INNODOCT 2019
Valencia, 6th-8th November 2019
DOI: http://dx.doi.org/10.4995/INN2019.2019.10150

El estudio de aplicaciones de los sistemas de ecuaciones diferenciales ordinarias a través de artículos científicos

Anna Vidal Meló[a], Vicent D. Estruch Fuster[b]
Instituto de Investigación para la Gestión Integrada de Zonas Costeras. Departamento de Matemática Aplicada, Universitat Politècnica de València, Campus de Gandia.
[a] avidal@mat.upv.es, [b] vdestruc@mat.upv.es

Resumen

En el estudio de las Ecuaciones Diferenciales Ordinarias, y sistemas de estas, es importante la aplicación a casos reales a través de la modelización matemática. En la bibliografía existen muchas referencias a diversas aplicaciones clásicas: desintegración radiactiva, modelos de población depredador-presa, poblaciones de Lotka-Volterra o epidemias modelos SIR. En este trabajo mostramos cómo se ha ampliado el estudio de estas aplicaciones a través del manejo de artículos científicos disponibles en la red, en una asignatura optativa del Grado en Ingeniería de Sistemas de Telecomunicación, Sonido e Imagen en la EPSG, en una de sus unidades didácticas referida al estudio de las ecuaciones y sistemas de ecuaciones diferenciales. Nuestro alumnado ha trabajado con artículos científicos explorando otras aplicaciones o generalizaciones de las analizadas en clase: modelos matemáticos sobre las consecuencias de la vacunación, modelización y simulación del comportamiento epidemiológico de la gripe, una invasión zombi, modelado de la propagación de malware en redes de sensores inalámbricos, de ordenadores o en teléfonos móviles. Describiremos la metodología seguida, el trabajo realizado por el alumnado y su opinión.

Palabras clave: *Artículos científicos, ecuaciones diferenciales, simulación.*

1. Introducción

En este trabajo mostramos la experiencia realizada en la asignatura optativa del Grado en Ingeniería de Sistemas de Telecomunicación Sonido e Imagen (GISTSI), Herramientas Matemáticas Aplicadas a las Telecomunicaciones (HMAT), en cuanto a la utilización de artículos científicos para explorar otras aplicaciones o generalizaciones de las ecuaciones diferenciales ordinarias, distintas a las aplicaciones clásicas que suelen explicarse en clase. Describimos la metodología seguida durante varios cursos, así como el trabajo realizado por el alumnado y su opinión acerca de la metodología utilizada. Esta asignatura se oferta en el segundo semestre del segundo curso del GISTSI en la EPSG, con un total de 4,5 ECTS y su objetivo es utilizar el cálculo numérico para la modelización y resolución de problemas esenciales para los estudiantes de ingeniería con el apoyo de Matlab, permitiendo simular y resolver procesos del mundo real. Consta de las siguientes Unidades Didácticas: modelización de sistemas aplicados con Matlab; estudio de la propagación de errores; resolución numérica de ecuaciones y de sistemas lineales.

Describiremos la experiencia realizada en la citada asignatura durante este curso 2018-2019, en el que 20 estudiantes han cursado dicha asignatura. Nos centraremos en la unidad sobre modelización de sistemas aplicados con Matlab, unidad que se imparte durante el mes de febrero, con dos sesiones semanales, una de dos horas y otra de hora y tres cuartos (aproximadamente 1,5 ECTS), estructurándose en dos temas: Ecuaciones y sistemas de ecuaciones diferenciales. Resolución y representación gráfica de resultados; Modelización y simulación de sistemas: poblaciones, virus informáticos.

En la asignatura Matemáticas 2, del primer año del GISTSI, y como una de las aplicaciones del cálculo de primitivas, se realiza una introducción de las ecuaciones diferenciales, estudiando las de variables separables y algunas de sus aplicaciones: modelo de crecimiento de Malthus, la desintegración de un elemento radioactivo, estudio de los circuitos en serie formados por una resistencia y una bobina o la variación de temperatura según la ley de Newton. En la asignatura HMAT se amplía el estudio a otras ecuaciones diferenciales y sistemas de ellas, su resolución, analítica o numérica, y la representación gráfica de sus soluciones, así como la modelización y simulación de sistemas.

2. Modelización con Ecuaciones Diferenciales Ordinarias

Las ecuaciones diferenciales ordinarias aparecen al modelizar problemas químicos, biológicos, económicos y de ingeniería en general. Muchos procesos complejos pueden descomponerse en varias etapas, pudiendo modelar todo el sistema al describir las interacciones entre las distintas etapas. Tales sistemas se denominan sistemas por compartimentos (Nagle, Saff y Snider, 2001) y de forma gráfica se representan como diagramas de bloque. El sistema básico de un compartimento representado en la Figura 1 consta de una función $x(t)$ que representa la cantidad de una sustancia en el compartimento y en el instante t, una razón, tasa de entrada o velocidad con la que la sustancia entra en el compartimento, y una razón, tasa de salida o velocidad con la que la sustancia sale del compartimento.

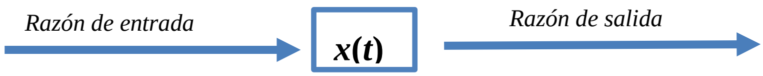

Fig. 1 Sistema básico compartimental

La derivada de x con respecto de t se puede interpretar como la tasa de cambio de la sustancia en el compartimento, luego para este sistema se verifica

$$\frac{dx}{dt} = Razón\ de\ entrada - Razón\ de\ salida \qquad (1)$$

Como ejemplo clásico de aplicación de este modelo compartimental, surge el estudio de la dinámica de poblaciones, en particular el modelo básico de Malthus en el que si la tasa de nacimientos viene dada por $aP(t)$ y $bP(t)$ representa la de muertes, la ecuación diferencial correspondiente $\frac{dP}{dt} = aP - bP = (a-b)P = kP$. Este modelo también es aplicable a la desintegración de un elemento radioactivo, para k <0. Además se puede generalizar a más compartimentos, como sucede en la descripción básica de la evolución de una epidemia SIR (Amelkin, 1987), que puede ser estudiada a través de modelos continuos (con ecuaciones diferenciales), discretos e IBM (Individual Based Model) (Vidal, Boigues y Estruch, 2015). Sistemas no lineales similares, con más o menos ecuaciones, aparecen como ejemplos clásicos en el estudio de estos sistemas de ecuaciones diferenciales. En los textos utilizados en la asignatura, (Hueso, Roca y Torregrosa, 1992; Blanchar, 1999; Nagle, 2001; Zill, 2002), pueden encontrarse muchas referencias a aplicaciones clásicas: desintegración radiactiva en serie; modelos de población depredador-presa; modelos de población de Lotka-Volterra; la primera ley de Lanchester sobre la dinámica de conflictos bélicos o epidemias modelos SIR. La aplicación de las matemáticas a la epidemiología aparece en 1760 cuando Daniel Bernoulli publica un pequeño tratado sobre la epidemia de peste europea. Desde entonces han surgido muchos modelos matemáticos para el estudio de este fenómeno. Vamos a describir un modelo muy básico (Amelkin, 1987). Supongamos que se detecta una enfermedad o plaga que puede inmunizar contra la misma al individuo que la ha sufrido. En cualquier instante t, la población se divide en tres grupos: los individuos sanos pero que son susceptibles a la enfermedad, $S(t)$, los individuos infectados, $I(t)$, y el grupo formado por individuos sanos con inmunidad o resistentes a la enfermedad, $R(t)$. Si el sistema es cerrado, es decir, si no hay nacimientos ni muertes la población se mantiene siempre constante, por tanto en cualquier instante t se cumple $S(t)+I(t)+R(t)=N$. El diagrama de bloques que nos relaciona cada una de las variables aparece en la Figura 2.

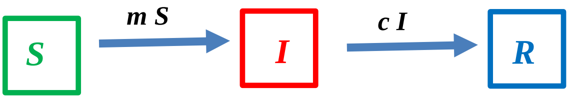

Fig. 2 Sistema del modelo de una epidemia SIR

La constante m es una medida de la rapidez de transmisión de la enfermedad de una persona infectada a la población susceptible. La c representa la razón con la que sana la población infectada haciéndose resistente a la enfermedad, es decir, inmune. Este diagrama da lugar al siguiente sistema lineal de ecuaciones diferenciales, que puede ser resuelto analíticamente:

$$\frac{dS}{dt} = -mS\,, \quad \frac{dI}{dt} = mS - cI\,, \quad \frac{dR}{dt} = cI \tag{2}$$

Un modelo más general surge al considerar que la infección se debe a los encuentros entre los susceptibles y los infectados, modelo formulado en 1927 por Kermack y McKendrick para describir la epidemia de peste de la India en 1906, con el sistema no lineal:

$$\frac{dS}{dt} = -mSI, \quad \frac{dI}{dt} = mST - cI, \quad \frac{dR}{dt} = cI \tag{3}$$

El modelo SIR se aplica también en biomedicina al estudiar la competición entre las células cancerígenas, $x(t)$, y las del sistema inmune, $y(t)$ (Chrobak y Herrero, 2011):

$$\frac{dx}{dt} = a\,x - b\,xy - c\,x^2, \quad \frac{dy}{dt} = d\,y - e\,xy - f\,y^2 \tag{4}$$

También se aplica en el campo de la informática y de las telecomunicaciones ya que la propagación de gusanos o malware en internet es muy similar a la de la propagación de enfermedades, de ahí que el modelo SIR sea esencial estudiarlo en nuestra asignatura. El proceso de propagación de malware ha sido ampliamente estudiado siguiendo el modelo epidemiológico (Frauenthal, 1981; Yang et al. 2005; Zou et al. 2007).

3. Material y metodología

La impartición de esta asignatura se hace en aula informática en la que cada estudiante dispone de un ordenador. Se alternan explicaciones teóricas con la resolución de ejemplos con Matlab. Se estudia la resolución analítica tanto de ecuaciones diferenciales como de sistemas a partir de condiciones iniciales, con el comando Matlab *dsolve*. La parte de modelización a través de compartimentos permite la descripción de modelos como los descritos anteriormente. Para la resolución de ecuaciones o sistemas no lineales se recurre a métodos numéricos: método de Euler, método del trapecio de Euler (o Euler mejorado o de Heun) y métodos de Runge-Kutta. Este último está asociado con el comando Matlab *ode45*, que es el que utilizaremos mayoritariamente. Para la evaluación de esta unidad didáctica se consideran, a partes iguales, la realización de actividades durante la sesión presencial, un examen y la realización de un proyecto en grupo. Para el proyecto nuestro alumnado trabaja con artículos científicos o TFG, con el fin de explorar otras aplicaciones, basadas sobre todo en generalizaciones del modelo SIR. Este material se ha conseguido desde plataformas como ResearchGate, Google Scholar, Semantic Scholar, repositorios o revistas científicas de libre acceso. Durante este curso 2018-2109 los proyectos han estado relacionados con el modelado de la propagación de malware en redes de sensores inalámbricos, en redes de ordenadores o en teléfonos móviles a través de sms, modelos matemáticos sobre las consecuencias de introducir una campaña de vacunación como base de los estudios de evaluación económica, la modelización, simulación del comportamiento epidemiológico de la gripe en la ciudad de Barcelona, modelos SIR sin demografía y con demografía o un escenario post apocalíptico por una invasión zombi. Los sistemas de ecuaciones diferenciales que aparecen en estos trabajos no son lineales y el número de ecuaciones que comportan son tres, cuatro o muchas más ecuaciones, estudiándose el comportamiento o evolución de poblaciones de individuos susceptibles, infectados, recuperados, pero también de expuestos o afectados (infectados que no transmiten), resistentes fallecidos, infectados latentes,... Los artículos asignados tienen una estructura similar, siguiendo el canon de cualquier artículo científico dentro de este campo: introducción, formulación matemática del modelo, resolución numérica a través de simulaciones junto con representaciones gráficas y conclusiones. No adjuntan el código de la simulación realizada, así que es un buen material para que lo trabajen nuestros estudiantes. Siguiendo una estructura similar a la de estos artículos, para la memoria que debía presentar cada uno de los grupos de trabajo, se exigían 4 apartados: introducción del proyecto; sistemas de Ecuaciones diferenciales a estudiar y descripción de funciones y parámetros; planteamiento de los sistemas de ecuaciones diferenciales a resolver y las condiciones iniciales de partida; resolución con Matlab del sistema o sistemas con el método de Runge-Kutta de cuarto orden y conclusiones, aportando el código Matlab y las gráficas correspondientes.

A mitad de febrero, analizada la modelización de sistemas, a cada grupo se le proporciona un artículo, previamente buscado y analizado por el profesor. En una de las sesiones presenciales cada uno de los grupos expone a sus compañeros, durante 5 minutos, los tres primeros puntos de la memoria a presentar (Figura 3), a través de dos o tres transparencias. El objeto de esta presentación conjunta es que todo el alumnado conozca no solo su aplicación sino todas las de sus compañeros y compañeras. Por otro lado, a cada uno de los grupos se les mandó por correo interno de PoliformaT un mail personalizado, detallándoles exactamente qué debían reproducir del artículo, puesto que alguno incluía apartados como el análisis de la estabilidad de los puntos de equilibrio o incluso ajuste de parámetros, conceptos no estudiados en la asignatura. En la Figura 4 puede observarse uno de estos mails. En todos los casos se exigió la resolución numérica con el método de cuarto orden de Runge-Kutta, aportando las gráficas correspondientes y similares a las del artículo y se programó una Tarea desde PoliformaT con cierre el 31 de marzo.

Fig. 3 Exposición introductoria del proyecto a mitad de febrero

Os detallo un poco más qué resolver:

Resolver, con Runge Kutta:

- El sistema de la página 356 indicado con (2.1), con las condiciones indicadas en la misma página en el punto 3 (Numerical results...) en el intervalo temporal [0,100]. Reprentar en una misma gráfica los tres tipos S,I,R (gráfica similar a la de la Figura 3.1 (a).
- Análogamente resolver el sistema de la página 360 denotado por (4.1) con las condiciones indicadas al final de la misma página en el intervalo temporal [0,100] y con $\mu = 0.009$. Reprentar en una misma gráfica los tres tipos S,I,R (gráfica similar a la de la Figura 4.2 (a).
- Por último, para comparar, una gráfica con las dos I(t) solapadas para sacar conclusiones sobre el efecto del parámetro μ.

Fig.4 Ejemplo de correos personalizados a cada uno de los grupos a través de PoliformaT

4. Resultados y conclusiones

La media de las notas del proyecto ha sido de 8 puntos. Respecto a la resolución de los sistemas y representación gráfica de las soluciones, en la Figura 5, izquierda, se observa la correspondientes al estudio numérico del modelo de epidemia SIR sin demografía y con demografía del artículo original y en la parte derecha las realizadas por los estudiantes. Análogamente, en la Figura 6 se contrastan las gráficas del artículo original (superiores) junto con las reproducidas por la estudiante, en el caso de la influencia de la vacunación antigripal, utilizando modelos dinámicos basados en ecuaciones diferenciales.

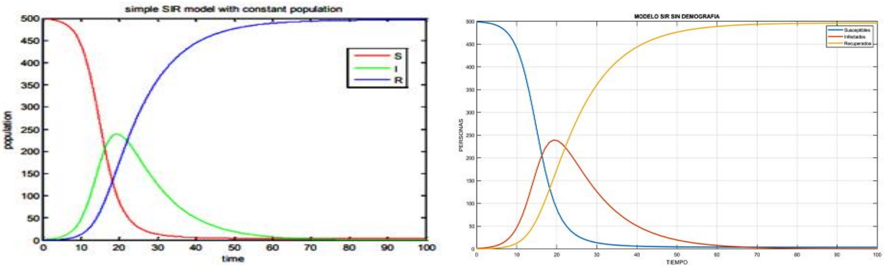

Fig. 5. Evolución modelo de epidemia SIR sin demografía. Derecha, artículo original, izquierda de los estudiantes

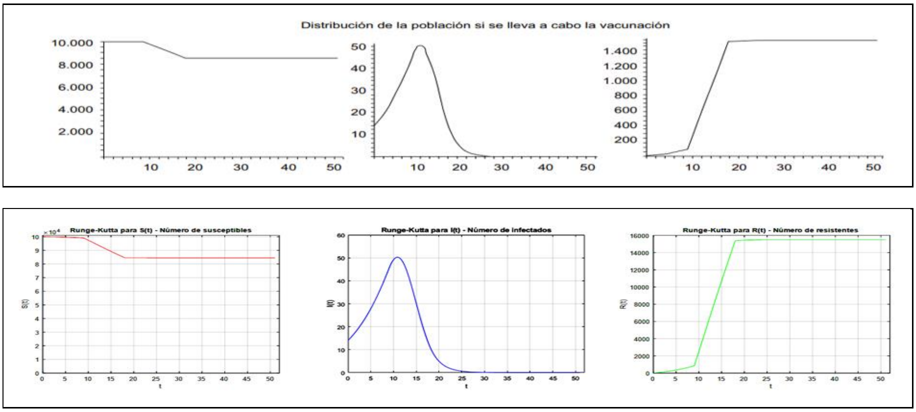

Fig.6. Influencia de la vacunación antigripal. Superior artículo original, inferior de la estudiante

Con una encuesta individual recogimos la opinión de los estudiantes acerca del proyecto y de la metodología seguida en clase. Las afirmaciones de las cuestiones se valoraron de 0 a 10 y los resultados aparecen en la Figura 7. Se añadió un campo de comentarios en el que valoran el trabajar con aplicaciones reales y que aprenden mejor a trabajar con ecuaciones diferenciales, sugiriendo alguno un seguimiento más continuado del trabajo o poder realizarlo durante las sesiones presenciales. En general tienen una opinión muy positiva sobre la materia estudiada y el trabajo realizado, además de valorar el trabajo realizado por la docente. La introducción de esta actividad en la asignatura ha sido muy satisfactoria, tanto para los estudiantes como para la docente, a pesar de la cantidad de trabajo que ha supuesto para esta última. y favorece la adquisición de competencias transversales de la UPV: aplicación y pensamiento práctico; análisis y resolución de problemas; trabajo en equipo y liderazgo; comunicación efectiva; conocimiento de problemas contemporáneos; aprendizaje permanente y planificación y gestión del tiempo. Por último remarcar que esta actividad ha sido posible realizarla gracias a los repositorios abiertos, redes sociales colaborativas y a publicaciones de acceso abierto (open acces) a través de los cuales ha sido posible conseguir el material de trabajo para los estudiantes.

Criterios	Valoración cuantitativa (de 0 a 10)	Criterios	Valoración cuantitativa (de 0 a 10)
El proyecto que se te ha asignado te ha resultado interesante	Promedio= 8.53 Moda= 8 P_{25}= 8	Piensas que dedicar una clase a la presentación de todos los proyectos vale la pena	Promedio=8.53 Moda=10 P_{25}=8
La metodología utilizada y las actividades realizadas en las clases te han ayudado a poder resolver el proyecto	Promedio=8.88 Moda= 10 P_{25}= 8	La realización del proyecto ha valido la pena en cuanto al conocimiento de las aplicaciones de las Ecuaciones Diferenciales	Promedio=9.06 Moda= 10 P_{25}=8
El material proporcionado y las instrucciones personalizadas para cada grupo han sido de utilidad para la resolución del proyecto	Promedio=9.24 Moda= 10 P_{25}=9	El proyecto ha conseguido motivarte en cuanto a la utilidad de las Ecuaciones Diferenciales	Promedio=8.53 Moda= 9 y 10 P_{25}=8
El trabajo del proyecto ha sido adecuado en cuanto al tiempo que has dedicado y nivel teórico exigido	Promedio=8.94 Moda= 10 P_{25}=8	Trabajar con un artículo científico, TFG o similares, para la realización del proyecto, ha sido interesante	Promedio=8.59 Moda= 10 P_{25}=8
La clase dedicada a la presentación de todos los proyectos te resultó interesante	Promedio=8.68 Moda= 8 y 10 P_{25}=8	La dedicación de la profesora en la preparación y puesta en marcha del proyecto ha sido adecuada	Promedio=9.47 Moda= 10 P_{25}=9

Fig. 7. Resultados de la encuesta

Agradecimientos

Este trabajo ha sido financiado por la Universitat Politécnica de València en el marco de los Proyectos de Innovación y Mejora Educativa (PIME/2017/B/15).

Agradezco también a todos mis estudiantes haber participado en esta actividad, gracias a lo cual ha sido posible realizar este trabajo.

Referencias

Amelkin V. (1987). Ciencia popular. Ecuaciones diferenciales aplicadas a la práctica. Moscú: Mir.

Blanchard, P., Devaney y R.L., Hall, G.R. (1999). Ecuaciones Diferenciales. Internat. Thomson.

Chrobak JM, Herrero H. (2011). A mathematical model of induced cancer-adaptive immune system competition. Journal of Biological Systems; 19(3), 521–532.

Frauenthal JC (1981) Mathematical modeling in epidemiology. New York: Springer.

Hueso, J. L., Cordero, A., Torregrosa, J.R. (1992). Matemática Aplicada. Prácticas con ordenador. Valencia: SPUPV.

Nagle, R.K., Saff, E.B. y Snider, A.D. (2001). Ecuaciones diferenciales y problemas con valores en la frontera (3ª edición). Addison Wesley.

Vidal, A., Boigues, F.J., Estruch, V.D. (julio 2015). Modelos matemáticos en un problema de epidemias. Trabajo presentado en el XXIII- CUIEET, Valencia.

Yang F, Duan HX, Li X (2005). Modeling and analyzing of the interaction between worms and antiworms during network worm propagation. Sci China Ser E Inf Sci 34(8), 841–856.

Zill, D.G. (2002). Ecuacio. Diferenci. con aplicaciones de modelado (7ª edición). Thomson-Learning.

Zou CC, Towsley D, Gong W (2007). Modeling and simulation study of the propagation and defense of Internet e-mail worms. IEEE Trans Dependable Secure Comput 4(2), 105–118.