



UNIVERSITAT  
POLITÈCNICA  
DE VALÈNCIA



# Construcción de una cartera de mínimo riesgo a corto plazo con acciones de Endesa y CaixaBank mediante Modelo Estocástico

CURSO 2019-2020

Autor: Pablo Vañó Ferre

Tutores: Rafael J. Villanueva Micó y David Martínez Rodríguez



## Índice

<b>Índice de figuras .....</b>	<b>4</b>
<b>Índice de gráficos .....</b>	<b>4</b>
<b>Índice de tablas .....</b>	<b>5</b>
<b>Resumen del Trabajo Final de Grado .....</b>	<b>6</b>
<b>Objetivos del Trabajo Final de Grado.....</b>	<b>6</b>
<b>Introducción .....</b>	<b>7</b>
<b>1. Influencia de la Bolsa en la Economía de un país .....</b>	<b>8</b>
1.1 Teoría de Ciclos .....	8
1.2 Mercados Financieros .....	10
1.2.1 El IBEX-35.....	11
1.3 Endesa .....	12
1.3.1 Acciones .....	12
1.4 CaixaBank .....	13
1.4.1 Acciones .....	14
<b>2. Teoría estocástica.....</b>	<b>16</b>
2.1 Proceso de Wiener o Movimiento Browniano .....	16
2.2 Propiedades estadísticas del Movimiento Browniano.....	18
2.3 Simulación del Movimiento Browniano .....	19
2.4 El Cálculo Estocástico de Itô .....	20
<b>3. Modelo Estocástico Log-Normal.....</b>	<b>22</b>
3.1 Modelo estocástico para un subyacente en ambiente de certidumbre.....	23
3.2 Modelo estocástico para un subyacente en ambiente de incertidumbre.....	24
3.3 Solución del Modelo Log-Normal .....	25
3.4 Propiedades estadísticas del Movimiento Browniano Geométrico.....	27
3.5 Estimación de los parámetros del Modelo Log-Normal .....	28
3.5.1 Método de Momentos Estadísticos.....	29

3.5.2	Método de Máxima Verosimilitud (MMV).....	30
3.5.3	Método de Momentos No Paramétrico (MMNP).....	33
3.6	Validación del Modelo Log-Normal .....	35
3.6.1	Predicción e intervalos de confianza .....	35
3.6.2	Error Cuadrático Medio .....	38
3.6.3	Error Porcentual Absoluto Medio .....	38
4.	Construcción teórica de la Cartera de Mínimo Riesgo.....	39
4.1	Método de Monte Carlo .....	39
4.2	Conceptos básicos y notación en la creación de carteras .....	40
5.	Aplicación del Modelo Log-Normal.....	44
5.1	Estimación de los parámetros del Modelo Log-Normal .....	47
5.1.1	Estimación de parámetros con MME.....	47
5.1.2	Estimación de parámetros mediante el MMV .....	48
5.1.3	Estimación de parámetros por el MMNP .....	49
5.2	Validación del Modelo Log-Normal .....	51
5.2.1	Validación de los parámetros del MME y predicción .....	52
5.2.2	Validación de los parámetros del MMV y predicción.....	53
5.2.3	Validación de los parámetros del MMNP y predicción .....	54
6.	Construcción de la cartera de mínimo riesgo con acciones de Endesa y CaixaBank .....	58
7.	Conclusiones finales .....	64
7.1	Limitaciones del modelo .....	65
	<b>Bibliografía.....</b>	<b>66</b>

## Índice de figuras

Figura 1 Histórico de cotizaciones de Endesa S.A. de 2002 a 2019 .....	13
Figura 2 Histórico de cotizaciones de CaixaBank S.A. de 2008 a 2019 .....	14
Figura 3 Simulación del Movimiento Browniano .....	19
Figura 4 Régimen de Capitalización a Interés Compuesto Continuo.....	23
Figura 5 Funciones necesarias para la validación del Modelo Log-Normal .....	51
Figura 6 Validación y predicción de Endesa por MME .....	52
Figura 7 Validación y predicción de CaixaBank por MME.....	52
Figura 8 Validación y predicción de Endesa por MMV .....	53
Figura 9 Validación y predicción de CaixaBank por MMV .....	53
Figura 10 Validación y predicción de Endesa por MMNP .....	54
Figura 11 Validación y predicción de CaixaBank por MMNP .....	54
Figura 12 Cálculo de la matriz de varianzas-covarianzas para $t = 30$ .....	60
Figura 13 Vector de pesos para $c_0$ .....	61

## Índice de gráficos

Gráfico 0-1 Evolución de las cotizaciones de la acción de Endesa.....	44
Gráfico 0-2 Evolución de las cotizaciones de la acción de CaixaBank.....	46

## Índice de tablas

Tabla 1 Justificación de la ecuación (2.3.1) de la simulación del Movimiento Browniano .....	19
Tabla 2 Notación utilizada para la construcción de carteras .....	42
Tabla 3 Cotizaciones de las acciones de Endesa .....	45
Tabla 4 Cotización de la acción de CaixaBank .....	46
Tabla 5 Resultado de las estimaciones de parámetros del Modelo Log-Normal, con datos de Endesa .....	50
Tabla 6 Resultado de las estimaciones de parámetros del Modelo Log-Normal, con datos de CaixaBank .....	50
Tabla 7 Medidas de bondad de ajuste para Endesa mediante los tres métodos.....	55
Tabla 8 Medidas de bondad de ajuste para CaixaBank mediante los tres métodos .....	55
Tabla 9 Parámetros $\mu$ y $\sigma$ estimados para CaixaBank .....	56
Tabla 10 Parámetros $\mu$ y $\sigma$ estimados para Endesa por MMV .....	56
Tabla 11 Comparativa entre predicción y cotización real de Endesa.....	56
Tabla 12 Comparativa entre predicción y cotización real de CaixaBank.....	56
Tabla 13 Cálculo del error relativo para Endesa (en porcentaje) .....	57
Tabla 14 Cálculo del error relativo para CaixaBank (en porcentaje) .....	57
Tabla 15 Cotizaciones de las acciones de Endesa .....	59
Tabla 16 Cotización de la acción de CaixaBank .....	59

## Resumen del Trabajo Final de Grado

En el presente TFG se describe un procedimiento para diseñar una cartera de inversión, compuesta de acciones de las empresas Endesa y CaixaBank, las cuales cotizan en el IBEX-35, que a corto plazo (5 días) minimice el riesgo de la inversión en dichos activos. Para ello, se tomará el histórico de cotizaciones de sus acciones en un periodo temporal de 30 días y, mediante la utilización del Modelo Log-Normal, se estimarán los parámetros de tendencia y volatilidad, necesarios para la aplicación del modelo. En dicho modelo, la aleatoriedad asociada a una acción es introducida en la ecuación a través de un procedimiento estocástico llamado Ruido Blanco. Realizada la estimación de los parámetros, el siguiente paso es validar el modelo, para el cual se aplicarán diversas medidas de bondad de ajuste: el Error Cuadrático Medio (ECM) y el Error Porcentual Absoluto Medio (MAPE). Una vez obtenidas las estimaciones y validado el modelo, se procederá a calcular, con intervalos de confianza al 95%, las predicciones del modelo relativas a las cotizaciones de las acciones de Endesa y de CaixaBank (para posteriormente comparar las variaciones en la composición de la cartera). A continuación, se calculará el vector de pesos de la cartera de riesgo mínimo en cada instante temporal (5 días) mediante simulaciones del Movimiento Browniano Geométrico, generadas por el método de Monte Carlo, y aplicando la ecuación de optimización de los pesos de cada uno de los activos que forman la cartera.

## Objetivos del Trabajo Final de Grado

El objetivo principal que se pretende alcanzar con este trabajo es el estudio de un modelo matemático para la minimización del riesgo de composición de una cartera de subyacentes cotizados pertenecientes a dos activos financieros reales, Endesa y CaixaBank.

Este estudio resulta necesario para tener unas pautas de actuación a la hora de realizar inversiones en los mercados financieros. A través de la modelización del valor de las acciones en un horizonte temporal determinado encontraremos que composición es más óptima en nuestra cartera de inversión.

# Introducción

## Antecedentes y actualidad de los Mercados de Valores

Las acciones se definen como la parte alícuota del capital social, es decir, porciones del capital de la empresa de igual valor. Estas acciones son una posibilidad para aquellos inversores que quieren invertir y realizar operaciones para obtener, en un futuro, un beneficio.

No obstante, esto no es fácil ya que las acciones y los mercados financieros están sometidos a una serie de factores externos que no pueden ser controlados por las empresas.

Algunos de estos factores pueden ser la coyuntura económica, la opinión general del mercado, las preferencias de los inversores, las políticas monetarias llevadas a cabo por los gobiernos, los tipos de interés, etc.

Existen técnicas como el modelo ARIMA y las Redes Neuronales Artificiales para descubrir patrones de actuación, pero la variable aleatoria continúa presente en el mercado e influye en gran medida en las cotizaciones, por esto justificamos la importancia que tiene este estudio mediante una metodología y una modelización basada en la aleatoriedad, con el objetivo de determinar predicciones de cotizaciones futuras mediante el histórico de cotizaciones de Endesa y de CaixaBank. Para poder crear la composición de una cartera de inversión donde haya un nivel de riesgo mínimo, ya que las cotizaciones de los subyacentes están sujetas a cierta volatilidad.

En los modelos estudiados en este TFG, partimos de la base del Modelo Log-Normal, basado en una ecuación diferencial estocástica de tipo Itô. Dicho modelo modeliza la dinámica e incertidumbre de un subyacente cotizado y depende del Movimiento Browniano o proceso estocástico de Wiener.

Para la resolución de este tipo de ecuaciones se emplea el Cálculo Estocástico de Itô, desarrollado por el matemático japonés Kiyoshi Itô [1] en 1944 y 1951. La utilización del cálculo estocástico y su introducción en el campo de las finanzas tuvo lugar anteriormente mediante el estudio y los trabajos de Fisher Black [2], Miron S. Scholes y Robert C. Merton en el año 1973.



# 1. Influencia de la Bolsa en la Economía de un país

La vinculación de los mercados bursátiles con la realidad de los consumidores y de las empresas es cierta, pero, ¿hasta qué punto?, ¿la bolsa reactiva la economía?, ¿es al revés?, ¿existe relación entre los mercados financieros y la economía?

Por épocas anteriores podemos decir que lo que ocurre en la economía de un país puede verse reflejado con anterioridad en la bolsa. Esta relación se explica con la denominada Teoría de Ciclos. Por lo que, tanto los Mercados Financieros como los índices de referencia, como el IBEX-35, influyen en la economía del país.

## 1.1 Teoría de Ciclos

La relación que existe entre el Ciclo Económico y el Ciclo Bursátil se desarrolla a través de la Teoría de Ciclos, explicada principalmente por economistas de la escuela Austriaca<sup>1</sup>, originada en la Viena de finales del siglo XIX y principios del XX.

El ciclo económico consta de cuatro fases:

- Recuperación o crecimiento
- Auge
- Recesión
- Depresión

El ciclo económico, según la teoría austriaca, comienza cuando se llevan a cabo inversiones que no están realizadas y respaldadas con un ahorro personal previo (crédito prestado), a esto se le llama expansión artificial del crédito.

Empieza la fase de crecimiento y recuperación, donde se lleva a cabo una mejora de la actividad económica y aumenta el consumo, los precios van subiendo poco a poco, el desempleo disminuye, etc.

---

<sup>1</sup> Principales economistas de la escuela Austriaca: C.Menger, L.V. Mises y F.Hayek

Dicha expansión artificial del crédito viene dada por los bancos centrales europeos donde aplican políticas monetarias con el principal objetivo de aumentar el consumo y la inversión.

Estas políticas macroeconómicas como la bajada del tipo de interés o la impresión de moneda hace que los bancos presten dinero barato y aumente el dinero en circulación. Esto produce un exceso de inversión en ciertas actividades, que con niveles de tipos de interés normales no pueden ser viables.

En este momento, el ciclo bursátil también entra en un proceso de recuperación, donde las empresas buscan financiación para poder invertir, y al haber dinero en circulación existen inversores interesados en comprar acciones, por lo que el precio de estas se recupera y va subiendo poco a poco.

Esta inversión en alza hace que el ciclo económico entre en una fase de auge, caracterizada por una euforia, por una producción y un consumo en masa y una tasa de empleo elevada. Al mismo tiempo, en el ciclo bursátil se descontrola la compra de acciones esperando que la cotización siga subiendo, esperando que las inversiones que han realizado las empresas obtengan sus beneficios y se opte por repartir dividendos.

Estas altas inversiones generan la llamada burbuja, fundamentada sobre cimientos falsos, que revienta cuando se deja de financiar crédito barato, es decir, cuando los tipos de interés para la financiación son elevados.

Empieza la fase de recesión donde la inversión, la producción, el consumo y el empleo descienden. De la misma manera, en la bolsa, los inversores se ven obligados a devolver el crédito financiado al ver aumentado los intereses, y se ven obligados a vender las acciones. Esta venta de acciones se debe a la poca confianza de los inversores, lo que provoca una caída de los precios en la cotización de las mismas.

Los recursos, como el capital o el trabajo, que se han utilizado para la burbuja han de reasignarse para proyectos que de verdad son productivos.

El problema viene al no poder reasignar estos recursos ya que se han utilizado para sectores específicos, lo que provoca grandes pérdidas de valor y, en consecuencia, la entrada en una depresión económica.

El ciclo bursátil se ve afectado de la misma manera y llega a su punto más bajo donde el precio en la cotización de las acciones es menor que su valor real.

Muchas de las empresas entran en quiebra al no poder devolver el crédito financiado y al no encontrar financiación ajena.

En los momentos de depresión los gobiernos deben actuar y llevar a cabo políticas económicas monetarias y de consumo para reasignar de manera correcta estos recursos y conseguir que la economía entre de nuevo en funcionamiento y en un proceso de recuperación.

Podemos observar que la relación entre bolsa y economía es notable, haciendo que podamos prever, en cierta medida, lo que ocurrirá en un futuro, por eso la importancia del estudio en el presente trabajo de modelos estocásticos que nos ayuden a prever el precio en la cotización de la acción.

Cabe destacar que esta relación está regulada por los gobiernos de cada país, los cuales mediante políticas monetarias y fiscales, ajustan los posibles desequilibrios que puedan provocar las variaciones de la Bolsa en la economía, haciendo que estos cambios sean lo menos bruscos y perjudiciales en la medida de lo posible.

## 1.2 Mercados Financieros

Los mercados financieros son el mecanismo, lugar o sistema donde tienen lugar las transacciones de activos financieros entre los distintos agentes económicos y donde se determinan sus precios, dotándolos de liquidez.

Algunas de las principales funciones de los mercados financieros son poner en contacto oferentes y demandantes de fondos, determinar los precios de los activos financieros y proporcionar liquidez a los activos.

Podemos realizar una clasificación de los mercados financieros atendiendo a una serie de características como el grado de formalización, la fase de negociación de los activos, las características de los mismos, etc.

Atendiendo al estudio que se pretende realizar con este trabajo, cabe centrar la atención en el mercado organizado y destacar el papel fundamental del mercado de valores español, más conocido como “La Bolsa”.

Bolsa y Mercados Españoles, S.A (BME) es una sociedad que integra diferentes empresas que gestionan y dirigen los mercados de valores y sistemas financieros en España.

El grupo BME integra las cuatro Bolsas de Valores españolas, la Bolsa de Barcelona, Bilbao, Madrid y Valencia. Estas funcionan simultáneamente a través del SIBE (Sistema de Interconexión Bursátil Español).

### 1.2.1 El IBEX-35

El IBEX-35 es el principal índice de referencia de la Bolsa española. Fue elaborado por Bolsas y Mercados Españoles a finales de los años 80, pero no se puso en funcionamiento hasta principios del año 1992.

Es un índice ponderado por capitalización bursátil y está formado por las 35 empresas mayor volumen de negociación o por su liquidez, es decir, las empresas que más dinero mueven porque reflejan mejor los precios del mercado. Es por esto que también se tiene en cuenta el capital flotante, *Free Float*, de la empresa.

La composición de este índice se revisa cada seis meses, diciembre y junio, para su actualización.

Es por este índice y por las capitalizaciones bursátiles por lo que hemos escogido a Endesa y CaixaBank como las dos empresas objeto de estudio en este trabajo, ya que tienen una capitalización importante y ambas se sitúan en posiciones elevadas dentro de este índice, haciendo que la evolución del precio de sus acciones repercuta en cierta medida en las fluctuaciones de dicho índice.

## 1.3 Endesa

Endesa S.A, fue fundada en el año 1944 como “Empresa Nacional de Electricidad Sociedad Anónima” por el Instituto Nacional de Industria. Actualmente Endesa es propiedad en un 70% del *Grupo Enel*, una matriz eléctrica estatal italiana, estando el restante 30% en manos de inversores y accionistas privados.

Endesa es la empresa líder del sector eléctrico español y el segundo operador de Portugal, donde su principal negocio es la generación, distribución y venta de electricidad. Es una de las tres grandes compañías del sector eléctrico que dominan al 90% el mercado eléctrico nacional. La empresa cuenta con un total cercano a los 10.000 empleados, más de 10,5 millones de clientes y con más de 1.058 millones de accionistas.

### 1.3.1 Acciones

A día de hoy, Endesa cotiza a través del mercado continuo español y en varias bolsas alrededor del mundo, entre ellas se encuentra la de Berlín, Dusseldorf, Frankfurt, Stuttgart, Hamburgo y Londres.

En lo referente al histórico de operaciones con acciones, Endesa realizó un *Split* (división del valor nominal de una acción) el 24 de julio de 1997 en una proporción 4x1, es decir, por cada derecho de suscripción se le entregaba 4 acciones nuevas al accionista.

En julio de 1999 se produjo la última ampliación de capital de acciones ordinarias con un importe nominal total menor a los 125 millones de euros. El número de títulos de la ampliación fue de 103.944.494, por tanto con una proporción de “1000x9185”, consistió en una ampliación con prima de riesgo, donde el precio por título se situó en 14,4405€ y el valor nominar en 1,20€.

## Evolución del valor de la acciones

Partiendo de la base que hemos obtenido sólo datos desde el año 2002, podemos observar en la figura 1 que la acción de Endesa (ELE.MC) durante su histórico, alcanzó su máxima cotización el 8 de abril de 2007, cotizando en 40,58€ al cierre, debido a despeje del camino judicial sobre la OPA que *E.ON* hizo a la compañía.

Fue en septiembre del año 2007, donde la cotización empezó a descender motivada por la crisis sufrida en España.

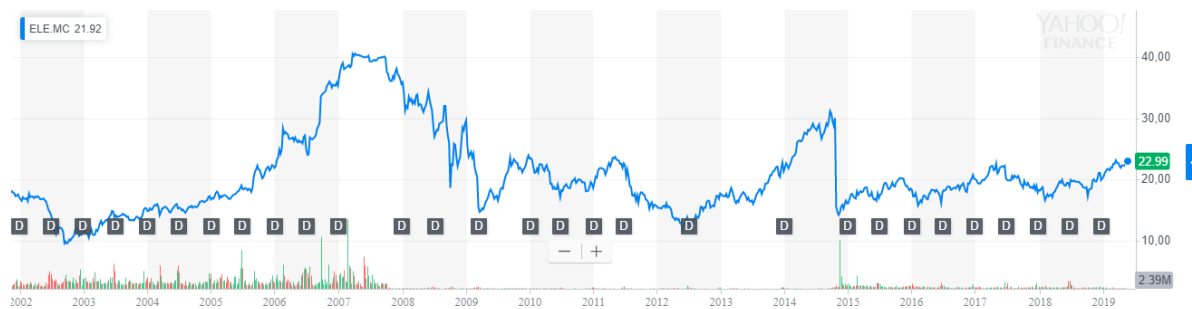


Figura 1 Histórico de cotizaciones de Endesa S.A. de 2002 a 2019

Fuente: Yahoo Finanzas

Un dato a destacar es la pronunciada caída de la cotización de la acción a finales de 2014, la cual se produce a causa del impacto de las reformas regulatorias en España juntamente con la devaluación de las divisas latinoamericanas. Estos hechos lastraron el beneficio de la división de España y Portugal provocando que bajara un 27,1%.

### 1.4 CaixaBank

CaixaBank S.A. se fundó en Barcelona en 2011, por la *Caja de Ahorros y Pensiones de Barcelona* (La Caixa), la cual aportó los activos y pasivos del negocio bancario de la misma. Se trata de un banco español que tiene un posicionamiento líder en banca minorista en España y Portugal. Su sede operativa se encuentra en Barcelona y su sede social en Valencia. A fecha de diciembre de 2018, CaixaBank presentó unos activos que superaban los 380.000 millones de euros, siendo la tercera entidad financiera española por volumen de activos. A esta fecha, la entidad contaba con más de 37.400 empleados, con 5.110 oficinas y con 15,7 millones de clientes, situando a CaixaBank entre las diez primeras empresas con más peso del IBEX-35.

### 1.4.1 Acciones

Actualmente hay en circulación algo menos de 6.000 millones de acciones, haciendo una capitalización total superior a los 16.628 millones de euros.

En el periodo comprendido entre el 22 de noviembre y el 6 de diciembre de 2016 tuvo lugar una ampliación de capital de tipo liberada<sup>2</sup> con una proporción de 1x72, es decir por cada 72 derechos de suscripción corresponde una acción nueva.

En esta ampliación se emitieron un total de 71.195.347 acciones con un valor nominal unitario de 1€, resultando de esta operación un capital social resultante de más de 5.900 millones de euros, que es el actual de la empresa.

### Evolución del valor de las acciones



Figura 2 Histórico de cotizaciones de CaixaBank S.A. de 2008 a 2019

Fuente: Yahoo Finanzas

Las acciones de CaixaBank (CABK.MC) cotizan en el IBEX-35 desde finales de 2007, durante todo este periodo ha sufrido un ciclo constante de fases alcistas y bajistas que duran aproximadamente 3 años. La caída más importante fue causada por la gran crisis financiera sufrida en España en el período comprendido entre 2007-2012, sufriendo una caída de la cotización hasta 2,05€. La acción tuvo su mayor cotización el 14 de octubre de 2007, situándose en 5,35€ (Figura 2).

<sup>2</sup> Ampliación que no supone ningún desembolso para el accionista, como contravalor de las nuevas acciones emitidas se usan los fondos propios de la sociedad (reservas).

Con la finalización del ejercicio de 2018, CaixaBank sufrió una caída importante en el valor de sus acciones debido a la presentación de los resultados del ejercicio 2018. Esto ha provocado que la cotización se reduzca casi la mitad, dejándola en 2,76€ a fecha de 24 de mayo de 2019.

Para finalizar este apartado y justificar la elección de estas dos empresas para llevar a cabo nuestro estudio, hemos de decir que dicha elección está basada en el interés que presentan estas empresas al pertenecer a dos de los sectores que tienen más peso actualmente en el IBEX-35, como es el sector eléctrico y el sector bancario.



## 2. Teoría estocástica

En el presente capítulo se van a mostrar y explicar las herramientas estocásticas y sus principales propiedades estadísticas, necesarias para calcular la solución del Modelo Log-Normal.

Empezaremos introduciendo el proceso de Wiener, también llamado Movimiento Browniano, proceso estadístico vital para el desarrollo teórico del Modelo Log-Normal. Definiremos el proceso y nombraremos las distintas propiedades estadísticas que este posee, las cuales requeriremos más adelante. Seguiremos con la explicación de cómo podemos obtener varias simulaciones del Movimiento Browniano y para finalizar, haremos hincapié en el Lema de Itô, ya que la resolución del Modelo Log-Normal requiere una identificación y adecuación de datos, al estar basado en una ecuación diferencial estocástica de tipo Itô.

### 2.1 Proceso de Wiener o Movimiento Browniano

El Movimiento Browniano es uno de los procesos estocásticos más utilizados y con más repercusión en Estadística. Un proceso estocástico se caracteriza por una sucesión de variables aleatorias (estocásticas) que evolucionan en función de otra variable, como en nuestro caso y generalmente, el tiempo.

Durante todo este trabajo, el proceso de Wiener o el Movimiento Browniano Geométrico se denotará por  $\{B(t; \omega): t \geq 0, \omega \in \Omega\}$  o brevemente por  $\{B(t): t \geq 0\}$ , también podemos encontrarlo con la notación  $\{W(t): t \geq 0\}$ .

Tal y como se ha mencionado anteriormente, la finalidad de este trabajo es el estudio y la aplicación de un modelo estocástico para subyacentes financieros denominado Modelo Log-Normal, cuyo proceso solución es estocástico y se denomina Movimiento Browniano Geométrico (MBG). El proceso estocástico que modeliza la incertidumbre y dota de aleatoriedad al Movimiento Browniano Geométrico es el Movimiento Browniano.

Definimos el Movimiento Browniano a través de las siguientes cuatro propiedades.

El Movimiento Browniano es un proceso estocástico de tipo gaussiano para cada  $t \in T$  que cumple:

- **MB1.** Empieza en el origen con probabilidad 1:  $P[B(0) = 0] = 1$ .
- **MB2.** Tiene incrementos estacionarios<sup>3</sup>:

$$B(t + \Delta t) - B(t) \stackrel{d}{=} B(s + \Delta t) - B(s), \quad \forall s, t: 0 \leq s \leq t \leq +\infty.$$

- **MB.3** Los incrementos del Browniano dados por,  $B(t) - B(s)$ , son variables aleatorias independientes:

$$B(t_1) - B(t_0); B(t_2) - B(t_1); \dots; B(t_{n+1}) - B(t_n),$$

con  $0 \leq t_1 \leq t_2 \leq \dots \leq t_{n+1} \leq +\infty, n \geq 1$ .

- **MB.4** Los incrementos del proceso son gaussianos de media 0 y varianza  $t - s$ :

$$B(t) - B(s) \sim N[0; t - s], \quad \forall s, t: 0 \leq s \leq t \leq +\infty.$$

Si tomamos  $\sigma^2 = 1$  y  $s = 0$  en **MB.4** y aplicamos **MB.1**, se deduce que

$$B(t) \sim N[0; t],$$

es decir, que en cada instante  $t > 0$ , la variable aleatoria  $B(t)$  sigue una distribución normal o gaussiana de media 0 y varianza  $t$ . Por tanto, al aumentar la variable  $t$ , también se aumenta su varianza, su volatilidad.

---

<sup>3</sup>Donde el símbolo  $\stackrel{d}{=}$  indica que ambos lados de la igualdad son variables aleatorias con la misma distribución.

## 2.2 Propiedades estadísticas del Movimiento Browniano

En este apartado se presentan las propiedades estadísticas del proceso estocástico de Wiener.

**P1. Función Media:** La función media del Movimiento Browniano es nula:

$$\mu_{B(t)} = 0, \quad \forall t \geq 0$$

**P2. Función Varianza:** La varianza del Movimiento Browniano es  $t$ :

$$\sigma_{B(t)} = t, \quad \forall t \geq 0$$

**P3. Función Covarianza:** Mide el grado de relación lineal entre las variables aleatorias que se obtienen al fijar dos instantes  $s$  y  $t$ ,  $B(s)$  y  $B(t)$ , respectivamente.

Se cumple que:

$$\text{Cov}[B(t), B(s)] = \min(s, t), \quad \forall s, t: 0 \leq s \leq t \leq +\infty$$

**P4.**  $B(t)$  es  $\frac{1}{2}$ -autosemejante, se cumple que:

$$B(T \cdot t) \stackrel{d}{=} \sqrt{T} \cdot B(t), \quad \forall t \geq 0, \quad \forall T \geq 0,$$

los procesos estocásticos de ambas partes de la igualdad tienen la misma distribución estadística.

**P5.** Las trayectorias muestrales del Movimiento Browniano  $B(t)$  son funciones continuas en todo su dominio, pero en ningún punto son diferenciables ya que tienen puntos “angulosos”, es decir, tienen picos para todo instante  $t$  del dominio.

## 2.3 Simulación del Movimiento Browniano

Para poder realizar las predicciones de los subyacentes cotizados es necesario realizar simulaciones del mismo, por lo tanto, en este apartado se expone una de las formas de simular dicho proceso.

La forma más sencilla de simular el Movimiento Browniano es realizándola mediante variables aleatorias normales o gaussianas tipificadas:

$$B(t) \stackrel{d}{=} \sqrt{t}Z, \quad Z \sim N[0; 1] \quad (2.3.1)$$

En la siguiente tabla se justifica que los dos miembros de la identidad tienen la misma distribución, por lo que la media y varianza de ambos miembros coinciden, por lo que la distribución es gaussiana.

	$B(t)$	$\sqrt{t}Z, \quad Z \sim N[0; 1]$
Distribución	Gaussiana	Gaussiana <sup>4</sup>
Media	0 (MB. 4)	$E[\sqrt{t}Z] = \sqrt{t}E[Z] = \sqrt{t} \cdot 0 = 0$
Varianza	$t$ (MB. 4)	$\text{Var}[\sqrt{t}Z] = [Z] = (\sqrt{t})^2 \text{Var}[Z] = t \cdot 1 = t$

Tabla 1 Justificación de la ecuación (2.3.1) de la simulación del Movimiento Browniano

Fuente: Elaboración propia

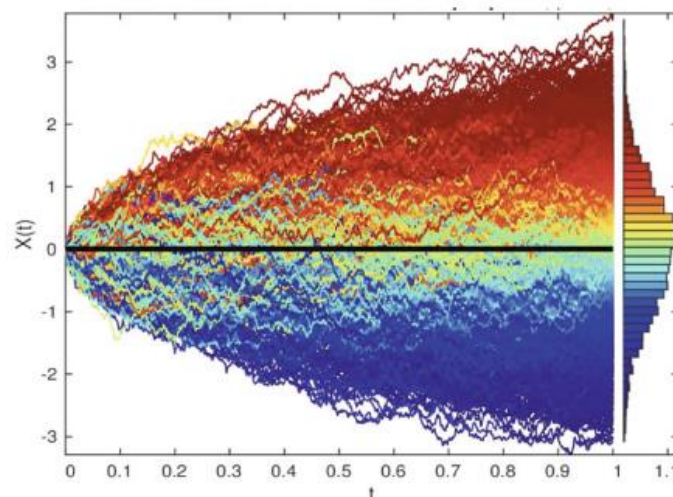


Figura 3 Simulación del Movimiento Browniano

Fuente: Página Web UPV

<sup>4</sup> Propiedad: La transformación lineal de una variable aleatoria gaussiana es gaussiana.

Esta simulación se puede acotar sobre cualquier ventana temporal y se puede realizar las veces que se quiera. Tal y como se vemos en la Figura 3, simulado en  $t \in [0,1]$  y 5000 veces, podemos observar que a medida que nos alejamos del origen crece su variabilidad, tal y como expresa la **MB.4**.

Hemos de decir que basándose en el Teorema Central del Límite, consideramos gaussiano el modelo estocástico presentado, ya que el rendimiento relativo a una acción es el resultado de la “suma” de muchas variables aleatorias independientes, como puede ser el riesgo cambiario, el riesgo político, etc.

Por tanto, si  $S_n$  es la suma de  $n$  variables aleatorias independientes y la función de distribución de  $S_n$  se aproxima a una distribución normal (o gaussiana), consolidamos la decisión de modelizar la aleatoriedad a través de un proceso gaussiano, como lo son el Movimiento Browniano y su diferencial, el Ruido Blanco.

## 2.4 El Cálculo Estocástico de Itô

Kiyoshi Itô fue un matemático japonés cuyo trabajo fue desarrollar el Cálculo de Itô, una teoría para la integración y diferenciación de procesos estocásticos. El resultado y la herramienta más importante del cálculo estocástico de Itô, es el llamado Lema de Itô.

En este apartado se detalla la versión del cálculo de Itô que se requerirá en este trabajo, para poder obtener con exactitud la solución de una ecuación diferencial estocástica definida de la siguiente forma:

$$dX(t) = \mu(X(t), t)dt + \sigma(X(t), t)dB(t) \quad (2.4.1)$$

La solución de este tipo de ecuaciones depende de la forma específica de los coeficientes  $\mu(X(t), t)$  y  $\sigma(X(t), t)$ , y se obtiene con la utilización del Lema de Itô.

El Lema de Itô es una versión estocástica de la Regla de la cadena o Regla de la función compuesta para diferenciar procesos estocásticos  $X(t)$ .

### Lema de Itô

Hipòtesis: Sea  $X(t)$  un proceso estocástico de tipo Itô que cumple la siguiente ecuación diferencial tipo Itô con condición inicial determinista  $x_0$ :

$$\begin{aligned} dX(t) &= \mu(x(t), t)dt + \sigma(x(t), t)dB(t), \quad 0 \leq t \leq T, \\ X(0) &= x_0, \end{aligned}$$

y sea  $f(x, t)$  una función  $f: [0, T] \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  tal que las siguientes derivadas parciales existen y son continuas.

$$\frac{\partial f}{\partial t} = f_t, \quad \frac{\partial f}{\partial x} = f_x, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = f_{xx}.$$

Se define el proceso estocástico  $Y(t) = \{Y(t); t \geq 0\}$  como:

$$Y(t) = f(X(t), t).$$

Las hipótesis anteriores satisfacen una tesis:

Entonces, para  $0 \leq t \leq T$ , el proceso estocástico  $Y(t)$  cumple la siguiente ecuación diferencial estocástica de tipo Itô:

$$\begin{aligned} dY(t) &= \left( \frac{\partial f}{\partial t}(X(t), t) + \mu(X(t), t) \frac{\partial f}{\partial x}(X(t), t) \right. \\ &+ \left. \frac{1}{2} \sigma^2(X(t), t) \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(X(t), t) \right) dt + \\ &+ \sigma(X(t), t) \frac{\partial f}{\partial x}(X(t), t) dB(t) \end{aligned}$$

O brevemente:

$$dY = \left( f_t + \mu f_x + \frac{1}{2} \sigma^2 f_{xx} \right) dt + \sigma f_x dB$$

### 3. Modelo Estocástico Log-Normal

En este capítulo se presenta el Modelo Log-Normal, formulado mediante la siguiente ecuación diferencial estocástica de tipo Itô:

$$\left. \begin{aligned} dS(t) &= \mu S(t)dt + \sigma S(t)dB(t) \\ S(0) &= s_0 \end{aligned} \right\} \quad (3.0.1)$$

donde:

- $S(t)$  es el valor del subyacente en el instante  $t$ .
- $s_0$  representa el valor del subyacente en el instante inicial  $t = 0$  y el cual es conocido.
- $\mu \in \mathbb{R}$  es un parámetro del modelo denominado tendencia o *drift*.
- $\sigma > 0$ , parámetro del modelo que representa la intensidad de la perturbación.
- $B(t)$  es el proceso estocástico de Wiener o Movimiento Browniano.

El siguiente paso a explicar es la aplicación del modelo (3.0.1) desde el punto de vista determinista o clásico, donde se conoce el rendimiento de la inversión, es decir, realizando la inversión en un ambiente de certidumbre.

Posteriormente, consideraremos un ambiente de incertidumbre donde utilizaremos el Cálculo de Itô, explicado en el capítulo anterior, para obtener el Movimiento Browniano Geométrico, proceso estocástico solución del modelo Log-Normal. Hallaremos las funciones media y varianza del modelo solución y estimaremos los parámetros  $\mu$  y  $\sigma$  mediante técnicas estadísticas, y una vez estimados dichos parámetros podremos realizar predicciones puntuales y por intervalos de confianza de los activos Endesa y CaixaBank.

### 3.1 Modelo estocástico para un subyacente en ambiente de certidumbre

Un modelo determinista o clásico consiste en realizar una inversión en un ambiente de certidumbre, es decir, donde el retorno de dicha inversión es conocido y no existe riesgo alguno para esta.

Tal y como vemos en la figura 4, donde siendo  $S_0$  el capital inicial o principal, realizamos una inversión en un régimen de capitalización con un interés  $\mu$  compuesto continuo durante un intervalo temporal  $[0, T]$ . Dicho intervalo temporal se ha dividido en  $K$  periodos de la misma longitud  $\Delta t > 0$ .

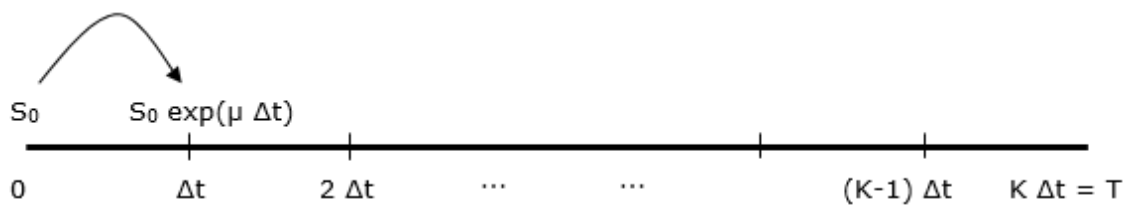


Figura 4 Régimen de Capitalización a Interés Compuesto Continuo

Fuente: Elaboración Propia

Si definimos  $\hat{S}^{(n)}$ ,  $j = 0, 1, \dots, K$ , como el capital existente al cabo de  $n$  periodos, se supone que  $\hat{S}^{(0)} = S_0$ , entonces sabemos que:

$$\hat{S}^{(1)} = S_0 e^{\mu \Delta t}, \hat{S}^{(2)} = S^{(1)} e^{\mu \Delta t}, \quad (3.1.1)$$

y en general,

$$\hat{S}^{(n)} = \hat{S}^{(n-1)} e^{\mu \Delta t}, n = 0, 1, \dots, K, (3.1.2)$$

y por tanto, con recurrencia tenemos que:

$$\hat{S}^{(n)} = \hat{S}^{(n-1)} e^{\mu \Delta t} = \hat{S}^{(n-2)} e^{2\mu \Delta t} = \dots = S_0 e^{\mu n \Delta t}, n = 0, 1, \dots, K. \quad (3.1.3)$$

Si tomamos  $n = K$ , se cumple que:

$$\hat{S}(T) = \hat{S}^{(K)} = S_0 e^{\mu K \Delta t} = S_0 e^{\mu T},$$



donde tenemos que  $K\Delta t = T$ . Por lo tanto,  $\hat{S}(T)$  representa el capital al cabo de  $K$  períodos. Este modelo de capitalización continua corresponde al problema del valor inicial, es decir, la solución de una ecuación diferencial ordinaria junto a una condición inicial:

$$\frac{d\hat{S}(t)}{dt} = \mu\hat{S}(t) , \quad \hat{S}(0) = S_0, (3.1.4)$$

cuya solución es

$$\hat{S}(t) = S_0 e^{\mu t}. (3.1.5)$$

### 3.2 Modelo estocástico para un subyacente en ambiente de incertidumbre

En este apartado introducimos la aleatoriedad e incidencia de los factores externos en el modelo determinista (3.1.4) para un subyacente con el fin de que represente la dinámica de la acción lo más fielmente posible.

De este modo, hemos de transformar el parámetro  $\mu$  del modelo determinista en una cantidad aleatoria mediante las herramientas estocásticas presentes en el apartado 2, donde a través de la derivada o diferencial del Movimiento Browniano  $B(t)$ , denominado proceso de Ruido Blanco  $dB(t)$ , se introducirá la aleatoriedad en el modelo, resultando la siguiente expresión estocástica del parámetro  $\mu$ :

$$\mu \rightarrow \mu + \sigma B'(t) , \quad \sigma > 0 \quad (3.2.1)$$

Se ha modelizado  $\mu$  a través de un valor nominal determinístico más una perturbación de tipo gaussiana. Donde  $B'(t)$  es el proceso estocástico Ruido Blanco y  $\sigma > 0$  es la intensidad de la perturbación alrededor del valor nominal.

Haciendo uso de la notación diferencial de la derivada

$$S'(t) = \frac{dS(t)}{dt}$$

e introduciendo la aleatoriedad del parámetro  $\mu$ , el modelo (3.1.4) se reescribe de la forma:

$$\frac{dS(t)}{dt} = (\mu + \sigma B'(t))S(t) \Rightarrow dS(t) = (\mu + \sigma B'(t))S(t)dt.$$

Agrupando los parámetros obtenemos:

$$dS(t) = \mu S(t)dt + \sigma S(t)B'(t)dt, \quad (3.2.2)$$

donde podemos fácilmente diferenciar entre la parte determinista,  $\mu S(t)dt$ , y la parte estocástica,  $\sigma S(t)B'(t)dt$ , del modelo. Para finalizar, si hacemos uso de la notación diferencial de la derivada, observamos que  $dB(t) = B'(t)dt$ , por lo que podemos reescribir el modelo (3.2.2) y obtendríamos el Modelo Log-Normal para subyacentes financieros cotizados (3.0.1).

### 3.3 Solución del Modelo Log-Normal

En este apartado aplicaremos el Lema de Itô expuesto en el apartado 2.4 y obtendremos la solución de la ecuación diferencial estocástica (3.0.1), es decir, del Modelo Log-Normal:

$$\left. \begin{aligned} dS(t) &= \mu S(t)dt + \sigma S(t)dB(t) \\ S(0) &= s_0 \end{aligned} \right\}$$

Adaptamos a una función determinística  $f$  adecuada e identificamos los datos de la ecuación diferencial estocástica anterior con los del patrón de la ecuación diferencial estocástica general del Lema de Itô:

$$dX(t) = \mu(X(t), t)dt + \sigma(X(t), t)dW(t).$$

Podemos observar que,

$$\begin{aligned} X(t) = S(t) &\equiv x = S \\ \mu(X(t), t) = \mu(S(t), t) = \mu S(t) &\equiv \mu(x, t) = \mu S \\ \sigma(X(t), t) = \sigma(S(t), t) = \sigma S(t) &\equiv \sigma(x, t) = \sigma S \end{aligned}$$

y elegimos la función determinista que transforma el proceso de Itô  $X(t) = S(t)$  de la forma

$$f(x, t) = \ln(x).$$

Además para aplicar el Lema de Itô es necesario calcular las siguientes derivadas parciales, las cuales son funciones continuas:

$$\begin{aligned} f_1(x, t) = \frac{\partial f(x, t)}{\partial t} &= 0, & f_2(x, t) = \frac{\partial f(x, t)}{\partial x} &= \frac{1}{x}, \\ f_{22}(x, t) = \frac{\partial^2 f(x, t)}{\partial x^2} &= -\frac{1}{x^2}. \end{aligned}$$

Por tanto, si aplicamos el Lema de Itô tenemos que el proceso estocástico,

$$Y(t) = \ln(S(t))$$

que cumple la ecuación diferencial estocástica de tipo Itô:

$$\begin{aligned} d(\ln(S(t))) &= \left( 0 + \mu S(t) \frac{1}{S(t)} + \frac{1}{2} (\sigma S(t))^2 \cdot \left( \frac{-1}{(S(t))^2} \right) \right) dt + \\ &+ \sigma S(t) \cdot \frac{1}{S(t)} dB(t), \end{aligned}$$

resulta como

$$d(\ln(S(t))) = \left( \mu - \frac{1}{2} \sigma^2 \right) dt + \sigma dB(t).$$

Al querer calcular  $S(t)$ , hemos de integrar a ambos lados para eliminar la diferencial del término de la izquierda. Por tanto, integramos desde la condición inicial (0) hasta un instante final  $(t)$ , donde se produce la inversión en la acción:

$$\begin{aligned} \int_0^t d(\ln(S(t))) &= \int_0^t \left( \mu - \frac{1}{2} \sigma^2 \right) dt + \int_0^t \sigma dB(t), \\ \ln(S(t)) - \ln(S(0)) &= \left( \mu - \frac{1}{2} \sigma^2 \right) t + \sigma (B(t) - B(0)) \end{aligned}$$

Como podemos observar, por la definición del Movimiento Browniano, se cumple **MB.1**, donde  $B(0) = 0$  con probabilidad 1, por lo que podemos reescribir la última expresión de la forma:

$$\ln\left(\frac{S(t)}{S_0}\right) = \left( \mu - \frac{1}{2} \sigma^2 \right) t + \sigma B(t),$$

$$\frac{S(t)}{S_0} = e^{\left( \mu - \frac{1}{2} \sigma^2 \right) t + \sigma B(t)},$$

$$S(t) = S_0 e^{\left( \mu - \frac{1}{2} \sigma^2 \right) t + \sigma B(t)}. \quad (3.3.1)$$

Hemos llegado al proceso estocástico solución del Modelo Log-Normal, llamado Movimiento Browniano Geométrico (MBG).

## 3.4 Propiedades estadísticas del Movimiento Browniano Geométrico

El proceso solución (3.3.1) se utiliza para realizar predicciones en un tiempo determinado,  $t = T$ . Para predecir con el Movimiento Browniano Geométrico necesitamos calcular su media y su varianza. A través de la función media se construyen predicciones de forma puntual, mientras que mediante la varianza se construyen intervalos de confianza, siendo las predicciones de tipo probabilístico.

Por tanto, en este apartado se calcularán las funciones media y varianza que se utilizarán en los capítulos siguientes para hallar las predicciones de los subyacentes cotizados.

### Función Media

Para calcular la función media de (3.3.1) retomamos y aplicamos la propiedad **P.4** del Movimiento Browniano,

$$B(T \cdot t) \stackrel{d}{=} \sqrt{T} \cdot B(t), \quad \forall t \geq 0, \quad \forall T \geq 0$$

la aplicamos al caso particular de  $t = 1$ , por lo que,

$$B(T) \stackrel{d}{=} \sqrt{T} \cdot B(1) \quad (3.4.1)$$

con ella recordamos que por su propia definición, el Movimiento Browniano

$$B(1) \sim N[0; 1].$$

Por otro lado, requeriremos la siguiente propiedad estadística, correspondiente a la esperanza de la exponencial de una variable aleatoria gaussiana tipificada, haciendo  $Z = B(1)$ , tenemos:

$$E[e^{\lambda Z}] = e^{\frac{\lambda^2}{2}}, \quad Z \sim N[0; 1] \quad (3.4.2)$$

Tomando el operador esperanza en la expresión (3.3.1) y aplicando (3.4.1) tenemos,

$$\begin{aligned}
 E[S(T)] &= S_0 e^{\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)T} E[e^{\sigma B(T)}] \\
 &= S_0 e^{\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)T} E[e^{\sigma\sqrt{T}B(1)}] \quad (3.4.3) \\
 &= S_0 e^{\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)T} e^{\frac{(\sigma\sqrt{T})^2}{2}},
 \end{aligned}$$

simplificando y aplicando (3.4.2) con  $\lambda = \sigma\sqrt{T}$ ,  $B(1) = Z \sim N[0; 1]$ , nos queda:

$$E[S(T)] = S_0 e^{\mu T} \quad (3.4.4)$$

Este resultado tiene una interpretación interesante pues la solución del modelo estocástico Log-Normal se comporta en media como el modelo determinista (3.1.5).

### Función varianza

De la misma forma al cálculo de la función media, podemos determinar la varianza del Movimiento Browniano Geométrico la cual mide la volatilidad del precio del subyacente cotizado. La varianza viene dada por:

$$Var [S(T)] = (S_0)^2 e^{2\mu T} (e^{\sigma^2 T} - 1) \quad (3.4.5)$$

Tal y como vemos en (3.4.5), y según los pretextos de la bolsa, se deduce que a medida que crece el horizonte temporal  $T$ , la varianza y volatilidad del precio de la acción también crece.

## 3.5 Estimación de los parámetros del Modelo Log-Normal

A continuación explicaremos las tres técnicas estadísticas utilizadas para calibrar los parámetros  $\mu$  (tendencia) y  $\sigma$  (difusión) del Modelo Log-Normal:

- Método de Momentos Estadísticos (MME).
- Método de Máxima Verosimilitud (MMV).
- Método de Momentos No Paramétricos (MMNP).

La utilización de tres métodos justifica que la calibración de los parámetros sea lo más robusta posible, ya que de esta forma se asegura que las estimaciones no dependen del método estadístico utilizado para realizar dichas estimaciones.

### 3.5.1 Método de Momentos Estadísticos

En este método partimos del Movimiento Browniano Geométrico (3.3.1) y aprovechamos las propiedades de las variables aleatorias Gaussianas para tomar logaritmos neperianos de las cotizaciones de las acciones (log-cotizaciones), ya que es más fácil operar con ellas.

Por tanto, aplicamos logaritmos a la expresión (3.3.1) y obtenemos:

$$\ln(S(t)) - \ln(S_0) = \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)t + \sigma B(t) \sim N\left[\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)t; \sigma\sqrt{t}\right], \quad (3.5.1)$$

A continuación evaluamos (3.5.1) en los instantes  $t_i$  y  $t_{i+1}$  donde se conocen las cotizaciones  $\{S_0, S_1, \dots, S_n\}$  de la acción:

$$t_{i+1} \rightarrow \ln(S(t_{i+1})) - \ln(S_0) = \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)t_{i+1} + \sigma B(t_{i+1}),$$

$$t_i \rightarrow \ln(S(t_i)) - \ln(S_0) = \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)t_i + \sigma B(t_i),$$

restando ambas expresiones, obtenemos:

$$\begin{aligned} \ln\left(\frac{S(t_{i+1})}{S(t_i)}\right) &= \ln(S(t_{i+1})) - \ln(S(t_i)) = \\ &= \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)(t_{i+1} - t_i) + \sigma(B(t_{i+1}) - B(t_i)) \end{aligned} \quad (3.5.2)$$

Teniendo en cuenta que:  $t_{i+1} = t_i + \Delta t \rightarrow t_{i+1} - t_i = \Delta t$ ,

$$B(t_{i+1}) - B(t_i) = \sim N(0; \Delta t),$$

de la expresión (3.5.2) se deduce:

$$U_i = \ln\left(\frac{S(t_{i+1})}{S(t_i)}\right) = \ln(S(t_{i+1})) - \ln(S(t_i)) \sim N\left(\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)\Delta t; \sigma^2\Delta t\right), \quad (3.5.3)$$

$$0 \leq i \leq N - 1$$

Por tanto, se ha deducido que las variables aleatorias  $U_i$  son gaussianas e independientes con media  $\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)\Delta t$  y varianza  $\sigma^2\Delta t$ .

Es en este instante donde a partir de una muestra de  $N + 1$  cotizaciones del activo subyacente, es posible construir las  $N$  diferencias necesarias para realizar una estimación de los parámetros  $\mu$  y  $\sigma$  del Modelo Log-Normal con el Método de Momentos Estadísticos (MME).

Dicho método consiste en igualar los primeros momentos estadísticos poblacionales a los correspondientes momentos estadísticos muestrales, con el fin de construir un sistema de ecuaciones que permita estimar los parámetros del modelo, haciendo que este refleje adecuadamente la muestra.

En nuestro caso, basta con aplicar el MME para la media y la varianza de las  $N$  variables aleatorias  $U_i$ , creadas en (3.5.3) a la media muestral  $\bar{U}$  y a la quasi-varianza muestral  $S^2$  dadas por:

$$\bar{U} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N-1} U_i, S^2 = \frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^{N-1} (U_i - \bar{U})^2, \quad (3.5.4)$$

permitiéndonos crear el sistema de ecuaciones necesario para estimar los parámetros  $\mu$  y  $\sigma$ :

$$\begin{cases} \left( \mu - \frac{\sigma^2}{2} \right) \Delta t = \bar{U} \\ \sigma^2 \Delta t = S^2 \end{cases}$$

cuya solución nos devuelve la estimación de los parámetros buscados:

$$\hat{\mu} = \frac{1}{\Delta t} \left( \bar{U} + \frac{S^2}{2} \right), \quad \hat{\sigma} = \frac{S}{\sqrt{\Delta t}} \quad (3.5.5)$$

### 3.5.2 Método de Máxima Verosimilitud (MMV)

En este apartado vamos a utilizar un método que consiste en hallar que valor de los parámetros  $\mu$  y  $\sigma$  hace más verosímil la obtención de la muestra  $\{S_0, S_1, \dots, S_N\}$  de valores de las acciones. Dicho método está basado en el concepto de función de verosimilitud de Ronald A. Fisher.

El primer paso es construir una función de verosimilitud:

$$L(S_0, S_1, \dots, S_N; \mu; \sigma)$$

en este caso es de dos variables  $\mu$  y  $\sigma$ , donde el objetivo es buscar su máximo, si es posible global, mediante técnicas analíticas o numéricas de optimización.

Para ello describimos una función de probabilidad conjunta de la muestra representada como:

$$L(S_0, S_1, \dots, S_N; \mu; \sigma) = f(S_0, S_1, \dots, S_N; \mu; \sigma) \quad (3.5.6)$$

Como el proceso estocástico solución,  $S(t)$ , del modelo Log- Normal es markoviano, podemos definir una partición temporal  $\{0 = t_0 < t_1 < \dots < t_i < t_N\}$ , donde utilizamos el Teorema de la Probabilidad Total, por lo tanto se cumple que:

$$\begin{aligned} \mathbb{P}\{S(t_{i+1}) = S_{i+1} | S(t_0) = S_0, S(t_1) = S_1, \dots, S(t_i) = S(i)\} = \\ = \mathbb{P}\{S(t_{i+1}) = S_{i+1} | S(t_i) = S_i\} \quad 0 \leq i \leq N - 1 \end{aligned}$$

Lo cual también se puede escribir en términos de función de densidad de probabilidad,

$$f\{S_{i+1} | S_0, S_1, \dots, S_i\} = f\{S_{i+1} | S_i\}, \quad 0 \leq i \leq N - 1 \quad (3.5.7)$$

Si aplicamos la propiedad “en cadena” de las probabilidades condicionales pero en términos de función de densidad de probabilidad, es posible aplicar el esquema numérico de Euler-Maruyama.

Con el esquema de Euler-Maruyama asignaremos y aproximaremos la solución de la ecuación diferencial estocástica del modelo Log-Normal. Para ello definimos una partición temporal del espacio:

$$\begin{array}{ccccccc} | & & | & & | & & | \\ \hline t_0 = 0 & & t_1 = \Delta t & & \dots & & t_i = i\Delta t & & \dots & & t_N = N\Delta t \end{array}$$

Considerando la partición anterior, aproximamos el valor del modelo Log-Normal,  $S(t_i)$ , en cada punto  $t_{i+1} = (i + 1)\Delta t$ ,  $0 \leq i \leq N - 1$ , por la siguiente aproximación

$$S(t_{i+1}) \approx S^{(i+1)} \quad (3.5.8)$$

donde tenemos que:

$$\left. \begin{aligned} S^{(i+1)} &= S^{(i)} + \mu S^{(i)} \Delta t + \sigma S^{(i)} \{B(t_{i+1}) - B(t_i)\}, \\ S^0 &= S_0 \end{aligned} \right\} \quad (3.5.9)$$

denominado esquema de Euler-Maruyama.



Tal y como sabemos por el Movimiento Browniano o proceso estocástico de Wiener, si tomamos la **MB.4** vista en el apartado (2.1), tenemos que:

$$B(t_{i+1}) - B(t_i) \sim N(0; t_{i+1} - t_i = \Delta t),$$

$$B(t_{i+1}) - B(t_i) = \sqrt{\Delta t} Z_i, \quad i = 0, 1, \dots, N-1, \quad (3.5.10)$$

por tanto, substituyendo la expresión anterior (3.5.10) en el esquema de Euler-Maruyama (3.5.9), se tiene:

$$S^{(i+1)} = S^{(i)} + \mu S^{(i)} \Delta t + \sigma S^{(i)} \sqrt{\Delta t} Z_i, \quad i = 0, 1, \dots, N-1,$$

la cual cosa permite deducir la distribución condicional siguiente:

$$S^{(i+1)} | S^{(i)} \sim N((1 + \mu \Delta t) S^{(i)}; \sigma (S^{(i)})^2 \cdot \Delta t), \quad i = 0, 1, \dots, N-1,$$

En resumen, el Método de Máxima Verosimilitud consiste en maximizar la función de verosimilitud que tiene en cuenta la distribución de  $S^{(i+1)} | S^{(i)}$ , quedando así una función dependiente de  $\mu$  y  $\sigma$ :

$$\begin{aligned} L(\mu, \sigma) &= \left( \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \right)^N \left( \prod_{i=0}^{N-1} \frac{1}{\sigma_i} \right) e^{-\frac{1}{2} \sum_{i=0}^{N-1} \left( \frac{S_{i+1} - \mu_i}{\sigma_i} \right)^2} \\ &= \left( \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \right)^N \left( \prod_{i=0}^{N-1} \frac{1}{\sigma S_i \sqrt{\Delta t}} \right) e^{-\frac{1}{2} \sum_{i=0}^{N-1} \left( \frac{S_{i+1} - (1 + \mu \Delta t) S_i}{\sigma S_i \sqrt{\Delta t}} \right)^2}. \end{aligned} \quad (3.5.11)$$

Aplicando logaritmos para más facilidad, obtenemos:

$$\tilde{L}(\mu, \sigma) = \frac{N}{2} \ln(2\pi) + \frac{N}{2} \ln(\Delta t) + N \ln(\sigma) + \sum_{i=0}^{N-1} \ln(S_i) + \frac{1}{2} \sum_{i=0}^{N-1} \left( \frac{S_{i+1} - (1 + \mu \Delta t) S_i}{\sigma S_i \sqrt{\Delta t}} \right)^2$$

Teniendo la expresión anterior y mediante técnicas de optimización específicas para funciones de dos variables se puede demostrar que los estimadores estándar máximo verosímiles de los parámetros del modelo Log-Normal son:

$$\hat{\mu}_{MMV} = \frac{1}{N \Delta t} \sum_{i=0}^{N-1} \left( \frac{S_{i+1}}{S_i} - 1 \right) \hat{\sigma}_{MMV} = \frac{1}{N \Delta t} \sum_{i=0}^{N-1} \left( \frac{S_{i+1}}{S_i} - 1 - \hat{\mu}_{MMV} \Delta t \right)^2 \quad (3.5.12)$$

### 3.5.3 Método de Momentos No Paramétrico (MMNP)

El último método para la calibración y estimación de los parámetros del modelo Log-Normal es el Método de Momentos No Paramétrico, tal y como lo expone Richard Stanton [3].

Para ello, en primer lugar, recordamos que el modelo de subyacente cotizado que tenemos, Modelo Log-Normal, cumple la siguiente ecuación diferencial estocástica (vista en 3.0.1):

$$\left. \begin{aligned} dX(t) &= f(X(t), t; \vec{\theta}) dt + g(X(t), t; \vec{\theta}) dB(t), \\ X(0) &= X_0, \end{aligned} \right\} \quad (3.5.13)$$

donde

$$X(t) = S(t); \quad X_0 = S_0; \quad \vec{\theta} = (\mu, \sigma);$$

$$f(X(t), t) = f(S(t), t) = \mu S(t); \quad g(X(t), t) = g(S(t), t) \sigma S(t). \quad (3.5.14)$$

A continuación, mediante la utilización de un proceso de discretización de Euler-Maruyama, la expresión anterior (3.5.14) se puede aproximar;

$$x_{i+1} = x_i + f(t_i, x_i; \vec{\theta})\Delta t + g(t_i, x_i; \vec{\theta})\sqrt{\Delta t} Z_i \quad (3.5.15)$$

$$\left. \begin{aligned} X_{i+1} &= X_i + f(X_i, t_i; \vec{\theta})\Delta t + g(X_i, t_i; \vec{\theta})\sqrt{\Delta t} Z_i, \quad Z_i \sim N[0; 1], 0 \leq i \leq N \\ X(0) &= X_0. \end{aligned} \right\}$$

donde se ha utilizado la propiedad **MB.4** del apartado 2

$$B(t_i + \Delta t) - B(t_i) \sim N[0; \Delta t].$$

Asumiendo que la solución de la ecuación diferencial estocástica (3.5.15) es un proceso de difusión [4], se cumplen las siguientes relaciones<sup>5</sup>:

$$E \left[ \frac{X_{i+1} - X_i}{\Delta t} - f(X_i, t_i; \vec{\theta}) \right] = \vartheta(\Delta t), \quad (3.5.16)$$

$$E \left[ \frac{(X_{i+1} - X_i)^2}{\Delta t} - g^2(X_i, t_i; \vec{\theta}) \right] = \vartheta(\Delta t), \quad (3.5.17)$$

Para poder estimar el vector de parámetros a partir de una muestra  $\{X_0, X_1, \dots, X_N\}$  se utilizan las expresiones (3.5.16) y (3.5.17) en su versión muestral:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\sum_{i=0}^{N-1} (X_{i+1} - X_i)}{\Delta t} &= \sum_{i=0}^{N-1} f(X_i, t_i; \vec{\theta}) \\ \frac{\sum_{i=0}^{N-1} (X_{i+1} - X_i)^2}{\Delta t} &= \sum_{i=0}^{N-1} g^2(X_i, t_i; \vec{\theta}) \end{aligned} \right\} \quad (3.5.18)$$

Utilizando la notación para el subyacente, introducida en (3.5.14), el sistema de ecuaciones algebraicas (3.5.18) se reescribe como:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\sum_{i=0}^{N-1} (S_{i+1} - S_i)}{\Delta t} &= \mu \sum_{i=0}^{N-1} S_i \\ \frac{\sum_{i=0}^{N-1} (S_{i+1} - S_i)^2}{\Delta t} &= \sigma^2 \sum_{i=0}^{N-1} S_i^2 \end{aligned} \right\}$$

La solución del sistema de ecuaciones anterior da como resultado las estimaciones de los parámetros del Modelo Log-Normal:

$$\hat{\mu}_{MMNP} = \frac{1}{\Delta t} \frac{\sum_{i=0}^{N-1} (S_{i+1} - S_i)}{\sum_{i=0}^{N-1} S_i}, \quad \hat{\sigma}_{MMNP} = \sqrt{\frac{1}{\Delta t} \frac{\sum_{i=0}^{N-1} (S_{i+1} - S_i)^2}{\sum_{i=0}^{N-1} S_i^2}}. \quad (3.5.19)$$

<sup>5</sup> En este contexto, el símbolo  $\vartheta(\Delta t)$  significa que si  $\Delta t$  es suficientemente pequeño ( $\Delta t \rightarrow 0$ ), la esperanza vale cero.

### 3.6 Validación del Modelo Log-Normal

Dado un histórico de cotizaciones de un subyacente financiero o acción  $\{S_0, S_1, \dots, S_N\}$ , se ha determinado, asumiendo el Modelo Log-Normal, un proceso estocástico llamado Movimiento Browniano Geométrico (MBG) que describe su dinámica, su media y su varianza:

$$\begin{aligned} \text{MBG:} \quad S(t) &= S_0 e^{(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)t + \sigma\sqrt{t}Z} \\ \text{Media:} \quad E[S(T)] &= S_0 e^{\mu T} \\ \text{Varianza:} \quad \text{Var}[S(T)] &= (S_0)^2 e^{2\mu T} (e^{\sigma^2 T} - 1) \end{aligned}$$

Además se han visto tres métodos (MME, MMV, MMNP) para estimar los parámetros  $\mu$  y  $\sigma$  del modelo.

En este punto y siguiendo la metodología estadística, hemos de validar el modelo. Para ello se realizarán predicciones de la dinámica de las acciones en un intervalo temporal de 5 días, y con dichas predicciones se llevarán a cabo las medidas de bondad de ajuste. En este apartado explicaremos como vamos a predecir los cinco instantes temporales de la acción con un intervalo de confianza del 95%, y como con el Error Cuadrático Medio (*Root Mean Squared Error*, RMSE) y el Error Porcentual Absoluto Medio (*Mean Absolute Percentage Error*, MAPE), podremos elegir que método de estimación de parámetros es el más robusto.

#### 3.6.1 Predicción e intervalos de confianza

Para la validación y aplicación del Modelo Log-Normal vamos a construir y estudiar los intervalos de confianza (IC) del 95%. Estos están caracterizados por la amplitud del intervalo, interesa que sea lo menor posible, y la probabilidad de que el intervalo contenga el valor del parámetro a estimar, que se llama nivel de confianza el cual deberá ser la mayor posible.

Suponiendo una muestra aleatoria simple de una población descrita por la función  $f(x; \theta)$  dependiente del parámetro  $\theta$  que se pretende estimar. El problema es fijar un nivel de confianza, que se denota por  $1 - \alpha$ , en donde  $0 < \alpha < 1$ , tratando de determinar dos funciones  $\theta_1(x_1, x_2, \dots, x_n)$  y  $\theta_2(x_1, x_2, \dots, x_n)$  de forma que:

$$P[\theta_1(x_1, x_2, \dots, x_n) \leq \theta \leq \theta_2(x_1, x_2, \dots, x_n)] = 1 - \alpha . \quad (3.5.20)$$

Al intervalo  $[\theta_1(x_1, x_2, \dots, x_n), \theta_2(x_1, x_2, \dots, x_n)]$  se le denomina intervalo de confianza del parámetro  $\theta$  al nivel de confianza del  $(1 - \alpha)$ , expresándolo en porcentaje.

Si suponemos que  $(x_1, x_2, \dots, x_n)$  es una muestra aleatoria simple y que  $\bar{x}$  es la media muestral. La variable aleatoria  $\bar{x}$  tiene una distribución normal  $N\left[\mu; \frac{\sigma^2}{n}\right]$ , suponiendo que la población es  $N[\mu; \sigma^2]$  con  $\sigma$  conocida. Esta propiedad permite que la variable tipificada  $\frac{\bar{x} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}}$  siga una  $N[0; 1]$ , y por lo tanto, fijando un nivel de confianza  $1 - \alpha$ , se obtiene el valor  $\lambda_{\alpha/2}$  tal que,

$$P\left[\left|\frac{\bar{x} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}}\right| \leq \lambda_{\alpha/2}\right] = 1 - \alpha.$$

Si operamos, el resultado queda expresado como:

$$\begin{aligned} 1 - \alpha &= P\left[-\lambda_{\alpha/2} \leq \frac{\bar{x} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} \leq \lambda_{\alpha/2}\right] \\ &= P\left[-\lambda_{\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \leq \bar{x} - \mu \leq \lambda_{\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right] \\ &= P\left[-\bar{x} - \lambda_{\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \leq -\mu \leq -\bar{x} + \lambda_{\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right] \\ &= P\left[\bar{x} - \lambda_{\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \leq \mu \leq \bar{x} + \lambda_{\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right]. \end{aligned}$$

Por tanto, las funciones buscadas son:

$$\begin{aligned} \theta_1 &= \bar{x} - \lambda_{\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \\ \theta_2 &= \bar{x} + \lambda_{\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}. \end{aligned}$$

El intervalo de confianza para la media poblacional  $\bar{x}$  al nivel de confianza del  $(1 - \alpha)$ , en porcentaje, es:

$$\left[\bar{x} - \lambda_{\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \bar{x} + \lambda_{\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right].$$

Si se pretende ganar precisión, se puede realizar de dos formas, bien perdiendo confianza lo que, en general, no interesa, o bien aumentando el tamaño  $n$  de la muestra seleccionada.

En lo que se refiere a las predicciones, es necesario emplear el modelo estocástico solución del Modelo Log-Normal, el Movimiento Browniano Geométrico. Este modelo nos permite tanto predecir el valor medio (estimación puntual) como encontrar un intervalo que contenga el valor real con una probabilidad determinada (estimación por intervalos).

Por tanto, la estimación puntual del subyacente estudiado en un momento determinado será posible mediante el valor esperado de la variable  $Y$ , asociado a determinados valores de las variables explicativas del modelo ajustado. Para ello, se calcula la estimación de  $Y$  correspondiente a su valor medio condicionado  $E(Y|x_1, \dots, x_k)$ , que se expresa como:

$$\hat{Y} = s_0 e^{\left(\hat{\mu} - \frac{1}{2}\hat{\sigma}^2\right)t + \sigma\sqrt{t}Z}, \quad Z \sim N [0; 1].$$

Una vez obtenida la predicción puntual utilizamos la varianza de la estimación, conociéndose así el error de la predicción puntual y obteniendo con ambos valores, el intervalo de confianza. El intervalo de confianza a nivel  $\alpha$  para la estimación de  $Y$  se muestra a continuación:

$$\hat{Y} \pm 1,96 \cdot D,$$

siendo  $D$  un estimador de la desviación típica de  $Y$ .

### 3.6.2 Error Cuadrático Medio

El error cuadrático medio (RMSE), es una medida de bondad del ajuste que mide el sumatorio total de las distancias por término medio entre los valores observados,  $S_i$ , y los estimados,  $\hat{S}_i$ . Cuanto menor sea el resultado del RMSE, entonces se podrá decir que el error en el modelo presentado será menor. Su valor está definido de la siguiente manera:

$$RMSE = \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (S_i - \hat{S}_i)^2}.$$

El RMSE se calculará considerando las predicciones puntuales (función media) que se obtengan de aplicar el Modelo teórico Log-Normal con los tres métodos de estimación de los parámetros explicados el apartado 3.5. Una vez calculados y contrastados los resultados del RMSE en cada método de estimación de los parámetros, será posible tener una primera idea de cuál de ellos muestra unas estimaciones más robustas.

### 3.6.3 Error Porcentual Absoluto Medio

El MAPE, se calcula como el promedio de las diferencias absolutas entre los valores estimados,  $\hat{S}_i$ , y los observados,  $S_i$ , dividido por las observaciones correspondientes, quedando expresado como un porcentaje de los valores reales. Es decir, si se pronostican  $N$  periodos y los valores reales corresponden a  $N$  periodos, el MAPE se calcula como:

$$MAPE = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \frac{|S_i - \hat{S}_i|}{S_i}.$$

El MAPE será calculado considerando las predicciones puntuales dadas a partir de la aplicación del modelo teórico Log-Normal con cada uno de los tres métodos de estimación de los parámetros explicados. Se considerará un error global de diagnóstico aceptable y, por tanto, unas estimaciones más robustas, cuando el MAPE obtenido sea inferior al 5%.

## 4. Construcción teórica de la Cartera de Mínimo Riesgo

Hasta este punto se han explicado y detallado como realizar las estimaciones de los parámetros  $\mu$  y  $\sigma$ , la validación del Modelo Log-Normal mediante medidas de bondad de ajuste y la predicción de los subyacentes financieros en un periodo temporal de 5 días.

A lo largo de este apartado se detallarán los conceptos básicos para la construcción de una cartera de activos y cómo estos interactúan entre sí.

El primer paso es medir la covarianza entre los activos. Se realizará una predicción a 5 días de los subyacentes, utilizando el método de Monte Carlo juntamente con el Movimiento Browniano Geométrico (apartado 4.1).

Una vez realizadas dichas predicciones se construirá la matriz de varianzas-covarianzas de los rendimientos de los activos y posteriormente, mediante un programa de optimización, se hallará el vector de pesos de los activos cotizados de la cartera de inversión, con el objetivo de que el riesgo de esta sea mínimo.

El objetivo clave del trabajo y el que explicamos en este apartado es la determinación de los pesos de los dos activos que forman la cartera, Endesa y CaixaBank, de modo que, considerando su riesgo individual y su correlación estadística, se minimice el riesgo global de la cartera. Para ello se utilizará la potente notación matricial.

### 4.1 Método de Monte Carlo

A partir de una serie histórica de cotizaciones de cada uno de los activos que se deseen para una determinada cartera y mediante la ecuación diferencial estocástica solución del Modelo Log-Normal obtenida en el apartado 3.3, llamada Movimiento Browniano Geométrico (3.3.1), juntamente con la aplicación de las estimaciones de los parámetros  $\mu$  y  $\sigma$ , explicadas en el apartado 3.5, que hayan resultado más robustas, se realizan predicciones de la cotización del subyacente para un periodo de tiempo determinado.

Una vez halladas estas predicciones se podrá construir la matriz  $C$  de varianzas-covarianzas necesaria para determinar el vector de pesos de la cartera de inversión (apartado 4.2).



Dichas predicciones se calcularán a través del método de Monte Carlo, que básicamente es un generador de números aleatorios.

El método de Monte Carlo se aplicará en nuestro trabajo en la ecuación del Movimiento Browniano Geométrico:

$$S(t) = s_0 e^{(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)t + \sigma\sqrt{t}Z}, \quad (4.1.1)$$

donde utilizando un generador de números aleatorios se generarán  $M$  valores, para la variable aleatoria  $Z$ , la cual sigue una distribución normal  $N[0; 1]$ , por tanto, estos  $M$  valores seguirán una distribución de probabilidad continua con distribución normal  $N[0; 1]$ .

Una vez aplicadas las estimaciones de los parámetros  $\mu$  y  $\sigma$  en el Modelo Browniano Geométrico (4.1.1) y el Método de Monte Carlo, se realizarán las predicciones para cada instante  $t$ , entonces podremos crear la matriz de varianzas-covarianzas, la cual mostrará, si el modelo es adecuado, que la relación entre los activos es casi nula. Esto se verá en los términos no-diagonales de la matriz, los cuales deberán ser cercanos a cero.

## 4.2 Conceptos básicos y notación en la creación de carteras

Para entender mejor el procedimiento que se va a llevar a cabo en este apartado, introduciremos algunos conceptos y notaciones de los que haremos uso más adelante.

- Las carteras de inversión están formadas por  $n$  activos:  $a_i, 1 \leq i \leq n$ . Siendo  $a_i$  la serie de activos elegidos.
- El valor que tiene cada activo queda representado como:

$$\begin{array}{ccc} v_{i,0} & & v_{i,T} \\ | & \text{-----} & | \\ t = 0 & & t = T \end{array}$$

$$\begin{cases} v_{i,0} = & \text{valor activo } a_i \text{ en } t = 0 \\ v_{i,T} = & \text{valor del activo } a_i \text{ en } t = T \end{cases}$$

- El vector de activos de la cartera:

$$\vec{\theta} = (\theta_1, \dots, \theta_n),$$

donde  $\theta_i$  es el número de unidades del activo  $i$ ,  $1 \leq i \leq n$ , en la cartera.

$$\begin{cases} \theta_i < 0 \Rightarrow \text{posición corta del activo } i \\ \theta_i > 0 \Rightarrow \text{posición larga del activo } i, \end{cases}$$

Cabe destacar que una posición corta significa que el activo no se posee porque se ha vendido a corto o se ha pedido prestado. Por contrario, una posición larga significa que sí se posee el activo.

- El vector de pesos de los activos de la cartera en  $t = 0$  queda definido como:

$$\vec{\omega} = (\omega_1, \dots, \omega_n), \quad \omega_i = \frac{\theta_i v_{i,0}}{\sum_{i=1}^n \theta_i v_{i,0}}, \quad 1 \leq i \leq n, \quad \sum_{i=1}^n \omega_i = 1,$$

donde  $\omega_i$  representa el porcentaje del activo  $a_i$  en la composición total de la cartera.

- Retorno, rentabilidad o rendimiento de un activo  $a_i$  el cual no paga dividendos en el periodo  $[0, T]$

$$R_i = \frac{v_{i,T} - v_{i,0}}{v_{i,0}}, \quad 1 \leq i \leq n.$$

Al encontrarnos en un ambiente de incertidumbre, como es la bolsa, el valor futuro de un activo es desconocido, por lo que  $v_{i,T}$  se trata como una variable aleatoria, y por tanto  $R_i$  también es una variable aleatoria. Este hecho hace que se introduzcan los conceptos siguientes:

- La rentabilidad, retorno o rendimiento esperado y riesgo del activo  $a_i$ , quedan definidos como:

$$\begin{aligned} \text{Retorno esperado: } & \mu_i = \mathbb{E}[R_i], & 1 \leq i \leq n, \\ \text{Riesgo: } & \sigma_i^2 = \mathbb{V}[R_i], & 1 \leq i \leq n. \end{aligned}$$

$$\text{Si } \sigma_i^2 \begin{cases} < 0 \Rightarrow a_i \text{ tiene riesgo, como una acción.} \\ > 0 \Rightarrow a_i \text{ no tiene riesgo, como un bono.} \end{cases}$$

En ocasiones el riesgo se mide con la desviación típica  $\sigma_i > 0$ .

- El rendimiento de una cartera queda definido como la ponderación de los rendimientos de los activos que la forman:

$$R = \sum_{i=1}^n \omega_i R_i$$

- El rendimiento esperado de una cartera es la suma ponderada de los rendimientos esperados de los activos que la forman:

$$\mu = \mathbb{E}[R] = \sum_{i=1}^n \omega_i \mathbb{E}[R_i] = \sum_{i=1}^n \omega_i \mu_i$$

- El riesgo de una cartera se define como la varianza del rendimiento esperado de la cartera:

$$\sigma^2 = \mathbb{V}[R] = \mathbb{V}\left[\sum_{i=1}^n \omega_i R_i\right] \doteq \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \omega_i \omega_j \text{Cov}[R_i R_j] \doteq \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \omega_i \omega_j \rho_{ij} \sigma_i \sigma_j$$

como los rendimientos  $R_i$  de los activos no son independientes, en  $\doteq$  se ha aplicado la fórmula general para una combinación lineal de variables aleatorias que queda en términos de la covarianza entre dos activos. En  $\doteq$ , se ha expresado la covarianza en función del coeficiente de correlación  $\rho_{ij}$ .

En la siguiente tabla se resume la notación que se considerará a lo largo de este apartado, la cual ha sido introducida anteriormente:

Concepto	Notación
Pesos de la cartera	$\vec{\omega} = (\omega_1, \dots, \omega_n)_{1 \times n}$
Vector de unos	$\vec{1} = (1, \dots, 1)_{1 \times n}$
Condición de pesos	$\sum_{i=1}^n \omega_i = 1 \equiv \vec{1} \vec{\omega}^T = 1$
Retorno del activo $a_i$	$R_i = \frac{v_{i,T} - v_{i,0}}{v_{i,0}}, \quad 1 \leq i \leq n$
Retorno esperado de $a_i$	$\mu_i = \mathbb{E}[R_i], \quad 1 \leq i \leq n$
Vector de retornos esperados	$\vec{m} = (\mu_1, \dots, \mu_n)_{1 \times n}$
Matriz de varianzas-covarianzas de los retornos de los activos	$C = (c_{ij})_{n \times n}, \quad c_{ij} = \begin{cases} \text{Cov}[R_i, R_j] = \rho_{ij} \sigma_i \sigma_j, & i \neq j. \\ \text{Var}[R_i] = \sigma_i^2, & i = j. \end{cases}$

Tabla 2 Notación utilizada para la construcción de carteras

Fuente: Página Web UPV

Con la notación introducida en la Tabla 2 se deducen algebraicamente las siguientes expresiones:

- $v_{i,0}$  y  $v_{i,T}$  representan los valores inicial y final, respectivamente, del activo  $a_i$ ,  $1 \leq i \leq n$ .
- El superíndice  $T$  en  $\vec{\omega}^T$  denota la transposición del vector  $\vec{\omega}$ .

$$\vec{\omega}^T = \begin{bmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \vdots \\ \omega_n \end{bmatrix}_{n \times 1} \quad \text{vector traspuesto de } \vec{\omega} = (\omega_1, \dots, \omega_n)_{1 \times n}$$

- El retorno esperado de la cartera se reescribe como:

$$\mu = \vec{m}\vec{\omega}^T = \sum_{i=1}^n \mu_i \omega_i = \vec{\omega}\vec{m}^T$$

- El riesgo de la cartera queda definido como:

$$\sigma^2 = \mathbb{V} \left[ \sum_{i=1}^n \omega_i R_i \right] = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n c_{ij} \omega_i \omega_j = \vec{\omega} C \omega^T \succeq 0,$$

la varianza es positiva y por tanto al ser  $C$  una matriz simétrica,  $C$  es definida positiva, lo que conlleva que el riesgo de la cartera sea positivo  $\sigma^2 > 0$ .

Desde el punto de vista financiero, que la matriz  $C$  sea invertible se debe a la no existencia de “activos redundantes” en la cartera, es decir, que el rendimiento de ningún activo es combinación lineal de los restantes activos.

Por tanto, una vez explicados todos estos conceptos, se puede proceder al objetivo que se persigue con la consecución de este Trabajo de Fin de Grado, que es determinar los pesos  $\omega_i$ ,  $1 \leq i \leq n$ , de los activos financieros  $a_i$ ,  $1 \leq i \leq n$  (en nuestro caso Endesa y CaixaBank) que deben componer la cartera para que el riesgo,  $\sigma^2$ , de esta sea mínimo.

Por tanto, el programa de optimización que queremos resolver es el siguiente:

$$\begin{aligned} \text{Minimizar: } \quad & \sigma^2 = \sigma^2(\omega_1, \dots, \omega_n) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n c_{ij} \omega_i \omega_j = \vec{\omega} C \omega^T, \\ \text{sujeto a:} \quad & \sum_{i=1}^n \omega_i = \vec{1} \vec{\omega}^T = 1 \end{aligned} \quad (4.2.1)$$

Por tanto, resolviendo el sistema de ecuaciones establecemos que el vector de pesos para crear una cartera de riesgo mínimo es:

$$\vec{\omega} = \frac{\vec{1} C^{-1}}{\vec{1} C^{-1} \vec{1}^T} \quad (4.2.2)$$

## 5. Aplicación del Modelo Log-Normal

Para la aplicación práctica del modelo, se ha tomado un horizonte temporal de 30 días, donde se han tomado las cotizaciones al cierre de ambas empresas, las cuales corresponden al periodo comprendido entre el 11 de Febrero de 2019 hasta el 22 de Marzo de mismo año.

Tanto la implementación del modelo como la predicción para los 5 días posteriores al intervalo objeto de estudio, se realizará mediante el software Wolfram Mathematica. Una vez realizadas las predicciones, tanto por el Modelo Log-Normal como por el método de Monte Carlo, se concluirá mostrando los resultados obtenidos y comparándolos con los valores reales que tomó la acción en los días de la predicción, y al mismo tiempo con la variación de los pesos de la cartera, acorde con la subida o bajada de la cotización de la acción.

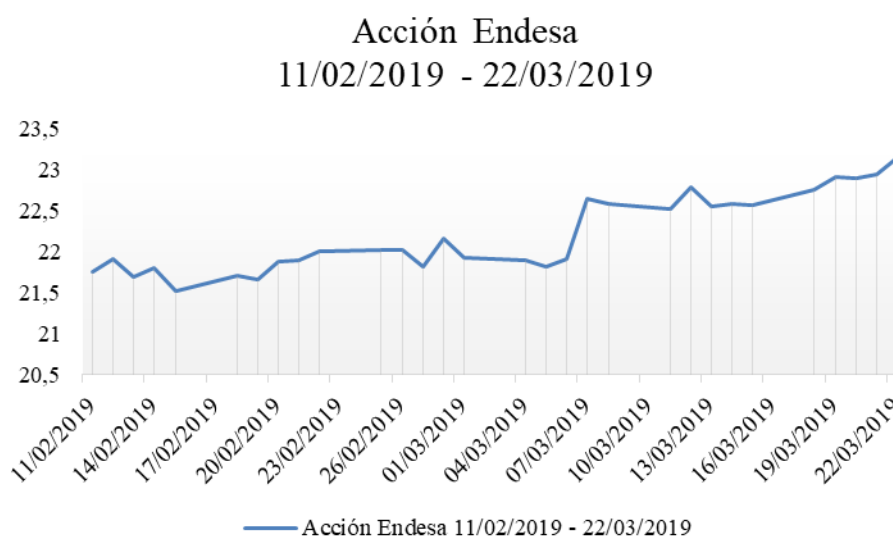


Gráfico 0-1 Evolución de las cotizaciones de la acción de Endesa

Fuente: Elaboración Propia

En la Tabla 3 se muestran las cotizaciones diarias al cierre de Endesa durante el periodo seleccionado. El primer día para el cual se realizarán las predicciones, a partir de la serie temporal, será el 25/03/2019.

11/02/2019	21,74	04/03/2019	21,89
12/02/2019	21,9	05/03/2019	21,81
13/02/2019	21,68	06/03/2019	21,91
14/02/2019	21,8	07/03/2019	22,63
15/02/2019	21,51	08/03/2019	22,57
18/02/2019	21,7	11/03/2019	22,51
19/02/2019	21,65	12/03/2019	22,78
20/02/2019	21,87	13/03/2019	22,54
21/02/2019	21,89	14/03/2019	22,57
22/02/2019	22	15/03/2019	22,56
25/02/2019	22,02	18/03/2019	22,74
26/02/2019	22,01	19/03/2019	22,9
27/02/2019	21,81	20/03/2019	22,88
28/02/2019	22,15	21/03/2019	22,93
01/03/2019	21,92	22/03/2019	23,14

*Tabla 3 Cotizaciones de las acciones de Endesa*

*Fuente: Elaboración propia*

### Acción CaixaBank 11/02/2019 - 22/03/2019

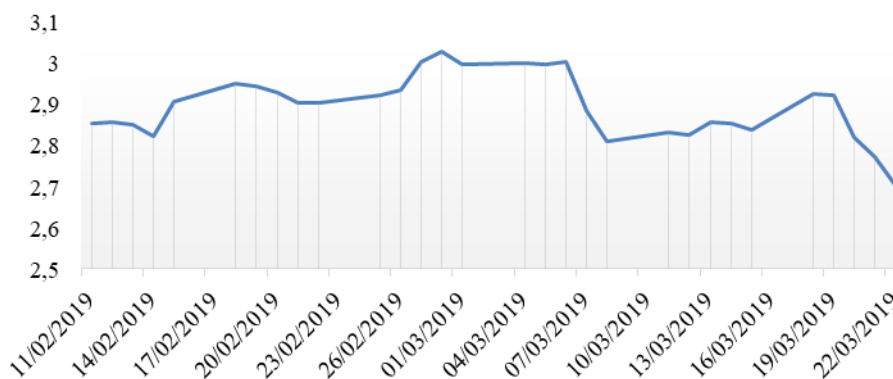


Gráfico 0-2 Evolución de las cotizaciones de la acción de CaixaBank

Fuente: Elaboración propia

En la Tabla 4 se detallan los valores diarios de la cotización de CaixaBank al cierre. Se realizará la predicción para el 25/03/2019 y los 4 días posteriores.

11/02/2019	2,96	04/03/2019	3,11
12/02/2019	2,96	05/03/2019	3,11
13/02/2019	2,96	06/03/2019	3,11
14/02/2019	2,92	07/03/2019	2,99
15/02/2019	3,01	08/03/2019	2,91
18/02/2019	3,06	11/03/2019	2,93
19/02/2019	3,05	12/03/2019	2,93
20/02/2019	3,03	13/03/2019	2,96
21/02/2019	3,01	14/03/2019	2,96
22/02/2019	3,01	15/03/2019	2,94
25/02/2019	3,03	18/03/2019	3,03
26/02/2019	3,04	19/03/2019	3,03
27/02/2019	3,11	20/03/2019	2,92
28/02/2019	3,14	21/03/2019	2,87
01/03/2019	3,1	22/03/2019	2,8

Tabla 4 Cotización de la acción de CaixaBank

Fuente: Elaboración propia

## 5.1 Estimación de los parámetros del Modelo Log-Normal

Para poder aplicar el Modelo Log-Normal requerimos estimar los parámetros  $\mu$  y  $\sigma$ , que representan la tendencia y la volatilidad local, respectivamente. Tal y como se explicó en el apartado 3.5, para esta estimación se aplicarán tres métodos estadísticos:

- Método de Momentos Estadísticos (MME).
- Método de Máxima Verosimilitud (MMV).
- Método de Momentos No Paramétricos (MMNP).

El motivo de usar tres métodos es observar si se obtienen estimaciones similares, y entonces decir que estas son robustas y que no dependen de la técnica estadística utilizada.

Cabe destacar, que en los tres métodos de estimación, el paso temporal que se ha utilizado para la aplicación del modelo es:  $\Delta t = 1/252$ , correspondiendo al paso diario donde la cotización no depende de acontecimientos en días festivos, ya que en España las bolsas funcionan, en media, 252 días al año.

### 5.1.1 Estimación de parámetros con MME

La primera estimación de parámetros la realizaremos con el método de momentos estadísticos.

Para realizar los cálculos vamos a utilizar un horizonte temporal de 30 días, perdiendo eficacia para un horizonte más amplio, pues al aumentar la variable temporal también se consigue aumentar la volatilidad del subyacente, lo cual está justificado por la propiedad **MB.4** de la definición del propio Movimiento Browniano.

Para una aplicación de la modelo más sencilla se trabaja con los logaritmos de las cotizaciones diarias, denominadas log-cotizaciones.



Para las estimaciones de los parámetros  $\mu$  y  $\sigma$  se aplican las fórmulas obtenidas en el apartado 3.5.1:

$$\hat{\mu} = \frac{1}{\Delta t} \left( \bar{U} + \frac{S^2}{2} \right), \quad \hat{\sigma} = \frac{S}{\sqrt{\Delta t}}$$

donde  $\bar{U}$  y  $S^2$  son la media y la quasi-varianza muestral de las log-cotizaciones.

Por tanto, introduciendo los datos, tanto de las cotizaciones de Endesa como de CaixaBank, y aplicando las fórmulas en el software utilizado obtenemos que la estimación de los parámetros  $\mu$  y  $\sigma$  de Endesa son:

$$\mu = 0,00219538, \quad \sigma = 0,00931149. \quad (5.1.1)$$

Y de CaixaBank son:

$$\mu = -0,00174743, \quad \sigma = 0,0163189. \quad (5.1.2)$$

### 5.1.2 Estimación de parámetros mediante el MMV

La próxima estimación se realiza con el método de máxima verosimilitud, donde se busca que el valor de los parámetros  $\mu$  y  $\sigma$  que hace más verosímil la obtención de la muestra de los valores de las acciones.

Aplicamos las funciones dadas en (3.5.12) halladas en el apartado 3.5.2:

$$\hat{\mu}_{MMV} = \frac{1}{N\Delta t} \sum_{i=0}^{N-1} \left( \frac{S_{i+1}}{S_i} - 1 \right) \hat{\sigma}_{MMV} = \frac{1}{N\Delta t} \sum_{i=0}^{N-1} \left( \frac{S_{i+1}}{S_i} - 1 - \hat{\mu}_{MMV} \Delta t \right)^2$$

Por tanto, para Endesa tenemos los resultados obtenidos para  $\mu$  y  $\sigma$ :

$$\mu = 0,0021232, \quad \sigma = 0,00905487. \quad (5.1.3)$$

Para CaixaBank se obtiene que:

$$\mu = -0,00169234, \quad \sigma = 0,0157. \quad (5.1.4)$$

Si somos observadores, veremos que los resultados obtenidos, tanto para Endesa como para CaixaBank son similares a los obtenidos por el método de momentos estadísticos.

### 5.1.3 Estimación de parámetros por el MMNP

A continuación, para contrastar resultados y asegurarnos de la robustez del modelo, se realizará la estimación de los parámetros  $\mu$  y  $\sigma$  mediante el método de momentos no paramétrico, tal y como se desarrolló en el apartado 3.5.3.

Recordemos que en este método se debía de resolver el siguiente sistema de dos ecuaciones no lineales:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\sum_{i=0}^{N-1} (S_{i+1} - S_i)}{\Delta t} &= \mu \sum_{i=0}^{N-1} S_i \\ \frac{\sum_{i=0}^{N-1} (S_{i+1} - S_i)^2}{\Delta t} &= \sigma^2 \sum_{i=0}^{N-1} S_i^2 \end{aligned} \right\}$$

siendo la solución del sistema, los parámetros que vamos a calcular, quedando de la forma:

$$\hat{\mu}_{MMNP} = \frac{1}{\Delta t} \frac{\sum_{i=0}^{N-1} (S_{i+1} - S_i)}{\sum_{i=0}^{N-1} S_i}, \hat{\sigma}_{MMNP} = \sqrt{\frac{1}{\Delta t} \frac{\sum_{i=0}^{N-1} (S_{i+1} - S_i)^2}{\sum_{i=0}^{N-1} S_i^2}}.$$

Aplicamos y obtenemos que el resultado de los parámetros para Endesa es:

$$\mu = 0,00217773, \sigma = 0,00940256. \quad (5.1.5)$$

Por otra parte, para CaixaBank obtenemos que:

$$\mu = -0,00180087, \sigma = 0,0160292. \quad (5.1.6)$$

En las siguientes tablas se muestran los resultados obtenidos por los tres métodos tanto para Endesa como para CaixaBank, de esta forma comparamos los resultados y vemos que son muy similares.

<b>ENDESA</b>			
<b>Parámetro a estimar</b>	<b>Método de los momentos estadísticos</b>	<b>Método de máxima verosimilitud</b>	<b>Método no paramétrico</b>
$\mu$	0,00219538	0,0021232	0,00217773
$\sigma$	0,00931149	0,00905487	0,00940256

*Tabla 5 Resultado de las estimaciones de parámetros del Modelo Log-Normal, con datos de Endesa*

*Fuente: Elaboración propia*

<b>CAIXABANK</b>			
<b>Parámetro a estimar</b>	<b>Método de los momentos estadísticos</b>	<b>Método de máxima verosimilitud</b>	<b>Método no paramétrico</b>
$\mu$	-0,00174743	-0,00169234	-0,00180087
$\sigma$	0,0163189	0,0157	0,0160292

*Tabla 6 Resultado de las estimaciones de parámetros del Modelo Log-Normal, con datos de CaixaBank*

*Fuente: Elaboración propia*

## 5.2 Validación del Modelo Log-Normal

En este apartado validaremos el Modelo Log-Normal y realizaremos las predicciones.

Para realizar las predicciones hemos de introducir en el software las ecuaciones necesarias para el cálculo de las estimaciones de la función media (3.4.4) y de la función varianza (3.4.5) del Movimiento Browniano Geométrico. A partir de los resultados obtenidos se calculará el Error Cuadrático Medio, el Error Porcentual Absoluto Medio (MAPE) y los intervalos de confianza al 95%.

Una vez realizadas las medidas de bondad de ajuste y las predicciones, aceptaremos las estimaciones y el método más robusto aquellas que resulten con un ECM menor y con un MAPE inferior al 5%.

Las funciones que se introducirán en el software son:

```

Funcionesnecesarias[μEst_, σEst_, datos_, predic_] := Block[
    {n, m, v, mm, dt, ecm, mape, lh, gr},
    n = Length[datos];
    m[t_] = datos[[1]] Exp[μEst * t];
    v[t_] = datos[[1]]2 Exp[2 * μEst * t] (Exp[σEst2 * t] - 1);
    mm = Table[m[t], {t, 0, n - 1 + predic}];
    dt = Sqrt[Table[v[t], {t, 0, n - 1 + predic}]];
    ecm = RootMeanSquare[datos - mm[[ ; n]]];
    mape = 100 / n Total[Abs[datos - mm[[ ; n]]] / datos];

```

Figura 5 Funciones necesarias para la validación del Modelo Log-Normal

Fuente: Elaboración propia

siendo:

- $n$ : Histórico de datos, aplicable tanto para Endesa como para CaixaBank.
- $m[t_]$ : La función media del Movimiento Browniano Geométrico (3.4.4).
- $v[t_]$ : La función varianza del Movimiento Browniano Geométrico (3.4.5).
- $mm$ : Conjunto de las estimaciones de la media para cada instante fijo  $t$ .
- $dt$ : Conjunto de las estimaciones de la varianza para cada instante fijo  $t$ .
- $ecm$ : Error Cuadrático Medio.
- $mape$ : Error Porcentual Absoluto Medio (MAPE).

### 5.2.1 Validación de los parámetros del MME y predicción

Siguiendo el modelo solución del Modelo Log-Normal y aplicando las funciones necesarias con el histórico de valores de Endesa para cada instante fijo de  $t$ , en nuestro caso 30, por tener un histórico de 30 valores de cotizaciones, obtenemos:

```

Funcionesnecesarias[emmeEndesa[[1]], emmeEndesa[[2]], datosendesa, 5]
El ECM es: 0.315286
El MAPE es: 1.16213 %
PREDICCIÓN A 5 DÍAS
IC 95% inf      Media      IC 95% sup
20.8974         23.22       25.5427
20.9048         23.2711     25.6373
20.9127         23.3222     25.7317
20.9212         23.3735     25.8257
20.9302         23.4248     25.9195
    
```

*Figura 6 Validación y predicción de Endesa por MME*

*Fuente: Elaboración propia*

Como vimos en el apartado 3.6.3, un valor del MAPE se considera tolerable siempre que no sea superior al 5%. En este caso observamos que tanto el MAPE como el ECM son bajos. También observamos la predicción a 5 días de la cotización de Endesa, indicada en la figura 6 como “Media”, la cual está contenida en los intervalos de confianza al 95%.

Una observación a realizar es que, como el parámetro  $\mu$  tiene signo positivo, entonces las predicciones, en este caso y en los que compartan esta característica, tienen una tendencia alcista.

Por otro lado, si aplicamos los datos de CaixaBank tenemos que:

```

Funcionesnecesarias[emmeCaixa[[1]], emmeCaixa[[2]], datoscaixabank, 5]
El ECM es: 0.138247
El MAPE es: 3.84771 %
PREDICCIÓN A 5 DÍAS
IC 95% inf      Media      IC 95% sup
2.3142          2.80693    3.29966
2.30199         2.80203    3.30206
2.28995         2.79713    3.30432
2.27807         2.79225    3.30643
2.26634         2.78738    3.30841
    
```

*Figura 7 Validación y predicción de CaixaBank por MME*

*Fuente: Elaboración propia*

En este caso, el ECM es bastante bajo pero el MAPE es elevado, casi un 4%. La predicción e intervalos de confianza recogen la predicción. También destacar que como el parámetro  $\mu$  tiene signo negativo, entonces las predicciones, en este caso y en todos los que tenga esta característica, tienen una tendencia a la baja.

### 5.2.2 Validación de los parámetros del MMV y predicción

En este apartado se seguirá el mismo proceso que en apartado anterior, aplicando los resultados de los parámetros  $\mu$  y  $\sigma$  con el método de máxima verosimilitud tanto para Endesa y CaixaBank.

```
Funcionesnecesarias[emmvEndesa[[1]], emmvEndesa[[2]], datosendesa, 5]
El ECM es: 0.29712
El MAPE es: 1.08116 %
PREDICCIÓN A 5 DÍAS
IC 95% inf      Media      IC 95% sup
20.9161         23.1698    25.4235
20.9232         23.2191    25.5149
20.9308         23.2684    25.606
20.939          23.3179    25.6968
20.9476         23.3674    25.7873
```

Figura 8 Validación y predicción de Endesa por MMV

Fuente: Elaboración propia

Tal y como vemos, las predicciones son bastantes parecidas a las obtenidas con el método de momentos estadísticos (figura 6). En este caso, el MAPE es inferior al 5%, por lo que es aceptable, y el ECM resulta un valor también pequeño, además los intervalos de confianza recogen los datos y la predicción, siguiendo esta una tendencia alcista.

Si aplicamos los datos de CaixaBank, obtenemos:

```
Funcionesnecesarias[emmvCaixa[[1]], emmvCaixa[[2]], datoscaixabank, 5]
El ECM es: 0.136172
El MAPE es: 3.78293 %
PREDICCIÓN A 5 DÍAS
IC 95% inf      Media      IC 95% sup
2.33682         2.81157    3.28632
2.325           2.80682    3.28863
2.31334         2.80207    3.2908
2.30184         2.79733    3.29283
2.29047         2.7926     3.29473
```

Figura 9 Validación y predicción de CaixaBank por MMV

Fuente: Elaboración propia

Al igual que con los datos con el método de momentos estadísticos, hemos obtenido unos datos muy parejos con un MAPE elevado y con un ECM bajo. Los intervalos de confianza recogen los datos y su predicción, siguiendo esta una tendencia bajista.

### 5.2.3 Validación de los parámetros del MMNP y predicción

En este apartado validaremos el modelo con el último método, el de Momentos No Paramétrico, donde se seguirá con el mismo procedimiento.

Aplicando el modelo con los parámetros  $\mu$  y  $\sigma$  correspondientes a este método y con el histórico de Endesa tenemos que:

```
Funcionesnecesarias[emnpEndesa[[1]], emnpEndesa[[2]], datosendesa, 5]
El ECM es: 0.310711
El MAPE es: 1.14096 %
PREDICCIÓN A 5 DÍAS
IC 95% inf      Media      IC 95% sup
20.8636      23.2077      25.5519
20.8702      23.2583      25.6465
20.8774      23.309       25.7407
20.885       23.3599      25.8347
20.8932      23.4108      25.9284
```

Figura 10 Validación y predicción de Endesa por MMNP

Fuente: Elaboración propia

Como podemos observar, éste método también presenta un ECM bajo y un MAPE inferior al 5%. Además los intervalos de confianza continúan recogiendo la predicción en fase alcista.

Si introducimos los datos de CaixaBank, obtenemos:

```
Funcionesnecesarias[emnpCaixa[[1]], emnpCaixa[[2]], datoscaixabank, 5]
El ECM es: 0.140277
El MAPE es: 3.91051 %
PREDICCIÓN A 5 DÍAS
IC 95% inf      Media      IC 95% sup
2.31926      2.80243      3.2856
2.30708      2.79739      3.28769
2.29507      2.79236      3.28964
2.28321      2.78733      3.29145
2.2715       2.78232      3.29313
```

Figura 11 Validación y predicción de CaixaBank por MMNP

Fuente: Elaboración propia

Como esperábamos, tal y como nos mostraban los demás métodos, aplicando los datos de CaixaBank, la figura 20 nos muestra un ECM bajo y un MAPE rondando el 4%. Las predicciones siguen una tendencia bajista y estas están recogidas por los intervalos de confianza.

A continuaci3n se muestran dos tablas exponiendo los resultados obtenidos para una mejor visualizaci3n, con el objetivo de seleccionar que m3todo las predicciones y las estimaciones de los par3metros  $\mu$  y  $\sigma$ , las cuales utilizaremos para la formaci3n de nuestra cartera de m3nimo riesgo.

<b>ENDESA</b>			
<b>Bondad de ajuste</b>	<b>M3todo de los momentos estad3sticos</b>	<b>M3todo de m3xima verosimilitud</b>	<b>M3todo no param3trico</b>
<b>ECM</b>	0,315286	0,29712	0,310711
<b>MAPE</b>	1,16213	1,08116	1,14096

*Tabla 7 Medidas de bondad de ajuste para Endesa mediante los tres m3todos*

*Fuente: Elaboraci3n propia*

<b>CAIXABANK</b>			
<b>Bondad de ajuste</b>	<b>M3todo de los momentos estad3sticos</b>	<b>M3todo de m3xima verosimilitud</b>	<b>M3todo no param3trico</b>
<b>ECM</b>	0,138247	0,136172	0,140277
<b>MAPE</b>	3,84771	3,78293	3,91051

*Tabla 8 Medidas de bondad de ajuste para CaixaBank mediante los tres m3todos*

*Fuente: Elaboraci3n propia*

En ambas tablas observamos que los ECM y los MAPE de los tres m3todos, aplicando los valores de Endesa y CaixaBank, son muy parecidos, respectivamente.

Esto quiere decir que los tres m3todos son muy parecidos a la hora de estimar los par3metros  $\mu$  y  $\sigma$ , adem3s tanto el MAPE como el ECM, son muy bajos, siendo el MAPE menor al 5%.

No obstante, si nos fijamos vemos que el m3todo de m3xima verosimilitud es aquel que nos da tanto un ECM como un MAPE menor que el resto de m3todos.



Por tanto, podemos decir que tanto las predicciones realizadas por el método de máxima verosimilitud como las estimaciones de los parámetros  $\mu$  y  $\sigma$  son las que tienen más robustez, lo cual hace que dichas estimaciones sean las que se utilicen y apliquen para la composición de la cartera de mínimo riesgo.

Para visualizar mejor los resultados obtenidos por el método de máxima verosimilitud, estos se resumen a continuación:

	Parámetros $\mu$ y $\sigma$ estimados para Endesa
$\mu$	0,0021232
$\sigma$	0,00905487

Tabla 10 Parámetros  $\mu$  y  $\sigma$  estimados para Endesa por MMV

Fuente: Elaboración propia

	Parámetros $\mu$ y $\sigma$ estimados para CaixaBank
$\mu$	-0,00169234
$\sigma$	0,0157

Tabla 9 Parámetros  $\mu$  y  $\sigma$  estimados para CaixaBank por MMV

Fuente: Elaboración propia

Comparación entre predicción y cotización real de Endesa					
	25/03/2019	26/03/2019	27/03/2019	28/03/2019	29/03/2019
Valor real	23,100	22,970	23,020	22,790	22,740
Predicción	23,1698	23,2191	23,26884	23,3179	23,3674

Tabla 11 Comparativa entre predicción y cotización real de Endesa

Fuente: Elaboración propia

Comparación entre predicción y cotización real de CaixaBank					
	25/03/2019	26/03/2019	27/03/2019	28/03/2019	29/03/2019
Valor real	2,683	2,649	2,698	2,669	2,687
Predicción	2,81157	2,80682	2,80207	2,79733	2,7926

Tabla 12 Comparativa entre predicción y cotización real de CaixaBank

Fuente: Elaboración propia

Para finalizar este apartado, se realizará el cálculo del error relativo que es una medida de cálculo de una magnitud respecto al valor real que esta magnitud presenta.

La fórmula aplicada que se aplica para su cálculo es la siguiente:

$$\text{Error relativo} = \frac{\text{Predicción} - \text{Valor real}}{\text{Valor real}}$$

<b>Error relativo para Endesa</b>					
	<b>25/03/2019</b>	<b>26/03/2019</b>	<b>27/03/2019</b>	<b>28/03/2019</b>	<b>29/03/2019</b>
<b>Método de máxima verosimilitud</b>	0,3%	1,08%	1,08%	2,32%	2,76%

*Tabla 13 Cálculo del error relativo para Endesa (en porcentaje)*

*Fuente: Elaboración propia*

<b>Error relativo para CaixaBank</b>					
	<b>25/03/2019</b>	<b>26/03/2019</b>	<b>27/03/2019</b>	<b>28/03/2019</b>	<b>29/03/2019</b>
<b>Método de máxima verosimilitud</b>	4,8%	5,9%	3,9%	4,8%	3,9%

*Tabla 14 Cálculo del error relativo para CaixaBank (en porcentaje)*

*Fuente: Elaboración propia*

Tal y como podemos observar, el valor del error relativo es muy bajo en la mayoría de los días estudiados, esto significa que nuestra estimación tiene una gran aproximación al valor real de la acción en el periodo objeto de estudio.

## 6. Construcción de la cartera de mínimo riesgo con acciones de Endesa y CaixaBank

En este apartado vamos a aplicar todo lo explicado teóricamente en el apartado 4. Aplicaremos tanto el modelo solución del modelo Log-Normal, Movimiento Browniano Geométrico, como las estimaciones de los parámetros  $\mu$  y  $\sigma$  halladas mediante el método de máxima verosimilitud, con el objetivo de crear una cartera de mínimo riesgo con subyacentes financieros de los activos Endesa y CaixaBank.

Para ello, mediante el método de Monte Carlo y empleando las estimaciones de los parámetros  $\mu$  y  $\sigma$ , realizaremos predicciones de cada activo para un periodo de 5 días, y con ello podremos crear la matriz de varianzas-covarianzas  $C$  para cada instante de este periodo. Con estas matrices podremos calcular el vector de pesos (véase apartado 4.2, expresión 4.2.6) para la construcción de nuestra cartera de inversión de mínimo riesgo para cada instante de tiempo, por lo que tendremos un total de 5 matrices de varianzas-covarianzas y 5 vectores de pesos.

Primero recordamos el modelo a aplicar, el Movimiento Browniano Geométrico (3.3.2),

$$S(t) = s_0 e^{(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)t + \sigma\sqrt{t}Z}$$

para aplicar el modelo necesitamos saber tanto las estimaciones de los parámetros  $\mu$  y  $\sigma$  como el histórico de cotizaciones de los activos.

Las estimaciones de los parámetros  $\mu$  y  $\sigma$  que vamos a utilizar son las vistas en el apartado 5.2.3, estimadas por el método de máxima verosimilitud:

Parámetros $\mu$ y $\sigma$ estimados para Endesa	
$\mu$	0,0021232
$\sigma$	0,00905487

Parámetros $\mu$ y $\sigma$ estimados para CaixaBank	
$\mu$	-0,00169234
$\sigma$	0,0157

También necesitamos el histórico de cotizaciones de cada uno de los activos, vistos en el apartado 5:

11/02/2019	21,74	04/03/2019	21,89
12/02/2019	21,9	05/03/2019	21,81
13/02/2019	21,68	06/03/2019	21,91
14/02/2019	21,8	07/03/2019	22,63
15/02/2019	21,51	08/03/2019	22,57
18/02/2019	21,7	11/03/2019	22,51
19/02/2019	21,65	12/03/2019	22,78
20/02/2019	21,87	13/03/2019	22,54
21/02/2019	21,89	14/03/2019	22,57
22/02/2019	22	15/03/2019	22,56
25/02/2019	22,02	18/03/2019	22,74
26/02/2019	22,01	19/03/2019	22,9
27/02/2019	21,81	20/03/2019	22,88
28/02/2019	22,15	21/03/2019	22,93
01/03/2019	21,92	22/03/2019	23,14

*Tabla 15 Cotizaciones de las acciones de Endesa*

*Fuente: Elaboración propia*

11/02/2019	2,96	04/03/2019	3,11
12/02/2019	2,96	05/03/2019	3,11
13/02/2019	2,96	06/03/2019	3,11
14/02/2019	2,92	07/03/2019	2,99
15/02/2019	3,01	08/03/2019	2,91
18/02/2019	3,06	11/03/2019	2,93
19/02/2019	3,05	12/03/2019	2,93
20/02/2019	3,03	13/03/2019	2,96
21/02/2019	3,01	14/03/2019	2,96
22/02/2019	3,01	15/03/2019	2,94
25/02/2019	3,03	18/03/2019	3,03
26/02/2019	3,04	19/03/2019	3,03
27/02/2019	3,11	20/03/2019	2,92
28/02/2019	3,14	21/03/2019	2,87
01/03/2019	3,1	22/03/2019	2,8

*Tabla 16 Cotización de la acción de CaixaBank*

*Fuente: Elaboración propia*

Recuperando y aplicando lo anterior, si nos fijamos en la ecuación diferencial estocástica del Movimiento Browniano Geométrico, solo nos queda como incógnita la  $Z$ ,

$$S(t) = s_0 e^{(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)t + \sigma\sqrt{t}Z}$$

la cual corresponde a una variable aleatoria gaussiana tipificada con distribución

$$Z = N[0,1].$$

Por lo tanto, aplicando el método de Monte Carlo a esta variable aleatoria seremos capaces de realizar las predicciones de un periodo de tiempo determinado, en nuestro caso 5 días, y ya con estas predicciones realizar la matriz  $C$  de varianzas-covarianzas.

Para el método de Monte Carlo, establecemos la creación de 10 millones de valores aleatorios de distribución normal  $[0,1]$  para la variable aleatoria  $Z$ . Esto se hace para que la matriz  $C$  de varianzas-covarianzas no contenga ningún tipo de correlación, esto se ve en los datos no-diagonales, ya que son muy cercanos a cero e iguales, al ser la matriz simétrica.

Aplicamos todo lo dicho en el modelo para predecir en cada instante temporal  $t$ . Como el histórico es de 30 cotizaciones, tomamos como  $s_0$  el dato número 1, por lo que hemos de predecir en el instante  $t = \{30, 31, 32, 33, 34\}$ , por tanto tenemos:

```

nmc = 10 000 000;
t = 30;
z1 = RandomVariate[NormalDistribution[], nmc];
      [variable aleatoria] [distribución normal]
Sendesa = datosendesa[[1]] * Exp[(emmvEndesa[[1]] - 0.5 * emmvEndesa[[2]]^2) * t + emmvEndesa[[2]] * sqrt[t] * z1];
      [exponencial]
z2 = RandomVariate[NormalDistribution[], nmc];
      [variable aleatoria] [distribución normal]
Scaixabank = datoscaixabank[[1]] * Exp[(emmvCaixa[[1]] - 0.5 * emmvCaixa[[2]]^2) * t + emmvCaixa[[2]] * sqrt[t] * z2];
      [exponencial]
c0 = MatrizVarianzaCovarianza[{Sendesa, Scaixabank}]

( 1.32215    -0.0000302475
  -0.0000302475  0.0586966 )
    
```

Figura 12 Cálculo de la matriz de varianzas-covarianzas para  $t=30$

Fuente: Elaboración propia

Como vemos, para  $t = 30$  la matriz de varianzas-covarianzas, definida como  $c0$  es:

$$c0 = \begin{pmatrix} 1,32215 & -0,0000302475 \\ -0,0000302475 & 0,0586966 \end{pmatrix}$$

Para el instante  $t = 31$ , la matriz obtenida de varianzas-covarianzas definida como  $c1$  es:

$$c1 = \begin{pmatrix} 1,37241 & -0,000157055 \\ -0,000157055 & 0,0604272 \end{pmatrix}$$

En el instante  $t = 32$ , obtenemos la matriz de varianzas-covarianzas definida como  $c2$ :

$$c2 = \begin{pmatrix} 1,42232 & 0,0000456075 \\ 0,0000456075 & 0,0622204 \end{pmatrix}$$

Para el instante  $t = 33$ , obtenemos la matriz de varianzas-covarianzas definida como  $c3$ :

$$c3 = \begin{pmatrix} 1,47357 & 0,000269731 \\ 0,000269731 & 0,0639007 \end{pmatrix}$$

En el instante  $t = 34$ , la matriz de varianzas-covarianzas obtenida y definida como  $c4$  es:

$$c4 = \begin{pmatrix} 1,52468 & 0,000121784 \\ 0,000121784 & 0,0656011 \end{pmatrix}$$

Una vez obtenidas las matrices para cada instante, solo queda aplicar la expresión para el cálculo del vector de pesos de la cartera, la cual hemos visto en el apartado 4.2:

$$\vec{w} = \frac{\vec{1}c^{-1}}{\vec{1}c^{-1}\vec{1}^T} \quad (4.2.2)$$

Por tanto, substituyendo las matrices halladas anteriormente en la expresión (4.2.2), obtenemos los siguientes vectores de pesos para cada instante temporal, siendo el riesgo de la cartera mínimo en cada instante.

Para  $t = 30$ , donde

$$c0 = \begin{pmatrix} 1,32215 & -0,0000302475 \\ -0,0000302475 & 0,0586966 \end{pmatrix}$$

tenemos que:

$$w0 = \frac{\{1, 1\} \cdot \text{Inverse}[c0]}{\{1, 1\} \cdot \text{Inverse}[c0] \cdot \{1, 1\}}$$

$$\{0.0425276, 0.957472\}$$

Figura 13 Vector de pesos para  $c0$

Fuente: Elaboración propia

siendo el vector de pesos  $\vec{\omega}_0 = \{0,0425276, 0,957472\}$ , el porcentaje de Endesa y CaixaBank, respectivamente, en la composición total de la cartera en el instante  $t = 30$ . Este resultado es intuitivo ya que los pesos que determinan el riesgo mínimo de la cartera no dependen del rendimiento de cada activo que forma la cartera, sino de sus volatilidades individuales (la diagonal de la matriz  $c_0$ ) y de las covarianzas entre cada uno de los activos (resto de elementos de la matriz  $c_0$ ).

Cabe destacar que si observamos las matrices de varianzas-covarianzas, las volatilidades individuales de cada activo es cada vez mayor en cada instante temporal  $t$ , tal y como se veía en la función varianza, propiedad del Movimiento Browniano Geométrico, en el apartado 3.4.

Por tanto, en el instante  $t = 30$  se debería formar una cartera de inversión con un porcentaje inferior al 4,3% de acciones de Endesa y un porcentaje superior al 95,7% de acciones de CaixaBank.

Este comentario lo podemos aplicar para los siguientes vectores de pesos.

Para  $t = 31$ , donde

$$c_1 = \begin{pmatrix} 1,37241 & -0,000157055 \\ -0,000157055 & 0,0604272 \end{pmatrix}$$

el vector de pesos  $\vec{\omega}_1$  es:

$$\vec{\omega}_1 = \{0,0422735, 0,957727\}.$$

Por tanto, nuestra cartera variará sus porcentajes pero en una magnitud centesimal, estando formada por algo más de un 4,2% de acciones de Endesa y un porcentaje inferior al 95,8% de acciones de CaixaBank.

Para el instante  $t = 32$ , donde tenemos que  $c2$  queda definida como:

$$c2 = \begin{pmatrix} 1,42232 & 0,0000456075 \\ 0,0000456075 & 0,0622204 \end{pmatrix}$$

el vector de pesos  $\vec{\omega}2$  es:

$$\vec{\omega}2 = \{0,0418841, 0,958116\}.$$

Observamos que cada vez que aumentamos el paso temporal, el porcentaje de la cartera varía en pocos puntos y siempre a favor de CaixaBank. En este caso, en el instante  $t = 32$  el porcentaje de acciones de Endesa se sitúa por debajo del 4,19%, haciendo que el porcentaje de acciones de CaixaBank supere el 95,81%.

En el instante  $t = 33$ , la matriz de varianzas-covarianzas  $c3$  queda definida como:

$$c3 = \begin{pmatrix} 1,47357 & 0,000269731 \\ 0,000269731 & 0,0639007 \end{pmatrix}$$

calculando el vector de pesos  $\vec{\omega}3$  es:

$$\vec{\omega}3 = \{0,0414012, 0,958599\}.$$

Observamos que el porcentaje en acciones de CaixaBank continua aumentando mínimamente, situándose en algo menos del 95,86%, en detrimento del porcentaje en acciones de Endesa, que se sitúa en algo más del 4,14%.

Por último, en el instante  $t = 34$ , teniendo definida  $c4$  como,

$$c4 = \begin{pmatrix} 1,52468 & 0,000121784 \\ 0,000121784 & 0,0656011 \end{pmatrix}$$

y aplicando la expresión del vector de pesos, tenemos que  $\vec{\omega}4$  es:

$$\vec{\omega}4 = \{0,0411811, 0,958819\}$$

Finalmente, se continúa viendo la tendencia anterior, donde el mayor peso de la cartera lo sostiene el porcentaje de CaixaBank, siendo en el último paso temporal, algo superior al 95,88%. Por otro lado, el porcentaje de acciones de Endesa en la cartera disminuye hasta poco menos del 4,12%.

Es lógico, ya que al existir una volatilidad mayor en las acciones de Endesa y una casi nula en las acciones de CaixaBank, y al ir esta tendencia en aumento, es de esperar que la cartera de inversión esté formada en su mayoría por acciones de CaixaBank.



## 7. Conclusiones finales

La realización de este trabajo ha estado motivada por el interés de ampliar conocimientos, desarrollar y aplicar un modelo estocástico para la modelización de activos financieros cotizados. El modelo estudiado ha sido el Modelo Log-Normal, basado en un modelo de difusión estocástico de tipo Itô.

Para realizar este trabajo se ha tenido que buscar y ampliar conocimientos e información, como también aplicar aquellos ya estudiados en el Grado de Administración y Dirección de Empresas. Hemos necesitado aplicar conocimientos de asignaturas como Macroeconomía, Economía Financiera, Modelos Matemáticos para ADE, Análisis del Riesgo Financiero, Dirección Financiera e Introducción a la Estadística.

Los resultados obtenidos mediante la validación del Modelo Log-Normal son consistentes y esto hace que las carteras creadas en cada instante temporal gocen de una precisión notable.

Este tipo de estudios matemáticos hace que podamos realizar un seguimiento en la composición de nuestras carteras y podamos minimizar nuestro riesgo y nuestras pérdidas de dinero.

Con la potenciación de dichos modelos y con un software puntero, se puede seguir minuto a minuto la cotización de nuestras acciones y realizar los movimientos que creamos necesarios, ya no cambiar el peso de nuestra cartera sino directamente vender por completo nuestras acciones para que nuestra inversión no pierda más valor.

Actualmente encontramos un gran número de personas que invierten en bolsa y en los mercados financieros, solo mediante noticias y sensaciones, sin un estudio detrás, sin fundamentos ni modelos sólidos. Esto hace que el desconocimiento del sector en el que opera la empresa y la no utilización de buenas herramientas, no asegure la inversión y por consiguiente que muchos inversionistas vean sus recursos perdidos.

Por esto, el estudio llevado a cabo nos da una idea sobre la importancia de la utilización de buenas herramientas y modelos matemáticos sólidos para tomar decisiones con fundamento a la hora de no perder todo nuestro capital.

## 7.1 Limitaciones del modelo

Con todo lo explicado cabe destacar que el modelo presentado tiene una serie de limitaciones que hacen que las predicciones no gocen de una exactitud total.

Los intervalos de confianza son bastante amplios y se van ensanchando conforme aumenta el horizonte temporal. Esto hace que las predicciones se recojan dentro de estos y que no sean del todo precisas.

Otra observación es que las carteras que hemos creado están diseñadas para un plazo de cinco días, mientras que prácticamente la totalidad de las carteras de inversión se diseñan para el largo plazo.

Por último, tener en cuenta que las carteras están compuestas por más activos para así poder diversificar más el riesgo y de esta forma poder proteger más la inversión.

## Bibliografía

### Libros:

- [1] K. Itô, «Stochastic Integral,» *Proceedings of the Imperial Academy*, vol. 20, n° 8, pp. 519-524, 1944.
- [2] F. Black y M. Scholes, «The pricing of options and corporate liabilities,» *Journal of political economy*, vol. 81, n° 3, pp. 637-654, 1973.
- [3] R. Stanton, « A non parametric model of term structure dynamic and the market price of interest rate risk,» *Journal of Finance*, vol. 52 , n° 5, pp. 1973-2002, 1997.
- [4] B. Øksendal, *Stochastic Differential Equations.*, New York: Springer-Verlag, 1980.
- [5] L. Bachelier, «Théorie de la spéculation,» *Annales Scientifiques de l'École Normale Supérieure*, pp. 21-86, 1900.
- [6] B. K. Øksendal, *Stochastic Differential Equations: An Introduction with Applications*, Berlín: Springer, 2003.
- [7] E. Allen, *Modelling with Itô Stochastic Differential Equations*, New York: Springer, 2007.
- [8] R. Barballá, E. Cerdá y P. Sanz, *Optimización. Cuestiones, Ejercicios y Aplicaciones a la Economía*, Prentice-Hall, 2000.