académica

Física para Ingeniería

Tomo II

Antonio Sanchis Sabater

Editorial
Universitat Politècnica
de València

Antonio Sanchis Sabater

Física para Ingeniería

Tomo II

Editorial
Universitat Politècnica
de València

Colección Académica

Para referenciar esta publicación utilice la siguiente cita: Sanchis Sabater, A. (2020). *Física para Ingeniería.* Valencia: Editorial Universitat Politècnica de València

Venta: www.lalibreria.upv.es / Ref.: 0216_05_01_01

Imprime: Byprint Percom, S. L.

ISBN: 978-84-9048-905-5 (Obra completa)
ISBN: 978-84-9048-906-2 (Tomo II)
Impreso bajo demanda

Si el lector detecta algún error en el libro o bien quiere contactar con los autores, puede enviar un correo a edicion@editorial.upv.es

Impreso en España

Prefacio

La física es una materia básica de la ingeniería. A la hora de empezar los estudios de un grado de ingeniería el alumno cuenta con los conocimientos de física que ha adquirido en el bachillerato, tales como unidades, errores, cinemática del punto con el estudio de la caída de graves o los tiros horizontal y parabólico. La dinámica de la partícula, el estudio del trabajo y conservación del movimiento inicio de la termodinámica y el estudio de la electricidad con estudios de circuitos sencillos donde se aplica la ley de Ohm y el efecto Joule obteniendo la potencia eléctrica todos estos adquiridos en primero de Bachillerato, completando sus conocimientos preuniversitarios en el segundo de bachillerato con el campo gravitatorio (leyes de Kepler y ley de Newton) y el eléctrico. También cuenta con los conocimientos de movimiento armónico simple y el movimiento ondulatorio o la óptica geométrica. Además, ha analizado el campo magnético con la ley de Ampere, fuerza de Lorentz o la ley de Laplace, leyes de Faraday y Henry y la ley de Lenz, completando con elementos de física relativista, mecánica cuántica, y física nuclear.

Por ello cabe preguntarse si en un libro es necesario partir de los conceptos más básicos de la Física hasta alcanzar los contenidos que se pretende o hay que partir de lo que ya el estudiante sabe y centrarse en lo que le resulta novedoso. Es difícil saber que enfoque desarrollar en un texto dirigido a estudiantes, principalmente de los grados de ingeniería de la rama industrial. Por ello he buscado por una parte no incidir demasiado en lo que ya conocen para no hacer que el texto sea muy extenso (así y todo hay más de 1000 páginas), pero tampoco se puede omitir algunos conceptos previos que sirvan para centrar la materia, así algunas lecciones como la primera (*la magnitud física y su medida)* repite contenidos que el estudiante ha reproducido durante varios cursos, pero sirve como introducción a la materia objeto del libro, o la lección de óptica geométrica que ya ha estudiado en segundo de bachiller. Está lección de óptica geométrica he creído conveniente incluirla porque en caso contrario parece que quedaría coja la parte de estudio de la óptica, pero está desarrollada de forma que un alumno que no ha estudiado el libro pueda abordarlo, por ello, se repiten conceptos ya vistos en otras lecciones anteriores, como los vistos en el bachillerato. Un alumno podría prescindir de la lección si domina el segundo de bachillerato y además podría estudiar sólo esa lección sin el estudio previo de las anteriores.

Además, como se ha indicado, creo que muchos de los conceptos que se han introducido en el libro, que el alumno conoce del bachillerato, tales como las lecciones del movimiento ondulatorio u ondas mecánicas, si se hubiese prescindido de su reiteración se rompería el esquema coherente de la lección, así que he preferido extenderme en ese caso. También en la dinámica, la electrostática o el electromagnetismo he reproducido ideas que el estudiante ya posee, pero que no se pueden obviar en un texto que pretende estudiar dichas partes de la física.

Sin embargo se han repetido pocos conocimientos que el alumno conoce de cinemática, y se ha partido de que dichos conceptos ya están adheridos al estudiante, entendiendo que la repetición de dichos conceptos no son inevitables para buscar una coherencia en el texto.

Desde 1986 que empecé mis tareas docentes, he ido preparando esta publicación ampliando su contenido desde mi libro apunte "***Física para ingenieros químicos***" he ido reeditando con los títulos "**Fundamentos físicos para ingenieros**", "**Física básica para ingenieros**" hasta la edición actual con el título "**Física para ingeniería**". Publicación que se debe acompañar con otras que he elaborado de resolución de ejercicios, pues para no extenderme demasiado, los mismos no están integrados en esta obra, pero si están a disposición del alumnado en otras publicaciones.

Las lecciones de la 2 a la 13 incluyen los contenidos de la asignatura de 9 créditos Física I de los grados de ingeniería que se imparten en la ETSII de la Universidad Politécnica de Valencia, las lecciones de la 15 a 23, con parte de los contenidos de las lecciones siguientes, completan el temario de Física II (asignatura de 6 créditos), siendo ambas asignaturas la que constituyen la materia básica de física que se imparte en primer curso. El resto de contenidos de este libro, según titulaciones de la Escuela, se estudia en la asignatura Física III, al menos la parte de dicha asignatura que corresponde a física aplicada, pero dada la diversidad de grados, a partir de la lección 24, algunas lecciones son de Física II otras de Física III y otras no se estudian en alguna titulación. En alguna titulación de la ETSII de Valencia en vez de estructurarse el temario en Física I y Física II se denominan respectivamente Física y Ampliación de Física, pero su contenido es coincidente con lo indicado.

Es mi deseo que el libro sea de gran utilidad para el estudiante, y con esa intención lo he hecho.

En Valencia, septiembre de 2020

Índice

TOMO I

TOMO II

LECCIÓN 22

MOVIMIENTO ONDULATORIO

Objetivos

1. *Conocer el concepto de onda.*
2. *Analizar las ondas armónicas.*
3. *Conocer el efecto Doppler-Fizeau.*
4. *Saber aplicar el principio de superposición.*
5. *Analizar el principio Huygens-Fresnel.*
6. *Analizar las interferencias, pulsaciones, dispersión, reflexión y refracción.*
7. *Intuir la difracción de las ondas.*
8. *Estudiar las ondas estacionarias.*

Contenido

22.1. CONCEPTO DE ONDA

Todos han observado el fenómeno de las ondas desde la infancia, al arrojar una piedra en una acequia o la caída de una gota en la bañera llena de agua. La perturbación creada por la piedra o la gota, se manifiesta como una serie de olas que se mueven alejándose del punto en el que impactó sobre la superficie libre del agua. El mundo está lleno de distintas clases de ondas, se sabe que el sonido se propaga en el aire por medio de ondas elásticas, también las ondas de las cuerdas y vibraciones en placas, También son ondas las sísmicas, las de radio, rayos X, etc.

Hasta finales del siglo XIX, la Física clásica utilizaba únicamente dos conceptos, el de partícula material y el de onda para obtener las variables dinámicas apropiadas para analizar cualquier sistema físico, pero en el estudio de la interacción entre luz y materia aparecieron una serie de dificultades, así a escala atómica son necesarias las dos descripciones la ondulatoria y la corpuscular para la interpretación de un mismo fenómeno. Luis de Broglie propuso en 1924 su hipótesis en la que atribuye a la materia propiedades de onda y de crepúsculo, de forma que toda partícula material en movimiento lleva asociada una onda, cuya frecuencia y longitud de onda se relacionan a las características mecánicas: energía y cantidad de movimiento. De esta forma la energía de una masa m está dada por la conocida ecuación de Einstein: $E=m.c^2$, la energía de un fotón es: $E=h.\nu$, siendo h la constante de Planck, la cantidad de movimiento del fotón está dada por: $p=m.c=E/c=h.\nu/c=h/\lambda$, siendo λ la longitud de onda.

Una onda es una perturbación propagándose por el espacio. Las magnitudes físicas que definen la perturbación pueden ser una deformación elástica, una sobrepresión, campos eléctricos y magnéticos, una probabilidad de presencia, etc.

Sea una región del espacio en el que cada punto A queda determinado por un conjunto de valores de las distintas magnitudes, donde $f_i(A)$ se denomina a la cantidad media en un entorno esférico del punto A de la magnitud i cuando el radio de este entorno tiende a cero, Así se indicará que el estado físico del punto ha cambiado, o que ha sufrido una perturbación si para alguna o algunas de las magnitudes (por ejemplo la j) $f_j(A)$ ha variado

Habitualmente, cuando en un punto de una región del espacio se produce una perturbación, esta no queda únicamente localizada a dicho punto sino que se transmite de unos puntos a otros, sin que el espacio en su conjunto sufra ningún desplazamiento. Así se denomina movimiento ondulatorio u onda al fenómeno en virtud del cual se propaga de forma ordenada una perturbación.

Todas las ondas tienen en común dos propiedades importantes:

- Transportan energía a distancia

- La perturbación avanza por el espacio sin que este sufra ningún desplazamiento de conjunto.

Es decir, el movimiento ondulatorio es un transporte de energía sin transporte de materia.

La propagación de una perturbación, se puede describir por los valores que toma una magnitud física en un punto y en cada instante, sea una propagación a lo largo de una recta, con inicio en un punto (O) asociando al sistema un sistema de coordenadas cartesiano con origen en O donde el eje OX sea el que contiene la recta donde se propaga la perturbación, sea f el valor de la cantidad de la magnitud física de la perturbación, se puede escribir para un punto de la recta en un instante:

$$f = f(x,t) \qquad \mathbf{22.1}$$

Que para un instante dado por ejemplo t=0 f(x,0)=f(x) será la función que nos valora la cantidad de la magnitud objeto de la perturbación a lo largo de la recta, y en un punto concreto tal como el x_0, $f(x_0, t)=f(t)$ describe el valor de la magnitud en el punto a lo largo del tiempo.

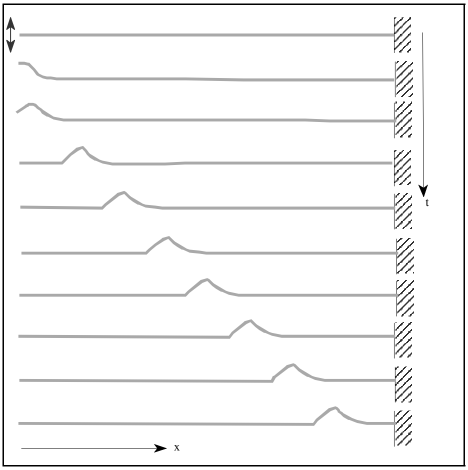

Figura 22.1

Sea la cuerda tensa de la figura donde se ha provocado una perturbación, esta se transmite a lo largo del tiempo f=f(x,t)

Sea c la velocidad con que se propaga la perturbación, se considera en el instante t como origen O' un punto que dista c.t de O en el sentido positivo de OX, el punto A de coordenada x, para el nuevo origen su coordenada x' será x'=x-c.t, por tanto el valor de la perturbación en A en el instante t será

$$f(x') = f(x - c.t) \qquad \mathbf{22.2}$$

Pero si la perturbación se propagase en sentido negativo del eje OX, entonces x'=x+c.t y la perturbación en A en el instante t es:

$$f(\mathrm{x}') = f(x + c.t) \qquad \mathbf{22.3}$$

Sin embargo la perturbación que se encuentra en A en el instante t se encontraba en otro punto B en el instante t=0, es decir tal como se muestra en la figura 22.1 la perturbación se propaga en el sentido positivo, se tiene:

$$f(\mathrm{x_B},0)=f(x',t)=f(x-c.t) \qquad \textbf{22.4}$$

Si el sentido de la propagación fuese el negativo entonces:

$$f(\mathrm{x_B},0)=f(x',t)=f(x+c.t) \qquad \textbf{22.5}$$

Con ello se puede deducir que el avance de un perfil de onda en función del tiempo lo siguiente:
1º Las expresiones matemáticas f=f(x±c.t) son las adecuadas para describir un estado físico que se propaga sin deformarse a lo largo del eje OX.
2º La expresión f=f(x±c.t) no impone ninguna limitación al perfil de onda, ni al tipo de oscilación de la magnitud f que puede ser de cualquier forma: rectilínea, circular, elíptica o cualquier otra forma.
3º La cantidad de la magnitud física tiene el mismo valor para los puntos x e instantes que satisfagan la condición x-c.t=constante para propagación en sentido positivo o x+ct=constante para propagación en sentido negativo de OX. Esto quiere decir que si t=0, f en el punto A de coordenada x el valor es f(x); transcurrido un tiempo t, f tiene el mismo valor en el punto D que dista c.t de x, en el sentido de propagación, ya que si este sentido es el positivo como la coordenada de D es x+c.t, $f(x_D,t)=f(x+c.t,t) = f(x+c.t-c.t,0) = f(x,0)=f(x)$.

Como consecuencia de las propiedades comunes de todas las ondas, deben tener una expresión matemática común a todas ellas, la que se conoce como ecuación de onda o ecuación de D'Alembert, ya que todas las ondas (mecánicas, electromagnéticas, etc) están sometidas a fenómenos típicos en su propagación, tales como la reflexión, la refracción, la difracción y las interferencias, que se estudiará más adelante. Esta ecuación que rigen todos los movimientos ondulatorios es:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial t^2}=\widetilde{c}^{\,2}.\Delta f \qquad \textbf{22.6}$$

En 22.6 f es la función de la cantidad de la magnitud que caracteriza la perturbación función del punto y del tiempo f(x,y,z,t) en coordenadas cartesianas, esta magnitud puede ser la elongación de una partícula, la velocidad, la presión, el campo eléctrico, el campo magnético etc. Tal como se ha definido en 19.12 Δf, representa el laplaciano de f.

La ecuación de onda (ecuación 22.6) se puede expresar en la forma:

$$\Delta f - \frac{1}{\tilde{c}^2}.\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = \Box_{\tilde{c}} f = 0 \qquad \textbf{22.7}$$

Que en el caso que nos ocupa $\tilde{c}$ es real $\tilde{c} = c$, c es la velocidad de propagación de la onda y $\Box_{\tilde{c}}$ es el operador d'alembertiano descrito en 19.14

La ecuación de D'Alembert (ecuación de onda) es una de las ecuaciones diferenciales más importantes de la Física, ya que representa todos los tipos de movimientos ondulatorios en los que la velocidad de propagación c es constante, además es una ecuación lineal, por lo que la función f y sus derivadas no se presentan en ninguna otra forma que la del primer grado.

Se va a comprobar que las ecuaciones 22.4 y 22.5 son soluciones de la ecuación de onda en el caso monodimensional donde el laplaciano queda $\partial^2 f/\partial x^2$. Para hacer más sencilla la comprobación, se realiza el cambio de variable u=x-c.t (si se propaga en sentido positivo de x) o u=x+c.t (propagación en sentido negativo).

$$\Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial \frac{\partial f}{\partial x}}{\partial x} = \frac{\partial \frac{\partial f}{\partial x}}{\partial u}.\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial \frac{\partial f}{\partial x}}{\partial u} = \frac{\partial\left(\frac{\partial f}{\partial u}.\frac{\partial u}{\partial x}\right)}{\partial u} = \frac{\partial \frac{\partial f}{\partial u}}{\partial u} = \frac{\partial^2 f}{\partial u^2}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = \frac{\partial \frac{\partial f}{\partial t}}{\partial t} = \frac{\partial \frac{\partial f}{\partial t}}{\partial u}.\frac{\partial u}{\partial t} = -c.\frac{\partial \frac{\partial f}{\partial t}}{\partial u} = -c.\frac{\partial\left(\frac{\partial f}{\partial u}.\frac{\partial u}{\partial t}\right)}{\partial u} = c^2.\frac{\partial \frac{\partial f}{\partial u}}{\partial u} = c^2.\frac{\partial^2 f}{\partial u^2} \qquad \textbf{22.8}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = c^2.\frac{\partial^2 f}{\partial u^2} = c^2.\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \Rightarrow c^2.\Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} \Rightarrow \Delta f = \frac{1}{c^2}.\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} \qquad \textbf{22.9}$$

Que cumple la ecuación de onda, se podría haber generalizado al caso tridimensional y se obtendría un resultado idéntico.

Ya se ha indicado que la ecuación de D'Alembert es lineal, por tanto satisface el principio general de superposición, dicho principio indica que si existen distintas soluciones a la ecuación, cualquier combinación lineal de ellas también es solución de la ecuación de onda. En efecto sean f_a, f_b, f_c, …, f_j, …, f_n soluciones de la ecuación de onda cualquier combinación lineal también lo es:

$$\left.\begin{array}{l}\Delta\left(\lambda_j.f_j\right)=\lambda_j.\Delta f_j\\[2ex] \dfrac{\partial^2\left(\lambda_j.f_j\right)}{\partial t^2}=\lambda_j.\dfrac{\partial^2 f_j}{\partial t^2}\end{array}\right\}\Rightarrow \lambda_j.\left(\Delta f_j=\frac{1}{c^2}.\frac{\partial^2 f_j}{\partial t^2}\right)\Rightarrow \Delta\left(\lambda_j.f_j\right)=\frac{1}{c^2}.\frac{\partial^2\left(\lambda_j.f_j\right)}{\partial t^2} \qquad \mathbf{22.10}$$

$$\left.\begin{array}{l}\Delta\left(a+b\right)=\Delta a+\Delta b\\[2ex] \dfrac{\partial^2\left(a+b\right)}{\partial t^2}=\dfrac{\partial^2 a}{\partial t^2}+\dfrac{\partial^2 b}{\partial t^2}\end{array}\right\}\Rightarrow \qquad \mathbf{22.11}$$

$$\Rightarrow \Delta\left(\lambda_a.f_a+...+\lambda_j.f_j+...+\lambda_n.f_n\right)=\frac{1}{c^2}.\frac{\partial^2\left(\lambda_a.f_a+...+\lambda_j.f_j+...+\lambda_n.f_n\right)}{\partial t^2}$$

Sea un punto A, que sufre una perturbación periódica que se propaga de forma ondulatoria a todos los puntos de la región, cualquier punto B tendrá una perturbación periódica cuando sea alcanzado por la inicial. Teniendo en cuenta el teorema de Fourier que establece que cualquier función periódica de periodo T que tenga a lo sumo un número finito de extremos relativos y las discontinuidades puntuales, si las hay, sean de primera especie en el intervalo de un periodo, dicha función se puede desarrollar como una serie de funciones periódicas, dicha serie se denomina serie de Fourier, definiendo la **pulsación** fundamental como ω=2.π/T, de forma:

$$\begin{aligned} f(t)=a_0+a_1.\cos(\omega.t)+a_2.\cos(2.\omega.t)+...+a_n.\cos(n.\omega.t)+...+\\ +b_1.sen(\omega.t)+b_2.sen(2.\omega.t)+...+b_n.sen(n.\omega.t)+... \end{aligned} \qquad \mathbf{22.12}$$

Cada uno de los coeficientes está definido por:

$$\left\{\begin{array}{l} a_0=\dfrac{1}{T}.\displaystyle\int_0^T f(t).dt\\[2ex] a_n=\dfrac{2}{T}.\displaystyle\int_0^T f(t).\cos(n.\omega.t).dt\\[2ex] b_n=\dfrac{2}{T}.\displaystyle\int_0^T f(t).sen(n.\omega.t).dt \end{array}\right. \qquad \mathbf{22.13}$$

Dada una onda función periódica de periodo T, se denomina por λ a la longitud de onda de forma que λ=c.T, al ser periódica cuando pasa un tiempo igual al periodo la función es igual, es decir, f(x,t)=f(x,t+T), luego:

$$f(x,t)=f(x-c.t)=f(x.t+T)=f(x-c.[t+T])=f(x-c.t-c.T)\Rightarrow$$
$$\Rightarrow f(x,t)=f(x-c.t-\lambda)=f([x-\lambda]-c.t) \qquad \mathbf{22.14}$$

Luego la función de onda es doblemente periódica, respecto al tiempo con periodo T y respecto a la variable espacial con periodo λ.

Al igual que se ha definido la pulsación ω=2.π/T se define otra magnitud, denominada numero de ondas dada por: k=2.π/λ

Como conclusión a esto último teniendo en cuenta la descomposición de Fourier y el principio general de superposición, se puede indicar que todo movimiento ondulatorio periódico se puede expresar como una superposición de movimientos ondulatorios armónicos cuyas pulsaciones son múltiplos enteros de la pulsación fundamental ω y cuyas longitudes de onda son submúltiplos enteros de la longitud de onda fundamental λ. Esto permite reducir el estudio de cualquier movimiento ondulatorio periódico al de un movimiento senoidal en el que cada punto realiza un movimiento armónico.

22.2. CLASIFICACIÓN DE LAS ONDAS

Para clasificar las ondas, se deben seguir distintos criterios: En función de su progresividad. En función del medio en el que se propagan. En función de su frente de onda. En función de la dirección de propagación. En función de su periodicidad

22.2.1. CLASIFICACIÓN DE LAS ONDAS EN FUNCIÓN DE SU PROGRESIVIDAD

Las ondas se pueden clasificar en **onda progresiva divergente** si viaja de forma continua alejándose del origen, así una onda monodimensional será progresiva divergente si se propaga en sentido positivo del eje OX, mientras que una esférica será progresiva divergente si se propaga en el sentido positivo del radio.

Una onda será **onda progresiva convergente** si se propaga en sentido opuesto al caso anterior, así la onda f(x+c.t) es una onda monodimensional progresiva convergente mientras que f(x-ct) será divergente.

Por último una **onda estacionaria** es aquella que no progresa, las cuales se estudiarán más adelante.

22.2.2. CLASIFICACIÓN DE LAS ONDAS EN FUNCIÓN DEL MEDIO EN EL QUE SE PROPAGAN

- **Ondas que necesitan un medio elástico para propagarse**.

Las ondas mecánicas necesitan un medio elástico (sólido, líquido o gaseoso para propagarse. Las partículas del medio oscilan alrededor de un punto fijo, por lo que no existe transporte neto de materia a través del medio. Como en el caso de una alfombra o un látigo cuyo extremo se sacude, la alfombra no se desplaza, sin embargo una onda se propaga a través de ella. La velocidad puede ser afectada por algunas características del medio como: la homogeneidad, la elasticidad, la densidad y la temperatura. Dentro de las ondas mecánicas tenemos las ondas elásticas, las ondas sonoras y las ondas de gravedad.

- **Ondas que no necesitan un medio para propagarse**.

Ondas electromagnéticas: las ondas electromagnéticas se propagan por el espacio sin necesidad de un medio, pudiendo por lo tanto propagarse en el vacío. Esto es debido a que las ondas electromagnéticas son producidas por las oscilaciones de un campo eléctrico, en relación con un campo magnético asociado. Las ondas electromagnéticas viajan aproximadamente a una velocidad de 300000 km por segundo, de acuerdo a la velocidad puede ser agrupado en rango de frecuencia. Este ordenamiento es conocido como Espectro Electromagnético, objeto que mide la frecuencia de las ondas.

- **Ondas que alteran la geometría del espacio-tiempo**.

Ondas gravitacionales: las ondas gravitacionales son perturbaciones que alteran la geometría misma del espacio-tiempo y aunque es común representarlas viajando en el vacío, técnicamente no podemos afirmar que se desplacen por ningún espacio, sino que en sí mismas son alteraciones del espacio-tiempo.

22.2.3. CLASIFICACIÓN DE LAS ONDAS EN FUNCIÓN DE SU FRENTE DE ONDAS

Para realizar esta clasificación en primer lugar hay que saber que se entiende por frente de onda. Se denomina **frente de onda** al lugar geométrico en que los puntos del medio son alcanzados en un mismo instante por una determinada onda. Dada una onda propagándose en el espacio o sobre una superficie, los frentes de onda pueden visualizarse como superficies o líneas que se desplazan a lo largo del tiempo alejándose de la fuente sin tocarse.

- **Ondas unidimensionales**: las ondas unidimensionales son aquellas que se propagan a lo largo de una sola dirección del espacio, como las ondas en los muelles o en las cuerdas. Si la onda se propaga en una dirección única, sus frentes de onda son planos y paralelos.
- **Ondas bidimensionales o superficiales**: son ondas que se propagan en dos direcciones. Pueden propagarse, en cualquiera de las direcciones de una superficie, por ello, se denominan también ondas superficiales. Un ejemplo son las ondas que se producen en una superficie líquida en reposo cuando, por ejemplo, se deja caer una piedra en ella. Sus frentes de ondas son superficies cilíndricas cuyo eje es perpendicular a la superficie si esta es plana.
- **Ondas tridimensionales:** son ondas que se propagan en tres direcciones. Las ondas tridimensionales pueden ser ondas esféricas, porque sus frentes de ondas pueden ser esferas concéntricas que salen de la fuente de perturbación expandiéndose en todas direcciones. Aunque los frentes de ondas pueden tener cualquier otra forma de superficie cerrada no solo la esfera, tales como elipsoides, óvalos, etc. El sonido es una onda tridimensional. Son ondas tridimensionales las ondas sonoras (mecánicas) y las ondas electromagnéticas.

22.2.4. CLASIFICACIÓN DE LAS ONDAS EN FUNCIÓN DE SU PROPAGACIÓN

La magnitud que define la perturbación, puede ser escalar (por ejemplo la presión acústica) o vectorial (velocidad de vibración, campo magnético, etc). Las primeras se dirán que son **ondas escalares**, mientras que las segundas son **ondas vectoriales**. A su vez estas en función de su dirección de propagación se pueden subdividir en:

- **Ondas longitudinales**: son aquellas que se caracterizan porque la magnitud vectorial de la perturbación es paralela a la dirección de propagación de la onda. Por ejemplo, un muelle que se comprime da lugar a una onda longitudinal.

- **Ondas transversales**: son aquellas que se caracterizan porque la dirección de la magnitud es perpendicular a la dirección de propagación de la onda.

Hay que indicar que si la dirección de la magnitud de la perturbación no tiene ninguna dirección indicada, siempre es posible descomponer en dos ondas, una longitudinal y otra transversal.

Cuando una onda transversal su dirección es única se indica que está polarizada, luego la polarización de una onda transversal describe la dirección de la oscilación, en el plano perpendicular a la dirección del viaje. Ondas longitudinales tales como ondas sonoras no exhiben polarización, porque para estas ondas la dirección de oscilación es a lo largo de la dirección de viaje. Una onda transversal, como la luz puede ser polarizada usando un filtro polarizador.

22.2.5. CLASIFICACIÓN DE LAS ONDAS EN FUNCIÓN DE SU PERIODICIDAD

Tal como se ha estudiado en el epígrafe anterior las ondas pueden ser periódicas o no periódicas.

- **Ondas periódicas**: la perturbación local que las origina se produce en ciclos repetitivos por ejemplo una onda senoidal.

- **Ondas no periódicas**: la perturbación que las origina se da aisladamente o, en el caso de que se repita, las perturbaciones sucesivas tienen características diferentes. Las ondas aisladas también se denominan pulsos.

22.3. ONDAS PLANAS

Si en un punto D de una región se produce una perturbación, esta alcanza a todos los puntos equidistantes de D, en el caso de un medio homogéneo e isótropo (si la región está en el vació, este será isótropo y homogéneo) al ser la velocidad de propagación uniforme en todas los puntos y direcciones. Con ello los frentes de ondas serán superficies esféricas centradas en D. Como la curvatura de una superficie disminuye al aumentar su radio, cuando la distancia a D es suficientemente grande los frentes de ondas se pueden considerar como planos normales a la dirección de propagación. Se dirá que cuando una perturbación se propaga de forma que resulta idéntica en el mismo instante para todos los puntos de

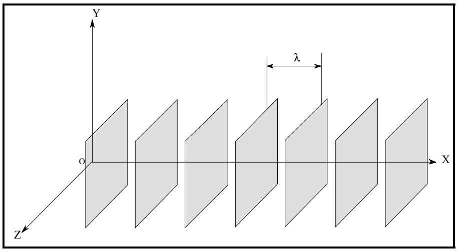

Figura 22.2

un plano P_0, la onda es plana y en otro plano P_i separado i veces la longitud de onda paralelo al anterior la perturbación también es idéntica en todos los puntos en el mismo instante, los planos P_0, P_1, P_2, ..., se llaman planos de ondas y la dirección normal a ellos es la dirección de propagación de la perturbación: Si la onda no es periódica $\lambda=\infty$.

Para estudiar la onda se elige como sistema de referencia OXYZ indicado en la figura 22.2, donde el eje OX es en la dirección de propagación de la onda. Como en este caso de onda plana, la perturbación es función exclusivamente del tiempo y de la coordenada, por lo que la ecuación de ondas tiene la forma:

$$\Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2}.\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} \qquad \textbf{22.15}$$

Para obtener soluciones de la ecuación se puede hacer a través de las variables u y v dadas por u=x-ct y v=x+c.t

$$\left\{\begin{array}{l}
\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \dfrac{\partial \dfrac{\partial f}{\partial x}}{\partial x} = \dfrac{\partial\left(\dfrac{\partial f}{\partial u}.\dfrac{\partial u}{\partial x} + \dfrac{\partial f}{\partial v}.\dfrac{\partial v}{\partial x}\right)}{\partial x} = \dfrac{\partial\left(\dfrac{\partial f}{\partial u} + \dfrac{\partial f}{\partial v}\right)}{\partial x} = \\
= \dfrac{\partial\left(\dfrac{\partial f}{\partial u} + \dfrac{\partial f}{\partial v}\right)}{\partial u}.\dfrac{\partial u}{\partial x} + \dfrac{\partial\left(\dfrac{\partial f}{\partial u} + \dfrac{\partial f}{\partial v}\right)}{\partial v}.\dfrac{\partial v}{\partial x} = \dfrac{\partial^2 f}{\partial u^2} + \dfrac{\partial^2 f}{\partial v^2} + 2.\dfrac{\partial^2 f}{\partial u.\partial v} \\
\dfrac{\partial^2 f}{\partial t^2} = \dfrac{\partial \dfrac{\partial f}{\partial t}}{\partial t} = \dfrac{\partial\left(\dfrac{\partial f}{\partial u}.\dfrac{\partial u}{\partial t} + \dfrac{\partial f}{\partial v}.\dfrac{\partial v}{\partial t}\right)}{\partial t} = \dfrac{\partial\left(-c.\dfrac{\partial f}{\partial u} + c.\dfrac{\partial f}{\partial v}\right)}{\partial t} = \\
= c.\dfrac{\partial\left(-\dfrac{\partial f}{\partial u} + \dfrac{\partial f}{\partial v}\right)}{\partial u}.\dfrac{\partial u}{\partial t} + c.\dfrac{\partial\left(-\dfrac{\partial f}{\partial u} + \dfrac{\partial f}{\partial v}\right)}{\partial v}.\dfrac{\partial v}{\partial t} = c^2.\dfrac{\partial^2 f}{\partial u^2} - c^2\dfrac{\partial^2 f}{\partial u.\partial v} + \\
- c^2\dfrac{\partial^2 f}{\partial u.\partial v} + c^2\dfrac{\partial^2 f}{\partial v^2} = c^2.\left[\dfrac{\partial^2 f}{\partial u^2} + \dfrac{\partial^2 f}{\partial v^2} - 2.\dfrac{\partial^2 f}{\partial u.\partial v}\right]
\end{array}\right. \qquad \textbf{22.16}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}=\frac{1}{c^2}.\frac{\partial^2 f}{\partial t^2}\Rightarrow\frac{\partial^2 f}{\partial u^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial v^2}+2.\frac{\partial^2 f}{\partial u.\partial v}=\frac{\partial^2 f}{\partial u^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial v^2}-2.\frac{\partial^2 f}{\partial u.\partial v}\Rightarrow$$
$$\Rightarrow\frac{\partial^2 f}{\partial u.\partial v}=0\Rightarrow f=a.f_a(u)+b.f_b(v)=f_a(x-c.t)+f_b(x+c.t) \qquad \mathbf{22.17}$$

Luego la onda plana es una combinación de dos ondas, una progresiva divergente y otra progresiva convergente.

22.4. ONDAS PLANAS ARMÓNICAS

Una onda plana como se ha obtenido tiene un perfil de onda que se propaga sin deformarse y el valor máximo o amplitud de la función de onda es constante. Aun que las formas f(x±c.t) son arbitrarias, teniendo en cuenta el teorema de Fourier y al aplicar el principio de superposición, basta reducir el estudio de cualquier función periódica al de una función armónica, por ello es interesante estudiar las ondas armónicas cuya función de onda está dada por:

$$f(x\pm c.t)=a.\cos\left[\frac{2.\pi}{\lambda}.(x\pm c.t)\right]=a.\cos\left[\frac{2.\pi}{\lambda}.\left(x\pm\frac{\lambda}{T}.t\right)\right]=$$
$$=a.\cos\left[\left(\frac{2.\pi}{\lambda}.x\pm\frac{2.\pi}{T}.t\right)\right]=a.\cos(k.x\pm\omega.t)=a.\cos\left[\omega.\left(t\pm\frac{x}{c}\right)\right] \qquad \mathbf{22.18}$$

Donde a es el máximo valor de la función de onda o amplitud, T es el periodo de la onda armónica, λ es la longitud de onda, ω es la pulsación y k es el número de ondas, todas estas magnitudes de la onda son constantes. Además a la inversa del periodo n=1/T se le denomina frecuencia.

La diferencia de fase $\Delta\phi$ entre dos puntos de abcisas x_1 y x_2 en el mismo instante t para la solución divergente es:

$$\Delta\phi=(\omega.t-k.x_2)-(\omega.t-k.x_1)=k.(x_2-x_1)=\frac{2.\pi}{\lambda}.(x_2-x_1) \qquad \mathbf{22.19}$$

Luego para que dos puntos tengan en el mismo instante la misma fase y por tanto estén en el mismo estado de vibración es:

$$\Delta\phi = 2.\pi.p \Rightarrow p = \frac{x_2 - x_1}{\lambda} \Rightarrow x_2 - x_1 = p.\lambda \qquad p = 0, 1, 2, \cdots \qquad \textbf{22.20}$$

(p=0 para puntos del mismo plano de onda)

En 22.18 se ha supuesto que en el origen la perturbación es máxima en el instante inicial, en caso de no ser así habrá una fase inicial, de forma que en x=0 la función de le perturbación es:

$$f = a.\cos(2.\pi.n.t + \phi_o) \qquad \textbf{22.21}$$

En consecuencia en cualquier punto de coordenada x se tiene:

$$f = a.\cos(2.\pi.n.t - kx + \phi_o) = a.\cos(\omega.t - kx + \phi_o) \qquad \textbf{22.22}$$

La función de onda es la parte real de la ecuación compleja $a.e^{j.(\omega.t-kx+\phi_o)}$

$$f = \Re eal\left\{a.e^{j.(\omega.t-kx+\phi_o)}\right\} \qquad \textbf{22.23}$$

Como fácilmente puede observarse tanto la ecuación compleja como la parte imaginaria de la misma son solución de la ecuación de ondas, dado el carácter lineal de esta.

Para una armónica plana que se propaga, según una dirección cualquiera cuyos cosenos directores son cosα, cosβ y cosγ, la ecuación de onda es:

$$f = a.\cos[\omega.t - k.(\cos\alpha.x + \cos\beta.y + \cos\gamma.z) + \phi_o] \qquad \textbf{22.24}$$

Se denomina vector de onda a:

$$\vec{\sigma} = k.\left(\cos\alpha.\vec{i} + \cos\beta.\vec{j} + \cos\gamma.\vec{k}\right) \qquad \textbf{22.25}$$

Sea cualquier punto de la región dado por su vector posición, la función de onda armónica será:

$$f = a.\cos[\omega.t - \vec{\sigma}.\vec{r} + \phi_o] \qquad \textbf{22.26}$$

Para los puntos de la región cuyo vector posición es paralelo a la dirección de propagación se cumple:

$$f = a.\cos[\omega.t - \sigma.r + \phi_o] = \Re eal\{a.e^{j.(\omega.t-\sigma.r+\phi_0)}\} \qquad \textbf{22.27}$$

22.5. ONDAS ESFÉRICAS

En un medio homogéneo e isótropo, dado O un punto donde se produce una perturbación, se fija el sistema de referencia con origen en O, la ecuación del frente de ondas es:

$$x^2 + y^2 + z^2 - c^2.t^2 = 0 \qquad \textbf{22.28}$$

Por lo tanto, la función de onda dependerá exclusivamente del tiempo y de la distancia al foco que se expresa por r. [f(r,t)], perturbación que debe satisfacer la ecuación de D'Alembert:

$$c^2.\Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} \qquad \textbf{22.29}$$

$$\left\{\begin{array}{c}
x^2 + y^2 + z^2 = r^2 \Rightarrow \dfrac{\partial r}{\partial x} = \dfrac{x}{r}; \dfrac{\partial r}{\partial y} = \dfrac{y}{r}; \dfrac{\partial r}{\partial y} = \dfrac{y}{r} \\
\dfrac{\partial f}{\partial x} = \dfrac{\partial f}{\partial r}.\dfrac{\partial r}{\partial x} = \dfrac{x}{r}.\dfrac{\partial f}{\partial r} \\
\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \dfrac{\partial\left(\dfrac{x}{r}.\dfrac{\partial f}{\partial r}\right)}{\partial x} = \dfrac{1}{r}.\dfrac{\partial f}{\partial r} + x.\dfrac{\partial\left(\dfrac{1}{r}.\dfrac{\partial f}{\partial r}\right)}{\partial x} = \dfrac{1}{r}.\dfrac{\partial f}{\partial r} + \dfrac{x^2}{r}.\dfrac{\partial\left(\dfrac{1}{r}.\dfrac{\partial f}{\partial r}\right)}{\partial r} \\
\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \dfrac{1}{r}.\dfrac{\partial f}{\partial r} + \dfrac{x^2}{r}.\left[\dfrac{1}{r}.\dfrac{\partial^2 f}{\partial r^2} - \dfrac{1}{r^2}.\dfrac{\partial f}{\partial r}\right] = \dfrac{1}{r}.\left[\left(1 - \dfrac{x^2}{r^2}\right).\dfrac{\partial f}{\partial r} + \dfrac{x^2}{r}.\dfrac{\partial^2 f}{\partial r^2}\right] \\
\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \dfrac{1}{r}.\left[\left(1 - \dfrac{y^2}{r^2}\right).\dfrac{\partial f}{\partial r} + \dfrac{y^2}{r}.\dfrac{\partial^2 f}{\partial r^2}\right] \\
\dfrac{\partial^2 f}{\partial z^2} = \dfrac{1}{r}.\left[\left(1 - \dfrac{z^2}{r^2}\right).\dfrac{\partial f}{\partial r} + \dfrac{z^2}{r}.\dfrac{\partial^2 f}{\partial r^2}\right] \\
\Delta f = \dfrac{1}{r}.\left[\left(3 - \dfrac{x^2+y^2+z^2}{r^2}\right).\dfrac{\partial f}{\partial r} + \dfrac{x^2+y^2+z^2}{r}.\dfrac{\partial^2 f}{\partial r^2}\right] = \dfrac{2}{r}.\dfrac{\partial f}{\partial r} + \dfrac{\partial^2 f}{\partial r^2}
\end{array}\right. \qquad \textbf{22.30}$$

$$c^2.\left[\frac{2}{r}.\frac{\partial f}{\partial r}+\frac{\partial^2 f}{\partial r^2}\right]=\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} \qquad \textbf{22.31}$$

Para estudiar la ecuación se introduce una nueva función g(r,t) definida por:

$$g(r,t)=r.f(r,t) \qquad \textbf{22.32}$$

Con ello se tiene:

$$\frac{\partial g}{\partial r}=f+r.\frac{\partial f}{\partial r}; \quad \frac{\partial^2 g}{\partial r^2}=2.\frac{\partial f}{\partial r}+r.\frac{\partial^2 f}{\partial r^2}\Rightarrow \Delta f=\frac{1}{r}.\frac{\partial^2 g}{\partial r^2} \qquad \textbf{22.33}$$

$$\frac{\partial g}{\partial t}=r.\frac{\partial f}{\partial t}; \quad \frac{\partial^2 g}{\partial t^2}=r.\frac{\partial^2 f}{\partial t^2}\Rightarrow \frac{\partial^2 f}{\partial t^2}=\frac{1}{r}.\frac{\partial^2 g}{\partial t^2} \qquad \textbf{22.34}$$

$$c^2.\Delta f=\frac{\partial^2 f}{\partial t^2}\Rightarrow \frac{c^2}{r}.\frac{\partial^2 g}{\partial r^2}=\frac{1}{r}.\frac{\partial^2 g}{\partial t^2}\Rightarrow \frac{\partial^2 g}{\partial r^2}=\frac{1}{c^2}.\frac{\partial^2 g}{\partial t^2} \qquad \textbf{22.35}$$

Ecuación similar a la 22.15, con ello:

$$g=a_1.g_1(r-c.t)+a_2.g_2(r+c.t)\Rightarrow f=a_1.\frac{g_1(r-c.t)}{r}+a_2.\frac{g_2(r+c.t)}{r} \qquad \textbf{22.36}$$

La solución $f_1=g_1/r$ es una onda progresiva divergente, mientras que la solución $f_2=g_2/r$ es una onda progresiva convergente.

El hecho de que $g_1(r-c.t)$ se propaga sin deformación implica que el perfil de la función $f_1(r-c.t)=[g_1(r-c.t)]/r$ varía de forma inversa a la distancia al foco.

Sea la onda esférica divergente, la variación de la perturbación por unidad de longitud de propagación es:

$$\frac{\partial f}{\partial r}=\frac{\partial \frac{g(r-c.t)}{r}}{\partial r}=\frac{1}{r}.\frac{\partial g}{\partial r}-\frac{g(r-c.t)}{r^2} \qquad \textbf{22.37}$$

Para valores de r pequeños el segundo término es muy importante, mientras que cuando r es grande, este segundo término es despreciable y la onda se puede considerar plana.

Esta función onda divergente g se propaga sin deformarse hacia las r crecientes con la velocidad de propagación c. Tal como ocurre con las ondas planas que la perturbación está comprendida entre dos planos paralelos (frente y cola de onda) que avanzan con velocidad c, la perturbación de g estará comprendida entre dos superficies esféricas concéntricas, cuyos radios crecen con igual velocidad c con que avanzan los planos de la plana, siendo en consecuencia constante el espesor de entre ambas esferas, dicho espesor será la longitud de onda λ.

Al igual que se ha tratado en las planas, si la onda esférica es periódica se puede descomponer en ondas armónicas.

$$g = A.\cos(2.\pi.n.t - k.r + \phi_o) = A.\cos(\omega.t - k.r + \phi_o) \Rightarrow f = \frac{A}{r}.\cos(\omega.t - kr + \phi_o) \quad \mathbf{22.38}$$

22.6. EFECTO DOPPLER-FIZEAU

Christian Andreas Doppler, propuso en 1842 el efecto conocido como "efecto Doppler" que consiste en el aparente cambio de frecuencia de una onda producido por el movimiento relativo de la fuente respecto a su observador.

El holandés Christoph Hendrik Diederik Buys Ballot estudió esta propuesta en 1845 para el caso de ondas sonoras y confirmó que el tono de un sonido emitido por una fuente que se aproxima al observador es más agudo que si la fuente se aleja. Hippolyte Fizeau descubrió independientemente el mismo fenómeno en el caso de ondas electromagnéticas en 1848. Por ello este efecto se conoce también como "efecto Doppler-Fizeau".

Al igual que se confirmó para el caso de ondas sonoras, en el caso del espectro visible de la radiación electromagnética, si el objeto se aleja, su luz se desplaza a longitudes de onda más largas, desplazándose hacia el rojo. Si el objeto se acerca, su luz presenta una longitud de onda más corta, desplazándose hacia el azul. Esta desviación hacia el rojo o el azul es muy leve incluso para velocidades elevadas, como las velocidades relativas entre estrellas o entre galaxias, y el ojo humano no puede captarlo, solamente medirlo indirectamente utilizando instrumentos de precisión como espectrómetros.

Sea un medio en reposo y en primer lugar se considera un observador acercándose a la fuente con velocidad v_O, es decir v_O es la velocidad del observador punto O en dirección y sentido hacia la fuente ondulatoria. La fuente emite una onda de velocidad c y frecuencia n pero la velocidad aparente con que se propaga la onda no es c, sino la suma de la real más la velocidad del observador $c'=c+v_O$ pero como la longitud de onda no varía, la frecuencia que percibirá el observador es:

$$n' = \frac{c'}{\lambda} = \frac{c + v_O}{\lambda} = \frac{c}{\lambda}.\left(1 + \frac{v_O}{c}\right) = n.\left(1 + \frac{v_O}{c}\right) \qquad \textbf{22.39}$$

Observador escuchará un sonido de mayor frecuencia.

Pero si el observador se aleja de la fuente, la velocidad de propagación relativa al observador será: $c'=c-v_O$, con lo dicho antes se tiene:

$$n' = \frac{c'}{\lambda} = \frac{c - v_O}{\lambda} = \frac{c}{\lambda}.\left(1 - \frac{v_O}{c}\right) = n.\left(1 - \frac{v_O}{c}\right) \qquad \textbf{22.40}$$

Luego el observador escuchará un sonido de frecuencia menor.

Si se representa por $\vec{u}$ al versor asociado a la velocidad de propagación de la onda, es decir, el versor de la recta que une el emisor con la posición del observador cuando recibe el frente de onda. Cuando el observador se desplaza con movimiento de traslación, se tiene que la velocidad de propagación relativa es:

$$\overrightarrow{c'} = \overrightarrow{v_r} = \overrightarrow{v_A} - \overrightarrow{v_a} = \vec{c} - \overrightarrow{v_O} = c.\vec{u} - \overrightarrow{v_O} \qquad \textbf{22.41}$$

Si se supone que velocidad de propagación es mucho mayor que la componente de la velocidad del observador perpendicular a la propagación, tanto la velocidad de propagación real como la aparente serán casi paralelas, luego la frecuencia aparente es:

$$n' = \frac{c'}{\lambda} \cong \frac{\overrightarrow{c'}.\vec{u}}{\lambda} = \frac{\left(c.\vec{u} - \overrightarrow{v_O}\right).\vec{u}}{\lambda} = \frac{c - \overrightarrow{v_O}.\vec{u}}{\frac{c}{n}} = n.\frac{\left(\vec{c} - \overrightarrow{v_O}\right).\vec{u}}{\vec{c}.\vec{u}} \qquad \textbf{22.42}$$

Se supone ahora que el observador permanece quieto pero se mueve la fuente o emisor, primero se analiza que el emisor se aproxima al observador. En este caso la frecuencia aparente percibida por el observador será mayor que la frecuencia real emitida por la fuente, lo que genera que el observador perciba un sonido más agudo.

El observador percibirá unas longitudes de onda menores que las reales, para entender esto se supone que en el instante inicial se emite un frente de onda a una distancia D del observador, transcurrido un tiempo igual al periodo el frente habrá recorrido una longitud de onda encontrándose a una distancia D-λ. Se emite otro frente de onda pero el emisor se ha aproximado una cierta distancia d al observador, emitiendo otro frente desde D-d, pasado otro periodo la posición del primer frente de onda es D-2.λ, mientras que el segundo frente de onda será D-d-λ, luego la distancia entre los dos frentes de onda es: D-d-λ-(D-2.λ)=λ-d, que será la longitud entre dos frentes de ondas consecutivos y por tanto la longitud de onda aparente, el emisor ha recorrido 2.d luego la distancia entre emisor y observador es D-2.d, y se emite otro frente de onda, con ello al cabo de otro periodo las posiciones de los tres frentes de ondas son respectivamente: D-3.λ, D-d-2.λ, y D-2.d-λ cuya distancia entre frentes sigue siendo λ-d, luego esa es la longitud de onda aparente.

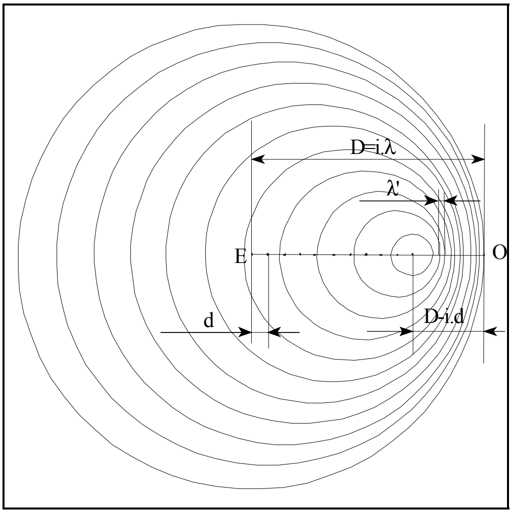

Figura 22.3

Como el observador no se mueve la velocidad de propagación absoluta coincide con la relativa (no hay velocidad de arrastre), luego:

$$n' = \frac{c}{\lambda'} = \frac{c}{\lambda - d} = \frac{c}{\lambda - v_E.T} = \frac{c}{c.T - v_E.T} = n.\left(\frac{c}{c - v_E}\right) \qquad \textbf{22.43}$$

Si por el contrario el emisor se aleja entonces la longitud de onda aparente aumenta basta aplicar un razonamiento similar al anterior, con ello:

$$n' = \frac{c}{\lambda'} = \frac{c}{\lambda + d} = \frac{c}{\lambda + v_E.T} = \frac{c}{c.T + v_E.T} = n.\left(\frac{c}{c + v_E}\right) \qquad \textbf{22.44}$$

En el caso general suponiendo que la componente de la velocidad del emisor perpendicular a la propagación es muy pequeña, entonces se tiene:

$$n' = n.\frac{\vec{c}.\vec{u}}{\left(\vec{c} - \overrightarrow{v_E}\right).\vec{u}} \qquad \textbf{22.45}$$

Si simultáneamente se mueve el observador y el emisor, y se supone que las componentes perpendiculares a la propagación de ambas velocidades son lo suficientemente pequeñas como para considerar que la velocidad aparente de propagación es paralela a la velocidad de propagación, se tiene:

$$n' = \frac{c'}{\lambda'} = \frac{\left(\vec{c} - \overrightarrow{v_O}\right).\vec{u}}{\left(\vec{c}.T - \overrightarrow{v_E}.T\right).\vec{u}} = n.\frac{\left(\vec{c} - \overrightarrow{v_O}\right).\vec{u}}{\left(\vec{c} - \overrightarrow{v_E}\right).\vec{u}} \qquad \mathbf{22.46}$$

Cuando se trata de ondas electromagnéticas, como la velocidad de propagación es la de la luz, hay que tener en cuenta efectos, como $v_E << c$ 22.45, la podemos expresar:

$$n' = n.\frac{\vec{c}.\vec{u}}{\left(\vec{c} - \overrightarrow{v_E}\right).\vec{u}} = n.\frac{c}{c - +v_E.\cos\phi} = n.\frac{c}{c - +v'_E} =$$
$$= \frac{n}{1 - \frac{v'_E}{c}} = n.\left[1 + \frac{v'_E}{c} + \left(\frac{v'_E}{c}\right)^2 + \ldots\right] \cong n.\left[1 + \frac{v'_E}{c}\right] = n.\frac{c + v_E.\cos\phi}{c} \qquad \mathbf{22.47}$$

Es decir, que si v_E se acerca al observador el cosϕ es positivo, mientras que en 22.42 el coseno es positivo cuando se aleja. Si llamamos por v a la velocidad relativa del emisor respecto al observador se tiene:

$$\vec{v} = \overrightarrow{v_E} - \overrightarrow{v_O} \qquad \mathbf{22.48}$$

Con esto se puede expresar 22.46 como:

$$n' = n.\left(1 + \frac{v}{c}\right) \qquad \mathbf{22.49}$$

Pero tal como se ha indicado se ha supuesto que c es la velocidad de la luz por tanto habrá que tener en cuenta los efectos relativistas, con ello queda:

$$n' = n.\gamma.\left(1+\frac{v}{c}\right) =$$

$$= n.\frac{1+\frac{v}{c}}{\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}} = n.\frac{\sqrt{1+\frac{v}{c}}.\sqrt{1+\frac{v}{c}}}{\sqrt{1+\frac{v}{c}}.\sqrt{1-\frac{v}{c}}} = n.\frac{\sqrt{1+\frac{v}{c}}}{\sqrt{1-\frac{v}{c}}} = n.\frac{\sqrt{1+\frac{v}{c}}.\sqrt{1-\frac{v}{c}}}{\sqrt{1-\frac{v}{c}}.\sqrt{1-\frac{v}{c}}} = n.\frac{\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}}{1+\frac{v}{c}} \quad \textbf{22.50}$$

Y si v y c no son paralelas se tiene:

$$n' = n.\frac{\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}}{1+\frac{v.\cos\phi}{c}} \quad \textbf{22.51}$$

Que es la ecuación relativista del efecto Doppler-Fizeau donde ϕ es el ángulo que forma la velocidad relativa con la velocidad de propagación de las ondas electromagnéticas.

22.7. SUPERPOSICIÓN E INTERFERENCIAS DE ONDAS ARMÓNICAS

Dadas dos ondas planas que se propagan en un mismo medio e igual dirección, pueden tener igual o distinta frecuencia. Se considera en primer lugar cuando las frecuencias son distintas. En este caso se produce el fenómeno de las pulsaciones ya que si desde un punto determinado se observan las dos ondas, en algunos instante se encuentra en fase mientras que el resto desfasadas.

Las pulsaciones se pueden definir como la variación periódica en intensidad en un punto dado, debido a la superposición de dos ondas que tienen frecuencias ligeramente diferentes. El número de pulsaciones que se dan por segundo, o frecuencia de pulsación, es igual a la diferencia de frecuencia entre las dos ondas que se superponen.

Sean dos ondas escalares de igual amplitud que viajan por un medio en la misma dirección y sentido, pero de frecuencias angulares levemente distintas, ω_1 y ω_2. La perturbación que cada onda produciría en un punto se puede representar así:

$$\begin{cases} f_1 = a.\cos(\omega_1.t - k_1.x + \phi_1) \\ \\ f_2 = a.\cos(\omega_2.t - k_2.x + \phi_2) \end{cases} \qquad \textbf{22.52}$$

Al aplicar el principio de superposición

$$\begin{cases} f = a.\cos(\omega_1.t - k_1.x + \phi_1) + a.\cos(\omega_2.t - k_2.x + \phi_2) = \\ \\ = 2.a.\cos\left(\dfrac{\omega_1.t - k_1.x + \phi_1 + \omega_2.t - k_2.x + \phi_2}{2}\right).\cos\left(\dfrac{\omega_1.t - k_1.x + \phi_1 - \omega_2.t + k_2.x - \phi_2}{2}\right) \\ f = 2.a.\cos\left(\dfrac{\omega_1 + \omega_2}{2}t - \dfrac{k_1 + k_2}{2}.x + \dfrac{\phi_1 + \phi_2}{2}\right).\cos\left(\dfrac{\omega_1 - \omega_2}{2}t - \dfrac{k_1 - k_2}{2}.x + \dfrac{\phi_1 - \phi_2}{2}\right) \end{cases} \qquad \textbf{22.53}$$

$$f = 2.a.\cos(\omega.t - k.x + \phi).\cos\left(\frac{\Delta\omega}{2}.t - \frac{\Delta k}{2}.x + \frac{\Delta\phi}{2}\right) \qquad \textbf{22.54}$$

Donde:

$$\omega = \frac{\omega_1 + \omega_2}{2}; \quad k = \frac{k_1 + k_2}{2}; \quad \phi = \frac{\phi_1 + \phi_2}{2}; \quad \Delta\omega = \omega_1 - \omega_2; \quad \Delta k = k_1 - k_2; \quad \Delta\phi = \phi_1 - \phi_2$$

El fenómenos de las pulsaciones se produce si $\omega >> \Delta\omega$ y $k >> \Delta k$, entonces se puede describir reescribiendo 22.54 como:

$$f = A.\cos(\omega.t - k.x + \phi) \qquad \textbf{22.55}$$

Con

$$A = 2.a.\cos\left(\frac{\Delta\omega}{2}.t - \frac{\Delta k}{2}.x + \frac{\Delta\phi}{2}\right) \qquad \textbf{22.56}$$

La velocidad de fase de la onda modulada es:

$$c_f = \frac{\omega}{k} = \frac{\omega_1 + \omega_2}{k_1 + k_2} \qquad \textbf{22.57}$$

Mientras que la velocidad de propagación de la onda moduladora denominada veloidad de grupo es:

$$c_g = \frac{\Delta\omega}{\Delta k} = \frac{\omega_1 - \omega_2}{k_1 - k_2} \qquad \textbf{22.58}$$

Si como se ha indicado la diferencia de longitudes de onda de ambas es muy pequeña, se puede decir que los incrementos son diferenciales con ello se tiene:

$$c_g = \frac{d\omega}{dk} = \frac{d\left(c_f . k\right)}{dk} = c_f + k.\frac{dc_f}{dk} = c_f + \frac{2.\pi}{\lambda}.\frac{dc_f}{d\left(\frac{2.\pi}{\lambda}\right)} = c_f - \lambda.\frac{dc_f}{d\lambda} \qquad \mathbf{22.59}$$

Con lo que si el medio no presenta dispersión la velocidad de fase y la velocidad de grupo coinciden, pero si el medio presenta dispersión el grupo avanza con velocidad distinta a la de fase de forma que si la dispersión es normal es decir la velocidad de propagación crece con la longitud de onda las ondas individuales avanzan más rápidamente que el grupo, pareciendo que dentro del grupo corren hacia el frente del mismo, pero si la dispersión es anómala la apariencia es opuesta a la anterior de forma que las ondas individuales van más lentas que el grupo, este caso se puede observar en las ondas capilares de los líquidos. Es decir, cuando el medio presenta dispersión normal, las primeras ondas van disminuyendo de amplitud hasta que desaparecen en el frente del grupo mientras que en la parte posterior del grupo van surgiendo nuevas ondas que primero se amplifican conforme van avanzando en el interior del grupo hasta alcanzar el máximo y luego van disminuyendo su amplitud hasta su desaparición, Cuando la dispersión de anómala, tal como se ha indicado las ondas van aumentando por delante y son atrapadas por el grupo hasta que desaparecen.

Se consideran ahora dos ondas escalares armónicas emitidas desde dos puntos distintos, ambas de igual frecuencia, y en un principio distinta amplitud. Para simplificar el razonamiento se consideran ondas planas, por tanto con amplitud independiente de la posición. Para cualquier punto P, la perturbación será como consecuencia de la superposición de ambas ondas. Sea r_1 y r_2 la distancia del punto P a los puntos emisores de ambas ondas. Así la onda en P será:

$$\left\{\begin{array}{l}
f = a_1.\cos(\omega.t - k.r_1 + \phi_1) + a_2.\cos(\omega.t - kr_2 + \phi_2) = \\
= a_1.\cos(\omega.t).\cos(\phi_1 - k.r_1) + a_2.\cos(\omega.t).\cos(\phi_2 - kr_2) + \\
+ a_1.sen(\omega.t).sen(\phi_1 - k.r_1) + a_2.sen(\omega.t).sen(\phi_2 - kr_2) = \\
= \cos(\omega.t).[a_1.\cos(\phi_1 - k.r_1) + a_2.\cos(\phi_2 - kr_2)] + \\
+ sen(\omega.t).[a_1.sen(\phi_1 - k.r_1) + a_2 sen(\phi_2 - kr_2)] \\
= \cos(\omega.t).A(P).\cos[\phi(P)] - sen(\omega.t).A(P).sen[\phi(P)] = A(P).\cos[\omega.t + \phi(P)]
\end{array}\right. \qquad \mathbf{22.60}$$

Donde:

$$\begin{cases} A(P).\cos[\phi(P)] = a_1.\cos(\phi_1 - k.r_1) + a_2.\cos(\phi_2 - kr_2) \\ A(P).sen[\phi(P)] = -a_1.sen(\phi_1 - k.r_1) - a_2 sen(\phi_2 - kr_2) \\ [A(P)]^2 = [A(P)]^2.\cos^2[\phi(P)] + [A(P)]^2.sen^2[\phi(P)] = \\ = [a_1.\cos(\phi_1 - k.r_1) + a_2.\cos(\phi_2 - kr_2)]^2 + [a_1.sen(\phi_1 - k.r_1) + a_2 sen(\phi_2 - kr_2)]^2 \end{cases} \quad \mathbf{22.61}$$

$$\begin{cases} [A(P)]^2 = a_1^2.\cos^2(\phi_1 - k.r_1) + a_2^2.\cos^2(\phi_2 - kr_2) + \\ + 2.a_1.a_2.\cos(\phi_1 - k.r_1).\cos(\phi_2 - k.r_2) + a_1^2.sen^2(\phi_1 - k.r_1) + \\ + a_2^2.sen^2(\phi_2 - kr_2) + 2.a_1.a_2.sen(\phi_1 - k.r_1).sen(\phi_2 - k.r_2) = \\ = a_1^2 + a_2^2 + 2.a_1.a_2.[\cos(\phi_1 - k.r_1).\cos(\phi_2 - k.r_2) + sen(\phi_1 - k.r_1).sen(\phi_2 - k.r_2)] = \\ [A(P)]^2 = a_1^2 + a_2^2 + 2.a_1.a_2.\cos.(\phi_1 - k.r_1 - \phi_2 + k.r_2) \end{cases} \quad \mathbf{22.62}$$

$$[A(P)]^2 = a_1^2 + a_2^2 + 2.a_1.a_2.\cos.[k(r_1 - r_2) - (\phi_1 - \phi_2)] \quad \mathbf{22.63}$$

$$\tan[\phi(P)] = \frac{sen[\phi(P)]}{\cos[\phi(P)]} = \frac{A(P).sen[\phi(P)]}{A(P).\cos[\phi(P)]} = \frac{-a_1.sen(\phi_1 - k.r_1) - a_2 sen(\phi_2 - kr_2)}{a_1.\cos(\phi_1 - k.r_1) + a_2.\cos(\phi_2 - kr_2)} \quad \mathbf{22.64}$$

$$\tan[\phi(P)] = \frac{a_1.sen(k.r_1 - \phi_1) - a_2 sen(kr_2 - \phi_2)}{a_1.\cos(k.r_1 - \phi_1) - a_2\cos(kr_2 - \phi_2)} \quad \mathbf{22.65}$$

Si tanto en este caso como el anterior la amplitud de cada onda dependiese de la distancia al emisor, el resultado sería similar donde a_1 y a_2 sería el valor de la amplitud de cada onda en P, por otra parte si las ondas fuesen vectoriales la suma sería vectorial y se obtienen resultados similares a los descritos.

Esta superposición de ondas que se termina de obtener es lo que se conoce como interferencia (evidentemente se puede producir la interferencia entre más de dos ondas, el resultado sería similar). Como se puede observar por 22.63 en función del punto la amplitud puede presentar un máximo o un mínimo, donde se produzca un máximo la amplitud será la suma de ambas amplitudes, mientras que el mínimo será la diferencia, por tanto si las amplitudes son iguales en un punto la amplitud de la onda resultante de la interferencia estará comprendida entre 0 y 2.a. Los puntos donde se presenta un máximo de amplitud se dice que ambas ondas se **interfieren constructivamente**, mientras donde presentan un mínimo las ondas **interfieren destructivamente**. Seguidamente se va a determinar los puntos de interferencia constructiva.

De 22.63:

$$[A(P)]^2 = a_1^2 + a_2^2 + 2.a_1.a_2.\cos.[k(r_1 - r_2) - (\phi_1 - \phi_2)] = (a_1 + a_2)^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \cos.[k(r_1 - r_2) - (\phi_1 - \phi_2)] = 1 \Rightarrow \qquad \textbf{22.66}$$

$$\Rightarrow k(r_1 - r_2) - (\phi_1 - \phi_2) = 2.p..\pi \quad p = 0, \pm 1, \pm 2, ...$$

En consecuencia:

$$r_1 - r_2 = \frac{2.p.\pi}{k} + \frac{\phi_1 - \phi_2}{k} = \frac{2.p.\pi}{\frac{2.\pi}{\lambda}} + \frac{\phi_1 - \phi_2}{\frac{2.\pi}{\lambda}} = p.\lambda + \lambda.\frac{\phi_1 - \phi_2}{2.\pi} = p.\lambda + r_0 \qquad \textbf{22.66}$$

Que en el caso de emitirse ambas fuentes en fase se tiene

$$r_1 - r_2 = p.\lambda = 2.p.\frac{\lambda}{2} \qquad p = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, ... \qquad \textbf{22.67}$$

Lo que significa que en los puntos que la diferencia de caminos de las dos ondas originadas en emisores sincrónicos sea un múltiplo par de la semilongitud de onda, la amplitud resultante es máxima e igual a la suma de ambas amplitudes emitidas por separado.

Análogamente los puntos de amplitud mínima se pueden obtener también a partir de 22.62:

$$[A(P)]^2 = a_1^2 + a_2^2 + 2.a_1.a_2.\cos.[k(r_1 - r_2) - (\phi_1 - \phi_2)] = (a_1 - a_2)^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \cos.[k(r_1 - r_2) - (\phi_1 - \phi_2)] = -1 \Rightarrow \qquad \textbf{22.68}$$

$$\Rightarrow k(r_1 - r_2) - (\phi_1 - \phi_2) = (2.p + 1)..\pi \quad p = 0, \pm 1, \pm 2, ...$$

Luego:

$$r_1 - r_2 = \frac{(2.p+1).\pi}{k} + \frac{\phi_1 - \phi_2}{k} = \frac{(2.p+1).\pi}{\frac{2.\pi}{\lambda}} + \frac{\phi_1 - \phi_2}{\frac{2.\pi}{\lambda}} = \qquad \textbf{22.69}$$

$$= (2.p+1).\frac{\lambda}{2} + \lambda.\frac{\phi_1 - \phi_2}{2.\pi} = (2.p+1).\frac{\lambda}{2} + r_0$$

Que en el caso de emitirse ambas fuentes en fase se tiene

$$r_1 - r_2 = (2.p+1).\frac{\lambda}{2} \qquad p = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, ... \qquad \textbf{22.70}$$

Lo que significa que en los puntos que la diferencia de caminos de las dos ondas originadas en emisores sincrónicos sea un múltiplo impar de la semilongitud de onda, la amplitud resultante es mínima e igual a la diferencia de ambas amplitudes emitidas por separado.

Sea dos ondas que emiten en dos focos O_1 y O_2 separados una distancia d, el lugar geométrico de los puntos donde la amplitud es máxima será, de conformidad con 2.67. y fijando el origen de coordenadas en O_1 para el plano z=0

$$r_1 - r_2 = p.\lambda = b \Rightarrow \sqrt{x^2 + y^2} - \sqrt{x^2 + (y-d)^2} = b \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sqrt{x^2 + y^2} = b + \sqrt{x^2 + (y-d)^2}$$

$$\Rightarrow x^2 + y^2 = b^2 + x^2 + y^2 - 2y.d + d^2 + 2.b.\sqrt{x^2 + (y-d)^2} \Rightarrow$$

$$2.y.d - b^2 - d^2 = 2.b.\sqrt{x^2 + (y-d)^2} \Rightarrow \sqrt{x^2 + (y-d)^2} = \frac{d}{b}.y - \frac{b}{2} - \frac{d^2}{2.b} \Rightarrow \qquad \textbf{22.71}$$

$$x^2 + y^2 - 2.y.d + d^2 = \frac{d^2}{b^2}.y^2 + \frac{b^2}{4} + \frac{d^4}{4.b^2} - \frac{d^3}{b^2}y - d.y + \frac{d^2}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{b^2}{b^2 - d^2}.x^2 + y^2 - d.y = \frac{b^2 - d^2}{4} \Rightarrow \frac{b^2}{b^2 - d^2}.x^2 + \left(y - \frac{d}{2}\right)^2 = \frac{b^2}{4}$$

Para tres dimensiones basta sustituir en 22.71 la variable x^2 por (x^2+y^2)

De 22.71 se deduce que mientras el valor de p haga que |b| sea menor que la distancia entre los focos, el lugar geométrico de los puntos de amplitud máxima será una familia de hiperboloides homofocales de revolución cuyos focos son O_1 y O_2 pero para los valores de p que hace |b| > d las familias serán elipsoides de revolución con los mismos focos O_1 y O_2.

Para los puntos de amplitud mínima se obtienen, evidentemente, formas similares.

22.8. PRINCIPIO DE HUYGENS-FRESNEL

Como recordaremos más adelante en la óptica geométrica, Cristiann Huygens (1629-1695), publicaba en 1690 el "Traité de la Lumiere" en el que describe el principio que lleva su nombre, así al propagarse una onda originada en un un ponto O, todos los puntos del medio se van convirtiendo a su vez en origen de nueva perturbación al ser alcanzados por la onda, esta acción que ejerce cada puto sobre los inmediatos constituye la causa de la propagación de la misma.

Sea una superficie cerrada "S" que rodea al emisor O, la onda no puede llegar al exterior de S sino por la emisión secundaria de la totalidad de los puntos de S, que respecto del exterior actúan como centros emisores de ondas secundarias. Si S es una superficie de onda, todos los puntos estarán en igual fase.

Esta propiedad es la que Huygens enunció, lo que constituye su principio. Este principio afirma: "*Todo punto de una superficie de onda se puede considerar como origen de ondas secundarias que se propagan con la misma celeridad que la principal. La envolvente de estas ondas secundarias será la nueva superficie de onda"*. Este principio se aplica a cualquier superficie que rodee al punto emisor, y es un principio general.

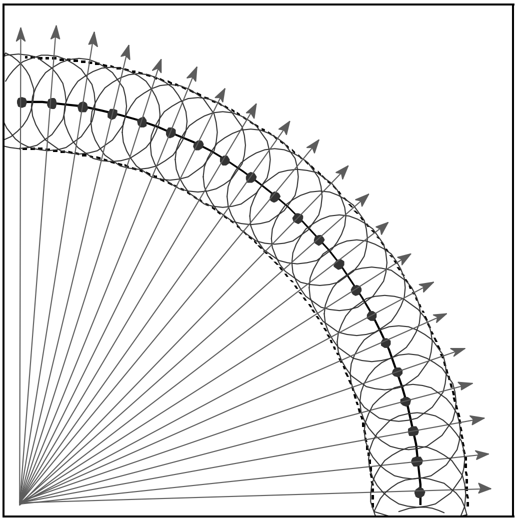

Figura 22.4

Se puede ver que este principio es totalmente compatible con la propagación de la onda libre. Sea una onda esférica cuya superficie a una cierta distancia del foco, en un medio homogéneo, isótropo y sin obstáculos, "S". Cualquier punto de esta superficie, se puede considerar el origen de una onda secundaria que se propaga con la misma velocidad "c" de propagación en todas direcciones al igual que la propagada desde el foco emisor. Transcurrido un tiempo t, el radio de estas ondas secundarias será r=c.t, y su envolvente será una superficie esférica centrada en el foco, que es precisamente la superficie de la onda que se propaga después de recorrer la distancia r desde su posición en S; luego se obtiene idéntico resultado tanto al considerar ondas secundarias como si se trata de propagación directa desde el foco emisor.

En la figura 22.4 se puede observar que aparte de la superficie envolvente exterior indicada en el párrafo anterior, hay otra envolvente interior que se propaga en sentido contrario a la onda principal pero no tiene existencia física, debido a que se anula por interferencia destructiva.

Este principio de Huygens fue modificado posteriormente por Fresnel (1788-1827) de ahí el nombre del principio, en 22.10, se ampliará la definición del principio de acuerdo con la modificación de Fresnel. Fresnel interpretó la inexistencia física de esta envolvente interior. Según Fresnel, de cada onda elemental, sólo queda activo el punto de tangencia con la envolvente exterior ya que en todos los otros puntos se interfieren destructivamente las ondas secundarias (como se ha indicado anteriormente con la envolvente interior); por ello, la energía que sale del nuevo emisor secundario pasa al punto de tangencia con la envolvente exterior que a su vez se convierte en nuevo foco secundario, y así sucesivamente.

Si las ondas secundarias no son esféricas, el rayo no es normal a la onda; pero en los medios isótropos, las ondas elementales son esféricas y los rayos coinciden con las normales a la onda.

Este principio de Huygens-Fresnel también se puede aplicar cuando los centros de perturbación no se excitan simultáneamente, en este caso las ondas secundarias se deben trazar con distintos radios puesto que el origen del tiempo es distinto y en un instante dado el intervalo de tiempo entre la emisión de la onda secundaria y el instante de estudio es diferente de una onda secundaria a otra y por tanto es distinto el producto c.t, esta diferencia de radios compensa la diferencia de fase de los centros secundarios.

22.9. REFLEXIÓN Y REFRACCIÓN DE ONDAS PLANAS

Una onda que incide sobre una superficie límite entre dos medios distintos, la onda presenta un cambio de trayectoria, al llegar a dicha superficie S de separación de los dos medios, en general se producen dos ondas: una que retrocede manteniéndose en el mismo medio, denominada **onda reflejada** y otra que avanza en el segundo medio denominada **onda transmitida** u **onda refractada**, esta seguirá avanzando en el mismo sentido pero posiblemente en otra dirección como se ha indicado, (sólo si la incidencia es normal no cambiará la dirección).

Para interpretar estos fenómenos basta con tener en cuenta el principio de Huygens-Fresnel, a partir de dicho principio se pueden establecer las leyes que rigen la reflexión y la refracción.

Para simplificar la deducción de las leyes correspondientes, se va a suponer ondas planas. Sea una onda plana que al llegar a la superficie S, cada punto de ésta es origen de una onda secundaria, para representar dicha incidencia se considera una pequeña fracción de la onda, el tramo AB, cuando el punto más próximo a la superficie S alcance dicha superficie (punto A’) el punto B ocupa la posición B’, en ese instante A’ se convierte en centro emisor de ondas que se propagan por el primer medio con la velocidad c_1 y por el segundo medio con velocidad c_2. En su avance, la onda incidente tarda un tiempo t en alcanzar el punto B la superficie S de separación (Punto B”), es decir $B'B''=c_i.t$, y durante ese tiempo la onda emitida desde A’ se habrá convertido en dos superficies semiesféricas (una en cada medio), en el medio 1 la semiesfera tendrá un radio $r_1=c_1.t$, igual a la distancia $|B'B''|$ y en el medio 2 el radio valdrá $r_2=c_2.t$. (se ha supuesto que ambos medios son isótropos, por ello son semiesferas). La envolvente de las ondas secundarias generadas en los distintos puntos de S comprendidos entre A’ y B” es en el instante t el plano que contiene al segmento $B''A_1$ en el primer medio (plano P_1), mientras en el segundo medio la envolvente será el plano que contiene al segmento $B''A_2$ (plano P_2).

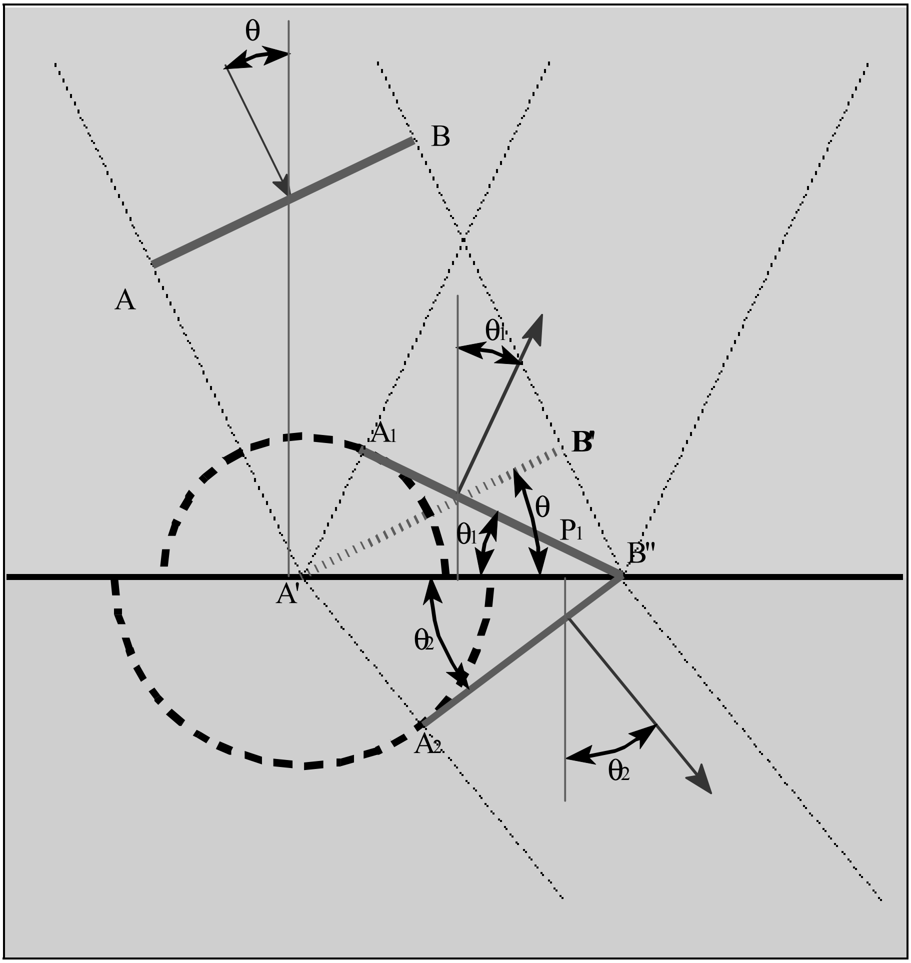

Figura 22.5

Denominando por θ al ángulo diedro que forma el frente de onda incidente con el plano tangente a S, que será igual al ángulo que forma la dirección de propagación de la onda incidente con la dirección normal a S. Se denota por θ_1 al ángulo diedro que forma el plano P_1 con S, que análogamente será igual al ángulo plano que forma la propagación de la onda reflejada con la normal a S. Por último se representa por θ_1 al ángulo diedro que forma el plano P_2 con S que lógicamente coincide con el ángulo plano que forma su propagación con la normal a S.

De la figura 22.5 se deduce que los triángulos rectángulos A'A_1B" y A'B'B" son simétricos entre sí y por tanto iguales puesto que tienen la hipotenusa común y los catetos A'A_1 y B'B" que son los caminos recorridos por la onda secundaria e incidente respectivamente, en el tiempo t a igual velocidad de propagación (es el mismo medio), luego $\theta=\theta_1$. Al ángulo (θ) que forma con la normal a la superficie S la dirección de la onda incidente se llama **ángulo de incidencia** y el ángulo (θ_1) que forma con dicha normal la dirección de la onda reflejada se denomina **ángulo de reflexión**, con lo que las leyes de la reflexión se enuncian de acuerdo a estas dos afirmaciones:

- El ángulo de incidencia y el de reflexión son iguales
- La dirección de propagación de la onda incidente, la de la reflejada y la dirección normal a la superficie de separación están en el mismo plano.

Seguidamente abordamos la onda transmitida. En el segundo medio el frente de onda refractada forma en el instante t un cateto del triángulo rectángulo A'A_2B", teniendo en cuenta dicho triángulo y el triángulo A'B'B", se deduce que:

$$\left|A'A_2\right| = \left|A'B''\right| sen\,\theta_2$$

$$\left|B'B''\right| = \left|A'B''\right| sen\,\theta \qquad \mathbf{22.72}$$

Dividiendo miembro a miembro estas dos igualdades y teniendo en cuenta las velocidades de propagación de ambos medios, se obtiene:

$$\frac{\left|A'A_2\right|}{\left|B'B''\right|} = \frac{\left|A'B''\right|.sen\,\theta_2}{\left|A'B''\right|.sen\,\theta} \Rightarrow \frac{c_2.t}{c_1.t} = \frac{sen\,\theta_2}{sen\,\theta} \Rightarrow \frac{sen\,\theta}{sen\,\theta_2} = \frac{c_1}{c_2} = n_{12} \qquad \mathbf{22.73}$$

Donde n_{12} se denomina **índice de refracción** del segundo miembro respecto al primero y se obtiene como el cociente entre las velocidades de propagación de la onda en ambos medios.

Las leyes de la difracción se pueden enunciar con es tas dos afirmaciones:

- El seno del ángulo de la onda transmitida es igual al seno del ángulo de la onda incidente multiplicado por el índice de refracción entre ambos medios
- La dirección de propagación de la onda incidente, la dirección de propagación de la onda refractada y la normal a la superficie de separación están en un mismo plano.

Las leyes de la reflexión y la refracción fueron enunciadas por Snell, por ello se conocen como leyes de Snell*.

Si $n_{12}>1$, es decir si $c_2<c_1$, la dirección de la onda reflejada se aproxima a la normal, y siempre existe una onda transmitida ya que se garantiza que $\text{sen}\theta_2<1$. Pero si por el contrario $c_2>c_1$, o sea $n_{12}<1$ la dirección de la onda transmitida se aleja de la normal, existe un valor límite del ángulo incidente cuando $\text{sen}\theta=n_{12}$ donde el ángulo de refracción sería $\pi/2$ rad, dicho ángulo incidente $\theta_L=\text{arcsen}(c_1/c_2)$ se le denomina **àngulo límite**. Para ángulos de incidencias superiores al ángulo límite no hay onda refractada, reflejándose toda la onda; éste fenómeno se conoce como **reflexión total** y en el toda la energía de la onda incidente se conserva en la onda reflejada.

22.10. DIFRACCIÓN

Uno de los problemas matemáticos más complicados que existen en la propagación de las ondas es la difracción, dado el nivel del dominio de las matemáticas que posee un alumno de primer curso de estudios universitarios, se va a intentar omitir dichas dificultades y se va a obtener de forma descriptiva dicho fenómeno.

Cuando una onda encuentra un obstáculo o pasa a través de un orificio, su dirección de propagación no es rectilínea y su intensidad energética presenta anomalías en diferentes puntos. Esta capacidad que tienen las ondas de girar las esquinas se denomina **difracción** de la onda y depende de las dimensiones de los obstáculos u orificios y de la longitud de onda.

Como se ha indicado anteriormente Fresnel modificó el principio de Huygens y así se puede estudiar la difracción, dicha modificación se puede enunciar "*La amplitud de un movimiento ondulatorio en un punto de su frente de onda es el resultado de las interferencias entre las ondas secundarias que parten de la superficie del frente de onda anterior*"

Para simplificar se considera la difracción a distancia finita del obstáculo, los denominados fenómenos de difracción de Fresnel, puesto que los fenómenos de difracción a distancia infinita del obstáculo son los conocidos como difracción de Fraunhofer.

* Dado que la óptica geométrica se basa en estas leyes, junto al principio de Huygens, se volverá a incidir en estas demostraciones en la lección correspondiente, así el lector que sólo esté interesado en la óptica geométrica no necesita estudiar esta lección

Como se ha indicado, para que el estudio sea lo más elemental posible se considera una onda plana y se estudia el valor de la misma en un punto P a una distancia d del frente de onda. Se descompone la superficie del plano de onda (plano que denotamos por el símbolo π) de la siguiente forma.

Con vértice en el punto P se traza conos regulares de base el plano π, de forma que la generatriz de cada cono mida d+p.λ/2, donde p va desde 1 hasta n, cada cono estará numerado con el valor de p correspondiente.

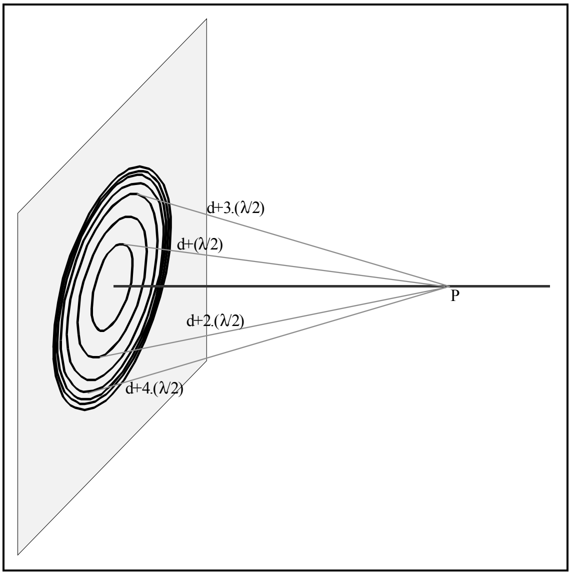

Figura 22.6

La intersección de cada superficie cónica con el plano π es una circunferencia de forma que el conjunto de circunferencias concéntricas delimitan coronas circulares cada vez más estrechas. Si se supone d>>λ, los radios de las sucesivas circunferencias son:

$$p=1 \Rightarrow R_1^2=\left(d+\frac{\lambda}{2}\right)^2-d^2=d^2+d.\lambda+\frac{\lambda^2}{4}-d^2=d.\lambda+\frac{\lambda^2}{4}\approx d.\lambda$$

$$p=2 \Rightarrow R_2^2=\left(d+2.\frac{\lambda}{2}\right)^2-d^2=d^2+2.d.\lambda+\lambda^2-d^2=2.d.\lambda+\lambda^2\approx 2.d.\lambda \qquad \mathbf{22.74}$$

$$p=3 \Rightarrow R_3^2=\left(d+3.\frac{\lambda}{2}\right)^2-d^2=d^2+3.d.\lambda+\frac{9.\lambda^2}{4}-d^2=3.d.\lambda+\frac{9.\lambda^2}{4}\approx 3.d.\lambda$$

$$\vdots$$

$$p=n \Rightarrow R_n^2=\left(d+n.\frac{\lambda}{2}\right)^2-d^2=d^2+n.d.\lambda+\frac{n^2.\lambda^2}{4}-d^2=n.d.\lambda+\frac{n^2\lambda^2}{4}\approx n.d.\lambda$$

El primer círculo y las sucesivas coronas circulares restantes se denominan **zonas de Fresnel**. Dichas zonas por la simplificación indicada tendrán la misma área, veamos cada una de esas áreas:

$$
\begin{aligned}
p=1 &\Rightarrow S_1 = \pi.R_1^2 = \pi.d.\lambda \\
p=2 &\Rightarrow S_2 = \pi.\left(R_2^2 - R_1^2\right) = \pi.(2.d.\lambda - d.\lambda) = \pi.d.\lambda \\
p=3 &\Rightarrow S_3 = \pi.\left(R_3^2 - R_2^2\right) = \pi.(3.d.\lambda - 2.d.\lambda) = \pi.d.\lambda \\
&\vdots \\
p=n &\Rightarrow S_n = \pi.\left(R_n^2 - R_{n.1}^2\right) = \pi.[n..d.\lambda - (n-1).d.\lambda] = \pi.d.\lambda
\end{aligned}
\qquad \textbf{22.75}
$$

Se puede descomponer cada zona en elementos de superficie de los que parten las ondas secundarias que alcanzarán el punto P. El número de estas áreas elementales será el mismo para dos zonas cualesquiera de Fresnel debido a la igualdad de sus áreas. (En la figura 22.7 cada zona se ha divido en 16 elementos, todos los elementos tiene el mismo área, independientemente de la zona de Fresnel que se elija). Evidentemente los elementos deben tender a diferenciales y el número de elementos de cada zona debe tender a infinito para que cada elemento tienda a un punto emisor. A todo punto emisor (cada elemento de superficie) de una zona le corresponde otro elemento de una zona inmediata tal que la diferencia de sus distancias al punto P es λ/2, es decir, media longitud de onda, por lo que la onda emitida por cada elemento respecto a la correspondiente de la zona contigua aportará una onda secundaria en oposición de fase, por lo que al interferir las dos ondas secundarias en P darán intensidad nula. El efecto de una zona se anulará con el de la siguiente o con la precedente. Evidentemente eso es sólo aproximado puesto que las distancias de cada zona es distinta y por tanto al ser las ondas secundarias distintas, su amplitud será algo inferior conforme la zona tenga radio mayor y el efecto de la zona va disminuyendo gradualmente. Así el efecto de la segunda zona será opuesto al de la primera pero algo inferior, mientras que también será opuesto al de la tercera pero ligeramente superior a ésta última. Los efectos de las zonas impares 1, 3, 5, 7,… son de sentido opuesto a las pares, 2, 4, 6, 8, … y para evitar el efecto de la pequeña diferencia de distancia como consecuencia de la diferente inclinación se puede suponer que el efecto de la zona 2 sobre el punto P anula el promedio del efecto de las zonas 1 y 3 sobre dicho punto, y así sucesivamente.

Para seguir leyendo, inicie el proceso de compra, click aquí