



UNIVERSITAT
POLITÈCNICA
DE VALÈNCIA



GESTIÓN DEL RIESGO DE CARTERAS FINANCIERAS CON SUBYACENTES MODELIZADOS MEDIANTE EL MOVIMIENTO BROWNIANO GEOMÉTRICO

APLICACIÓN A ACTIVOS DEL IBEX 35

Trabajo de Fin de Máster en Dirección Financiera y Fiscal

Curso 2019-2020

Autora:

Jenina Awe Aguilar

Directores:

Dr. Juan Carlos Cortés López

Dr. Rafael Jacinto Villanueva Micó

Tabla de contenido

Índice de tablas	4
Índice de gráficos	6
Índice de figuras	7
1. INTRODUCCIÓN	8
1.1. Resumen	8
1.2. Objetivos	9
1.3. Estructura del trabajo	10
2. CONTEXTO	11
3. METODOLOGÍA	13
3.1. Introducción del Movimiento Browniano o Proceso de Wiener	14
3.2. Propiedades estadísticas del Movimiento Browniano	16
3.3. Simulación del Modelo Browniano	17
3.4. El Cálculo de Itô	18
3.4.1. Integral de Itô y sus propiedades	20
4. MODELO ESTOCÁSTICO LOG-NORMAL	24
4.1. Motivación del Modelo Estocástico	25
4.2. Propiedades estadísticas del proceso estocástico Log-Normal	29
4.3. Calibración de los parámetros del Modelo Log-Normal	31
4.4. Validación del Modelo Log-Normal	38
5. MODELO DE MEDIA-VARIANZA DE MARKOWITZ	39
5.1. Resolución analítica	42
5.2. Frontera de mínima varianza	45
6. APLICACIÓN DEL MODELO LOG-NORMAL	48
6.1. Estimación de los parámetros del Modelo Log-Normal	49
6.1.1. Estimación de parámetros con el Método de los Momentos	49
6.1.2. Estimación de parámetros con el Método de Máxima Verosimilitud	50

6.2	Validación del Modelo Log-Normal	52
6.2.1	Validación de los parámetros a través del Método de los Momentos	52
6.2.2	Validación de los parámetros a través del Método Máxima Verosimilitud	58
7.	APLICACIÓN DEL MODELO DE MARKOWITZ	64
7.1.	Resolución del Modelo de Markowitz	64
7.2	Frontera de Markowitz	70
8.	CONCLUSIONES	72
	<i>Bibliografía</i>	75
	<i>Anexo</i>	76

Índice de tablas

<i>Tabla 3.3.1: Media y varianza del Movimiento Browniano</i>	17
<i>Tabla 6.1.1.1: Media y varianza de los Log-Retornos</i>	50
<i>Tabla 6.1.1.2: Parámetros μ y σ. Método de los Momentos</i>	50
<i>Tabla 6.1.2.1: Parámetros μ y σ. Método de Máxima Verosimilitud</i>	51
<i>Tabla 6.1.2.2: Resultado de las estimaciones de los parámetros del Modelo Log-Normal</i>	51
<i>Tabla 6.2.1.1: Resultado de las medidas bondad de ajuste: MAPE y RSME mediante el Método de Momentos</i>	53
<i>Tabla 6.2.1.2: Resultado de las predicciones y los intervalos de confianza teóricos con un 95% de confianza aplicando las estimaciones a través del Método de los Momentos</i>	54
<i>Tabla 6.2.2.1: Resultado de las medidas bondad de ajuste: MAPE y RSME mediante el Método de Máxima Verosimilitud</i>	58
<i>Tabla 6.2.2.2: Resultado de las predicciones y los intervalos de confianza teóricos con un 95% de confianza aplicando las estimaciones a través del Método de Máxima Verosimilitud</i>	59
<i>Tabla 6.2.2.3: Resultado de las medidas bondad de ajuste del Modelo Log-Normal</i>	63
<i>Tabla 6.2.2.4: Estimaciones obtenidas mediante el Modelo Log-Normal de los activos componentes de la cartera propuesta</i>	63

<i>Tabla 7.1.1: Matriz Varianzas-Covarianzas de la cartera propuesta</i>	65
<i>Tabla 7.1.2: Estimaciones obtenidas mediante el Modelo Log-Normal de los activos componentes de la cartera propuesta</i>	66
<i>Tabla 7.1.3: Resolución del Modelo de Markowitz 1ª predicción</i>	67
<i>Tabla 7.1.4: Resolución del Modelo de Markowitz 5ª predicción</i>	67
<i>Tabla 7.1.5: Comparativa del Modelo de Markowitz según las rentabilidades exigidas</i>	68

Índice de gráficos

Gráfico 3.3.1: Simulación del Movimiento Browniano sobre intervalo temporal $[0,1]$ _ 18

Gráfico 5.1.1: Varianza como función convexa de los rendimientos de una cartera compuesta por 2 títulos _____ 43

Gráfico 5.2.1: Elementos relevantes de frontera de Markowitz. Carteras 0 y 1 _____ 46

Gráfico 6.2.1.1: Datos reales de cotización, predicciones e intervalos de Confianza (95%) para los títulos de la cartera propuesta cuyos parámetros han sido calibrados mediante el Método de los Momentos _____ 57

Gráfico 6.2.2.1: Datos reales de cotización, predicciones e intervalos de Confianza (95%) para los títulos de la cartera propuesta cuyos parámetros han sido calibrados mediante el Método de Máxima Verosimilitud _____ 62

Gráfico 7.2.1: Frontera de Markowitz para el rango de rentabilidades exigidas _____ 71

Índice de figuras

Figura 4.1.1: Capitalización a interés compuesto _____ 26

Figura 7.1.1: Parámetros Solver para la resolución del Modelo de Markowitz _____ 65

1. INTRODUCCIÓN

1.1. Resumen

El presente Trabajo de Fin de Máster (TFM) aborda el estudio de la gestión del riesgo de una cartera financiera compuesta por activos modelizados a través de un proceso estocástico basado en el Modelo Log-Normal. La cartera estará compuesta por valores de Acerinox, Telefónica y Santander, activos que forman parte del IBEX-35.

La cotización de una empresa aporta una gran cantidad de información útil para tomar decisiones a la hora de invertir: la percepción de los beneficios futuros de la empresa, los dividendos a repartir, la situación económica y evolución futura de la empresa, el entorno socioeconómico y político en el que se integra la empresa. Sin embargo, pese a poseer toda esa información valiosa es improbable conocer con exactitud el valor futuro de una cotización y saber cuánto invertir en cada título para obtener beneficios minimizando el riesgo de la inversión; y esto se debe a ciertos factores que influyen en la cotización de las empresas y la intensidad con la que lo hacen, como son el comportamiento de los inversores, la inflación, la tasa de interés, la evolución del IBEX-35, etc. Por todo lo anterior es razonable considerar que el valor de una acción en un instante determinado no sea una magnitud determinista sino una variable aleatoria.

Para alcanzar el objetivo principal del trabajo, primeramente, se estudiarán y desarrollarán conceptos matemáticos y financieros. La dinámica del precio de la acción se describirá mediante un modelo matemático cuya solución es un proceso estocástico. Aunque existen diferentes modelos estocásticos que han sido utilizados en la literatura para describir la dinámica del valor de una acción en un ambiente de incertidumbre, en este trabajo se considerará el Modelo Log-Normal, el cual es la solución de una ecuación estocástica de tipo Itô, que generaliza la ecuación diferencial determinista que modeliza el régimen de capitalización a interés compuesto continuo en ambiente de certidumbre.

El Modelo Log-Normal es un proceso estocástico que depende de dos parámetros: la tendencia y la volatilidad, unos parámetros que deberán calibrarse a través del histórico de precios de cada activo modelizado. Para calibrarlos, se aplicarán dos métodos estadísticos, el Método de los Momentos y el Método de Máxima Verosimilitud.

Además del Modelo Log-Normal, también será necesario presentar el Modelo de Markowitz que nos permitirá conocer cómo gestionar la cartera propuesta para obtener

beneficios, una vez conocidos los valores futuros de los títulos. Con ello se obtendrán todos los valores para poder evaluar si la cartera obtenida es eficiente.

La principal ventaja del estudio práctico es que nos permitirá predecir el valor de los títulos financieros, una de las grandes incertidumbres del mercado financiero, como también lo es saber cuántos beneficios puedes obtener gestionando una cartera financiera. Este estudio, además, nos ayudará a determinar cuánto invertir en cada título estableciendo una rentabilidad fijada. En conclusión, lo que se persigue es conseguir un mayor control de la inversión, o sea de la cartera financiera propuesta de modo que se minimice el riesgo de la inversión.

1.2. Objetivos

Los objetivos que se buscan conseguir con este trabajo son varios. Gracias a los conocimientos adquiridos en las asignaturas del Máster en Dirección Financiera y Fiscal (MDFF), como son Modelización y Valoración de Opciones Financieras; Finanzas Cuantitativas y Mercados Financieros se han podido aprender técnicas basadas en modelos matemáticos para la predicción futura del valor de activos financieros y la formalización de carteras eficientes. El estudio teórico planteado en el presente trabajo se aplicará a activos reales del IBEX-35.

Los objetivos específicos que se han marcado con la realización del actual trabajo son los siguientes:

- Estudiar y analizar los fundamentos estocásticos propios del Cálculo del Itô para la aplicación del Modelo Log-Normal.
- Desarrollar el Modelo Log-Normal y determinar las propiedades y características estadísticas del modelo para su posterior aplicación en la cartera propuesta de activos del IBEX-35.
- Calibrar los parámetros del Modelo Log-Normal a partir de una muestra de datos históricos reales.
- Modelizar los valores de la cartera propuesta mediante la aplicación del Modelo Log-Normal.
- Validar la modelización obtenida de la cartera propuesta a través de las medidas de bondad de ajuste del Modelo Log-Normal.

- Construir predicciones probabilísticas de los valores de la cartera de activos.
- Estudiar y analizar el Modelo de Media-Varianza de Markowitz a partir de la muestra de datos reales.
- Obtener una cartera eficiente tras la aplicación del Modelo de Markowitz a la muestra de datos reales.
- Analizar y evaluar la cartera obtenida del Modelo de Markowitz.

1.3. Estructura del trabajo

En primer lugar, en el Capítulo 2 se expondrá el vínculo que comparte el desarrollo de este trabajo con la vida real, en otras palabras, se analizará la importancia y el impacto que tiene el trabajo en las decisiones de los inversionistas.

En los siguientes capítulos se estudiarán los diferentes modelos para la obtención de las predicciones de los valores de la cartera propuesta y la construcción de la cartera eficiente. En el Capítulo 3 y 4, se presentarán las herramientas necesarias para, posteriormente, construir y desarrollar el Modelo Log-Normal. Primeramente, en el Capítulo 3 se detallará el movimiento Browniano parte del Modelo Log-Normal y se analizarán los procedimientos estocásticos propios del Cálculo de Itô para la aplicación del modelo. Seguidamente, en el Capítulo 4 se expondrán las características y propiedades del Modelo Log-Normal. Se expondrán varios métodos para comprobar que las estimaciones son robustas en el sentido de que los valores obtenidos no dependen de la técnica estadística utilizada para su estimación. A continuación, en el Capítulo 5 se estudiará el Modelo de Markowitz, un modelo para la formación de carteras eficientes que determina el peso de los valores de la cartera. Y, además, se expondrá la frontera de Markowitz para determinar y evaluar la eficiencia de los pesos obtenidos.

Ambos modelos expuestos se aplicarán en los siguientes capítulos con datos reales, concretamente con los valores de tres empresas del IBEX-35: Acerinox, Telefónica y Santander. En el Capítulo 6 se aplicarán los resultados estocásticos y se calcularán los parámetros del Modelo Log-Normal para la resolución de éste. Una vez obtenidas las predicciones de los valores a través del Modelo Log-Normal se validarán los resultados a través de las siguientes medidas de bondad de ajuste: el RMSE, el MAPE y los Intervalos de Confianza. La parte práctica del modelo de Markowitz se llevará a cabo en el Capítulo 7 para determinar y evaluar la eficiencia de la cartera de valores obtenida.

Finalmente, en el capítulo de las Conclusiones se redactará un resumen de los resultados obtenidos, las implicaciones de éstas y las limitaciones halladas tras la elaboración del trabajo.

2. CONTEXTO

Actualmente, la globalización está muy presente en todos los ámbitos, así como en los mercados financieros marcando su funcionamiento mediante la desregulación financiera, la libre circulación de capitales, y cabría resaltar, uno de los factores más relevantes en dichos mercados: el avance tecnológico, lo cual ha permitido mejorar tanto el funcionamiento del sistema como la fluidez de las negociaciones, unificar los sistemas operativos, nuevas posibilidades de negocio e incluso reduciendo los costes de intermediación. El aspecto negativo que pueden tener ambos avances es la interconexión entre los mercados tanto para las situaciones ventajosas como para las desfavorables tales como una crisis financiera que puede perjudicar y expandirse de forma global a mayor velocidad, afectando directamente a los inversores quienes tienen que estar al día de lo que pase en los mercados financieros para poder actuar y adoptar estrategias con el fin de reducir o diversificar el riesgo. De ahí, la importancia de la información, ya no solo de la empresa en la que se invierte si no de estar al tanto de las noticias a nivel mundial.

Así mismo también es de vital importancia para la economía de un país que sus empresas coticen en valores máximos pues con ello se justifica la importancia que tiene el estudio de técnicas cuantitativas para modelizar el comportamiento de las acciones en Bolsa, con el fin de anticiparse y predecir su valor futuro. Y es aquí donde surge un gran descubrimiento: el gran potencial que aportan las matemáticas al mundo financiero para obtener más datos de las inversiones y, sobre todo datos a futuro.

La aplicación de las matemáticas en finanzas tiene como beneficio evaluar y mejorar la calidad de la información contra la incertidumbre, y con ello aclarar y evaluar las diferentes alternativas posibles dentro del mercado y sus consecuencias, e incluso controlar pequeñas decisiones para alcanzar objetivos marcados a corto plazo.

En estos momentos, no podría obviarse la relación tan ventajosa e influyente que hay entre las finanzas y las matemáticas, ya que la información obtenida tras la aplicación de las matemáticas afecta a la capacidad de tomar buenas decisiones financieras.

Tal y como afirmó Edward Frenkel, “en nuestra sociedad, cada vez más dirigida por la ciencia y la tecnología, las matemáticas se están convirtiendo en una fuente de poder, riqueza y desarrollo. Por lo tanto, aquellos que dominen este idioma liderarán este progreso”.

La modelización es un proceso complejo debido a la volatilidad ligada al comportamiento de las acciones y las distintas variables que influyen en su valor. Sin embargo, con el paso de los años se han desarrollado y mejorado modelos adecuados para valorar acciones. En el siglo pasado, las finanzas cuantitativas estaban muy presentes en los mercados financieros y se empleaban fórmulas matemáticas para asignar el precio a las acciones. Pero la investigación no se quedó ahí, con el paso de los años se han desarrollado modelos continuos basados en ecuaciones diferenciales deterministas, sin contemplar la aleatoriedad de los datos. No obstante, a finales del siglo XX los modelos deterministas fueron muy cuestionados y se vieron reemplazados por modelos con más adecuación que contenían aleatoriedad. Los modelos continuos más aceptados se basan en ecuaciones diferenciales estocásticas de tipo Itô como es el modelo que se aplicará en este trabajo: el Modelo Log-Normal basado en un proceso estocástico de tipo Gaussiano, también conocido como Movimiento Browniano o proceso estocástico de Wiener que tiene como función modelizar la incertidumbre de los activos y cuya resolución se lleva a cabo con el Cálculo Estocástico de Itô.

Respecto al inversor, sus principales variables que rigen su decisión de inversión son la rentabilidad y el riesgo. El inversor puede rentabilizar su inversión, bien a través de los dividendos repartidos por la empresa, o bien a través de la venta de las acciones siempre y cuando obtenga una plusvalía por la venta de éstas. La rentabilidad es un concepto asociado al riesgo puesto que, a mayor rentabilidad esperada, mayor es el riesgo que se debe asumir. Desde un punto de vista financiero, el riesgo puede definirse como la probabilidad de incurrir en una situación financiera negativa, en otras palabras, el concepto riesgo se relaciona con pérdidas de una inversión.

Una vez más el empleo de las matemáticas puede ayudar a encontrar un equilibrio entre la rentabilidad y el riesgo, diversificando una cartera de valores de forma eficiente. Desde 1952, Harry Markowitz estudió la importancia sobre la selección de carteras, el único criterio a la hora de formalizar una cartera era la rentabilidad. El trabajo pionero de Markowitz introdujo además el criterio del riesgo, un parámetro muy relacionado con la volatilidad de los precios de las acciones ya que cuanto mayor sea la fluctuación que sufra el precio, mayor será el riesgo vinculado a la acción.

Markowitz desarrolló un modelo matemático, el cual denominó con sus apellidos, el Modelo de Markowitz, que permite definir carteras eficientes determinando los pesos de cada título.

En definitiva, como puede observarse las matemáticas están muy presentes en el mundo financiero y su introducción en el sistema financiero ha ayudado a comprender la complejidad de las finanzas aportando información para su estudio y la toma de decisiones. Cabe resaltar el interés creciente por los artículos y publicaciones sobre modelización de activos y gestión de carteras, de ahí el interés personal en realizar este Trabajo Final de Máster.

3. METODOLOGÍA

En este capítulo se presentarán los modelos que se aplicarán en el siguiente estudio para gestionar el riesgo de la cartera propuesta. Inicialmente, se introducirán aquellos procesos estocásticos que nos ayudarán en la formulación del Modelo Log-Normal empezando por la presentación de un proceso estocástico denominado Movimiento Browniano o también conocido como Proceso de Wiener, una parte esencial para el desarrollo teórico del Modelo Log-Normal que se basa en una ecuación diferencial estocástico de tipo Itô. Una vez desarrollado el Movimiento Browniano se mostrará un procedimiento para obtener simulaciones, en este caso, de la cartera propuesta.

La siguiente parte del estudio se centrará en introducir un modelo para la formación de carteras eficientes: el Modelo de Markowitz, que obtiene los pesos de una cartera eficiente considerando el binomio media-varianza; la media que representa los rendimientos esperados y la varianza en cuanto a la medida utilizada para cuantificar el riesgo. Tras la resolución de dicho modelo, que se llevará a cabo mediante un software de programación matemática, se obtendrán los pesos de cada título que forman la cartera sugerida, de tal modo que la composición de ésta sea la óptima para garantizar una rentabilidad exigida asumiendo el mínimo riesgo posible.

3.1. Introducción del Movimiento Browniano o Proceso de Wiener

Un proceso estocástico define la evolución temporal de una variable aleatoria¹, en otras palabras, se dice que una variable sigue un proceso estocástico cuando sufre variaciones en el tiempo, en forma aleatoria. El Movimiento Browniano, también conocido Proceso de Wiener, es un tipo particular de procesos estocástico, muy popular en el mundo de la estadística. En el siguiente estudio se aplicará el Movimiento Browniano para describir el comportamiento de variables, como son los títulos incluidos en la cartera propuesta.

El Movimiento Browniano se clasifica como un proceso estocástico de tipo Gaussiano², y recibe su nombre en honor al escocés Robert Brown, biólogo y botánico que descubrió, irreflexivamente, este fenómeno en 1827. Brown observó que las partículas de polen en suspensión retenían un movimiento aleatorio sin conocer el motivo a pesar de ofrecer distintas hipótesis para explicar este fenómeno, el Movimiento Browniano.

Unos años más tarde se descubrió que el movimiento aleatorio de las partículas, conocido como browniano, se debe a la interacción entre dichas partículas (interacción molecular). Este descubrimiento tuvo gran repercusión, no solo en el campo biológico, sino que llegó a repercutir en otros campos ajenos, como en el campo de las finanzas en el que se utilizó dicho proceso para modelizar el comportamiento de los precios de las acciones.

A comienzos del siglo XX, el matemático Louis Bachelier aplicó la teoría del Movimiento Browniano para modelizar los movimientos de los activos subyacentes en su tesis doctoral “La Teoría de la Especulación”. Sin embargo, los considerables resultados logrados por el matemático no tuvieron reconocimiento hasta pasados unos años que el economista Samuelson con el respaldo del profesor W. Feller consiguió el premio Nobel tras reemplazar el Movimiento Browniano por su exponencial eliminando así los valores negativos del modelo.

¹ La variable aleatoria es un número real asociado al resultado de un experimento aleatorio, en otras palabras, es una magnitud que depende del azar y se caracteriza como la herramienta matemática que permite estudiar distribuciones de probabilidad.

² Un proceso estocástico $\{X(t; \omega): t \in T, \omega \in \Omega\}$ es de tipo gaussiano y se define como una distribución de probabilidad sobre funciones aleatorias o un conjunto infinito de variables, concretamente, $\{X(t)\}$ es una variable gaussiana para cada $t \in T$.

Fueron muchos los autores que se dedicaron a estudiar la complejidad de este modelo, pero fue Norbert Wiener quien pudo formular matemáticamente el concepto de Movimiento Browniano, y por ello también se conoce como proceso Wiener.

El Movimiento Browniano o Proceso de Wiener se define por la siguiente notación: $\{B(t; \omega): t \geq 0, \omega \in \Omega\}$ o la versión reducida $\{B(t): t \geq 0\}$, si bien en algunos manuales utilizan indistintamente la notación: $\{W(t): t \geq 0\}$.

A continuación, se expondrán las características estadísticas que definen al proceso estocástico Movimiento Browniano.

El Movimiento Browniano o Proceso de Wiener $\{B(t; \omega): t \geq 0, \omega \in \Omega\}$ cumple las siguientes condiciones:

- **MB.1.** El valor inicial es 0 con probabilidad 1: $P[B(0) = 0] = 1$.
- **MB.2.** Para cualquier conjunto de instantes de tiempo $0 \leq t_1 \leq t_2 \leq \dots \leq t_n$ se obtienen incrementos que son variables aleatorias independientes: $B(t_1) - B(t_0); B(t_2) - B(t_1); \dots; B(t_{n+1}) - B(t_n)$.
- **MB.3.** El modelo presenta incrementos estacionarios:

$$B(t + \Delta t) - B(t) \stackrel{d}{=} B(s + \Delta t) - B(s), \quad \forall s, t: 0 \leq s \leq t \leq +\infty$$

donde el símbolo $\stackrel{d}{=}$ indica que la igualdad es en distribución.

- **MB.4.** Los incrementos $B(t) - B(s)$ del proceso son de tipo Gaussianos que siguen una distribución normal de media 0 y varianza $t - s$:

$$B(t) - B(s) \sim N[0; t - s], \quad \forall s, t: 0 \leq s \leq t \leq +\infty.$$

Teniendo en cuenta las propiedades MB.1. y MB.4. y dando el valor cero a la variable s : $s = 0$ se deduce que:

$$B(t) \sim N[0; t].$$

- **MB.5.** El modelo presenta trayectorias sin saltos y no diferenciables en ningún punto, en otras palabras, tiene trayectorias continuas que no son diferenciables en ningún punto.

3.2. Propiedades estadísticas del Movimiento Browniano

A continuación, se detallarán, de forma concisa, las principales propiedades del proceso estocástico Movimiento Browniano $\{B(t), t \geq 0\}$, que se detallan en el libro de Øksendal, B.K.³

P.1. Función Media: A partir de la condición MB.4, se concluye que la función media del Movimiento Browniano es nula:

$$\mu_{(t)} = 0, \quad \forall t \geq 0.$$

En el siguiente apartado puede verse una gráfica que simula esta propiedad del Movimiento Browniano (Gráfico 3.2.1).

P.2. Función Covarianza: Mide el grado de relación lineal entre las variables aleatorias, $B(s)$ y $B(t)$, que se adquieren al fijar dos instantes s y t , respectivamente. Seguidamente, se demuestra la siguiente propiedad:

$$\text{Cov}[B(t), B(s)] = \min(s, t), \quad \forall s, t: 0 \leq s \leq t \leq +\infty.$$

Visto de otra manera, aplicando la propiedad P.1. y tomando como valores de tiempo, $0 \leq s \leq t \leq +\infty$, se obtiene:

$$\begin{aligned} \text{Cov}[B(t), B(s)] &= E[B(t)B(s)] - E[B(t)]E[B(s)] \\ &= E[B(t)B(s) - (B(s))^2 + (B(s))^2] \\ &= E[(B(t) - B(s))B(s) + (B(s))^2] \\ &= E[(B(t) - B(s))B(s)] + E[(B(s))^2] \\ &= E[(B(t) - B(s))(B(s) - B(0))] + E[(B(s))^2] \\ &= E[B(t) - B(s)]E[B(s) - B(0)] + E[(B(s))^2] \\ &= (E[B(t)] - E[B(s)])(E[B(s)] - E[B(0)]) + E[(B(s))^2] \\ &= E[(B(s))^2] \\ &= \text{Var}[B(s)] \\ &= s. \end{aligned}$$

³ Øksendal, B.K. (2003): Stochastic Differential Equations: An Introduction with Applications. Berlin, Springer.

Obsérvese que si en la relación anterior se tomara como valor $s = t$, se obtiene como resultado la propiedad MB.4, es decir, que la varianza del Movimiento Browniano es t .

P.3. $B(t)$ es $\frac{1}{2}$ - autosemejante: Esta es, exclusivamente, una propiedad geométrica que se expresa del siguiente modo:

$$B(T \cdot t) \stackrel{d}{=} \sqrt{T} \cdot B(t), \quad \forall t \geq 0, \quad \forall T \geq 0.$$

P.4. Las trayectorias muestrales de $B(t)$ son continuas, pero no son diferenciables en ningún punto. Se puede comprobar que $B(t)$ tiene trayectorias que no son de variación acotada, lo que explica que no sean derivables (las trayectorias del Movimiento Browniano tienen puntos angulosos, es decir, con pico para todo instante t).

3.3. Simulación del Modelo Browniano

En este apartado se muestra un modelo sencillo de simular el Movimiento Browniano. Las simulaciones de este proceso son necesarias para simular los valores de una acción a través del Modelo Log-Normal, ya que éste depende del Movimiento Browniano.

La simulación se efectuará a través de variables aleatorias normales tipificadas, y para ello se aplicará la siguiente identidad:

$$B(t) \stackrel{d}{=} \sqrt{t} Z, \quad Z \sim N[0; 1].$$

La justificación de la anterior identidad se muestra en la Tabla 3.3.1, donde se comprueba que ambos términos tienen distribución Gaussiana de la media y varianza.

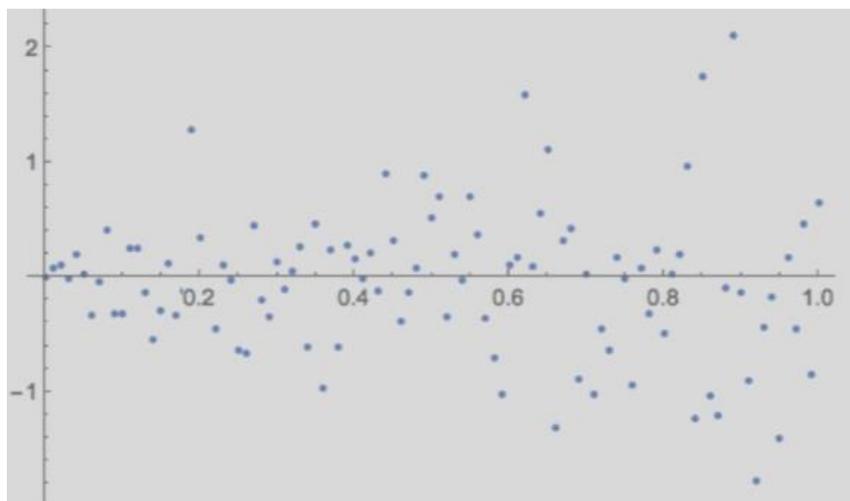
Tabla 3.3.1: Media y varianza del Movimiento Browniano

	$B(t)$	$\sqrt{t} Z$
Distribución	Gaussiana	Transformación lineal de una variable gaussiana
Media	0 [MB. 4.]	$E[\sqrt{t} Z] = \sqrt{t} E[Z] = 0$
Varianza	t [MB. 4.]	$\text{Var}[\sqrt{t} Z] = t \text{Var}[Z] = (\sqrt{t})^2 \text{Var}[Z] = t$

Fuente: Elaboración Propia.

En el Gráfico 3.3.1 se muestra una simulación del Movimiento Browniano sobre el intervalo temporal $[0,100]$.

Gráfico 3.3.1: Simulación del Movimiento Browniano sobre intervalo temporal $[0,1]$



Fuente: Elaboración Propia.

Cabe indicar que el Movimiento Browniano es la principal herramienta que aporta el factor de aleatoriedad al Modelo Log-Normal, no obstante, esta característica en la formulación de la ecuación diferencial estocástica de tipo Itô, de la cual el Movimiento Browniano Geométrico es su solución, la incertidumbre se introduce a través de la diferencial del Movimiento Browniano, el cual se denomina proceso Ruido Blanco (White Noise).

El uso de la diferencial del Movimiento Browniano se basa en el Teorema Central que, en forma básica, establece que la suma de un número de variables independientes (que en nuestro contexto representan los factores aleatorios que pueden determinar el precio de la acción) es una variable aleatoria Gaussiana estándar.

3.4. El Cálculo de Itô

El matemático japonés Kiyosi Itô desarrolló una teoría que supuso un avance en la diferenciación e integración de procesos estocásticos, y dio a conocer su famoso lema

por su nombre: el Lema de Itô. Este resultado establece una ecuación diferencial estocástica de tipo Itô que verifica un proceso estocástico que resulta de la transformación funcional de otro proceso estocástico. En nuestro contexto, el Lema de Itô se aplicará para resolver el Modelo Log-Normal y obtener el proceso estocástico, denominado Movimiento Browniano Geométrico, que describe la dinámica del precio de una acción.

Esta aplicación de la teoría de Itô es objeto principal del estudio de este apartado y se centrará en la resolución de una ecuación diferencial estocástica determinada por la siguiente ecuación:

$$dX(t) = f(t, X(t))dt + g(t, X(t))dB(t).$$

Para resolver la ecuación que depende de la forma específica de los coeficientes $f(t, X(t))$ y $g(t, X(t))$ se debe aplicar el Lema de Itô.

Considerando la ecuación diferencial estocástica con condición inicial $X(0)$, el Lema de Itô establece que la hipótesis representada en la siguiente ecuación diferencial es:

$$\begin{aligned} dX(t) &= f(t, x(t))dt + g(t, x(t))dB(t), \quad t \geq 0, \\ X(0) &= x_0, \end{aligned}$$

y sea $F(t, x)$ una función $F: [0, T] \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tal que las siguientes derivadas parciales existen y son continuas:

$$\frac{\partial F(t, x)}{\partial t}, \frac{\partial F(t, x)}{\partial x}, \frac{\partial^2 F(t, x)}{\partial t^2}, \frac{\partial^2 F(t, x)}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 F(t, x)}{\partial t \partial x} \quad 0 \leq t \leq T, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Entonces para $t > 0$ se cumple que:

$$\begin{aligned}
 F(t, x(t)) - F(s, x_0) &= \int_0^t \{F_1(r, x(r)) + f(r, x(r))F_2(r, x(r))\}dr \\
 &+ \int_0^t \frac{1}{2} (g(r, x(r)))^2 F_{22}(r, x(r))dr \\
 &+ \int_0^t g(r, x(r))F_2(r, x(r))dB(r).
 \end{aligned}$$

3.4.1. Integral de Itô y sus propiedades

La definición de integral Itô se distingue de la teoría matemática clásica de diferenciación e integración, porque aborda la integración de un proceso estocástico con respecto al Movimiento Browniano. La finalidad de este apartado, en el que se introduce el concepto de integral de Itô de un proceso estocástico, es interpretar la siguiente expresión:

$$\int_0^t X(s)dB(s), \quad (3.4.1.1)$$

donde $X(s)$ es un proceso estocástico que cumple ciertas condiciones que se detallarán más adelante.

Suponiendo que $f(s)$ y $g(s)$ son dos funciones deterministas respecto de la variable tiempo s y considerando la siguiente integral:

$$\int_0^t g(s)df(s), \quad (3.4.1.2)$$

si $f(s)$ es a una función diferenciable, entonces se denota por $\frac{df(s)}{ds} = f'(s)$, o también $df(s) = f'(s)ds$. Sustituyendo esta expresión en la integral (3.4.1.2) se obtiene:

$$\int_0^t g(s)df(s) = \int_0^t g(s)f'(s) ds,$$

como resultado se logra una integral de tipo Riemann o estándar.

En el caso de que $f(s)$ no fuese diferenciable, se puede emplear la teoría determinista para definir la anterior integral. De hecho, si $f(s)$ no es demasiado irregular como función del argumento s , es decir, cuando $f(s)$ es una función de variación acotada, se puede comprobar que la integral está bien definida como el siguiente límite:

$$\int_0^t g(s)df(s) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^{n-1} g(s_i)(f(s_{i+1}) - f(s_i)).$$

Visto que $f(s)$ es de variación acotada, $f(s_{i+1})$ se aproxima a $f(s_i)$. A partir de aquí se puede demostrar que el límite obtenido existe siempre que $g(s)$ no muestre variaciones muy pronunciadas que no puedan ser compensadas con la regularidad de $f(s)$.

El siguiente límite define la integral (3.4.1.2) de forma equivalente:

$$\int_0^t X(s, \omega)dB(s, \omega) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^{n-1} X(s_i, \omega) (B(s_{i+1}, \omega) - B(s_i, \omega)), \quad \omega \in \Omega. \quad (3.4.1.3)$$

Cabe señalar que se toma el límite para cada ω fijo en el espacio muestral de la variable aleatoria $B(s)$. Esta definición tiene el inconveniente de que el límite para cada ω , en general, no existe para algunos procesos estocásticos $X(s)$ ya que para cada ω , la función $s \rightarrow B(s, \omega)$ es considerablemente irregular. Tal y como se indicó en apartados anteriores (propiedad estadística P.4.), el Movimiento Browniano es un tipo de proceso estocástico con trayectorias muestrales continuas, pero estas no son diferenciables en ningún punto. Además, el Movimiento Browniano como función del tiempo no es de variación acotada para cada ω , como se requiere para $f(s)$. Para neutralizar este comportamiento irregular del Movimiento Browniano se exigirán dos condiciones al proceso integrador $X(s)$: la primera condición supone que $X(s)$ es independiente de los incrementos del Movimiento Browniano. Y la segunda condición, está relacionada con la variación del integrando, la cual se analizará a continuación.

Teniendo en cuenta la propiedad MB.2. del Movimiento Browniano se tiene:

$$E \left[(B(s_{i+1}) - B(s_i))^2 \right] = s_{i+1} - s_i.$$

Siendo $X(s_i)$ independiente del incremento $B(s_{i+1}) - B(s_i)$ se obtiene la siguiente igualdad:

$$\begin{aligned} E \left[\left(X(s_i)(B(s_{i+1}) - B(s_i)) \right)^2 \right] &= E[(X(s_i)^2)] E \left[(B(s_{i+1}) - B(s_i))^2 \right] \\ &= E[(X(s_i)^2)](s_{i+1} - s_i). \end{aligned}$$

Empleando el segundo momento de la variable aleatoria

$$\sum_{i=1}^{n-1} X(s_i)(B(s_{i+1}) - B(s_i)), \quad (3.4.1.4)$$

y considerando que $X(s_i)$ es independiente de $B(s_{i+1}) - B(s_i)$ para cada $i = 1, \dots, n$, se puede deducir por la independencia de los incrementos del Movimiento Browniano que:

$$E \left[\left(\sum_{i=1}^{n-1} X(s_i)(B(s_{i+1}) - B(s_i)) \right)^2 \right] = \sum_{i=1}^{n-1} E \left[(X(s_i))^2 \right] (s_{i+1} - s_i).$$

El sumatorio de la parte derecha de la ecuación es una aproximación de la integral $\int_0^t E \left[(X(s))^2 \right] ds$ y puede deducirse que:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} E \left[\left(\sum_{i=1}^{n-1} X(s_i)(B(s_{i+1}) - B(s_i)) \right)^2 \right] = \int_0^t E \left[(X(s))^2 \right] ds.$$

Concluyendo que la varianza de la suma en la ecuación (3.4.1.4) converge en $\int_0^t E \left[(X(s))^2 \right] ds$. Teniendo en cuenta la existencia de esta integral se demuestra:

$$E \left[\left(\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^{n-1} X(s_i)(B(s_{i+1}) - B(s_i)) \right)^2 \right] = \int_0^t E \left[(X(s))^2 \right] ds. \quad (3.4.1.5)$$

Hay que recalcar que la parte derecha de la ecuación (3.4.1.5) que corresponde a un integral podría no existir en algunos casos pues si la integral es finita existirá siempre, es decir, en el caso de que el proceso estocástico $X(s)$ sea igual que su segundo momento integrado de 0 hasta t .

Por otra parte, considerando que la variable aleatoria $X(s)$, que aparece en la parte izquierda de la ecuación, debe ser independiente de los incrementos $B(s_{i+1}) - B(s_i)$ para todos los valores de $i = 1, \dots, n - 1$. Motiva la introducción de la siguiente definición:

- **Definición 1.** Una variable aleatoria X es llamada \mathcal{F}_s -adaptada si X puede ser escrita como (límite de una sucesión de) funciones de $B(\tau)$ para uno o más $\tau \leq s$, pero no como función de cualquier $B(u)$ con $u > s$. Un proceso estocástico $X(s)$ se dice que es adaptado si para cada tiempo $s \in [0, t]$, la variable aleatoria $X(s)$ es \mathcal{F}_s -adaptada.

He de puntualizar que algunos procesos que derivan de composiciones simples del Movimiento Browniano, tales como $X(s) = f(s, B(s))$, son adaptados, pero otros procesos como $X(s) = B(s + 1)$, no lo son.

Asimismo, la integral $X(s) = \int_0^s B(\tau) d\tau$ se define como un proceso estocástico adaptado ya que la integral es el límite del sumatorio del Movimiento Browniano en los diferentes momentos del tiempo menores que s . En conclusión, por la definición dada de la integral de Itô se obtiene:

$$X(s) = \int_0^s B(\tau) d\tau = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^{n-1} B(\tau_i) (\tau_{i+1} - \tau_i).$$

Focalizándose en la integral de Itô, se observa que siempre que el proceso integrando $X(s)$ es adaptable, tanto la integral $\int_0^t X(s) dB(s)$ como el límite puntual de la expresión (3.4.1.3) se cumplen. Además, se comprueba que este límite se aproxima en media cuadrática, y, por consiguiente, también para cada $\omega \in \Omega$.

- **Definición 2.** Un proceso estocástico $X(s)$, es integrable en el intervalo $[0, t]$ en el sentido de Itô si

1. $X(s)$ es adaptado para $s \in [0, t]$, y
2. $\int_0^t E[(X(s))^2] ds < \infty$.

La Integral de Itô se define como la variable aleatoria

$$\int_0^t X(s, \omega) dB(s, \omega) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^{n-1} X(s_i, \omega) (B(s_{i+1}, \omega) - B(s_i, \omega)), \quad (3.4.1.6)$$

donde el límite es considerado por cada $\omega \in \Omega$.

Para concluir, puede demostrarse que la integral de Itô posee en las siguientes propiedades, las cuales se enunciarán en el caso particular de que el integrando $X(s)$ sea una función determinista $h(s)$ tal que $\int_0^t (h(s))^2 ds < +\infty$:

Propiedad.1. Media: $E \left[\int_0^t h(s) dB(s) \right] = 0$.

Propiedad.2. Varianza: $Var \left[\int_0^t h(s) dB(s) \right] = \int_0^t (h(s))^2 ds$.

Propiedad.3. Covarianza: $Cov \left[\int_0^t h_1(s) dB(s), \int_0^s h_2(s) dB(s) \right] = \int_0^{t \wedge s} h_1(s) h_2(\tau) d\tau$,
siendo $t \wedge s = \min(t, s)$.

En particular,

$$E \left[\left(\int_0^t h_1(\tau) dB(\tau) \right) \left(\int_0^s h_2(\tau) dB(\tau) \right) \right] = \int_0^{t \wedge s} h_1(\tau) h_2(\tau) d\tau.$$

Propiedad.4. Normalidad: $\int_0^t h(s) dB(s) \sim N \left[0; \int_0^t (h(s))^2 ds \right]$.

Ahora, en el caso de que el integrando sea un proceso estocástico $X(s)$ que sigue las características de la Definición 2 anteriormente dada, entonces se cumplen las siguientes propiedades:

Propiedad.5. Media: $E \left[\int_0^t X(s) dB(s) \right] = 0$.

Propiedad.6. Varianza: $V \left[\int_0^t X(s) dB(s) \right] = \int_0^t E \left[(X(s))^2 \right] ds$.

Ambas propiedades determinan la siguiente propiedad:

$$E \left[\left(\int_0^t X(s) dB(s) \right)^2 \right] = \int_0^t E \left[(X(s))^2 \right] ds,$$

conocida como la isometría de Itô.

4. MODELO ESTOCÁSTICO LOG-NORMAL

En el siguiente apartado se definirá el Modelo Log-Normal y se analizará su capacidad para modelizar el comportamiento de un título, en el caso del siguiente estudio sobre el precio futuro de una cartera compuesta por 3 activos. El Modelo Log-Normal se basa en la siguiente ecuación diferencial estocástica:

$$\left. \begin{aligned} dS(t) &= \mu S(t) dt + \sigma S(t) dB(t), \\ S(0) &= s_0, \end{aligned} \right\} \quad (4.0.1)$$

donde:

- $S(t)$ es el valor del título en el instante t .
- s_0 representa el valor del título en el instante inicial $t = 0$.
- $\mu \in \mathbb{R}$ se considera una constante del modelo denominada tendencia o *drift*.
- $\sigma > 0$ se trata de una constante denominada volatilidad.
- $B(t)$ es un proceso estocástico que representa al Movimiento Browniano.
- $dS(t)$ muestra la variación del título en el intervalo $[t, t + dt]$.
- $dB(t)$ define la variación del proceso estocástico del Movimiento Browniano en el intervalo $[t, t + dt]$.

A continuación, se explicará la motivación del sistema (4.0.1) a partir de los modelos deterministas (los clásicos) empleando el Cálculo de Itô visto en el Capítulo 3.2, y de ese modo, se obtendrá la solución del Modelo Log-Normal y sus principales propiedades estocásticas como son la media y la varianza.

Seguidamente se introducirán las técnicas estocásticas para estimar los valores de μ y σ del Modelo Log-Normal.

4.1. Motivación del Modelo Estocástico

En este punto del trabajo se motivará la aplicación del Modelo Log-Normal a través de dos puntos de vistas. Primeramente, se introducirá un modelo clásico determinista con la finalidad de representar la trayectoria temporal de una inversión sin riesgo, y a partir del mismo, introduciendo la aleatoriedad en el mismo, se formulará el Modelo Log-Normal. A continuación, se empleará el Lema de Itô para formalizar parte del conjunto de la teoría estocástica moderna de la modelización y valoración de activos.

Suponiendo que S_0 define un título que se capitaliza a un interés μ compuesto continuo durante un intervalo $[0, T]$ dividido en K periodos de longitud $\Delta t > 0$ cada tramo. En la Figura 4.1.1 puede verse representado este planteamiento.

Figura 4.1.1: Capitalización a interés compuesto



Fuente: Elaboración Propia.

Detonando por $\hat{S}^{(j)}$, $j = 0, 1, \dots, K$, el capital en j períodos, implícitamente se presume que $\hat{S}^{(0)} = S_0$, y entonces se puede deducir que:

$$\hat{S}^{(1)} = S_0 e^{\mu \Delta t}, \quad \hat{S}^{(2)} = S^{(1)} e^{\mu \Delta t}, \quad (4.1.1)$$

en general,

$$\hat{S}^{(j)} = \hat{S}^{(j-1)} e^{\mu \Delta t}, \quad j = 0, 1, \dots, K, \quad (4.1.2)$$

razonando reiteradamente se obtiene:

$$\hat{S}^{(j)} = \hat{S}^{(j-1)} e^{\mu \Delta t} = \hat{S}^{(j-2)} e^{2\mu \Delta t} = \dots = S_0 e^{\mu j \Delta t}, \quad j = 0, 1, \dots, K. \quad (4.1.3)$$

Véase que cuando $j = K$, se cumple lo siguiente: $\hat{S}(T) = \hat{S}^{(K)} = S_0 e^{\mu K \Delta t} = S_0 e^{\mu T}$, donde se ha utilizado $K \Delta t = T$, por lo tanto, $\hat{S}(T)$ representa el capital a lo largo de K períodos. Este modelo de capitalización, realmente, se obtiene al resolver el problema de valor inicial (ecuación diferencial ordinaria junto a una condición inicial):

$$\frac{d\hat{S}(t)}{dt} = \mu \hat{S}(t), \quad \hat{S}(0) = S_0, \quad (4.1.4)$$

cuya solución es bien conocida:

$$\hat{S}(t) = S_0 e^{\mu t}, \quad (4.1.5)$$

donde para $t = T$, se obtiene la solución del problema previo: $\hat{S}(T) = S_0 e^{\mu T}$.

Desde otro ángulo, se puede observar que el modelo estocástico de partícula (4.0.1) abarca el modelo clásico determinista de capitalización continua, ya que con aplicar la siguiente particularización $\sigma = 0$ en la ecuación (4.0.1) se obtiene la ecuación diferencial estocástica, la ecuación diferencial ordinaria (4.1.4).

El modelo introducido hasta ahora define activos en condiciones de certidumbre, es decir, no presenta ningún tipo de aleatoriedad. Y como se ha comentado anteriormente, el precio de una acción está determinada por un gran número de factores como por ejemplo factores económicos, políticos, sociales, ... que repercuten en los mercados financieros, donde se opera con dichos activos. Estos factores añaden un alto grado de incertidumbre a causa de la dificultad de su determinación. Y dado el grado de incertidumbre que presenta una acción es aconsejable introducir la aleatoriedad en el modelo determinista y, se manifestará a través del parámetro μ , que define una cantidad aleatoria y no una determinista. Teniendo en cuenta los conocimientos estadísticos vistos anteriormente, la aleatoriedad se aplicará a través del Movimiento Browniano $B(t)$, particularmente a través de su derivada, denominada proceso de Ruido Blanco (White Noise $dB(t)$). Si se aplica se obtiene la siguiente expresión:

$$\mu \rightarrow \mu + \sigma B'(t), \quad \sigma > 0. \quad (4.1.7)$$

En la siguiente expresión el parámetro μ representa el rendimiento medio del activo con fluctuaciones aleatorias incorporadas a través del proceso estocástico Ruido Blanco $dB(t)$ y su intensidad $\sigma > 0$.

Utilizando la notación diferencia para la derivada:

$$S'(t) = \frac{dS(t)}{dt},$$

e introduciendo el nuevo parámetro de aleatoriedad μ , el modelo toma la siguiente forma:

$$\frac{dS(t)}{dt} = (\mu + \sigma B'(t))S(t) \Rightarrow dS(t) = (\mu + \sigma B'(t))S(t)dt.$$

Al agrupar los diferentes parámetros se obtiene:

$$dS(t) = \mu S(t)dt + \sigma S(t) B'(t)dt. \quad (4.1.8)$$

En esta expresión se puede distinguir una parte determinista, $\mu S(t)dt$, y otra estocástica, $\sigma S(t)B'(t)dt$, en la que aparece el Ruido Blanco. Considerando la siguiente igualdad $dB(t) = B'(t)dt$, el modelo se podría reescribir tal como la expresión inicial (modelo 4.0.1), conocido como el Modelo Log-Normal de activos.

Partiendo de este modelo inicial basado en la ecuación diferencial estocástica con condición inicial se aplicará el Lema de Itô.

$$\left. \begin{aligned} dS(t) &= \mu S(t)dt + \sigma S(t)dB(t), \\ S(0) &= s_0. \end{aligned} \right\} \quad (4.1.9)$$

Para poder introducir el Lema de Itô, se presentará la anterior expresión en forma de integral:

$$\int_0^t dS(r) = \int_0^t \mu S(r)dr + \int_0^t \sigma S(r)dB(r),$$

o una expresión análoga:

$$S(t) - S(0) = \int_0^t \mu S(r)dr + \int_0^t \sigma S(r)dB(r). \quad (4.1.10)$$

A continuación, se aplicará el Lema de Itô sobre la función $F(t, x) = \ln(x)$ y para ello, primero, se necesitan calcular las siguientes derivadas parciales:

$$F_1(t, x) = \frac{\partial F(t, x)}{\partial t} = 0, \quad F_2(t, x) = \frac{\partial F(t, x)}{\partial x} = \frac{1}{x}, \quad F_{22}(t, x) = \frac{\partial^2 F(t, x)}{\partial x^2} = -\frac{1}{x^2},$$

por consiguiente,

$$\begin{aligned} \ln(S(t)) - \ln(s_0) &= \int_0^t \left(\mu S(r) \frac{1}{S(r)} + \frac{1}{2} (\sigma S(r))^2 \left(\frac{-1}{(S(r))^2} \right) \right) dr \\ &+ \int_0^t \sigma S(r) \frac{1}{S(r)} dB(r). \end{aligned}$$

De forma simplificada se obtiene:

$$\ln\left(\frac{S(t)}{s_0}\right) = \int_0^t \left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right) dr + \int_0^t \sigma dB(r),$$

$$\ln\left(\frac{S(t)}{s_0}\right) = \left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right)t + \sigma(B(t) - B(0)).$$

Si se aplica la definición del Movimiento Browniano y la condición **MB.1**, $B(0) = 0$ con probabilidad 1 se obtiene:

$$\ln\left(\frac{S(t)}{s_0}\right) = \left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right)t + \sigma B(t),$$

$$\frac{S(t)}{s_0} = e^{\left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right)t + \sigma B(t)},$$

$$S(t) = s_0 e^{\left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right)t + \sigma B(t)}. \quad (4.1.11)$$

4.2. Propiedades estadísticas del proceso estocástico Log-Normal

Desde un enfoque práctico, la solución del Modelo Log-Normal (véase la expresión 4.1.11) será la herramienta fundamental para elaborar predicciones probabilísticas en un momento puntual en el tiempo, $t = T$, a partir de la función media y complementándose a través de los intervalos de confianza. Por esta razón, a continuación, se llevará a cabo el cálculo de las funciones media y varianza de la solución del Modelo Log-Normal en $t = T$.

Para el cálculo de la **función media** de la solución del modelo (4.0.1), se precisa la aplicación de la propiedad de $\frac{1}{2}$ - autosemejanza del Movimiento Browniano vista en el presente capítulo:

$$B(T \cdot t) \stackrel{d}{=} \sqrt{T} \cdot B(t), \quad t \geq 0, \quad T \geq 0,$$

si se aplica la propiedad al caso particular $t = 1$, esto es,

$$B(T \cdot 1) \stackrel{d}{=} \sqrt{T} \cdot B(1). \quad (4.2.1)$$

Cabe recordar que la definición de Movimiento Browniano se define por la siguiente distribución:

$$B(1) \sim N[0; 1].$$

Por otro lado, asimismo se requiere la siguiente propiedad:

$$E[e^{\lambda Z}] = e^{\frac{\lambda^2}{2}}, \quad Z \sim N[0; 1], \quad (4.2.2)$$

la cual puede deducirse del cálculo de la siguiente integral:

$$E[e^{\lambda Z}] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{\lambda z} e^{-\frac{z^2}{2}} dz.$$

Tomando el operador esperanza en la solución del modelo, $S(t) = S_0 e^{(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)t + \sigma B(t)}$, se obtiene:

$$\begin{aligned} E[S(T)] &= S_0 e^{(\mu - \frac{\sigma^2}{2})T} E[e^{\sigma B(T)}] \\ &= S_0 e^{(\mu - \frac{\sigma^2}{2})T} E[e^{\sigma\sqrt{T}B(1)}] \quad (4.2.3) \\ &= S_0 e^{(\mu - \frac{\sigma^2}{2})T} e^{\frac{(\sigma\sqrt{T})^2}{2}}, \end{aligned}$$

de forma simplificada:

$$E[S(T)] = S_0 e^{\mu T}. \quad (4.2.4)$$

La expresión (4.2.3) se ha obtenido tras aplicar la propiedad (4.2.1) y la relación (4.2.2) con $\lambda = \sigma\sqrt{T}$, $B(1) = Z \sim N[0; 1]$.

Por otra parte, la fórmula (4.2.4) revela que el Modelo Log-Normal disfruta de una considerable propiedad que permite corroborar que el comportamiento medio del precio de la acción es igual al valor del activo en el caso determinista. Esta propiedad puede confirmarse en la expresión (4.1.5) si $t = T$.

A continuación, se llevarán a cabo los cálculos pertinentes para hallar la **función varianza** de la solución del modelo, la cual permite conocer la volatilidad (varianza) del precio del activo empleando los mismos argumentos que para la media según revela el Modelo Log-Normal. Conforme a lo dicho, la función varianza viene dada por:

$$\begin{aligned}
\text{Var} [S(T)] &= E [(S(T))^2] - (E[S(T)])^2 \\
&= E \left[(S_0)^2 e^{2\sigma B(T) + 2\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)T} \right] - (S_0)^2 e^{2\mu T} \\
&= (S_0)^2 e^{2\mu T} (E[e^{2\sigma B(T)}] e^{-\sigma^2 T}) - 1,
\end{aligned}$$

si se desarrolla la anterior expresión se obtiene:

$$\begin{aligned}
\text{Var} [S(T)] &= (S_0)^2 e^{2\mu T} \left(E \left[e^{2\sigma\sqrt{T}B(1)} \right] e^{-\sigma^2 T} \right) - 1 \\
&= (S_0)^2 e^{2\mu T} \left(e^{\frac{4\sigma^2 T}{2}} e^{-\sigma^2 T} \right) - 1 \quad (4.2.5) \\
&= (S_0)^2 e^{2\mu T} (e^{\sigma^2 T} - 1),
\end{aligned}$$

esta expresión confirma que la varianza (volatilidad) de una acción incrementará cuando el horizonte temporal T también aumente.

4.3. Calibración de los parámetros del Modelo Log-Normal

En este punto se explicarán dos de los métodos estadísticos que ayudarán a estimar los parámetros μ y σ del Modelo Log-Normal.

- Método de los Momentos
- Método de Máxima Verosimilitud

La empleabilidad de estos métodos tiene como finalidad demostrar que los parámetros son semejantes en ambos métodos consiguiendo así unas estimaciones más robustas en el sentido de que sus valores no dependan del método estadístico utilizado.

En primer lugar, se analizará el **Método de los Momentos**, y para trabajar de una forma más útil se trabajará con log-cotizaciones, en otras palabras, con los logaritmos de las cotizaciones de los activos de la cartera, y para ello, será necesario aplicar logaritmos a la solución:

$$\ln(S(t)) - \ln(S_0) = \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)t + \sigma B(t) \sim N \left[\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)t; \sigma\sqrt{t} \right]. \quad (4.3.1)$$

Esta expresión sigue una distribución estadística Gaussiana ya que se trata de una transformación lineal de $B(t) \sim N [0; t]$.

Consideremos una serie de $K + 1$ cotizaciones del activo si $S(0) = S_0$, $S^{(1)} = S(\Delta t)$, $S^{(2)} = S(2\Delta t)$, ..., $S^{(K)} = S(K\Delta t)$, en los instantes $0, \Delta t, 2\Delta t, \dots, K\Delta t$ equiespaciados del intervalo $[0, t]$. En cada subperiodo $[(j-1)\Delta t, j\Delta t]$ con $j = 1, 2, \dots, K$, si aplicamos los K incrementos se obtiene:

$$U_j = \ln S(j\Delta t) - \ln(S((j-1)\Delta t)) \quad , \quad 1 \leq j \leq K. \quad (4.3.2)$$

Empleando estas expresiones en la expresión (4.3.1), se observa que:

$$\begin{aligned} \ln(S(j\Delta t)) &= \ln(S_0) + \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)j\Delta t + \sigma B(j\Delta t), \\ \ln(S((j-1)\Delta t)) &= \ln(S_0) + \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)(j-1)\Delta t + \sigma B((j-1)\Delta t), \end{aligned}$$

Si se resta la primera expresión de la segunda, la relación dada en (4.3.2) se puede reescribir de la siguiente forma:

$$U_j = \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right) \Delta t + \sigma \left(B(j\Delta t) - B((j-1)\Delta t)\right). \quad (4.3.3)$$

Por su definición el Movimiento Browniano presenta incrementos Gaussianos independientes de media cero y una varianza que representa la longitud del incremento sobre t , teniendo en cuenta estas características la distribución de las variables U_j dadas en (4.3.3) se expresarían de la siguiente forma:

$$U_j \sim N\left[\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)\Delta t; \sigma\sqrt{\Delta t}\right],$$

es decir, que las variables aleatorias U_j son Gaussianas e independientes con una media $\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)\Delta t$ y una varianza $\sigma^2 \Delta t$.

Por otra parte, para estimar los parámetros del Modelo Log-Normal es necesario partir de una muestra de $K + 1$ datos reales, además de estimar los parámetros μ y σ mediante el método de los momentos estadísticos, que implica igualar la media y la varianza de las K variables aleatorias U_j a la media muestral \bar{U} y a la quasi-varianza muestral S^2 dadas por:

$$\bar{U} = \frac{1}{K} \sum_{j=1}^K U_j, \quad S^2 = \frac{1}{K-1} \sum_{j=1}^K (U_j - \bar{U})^2. \quad (4.3.4)$$

Las expresiones anteriores permiten construir un sistema de ecuaciones algebraico para poder estimar los parámetros μ y σ :

$$\bar{U} = \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right) \Delta t, \quad S^2 = \sigma^2 \Delta t. \quad (4.3.5)$$

Resolviendo este sistema de ecuaciones se consigue hallar las estimaciones de los parámetros vistos:

$$\hat{\mu} = \frac{1}{\Delta t} \left(\bar{U} + \frac{S^2}{2}\right), \quad \hat{\sigma} = \frac{S}{\sqrt{\Delta t}}. \quad (4.3.6)$$

A continuación, se presenta una segunda forma, basada en el Método de Máxima Verosimilitud, para estimar los parámetros del Modelo Log-Normal.

El Método de Máxima Verosimilitud se basa en el concepto de verosimilitud, ideado por el estadístico Ronald Aylmer Fisher, un concepto fundamental de la Inferencia Estadística.

Suponiendo que se obtiene una muestra $\{x_k: 0 \leq k \leq N\}$ de una población explicada por una variable aleatoria continua definida por una función de densidad $p(x; \vec{\theta})$ que depende del vector de parámetros $\vec{\theta} \in \mathbb{R}^n$. Si se consideran muestras aleatorias simples, la probabilidad de que ocurra la muestra (x_1, x_2, \dots, x_N) para un vector establecido por un vector de parámetros $\vec{\theta}$ está dada por la función de densidad de probabilidad conjunta de la muestra, la cual se define por la función L .

$$L(x_1, x_2, \dots, x_n; \vec{\theta}) = \prod_{k=1}^N p(x_k; \vec{\theta}). \quad (4.3.7)$$

La siguiente cuestión se basa en determinar el valor de los parámetros $\vec{\theta}$, conocida una muestra fija.

Como se ha indicado anteriormente, (x_1, x_2, \dots, x_N) forma una muestra y, a partir de ella se construye la función de verosimilitud:

$$L(x_1, x_2, \dots, x_N; \vec{\theta}) = \prod_{k=1}^N p(x_k; \theta).$$

Obsérvese que la función anterior depende del parámetro desconocido $\vec{\theta}$, y no de la muestra, que toma valores fijos.

La idea principal de este método se basa en considerar como mejor estimación del vector de parámetros $\vec{\theta}$ el valor que haga máxima L para la muestra dada. Visto desde

la practica con una muestra (x_1, x_2, \dots, x_N) se contempla que es preferible la estimación $\vec{\theta}_1$ que $\vec{\theta}_2$ si se cumple:

$$L(x_1, x_2, \dots, x_N; \vec{\theta}_1) > L(x_1, x_2, \dots, x_N; \vec{\theta}_2),$$

lo que explica que el valor de $\vec{\theta}_1$ es más probable que el valor de $\vec{\theta}_2$ bajo la muestra (x_1, x_2, \dots, x_N) . Dicho de otro modo, el método trata de seleccionar la moda de la distribución a posteriori de $\vec{\theta}$.

Teniendo en cuenta que la función de verosimilitud es mayor o igual que cero para todo valor de $\vec{\theta}$ y que la función logaritmo es constante y creciente se obtiene que:

$$\max[L(x_1, x_2, \dots, x_N; \vec{\theta})] = \max[\ln(L(x_1, x_2, \dots, x_N; \vec{\theta}))].$$

Considerando $\ln L$ en vez de L se consigue calcular de una forma más sencilla el máximo de la función de verosimilitud. Por tanto,

$$\ln L(x_1, x_2, \dots, x_N; \theta) = \sum_{k=1}^N \ln p(x_k, \theta).$$

Para el cálculo de $\hat{\theta}$, inicialmente, se tiene que resolver la siguiente ecuación:

$$\frac{d \ln L}{d\theta} = 0,$$

de tal forma que si $\hat{\theta}$ es solución de esta ecuación, $\hat{\theta}$ será el máximo de la función de log-verosimilitud cuando la segunda derivada sea negativa.

Si la distribución poblacional está subordinada a n parámetros $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_n$, y por lo tanto habrá que resolver el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \ln L(\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_n)}{\partial \theta_1} &= 0, \\ &\vdots \\ \frac{\partial \ln L(\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_n)}{\partial \theta_n} &= 0. \end{aligned}$$

Adaptando la definición anterior al objetivo de este método, pues una muestra $\{x_k : 0 \leq k \leq N\}$ de un proceso estocástico $x(t)$ en los momentos $\{t_k : 0 \leq k \leq N\}$ y deduciendo que el proceso $x(t)$ depende de un vector de parámetros $\vec{\theta} \in \mathbb{R}^n$, se define el vector de tal forma que:

$$\max L(\theta) = f(t_0, x_0, t_1, x_1, \dots, t_N, x_N; \vec{\theta}),$$

donde $f(t_0, x_0, t_1, x_1, \dots, t_N, x_N; \vec{\theta})$ coincide con la función de densidad conjunta de la muestra. De forma generalizada, no se puede asumir que la muestra sea simple, es decir, que ésta sea independiente ya que no será aceptable la factorización de la expresión (4.3.2). Sin embargo, se podrá obtener una expresión de la función de densidad conjunta de tipo algebraica para aplicar el método de máxima verosimilitud.

A continuación, se aplicará el Método de Máxima Verosimilitud a nuestro problema. Para ello, cabe recordar que el Modelo Log-Normal se basa en la ecuación diferencial estocástica (4.0.1) y se representa por el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\left. \begin{aligned} dx(t) &= f(t, x(t); \vec{\theta}) dt + g(t, x(t); \vec{\theta}) dB(t), \\ x(0) &= x_0, \end{aligned} \right\} \quad (4.3.8)$$

con

$$\begin{aligned} x(t) &= S(t); \quad x_0 = s_0; \quad \vec{\theta} = (\mu, \sigma); \\ f(t, x(t); \vec{\theta}) &= \mu S(t); \quad g(t, x(t); \vec{\theta}) = \sigma S(t). \end{aligned}$$

Se puede comprobar que la solución de una ecuación de Itô de la forma (4.3.8) es un proceso de Márkov de primer orden, lo cual permite aplicar el Teorema de la Probabilidad Total y obtener la siguiente función de densidad de probabilidad conjunta:

$$\begin{aligned} p(t_0, x_0, t_1, x_1, t_2, x_2, \dots, t_N, x_N; \vec{\theta}) &= p(t_0, x_0, \vec{\theta}) p(t_1, x_1 | t_0, x_0; \vec{\theta}) \\ &\times p(t_2, x_2 | t_1, x_1, t_0, x_0; \vec{\theta}) \dots \\ &\vdots \\ &\times p(t_N, x_N | t_{N-1}, x_{N-1}, \dots, t_2, x_2, t_1, x_1, t_0, x_0; \vec{\theta}) \\ &= p(t_0, x_0; \vec{\theta}) p(t_1, x_1 | t_0, x_0; \vec{\theta}) p(t_2, x_2 | t_1, x_1; \vec{\theta}) \\ &\times p(t_N, x_N | t_{N-1}, x_{N-1}; \vec{\theta}). \end{aligned}$$

Señalar que $p(t_k, x_k | t_{k-1}, x_{k-1}; \vec{\theta})$ define la función de densidad de transición del proceso estocástico $x(t)$ que parte inicialmente en (t_{k-1}, x_{k-1}) hasta llegar a (t_k, x_k) . Como se ha mencionado anteriormente, la mejor forma de trabajar con estas expresiones es a través de su función de log-verosimilitud:

$$\ln(p(t_0, x_0, t_1, x_1, \dots, t_N, x_N; \vec{\theta})) = \ln(p(t_0, x_0; \vec{\theta})) + \sum_{k=1}^N \ln p(t_k, x_k | t_{k-1}, x_{k-1}; \vec{\theta}).$$

La maximización de esta función es equivalente a la minimización de su función opuesta, es decir:

$$\text{Min } D(\vec{\theta}) = -\ln(p(t_0, x_0; \vec{\theta})) - \sum_{k=1}^N \ln(p(t_k, x_k | t_{k-1}, x_{k-1}; \vec{\theta})). \quad (4.3.9)$$

A continuación, se calculará el valor de $p(t_k, x_k | t_{k-1}, x_{k-1}; \vec{\theta})$ y para ello, primeramente, se tendrá que definir la ecuación diferencial estocástica tipo de Itô tal como la ecuación, donde se aplicará el esquema de integración discreto de Euler-Maruyama para aproximar la ecuación en los instantes de la muestra que aparecen equiespaciados en el tiempo donde Δt representa el incremento temporal. Será necesario asumir un subintervalo de tiempo temporal, $[t_{k-1}, t_k]$, y transferir las ecuaciones a su versión discreta, un proceso conocido como discretización, para obtener la siguiente expresión:

$$\begin{aligned} x(t_k) - x(t_{k-1}) &= f(t_{k-1}, x(t_{k-1}); \vec{\theta}) \Delta t \\ &+ g(t_{k-1}, x(t_{k-1}); \vec{\theta}) \{B(t_k) - B(t_{k-1})\}. \end{aligned} \quad (4.3.10)$$

Si se denota la aproximación de la solución obtenida en el instante t_k por la variable x_k , es decir,

$$x_k \approx x(t_k),$$

la expresión (4.3.10) se puede reescribir como:

$$\begin{aligned} x_k \approx x_{k-1} &+ f(t_{k-1}, x_{k-1}; \vec{\theta}) \Delta t \\ &+ g(t_{k-1}, x_{k-1}; \vec{\theta}) \{B(t_k) - B(t_{k-1})\}. \end{aligned} \quad k = 1, \dots, N \quad (4.3.11)$$

Aplicando las propiedades del Movimiento Browniano puede deducirse que:

$$x_k | x_{k-1} \sim N[\mu_k; \sigma_k], \quad \begin{cases} \mu_k = x_{k-1} + f(t_{k-1}, x_{k-1}; \vec{\theta}) \Delta t, \\ \sigma_k = g(t_{k-1}, x_{k-1}; \vec{\theta}) \Delta t. \end{cases} \quad (4.3.12)$$

Y, por lo tanto,

$$p(t_k, x_k | t_{k-1}, x_{k-1}; \vec{\theta}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_k}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x_k - \mu_k}{\sigma_k}\right)^2}, \quad k = 1, 2, \dots, N \quad (4.3.13)$$

donde los valores μ_k y σ_k son las expresiones definidas en la expresión (4.3.12) y se emplearán para escribir de forma explícita la función de log-verosimilitud dada en (4.3.9) de la siguiente forma:

$$\begin{aligned}
 D(\vec{\theta}) &= -\ln\left(p(t_0, x_0; \vec{\theta})\right) - \sum_{k=1}^N \ln\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_k} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x_k - \mu_k}{\sigma_k}\right)^2}\right) \\
 &= \ln\left(p(t_0, x_0; \vec{\theta})\right) - N \ln\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_k}\right) + \sum_{k=1}^N \frac{1}{2}\left(\frac{x_k - \mu_k}{\sigma_k}\right)^2 \quad (4.3.14) \\
 &= -\ln\left(p(t_0, x_0; \vec{\theta})\right) + \frac{N}{2}\ln(2\pi) + \sum_{k=1}^N \ln(\sigma_k) + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^N \left(\frac{x_k - \mu_k}{\sigma_k}\right)^2.
 \end{aligned}$$

Considerando que el modelo es determinista en el momento inicial $x_0 = s_0$, entonces:

$$p(t_0, x_0; \vec{\theta}) = p(0, s_0; \mu, \sigma) = 1. \quad (4.3.15)$$

Por otra parte, las funciones μ_k y σ_k obtenidas en la expresión (4.3.12) tomarán la siguiente forma:

$$\mu_k = S_{k-1} + \mu S_{k-1} \Delta t; \quad \sigma_k = \sigma S_{k-1} \sqrt{\Delta t}. \quad (4.3.16)$$

Si se sustituye la expresión (4.3.15) y (4.3.16) en la función (4.3.14) se obtiene que:

$$\begin{aligned}
 D(\mu, \sigma) &= \frac{N}{2}\ln(2\pi) + \sum_{k=1}^N \ln(\sigma S_{k-1} \sqrt{\Delta t}) + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^N \left(\frac{S_k - S_{k-1} - \mu S_{k-1} \Delta t}{\sigma S_{k-1} \sqrt{\Delta t}}\right)^2 \\
 &= \frac{N}{2}\ln(2\pi) + \frac{N}{2}\ln(\Delta t) + N \ln(\sigma) \\
 &+ \sum_{k=1}^N \ln(S_{k-1}) + \frac{1}{2\sigma^2 \Delta t} \sum_{k=1}^N \left(\frac{S_k}{S_{k-1}} - 1 - \mu \Delta t\right)^2.
 \end{aligned}$$

Y, por lo tanto, se consigue el programa de minimización de la función de log-verosimilitud:

$$\begin{aligned}
 \text{Min} \quad D(\mu, \sigma) &= \frac{N}{2}\ln(2\pi) + \frac{N}{2}\ln(\Delta t) + N \ln(\sigma) \\
 (\mu, \sigma) \in \mathbb{R} \times]0, +\infty[&+ \sum_{k=1}^N \ln(S_{k-1}) + \frac{1}{2\sigma^2 \Delta t} \sum_{k=1}^N \left(\frac{S_k}{S_{k-1}} - 1 - \mu \Delta t\right)^2.
 \end{aligned}$$

Para resolver el programa de optimización anterior, antes de nada, se calcularán los puntos críticos, es decir, aquellos puntos donde el gradiente es nulo:

$$\begin{aligned}\frac{\partial D(\mu, \sigma)}{\partial \mu} &= -\frac{1}{\sigma^2} \sum_{k=1}^N \left(\frac{S_k}{S_{k-1}} - 1 - \mu \Delta t \right) = 0, \\ \frac{\partial D(\mu, \sigma)}{\partial \sigma} &= \frac{N}{\sigma} - \frac{1}{\sigma^3 \Delta t} \sum_{k=1}^N \left(\frac{S_k}{S_{k-1}} - 1 - \mu \Delta t \right)^2 = 0.\end{aligned}\quad (4.3.17)$$

A continuación, si se resuelve el sistema de ecuaciones (4.3.17) se obtiene como resultado que:

$$\hat{\mu} = \frac{1}{N \Delta t} \sum_{k=1}^N \left(\frac{S_k}{S_{k-1}} - 1 \right), \quad \hat{\sigma} = \frac{1}{N \Delta t} \sum_{k=1}^N \left(\frac{S_k}{S_{k-1}} - 1 - \hat{\mu} \Delta t \right)^2. \quad (4.3.18)$$

De ese modo, se puede demostrar que la matriz hessiana construida por las cuatro derivadas parciales segundas de la función $D(\mu, \sigma)$, tal y como se expresa a continuación,

$$H(D(\mu, \sigma)) = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 D(\mu, \sigma)}{\partial \mu^2} & \frac{\partial^2 D(\mu, \sigma)}{\partial \mu \partial \sigma} \\ \frac{\partial^2 D(\mu, \sigma)}{\partial \sigma \partial \mu} & \frac{\partial^2 D(\mu, \sigma)}{\partial \sigma^2} \end{bmatrix},$$

evaluado el punto crítico $(\hat{\mu}, \hat{\sigma})$, la expresión (4.3.18) tiene valores propios positivos lo cual significa que $(\hat{\mu}, \hat{\sigma})$ es un punto mínimo de la función opuesta de log-verosimilitud luego son estimadores máximos verosímiles del Modelo Log-Normal.

4.4. Validación del Modelo Log-Normal

En este apartado se presentan varias medidas de bondad de ajuste que se utilizarán en la práctica para validar los resultados que proporciona el Modelo Log-Normal.

- **Error porcentual absoluto medio (*Mean Absolute Percentage Error, MAPE*).**

El MAPE se calcula mediante el promedio de las diferencias absolutas entre los valores estimados mediante el Modelo Log-Normal, \hat{S}_i , y los observados, S_i , dividido por las observaciones del periodo correspondiente, i , expresado en porcentaje. El MAPE se define por la siguiente fórmula:

$$MAPE = \frac{100}{k} \sum_{i=1}^k \frac{|S_i - \hat{S}_i|}{S_i}. \quad (4.4.1)$$

El valor del MAPE se considera un error global de diagnóstico tolerable si éste muestra un valor inferior al 5%.

- **Error cuadrático medio (*Root Mean Squared Error, RMSE*).**

El RMSE mide la distancia al cuadrado por término medio entre valores observados, S_i , y estimados, \hat{S}_i , teniendo en cuenta las predicciones puntuales obtenidas a través del Modelo Log-Normal. Su valor se expresa mediante la fórmula:

$$RMSE = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^k (S_i - \hat{S}_i)^2}{k}}. \quad (4.4.2)$$

- **Construcción de intervalos de confianza del 95%.**

La construcción de intervalos de confianza tiene en cuenta dos características: por un lado, la amplitud del intervalo que determina la precisión de la estimación por lo que sería conveniente que este valor sea lo menor posible y, por otro lado, la probabilidad de que el intervalo incluya el valor de la estimación, lo que se conoce como nivel de confianza y se espera que sea lo mayor posible. Los intervalos de confianza que se construyan atenderán a un nivel de probabilidad del 95%.

- **Gráfico de observaciones y predicciones (puntales y por intervalos).**

Los resultados obtenidos de acuerdo con las medidas de bondad de ajuste previamente detalladas ayudarán a evaluar la adecuación del modelo a fin de efectuar las predicciones de la cartera.

5. MODELO DE MEDIA-VARIANZA DE MARKOWITZ

Este capítulo se dedica a introducir un modelo de formación de carteras, que obtiene los pesos de una cartera eficiente considerando el binomio media-varianza.

Según Martínez Abascal⁴, una cartera eficiente u óptima es la que permite la mejor combinación de rentabilidad/riesgo dentro de los activos disponibles en el mercado.

Por lo que se entiende que el inversor que decida mantener una cartera con un riesgo determinado preferirá optar por las carteras de ese riesgo, la de mayor rentabilidad. Y en el caso que decida mantener una cartera con una rentabilidad determinada, preferirá entre las carteras con esa rentabilidad, la de menor riesgo.

De este modo, se puede definir, de forma analítica, que una cartera p será eficiente si cumple las siguientes condiciones:

$$E(R_q) > E(R_p) \rightarrow \sigma^2_q > \sigma^2_p.$$

Esto es equivalente a decir que la cartera p será eficiente si para todas las carteras q con mayor rentabilidad que p , además se cumple que q tiene mayor riesgo que p . En otras palabras, para conseguir una mayor rentabilidad que p , a cambio se deberá asumir mayor nivel de riesgo.

También se clasificará como eficiente la cartera p que cumpla:

$$E(R_q) = E(R_p) \rightarrow \sigma^2_q \geq \sigma^2_p.$$

Cualquier cartera q con la misma rentabilidad que la cartera eficiente p , deberá tener al menos el mismo riesgo que p .

A continuación, se procederá a presentar, detalladamente, el modelo matemático de Markowitz, el cual permite caracterizar las carteras eficientes. Como ya se ha definido anteriormente, este modelo permitirá hallar estas carteras lo cual es equivalente a determinar los pesos de los títulos que las componen.

Suponiendo que el inversor dispone de N títulos que puede combinar en una cartera, de los que conoce la rentabilidad esperada, la varianza de los rendimientos y la covarianza entre dichos rendimientos:

x : Vector con los pesos en la cartera, $x^t = [x_1, \dots, x_N]$.

V : Matriz de varianzas-covarianzas, con entradas $\sigma_{ij} = 1, \dots, N$. Se asume que V es una matriz cuadrada, simétrica y no singular, es decir, invertible. La no singularidad supone que ningún título tiene sus rendimientos perfectamente correlacionados con otro título o con alguna combinación de estos.

⁴ Martínez Abascal, E. (1999): Invertir en Bolsa. Conceptos y Estrategias. McGraw Hill.

R : Vector de rentabilidades de los N títulos, $R^t = [r_1, \dots, r_N]$.

De estos 3 elementos, el inversor conoce o tiene una estimación de la matriz de varianzas-covarianzas (V), y del vector de rentabilidades (R). Con esta información, desea conocer los pesos de una cartera eficiente (x) con la única restricción de obtener una rentabilidad, R_p , o lo que es lo mismo, hallar la cartera que para una rentabilidad R_p , tenga el menor riesgo posible, σ_p^2 .

Si se transcriben las siguientes condiciones a un modelo de programación matemática se obtiene:

$$\text{Min } \sigma_p^2 = x^t V x, \quad (5.0.1)$$

$$\text{sujeto a: } x^t 1 = 1, \quad (5.0.2)$$

$$x^t R = R_p, \quad (5.0.3)$$

donde:

1: Vector compuesto por N unos, $1^t = [1 \dots 1]$.

R_p : Rentabilidad exigida por el inversor.

A continuación, se detallan la función objetivo y las restricciones de este modelo:

- **Función objetivo (5.0.1).**

En la función objetivo se minimiza la varianza de la cartera, σ_p^2 , que se puede expresar de forma matricial en forma de producto: $x^t V x$, donde el vector x representa al vector de pesos y el vector V a la matriz de varianzas-covarianzas

$$V = \begin{bmatrix} \sigma_1^2 & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_2^2 & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_3^2 \end{bmatrix}.$$

La anterior matriz de varianzas-covarianzas de dimensión 3x3, cuadrada y simétrica, está formada por una diagonal compuesta por la varianza de los rendimientos de los activos de la cartera, σ_1^2, σ_2^2 y σ_3^2 . Mientras que fuera de la diagonal se sitúan las covarianzas entre los activos.

- **Primera restricción (5.0.2).**

La primera restricción, $x^t \mathbf{1} = 1$, indica que la suma de los pesos debe ser uno. Esto quiere decir que se debe repartir el 100% de la inversión entre los N títulos que formarán la cartera propuesta.

$$x^t \mathbf{1} = [x_1 \dots x_N] \begin{bmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} = \sum_{i=1}^N x_i.$$

- **Segunda restricción (5.0.3).**

La siguiente restricción expresa la rentabilidad exigida de la cartera propuesta. A la izquierda de la igualdad el producto, $x^t R$, coincide con la rentabilidad de la cartera p que se está formando. Por otra parte, a la derecha de la igualdad se expresa la rentabilidad exigida de la cartera, R_p , el único parámetro del modelo que se puede definir,

$$x^t R = [x_1 \dots x_N] \begin{bmatrix} r_1 \\ \vdots \\ r_N \end{bmatrix} = \sum_{i=1}^N x_i r_i.$$

En resumen, el modelo descrito es la herramienta para la obtención de una cartera que minimice el riesgo con dos restricciones: que la suma de los pesos sea uno, y que la rentabilidad de la cartera coincida con el valor indicado en el parámetro, R_p , la rentabilidad exigida por el inversor.

5.1. Resolución analítica

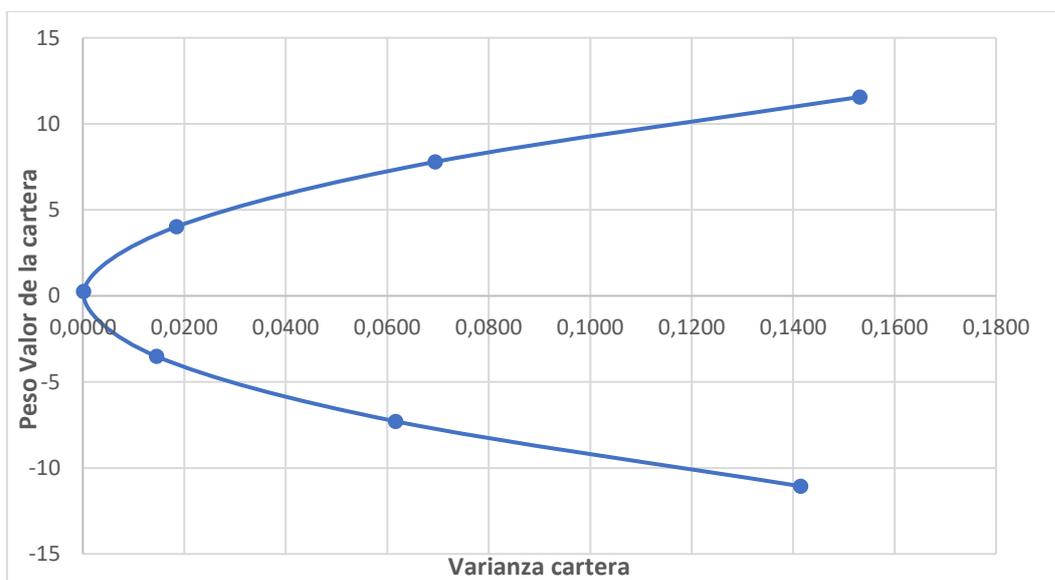
El modelo de Markowitz permite su resolución mediante un software de programación matemática, póngase por caso Lingo o Solver de Microsoft Excel[®]. También puede resolverse de forma analítica haciendo uso del lagrangiano⁵.

Si se analiza la función objetivo, se puede observar que la varianza de la cartera representa una función convexa. El Gráfico 5.1.1 interpreta la varianza de una cartera

⁵ En el ámbito de la economía, la función lagrangiana es usada para solucionar problemas de optimización con restricciones de igualdad. Su origen parte del matemático y astrónomo italo-francés, Joseph Louis Lagrange que desarrolló un método de multiplicadores para derivar un punto mínimo y máximo local en una función sujeta a restricciones de igualdad.

compuesta por dos títulos suponiendo que uno de los títulos completa el 100% de la inversión. Se ha estimado la varianza de 7 carteras representadas como puntos en la figura, mientras que los puntos que forman la curva corresponden a la estimación de la varianza para otras carteras con pesos intermedios. Ahora bien, la convexidad de función muestra y asegura que la varianza tiene un único punto mínimo.

Gráfico 5.1.1: Varianza como función convexa de los rendimientos de una cartera compuesta por 2 títulos



Fuente: Elaboración propia.

A todo esto, los pesos de una cartera eficiente serán aquellos que minimicen la función convexa de la varianza, para ello, se requiere derivar la varianza e igualarla a cero. Pueden darse dos circunstancias fundamentales: la primera, que el número de títulos sea N ; y la segunda, que pueden aplicarse restricciones al modelo que reducen el conjunto de soluciones posibles.

A continuación, resolveremos de forma analítica el Modelo de Markowitz, un modelo de optimización que requerirá el uso del lagrangiano para su resolución. Con la función objetivo y restricciones (5.0.1) - (5.0.3) el lagrangiano L queda definido de la siguiente forma:

$$L = x^t V x - \lambda_1 (x^t R - R_p) - \lambda_2 (x^t \mathbf{1} - 1), \quad (5.1.1)$$

donde λ_1 y λ_2 son los multiplicadores de Lagrange asociados a las restricciones (5.0.2) y (5.0.3).

En la ecuación (5.1.1) aparecen tres incógnitas: el vector de pesos, x , y los dos multiplicadores de Lagrange, λ_1 y λ_2 . Para obtener el vector de pesos óptimos, hay que derivar el lagrangiano respecto de cada una de las incógnitas e igualar a cero.

$$\frac{\partial L(\lambda_1, \lambda_2, x)}{\partial x} = 2Vx - \lambda_1 R - \lambda_2 \mathbf{1} = 0, \quad (5.1.2)$$

$$\frac{\partial L(\lambda_1, \lambda_2, x)}{\partial \lambda_1} = R_p - x^t R = 0, \quad (5.1.3)$$

$$\frac{\partial L(\lambda_1, \lambda_2, x)}{\partial \lambda_2} = \mathbf{1} - x^t \mathbf{1} = 0. \quad (5.1.4)$$

A partir de la expresión (5.1.2) se puede despejar el vector de pesos, x :

$$x = \frac{1}{2} V^{-1} (\lambda_1 R + \lambda_2 \mathbf{1}) = \frac{1}{2} V^{-1} [R \quad \mathbf{1}] \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{bmatrix}. \quad (5.1.5)$$

Y las expresiones (5.1.3) y (5.1.4) pueden escribirse como una única función:

$$[R \quad \mathbf{1}]^t x = \begin{bmatrix} R_p \\ \mathbf{1} \end{bmatrix}. \quad (5.1.6)$$

Al premultiplicar la expresión (5.1.5) por la matriz $[R \quad \mathbf{1}]^t$ se obtiene:

$$[R \quad \mathbf{1}]^t x = [R \quad \mathbf{1}]^t \frac{1}{2} V^{-1} [R \quad \mathbf{1}] \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_p \\ \mathbf{1} \end{bmatrix}. \quad (5.1.7)$$

Para simplificar la expresión anterior, se realizará el siguiente cambio:

$$A = [R \quad \mathbf{1}]^t V^{-1} [R \quad \mathbf{1}], \quad (5.1.8)$$

donde A es una matriz cuadrada de dimensión 2×2 , y tiene las siguientes componentes:

$$A = [R \quad \mathbf{1}]^t V^{-1} [R \quad \mathbf{1}] = \begin{bmatrix} R^t V^{-1} R & R^t V^{-1} \mathbf{1} \\ R^t V^{-1} \mathbf{1} & \mathbf{1}^t V^{-1} \mathbf{1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix}. \quad (5.1.9)$$

De este modo se comprueba que la matriz A es una matriz simétrica y sus componentes son escalares y pueden expresarse de la siguiente forma, tal y como aparece en la expresión anterior (5.1.9):

$$a = R^t V^{-1} R,$$

$$b = R^t V^{-1} \mathbf{1},$$

$$c = \mathbf{1}^t V^{-1} \mathbf{1}.$$

Por lo tanto, la expresión (5.1.7) quedará como:

$$\frac{1}{2} A \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_p \\ 1 \end{bmatrix}, \quad (5.1.10)$$

y al pasar la matriz A al termino derecho de la igualdad:

$$\frac{1}{2} \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{bmatrix} = A^{-1} \begin{bmatrix} R_p \\ 1 \end{bmatrix}. \quad (5.1.11)$$

Sustituyendo en la expresión (5.1.5) se obtiene la solución para el vector de pesos, x :

$$x = V^{-1} [R \quad 1] A^{-1} \begin{bmatrix} R_p \\ 1 \end{bmatrix}. \quad (5.1.12)$$

Dada una cartera de mínima varianza definida por el vector de pesos, x , con una rentabilidad, R_p , su varianza se determinará por la expresión (5.1.13):

$$\sigma_p^2 = \left(\frac{a-2bR_p+cR_p^2}{ac-b^2} \right). \quad (5.1.13)$$

5.2. Frontera de mínima varianza

En los epígrafes anteriores se ha trabajado el Modelo de Markowitz en su versión más general con el objetivo de minimizar el riesgo para una rentabilidad determinada. El mismo modelo puede plantearse de forma alternativa obteniendo el mismo resultado: maximizando la rentabilidad para un riesgo determinado.

$$\text{Max } R_p = x^t R, \quad (5.2.1)$$

$$\text{sujeto a: } x^t 1 = 1, \quad (5.2.2)$$

$$x^t V x = \sigma_p^2. \quad (5.2.3)$$

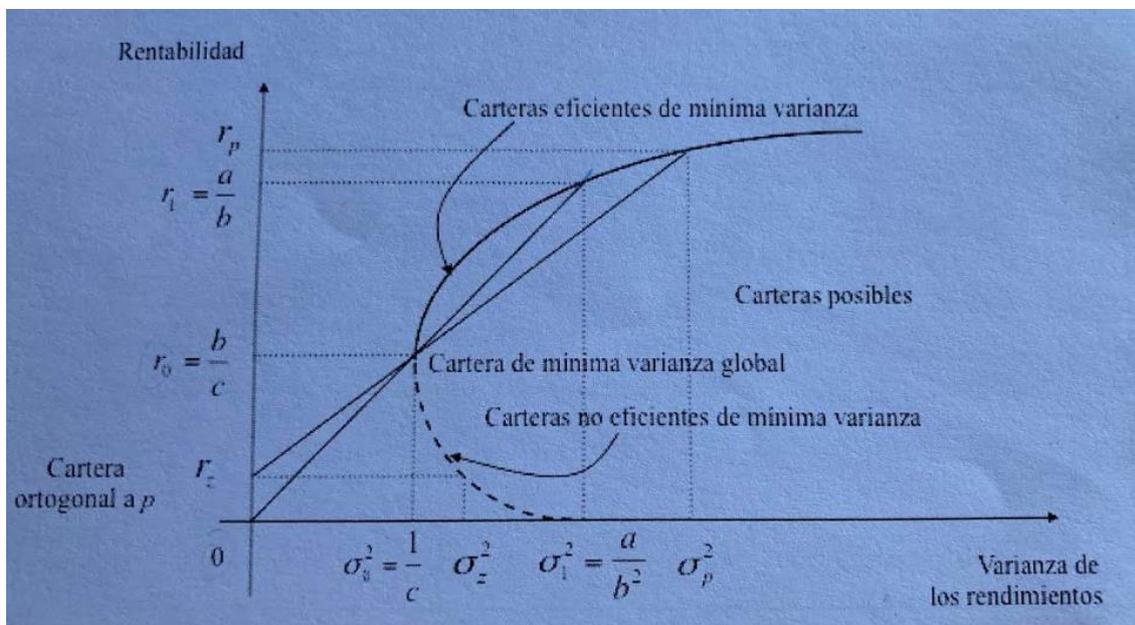
En este caso, se define el parámetro, σ_p^2 , la varianza, en vez de la rentabilidad. Este modelo de Markowitz no es el más aplicado debido a que es más complejo determinar el nivel de riesgo que la rentabilidad exigida.

Independientemente de la versión del modelo que se utilice, es evidente que modificando el parámetro de entrada se obtendrán diferentes soluciones para el vector de pesos x .

Si se resuelve el modelo (5.0.1) - (5.0.3), el modelo que se aplicará en este estudio, variando el valor de la rentabilidad exigida, R_p , se obtendrán diferentes carteras de Markowitz y, a partir de ellas se podrá representar la denominada frontera de mínima-varianza o frontera de Markowitz. Dicha frontera está compuesta por las carteras de mínimo riesgo para la rentabilidad asociada a las mismas, donde se hallan las carteras eficientes del modelo.

Brevemente, se presentarán dos de las carteras más significativas de la frontera de Markowitz, se trata de las denominadas carteras 0 y 1, las cuales ayudan a subdividir la frontera en dos partes: una compuesta por carteras eficientes y otra compuesta por carteras ineficientes. En el Gráfico 5.2.1 aparecen los elementos más relevantes de la frontera de Markowitz donde se incluyen las carteras 0 y 1.

Gráfico 5.2.1: Elementos relevantes de frontera de Markowitz. Carteras 0 y 1



Fuente: (Martinez, Francisco G., 2015).

El elemento más importante es la cartera 0 que tiene por rentabilidad $R_0 = \frac{b}{c}$ y por varianza $\sigma_0^2 = \frac{1}{c}$, y es conocida como la única cartera de mínimo riesgo global. Su varianza se puede calcular derivando la expresión de la varianza (5.1.13) respecto a la rentabilidad, para después igualar a cero:

$$\frac{\partial \sigma_p^2}{\partial R_p} = \frac{\partial \left(\frac{a - 2bR_p + cR_p^2}{ac - b^2} \right)}{\partial R_p} = \frac{1}{ac - b^2} (-2b + 2cR_p) = 0. \quad (5.2.4)$$

Despejando la rentabilidad en la expresión (5.2.4):

$$R_0 = \frac{b}{c}.$$

Y sustituyendo el valor de R_0 en la expresión de la varianza (5.1.13):

$$\sigma_p^2 = \left(\frac{a - 2bR_p + cR_p^2}{ac - b^2} \right) = \left(\frac{a - 2b \left(\frac{b}{c} \right) + c \left(\frac{b}{c} \right)^2}{ac - b^2} \right) = \frac{1}{c}.$$

Para calcular la cartera 0 es necesario aplicar las fórmulas utilizadas para la resolución analítica del modelo (véase Apartado 5.1) sin la necesidad de utilizar ningún programa informático como Solver.

Partiendo de las fórmulas ya obtenidas en el Apartado 5.1:

$$x = V^{-1} [R \quad 1] A^{-1} \begin{bmatrix} R_p \\ 1 \end{bmatrix},$$

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix},$$

$$a = R^t V^{-1} R,$$

$$b = R^t V^{-1} \mathbf{1},$$

$$c = \mathbf{1}^t V^{-1} \mathbf{1}.$$

donde:

x : Pesos de los títulos,

R : Matriz de rentabilidades,

V : Matriz de Covarianzas,

R_p : Rentabilidad exigida,

se puede obtener la rentabilidad, $R_0 = \frac{b}{c}$, y la varianza, $\sigma_0^2 = \frac{1}{c}$, de la cartera 0.

Esta cartera identificará dentro de la frontera de Markowitz, las carteras eficientes de mínima varianza de las carteras no eficiente que son aquellas que pertenecen a la frontera, pero no son eficientes ya que existe otra cartera con la misma varianza, pero mayor rentabilidad en la parte eficiente de la cartera.

6. APLICACIÓN DEL MODELO LOG-NORMAL

En este apartado se aplicarán los conceptos teóricos presentados en el Capítulo 4 con el objetivo de aplicar el Modelo Log-Normal a la modelización de la cartera financiera seleccionada de empresas que cotizan en el IBEX-35: Acerinox, Telefónica y Santander.

Para la aplicación del modelo se ha seleccionado un horizonte temporal de 94 periodos (del 02/05/2019 al 11/09/2019), y como herramienta de cálculo se ha empleado Excel[®], una herramienta muy completa con la que se validará el modelo y se estimarán los valores de cada título que compone la cartera. El primer paso será obtener las predicciones de cada título de los siguientes cinco días teniendo en cuenta las predicciones anteriores, en otras palabras, el objetivo será predecir el valor de los títulos de los días 12,13,16,17 y 18 de septiembre de 2019, un total de cinco días hábiles. Se realizarán más de una estimación para la posterior aplicación práctica del Modelo de Markowitz en el siguiente capítulo pues para la aplicación y validación del Modelo Log-Normal solo será necesario realizar una estimación de cada título, el 12 de septiembre de 2019.

Una vez obtenidas las predicciones, se expondrán los resultados para proceder a la segunda parte del estudio: hallar la cantidad a invertir en cada título minimizando el

riesgo de la cartera a través del Modelo de Markowitz, el cual se aplicará también utilizando la herramienta Excel[®].

En los Anexos del 1 al 3 se presentan las cotizaciones diarias de los títulos que componen la cartera.

6.1. Estimación de los parámetros del Modelo Log-Normal

Tal y como se explicó en el Capítulo 4 (véase Apartado 4.6) pueden aplicarse dos de los métodos estadísticos para estimar el valor de los parámetros μ (tendencia) y σ (volatilidad) del Modelo Log-Normal. Los métodos para aplicar son los siguientes:

- Método de los Momentos.
- Método de Máxima Verosimilitud.

La empleabilidad de estos métodos tiene como finalidad demostrar que los parámetros son semejantes en ambos métodos consiguiendo así unas estimaciones más fiables que no dependen del método utilizado.

6.1.1. Estimación de parámetros con el Método de los Momentos

La primera estimación de los parámetros se obtendrá mediante el Método de los Momentos aplicado a la solución del Modelo Log-Normal. Este método se ha programado con la herramienta Excel[®] trabajando con los logaritmos de las cotizaciones, también llamados log-retornos.

El cálculo de las estimaciones de los parámetros μ y σ se van a calcular a través de las fórmulas obtenidas en el Apartado 4.3:

$$\widehat{\mu} = \frac{1}{\Delta t} \left(\bar{U} + \frac{S^2}{2} \right), \quad \widehat{\sigma} = \frac{S}{\sqrt{\Delta t}},$$

donde \bar{U} y S^2 son la media y la quasi-varianza muestral de las log-cotizaciones y $\Delta t = 1/252$ corresponde al paso temporal definido para el modelo, siendo 252 el número

medio de los días hábiles que cotizan anualmente las acciones del IBEX-35 que componen la cartera. La Tabla 6.1.1.1 muestra los resultados de los parámetros \bar{U} y S^2 .

Tabla 6.1.1.1: Media y varianza de los Log-Retornos

	\bar{U}	S^2
ACERINOX	-0,00090	0,00037
TELEFONICA	-0,0010	0,0001
SANTANDER	-0,0019	0,0002

Fuente: Elaboración propia.

Una vez obtenidos los parámetros \bar{U} y S^2 , se puede estimar los parámetros μ y σ cuyos resultados aparecen en la siguiente Tabla 6.1.1.2.

Tabla 6.1.1.2: Parámetros μ y σ . Método de los Momentos

	μ	σ
ACERINOX	-0,1812	0,3076
TELEFONICA	-0,2267	0,1705
SANTANDER	-0,4518	0,2281

Fuente: Elaboración propia.

6.1.2. [Estimación de parámetros con el Método de Máxima Verosimilitud](#)

A continuación, se aplicará el Método de Máxima Verosimilitud para la de los parámetros μ y σ , una vez más aplicando la solución del Modelo Log-Normal. Para la obtención de los parámetros se aplicarán las fórmulas halladas en la Apartado 4.3:

$$\hat{\mu} = \frac{1}{N\Delta t} \sum_{k=1}^N \left(\frac{S_k}{S_{k-1}} - 1 \right),$$

$$\hat{\sigma} = \frac{1}{N\Delta t} \sum_{k=1}^N \left(\frac{S_k}{S_{k-1}} - 1 - \hat{\mu}\Delta t \right)^2.$$

Tras aplicar las fórmulas tomando $\Delta t = 1/252$, que corresponde al paso diario referenciado a los 252 días hábiles que, en media, opera el IBEX-35, se han obtenido los resultados mostrados en la Tabla 6.1.2.1.

Tabla 6.1.2.1: Parámetros μ y σ . Método de Máxima Verosimilitud

	μ	σ
ACERINOX	-0,1798	0,0923
TELEFONICA	-0,2244	0,0281
SANTANDER	-0,4469	0,2510

Fuente: Elaboración propia.

Comparando las estimaciones obtenidas mediante el Método de los Momentos y el Método de Máxima Verosimilitud se observa, en la Tabla 6.1.2.2, como los resultados de ambos métodos son muy similares. De tal modo que se corrobora que los resultados que se obtienen no dependen del método utilizado.

Tabla 6.1.2.2: Resultado de las estimaciones de los parámetros del Modelo Log-Normal

		μ	σ
Método los Momentos	Acerinox	-0,1798	0,0923
	Telefónica	-0,2244	0,0281
	Santander	-0,4469	0,251
Método Máxima Verosimilitud	Acerinox	-0,1812	0,3076
	Telefónica	-0,2267	0,1705
	Santander	-0,4518	0,2281

Fuente: Elaboración propia.

6.2 Validación del Modelo Log-Normal

A continuación, se procederá a validar el Modelo Log-Normal a través de una serie de criterios estadísticos para verificar que la solución del modelo para la cartera propuesta sea válida. Los criterios estadísticos para tener en cuenta serán: las medidas de bondad de ajuste y los intervalos de confianza (véase el Apartado 4.4), y en base a estos principios y los resultados obtenidos se podrá validar si las predicciones obtenidas para el conjunto de títulos son fiables.

6.2.1 Validación de los parámetros a través del Método de los Momentos

En este apartado se calculará la función media (estimación puntual de cada título) y la función varianza teórica de cada título que compone la cartera durante el periodo para cada instante fijo t .

Con los parámetros estimados mediante el Método de los Momentos y aplicando las ecuaciones (4.2.3) y (4.2.4) se obtiene la media y varianza teórica de $S(t)$ para cada instante t aplicando el incremento temporal.

Una vez calculadas la media y la varianza de cada título componente de la cartera durante el periodo elegido, puede validarse el modelo con las medidas de bondad de ajuste y a través de los intervalos de confianza.

El Error Porcentual Absoluto Medio (MAPE) se obtiene a través de las diferencias absolutas entre los valores estimados mediante el Modelo Log-Normal, y los observados, dividido por las observaciones del periodo correspondiente, expresado en porcentaje. Esta medida, tal y como se explica en el Apartado 4.4, se considera un error global de diagnóstico tolerable si su valor es inferior al 5%. Como puede verse en la Tabla 6.2.1.1, todos los títulos de la cartera a excepción de Acerinox están dentro del error global de diagnóstico definido por el MAPE.

Tabla 6.2.1.1: Resultado de las medidas bondad de ajuste: MAPE y RSME mediante el Método de Momentos

	MAPE	RMSE
ACERINOX	6,57 %	0,53
TELEFONICA	4,39 %	0,14
SANTANDER	4,8 %	0,06

Fuente: Elaboración propia.

Respecto al RSME en todos los casos muestra un valor bajo, por lo que en general esto indica que las estimaciones de los parámetros por el Método de los Momentos tienen un grado alto de aceptación.

Por último, se construirán intervalos de confianza del 95% para comprobar si son capaces de capturar la incertidumbre (variaciones) de las cotizaciones. Los intervalos de confianza se construirán con la siguiente expresión:

$$E[S(t)] \pm 1,96 \times \sigma[S(t)],$$

donde:

$$E[S(t)] = S_0 e^{\mu t},$$

$$Var [S(t)] = (S_0)^2 e^{2\mu t} (e^{\sigma^2 t} - 1).$$

Tabla 6.2.1.2: Resultado de las predicciones y los intervalos de confianza teóricos con un 95% de confianza aplicando las estimaciones a través del Método de los Momentos

ACERINOX			TELEFONICA			SANTANDER		
Predic.	I.C. Sup	I.C. Inf	Predic.	I.C. Sup	I.C. Inf	Predic.	I.C. Sup	I.C. Inf
9,080	9,080	9,080	7,321	7,321	7,321	4,434	4,434	4,434
9,064	9,075	9,053	7,317	7,322	7,312	4,431	4,435	4,427
9,053	9,069	9,038	7,311	7,318	7,304	4,425	4,431	4,420
9,044	9,063	9,025	7,305	7,314	7,297	4,419	4,426	4,412
9,035	9,057	9,013	7,299	7,309	7,289	4,412	4,420	4,404
9,026	9,050	9,001	7,293	7,304	7,282	4,405	4,414	4,396
9,017	9,044	8,990	7,287	7,299	7,275	4,398	4,408	4,389
9,009	9,038	8,980	7,281	7,294	7,268	4,391	4,402	4,381
9,001	9,032	8,970	7,275	7,289	7,261	4,384	4,396	4,373
8,993	9,026	8,960	7,269	7,283	7,254	4,377	4,389	4,366
8,985	9,019	8,950	7,262	7,278	7,247	4,370	4,383	4,358
8,977	9,013	8,940	7,256	7,272	7,240	4,363	4,376	4,350
8,969	9,007	8,931	7,250	7,267	7,233	4,356	4,370	4,343
8,961	9,001	8,922	7,244	7,261	7,226	4,349	4,363	4,335
8,953	8,994	8,913	7,238	7,256	7,219	4,342	4,356	4,327
8,946	8,988	8,904	7,231	7,250	7,212	4,335	4,350	4,320
8,938	8,982	8,895	7,225	7,245	7,206	4,327	4,343	4,312
8,931	8,976	8,886	7,219	7,239	7,199	4,320	4,336	4,304
8,923	8,969	8,877	7,213	7,233	7,192	4,313	4,329	4,297
8,916	8,963	8,868	7,206	7,228	7,185	4,306	4,323	4,289
8,908	8,957	8,860	7,200	7,222	7,179	4,299	4,316	4,281
8,901	8,950	8,851	7,194	7,216	7,172	4,291	4,309	4,274
8,893	8,944	8,843	7,188	7,210	7,165	4,284	4,302	4,266
8,886	8,938	8,834	7,182	7,205	7,158	4,277	4,295	4,259
8,879	8,932	8,826	7,175	7,199	7,152	4,270	4,289	4,251
8,871	8,925	8,817	7,169	7,193	7,145	4,263	4,282	4,244
8,864	8,919	8,809	7,163	7,187	7,138	4,255	4,275	4,236
8,857	8,913	8,801	7,157	7,182	7,132	4,248	4,268	4,228
8,850	8,907	8,793	7,150	7,176	7,125	4,241	4,261	4,221
8,842	8,900	8,784	7,144	7,170	7,118	4,234	4,254	4,213
8,835	8,894	8,776	7,138	7,164	7,112	4,227	4,248	4,206
8,828	8,888	8,768	7,132	7,158	7,105	4,220	4,241	4,199
8,821	8,882	8,760	7,126	7,153	7,098	4,212	4,234	4,191
8,814	8,875	8,752	7,119	7,147	7,092	4,205	4,227	4,184
8,807	8,869	8,744	7,113	7,141	7,085	4,198	4,220	4,176

8,800	8,863	8,736
8,792	8,857	8,728
8,785	8,851	8,720
8,778	8,844	8,712
8,771	8,838	8,705
8,764	8,832	8,697
8,757	8,826	8,689
8,750	8,819	8,681
8,743	8,813	8,673
8,736	8,807	8,666
8,729	8,801	8,658
8,723	8,795	8,650
8,716	8,788	8,643
8,709	8,782	8,635
8,702	8,776	8,628
8,695	8,770	8,620
8,688	8,764	8,612
8,681	8,757	8,605
8,674	8,751	8,597
8,668	8,745	8,590
8,661	8,739	8,582
8,654	8,733	8,575
8,647	8,727	8,567
8,640	8,721	8,560
8,634	8,714	8,553
8,627	8,708	8,545
8,620	8,702	8,538
8,613	8,696	8,531
8,606	8,690	8,523
8,600	8,684	8,516
8,593	8,678	8,509
8,586	8,671	8,501
8,580	8,665	8,494
8,573	8,659	8,487
8,566	8,653	8,479
8,560	8,647	8,472
8,553	8,641	8,465
8,546	8,635	8,458
8,540	8,629	8,451
8,533	8,623	8,443
8,526	8,616	8,436
8,520	8,610	8,429
8,513	8,604	8,422

7,107	7,135	7,079
7,101	7,129	7,072
7,094	7,123	7,065
7,088	7,118	7,059
7,082	7,112	7,052
7,076	7,106	7,046
7,070	7,100	7,039
7,064	7,094	7,033
7,057	7,088	7,026
7,051	7,083	7,020
7,045	7,077	7,013
7,039	7,071	7,007
7,033	7,065	7,000
7,026	7,059	6,994
7,020	7,053	6,987
7,014	7,047	6,981
7,008	7,042	6,974
7,002	7,036	6,968
6,996	7,030	6,961
6,990	7,024	6,955
6,983	7,018	6,949
6,977	7,012	6,942
6,971	7,007	6,936
6,965	7,001	6,929
6,959	6,995	6,923
6,953	6,989	6,917
6,947	6,983	6,910
6,941	6,977	6,904
6,934	6,971	6,897
6,928	6,966	6,891
6,922	6,960	6,885
6,916	6,954	6,878
6,910	6,948	6,872
6,904	6,942	6,866
6,898	6,936	6,859
6,892	6,931	6,853
6,886	6,925	6,847
6,880	6,919	6,841
6,874	6,913	6,834
6,868	6,907	6,828
6,862	6,902	6,822
6,856	6,896	6,815
6,849	6,890	6,809

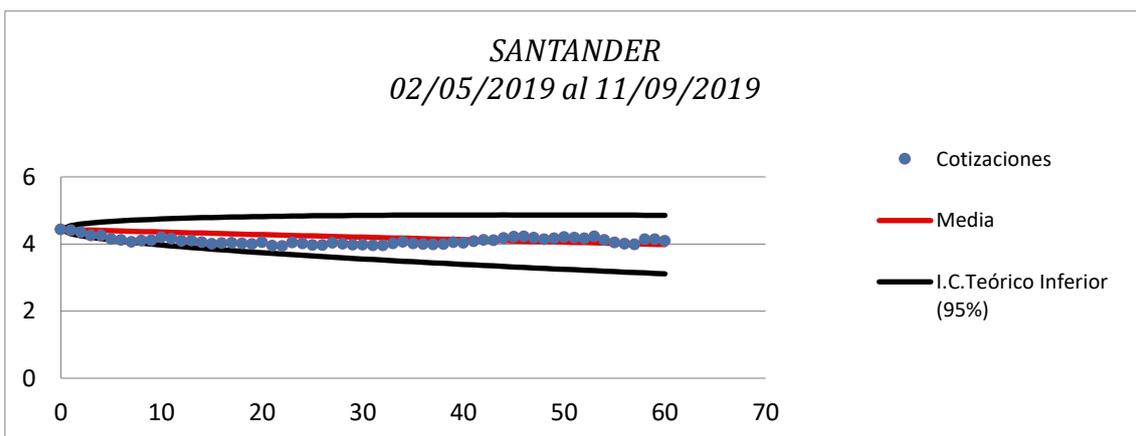
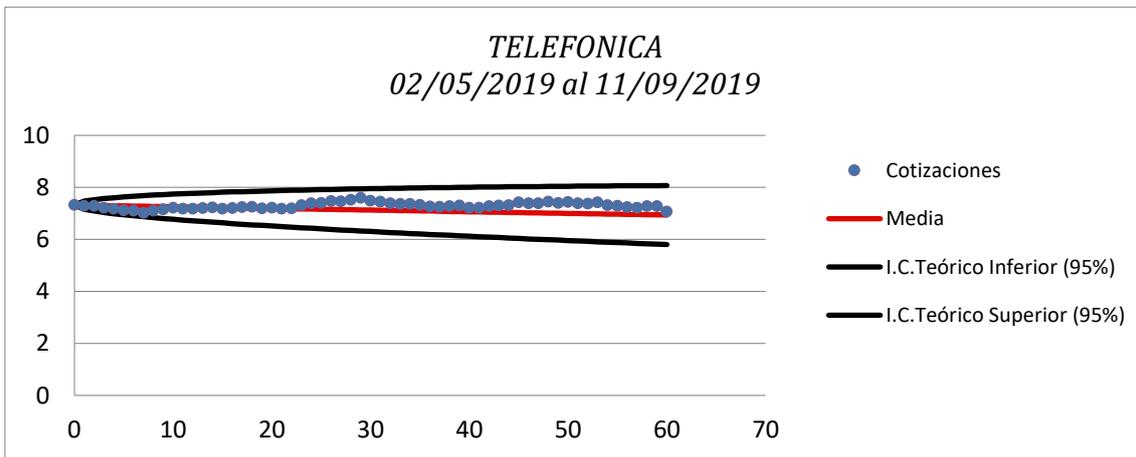
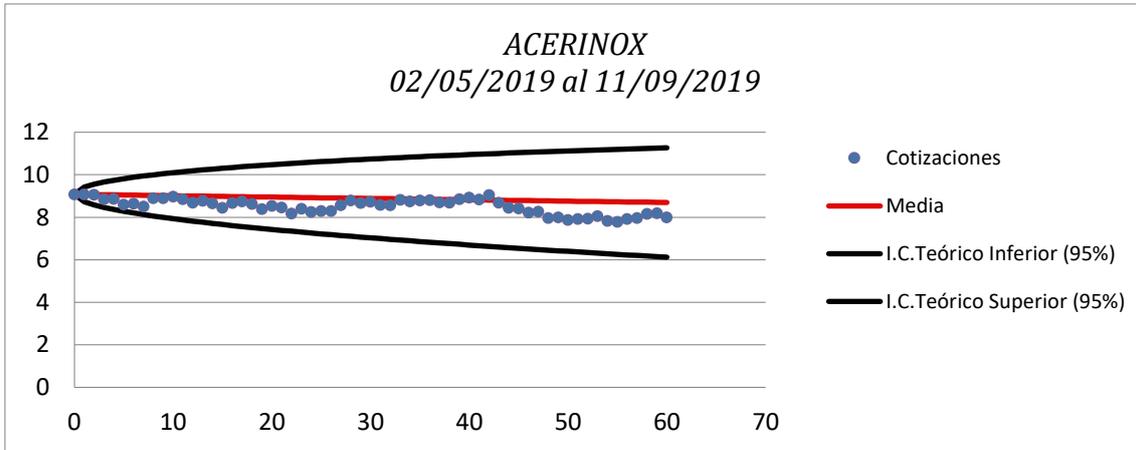
4,191	4,213	4,169
4,184	4,206	4,161
4,177	4,200	4,154
4,170	4,193	4,147
4,163	4,186	4,139
4,155	4,179	4,132
4,148	4,172	4,124
4,141	4,165	4,117
4,134	4,159	4,110
4,127	4,152	4,102
4,120	4,145	4,095
4,113	4,138	4,088
4,106	4,131	4,081
4,099	4,124	4,073
4,092	4,118	4,066
4,085	4,111	4,059
4,078	4,104	4,052
4,071	4,097	4,044
4,064	4,090	4,037
4,057	4,084	4,030
4,050	4,077	4,023
4,043	4,070	4,016
4,036	4,063	4,009
4,029	4,057	4,001
4,022	4,050	3,994
4,015	4,043	3,987
4,008	4,036	3,980
4,001	4,030	3,973
3,994	4,023	3,966
3,988	4,016	3,959
3,981	4,010	3,952
3,974	4,003	3,945
3,967	3,996	3,938
3,960	3,990	3,931
3,953	3,983	3,924
3,946	3,976	3,917
3,940	3,970	3,910
3,933	3,963	3,903
3,926	3,956	3,896
3,919	3,950	3,889
3,912	3,943	3,882
3,906	3,936	3,875
3,899	3,930	3,868

8,507	8,598	8,415	6,843	6,884	6,803	3,892	3,923	3,861
8,500	8,592	8,408	6,837	6,878	6,797	3,885	3,917	3,854
8,493	8,586	8,401	6,831	6,872	6,790	3,879	3,910	3,847
8,487	8,580	8,394	6,825	6,867	6,784	3,872	3,903	3,841
8,480	8,574	8,386	6,819	6,861	6,778	3,865	3,897	3,834
8,474	8,568	8,379	6,813	6,855	6,772	3,859	3,890	3,827
8,467	8,562	8,372	6,807	6,849	6,765	3,852	3,884	3,820
8,461	8,556	8,365	6,801	6,843	6,759	3,845	3,877	3,813
8,454	8,550	8,358	6,795	6,838	6,753	3,839	3,871	3,807
8,447	8,544	8,351	6,789	6,832	6,747	3,832	3,864	3,800
8,441	8,538	8,344	6,783	6,826	6,741	3,825	3,858	3,793
8,434	8,532	8,337	6,777	6,820	6,734	3,819	3,851	3,786
8,428	8,525	8,330	6,771	6,815	6,728	3,812	3,845	3,779
8,421	8,519	8,323	6,765	6,809	6,722	3,805	3,838	3,773
8,415	8,513	8,316	6,759	6,803	6,716	3,799	3,832	3,766
8,408	8,507	8,309	6,753	6,797	6,710	3,792	3,825	3,759
8,402	8,501	8,302	6,748	6,791	6,704	3,786	3,819	3,753
8,395	8,495	8,296	6,742	6,786	6,697	3,779	3,812	3,746

Fuente: Elaboración propia.

En la Tabla 6.2.1.2 se muestran el valor de las predicciones y los intervalos de confianza teóricos que determinan entre qué valores fluctuará el precio de cada título en el futuro y, de ese modo se establece un rango de precios entre los cuales se espera que oscilen las cotizaciones de los títulos con el fin de verificar si las estimaciones obtenidas por el método aplicado son válidas.

Gráfico 6.2.1.1: Datos reales de cotización, predicciones e intervalos de Confianza (95%) para los títulos de la cartera propuesta cuyos parámetros han sido calibrados mediante el Método de los Momentos



Fuente: Elaboración propia.

En el Gráfico 6.2.1.1 se muestran las cotizaciones reales junto a las predicciones puntuales (media) y probabilísticas (intervalos de confianza al 95%) obtenidas mediante el Modelo Log-Normal, y cuyos parámetros se han calibrado mediante el Método de Momentos. Como puede verse, las cotizaciones obtenidas durante el periodo analizado se localizan dentro de los intervalos de confianza calculados, por lo que se puede afirmar que el Modelo Log-Normal con parámetros estimados mediante el Método de los Momentos captura la dinámica de los títulos de la cartera durante el periodo seleccionado.

6.2.2 Validación de los parámetros a través del Método Máxima Verosimilitud

En este apartado, se aplicará el mismo modelo expuesto en el apartado anterior, pero validando el Modelo Log-Normal a partir de los parámetros calculados con el Método de Máxima Verosimilitud, por lo que se volverán a aplicar las ecuaciones (4.2.4) y (4.2.5) para la obtención de la media y varianza del modelo.

Una vez calculadas la media y la varianza de cada título componente de la cartera durante el periodo elegido, puede validarse el modelo con las medidas de bondad de ajuste y con los intervalos de confianza.

Los valores obtenidos del MAPE y del RSME mediante la aplicación de este método son los que se muestran en la Tabla 6.2.2.1.

Tabla 6.2.2.1: Resultado de las medidas bondad de ajuste: MAPE y RSME mediante el Método de Máxima Verosimilitud

	MAPE	RMSE
ACERINOX	7,06 %	0,59
TELEFONICA	4,38 %	0,14
SANTANDER	5,51 %	0,06

Fuente: Elaboración propia.

Como en el apartado anterior, el RSME muestra valores bajos y los valores del MAPE varían en un rango de aceptación (aunque en el caso de Acerinox es algo superior al 5%) y, por lo tanto, puede decirse que las estimaciones de los parámetros por el Método de Máxima Verosimilitud tienen un buen grado de aceptación. En la Tabla 6.2.2.2 se muestran las predicciones y los Intervalos de Confianza obtenidos con los parámetros calculados mediante el Método de Máxima Verosimilitud.

Tabla 6.2.2.2: Resultado de las predicciones y los intervalos de confianza teóricos con un 95% de confianza aplicando las estimaciones a través del Método de Máxima Verosimilitud

ACERINOX			TELEFONICA			SANTANDER		
Predic.	I.C. Sup	I.C. Inf	Predic.	I.C. Sup	I.C. Inf	Predic.	I.C. Sup	I.C. Inf
9,080	9,080	9,080	7,321	7,321	7,321	4,434	4,434	4,434
9,071	9,074	9,067	7,315	7,316	7,314	4,428	4,429	4,427
9,063	9,068	9,058	7,308	7,310	7,307	4,420	4,422	4,419
9,056	9,061	9,050	7,302	7,303	7,301	4,413	4,414	4,411
9,048	9,055	9,042	7,296	7,297	7,294	4,405	4,407	4,403
9,041	9,049	9,034	7,289	7,291	7,287	4,398	4,400	4,396
9,034	9,042	9,026	7,283	7,285	7,281	4,390	4,392	4,388
9,027	9,036	9,018	7,276	7,279	7,274	4,383	4,385	4,380
9,020	9,029	9,011	7,270	7,272	7,268	4,375	4,377	4,372
9,013	9,023	9,003	7,264	7,266	7,261	4,367	4,370	4,365
9,006	9,017	8,996	7,257	7,260	7,255	4,360	4,363	4,357
8,999	9,010	8,988	7,251	7,253	7,248	4,352	4,355	4,349
8,993	9,004	8,981	7,244	7,247	7,242	4,345	4,348	4,342
8,986	8,998	8,974	7,238	7,241	7,235	4,337	4,340	4,334
8,979	8,991	8,967	7,232	7,235	7,229	4,330	4,333	4,326
8,972	8,985	8,959	7,225	7,228	7,222	4,322	4,325	4,319
8,965	8,979	8,952	7,219	7,222	7,216	4,315	4,318	4,311
8,959	8,972	8,945	7,212	7,216	7,209	4,307	4,311	4,303
8,952	8,966	8,938	7,206	7,209	7,203	4,299	4,303	4,296
8,945	8,959	8,931	7,200	7,203	7,196	4,292	4,296	4,288
8,938	8,953	8,924	7,193	7,197	7,190	4,284	4,288	4,281
8,932	8,947	8,917	7,187	7,191	7,183	4,277	4,281	4,273
8,925	8,940	8,910	7,181	7,184	7,177	4,270	4,274	4,266
8,918	8,934	8,903	7,174	7,178	7,170	4,262	4,266	4,258
8,912	8,928	8,896	7,168	7,172	7,164	4,255	4,259	4,250
8,905	8,921	8,889	7,162	7,166	7,158	4,247	4,251	4,243

8,899	8,915	8,882
8,892	8,909	8,875
8,885	8,903	8,868
8,879	8,896	8,861
8,872	8,890	8,854
8,866	8,884	8,847
8,859	8,877	8,841
8,852	8,871	8,834
8,846	8,865	8,827
8,839	8,858	8,820
8,833	8,852	8,813
8,826	8,846	8,807
8,820	8,840	8,800
8,813	8,833	8,793
8,807	8,827	8,786
8,800	8,821	8,780
8,794	8,815	8,773
8,787	8,808	8,766
8,781	8,802	8,759
8,774	8,796	8,753
8,768	8,790	8,746
8,761	8,783	8,739
8,755	8,777	8,733
8,748	8,771	8,726
8,742	8,765	8,719
8,736	8,758	8,713
8,729	8,752	8,706
8,723	8,746	8,699
8,716	8,740	8,693
8,710	8,734	8,686
8,704	8,727	8,680
8,697	8,721	8,673
8,691	8,715	8,667
8,684	8,709	8,660
8,678	8,703	8,653
8,672	8,696	8,647
8,665	8,690	8,640
8,659	8,684	8,634
8,653	8,678	8,627
8,646	8,672	8,621
8,640	8,666	8,614
8,634	8,659	8,608
8,627	8,653	8,601

7,155	7,159	7,151
7,149	7,153	7,145
7,143	7,147	7,138
7,136	7,141	7,132
7,130	7,134	7,126
7,124	7,128	7,119
7,117	7,122	7,113
7,111	7,116	7,106
7,105	7,109	7,100
7,098	7,103	7,094
7,092	7,097	7,087
7,086	7,091	7,081
7,080	7,084	7,075
7,073	7,078	7,068
7,067	7,072	7,062
7,061	7,066	7,056
7,054	7,060	7,049
7,048	7,053	7,043
7,042	7,047	7,037
7,036	7,041	7,031
7,030	7,035	7,024
7,023	7,029	7,018
7,017	7,022	7,012
7,011	7,016	7,005
7,005	7,010	6,999
6,998	7,004	6,993
6,992	6,998	6,987
6,986	6,992	6,980
6,980	6,986	6,974
6,974	6,979	6,968
6,967	6,973	6,962
6,961	6,967	6,955
6,955	6,961	6,949
6,949	6,955	6,943
6,943	6,949	6,937
6,937	6,943	6,931
6,930	6,937	6,924
6,924	6,930	6,918
6,918	6,924	6,912
6,912	6,918	6,906
6,906	6,912	6,900
6,900	6,906	6,893
6,894	6,900	6,887

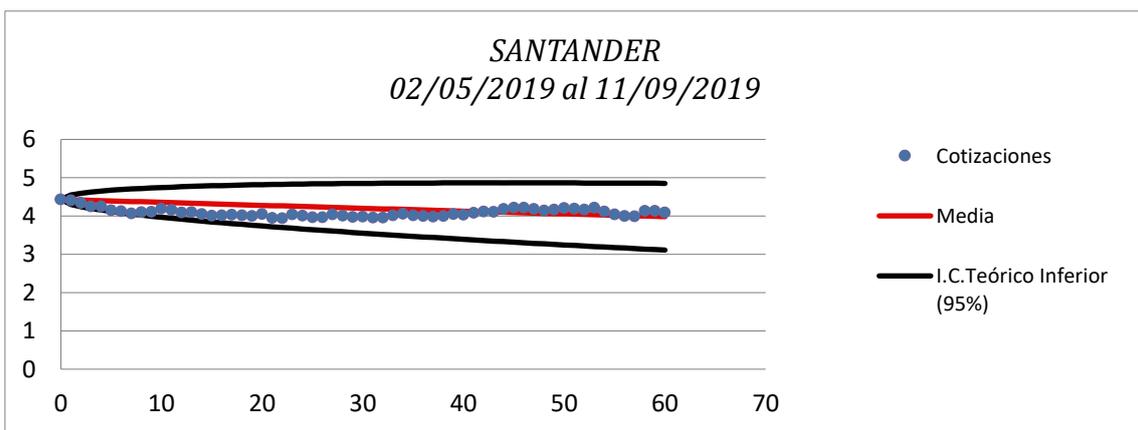
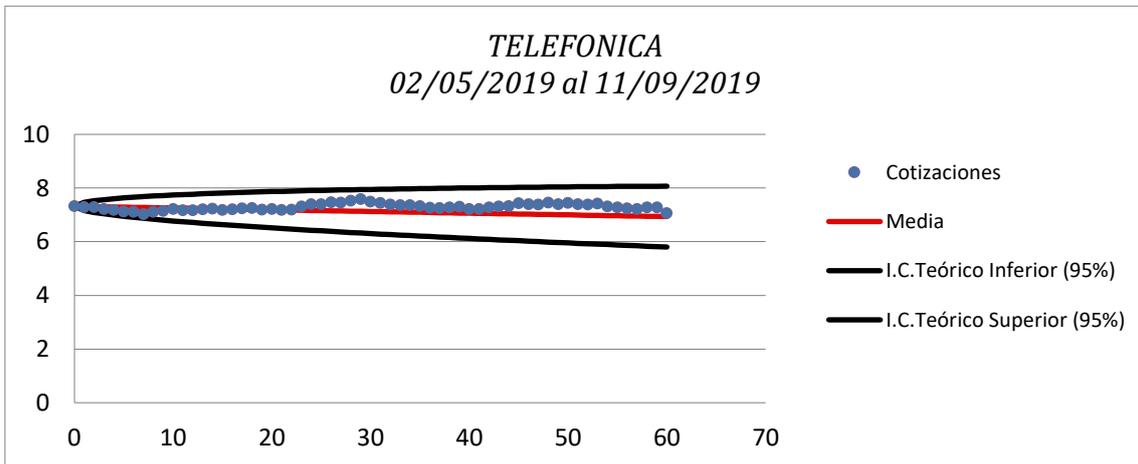
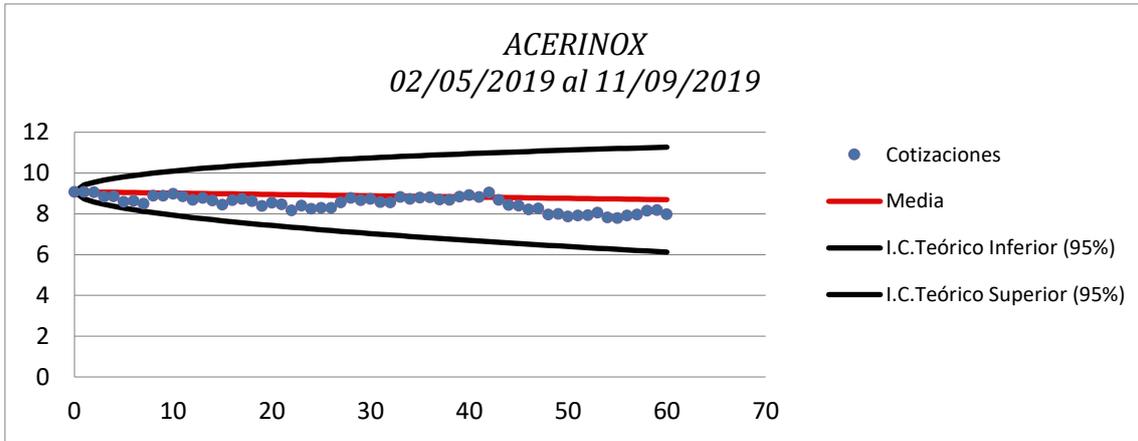
4,240	4,244	4,235
4,232	4,237	4,228
4,225	4,229	4,220
4,218	4,222	4,213
4,210	4,215	4,206
4,203	4,207	4,198
4,195	4,200	4,191
4,188	4,193	4,183
4,181	4,186	4,176
4,173	4,178	4,168
4,166	4,171	4,161
4,159	4,164	4,154
4,152	4,157	4,146
4,144	4,149	4,139
4,137	4,142	4,132
4,130	4,135	4,124
4,123	4,128	4,117
4,115	4,121	4,110
4,108	4,114	4,103
4,101	4,106	4,095
4,094	4,099	4,088
4,086	4,092	4,081
4,079	4,085	4,074
4,072	4,078	4,066
4,065	4,071	4,059
4,058	4,064	4,052
4,051	4,057	4,045
4,044	4,050	4,038
4,037	4,042	4,031
4,029	4,035	4,023
4,022	4,028	4,016
4,015	4,021	4,009
4,008	4,014	4,002
4,001	4,007	3,995
3,994	4,000	3,988
3,987	3,993	3,981
3,980	3,986	3,974
3,973	3,979	3,967
3,966	3,973	3,960
3,959	3,966	3,953
3,952	3,959	3,946
3,945	3,952	3,939
3,938	3,945	3,932

8,621	8,647	8,595	6,888	6,894	6,881	3,931	3,938	3,925
8,615	8,641	8,588	6,881	6,888	6,875	3,925	3,931	3,918
8,608	8,635	8,582	6,875	6,882	6,869	3,918	3,924	3,911
8,602	8,629	8,575	6,869	6,876	6,863	3,911	3,917	3,904
8,596	8,623	8,569	6,863	6,870	6,857	3,904	3,911	3,897
8,589	8,616	8,562	6,857	6,864	6,850	3,897	3,904	3,890
8,583	8,610	8,556	6,851	6,858	6,844	3,890	3,897	3,883
8,577	8,604	8,550	6,845	6,851	6,838	3,883	3,890	3,877
8,571	8,598	8,543	6,839	6,845	6,832	3,877	3,883	3,870
8,564	8,592	8,537	6,833	6,839	6,826	3,870	3,877	3,863
8,558	8,586	8,530	6,827	6,833	6,820	3,863	3,870	3,856
8,552	8,580	8,524	6,821	6,827	6,814	3,856	3,863	3,849
8,546	8,574	8,517	6,815	6,821	6,808	3,849	3,856	3,842
8,539	8,568	8,511	6,809	6,815	6,802	3,843	3,850	3,836
8,533	8,562	8,505	6,802	6,809	6,796	3,836	3,843	3,829
8,527	8,555	8,498	6,796	6,803	6,790	3,829	3,836	3,822
8,521	8,549	8,492	6,790	6,797	6,783	3,822	3,829	3,815
8,514	8,543	8,486	6,784	6,791	6,777	3,816	3,823	3,808
8,508	8,537	8,479	6,778	6,785	6,771	3,809	3,816	3,802
8,502	8,531	8,473	6,772	6,779	6,765	3,802	3,809	3,795
8,496	8,525	8,466	6,766	6,773	6,759	3,795	3,803	3,788
8,490	8,519	8,460	6,760	6,767	6,753	3,789	3,796	3,782
8,483	8,513	8,454	6,754	6,761	6,747	3,782	3,789	3,775
8,477	8,507	8,447	6,748	6,756	6,741	3,775	3,783	3,768
8,471	8,501	8,441	6,742	6,750	6,735	3,769	3,776	3,762
8,465	8,495	8,435	6,736	6,744	6,729	3,762	3,770	3,755
8,459	8,489	8,428	6,730	6,738	6,723	3,756	3,763	3,748

Fuente: Elaboración propia.

Finalmente, para la validación del modelo se representan de forma gráfica los valores reales de cada título dentro del periodo seleccionado, junto con los Intervalos de Confianza y la media de los valores. En el Gráfico 6.2.2.1 se puede comprobar que el valor de la media de los títulos de la cartera se ajusta al valor real de los datos y además que las fluctuaciones de la muestra se encuentran dentro de los intervalos calculados. En resumen, se afirma que el Modelo Log-Normal cuyos parámetros han sido calculados con el Método de Máxima Verosimilitud representa satisfactoriamente la dinámica de los títulos componentes de la cartera.

Gráfico 6.2.2.1: Datos reales de cotización, predicciones e intervalos de Confianza (95%) para los títulos de la cartera propuesta cuyos parámetros han sido calibrados mediante el Método de Máxima Verosimilitud



Fuente: Elaboración propia.

En la siguiente Tabla 6.2.2.3 puede observarse que los valores del MAPE y RMSE calculados a través del Método de los Momentos y del Método de Máxima Verosimilitud son muy similares. Como se ha explicado anteriormente, los resultados que se obtienen no dependen del método utilizado. No obstante, puede apreciarse que los valores obtenidos mediante el Método de los Momentos muestran un mejor grado de aceptación, pues el MAPE presenta valores más ajustados, ya que dos de los valores están por debajo del rango de aceptación, el 5%, y los valores del RMSE son menores. Por lo tanto, se seleccionarán los parámetros obtenidos a través del Método de los Momentos para hallar las predicciones de las acciones de la cartera propuesta.

Tabla 6.2.2.3: Resultado de las medidas bondad de ajuste del Modelo Log-Normal

		MAPE	RMSE
Método los Momentos	Acerinox	6,57%	0,53
	Telefónica	4,39%	0,14
	Santander	4,80%	0,06
Método Máxima Verosimilitud	Acerinox	7,06%	0,59
	Telefónica	4,38%	0,14
	Santander	5,51%	0,06

Fuente: Elaboración propia.

Tomando como parámetros aquellos obtenidos mediante el Método de los Momentos y aplicando la solución del Modelo Log-Normal, se obtienen las predicciones de los títulos seleccionados, véase Tabla 6.2.2.4.

Tabla 6.2.2.4: Estimaciones obtenidas mediante el Modelo Log-Normal de los activos componentes de la cartera propuesta

Periodo	Fecha	ACERINOX	TELEFONICA	SANTANDER
95	12/09/2019	8,395	6,742	3,779
96	13/09/2019	8,572	6,783	3,799
97	14/09/2019	8,722	6,828	3,784
98	15/09/2019	8,934	6,873	3,817
99	16/09/2019	9,118	6,879	3,852

Fuente: Elaboración propia.

7. APLICACIÓN DEL MODELO DE MARKOWITZ

En este siguiente apartado se desarrollarán los elementos matemáticos presentados en el Capítulo 5 para aplicar el Modelo de Markowitz con el objetivo de construir una cartera eficiente, es decir, una cartera que cumpla con el equilibrio rentabilidad-riesgo.

En este supuesto, la cartera propuesta está compuesta por tres títulos: Acerinox, Telefónica y Santander. Para la formulación de este modelo hay que tener en cuenta que se deben tomar algunas decisiones para alcanzar los objetivos y obtener:

- Función objetivo: representa el riesgo de la cartera, por lo que cuanto menor sea el riesgo dada una rentabilidad exigida mejor será el resultado obtenido.
- Restricciones: limitan los valores que afectan a las variables como:
 - o La suma de las proporciones de los valores de la cartera debe ser la unidad.
 - o Estimar la restricción paramétrica: la rentabilidad mínima exigida. Una restricción muy influyente en el modelo, ya que su variación provocará la obtención de nuevas carteras eficientes.

7.1. Resolución del Modelo de Markowitz

En primer lugar, se introducirán todos los datos en una tabla: el valor de las acciones y las rentabilidades de cada título en el periodo seleccionado. El siguiente paso será obtener el valor de la rentabilidad de cartera (R_p) aplicando en el programa Excel® la función "SUMAPRODUCTO" de la rentabilidad media y de la composición de la cartera. Para obtener la varianza de la cartera (σ_p^2) se aplicará el producto al vector de las variables, a este mismo vector transpuesto y la matriz de varianzas-covarianzas que se obtiene aplicando la fórmula "VARP" de la rentabilidad de cada título del periodo seleccionado.

Tabla 7.1.1: Matriz Varianzas-Covarianzas de la cartera propuesta

	<i>R_Acerinox</i>	<i>R_Telefonica</i>	<i>R_Santander</i>
<i>R_Acerinox</i>	0,000371552	9,46257E-05	0,000156922
<i>R_Telefonica</i>	9,46257E-05	0,000110753	8,88825E-05
<i>R_Santander</i>	0,000156922	8,88825E-05	0,000200917

Fuente: Elaboración Propia.

Como se explicó en el Capítulo 5, existen varias formas de resolver el modelo, y en este supuesto se utilizará la herramienta Solver, una función del programa Excel® mediante la cual se podrá resolver el modelo:

$$\text{Min } \sigma_p^2 = x^t V x,$$

$$\text{sujeto a: } x^t 1 = 1,$$

$$x^t R = R_p,$$

donde:

1: Vector compuesto por *N* unos, $1^t = [1, \dots, 1]$,

R_p: Rentabilidad exigida por el inversor.

Figura 7.1.1: Parámetros Solver para la resolución del Modelo de Markowitz

The image shows an Excel spreadsheet on the left and the Solver Parameters dialog box on the right. The spreadsheet contains the following data:

	<i>R_Acerinox</i>	<i>R_Telefonica</i>	<i>R_Santander</i>
<i>R_Acerinox</i>	0,000371552	9,46257E-05	0,000156922
<i>R_Telefonica</i>	9,46257E-05	0,000110753	8,88825E-05
<i>R_Santander</i>	0,000156922	8,88825E-05	0,000200917

Other spreadsheet data includes: PESOS (14,24641467, 12,87860571, -26,12502087, 0,999999509), *R promedio_Titulos* (4,19207E-05, -0,000629051, -0,001423633), *R_p* (0,030), *Var_p* (0,030), *G* (0,030), *R_p IBEX* (-0,000311661), and a matrix for *R Exigidas=G* (R obtenida=*R_p*, *Varp*) with values like -0,03, -0,02, -0,01, 0,01, 0,02, 0,03.

The Solver Parameters dialog box is configured as follows:

- Set Objective: *\$N\$11*
- To: Max Min Value Of: 0
- By Changing Variable Cells: *\$N\$7:\$P\$7*
- Subject to the Constraints: *\$N\$12 = \$M\$23*, *\$Q\$7 = 1*
- Make Unconstrained Variables Non-Negative
- Select a Solving Method: GRG Nonlinear

Fuente: Elaboración propia.

En la Figura 7.1.1 pueden verse identificadas las casillas con las funciones del modelo, la función objetivo y las restricciones. Al ejecutar el programa Solver, éste nos da como resultado el peso de cada título componente de la cartera cumpliendo las restricciones iniciales, respetando la rentabilidad exigida y con el menor riesgo posible para la cartera eficiente obtenida.

Para el cálculo de los datos anteriores se ha tomado como muestra los 94 datos históricos del valor de cada título más las estimaciones del valor de cada acción obtenidas mediante la aplicación del Modelo Log-Normal. En la Tabla 7.1.2 se recogen las estimaciones obtenidas.

Tabla 7.1.2: Estimaciones obtenidas mediante el Modelo Log-Normal de los activos componentes de la cartera propuesta

Periodo	Fecha	ACERINOX	TELEFONICA	SANTANDER
95	12/09/2019	8,395	6,742	3,779
96	13/09/2019	8,572	6,783	3,799
97	14/09/2019	8,722	6,828	3,784
98	15/09/2019	8,934	6,873	3,817
99	16/09/2019	9,118	6,879	3,852

Fuente: Elaboración propia.

En primer lugar, se procederá a la resolución del Modelo de Markowitz tomando como muestra los 94 valores reales de cada título más el primer valor estimado, los datos del periodo 95. Los pesos de la cartera obtenidos con estos datos se representan en la Tabla 7.1.3 y corresponden a la cantidad a invertir en cada título para obtener la rentabilidad exigida, un 3%, con un riesgo mínimo.

Tabla 7.1.3: Resolución del Modelo de Markowitz 1ª predicción

	ACERINOX	TELEFÓNICA	SANTANDER
Pesos obtenidos	11,563	26,200	-36,763
R promedio_ Títulos	-0,001	-0,001	-0,002

Rp	0,030
Var_p	0,153

Fuente: Elaboración propia.

En resumen, para obtener en un futuro una rentabilidad diaria del 3%, equivalente a una rentabilidad anual del 7,5%, asumiendo el menor riesgo posible, es conveniente invertir un 11,56% de la inversión en acciones de Acerinox, un 26,20% en Telefónica y ponerse en corto con el título Santander.

Si aplicamos al Modelo de Markowitz el histórico de datos de los títulos y las cinco predicciones obtenidas mediante el Modelo Log-Normal, los resultados varían escasamente, pues se recomienda invertir un 14,25% de la inversión en Acerinox, un 12,88% en Telefónica y seguir en corto con las acciones de Santander para obtener la misma rentabilidad del 3% asumiendo el menor riesgo posible. En la siguiente Tabla 7.1.4 pueden verse los pesos de cada título obtenidos.

Tabla 7.1.4: Resolución del Modelo de Markowitz 5ª predicción

	ACERINOX	TELEFÓNICA	SANTANDER
Pesos obtenidos	14,246	12,879	-26,125
R promedio_ Títulos	4,192E-05	-6,291E-04	-1,424E-03

Rp	0,030
Var_p	0,089

Fuente: Elaboración propia.

Si en vez de exigir una rentabilidad del 3%, se exigen rentabilidades menores, entre el 1% y el 2%, puede verse, según los datos recogidos en la Tabla 7.1.5, que el riesgo

asumido es menor y las recomendaciones del modelo no varían ya que se aconseja invertir en Acerinox y Telefónica, y posicionarse en corto con Santander.

Tabla 7.1.5: Comparativa del Modelo de Markowitz según las rentabilidades exigidas

R Exigidas (G)	R obtenida (Rp)	Var p	Pesos		
			ACERINOX	TELEFONICA	SANTANDER
0,010	0,010	0,011	4,891	4,963	-8,854
0,020	0,020	0,040	9,569	8,921	-17,490
0,030	0,030	0,089	14,246	12,879	-26,125

Fuente: Elaboración propia.

Tal y como se ha explicado en el Apartado 5.1, la resolución del Modelo de Markowitz también puede obtenerse analíticamente resolviendo las siguientes expresiones:

$$x = V^{-1} [R \quad 1] A^{-1} \begin{bmatrix} R_p \\ 1 \end{bmatrix},$$

donde:

x : Pesos de los títulos,

R : Matriz de rentabilidades,

V : Matrix de Covarianzas,

R_p : Rentabilidad exigida,

y la matriz A es una matriz simétrica,

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix},$$

formada por componentes que son escalares,

$$a = R^t V^{-1} R,$$

$$b = R^t V^{-1} 1,$$

$$c = 1^t V^{-1} 1.$$

Tomando como valores del modelo, el histórico de datos de los títulos y las cinco predicciones obtenidas mediante el Modelo Log-Normal pueden calcularse la matriz de covarianzas (V) y su inversa (V^{-1}) y, las rentabilidades de cada título para construir el vector de rentabilidades (R_p) y su transpuesto (R^t). A continuación, se muestran los resultados obtenidos.

$$\begin{aligned}
 R_{Acerinox} &= 4,1920, \\
 R_{Telefónica} &= -0,0006, \\
 R_{Santander} &= -0,0014, \\
 R_p &= \begin{bmatrix} 4,1920 \\ -0,0006 \\ -0,0014 \end{bmatrix}, \\
 R^t &= [4,1920 \quad -0,0006 \quad -0,0014], \\
 V &= \begin{bmatrix} 0,0004 & 0,0001 & 0,0002 \\ 0,0001 & 0,0001 & 0,0001 \\ 0,0002 & 0,0001 & 0,0002 \end{bmatrix}, \\
 V^{-1} &= \begin{bmatrix} 4164,98 & -1469,66 & -2602,82 \\ -1469,66 & 14517,82 & -5274,61 \\ -2602,82 & -5272,61 & 9343,47 \end{bmatrix}.
 \end{aligned}$$

A continuación, con los resultados obtenidos se calculará la matriz A y su inversa.

$$\begin{aligned}
 a &= R^t V^{-1} R = 0,0156, \\
 b &= R^t V^{-1} \mathbf{1} = -6,9732, \\
 c &= \mathbf{1}^t V^{-1} \mathbf{1} = 9332,09, \\
 A &= \begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,0156 & -6,9732 \\ -6,9732 & 9332,09 \end{bmatrix}, \\
 A^{-1} &= \begin{bmatrix} 95,9765 & 0,0717 \\ 0,0717 & 0,0001 \end{bmatrix}.
 \end{aligned}$$

Una vez obtenido el valor de la matriz A , se pueden obtener los pesos de los títulos de la cartera propuesta sustituyendo los valores obtenidos en la expresión:

$$x = V^{-1} [R \quad \mathbf{1}] A^{-1} \begin{bmatrix} R_p \\ \mathbf{1} \end{bmatrix},$$

con una rentabilidad exigida (R) del 0,03, se obtiene una cartera eficiente mediante la aplicación del Modelo de Markowitz de forma analítica. Los resultados obtenidos se muestran en la matriz x y expresen que para obtener una rentabilidad futura del 0,03 asumiendo un mínimo riesgo se debe invertir un 14,39% de la inversión en Acerinox, un 13,00% en Telefónica y ponerse en corto con la inversión de Santander.

$$x = \begin{bmatrix} 14,392 \\ 13,002 \\ -26,394 \end{bmatrix}.$$

Si se comparan los pesos obtenidos tras la resolución del Modelo de Markowitz de forma analítica y mediante la herramienta Solver, se observa que los pesos son muy similares y, por lo tanto, las recomendaciones son las mismas, invertir aproximadamente un 14% de la inversión en Acerinox, un 13% en Telefónica y ponerse en corto con Santander.

7.2 Frontera de Markowitz

En resumen, todas las carteras obtenidas a través de este modelo son posibles carteras eficientes que pueden obtenerse a partir de los títulos seleccionados. La frontera de Markowitz o la frontera de mínima varianza une todas las posibles carteras de mínima varianza y las carteras que se acaban de calcular forman parte de esta frontera de Markowitz, pero no serán las únicas, pues modificando la rentabilidad exigida, R_p , el número de carteras puede ser infinito.

En la misma frontera de Markowitz pueden representarse dos de las carteras más significativas como se ha visto en el Capítulo 5: la cartera 0 y 1. Este apartado se centrará en representar y analizar la cartera 0, la cartera que identificará que parte de la frontera está compuesta por carteras eficientes e ineficientes. La cartera 0 tiene por rentabilidad, $R_0 = \frac{b}{c}$, y por varianza, $\sigma_p^2 = \frac{1}{c}$. Para calcular la cartera 0 se recuperarán algunos de los datos calculados en el Apartado 7.1, concretamente, los valores obtenidos de los componentes de la matriz A que son escalares:

$$a = R^t V^{-1} R = 0,0156 ,$$

$$b = R^t V^{-1} \mathbf{1} = -6,9732 ,$$

$$c = \mathbf{1}^t V^{-1} \mathbf{1} = 9332,09.$$

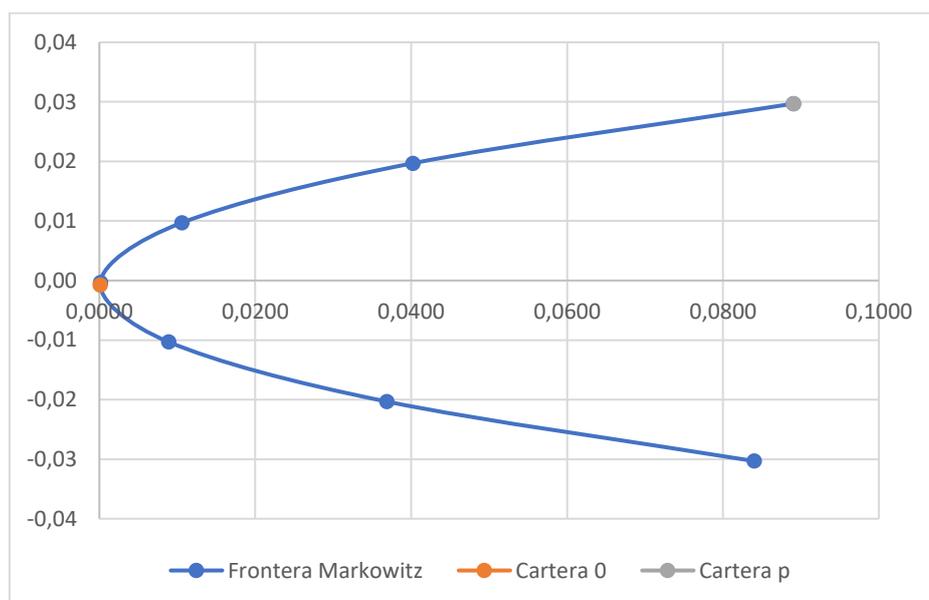
Con los valores de los escalares, se obtiene el valor de la cartera 0, pues

$$R_0 = \frac{b}{c} = \frac{-6,9732}{9332,09} = -0,0007,$$

$$\sigma_p^2 = \frac{1}{c} = \frac{1}{9332,09} = 0,0001.$$

A continuación, en el Gráfico 7.2.1 se representa la frontera de Markowitz de los datos de los títulos y el horizonte temporal seleccionados más las predicciones de los cinco días siguientes a través del Modelo Log-Normal junto con el cálculo de la cartera 0 y la cartera eficiente hallada con las fórmulas equivalente a la del modelo de Markowitz.

Gráfico 7.2.1: Frontera de Markowitz para el rango de rentabilidades exigidas



Fuente: Elaboración propia.

Como se ha indicado anteriormente, la cartera 0 es la cartera que divide la frontera de Markowitz entre las carteras eficientes e ineficientes. Según los cálculos realizados y el Gráfico (7.2.1) las carteras eficientes son todas aquellas que se encuentran en la parte derecha de la frontera, la parte superior al punto naranja correspondiente a la representación de la cartera 0 en el Gráfico 7.2.1. y, por consiguiente, las carteras ineficientes son todas aquellas que están situadas en la parte inferior de la cartera 0.

La cartera p representada en el Gráfico 7.2.1 es la cartera obtenida tras la resolución del Modelo de Markowitz, y como se observa forma parte de la frontera de Markowitz, lo que es lo mismo, es una cartera de Markowitz, una cartera de mínima varianza. Y además puede calificarse como una cartera eficiente ya que ésta se encuentra en la parte eficiente de la frontera de Markowitz.

8. CONCLUSIONES

La principal motivación del presente trabajo ha sido el estudio, desarrollo y aplicación de dos modelos matemáticos con el fin de obtener resultados que aporten información financiera para llevar una gestión eficiente de una cartera de valores formada por títulos del IBEX-35.

El primer modelo estudiado en el presente trabajo ha sido el Modelo Log-Normal, un modelo estocástico empleado para la estimación de activos financieros. El segundo modelo desarrollado ha sido el Modelo de Markowitz, un modelo especializado en la creación de carteras financieras eficientes. Ambos modelos han sido aplicados a una cartera de activos compuesta por tres títulos: Acerinox, Telefónica y Santander. La elección de estas empresas no ha sido determinante para el desarrollo del trabajo, no obstante, se ha tenido en cuenta que las empresas no forman parte del mismo sector. De este modo se realiza una inversión diversificada.

En el Capítulo 2 se ha explicado la importancia que tienen las matemáticas en la economía y, es que esta doctrina es una herramienta provechosa para evaluar datos financieros presentes y futuros. En los siguientes capítulos se presentan y se analizan los principales modelos del trabajo; por una parte, el Modelo Log-Normal señalizando todos los procesos estocásticos esenciales para su estudio. Y, conjuntamente se aplican dos técnicas estadísticas aplicadas en el trabajo: el Método de los Momentos y Máxima Verosimilitud para estimar los parámetros principales del Modelo Log-Normal. Finalmente se explican las medidas de bondad de ajuste para su posterior validación a través de los métodos descritos en el trabajo que determinarán si las estimaciones realizadas son correctas. Por otra parte, se ha estudiado el Modelo de Markowitz puntualizando la importancia que tiene el binomio rentabilidad-riesgo en la formalización de carteras. En el Capítulo 5 se desarrolla el Modelo de Markowitz, un modelo especializado en la creación de carteras óptimas que presenten la mejor combinación

rentabilidad-riesgo determinando una rentabilidad inicial. Con ello se deduce que una cartera tiene múltiples combinaciones que pueden representarse gráficamente, y apreciarse que no todas las combinaciones posibles son eficientes. Esta representación gráfica se conoce como la frontera de Markowitz, la cual se ha analizado en el trabajo y determina como identificar aquellas carteras eficientes y no eficientes.

Tras la resolución del Modelo Log-Normal se han podido llevar a cabo las estimaciones de los títulos componentes de la cartera propuesta, en concreto se han estimado los cinco días siguientes operativos en bolsa. Es importante puntualizar que el análisis del modelo se ha realizado sobre una base de datos de 94 periodos, es decir, 94 datos históricos del valor de cada título, y a pesar de ello, los resultados obtenidos pueden considerarse tan fiables como un análisis basado en una base de datos mayor, y esto se debe a que la evolución no es un criterio muy significativo, pues actualmente las empresas viven en un mundo muy variable e incierto, y la situación de hace 6 meses puede ser muy diferente a la situación actual ya sea política, social o económicamente hablando.

Una vez obtenidos los resultados se ha procedido a evaluar a través de medidas estadísticas de ajuste la validación del modelo con los datos obtenidos de la primera estimación y, se puede concluir que los resultados son aceptables.

A continuación, se ha procedido a desarrollar una cartera financiera para obtener los mejores rendimientos. Y para ello, se ha aplicado el Modelo de Markowitz y los resultados sugieren invertir en Acerinox y Telefónica, mientras que con Santander ponerse en corto, a futuro, ya que la aplicación de este modelo se ha llevado a cabo con estimaciones del valor de las acciones para predecir cómo gestionar la cartera de valores propuesta, es decir, saber cuánto invertir en cada título conociendo su valor futuro.

En definitiva, se corrobora que conocer datos macroeconómicos, realizar un análisis económico-financiero de la empresa ayudan a tomar decisiones financieras en un momento determinado en el tiempo, pero a la hora de predecir datos o conocer la evolución de una acción en el tiempo, es necesario el uso de las matemáticas. Los resultados aquí obtenidos sirven de reflexión a los inversores de cara a tomar decisiones financieras que potencien el rendimiento de sus inversiones asumiendo el menor riesgo.

No obstante, este estudio presenta algunas limitaciones como por ejemplo que las estimaciones probabilísticas del Modelo Log-Normal son conservadoras. En cualquier caso, el estudio realizado en este TFM es la base para poder estudiar otros modelos

más precisos y cuya formulación matemática es mucho más compleja. Por otra parte, aunque en este trabajo se ha construido una cartera de tres acciones, el estudio realizado puede extenderse a un mayor número de activos.

Bibliografía

Burgos, C., Calatayud, J., Cortés, J.C. y Jornet, M. *El rol del Movimiento Browniano o proceso estocástico de Wiener estándar en las Finanzas*. Valencia: Universidad Politécnica de Valencia. Obtenido de: <https://riunet.upv.es/handle/10251/107085>

Economipedia (05 de diciembre de 2019). Obtenido de: <https://economipedia.com/definiciones/lema-de-ito.html>

Guijarro, F. (2015). *Introducción a las Finanzas Cuantitativas*. Valencia. Tirant Lo Blanch.

Lamberton, D y Lapeyre, B. (1996). *Introduction to Stochastic Calculus to Finance*. Chapman & Hall.

Martínez-Abascal, E. (1998). *Invertir en Bolsa. Conceptos y Estrategias*. Mc-Grall Hill.

Pampillón, F., De La Cuesta, M. y Ruza, C. (2012). *Introducción al Sistema Financiero*. UNED.

Rodríguez, G. (2017-2018). *Determinación analítica de probabilidades de beneficios para estrategias especulativas con productos financieros derivados sintéticos tipo Bull/Bear Spread. Teoría y aplicaciones. Proyecto Final de Máster*. Valencia: Universidad Politécnica de Valencia. Obtenido de: <https://riunet.upv.es/handle/10251/94365>

Anexo

Anexo 1: Cotizaciones acción Acerinox del periodo seleccionado.

ACERINOX								
k	Fecha	Precio	k	Fecha	Precio	k	Fecha	Precio
0	02/05/2019	9,08	32	17/06/2019	8,558	64	31/07/2019	7,59
1	03/05/2019	9,07	33	18/06/2019	8,82	65	01/08/2019	7,47
2	06/05/2019	9,066	34	19/06/2019	8,74	66	02/08/2019	7,286
3	07/05/2019	8,85	35	20/06/2019	8,794	67	05/08/2019	7,38
4	08/05/2019	8,866	36	21/06/2019	8,81	68	06/08/2019	7,306
5	09/05/2019	8,59	37	24/06/2019	8,702	69	07/08/2019	7,36
6	10/05/2019	8,644	38	25/06/2019	8,692	70	08/08/2019	7,54
7	13/05/2019	8,5	39	26/06/2019	8,85	71	09/08/2019	7,29
8	14/05/2019	8,89	40	27/06/2019	8,922	72	12/08/2019	7,228
9	15/05/2019	8,892	41	28/06/2019	8,83	73	13/08/2019	7,318
10	16/05/2019	8,978	42	01/07/2019	9,04	74	14/08/2019	7,042
11	17/05/2019	8,858	43	02/07/2019	8,684	75	15/08/2019	7,03
12	20/05/2019	8,686	44	03/07/2019	8,438	76	16/08/2019	7,176
13	21/05/2019	8,776	45	04/07/2019	8,41	77	19/08/2019	7,362
14	22/05/2019	8,66	46	05/07/2019	8,216	78	20/08/2019	7,192
15	23/05/2019	8,446	47	08/07/2019	8,26	79	21/08/2019	7,29
16	24/05/2019	8,668	48	09/07/2019	7,97	80	22/08/2019	7,428
17	27/05/2019	8,74	49	10/07/2019	8	81	23/08/2019	7,32
18	28/05/2019	8,62	50	11/07/2019	7,876	82	26/08/2019	7,274
19	29/05/2019	8,386	51	12/07/2019	7,926	83	27/08/2019	7,228
20	30/05/2019	8,538	52	15/07/2019	7,932	84	28/08/2019	7,25
21	31/05/2019	8,464	53	16/07/2019	8,054	85	29/08/2019	7,438
22	03/06/2019	8,172	54	17/07/2019	7,83	86	30/08/2019	7,53
23	04/06/2019	8,4	55	18/07/2019	7,79	87	02/09/2019	7,656
24	05/06/2019	8,25	56	19/07/2019	7,912	88	03/09/2019	7,612
25	06/06/2019	8,296	57	22/07/2019	7,968	89	04/09/2019	7,814
26	07/06/2019	8,302	58	23/07/2019	8,154	90	05/09/2019	8,14
27	10/06/2019	8,568	59	24/07/2019	8,184	91	06/09/2019	8,074
28	11/06/2019	8,786	60	25/07/2019	7,988	92	09/09/2019	8,144
29	12/06/2019	8,664	61	26/07/2019	7,604	93	10/09/2019	8,252
30	13/06/2019	8,73	62	29/07/2019	7,636	94	11/09/2019	8,338
31	14/06/2019	8,576	63	30/07/2019	7,552			

Anexo 2: Cotizaciones acción Telefónica del periodo seleccionado.

			TELEFONICA					
k	Fecha	Precio	k	Fecha	Precio	k	Fecha	Precio
0	02/05/2019	7,321	32	17/06/2019	7,384	64	31/07/2019	6,921
1	03/05/2019	7,293	33	18/06/2019	7,362	65	01/08/2019	6,876
2	06/05/2019	7,288	34	19/06/2019	7,358	66	02/08/2019	6,775
3	07/05/2019	7,221	35	20/06/2019	7,323	67	05/08/2019	6,655
4	08/05/2019	7,18	36	21/06/2019	7,264	68	06/08/2019	6,527
5	09/05/2019	7,119	37	24/06/2019	7,258	69	07/08/2019	6,505
6	10/05/2019	7,107	38	25/06/2019	7,278	70	08/08/2019	6,526
7	13/05/2019	7,024	39	26/06/2019	7,297	71	09/08/2019	6,345
8	14/05/2019	7,111	40	27/06/2019	7,214	72	12/08/2019	6,254
9	15/05/2019	7,15	41	28/06/2019	7,221	73	13/08/2019	6,25
10	16/05/2019	7,217	42	01/07/2019	7,273	74	14/08/2019	5,987
11	17/05/2019	7,176	43	02/07/2019	7,308	75	15/08/2019	5,945
12	20/05/2019	7,177	44	03/07/2019	7,32	76	16/08/2019	6,006
13	21/05/2019	7,202	45	04/07/2019	7,428	77	19/08/2019	6,11
14	22/05/2019	7,228	46	05/07/2019	7,394	78	20/08/2019	5,952
15	23/05/2019	7,184	47	08/07/2019	7,386	79	21/08/2019	5,972
16	24/05/2019	7,204	48	09/07/2019	7,452	80	22/08/2019	5,993
17	27/05/2019	7,243	49	10/07/2019	7,396	81	23/08/2019	5,939
18	28/05/2019	7,252	50	11/07/2019	7,44	82	26/08/2019	6,057
19	29/05/2019	7,19	51	12/07/2019	7,393	83	27/08/2019	6,143
20	30/05/2019	7,216	52	15/07/2019	7,38	84	28/08/2019	6,234
21	31/05/2019	7,178	53	16/07/2019	7,419	85	29/08/2019	6,294
22	03/06/2019	7,195	54	17/07/2019	7,312	86	30/08/2019	6,301
23	04/06/2019	7,317	55	18/07/2019	7,284	87	02/09/2019	6,356
24	05/06/2019	7,394	56	19/07/2019	7,244	88	03/09/2019	6,372
25	06/06/2019	7,398	57	22/07/2019	7,218	89	04/09/2019	6,437
26	07/06/2019	7,47	58	23/07/2019	7,273	90	05/09/2019	6,507
27	10/06/2019	7,459	59	24/07/2019	7,282	91	06/09/2019	6,582
28	11/06/2019	7,527	60	25/07/2019	7,069	92	09/09/2019	6,66
29	12/06/2019	7,591	61	26/07/2019	7,058	93	10/09/2019	6,686
30	13/06/2019	7,489	62	29/07/2019	7,102	94	11/09/2019	6,691
31	14/06/2019	7,444	63	30/07/2019	6,964			

Anexo 3: Cotizaciones acción Santander del periodo seleccionado.

			SANTANDER					
k	Fecha	Precio	k	Fecha	Precio	k	Fecha	Precio
0	02/05/2019	4,435	32	17/06/2019	3,96	64	31/07/2019	3,863
1	03/05/2019	4,409	33	18/06/2019	4,013	65	01/08/2019	3,876
2	06/05/2019	4,346	34	19/06/2019	4,06	66	02/08/2019	3,755
3	07/05/2019	4,25	35	20/06/2019	4,014	67	05/08/2019	3,698
4	08/05/2019	4,25	36	21/06/2019	4,001	68	06/08/2019	3,625
5	09/05/2019	4,148	37	24/06/2019	3,984	69	07/08/2019	3,613
6	10/05/2019	4,122	38	25/06/2019	3,999	70	08/08/2019	3,695
7	13/05/2019	4,065	39	26/06/2019	4,051	71	09/08/2019	3,615
8	14/05/2019	4,104	40	27/06/2019	4,036	72	12/08/2019	3,551
9	15/05/2019	4,107	41	28/06/2019	4,081	73	13/08/2019	3,592
10	16/05/2019	4,192	42	01/07/2019	4,119	74	14/08/2019	3,47
11	17/05/2019	4,159	43	02/07/2019	4,108	75	15/08/2019	3,475
12	20/05/2019	4,093	44	03/07/2019	4,18	76	16/08/2019	3,586
13	21/05/2019	4,098	45	04/07/2019	4,218	77	19/08/2019	3,549
14	22/05/2019	4,052	46	05/07/2019	4,221	78	20/08/2019	3,491
15	23/05/2019	4,006	47	08/07/2019	4,185	79	21/08/2019	3,485
16	24/05/2019	4,02	48	09/07/2019	4,143	80	22/08/2019	3,528
17	27/05/2019	4,036	49	10/07/2019	4,17	81	23/08/2019	3,468
18	28/05/2019	4,017	50	11/07/2019	4,205	82	26/08/2019	3,495
19	29/05/2019	4,000	51	12/07/2019	4,188	83	27/08/2019	3,466
20	30/05/2019	4,05	52	15/07/2019	4,165	84	28/08/2019	3,47
21	31/05/2019	3,952	53	16/07/2019	4,221	85	29/08/2019	3,458
22	03/06/2019	3,94	54	17/07/2019	4,12	86	30/08/2019	3,44
23	04/06/2019	4,042	55	18/07/2019	4,045	87	02/09/2019	3,435
24	05/06/2019	4,012	56	19/07/2019	4,003	88	03/09/2019	3,399
25	06/06/2019	3,971	57	22/07/2019	3,989	89	04/09/2019	3,407
26	07/06/2019	3,965	58	23/07/2019	4,134	90	05/09/2019	3,527
27	10/06/2019	4,038	59	24/07/2019	4,137	91	06/09/2019	3,531
28	11/06/2019	4,008	60	25/07/2019	4,093	92	09/09/2019	3,617
29	12/06/2019	3,973	61	26/07/2019	4,061	93	10/09/2019	3,721
30	13/06/2019	3,981	62	29/07/2019	4,035	94	11/09/2019	3,711
31	14/06/2019	3,955	63	30/07/2019	3,886			