{h}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{(h\cdot\epsilon)^2}{2}} \tag{1.31}$$

Lógicamente $f(\epsilon)$.de es la frecuencia o probabilidad de que una medida individual tenga un error comprendido entre $\epsilon-d\epsilon/2$ y $\epsilon+d\epsilon/2$; como la probabilidad de que el error tome algún valor, es decir, esté comprendido entre $-\infty$ y $+\infty$, es la unidad, debe cumplirse que:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(\epsilon) \cdot d\epsilon = 1 \tag{1.32}$$

El parámetro h define la mayor o menor altura del valor central de la curva que será el máximo y, por tanto, da una idea de la precisión de las medidas; cuanto mayor sea h mayor será la altura de la ordenada máxima, lo que significa que en el conjunto de medidas sólo son muy probables los errores pequeños.

El valor de ε_p para el cual $\int_{\varepsilon_p}^{\varepsilon_p} f(\varepsilon).d\varepsilon = 0'5$ se denomina

error probable, es el error para el que son igualmente probables los errores superiores y los inferiores a él. Es decir, en la figura 1.4, las áreas de diferente tonalidad son iguales. Dicho error probable está relacionado con el parámetro h de la curva por: $h.\varepsilon_p=0'674438$

Habitualmente se expresa la calidad de una serie de medidas recurriendo al error medio $\bar{\varepsilon}$ y al error standard σ , el primero es la media de los valores absolutos de los errores:

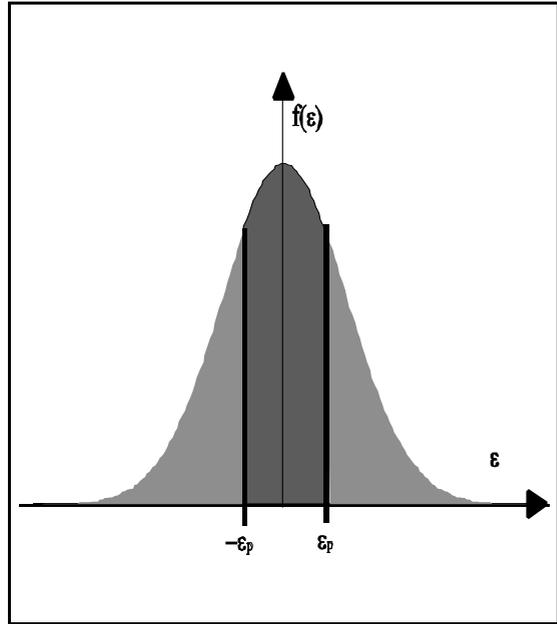


Figura 1.4

$$\bar{\varepsilon} = \frac{\sum n.|\varepsilon|}{N} = \int_{-\infty}^{+\infty} \varepsilon \cdot \frac{h}{\sqrt{2.\pi}} \cdot e^{-\frac{(h.\varepsilon)^2}{2}} .d\varepsilon = \frac{2}{\sqrt{2.\pi}.h} \quad 1.33$$

Se define la varianza de un conjunto de errores, σ^2 , como la media de los cuadrados de los errores

$$\sigma^2 = \frac{\sum n.\varepsilon^2}{N} = \frac{1}{h^2} \quad 1.34$$

Es decir $\sigma = \frac{1}{h}$, y por tanto 1.31 se puede expresar:

$$\frac{n}{N} = f(\varepsilon) = \frac{1}{\sqrt{2.\pi}.\sigma^2} \cdot e^{-\frac{(\frac{\varepsilon}{\sigma})^2}{2}} \quad 1.35$$

llamando f_n a la distribución normal de varianza unidad, y denominado $z=\varepsilon/\sigma$ se tiene:

$$\frac{n}{N} = f(\varepsilon) = \frac{1}{\sigma} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{\varepsilon^2}{2\sigma^2}} = \frac{f_n(z)}{\sigma} \quad 1.36$$

Así, para expresar la calidad de las medidas, se emplea el error standard; de cualquier forma, hallado uno de los parámetros característicos de la curva de Gauss (h , ε_p , $\bar{\varepsilon}$, σ^2 o σ) se pueden obtener los demás. Por ejemplo, dado que el cálculo del error medio es muy sencillo, se suele deducir de éste el standard:

$$\sigma = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \cdot \bar{\varepsilon} = 1'25 \bar{\varepsilon} \quad 1.37$$

El error standard, goza de un sentido práctico que lo hace muy interesante para determinar la calidad de la serie de medidas; la probabilidad de que una medida, tenga un error individual comprendido entre $\pm\sigma$ es del 68 %; la de que esté incluido entre $\pm 2\sigma$, es del 98 % y, sólo hay una probabilidad del 0'3 % de que el error se salga del límite marcado por $\pm 3\sigma$.

1.13. ECUACIONES DIMENSIONALES

El Barón **Jean Batiste Fourier** (1768-1830) aplicó a las magnitudes físicas la idea geométrica de dimensión, y por ello se le debe admitir como el precursor del Análisis dimensional.

En su obra "*Théorie Analytique de la Chaleur*" fija de un modo claro y rotundo el concepto de dimensión.

Los conceptos desarrollados por Fourier fueron aprovechados con gran éxito a finales del siglo XIX por **Osborne Reynolds** (1842-1912), **Lodge**, **Fitzgerald**, **Rücker**, **Jean** y muy especialmente por **Lord Rayleigh (J. W. Strutt)** (1842-1919). Primero fueron aplicadas para probar la homogeneidad de las ecuaciones con el fin de descubrir errores de cálculo, y posteriormente, se empleó el Análisis dimensional, por idea de Rayleigh, a la determinación de problemas cuyo tratamiento directo presentaba dificultades matemáticas insuperables. Lord Rayleigh utilizó por primera vez las magnitudes con exponentes adimensionales en la mecánica de fluidos y es por lo que se le considera junto a Fourier, cofundador del análisis dimensional.

Para seguir leyendo, inicie el proceso de compra, [click aquí](#)