



UNIVERSITAT  
POLITÈCNICA  
DE VALÈNCIA



UNIVERSITAT POLITÈCNICA DE VALÈNCIA  
ESCUELA TÉCNICA SUPERIOR DE INGENIERÍA DEL DISEÑO



---

MÁSTER EN INGENIERÍA AERONÁUTICA  
Curso académico: 2019/2020

---

## TRABAJO FIN DE MÁSTER

**Obtención y análisis de ventanas de lanzamiento y trayectorias en función del delta-v para el diseño de viajes interplanetarios**

---

AUTOR:  
SERGIO BLES A JIMÉNEZ

---

TUTOR:  
SANTIAGO EMMANUEL MOLL LÓPEZ

TUTOR:  
JOSÉ ANTONIO MORAÑO FERNÁNDEZ

TUTOR:  
ALICIA HERRERO DEBÓN

---

*Septiembre de 2020*

*València*

## Resumen

Se propone el desarrollo de una herramienta informática en MATLAB capaz de calcular trayectorias interplanetarias en el Sistema Solar y de crear gráficos de contorno para los delta-v necesarios en dichas trayectorias. La creación de estos gráficos de contorno para los delta-v permitirá, una vez establecido un rango de fechas de salida y tiempos de vuelo, establecer un “calendario visual” de ventanas de lanzamiento, con el objetivo de ayudar en el diseño y planificación de misiones interplanetarias. Los gráficos de contorno permiten también encontrar la relación óptima entre delta-v y tiempo de vuelo, según sean las condiciones de la misión. El procedimiento para los gráficos de contorno de delta-v en trayectorias directas es un cálculo factorial completo con dos variables de entrada (fecha de salida y llegada) que resuelve el problema de Lambert para cada combinación posible. Las misiones de la Tierra a Marte se emplearán para ilustrar la aplicación de este modelo y para validar los datos obtenidos, comparándolos con los obtenidos en la literatura.

## **Abstract**

The development of a computer tool in MATLAB capable of calculating interplanetary trajectories in the Solar System and creating contour graphs for the delta-v necessary in these trajectories is proposed. The creation of these contour charts for delta-v will allow, once a range of departure dates and flight times has been established, to establish a “visual calendar” of launch windows, with the aim of assisting in the design and planning of interplanetary missions. . Contour charts also allow you to find the optimal relationship between delta-v and flight time, depending on mission conditions. The procedure for contour graphs of delta-v on direct paths is a complete factorial calculation with two input variables (departure and arrival date) that solves the Lambert problem for each possible combination. The missions from Earth to Mars will be used to illustrate the application of this model and to validate the data obtained, comparing it with that obtained in the literature.

## Resum

Es proposa el desenvolupament d'una eina informàtica en MATLAB capaç de calcular trajectòries interplanetàries dins del Sistema Solar i de crear gràfics de contorn per als delta-v necessaris en aquestes trajectòries. La creació d'aquests gràfics de contorn per als delta-v permetrà, una vegada establert un rang de dates d'eixida i temps de vol, establir un "calendari visual" de finestres de llançament, amb l'objectiu d'ajudar en el disseny i planificació de missions interplanetàries. Els gràfics de contorn permeten també trobar la relació òptima entre delta-v i temps de vol, segons les condicions de la missió. El procediment per als gràfics de contorn de delta-v en trajectòries directes és un càlcul factorial complet amb dues variables d'entrada (data d'eixida i arribada) que resol el problema de Lambert per a cada combinació possible. Les missions de la Terra a Mart s'empraran per a il·lustrar l'aplicació d'aquest model i per a validar les dades obtingudes, comparant-les amb les obtingudes en la literatura.

# Índice general

<b>MEMORIA</b>	<b>1</b>
<b>1. Introducción</b>	<b>1</b>
<b>2. Fundamentos de las trayectorias interplanetarias</b>	<b>2</b>
2.1. Problema de Lambert . . . . .	2
2.2. Esfera de influencia . . . . .	4
2.3. Método de ajuste de cónicas . . . . .	6
2.4. Salida del planeta de origen . . . . .	7
2.5. Llegada al planeta de destino . . . . .	9
2.6. Maniobra de flyby . . . . .	11
<b>3. Metodología</b>	<b>14</b>
3.1. Cálculo de trayectorias directas . . . . .	14
3.2. Cálculo de trayectorias con flyby . . . . .	15
3.3. Obtención de resultados . . . . .	16
3.3.1. Presentación de resultados . . . . .	16
3.3.2. Obtención de los óptimos . . . . .	18
<b>4. Interfaz gráfica</b>	<b>21</b>
<b>5. Resultados obtenidos</b>	<b>23</b>
5.1. Parámetros de ejemplo . . . . .	23
5.2. Trayectorias directas . . . . .	24
5.3. Trayectorias con flyby . . . . .	26

5.4. Validación de los resultados . . . . .	27
5.5. Ejemplo de trayectoria a Júpiter . . . . .	29
<b>6. Análisis paramétrico de resultados</b>	<b>32</b>
6.1. Estudio de trayectorias directas . . . . .	32
6.1.1. Radio de la órbita de estacionamiento . . . . .	32
6.1.2. Radio de la órbita de captura . . . . .	33
6.1.3. Máximo delta-v de salida . . . . .	34
6.1.4. Máximo delta-v de llegada . . . . .	36
6.2. Estudio de trayectorias con flyby . . . . .	38
6.2.1. Altitud mínima de flyby . . . . .	38
6.2.2. Máximo delta-v para el flyby . . . . .	40
<b>7. Conclusiones</b>	<b>43</b>
<b>8. Trabajo futuro</b>	<b>44</b>
<b>9. Presupuesto</b>	<b>45</b>
9.1. Costes de personal . . . . .	45
9.2. Hardware . . . . .	45
9.3. Software . . . . .	46
9.4. Presupuesto total . . . . .	46
<b>Bibliografía</b>	<b>47</b>
<b>ANEXOS</b>	<b>48</b>
<b>A. Código</b>	<b>49</b>

A.1. Trayectorias directas . . . . .	52
A.2. Trayectorias con flyby . . . . .	56
<b>B. Glosario</b>	<b>64</b>
B.1. Símbolos griegos . . . . .	64
B.2. Símbolos latinos . . . . .	64
B.3. Acrónimos . . . . .	65

# Índice de figuras

2.1.	Disminución de la fuerza de la gravedad con la distancia a la superficie de un planeta siendo $F_{g0}$ la fuerza de la gravedad en su superficie y $r_0$ el radio del mismo [1]. . . . .	4
2.2.	Fuerzas de atracción que actúan sobre una masa $m$ cercana a un planeta que orbita alrededor del Sol [10]. . . . .	5
2.3.	Trayectoria entre La Tierra y Marte determinada mediante el método de ajuste de cónicas. . . . .	7
2.4.	Salida de una nave espacial desde un planeta interior hacia uno exterior [1]. . . . .	8
2.5.	Llegada de una nave espacial a un planeta exterior desde un planeta interior [1]. . . . .	10
2.6.	Maniobra de asistencia gravitatoria con impulso en el periapsis [2]. . . . .	12
3.1.	Ejemplo de gráfico <i>porkchop</i> para las trayectorias balísticas directas entre La Tierra y Marte durante el periodo 2019-2022 [3]. . . . .	17
3.2.	Ejemplo de mínimos obtenidos para una trayectoria directa entre La Tierra y Marte, indicados en la figura con cruces rojas. . . . .	19
3.3.	Mínimos obtenidos usando la búsqueda de mínimos regionales descrita. . . . .	20
3.4.	Mínimo obtenido buscando un único mínimo absoluto para la ventana estudiada. . . . .	20
4.1.	Ejemplo de utilización de la interfaz gráfica diseñada. . . . .	22
5.1.	Delta-v total para trayectorias balísticas Tierra-Marte. . . . .	24
5.2.	Lanzamiento de la misión “ <i>Mars 2020</i> ” el 23 de Julio de 2020 desde Cabo Cañaveral a bordo del cohete Atlas V-541 de la compañía ULA [4]. . . . .	25
5.3.	Delta-v total para trayectorias entre La Tierra y Marte incluyendo una asistencia gravitatoria en Venus. . . . .	26
5.4.	Delta-v total para trayectorias balísticas Tierra-Marte y con asistencia gravitatoria en Venus para el periodo 2020-2040 [2]. . . . .	27
5.5.	Ampliación de la figura 5.4 en la que se detalla el periodo que tomado como referencia [2]. . . . .	28

5.6.	Delta-v total obtenido para trayectorias balísticas Tierra-Marte y con asistencia gravitatoria en Venus para el periodo 2020-2023 . . . . .	28
5.7.	Delta-v total para trayectorias balísticas Tierra-Júpiter con salida entre febrero y mayo de 1972. . . . .	30
5.8.	Trayectoria seguida por la Pioneer 10 superpuesta sobre el delta-v total calculado para trayectorias balísticas Tierra-Júpiter con salida entre febrero y mayo de 1972. . . . .	31
6.1.	Variación en los delta-v obtenidos para la trayectoria La Tierra - Marte debida a la eliminación de la órbita de estacionamiento en el origen. . . . .	32
6.2.	Variación en los delta-v obtenidos para la trayectoria La Tierra - Marte debida a la adición de una órbita de captura en el destino. . . . .	34
6.3.	Variación en los delta-v obtenidos para la trayectoria La Tierra - Marte al variar el límite del delta-v de salida. . . . .	35
6.4.	Variación en los delta-v obtenidos para la trayectoria La Tierra - Marte al variar el límite del delta-v de llegada. . . . .	37
6.5.	Variación en los delta-v obtenidos para la trayectoria La Tierra - Venus - Marte debida a la variación del límite de menor altitud del periapsis permitida sobre Venus. . . . .	39
6.6.	Variación en los delta-v obtenidos para la trayectoria La Tierra - Venus - Marte debida a la variación del límite de máximo delta-v para el flyby en Venus. . . .	41

# Índice de tablas

2.1. Radio de las esferas de influencia de diferentes cuerpos del Sistema Solar . . . . .	6
5.1. Óptimos para las trayectorias balísticas directas entre La Tierra y Marte para el periodo 2020-2023. . . . .	24
5.2. Óptimo para las trayectorias entre La Tierra y Marte usando flyby en Venus para el periodo 2020-2023 obtenidos mediante la herramienta desarrollada . . . . .	26
5.3. Óptimos para las trayectorias balísticas directas entre La Tierra y Marte y usando flyby en Venus para el periodo 2020-2023 obtenidos por [2] . . . . .	29
5.4. Óptimos para las trayectorias balísticas directas entre La Tierra y Marte y usando flyby en Venus para el periodo 2020-2023 obtenidos mediante la herramienta desarrollada . . . . .	29
5.5. Óptimos para las trayectorias balísticas directas entre La Tierra y Júpiter para los meses de febrero a mayo de 1972 obtenidos mediante la herramienta desarrollada. . . . .	31
6.1. Parámetros de las trayectorias óptimas obtenidos para el caso base. . . . .	33
6.2. Parámetros de las trayectorias óptimas obtenidos para el caso sin órbita de estacionamiento. . . . .	33
6.3. Parámetros de las trayectorias óptimas obtenidos para el caso base. . . . .	34
6.4. Parámetros de las trayectorias óptimas obtenidos para el caso $h_{orb.cap.} = 300km$ . . . . .	34
6.5. Parámetros de las trayectorias óptimas obtenidos para el caso base con un máximo $\Delta V_{salida}$ de 5.477 km/s ( $C3_d = 30km^2/s^2$ ). . . . .	36
6.6. Parámetros de las trayectorias óptimas obtenidos para el caso de máximo $\Delta V_{salida}$ de 10 km/s ( $C3_d = 100km^2/s^2$ ). . . . .	36
6.7. Parámetros de las trayectorias óptimas obtenidos para el caso de máximo $\Delta V_{salida}$ de 4.472 km/s ( $C3_d = 20km^2/s^2$ ). . . . .	36
6.8. Parámetros de las trayectorias óptimas obtenidos para los tres casos estudiados. . . . .	37
6.9. Óptimos para las trayectorias entre La Tierra y Marte usando flyby en Venus para los tres casos estudiados . . . . .	40

6.10. Óptimos para las trayectorias entre La Tierra y Marte usando flyby en Venus para los tres casos estudiados. . . . .	42
9.1. Costes del proyecto asociados al ingeniero graduado. . . . .	45
9.2. Costes del proyecto asociados al ingeniero doctorado. . . . .	45

# MEMORIA

# 1. Introducción

Desde el lanzamiento del Sputnik 1 en 1957, el interés del ser humano por la exploración espacial y en particular, por los cuerpos celestes más próximos a La Tierra, ha promovido el lanzamiento de multitud de sondas así como el diseño de un gran número de misiones de exploración con el objetivo de obtener más información y estudiar con más detalle desde nuestro propio planeta hasta los elementos más alejados del Sistema Solar. Ejemplo de estas son las misiones Luna que exploraron por primera vez el satélite natural de La Tierra, o la Mariner 4 que se convirtió en la primera en sobrevolar Marte, pasando por la Mariner 2, la primera sonda en completar con éxito un encuentro con otro planeta. Los motores cohete habían puesto los planetas interiores al alcance del ser humano, que pronto puso la mirada más allá del cinturón de asteroides. Sin embargo, la energía necesaria para poner un artefacto en una trayectoria que lo llevase más allá de Marte y Venus suponía el empleo de enormes cohetes que elevaban el coste de las misiones.

El empleo de la asistencia gravitatoria supondría la llave de la exploración de los planetas exteriores. De esta forma, la sonda Galileo consiguió llegar a Júpiter aprovechando la gravedad de La Tierra y Venus, la Mariner 10 exploró Mercurio usando la gravedad de Venus y la Voyager 1 escapó de la gravedad del Sol mediante una serie de maniobras de asistencia gravitatoria en Júpiter y Saturno.

Conforme aumentan el tamaño y el peso de la carga útil así como los objetivos de las misiones de exploración del Sistema Solar, las trayectorias empleadas se vuelven más intrincadas, haciendo uso incluso de varias maniobras de asistencia gravitatoria.

La complejidad de las misiones y el coste que supone almacenar y mantener en perfecto estado los instrumentos de dichas misiones, hacen que a menudo se trabaje con un calendario muy ajustado. Por ello, resulta crucial en el diseño de una misión interplanetaria conocer las denominadas “ventanas de lanzamiento” que marcan las fechas en las que una trayectoria es viable con el consumo de combustible y el tiempo de vuelo deseados.

Se plantea, por tanto en este trabajo el desarrollo de una herramienta que permita calcular trayectorias interplanetarias directas y haciendo uso de una maniobra de asistencia gravitatoria entre dos planetas cualesquiera, teniendo en cuenta las condiciones de delta-v y tiempo de vuelo deseado, así como otras restricciones a la factibilidad de la misión. Esta herramienta permite obtener un calendario de fechas de lanzamiento y de llegada junto a los parámetros de interés de la trayectoria así como gráficos *porkchop* y una representación rápida y visual de las posibles trayectorias en la fase de diseño de una misión interplanetaria.

## 2. Fundamentos de las trayectorias interplanetarias

### 2.1. Problema de Lambert

Planteado por el matemático, físico y astrónomo Johann Heinrich Lambert en el siglo XVIII, el problema de Lambert consiste en la determinación de una trayectoria orbital dados el tiempo de vuelo y dos vectores de posición. Lambert propuso que el tiempo de transferencia  $\Delta t$  entre dos puntos  $P_1$  y  $P_2$  cuyos vectores de posición  $\mathbf{r}_1$  y  $\mathbf{r}_2$ , respectivamente, son conocidos, es independiente de la excentricidad de la órbita y depende únicamente de la suma de las magnitudes de los vectores de posición, el semieje mayor y la longitud de la cuerda que une los puntos  $P_1$  y  $P_2$  [1, 9]

A partir de los coeficientes de Lagrange pueden expresarse la posición y la velocidad de  $P_2$  como

$$\mathbf{r}_2 = f\mathbf{r}_1 + g\mathbf{v}_1 \quad (2.1)$$

$$\mathbf{v}_2 = \dot{f}\mathbf{r}_1 + \dot{g}\mathbf{v}_1 \quad (2.2)$$

Resolviendo para  $\mathbf{v}_1$  se obtiene

$$\mathbf{v}_1 = \frac{1}{g}(\mathbf{r}_2 - f\mathbf{r}_1) \quad (2.3)$$

y para  $\mathbf{v}_2$ , teniendo en cuenta la propiedad de los coeficientes de Lagrange según la cual  $f\dot{g} - \dot{f}g = 1$

$$\mathbf{v}_2 = \dot{f}\mathbf{r}_1 + \frac{\dot{g}}{g}(\mathbf{r}_2 - f\mathbf{r}_1) = \frac{\dot{g}}{g}\mathbf{r}_2 - \frac{f\dot{g} - \dot{f}g}{g}\mathbf{r}_1 = \frac{1}{g}(\dot{g}\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1) \quad (2.4)$$

Los coeficientes de Lagrange se pueden expresar en función de la anomalía universal  $\chi$  de forma que sean aplicables para cualquier tipo de órbita,

$$f = 1 - \frac{y(z)}{r_1} \quad (2.5)$$

$$g = A \sqrt{\frac{y(z)}{\mu}} \quad (2.6)$$

$$\dot{f} = \frac{\sqrt{\mu}}{r_1 r_2} \sqrt{\frac{y(z)}{C(z)}} [zS(z) - 1] \quad (2.7)$$

$$\dot{g} = 1 - \frac{y(z)}{r_2} \quad (2.8)$$

donde  $\alpha = 1/a$ ,  $z = \alpha\chi^2$ ,  $A = \sin \Delta\theta \sqrt{\frac{r_1 r_2}{1 - \cos \Delta\theta}}$  e  $y(z) = r_1 + r_2 + A \frac{zS(z)-1}{\sqrt{C(z)}}$ .

Las funciones  $C(z)$  y  $S(z)$  pertenecen a un tipo de funciones conocido como funciones Stumpff. Estas pueden expresarse en términos de funciones trigonométricas circulares e hiperbólicas:

$$S(z) = \begin{cases} \frac{\sqrt{z} - \sin \sqrt{z}}{(\sqrt{z})^3} & \text{si } z > 0 \\ \frac{\sinh \sqrt{-z} - \sqrt{-z}}{(\sqrt{-z})^3} & \text{si } z < 0 \\ \frac{1}{6} & \text{si } z = 0 \end{cases}$$

$$C(z) = \begin{cases} \frac{1 - \cos \sqrt{z}}{\sqrt{z}} & \text{si } z > 0 \\ \frac{\cosh \sqrt{-z} - 1}{-z} & \text{si } z < 0 \\ \frac{1}{2} & \text{si } z = 0 \end{cases}$$

Con ellas puede calcularse el valor de  $\mathbf{v}_1$  y  $\mathbf{v}_2$  a partir de las ecuaciones 2.3 y 2.4. De esta forma pueden obtenerse los elementos orbitales de la trayectoria empleando  $\mathbf{r}_1$  y  $\mathbf{v}_1$  o  $\mathbf{r}_2$  y  $\mathbf{v}_2$ .

## 2.2. Esfera de influencia

Según la ley de la gravedad de Newton, la atracción gravitatoria es uno de esos fenómenos físicos que se engloban dentro de la ley del cuadrado inverso de la distancia según la cual su intensidad es inversamente proporcional al cuadrado de la distancia a su origen. Esto se traduce en que la fuerza de la gravedad disminuye rápidamente conforme aumenta la distancia al centro de atracción. Dicho fenómeno hace que, pese a que el Sol es el cuerpo celeste dominante en todo el Sistema Solar, en las proximidades de un planeta concreto, la influencia de su gravedad supera a la del Sol. De este modo puede definirse un espacio esférico alrededor de un planeta dentro del cual la atracción gravitatoria dominante es la del propio planeta, mientras que en su exterior la gravedad solar supera a la del planeta [10].

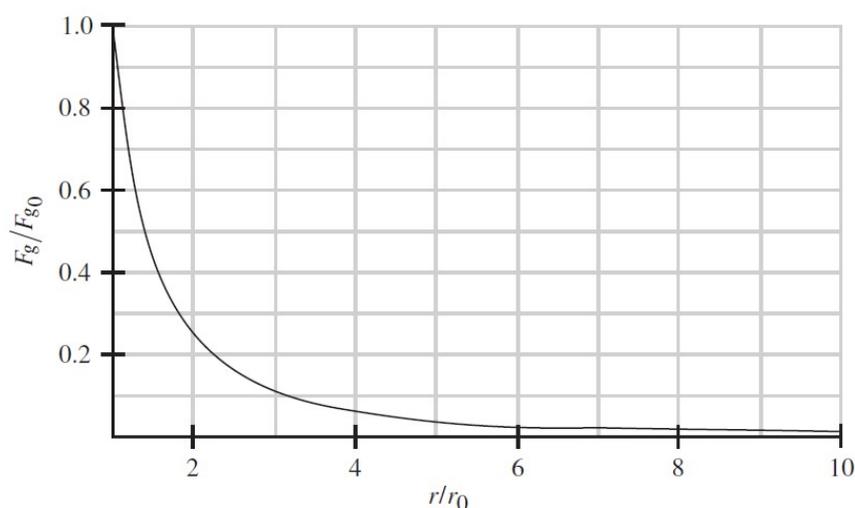


Figura 2.1: Disminución de la fuerza de la gravedad con la distancia a la superficie de un planeta siendo  $F_{g0}$  la fuerza de la gravedad en su superficie y  $r_0$  el radio del mismo [1].

Para calcular el límite de dicho espacio, se considera una masa  $m$  situada en la cercanía de un planeta de masa  $m_p$  que orbita alrededor del Sol. Las fuerzas que actuarán sobre la masa  $m$  vienen expresadas por

$$F_p(r) = \frac{Gm_p}{r^2} \quad (2.9)$$

$$F_{sol}(R) = \frac{Gm_{sol}}{R^2} \quad (2.10)$$

siendo  $r$  la distancia al planeta y  $R$  aquella respecto al Sol, tal y como se muestra en la figura 2.2.

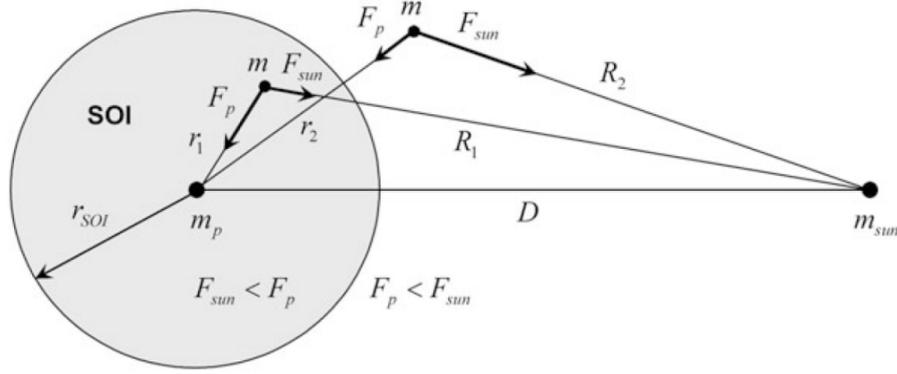


Figura 2.2: Fuerzas de atracción que actúan sobre una masa  $m$  cercana a un planeta que orbita alrededor del Sol [10].

Además de las fuerzas gravitatorias, han de tenerse en cuenta las fuerzas centrífugas que surgen como consecuencia de orbitar alrededor del Sol. En cualquier órbita planetaria, dichas fuerzas centrífugas se anulan con la fuerza gravitacional del Sol. Si el objeto que orbita el planeta se aleja del mismo en dirección al Sol, aumenta la influencia de la gravedad de la estrella y se reduce la de la fuerza centrífuga. Dicho comportamiento se puede incluir en la ecuación 2.10 como

$$F_{sol}(R) = \frac{Gm_{sol}}{R^2} \sqrt{\frac{r}{R}} \quad (2.11)$$

Justo en límite de la esfera de influencia se cumplirá que  $F_p = F_{sol}$ . Si se sustituyen las ecuaciones 2.9 y 2.11 en dicha relación se obtiene

$$F_{sol}(R) = F_p(r_{SOI}) \quad (2.12)$$

de donde se obtiene que

$$r_{SOI} = R \left( \frac{m_p}{m_{sol}} \right)^{\frac{2}{5}} \quad (2.13)$$

En el límite de la esfera de influencia, situado en la línea que une el Sol con el planeta,  $R = D - r_{SOI}$  por lo que

$$r_{SOI} = \frac{D}{\left( \frac{m_p}{m_{sol}} \right)^{-\frac{2}{5}} + 1} \quad (2.14)$$

Como la masa del planeta es mucho menor que la del Sol, se puede simplificar la ecuación anterior como

$$r_{SOI} = D \left( \frac{m_p}{m_{sol}} \right)^{\frac{2}{5}} \quad (2.15)$$

La consideración de este volumen de influencia como una esfera se considera una buena aproximación a pesar de que la masa  $m$  no se encuentra siempre en la línea que une el planeta con el Sol. En la tabla 2.1 se pueden ver los radios de las esferas de influencia de cada planeta del Sistema Solar.

Cuerpo	$r_{SOI}$ (km)
Sol	-
Mercurio	112000
Venus	616000
La Tierra	925000
La Luna	66100
Marte	577000
Júpiter	48200000
Saturno	54800000
Urano	51800000
Neptuno	86600000

Tabla 2.1: Radio de las esferas de influencia de diferentes cuerpos del Sistema Solar

### 2.3. Método de ajuste de cónicas

Para estudiar las trayectorias interplanetarias, se asume que cuando una aeronave abandona la esfera de influencia de un planeta, esta sigue una trayectoria que se corresponde con la de una órbita kepleriana sin perturbar alrededor del Sol. En el caso de órbitas heliocéntricas, se puede considerar los planetas y sus respectivas esferas de influencia como un punto coincidente con el centro del planeta. Desde el punto de vista del planeta, sin embargo, puede considerarse que el horizonte de dicha esfera de influencia se encuentra en el infinito [1]. De esta forma, el método de ajuste de cónicas considera que la trayectoria del vehículo en cualquier instante estará determinada únicamente por el campo gravitatorio dominante.

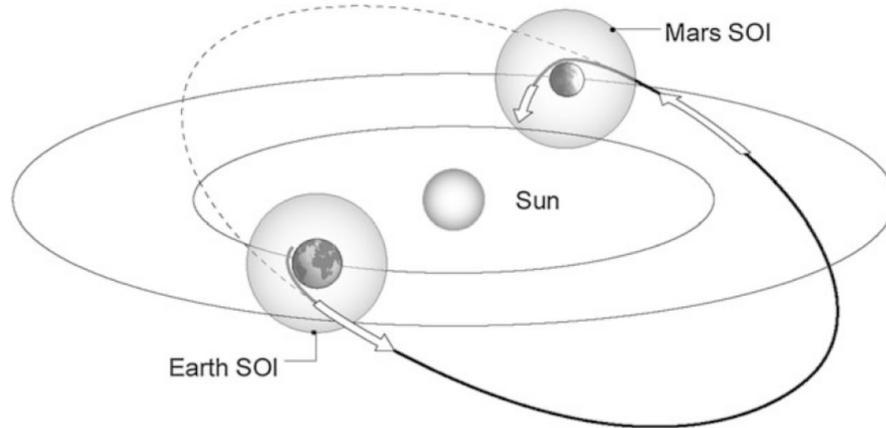


Fig. 9.2 Patched-conics trajectory for a transit between Earth and Mars

Figura 2.3: Trayectoria entre La Tierra y Marte determinada mediante el método de ajuste de cónicas.

Se trata de un método secuencial que divide la trayectoria heliocéntrica que seguirá la nave en tres dominios limitados por la influencia gravitatoria del planeta de origen, el Sol y el planeta de destino, que posteriormente es necesario unir de manera continua. Esta aproximación es mejorable si se considera la precisión de la trayectoria obtenida, sin embargo, funciona muy bien en términos de delta-v porque, a pesar de que la transición de un dominio a otro es muy gradual, si se tiene en cuenta la totalidad de la trayectoria seguida, se trata de una fase muy corta.

El método de ajuste de cónicas consiste en determinar la trayectoria heliocéntrica que seguirá la nave entre las esferas de influencia del planeta de origen y el planeta de destino para, de esta forma, poder calcular las velocidades relativas a cada planeta en los puntos de intersección con la trayectoria heliocéntrica. Estas velocidades serán empleadas entonces para obtener las trayectorias de salida y de llegada dentro de la esfera de influencia de cada planeta. La unión de las tres trayectorias (cónicas) obtenidas, las dos dentro de las esferas de influencia y la heliocéntrica entre los planetas, forma la trayectoria final [1].

## 2.4. Salida del planeta de origen

La salida de la esfera de influencia de un planeta se logra mediante una trayectoria hiperbólica en la que la velocidad relativa  $v_{\infty}$  ha de ser igual a la velocidad necesaria para realizar la trayectoria heliocéntrica entre los planetas seleccionados. Habitualmente, las naves espaciales son transferidas a una órbita interplanetaria desde una órbita de estacionamiento circular, cuyo radio es igual al radio del periapsis de la hipérbola de salida [1, 11].

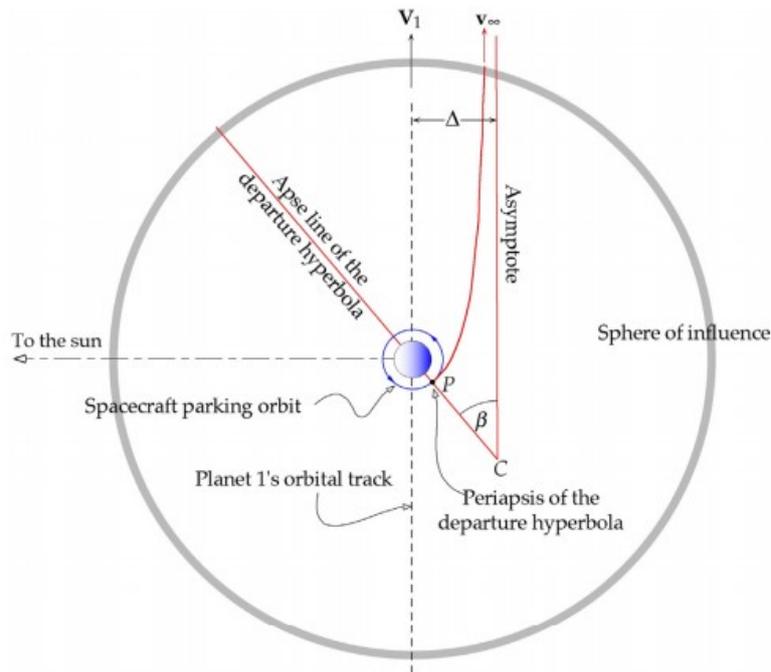


Figura 2.4: Salida de una nave espacial desde un planeta interior hacia uno exterior [1].

El radio del periapsis viene definido por la ecuación

$$r_p = \frac{h^2}{\mu_1} \frac{1}{1 + e} \quad (2.16)$$

en la que  $h$  es el momento angular de la hipérbola de salida,  $e$  es la excentricidad de la hipérbola y  $\mu_1$  es el parámetro gravitacional del planeta.

El exceso de velocidad hiperbólica ( $v_\infty$ ) se define como

$$v_\infty = \frac{\mu}{h} \sqrt{e^2 - 1} \quad (2.17)$$

de donde se puede obtener

$$h = \frac{\mu_1 \sqrt{e^2 - 1}}{v_\infty} \quad (2.18)$$

Sustituyendo esta expresión en la ecuación 2.17 y despejando la excentricidad se obtiene

$$e = 1 + \frac{r_p v_\infty^2}{\mu_1} \quad (2.19)$$

Introduciendo este resultado en la ecuación 2.18 se obtiene la siguiente expresión:

$$h = r_p \sqrt{v_\infty^2 + \frac{2\mu_1}{r_p}} \quad (2.20)$$

A partir del momento angular se obtiene la velocidad en el periapsis:

$$v_p = \frac{h}{r_p} = \sqrt{v_\infty^2 + \frac{2\mu_1}{r_p}} \quad (2.21)$$

Con la velocidad de la órbita de estacionamiento circular,

$$v_c = \sqrt{\frac{\mu_1}{r_p}} \quad (2.22)$$

se puede calcular la variación de velocidad necesaria para la trayectoria hiperbólica de salida,

$$\Delta V = v_p - v_c = v_c \left( \sqrt{2 + \left(\frac{v_\infty}{v_c}\right)^2} - 1 \right) \quad (2.23)$$

La ubicación del periapsis, donde debe ocurrir la inyección de velocidad, viene indicada por el ángulo  $\beta$  que determina la orientación de la línea de ápsides de la hipérbola hacia el vector de velocidad heliocéntrica del planeta

$$\beta = \arccos \left( \frac{1}{e} \right) = \arccos \left( \frac{1}{1 + \frac{r_p v_\infty^2}{\mu_1}} \right) \quad (2.24)$$

## 2.5. Llegada al planeta de destino

En el momento del encuentro de la nave espacial con el planeta de destino, ésta llega a la esfera de influencia del mismo con un exceso de velocidad hiperbólica  $v_\infty$ . Al igual que en la maniobra de salida desde el planeta de origen, en el planeta de destino este exceso de velocidad debe compensarse mediante un impulso, en este caso de tal forma que la nave pueda ser capturada por la gravedad del planeta.

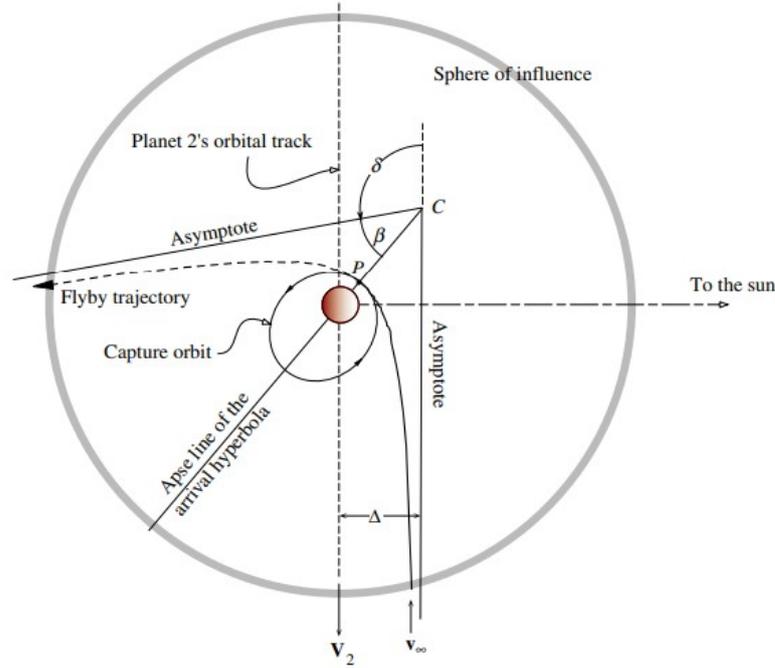


Figura 2.5: Llegada de una nave espacial a un planeta exterior desde un planeta interior [1].

Dado que la órbita que describirá la nave alrededor del planeta de destino se encuentra predefinida según los requerimientos de la misión, se puede calcular la excentricidad de la trayectoria hiperbólica de aproximación como

$$e = 1 + \frac{r_p v_\infty^2}{\mu_2} \quad (2.25)$$

Usando la ecuación 2.20 se obtiene el momento angular de la hipérbola de aproximación relativo al planeta,

$$h = r_p \sqrt{v_\infty^2 + \frac{2\mu_2}{r_p}} \quad (2.26)$$

La variación de velocidad requerida durante el impulso en el periapsis para que la nave orbite alrededor del planeta de destino en la órbita de captura se obtiene restando la velocidad en el periapsis de la órbita de captura

$$v_p|_{cap} = \sqrt{\frac{\mu_2(1+e)}{r_p}} \quad (2.27)$$

a la velocidad en el periapsis de la trayectoria hiperbólica

$$v_p|_{hyp} = \sqrt{v_\infty^2 + \frac{2\mu_2}{r_p}} \quad (2.28)$$

de forma que la expresión del delta-v queda finalmente expresada como

$$\Delta v = v_p|_{hyp} - v_p|_{cap} = \sqrt{v_\infty^2 + \frac{2\mu_2}{r_p}} - \sqrt{\frac{\mu_2(1+e)}{r_p}} \quad (2.29)$$

Puede obtenerse una expresión para el radio del periapsis óptimo en términos de delta-v como se puede ver en [1]. El gasto de delta-v es nulo en la maniobra de llegada si se emplea la fricción de la atmósfera del planeta de destino para reducir la velocidad y alcanzar la órbita de captura deseada. A esta maniobra se le denomina “aerocaptura”.

## 2.6. Maniobra de flyby

Aquellas naves espaciales que, tras entrar en la esfera de influencia del planeta, no impacten contra el mismo o sean capturadas por su gravedad, continuarán su trayectoria hiperbólica alrededor del planeta hasta abandonar su esfera de influencia [12]. Dicha maniobra, que aprovecha el tirón gravitacional de un planeta para acelerar la velocidad o alterar el rumbo de una nave se denomina maniobra de asistencia gravitatoria o “flyby” en inglés (durante el resto de la memoria se emplearán ambos términos indistintamente).

Para aumentar el número de posibles trayectorias que permitan alcanzar el planeta de destino empleando un flyby intermedio en otro planeta, se utilizará el método descrito en [5] consistente en una maniobra de asistencia gravitatoria en la que se efectúa un empuje usando el motor de la nave espacial.

Como ya se ha visto antes, la trayectoria de la órbita hiperbólica alrededor de un planeta viene determinada por los vectores de velocidad de llegada y salida de la nave espacial. Estos vectores de velocidad se obtienen mediante la solución de dos problemas de Lambert: el de la trayectoria desde el planeta de origen hasta el planeta en el que se va a efectuar la maniobra de flyby y el de la trayectoria entre el planeta de flyby y el planeta de destino. Esta unión de ambas trayectorias da como resultado una órbita hiperbólica en la que es necesario un delta-v en el periapsis de la misma.

Como ya se ha dicho, las velocidades de llegada y salida del planeta en el que se va a realizar la maniobra de asistencia gravitatoria se pueden obtener a partir de las soluciones del problema de Lambert de la siguiente forma.

$$\mathbf{v}_{\infty-llegada} = \mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_{p2} \quad (2.30)$$

$$\mathbf{v}_{\infty\text{-salida}} = \mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_{p1} \quad (2.31)$$

Para conseguir “pegar” las dos soluciones es necesario el radio del perigeo. Para ello, en primer lugar hay que determinar el semieje mayor de las trayectorias hiperbólicas:

$$a_{\text{llegada}} = -\frac{\mu_{p2}}{v_{\infty\text{-llegada}}^2} \quad (2.32)$$

$$a_{\text{salida}} = -\frac{\mu_{p1}}{v_{\infty\text{-salida}}^2} \quad (2.33)$$

El ángulo de giro de la maniobra se obtiene como:

$$\delta = \arccos \left( \frac{\mathbf{v}_{\infty\text{-llegada}} \cdot \mathbf{v}_{\infty\text{-salida}}}{v_{\infty\text{-llegada}} \cdot v_{\infty\text{-salida}}} \right) \quad (2.34)$$

Para que las trayectorias de llegada y salida de la maniobra coincidan, el radio del periapsis ha de ser el mismo para ambas. De forma que

$$r_p = a_{\text{llegada}}(1 - e_{\text{llegada}}) = a_{\text{salida}}(1 - e_{\text{salida}}) \quad (2.35)$$

Como en el periapsis se produce un impulso, la excentricidad de la órbita hiperbólica de salida será diferente a la excentricidad de la de llegada al planeta.

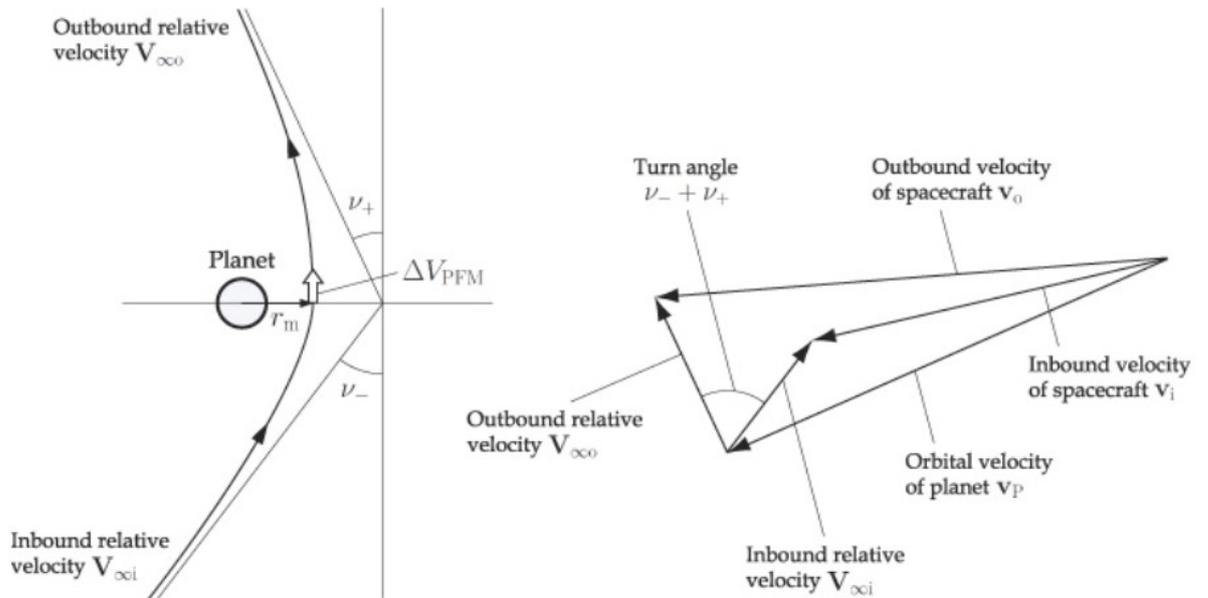


Figura 2.6: Maniobra de asistencia gravitatoria con impulso en el periapsis [2].

El ángulo  $\delta$  se puede representar también como la suma de los ángulos de transferencia de las órbitas de llegada y salida:

$$\delta = \arcsin\left(\frac{1}{e_{llegada}}\right) + \arcsin\left(\frac{1}{e_{salida}}\right) \quad (2.36)$$

Las ecuaciones 2.35 y 2.36 pueden combinarse en una única ecuación:

$$f = \left(\frac{a_{salida}}{a_{llegada}}(e_{salida} - 1)\right) \sin\left(\delta - \arcsin\left(\frac{1}{e_{salida}}\right)\right) - 1 = 0 \quad (2.37)$$

Esta ecuación es función de la variable  $e_{salida}$  cuyo valor es desconocido y, por lo tanto, ha de ser resuelta empleando un método iterativo como Newton-Raphson. La primera derivada de la ecuación 2.37 es:

$$\frac{df}{de_{salida}} = \left(\frac{a_{salida}}{a_{llegada}}e_{salida} - \frac{a_{salida}}{a_{llegada}} + 1\right) \frac{\cos\left(\delta - \arcsin\left(\frac{1}{e_{salida}}\right) + \frac{a_{salida}}{a_{llegada}}\right)}{e_{salida}^2 \sqrt{1 - 1/e_{salida}^2}} + \frac{a_{salida}}{a_{llegada}} \sin\left(\delta - \arcsin\left(\frac{1}{e_{salida}}\right)\right) \quad (2.38)$$

Una vez encontrada la solución de  $e_{salida}$ , el radio del periapsis puede obtenerse a partir de la ecuación 2.35 y el delta-v requerido como:

$$\Delta V_{PFM} = \left| \sqrt{v_{\infty-llegada}^2 + \frac{2\mu_{p2}}{r_p}} - \sqrt{v_{\infty-salida}^2 + \frac{2\mu_{p1}}{r_p}} \right| \quad (2.39)$$

## 3. Metodología

### 3.1. Cálculo de trayectorias directas

En primer lugar se desarrolla la parte del código encargada de calcular una trayectoria balística heliocéntrica dados los vectores de posición de los planetas de origen y destino, y el tiempo de transferencia entre los mismos.

El usuario introduce parámetros que determinan las condiciones de la trayectoria:

- Planetas de origen y de destino. El usuario puede elegir entre qué planetas ha de calcularse la trayectoria.
- Fecha inicial de búsqueda. Constituye la fecha de salida inicial a partir de la cual se van a calcular las posibles trayectorias.
- Periodo de cálculo. Se trata del periodo de tiempo desde la fecha inicial de búsqueda que englobará a todas las posibles fechas de lanzamiento.
- Tiempo de vuelo máximo. Constituye el máximo tiempo de vuelo que debe durar la trayectoria. Se calcularán por tanto todas aquellas que tengan un tiempo de vuelo menor o igual al tiempo de vuelo máximo.
- Altitud de las órbitas de estacionamiento y captura. Este parámetro establece la altitud sobre la superficie de los planetas de destino y de origen a la que se encontrarán la órbita de estacionamiento previa al lanzamiento y la órbita de captura en el cuerpo de destino. Si su valor es 0 se considerará aerocaptura, es decir, que la nave es frenada por la atmósfera del planeta de destino por lo que no se requiere de un impulso para la transferencia desde la trayectoria a la órbita de captura.
- Valores máximos de delta-v en la salida y la llegada. Establece los valores máximos admisibles para los impulsos de transferencia entre las fases de la trayectoria.

Dado que se desea obtener información sobre todas las trayectorias posibles que se encuentren dentro de un periodo de tiempo determinado y cuyo tiempo de vuelo se encuentre por debajo de un valor establecido, es necesario efectuar el cálculo de la trayectoria para cada uno de los días que comprenden el periodo seleccionado tantas veces como el valor de días comprenda el tiempo de vuelo seleccionado. Esto se consigue englobando el cálculo anterior en dos bucles “for” que recorran todas las posibles fechas de lanzamiento así como cada uno de los posibles tiempos de vuelo.

Para obtener los datos de las trayectorias, es necesario resolver el problema de Lambert expuesto en la sección 2.1. En primer lugar se emplea el sistema de fecha juliana para calcular la fecha de llegada a partir de la fecha de salida y el tiempo de vuelo determinado. La fecha juliana establece el número de días transcurridos desde el mediodía del 1 de enero del 4713

a.C. Con la fecha de salida y de llegada es posible calcular las efemérides de los planetas. Para ello, se toman como referencia los elementos orbitales y los ratios de cambio por siglo con respecto a la época J2000 que vienen establecidos en [1]. De esta forma se puede obtener el vector de estado del planeta de origen en la fecha de salida así como el vector de estado del planeta de destino en la fecha de llegada. El vector de posición de la nave en el momento de salida y en el de llegada coincide con el del planeta de salida y el de llegada respectivamente. Así, los vectores de posición de la nave y el tiempo de vuelo son las variables empleadas en el problema de Lambert para obtener la velocidad de la nave en el momento de salida y en el de llegada. Una vez obtenidas las velocidades se puede obtener la velocidad hiperbólica respecto a cada uno de los planetas

$$V_{\infty-salida}^2 = (|\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_{p1}|)^2 \quad (3.1)$$

$$V_{\infty-llegada}^2 = (|\mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_{p2}|)^2 \quad (3.2)$$

La salida de una nave interplanetaria desde el planeta de origen suele llevarse a cabo desde una órbita de estacionamiento. Como el radio de dicha órbita viene determinado por la misión, se pueden emplear las ecuaciones 2.23 y 2.29 para obtener el valor de los delta-v de salida y de llegada. En el caso de considerar aerocaptura, el delta-v requerido sería igual a la velocidad hiperbólica de la llegada.

## 3.2. Cálculo de trayectorias con flyby

Para poder calcular la maniobra de asistencia gravitatoria el usuario debe introducir dos variables más:

- Altitud mínima del flyby. Al efectuar la maniobra de asistencia gravitatoria sobre un planeta con atmósfera, ha de tenerse en cuenta su posible efecto sobre la velocidad de la nave. Por ello, se establece un valor mínimo de altitud para el periapsis de la trayectoria con el fin de evitar los efectos de rozamiento con la atmósfera.
- Delta-v máximo para el flyby. Dado que el objetivo es ahorrar combustible mediante la maniobra de asistencia gravitatoria, resulta ilógico permitir un consumo alto debido a la necesidad de un gran empuje para efectuar el flyby.
- En este caso, el tiempo de vuelo máximo será el máximo para cada una de las ramas de la trayectoria completa.

En este caso es necesario calcular dos problemas de Lambert: el de la trayectoria desde el planeta de origen al planeta de flyby y desde este hasta el planeta de destino. Para reducir el tiempo de cálculo, se obtendrán primero los datos para ambas trayectorias de forma que a la hora de calcular la maniobra de asistencia gravitatoria únicamente sea necesario acceder

a los datos ya calculados. A la hora de calcular la trayectoria entre el planeta de asistencia y el planeta de destino, hay que tener en cuenta que las posibles fechas de salida para dicha trayectoria vendrán condicionadas por la fecha de salida y el tiempo de vuelo de la primera trayectoria. Así, para un tiempo de vuelo determinado en la primera trayectoria, la fecha de salida para la segunda será la fecha de salida de la primera más dicho tiempo de vuelo de la primera. Esto hace que, aunque el periodo de cálculo para la ventana de lanzamiento desde el planeta de origen sea reducido, el número de trayectorias a calcular vendrá condicionado por el máximo tiempo de vuelo para cada una de las ramas de la trayectoria final.

Una vez obtenidos todos los datos para ambas trayectorias se procede al cribado de aquellas que no cumplen con el criterio de delta-v máximo en llegada y en la salida. De esta forma se reduce el número total de maniobras de asistencia gravitatoria a calcular. El siguiente paso consiste en buscar las trayectorias coincidentes, es decir, aquellas en las que la fecha de llegada de la primera rama coincide con la fecha de salida de la segunda.

Es entonces cuando se calcula la maniobra de flyby para dichas trayectorias coincidentes de acuerdo con el procedimiento descrito en la sección 2.6. Si el resultado cumple con las restantes condiciones de delta-v para la maniobra de asistencia y de altitud sobre el planeta de flyby, se almacenan como soluciones válidas.

### 3.3. Obtención de resultados

#### 3.3.1. Presentación de resultados

Los resultados de los datos obtenidos por la herramienta se muestran en dos formatos diferentes.

Por un lado se obtiene una gráfica de tipo *porkchop*. Estas gráficas de contornos permiten mostrar regiones con un mismo valor de energía característica y por lo tanto, con un mismo valor de delta-v, frente a combinaciones de fechas de lanzamiento y tiempos de vuelo o fechas de llegada. La figura 3.1 es un ejemplo de este tipo de gráficos obtenido para las trayectorias entre La Tierra y Marte usando una herramienta de la Universidad Politécnica de Madrid [3]. En ella pueden apreciarse las ventanas de lanzamiento para el periodo 2019-2022 y el coste en términos de delta-v para cada combinación posible.

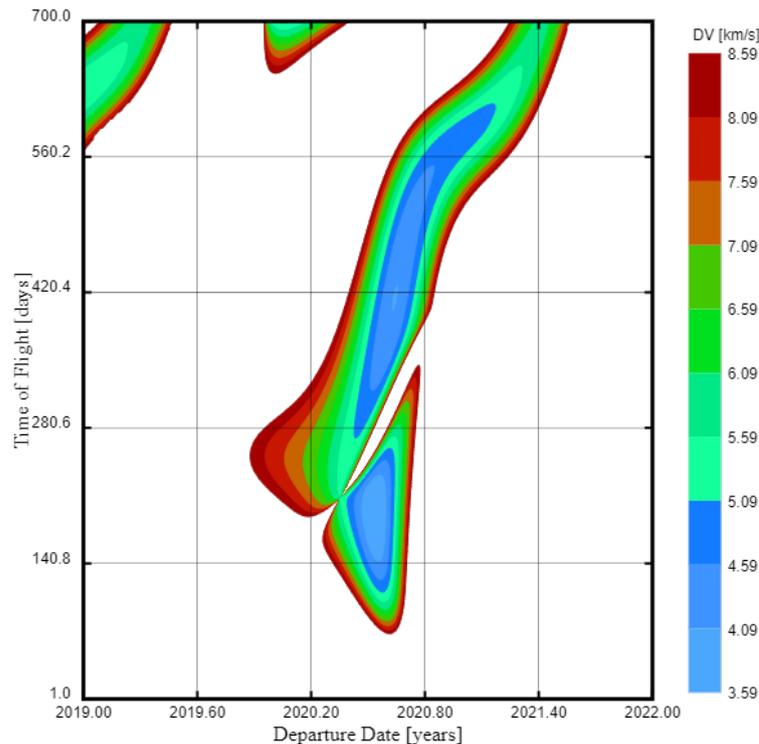


Figura 3.1: Ejemplo de gráfico *porkchop* para las trayectorias balísticas directas entre La Tierra y Marte durante el periodo 2019-2022 [3].

En la gráfica *porkchop* aparecerán indicados también los puntos considerados como óptimos.

Por otro lado, la herramienta obtiene una tabla resumen con los datos de aquellas trayectorias óptimas en términos de delta-v. Dicha tabla resumen incluye los siguientes parámetros:

- Fecha de lanzamiento.
- Delta-v para el lanzamiento.
- Tiempo de vuelo de la primera rama en el caso de que se trate de una trayectoria con asistencia gravitatoria.
- Fecha en la que se produce dicha maniobra de asistencia en el caso de haberla.
- Delta-v para la maniobra de asistencia gravitatoria.
- Radio del periapsis en el planeta de asistencia.
- Tiempo de vuelo de la segunda rama en el caso de que se trate de una trayectoria con asistencia gravitatoria.
- Fecha de llegada al planeta de destino.
- Delta-v total resultante de la suma de todas las maniobras.

- Tiempo de vuelo total. Este parámetro será la suma de los dos tiempos de vuelo para cada rama en el caso de una trayectoria con maniobra de asistencia gravitatoria y simplemente el valor del tiempo de vuelo entre el planeta de origen y de destino en el caso de una trayectoria balística.

Esta tabla resumen es guardada en el directorio en el que se ejecuta la herramienta en formato de tabla de *Microsoft Excel*.

### 3.3.2. Obtención de los óptimos

Los valores mínimos de delta-v son los que permiten considerar una trayectoria óptima en términos de consumo de combustible. Para obtener las configuraciones óptimas de fecha de salida y tiempo de vuelo se emplean dos enfoques distintos en función de si la trayectoria empleada es una trayectoria balística entre los planetas de origen y de destino, o de si la misma incluye una maniobra de asistencia gravitatoria intermedia.

En el caso de la trayectoria balística, la función “*imregionalmin*” de *MATLAB* permite obtener los mínimos regionales de una matriz de datos. De esta forma, los delta-v obtenidos se disponen a lo largo de una matriz en la que las filas representan las fechas de lanzamiento y las columnas se corresponden con el tiempo de vuelo empleado. Así, se obtiene una distribución muy uniforme y continua de los delta-v en la que la función descrita funciona correctamente, localizando los mínimos regionales con precisión (Figura 3.2). Estos mínimos son descritos por la documentación de *MATLAB* como “componentes conectados de píxeles con un valor de intensidad constante, rodeados de píxeles con un valor más alto”.

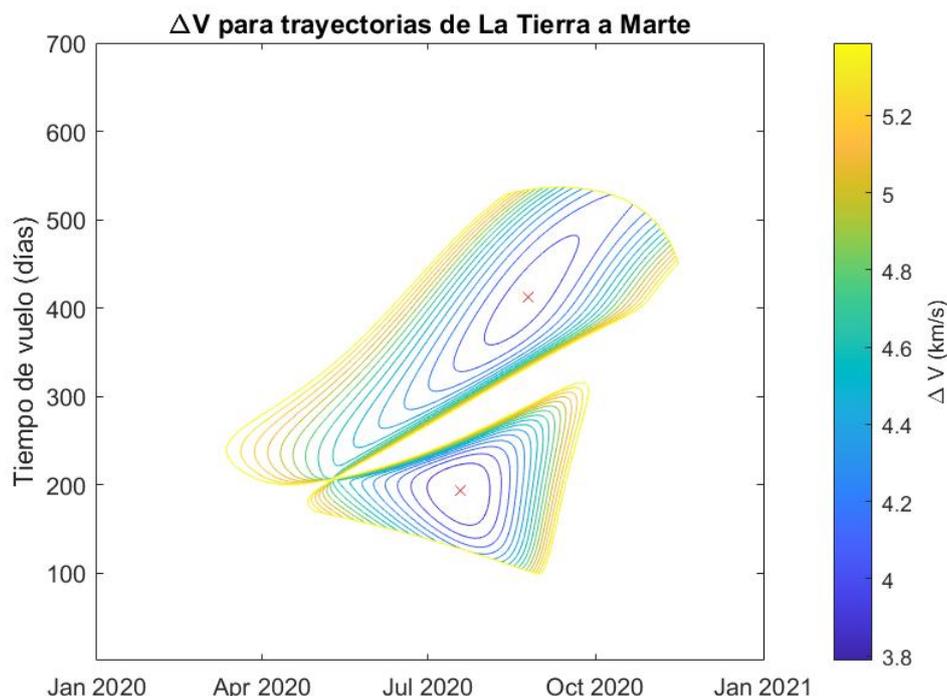


Figura 3.2: Ejemplo de mínimos obtenidos para una trayectoria directa entre La Tierra y Marte, indicados en la figura con cruces rojas.

Usar la misma aproximación del problema para el caso de la trayectoria con asistencia gravitatoria no proporciona resultados tan satisfactorios como en el caso anterior. Esto se debe a que a la hora de formar la matriz de delta-v, las columnas están formadas por el tiempo de vuelo total, es decir, la suma del tiempo de vuelo de la rama entre el planeta de origen y el planeta que proporciona la asistencia gravitatoria y el tiempo de vuelo de la que va de este al planeta de destino. Esto hace que para una misma fecha de lanzamiento desde el planeta de origen, distintas configuraciones de los tiempos de vuelo para cada rama den lugar a un delta-v distinto para un mismo tiempo de vuelo total. Como es necesario considerar un valor único para poder obtener los gráficos *porkchop*, se selecciona aquella configuración que devuelva un delta-v menor. Esto da lugar a que la distribución de delta-v en la matriz que se usa para calcular los mínimos no sea tan uniforme como en el caso de las trayectorias balísticas, provocando un fenómeno de dientes de sierra que genera la aparición de múltiples mínimos regionales en lugar de un único mínimo (Figura 3.3). Dado que las ventanas de lanzamiento que se obtienen con las trayectorias que cuentan con asistencia gravitatoria son menores que las de las trayectorias directas y habiendo constatado que los mínimos para cada región generada en el caso de las trayectorias balísticas son únicos, se considera una aproximación adecuada escoger como mínimo regional aquella configuración cuyo delta-v sea el mínimo absoluto de cada región (Figura 3.4).

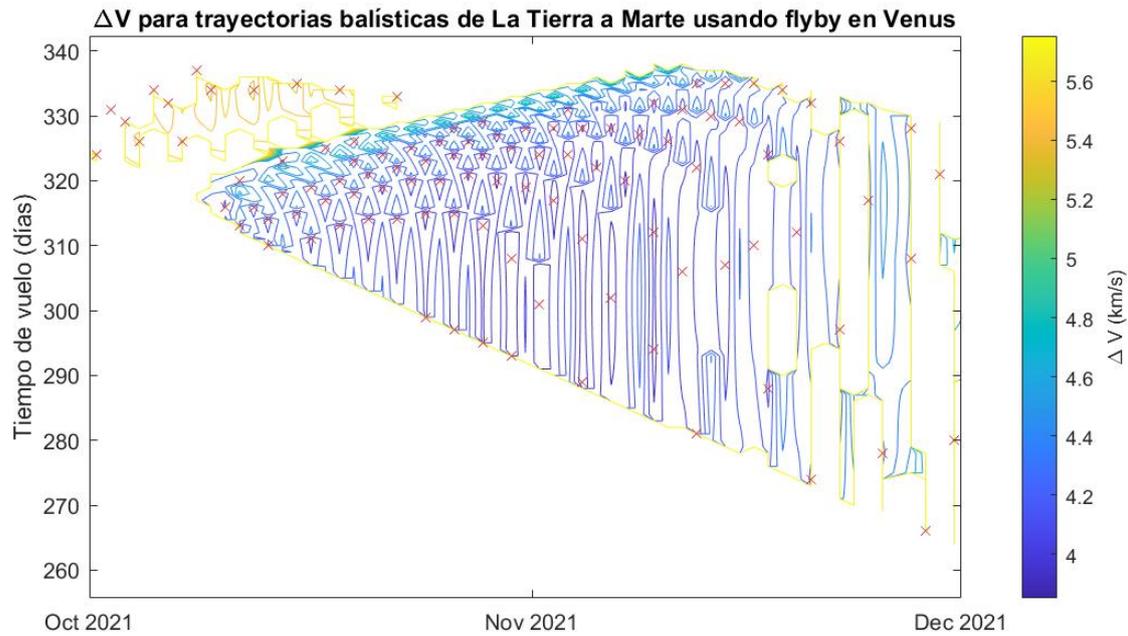


Figura 3.3: Mínimos obtenidos usando la búsqueda de mínimos regionales descrita.

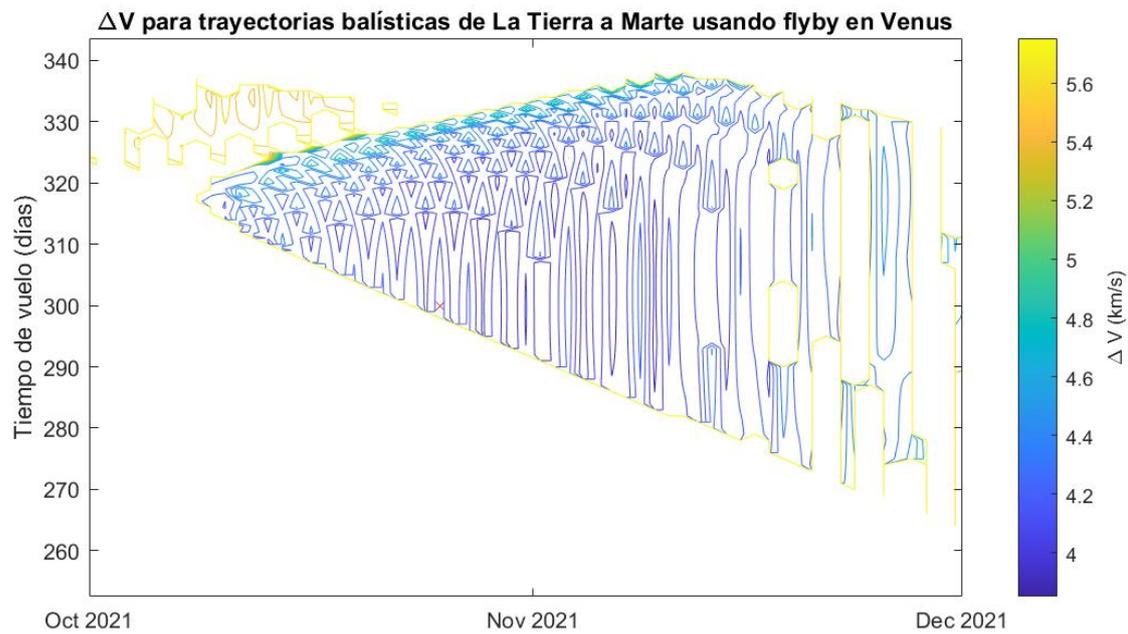


Figura 3.4: Mínimo obtenido buscando un único mínimo absoluto para la ventana estudiada.

## 4. Interfaz gráfica

Para facilitar la operación de la herramienta se ha desarrollado una interfaz gráfica mediante el entorno *App Designer* integrado en *MATLAB*. Dicha interfaz permite calcular trayectorias balísticas directas entre el planeta de origen y el de destino así como, si se selecciona, añadir la información de trayectorias con una maniobra de asistencia gravitatoria en un planeta intermedio.

Cuenta con una serie de desplegados que permiten seleccionar los planetas de origen, destino y flyby en caso de seleccionar la casilla correspondiente, así como la fecha de salida y el tiempo máximo de vuelo para cada rama de la trayectoria.

Cuenta también con la opción de introducir el resto de parámetros descritos en los capítulos anteriores tales como la altura mínima del periapsis para la maniobra de asistencia gravitatoria, la altitud de las órbitas de estacionamiento en el origen y de captura en el destino, y los valores máximos de delta-v para las maniobras de salida, flyby y encuentro.

Como resultado, la interfaz muestra los gráficos *porkchop* de las trayectorias directas y con maniobra de asistencia combinados así como una tabla con la información de las trayectorias óptimas para dichos periodos. Dichos óptimos aparecerán también indicados en el gráfico.

Tanto los gráficos como la tabla resumen pueden ser exportados al directorio desde donde se ejecuta la aplicación pulsando el botón “Exportar”. El gráfico resultante será una imagen .jpg y la tabla resumen se obtendrá como una tabla de cálculo de *Microsoft Excel*.

#### 4. Interfaz gráfica

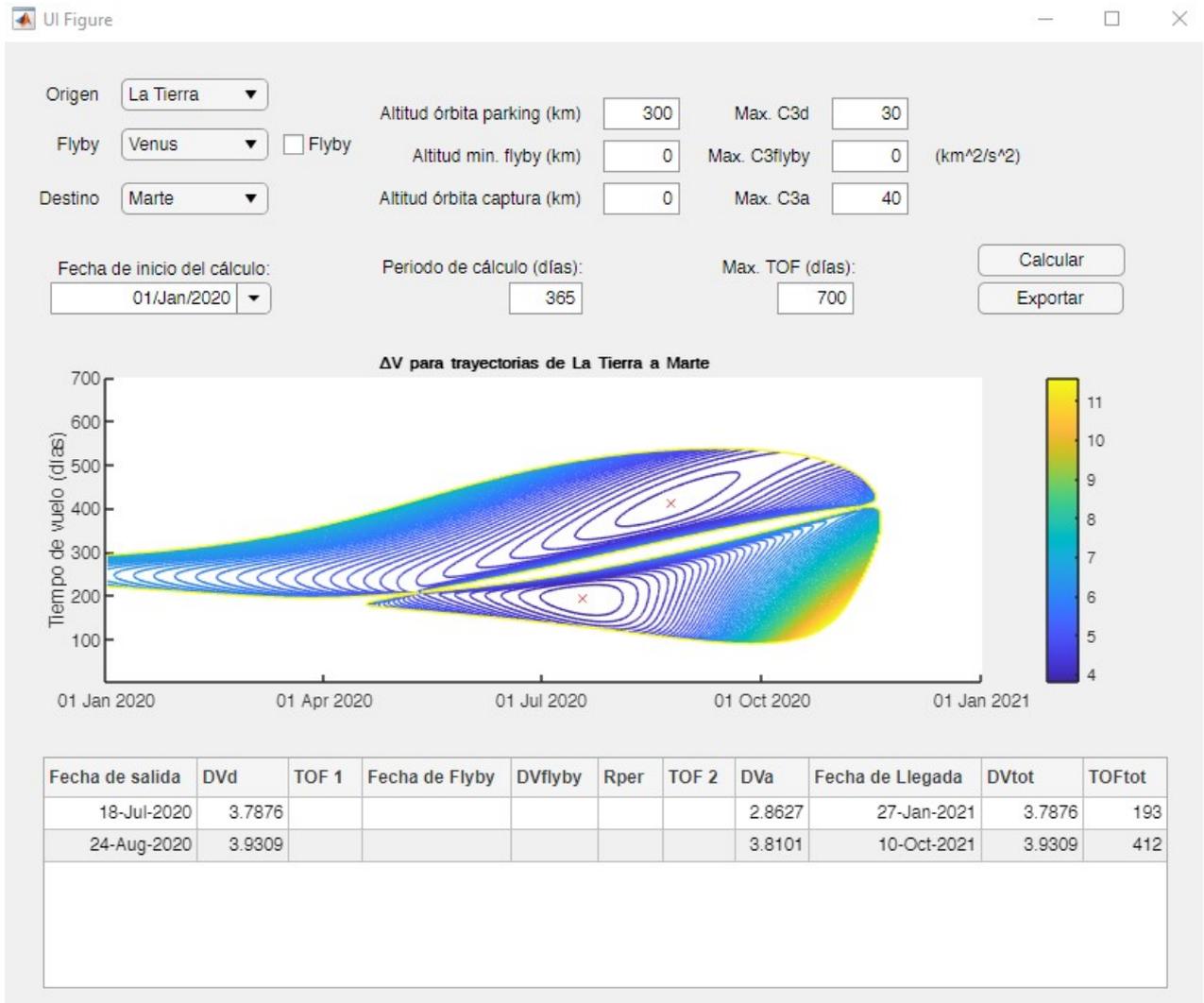


Figura 4.1: Ejemplo de utilización de la interfaz gráfica diseñada.

## 5. Resultados obtenidos

Para validar la herramienta elaborada se tomará como ejemplo el caso propuesto por Ishimatsu et al. en [2]. En dicho ejemplo se calcula por un lado la trayectoria directa entre La Tierra y Marte y por otro lado esa misma trayectoria empleando una maniobra de asistencia gravitatoria con impulso en Venus. El estudio comprende resultados entre 2020 y 2040 que son los que se utilizarán para validar los resultados obtenidos por la herramienta elaborada en este trabajo.

### 5.1. Parámetros de ejemplo

Para analizar y optimizar las trayectorias ha de definirse en primer lugar que criterios ha de cumplir la misma para considerarla plausible.

En primer lugar, el *Jet Propulsion Laboratory* establece que un lanzamiento no ha de tener una energía característica ( $C_3$ ) superior a  $25 \text{ km}^2/\text{s}^2$  [6]. Ishimatsu et al. toman como límite un valor de  $C_3$  de  $30 \text{ km}^2/\text{s}^2$ .

En el caso de la llegada, se considera un límite de  $8 \text{ km/h}$  en el caso de Marte, lo que se traduce en un  $C_3$  de  $40 \text{ km}^2/\text{s}^2$ . En el caso de La Tierra se establecen  $13 \text{ km/s}$  como una velocidad aceptable en términos de factor de carga y carga térmica, por lo que el límite se encuentra en un  $C_3 = 45 \text{ km}^2/\text{s}^2$ .

Por otro lado, cuando se efectúa una maniobra de asistencia gravitatoria, ha de tenerse en cuenta una altitud mínima del periapsis que se encontrará directamente relacionada con la densidad de la atmósfera del planeta en cuestión. En el caso de Venus, se consideran los 250 km de altitud como el límite inferior de cualquier sobrevuelo que se desee efectuar sobre el planeta debido a su densa atmósfera.

En cuanto al valor máximo del delta-v aplicado en la maniobra de asistencia gravitatoria, se elige un valor de  $0.3 \text{ km/s}$  como un valor razonable a fin de aprovechar la asistencia gravitatoria de Venus sin que esto suponga un detrimento en uso de combustible con respecto a una trayectoria balística directa.

Finalmente, se tendrá en cuenta una salida desde una órbita circular de estacionamiento de  $300 \text{ km}$  de altitud y se considerará aerocaptura en Marte, por lo que el delta-v total estará compuesto en su totalidad por el delta-v de salida.

## 5.2. Trayectorias directas

Teniendo en cuenta los parámetros especificados en el apartado anterior puede llevarse a cabo el cálculo de las trayectorias. En primer lugar se van a obtener las trayectorias balísticas directas entre La Tierra y Marte.

La figura 5.1 muestra los delta-v totales hasta  $4.8 \text{ km/s}$ . Las regiones mostradas por los contornos del gráfico indican aquellas trayectorias que son posibles en términos de máximo  $C3_{salida}$  y  $C3_{llegada}$ . Los mínimos locales se muestran superpuestos en la figura y de forma detallada con los parámetros que caracterizan a la trayectoria óptima en la tabla 5.1.

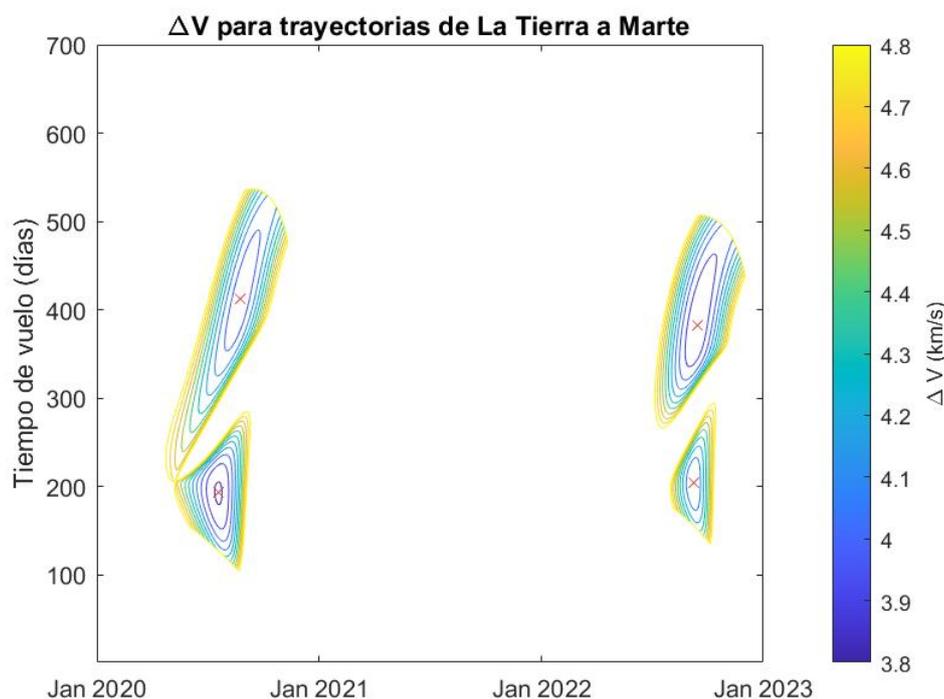


Figura 5.1: Delta-v total para trayectorias balísticas Tierra-Marte.

Fecha de salida	Fecha de llegada	$\Delta V_{salida}$	$\Delta V_{llegada}$	$\Delta V_{total}$	$TOF_{total}$
18/07/2020	27/01/2021	3,788	2,863	3,788	193
24/08/2020	10/10/2021	3,931	3,810	3,931	412
08/09/2022	31/03/2023	4,013	3,641	4,013	204
14/09/2022	02/10/2023	3,814	3,072	3,814	383

Tabla 5.1: Óptimos para las trayectorias balísticas directas entre La Tierra y Marte para el periodo 2020-2023.

En los resultados obtenidos se observan claramente dos ventanas de lanzamiento para la trayectoria estudiada. La primera de ellas, a mediados del año 2020, permite trayectorias directas

con oportunidades de tiempos de vuelo que oscilan los 200 días así como una oportunidad que ronda los 400 días y que puede considerarse de reserva dado el mayor tiempo de vuelo. Esta ventana de lanzamiento es la que emplearon el orbitador marciano “Hope”, enviada por los Emiratos Árabes Unidos el 14 de Julio y que llegará al planeta rojo a principios de 2021; la misión “Tianwen-1”, una misión China lanzada el 23 de Julio y consistente en un orbitador, un aterrizador y un rover; y “Mars 2020”, una misión conjunta de la NASA lanzada el 30 de Julio que llevará al rover “Perseverance” a la superficie marciana en febrero de 2021 donde recopilará muestras que serán recuperadas por una futura misión conjunta de la NASA y la ESA.



Figura 5.2: Lanzamiento de la misión “Mars 2020” el 23 de Julio de 2020 desde Cabo Cañaveral a bordo del cohete Atlas V-541 de la compañía ULA [4].

La segunda ventana permitirá lanzamientos en la segunda mitad de 2022, con unas características similares a las trayectorias de 2020.

Aprovechando cualquiera de las dos ventanas de lanzamiento se obtienen valores de delta-v inferiores a  $5 \text{ km/s}$ .

Prestando atención a las trayectorias óptimas obtenidas, se puede comprobar como en el caso de la trayectoria con fecha de salida el 24/08/2020, a pesar de tener un tiempo de vuelo superior al doble del de la otra trayectoria óptima de 2020, el delta-v requerido es ligeramente superior. Esta situación no se da en el caso de la pareja de trayectorias del año 2022 donde la que implica un mayor tiempo de vuelo permite un menor coste de inserción en términos de delta-v.

### 5.3. Trayectorias con flyby

La figura 5.3 muestra los delta-v totales hasta  $4.8 \text{ km/s}$ . Las regiones mostradas por los contornos del gráfico indican aquellas trayectorias que son posibles en términos de máximo  $C3_{salida}$  y  $C3_{llegada}$ . Los mínimos locales se muestran superpuestos en la figura y de forma detallada con los parámetros que caracterizan a la trayectoria óptima en la tabla 5.2.

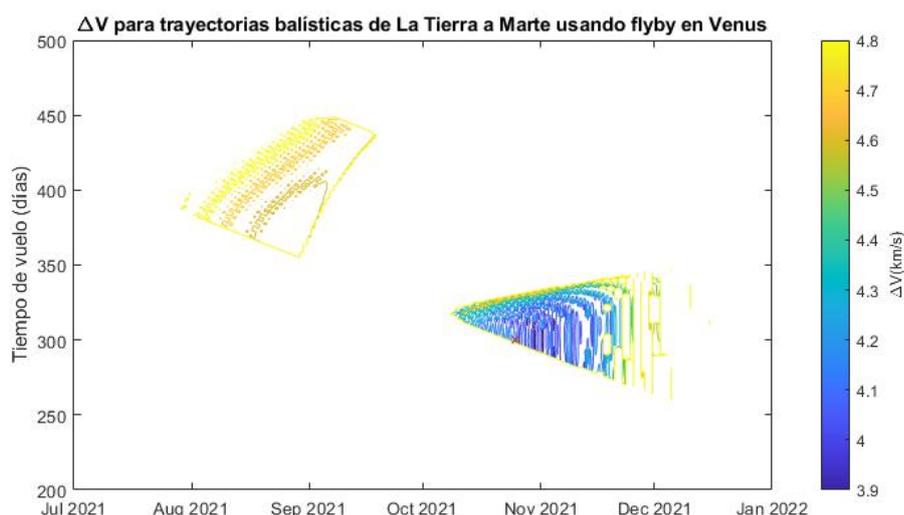


Figura 5.3: Delta-v total para trayectorias entre La Tierra y Marte incluyendo una asistencia gravitatoria en Venus.

Fecha de salida	Fecha de flyby	Fecha de llegada	$\Delta V_{salida}$	$\Delta V_{PFM}$	$\Delta V_{llegada}$	$\Delta V_{total}$	$TOF_{total}$
25/10/21	24/03/22	21/08/22	3.835	0.013	6.152	3.848	300 (150 + 150)

Tabla 5.2: Óptimo para las trayectorias entre La Tierra y Marte usando flyby en Venus para el periodo 2020-2023 obtenidos mediante la herramienta desarrollada

La ventana de lanzamiento obtenida para la trayectoria Tierra-Marte empleando una maniobra de asistencia gravitatoria en Venus permite obtener una oportunidad de lanzamiento en el periodo 2021-2022 que mediante el uso de trayectorias balísticas directas quedaba inutilizado. El rango de delta-v total obtenido para esta maniobra es similar a los obtenidos en el caso de las trayectorias directas, no superando de esta forma los  $5 \text{ km/s}$ . La trayectoria óptima obtenida para esta ventana permite un lanzamiento con un delta-v de  $3.835 \text{ km/s}$  que sumados a los  $0.013 \text{ km/s}$  necesarios para la maniobra de asistencia gravitatoria resultan en un delta-v total de  $3.848 \text{ km/s}$  que supone un valor similar a la media obtenida por las trayectorias directas. El tiempo de vuelo para esta trayectoria, como era de esperar, es superior a la mayoría de trayectorias balísticas directas pero no supone un valor excesivo e incluso estando por debajo de la trayectoria directa con lanzamiento el 14/09/2022.

## 5.4. Validación de los resultados

Para la validación de los resultados se tomarán como referencia los datos obtenidos por Ishimatsu et al. en [2] representados es la figura 5.4. Se selecciona el periodo 2020-2023 ya que dicho intervalo de tiempo comprende dos ventanas de lanzamiento de trayectorias directas y a su vez una para trayectorias con asistencia gravitatoria por lo que permitirá validar ambos enfoques.

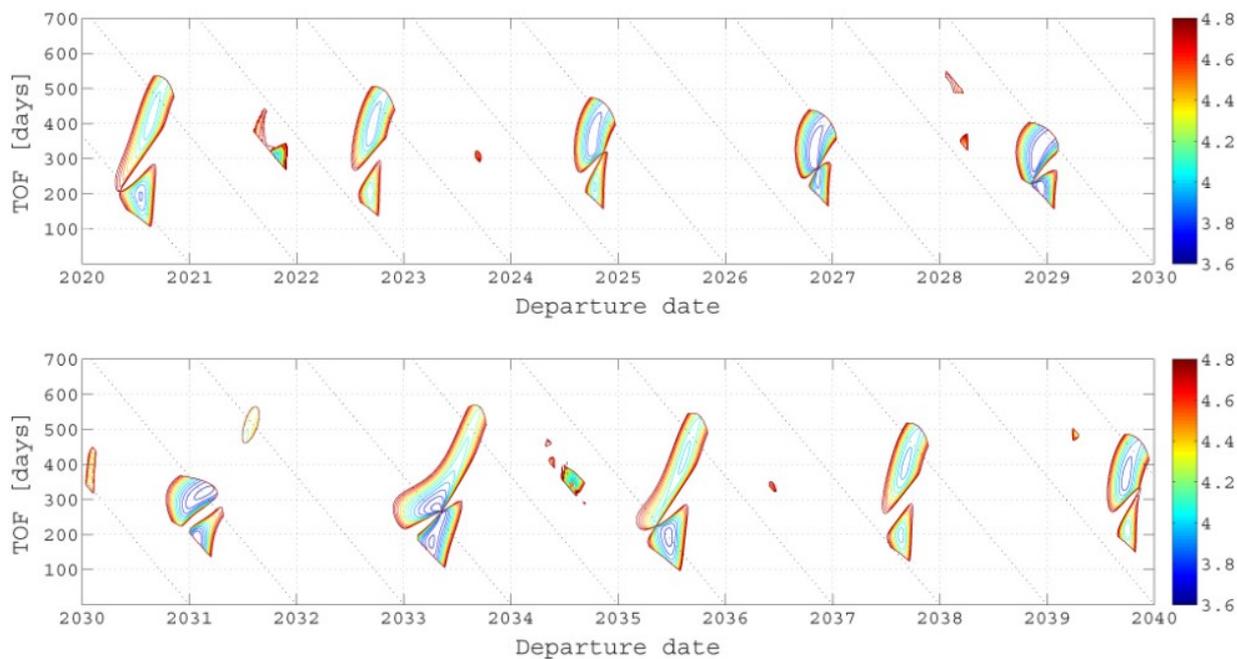


Figura 5.4: Delta-v total para trayectorias balísticas Tierra-Marte y con asistencia gravitatoria en Venus para el periodo 2020-2040 [2].

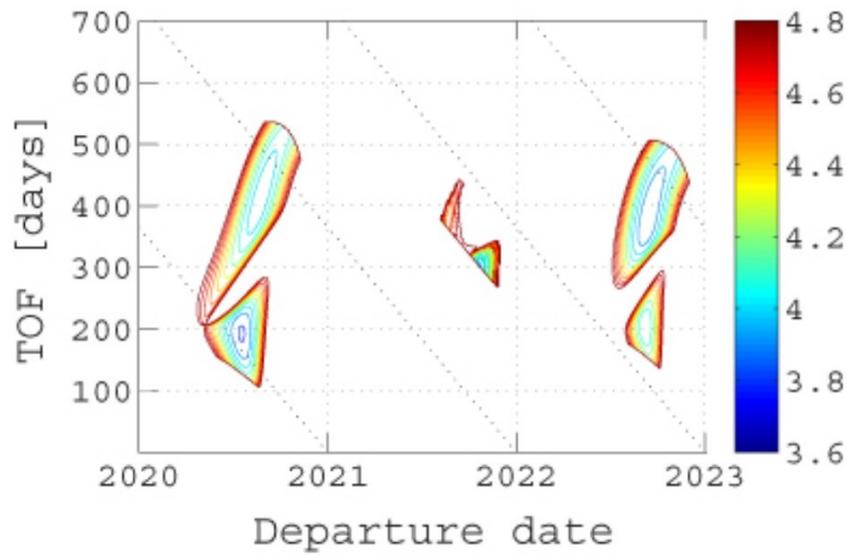


Figura 5.5: Ampliación de la figura 5.4 en la que se detalla el periodo que tomado como referencia [2].

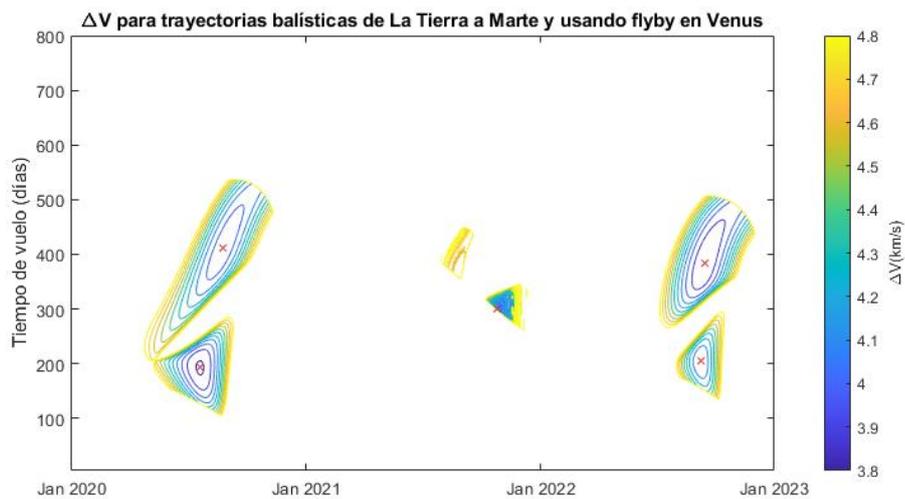


Figura 5.6: Delta-v total obtenido para trayectorias balísticas Tierra-Marte y con asistencia gravitatoria en Venus para el periodo 2020-2023

Fecha de salida	Fecha de flyby	Fecha de llegada	$\Delta V_{salida}$	$\Delta V_{PFM}$	$\Delta V_{llegada}$	$\Delta V_{total}$	$TOF_{total}$
17/07/20		27/01/21	3,788		2,863	3,788	194
24/08/20		10/10/21	3,931		3,810	3,934	412
01/11/21	27/03/22	28/08/22	3,784	0.089	5,797	3,873	300 (146 + 154)
07/09/22		30/03/23	4,013		3,641	4,013	204
15/09/22		04/10/23	3,814		3,072	3,814	384

Tabla 5.3: Óptimos para las trayectorias balísticas directas entre La Tierra y Marte y usando flyby en Venus para el periodo 2020-2023 obtenidos por [2]

Fecha de salida	Fecha de flyby	Fecha de llegada	$\Delta V_{salida}$	$\Delta V_{PFM}$	$\Delta V_{llegada}$	$\Delta V_{total}$	$TOF_{total}$
18/07/20		27/01/21	3,788		2,863	3,788	193
24/08/20		10/10/21	3,931		3,810	3,931	412
25/10/21	24/03/22	21/08/22	3,835	0.013	6,152	3,848	300 (150 + 150)
08/09/22		31/03/23	4,013		3,641	4,013	204
14/09/22		02/10/23	3,814		3,072	3,814	383

Tabla 5.4: Óptimos para las trayectorias balísticas directas entre La Tierra y Marte y usando flyby en Venus para el periodo 2020-2023 obtenidos mediante la herramienta desarrollada

En el caso de las trayectorias directas balísticas, las variaciones entre [2] y los resultados obtenidos en la herramienta radican en que el enfoque de Ishimatsu et al. considera que, en el caso de que dos trayectorias tengan una misma fecha de salida, se establecen como óptimas aquellas trayectorias con una fecha de llegada anterior, es decir, un menor tiempo de vuelo incluso si ello supone cierto incremento en el delta-v total. De esta forma, se busca reducir la exposición a la radiación solar y a la microgravedad. La herramienta desarrollada, sin embargo, busca la optimización del delta-v total sea cual sea el tiempo de vuelo. En el caso de la segunda ventana de lanzamiento para trayectorias directas para el periodo 2020-2023 puede observarse, además del tipo de discrepancia indicada, una trayectoria con el mismo tiempo de vuelo y delta-v total pero con una fecha de lanzamiento y de llegada desviada en un día con respecto a [2]. Esta pequeña variación puede deberse a factores tales como la variación de las efemérides, ya que el artículo de Ishimatsu et al. data del año 2011, así como a posibles variaciones en la metodología de cálculo empleada.

## 5.5. Ejemplo de trayectoria a Júpiter

Una vez validado el código se puede emplear el mismo para calcular trayectorias entre cualquier planeta del Sistema Solar. Por ejemplo, se van a calcular las ventanas de lanzamiento entre La Tierra y Júpiter para el periodo de febrero a mayo del año 1972, que fue el año de lanzamiento de la misión Pioneer 10. Se ha escogido este periodo porque dicha misión empleó

una trayectoria balística directa entre La Tierra y Júpiter, lo que permite ahorrar tiempo de cálculo al no ser necesaria ninguna maniobra de asistencia gravitatoria.

Dado que la sonda Pioneer 10 no fue capturada por la gravedad del planeta joviano si no que realizó una maniobra de flyby alrededor del mismo, hace falta conocer la velocidad relativa con respecto a Júpiter para establecer el límite de delta-v de llegada. Para ello se ha recurrido a la herramienta "HORIZONS" de la NASA [7], mediante la cual se ha podido calcular que el punto de mayor acercamiento a Júpiter se produjo el 4 de diciembre de 1973 con una velocidad relativa de la sonda respecto al planeta de aproximadamente 30 km/s. De una forma similar se ha podido cifrar la velocidad relativa con respecto a La Tierra en 9 km/s en los primeros instantes de la trayectoria de la sonda, que despegó el 3 de marzo de 1972.

Teniendo en cuenta los datos obtenidos, se calcularán aquellas trayectorias entre La Tierra y Júpiter con un delta-v máximo de 20 km/s para la salida y de 40 km/s para la llegada, así como un tiempo de vuelo máximo de 1000 días. Los resultados en términos del delta-v total y considerando aerocaptura en el destino se muestran en la figura 5.7.

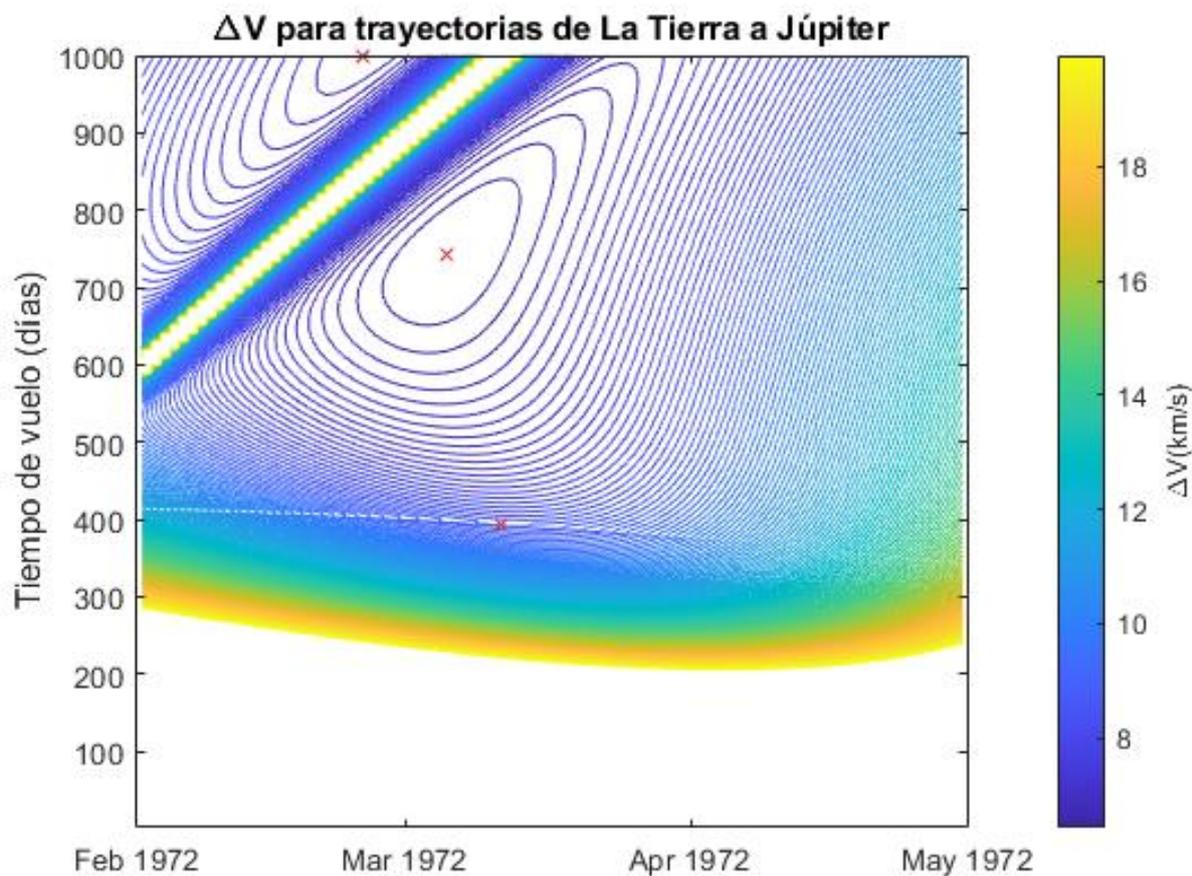


Figura 5.7: Delta-v total para trayectorias balísticas Tierra-Júpiter con salida entre febrero y mayo de 1972.

Comparando los datos calculados para la misión con las trayectorias óptimas obtenidas que se muestran en la tabla 5.5 se comprueba que la trayectoria seguida por la sonda no coincide

con los óptimos obtenidos, lo que hace sospechar que se sacrificó un valor óptimo de delta-v en pos de otros requerimientos de la misión como podrían ser una trayectoria concreta tras el sobrevuelo del planeta o una determinada configuración de las lunas jovianas que favoreciese su exploración. No obstante, la trayectoria finalmente seguida por la sonda se encuentra dentro de las trayectorias posibles calculadas por la herramienta desarrollada, aprovechando una configuración con bajo valor de delta-v total, aunque no se emplease el óptimo regional, como se muestra en la figura 5.8.

Fecha de salida	Fecha de llegada	Delta V total (km/s)	TOF (días)
25/02/1972	21/11/1974	6.835	1000
05/03/1972	16/09/1974	6.437	741
11/03/1972	07/04/1973	8.715	392

Tabla 5.5: Óptimos para las trayectorias balísticas directas entre La Tierra y Júpiter para los meses de febrero a mayo de 1972 obtenidos mediante la herramienta desarrollada.

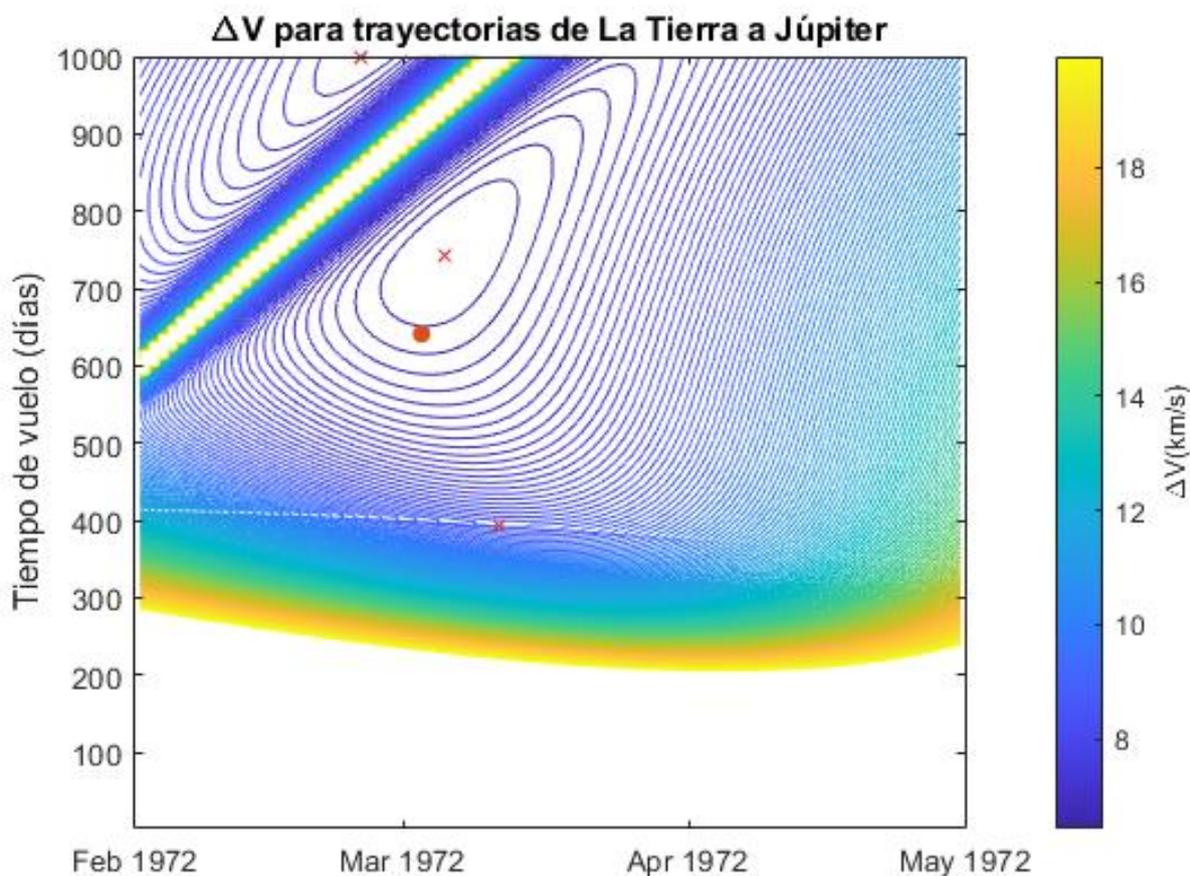


Figura 5.8: Trayectoria seguida por la Pioneer 10 superpuesta sobre el delta-v total calculado para trayectorias balísticas Tierra-Júpiter con salida entre febrero y mayo de 1972.

## 6. Análisis paramétrico de resultados

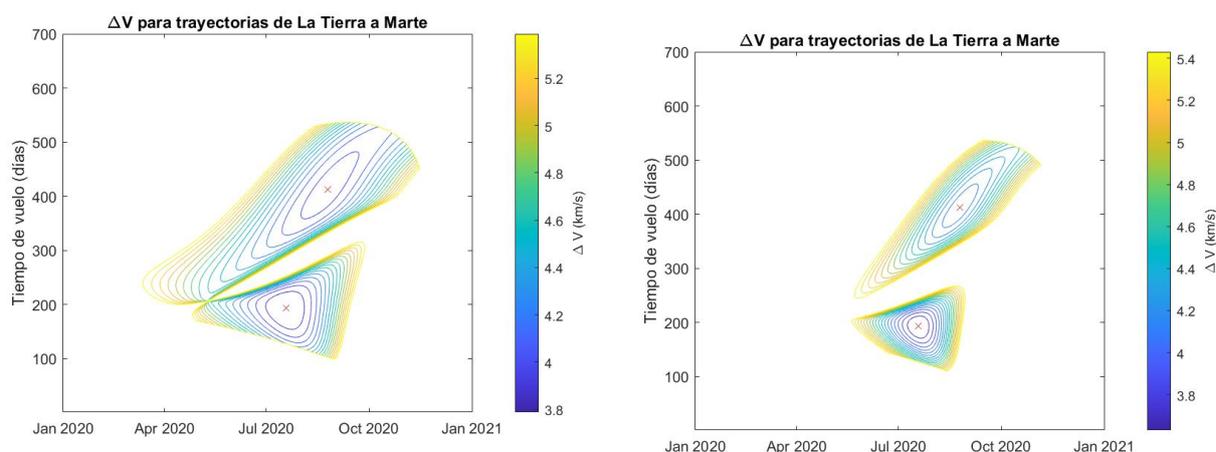
Usando como referencia el ejemplo presentado en la sección 5.1 se va a realizar un estudio paramétrico para analizar como varían los resultados obtenidos en función de las diferentes condiciones introducidas. Se analizarán las consecuencias de la variación de dichos parámetros sobre las trayectorias válidas obtenidas, las cuales determinarán la forma de la ventana de lanzamiento y, por tanto, los parámetros que caracterizan las trayectorias óptimas calculadas.

### 6.1. Estudio de trayectorias directas

En primer lugar se estudiará la ventana de lanzamiento para la trayectoria balística directa entre La Tierra y Marte comprendida entre el periodo 2020 y 2021.

#### 6.1.1. Radio de la órbita de estacionamiento

La variación del radio de la órbita de estacionamiento en el planeta de origen tendrá una influencia directa sobre el delta-v necesario para abandonar la esfera de influencia del planeta. Como se comprueba en la figura 6.1, la eliminación de la órbita de estacionamiento manteniendo fijos los límites de  $\Delta V$  de salida y de llegada, se traduce en una reducción de la ventana de lanzamiento. Esto se debe a que, para posiciones relativas entre los planetas de origen y destino en las que con una órbita de estacionamiento en el origen, el delta-v necesario para la inyección de la nave en la trayectoria deseada era válido, con la eliminación de la órbita de estacionamiento resulta necesario un mayor delta-v para abandonar el planeta de origen y por lo tanto el impulso requerido para dichas trayectorias supera el máximo establecido.



(a) Caso de referencia con una órbita de estacionamiento de 300 km de altitud.

(b) Caso sin órbita de estacionamiento.

Figura 6.1: Variación en los delta-v obtenidos para la trayectoria La Tierra - Marte debida a la eliminación de la órbita de estacionamiento en el origen.

Atendiendo a los mínimos obtenidos se puede observar que el valor máximo de delta-v para la ventana de lanzamiento no varía, debido a que se mantiene constante la restricción del máximo impulso para el lanzamiento. En el “valle” de la figura 6.1b que comprende aquellas trayectorias con un tiempo de vuelo en torno a los 400 días se constata el fenómeno descrito anteriormente según el cual la inserción en la trayectoria deseada requerirá menor energía y, por lo tanto, menor delta-v de salida que en el caso en el que el origen se considere en el centro del planeta. Sin embargo, en el óptimo hallado para un tiempo de vuelo de 193 días, se da el fenómeno contrario.

CASO BASE		
$\Delta V_{total}$ máx. (km/s)		5.4771
Fecha Salida	$\Delta V_{total}$ (km/s)	TOF (días)
18/07/20	3.7876	193
24/08/20	3.9309	412

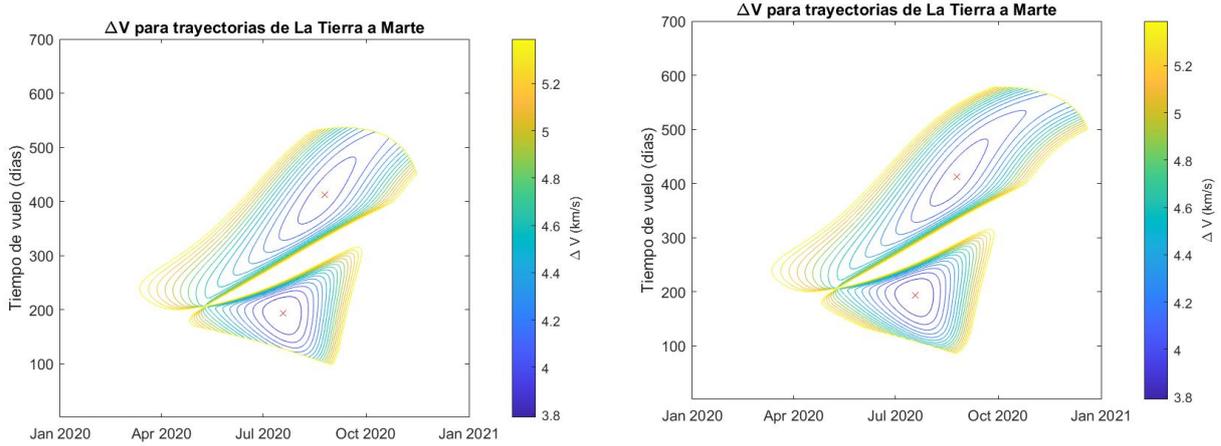
Tabla 6.1: Parámetros de las trayectorias óptimas obtenidos para el caso base.

$h_{orb.estac.} = 0$		
$\Delta V_{total}$ máx. (km/s)		5.4772
Fecha Salida	$\Delta V_{total}$ (km/s)	TOF (días)
18/07/20	3.6309	193
24/08/20	4.0622	412

Tabla 6.2: Parámetros de las trayectorias óptimas obtenidos para el caso sin órbita de estacionamiento.

### 6.1.2. Radio de la órbita de captura

Los resultados obtenidos con la variación de este parámetro pueden analizarse de forma paralela a la variación del parámetro anterior. Así, de forma análoga, la consideración de una órbita de captura de 300 km de altitud sobre la superficie del planeta de destino afectará directamente al delta-v de llegada de las trayectorias calculadas. Como se puede comprobar en la figura 6.2, al ser necesario un menor impulso para que se produzca la captura de la aeronave por el planeta de destino, la frontera marcada por el máximo delta-v de llegada se expande, ampliando la ventana de lanzamiento tanto en términos de fecha de salida como de tiempo de vuelo.



(a) Caso de referencia sin órbita de captura.

(b) Caso con una órbita de captura de 300 km de altitud sobre Marte.

Figura 6.2: Variación en los delta-v obtenidos para la trayectoria La Tierra - Marte debida a la adición de una órbita de captura en el destino.

A la hora de analizar los óptimos obtenidos, no resulta de utilidad hacerlo en base al  $\Delta V_{total}$  ya que al considerar aerocaptura este vendrá determinado únicamente por el impulso de salida del planeta de origen. Un análisis del delta-v de llegada, sin embargo, nos permite comprobar que para ambos óptimos obtenidos, el delta-v necesario para la captura por el planeta de destino se reduce, manteniéndose invariables el resto de parámetros de las trayectorias con respecto al caso base.

CASO BASE		
Fecha Salida	$\Delta V_{llegada}$ (km/s)	TOF (días)
18/07/20	2.8627	193
24/08/20	3.8101	412

Tabla 6.3: Parámetros de las trayectorias óptimas obtenidos para el caso base.

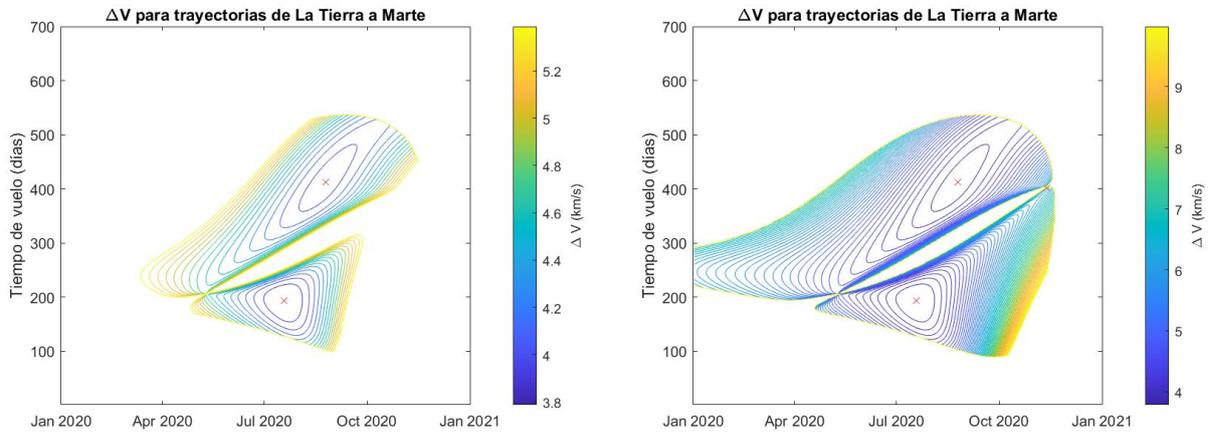
$h_{orb.cap.} = 300km$		
Fecha Salida	$\Delta V_{llegada}$ (km/s)	TOF (días)
18/07/20	2.1969	193
24/08/20	2.7353	412

Tabla 6.4: Parámetros de las trayectorias óptimas obtenidos para el caso  $h_{orb.cap.} = 300km$

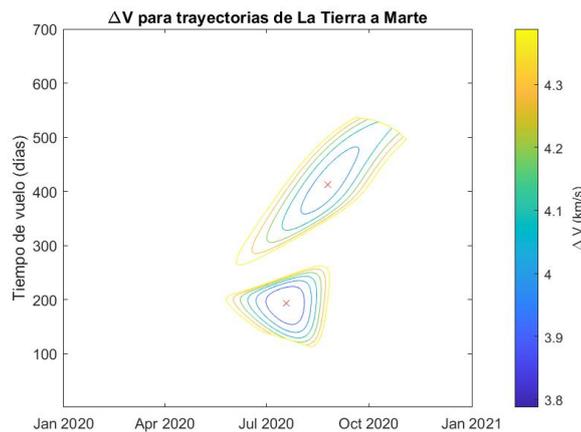
### 6.1.3. Máximo delta-v de salida

La variación del límite de delta-v de salida afectará de forma directa a la forma de la ventana de lanzamiento obtenida, debido a su relación directamente proporcional con el número de trayectorias validas que se obtendrán para el periodo seleccionado. Esta relación se observa

claramente en la figura 6.3 en la que se comprueba como al aumentar el límite de delta-v permitido para la inserción de la nave en la trayectoria deseada desde el planeta de salida, aumenta el número de posibles trayectorias para el mismo periodo. Paralelamente, si dicho límite de delta-v se vuelve más estricto, la extensión de la ventana de lanzamiento se reduce significativamente.



(a) Caso con un máximo  $\Delta V_{salida}$  de 5.477 km/s ( $C3_d = 30 \text{ km}^2/\text{s}^2$ ) (b) Caso con un máximo  $\Delta V_{salida}$  de 10 km/s ( $C3_d = 100 \text{ km}^2/\text{s}^2$ )



(c) Caso con un máximo  $\Delta V_{salida}$  de 4.472 km/s ( $C3_d = 20 \text{ km}^2/\text{s}^2$ )

Figura 6.3: Variación en los delta-v obtenidos para la trayectoria La Tierra - Marte al variar el límite del delta-v de salida.

Atendiendo a los datos obtenidos resulta evidente que el  $\Delta V_{total}$ , dependiente únicamente del delta-v de salida al estar considerando aerocaptura en el planeta de destino, aumentará y disminuirá acorde con la variación del máximo valor permitido para el delta-v de salida. Los valores óptimos obtenidos, al estar relacionados con los mínimos regionales de  $\Delta V_{total}$ , no variarán con respecto al caso base. No obstante, en el caso en el que se incrementa el límite de delta-v de salida (tabla 6.6), se obtiene un nuevo mínimo regional con un  $\Delta V_{total}$  elevado, 6.1586 km/s, pero con un tiempo de vuelo menor que en el caso de la trayectoria con fecha de salida en Agosto del mismo año.

CASO BASE		
$\Delta V_{total}$ máx. (km/s)		5.4771
Fecha Salida	$\Delta V_{total}$ (km/s)	TOF (días)
18/07/20	3.7876	193
24/08/20	3.9309	412

Tabla 6.5: Parámetros de las trayectorias óptimas obtenidos para el caso base con un máximo  $\Delta V_{salida}$  de 5.477 km/s ( $C3_d = 30km^2/s^2$ ).

Max. $\Delta V_{salida} = 10$ km/s		
$\Delta V_{total}$ máx. (km/s)		9.9983
Fecha Salida	$\Delta V_{total}$ (km/s)	TOF (días)
18/07/20	3.7876	193
24/08/20	3.9309	412
12/11/20	6.1586	402

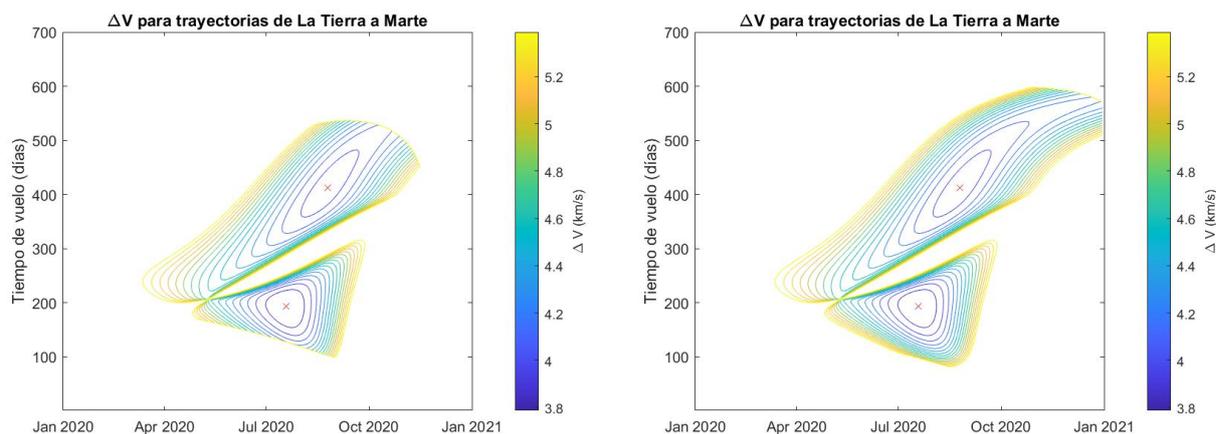
Tabla 6.6: Parámetros de las trayectorias óptimas obtenidos para el caso de máximo  $\Delta V_{salida}$  de 10 km/s ( $C3_d = 100km^2/s^2$ ).

Max. $\Delta V_{salida} = 4.472$ km/s		
$\Delta V_{total}$ máx. (km/s)		4.4721
Fecha Salida	$\Delta V_{total}$ (km/s)	TOF (días)
18/07/20	3.7876	193
24/08/20	3.9309	412

Tabla 6.7: Parámetros de las trayectorias óptimas obtenidos para el caso de máximo  $\Delta V_{salida}$  de 4.472 km/s ( $C3_d = 20km^2/s^2$ ).

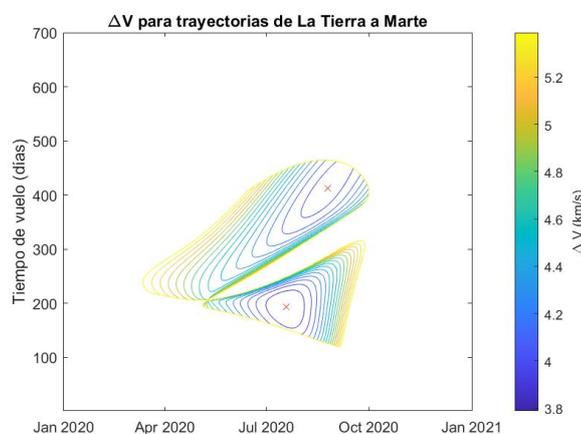
#### 6.1.4. Máximo delta-v de llegada

Al considerar aerocaptura en el planeta de destino, el  $\Delta V_{total}$  representado en la figura 6.4 únicamente dependerá del valor del delta-v de salida. Es por ello que la modificación del límite de delta-v de llegada se traducirá, como puede verse en la figura , en la variación de la “frontera” asociada a dicho parámetro sin que se produzca ninguna otra variación en la forma o en los valores de la ventana de lanzamiento. Al aumentar el máximo delta-v admitido, las posibles trayectorias que antes se encontraban limitadas pasan a estar disponibles. Por el contrario, al disminuir el valor de dicho límite, la ventana de lanzamiento se reduce.



(a) Caso con un máximo  $\Delta V_{llegada}$  de 6.325 km/s ( $C3_d = 40 \text{ km}^2/\text{s}^2$ )

(b) Caso con un máximo  $\Delta V_{llegada}$  de 10 km/s ( $C3_d = 100 \text{ km}^2/\text{s}^2$ )



(c) Caso con un máximo  $\Delta V_{llegada}$  de 4.472 km/s ( $C3_d = 20 \text{ km}^2/\text{s}^2$ )

Figura 6.4: Variación en los delta-v obtenidos para la trayectoria La Tierra - Marte al variar el límite del delta-v de llegada.

Como ya se ha comentado, al considerar aerocaptura en el planeta de destino, los valores de delta-v total que determinan la elección de las trayectorias óptimas no se ven afectados. No obstante, tampoco presentan variaciones en el delta-v de llegada ya que la distribución de las trayectorias no se ha modificado, únicamente se ha reducido el límite marcado por el delta-v de llegada. Es por ello que dichas trayectorias no van a presentar variaciones con respecto al caso base.

Fecha Salida	$\Delta V_{llegada}$ (km/s)	TOF (días)
18/07/20	2.8627	193
24/08/20	3.9309	412

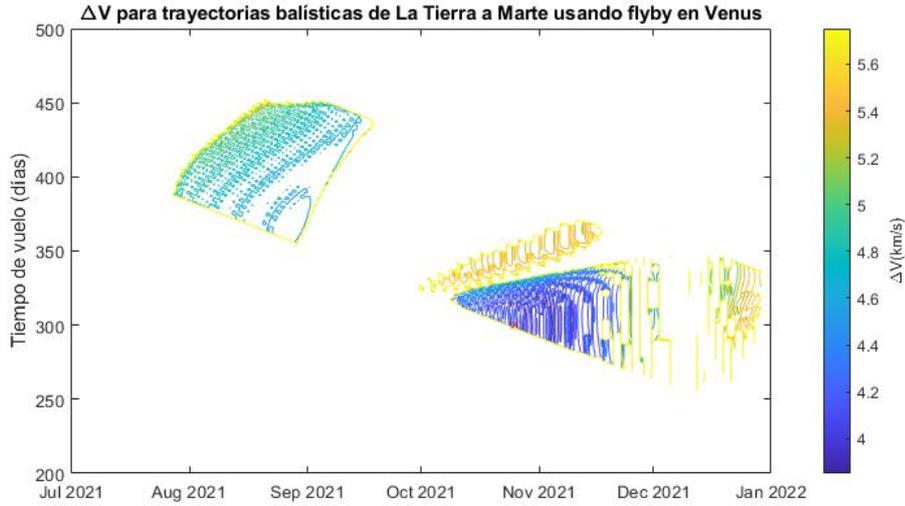
Tabla 6.8: Parámetros de las trayectorias óptimas obtenidos para los tres casos estudiados.

## 6.2. Estudio de trayectorias con flyby

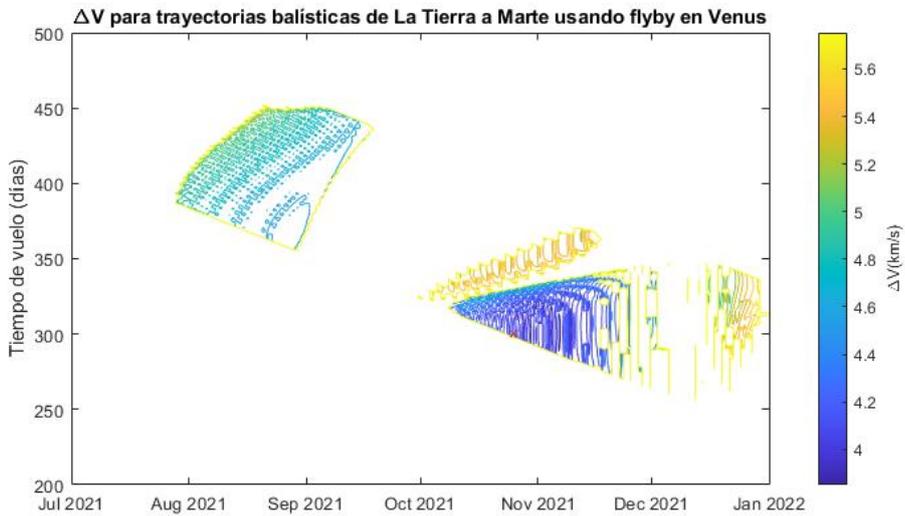
En el caso de las trayectorias que cuentan con una maniobra de asistencia gravitatoria, se usará la ventana de lanzamiento existente entre 2021 y 2022 para comparar la variación de los resultados en función de los cambios en los parámetros que determinan específicamente la maniobra de flyby.

### 6.2.1. Altitud mínima de flyby

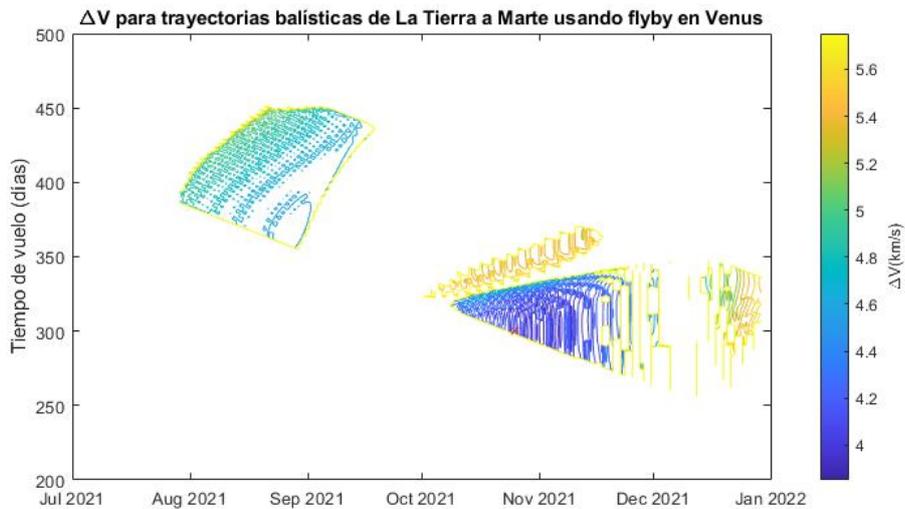
Se comprueba en las gráficas obtenidas que la reducción en la altitud mínima necesaria para efectuar la maniobra de asistencia en Venus no tiene un efecto apreciable en los resultados. Atendiendo a la lógica observada en las gráficas de las trayectorias directas, cabe asumir que una reducción en este radio incrementaría el número de posibles trayectorias y, por lo tanto, se ampliaría la ventana de lanzamiento. No obstante, otros límites como pueden ser los valores máximos de delta-v para el lanzamiento y sobre todo el de delta-v para la llegada, pueden resultar más limitantes y enmascarar el efecto que la variación del radio mínimo del periapsis tenga sobre los delta-v totales obtenidos.



(a) Caso con una altitud mínima del periapsis en Venus de 100 km.



(b) Caso de referencia con una altitud mínima del periapsis en Venus de 250 km.



(c) Caso de referencia con una altitud mínima del periapsis en Venus de 400 km.

Figura 6.5: Variación en los delta-v obtenidos para la trayectoria La Tierra - Venus - Marte debida a la variación del límite de menor altitud del periapsis permitida sobre Venus.

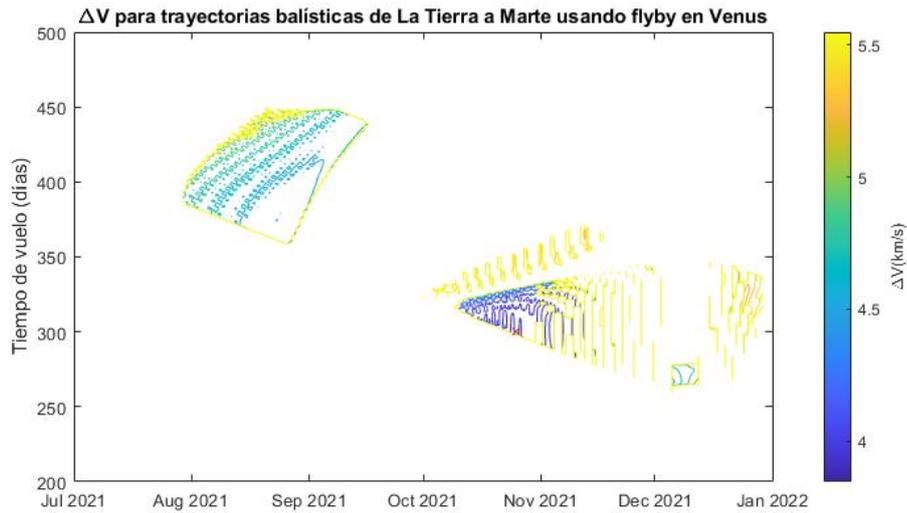
Atendiendo a los mínimos obtenidos para estas trayectorias, el obtenido en el caso de variar la altura mínima del periapsis resulta ser el mismo que en el caso de referencia, como era de esperar ya que no se han producido cambios notables en la configuración de la ventana de lanzamiento.

Fecha de salida	Fecha de flyby	Fecha de llegada	$\Delta V_{salida}$	$\Delta V_{PFM}$	$\Delta V_{llegada}$	$\Delta V_{total}$	$TOF_{total}$
25/10/21	24/03/22	21/08/22	3.835	0.013	6.152	3.848	300 (150 + 150)

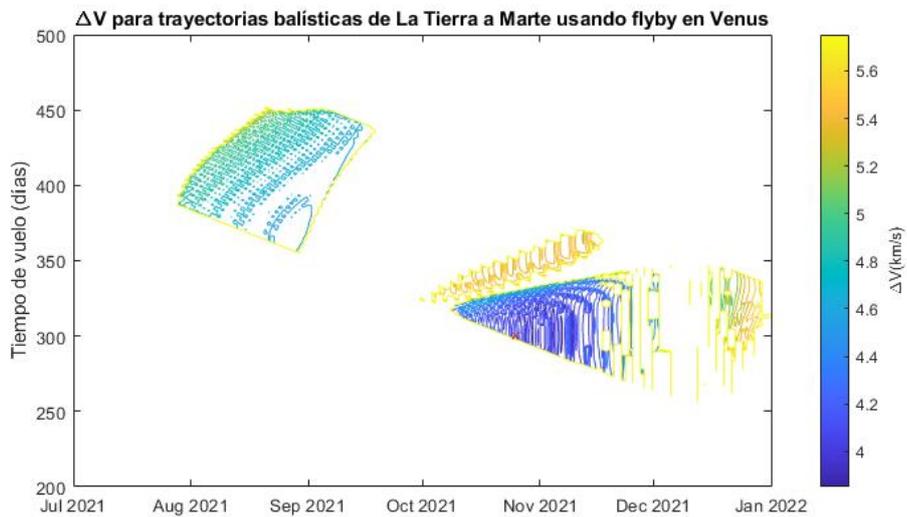
Tabla 6.9: Óptimos para las trayectorias entre La Tierra y Marte usando flyby en Venus para los tres casos estudiados

### 6.2.2. Máximo delta-v para el flyby

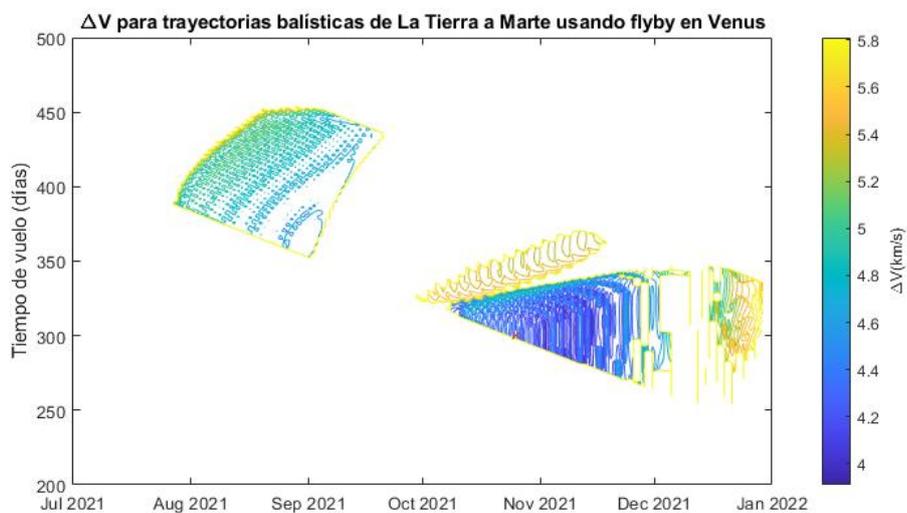
El incremento del máximo delta-v permitido para la maniobra de asistencia gravitatoria en Venus se traduce en un ligero incremento de la ventana de lanzamiento como se puede apreciar en la figura 6.6c debido al mayor número de trayectorias disponibles que harán uso de dichos valores de delta-v. La reducción del mismo, por otro lado, se observa en una reducción más clara de las trayectorias disponibles, como se aprecia en la figura 6.6a.



(a) Caso con un máximo delta-v para el flyby de 0.15 km/s.



(b) Caso de referencia con un máximo delta-v para el flyby de 0.30 km/s.



(c) Caso con un máximo delta-v para el flyby de 0.45 km/s.

Figura 6.6: Variación en los delta-v obtenidos para la trayectoria La Tierra - Venus - Marte debida a la variación del límite de máximo delta-v para el flyby en Venus.

Al igual que en el caso anterior, los mínimos para esta ventana de lanzamiento no se ven afectados por las modificaciones propuestas. No obstante, una ventana de lanzamiento diferente si que podría verse afectada por dichas variaciones en el caso de que éstas afectasen a la zona en la que se sitúa el mínimo calculado.

Fecha de salida	Fecha de flyby	Fecha de llegada	$\Delta V_{salida}$	$\Delta V_{PFM}$	$\Delta V_{llegada}$	$\Delta V_{total}$	$TOF_{total}$
25/10/21	24/03/22	21/08/22	3.835	0.013	6.152	3.848	300 (150 + 150)

Tabla 6.10: Óptimos para las trayectorias entre La Tierra y Marte usando flyby en Venus para los tres casos estudiados.

## 7. Conclusiones

En este capítulo se presentan las conclusiones obtenidas durante la realización de este trabajo.

- Se ha desarrollado una herramienta capaz de obtener el delta-v necesario para trayectorias balísticas interplanetarias así como trayectorias con asistencia gravitatoria en un planeta intermedio mediante la resolución del problema de Lambert.
- Los resultados de delta-v total obtenidos son mostrados en un gráfico de contornos de forma combinada para ambas modalidades de trayectoria.
- Las trayectorias óptimas en función del delta-v empleado son indicadas en dicho gráfico y exportadas en forma de tabla con todos sus parámetros característicos.
- El calendario de lanzamientos obtenido muestra la utilidad que puede tener una maniobra de asistencia gravitatoria en un planeta intermedio en la apertura de nuevas ventanas de lanzamiento entre el planeta de origen y de destino.
- Se ha diseñado una interfaz gráfica para la herramienta que facilita la interlocución con el usuario. La interfaz permite elegir de forma sencilla si se desea incluir trayectorias con asistencia gravitacional a los cálculos que se van a realizar y permite introducir los diferentes parámetros fácilmente a partir de despleables y campos de texto. Los resultados se muestran de forma intuitiva en una gráfica y en una tabla integradas en la estructura de la interfaz.
- Se ha presentado un análisis de los efectos que la variación de los distintos parámetros que se pueden introducir en la herramienta tiene sobre las ventanas de lanzamiento obtenidas y su interpretación gráfica en los gráficos *porkchop*.

## 8. Trabajo futuro

A continuación se enumeran una serie de mejoras y de adiciones orientadas a la mejora de la herramienta.

- Optimización del código elaborado con el objetivo de reducir el tiempo de cálculo. Para ello, podría emplearse una aproximación que considerase otros parámetros a los ya introducidos para limitar el número de problemas de Lambert que se resuelven para la obtención de las trayectorias.
- Introducción de métodos de optimización para la obtención de aquellas trayectorias con una configuración más interesante en términos de delta-v. Se sugiere la incorporación de un método basado en algoritmos genéticos o evolutivos.
- Herramienta de visualización de la trayectoria resultante. La incorporación de una interfaz que permita visualizar las trayectorias obtenidas facilitaría la comprensión de los datos obtenidos a la vez que aceleraría la detección de posibles problemas o inconvenientes en las trayectorias calculadas.
- Incorporación de maniobras de asistencia gravitatoria adicionales que permitan calcular trayectorias para misiones más complejas.
- Introducción de maniobras de asistencia gravitatoria resonantes en las que una misión visita el mismo planeta de forma consecutiva.
- Empleo de maniobras orbitales no impulsivas y de espacio profundo. La incorporación de maniobras no impulsivas dotaría a la herramienta de capacidad para considerar misiones que empleen sistemas propulsivos de bajo empuje tales como motores iónicos o velas solares. Las maniobras de espacio profundo, por otro lado, permitirían tener en cuenta correcciones en la trayectoria efectuadas en los puntos de la órbita con mayor rendimiento propulsivo.

## 9. Presupuesto

A continuación se expone el presupuesto proyectado para la elaboración de este trabajo. Los coeficientes de amortización indicados se han obtenido a partir de los coeficientes de amortización lineal propuestos por la Agencia Tributaria [8].

### 9.1. Costes de personal

El coste de personal engloba el trabajo realizado por aquellas personas involucradas en el proyecto. El desglose de dichos costes se muestra en las tablas 9.1 y 9.2.

Concepto	Horas	Coste/hora del ingeniero (€)	Subtotal (€)
Documentación e investigación	400		8000
Programación del código	350		7000
Diseño de la GUI	50	20	1000
Obtención de resultados	200		4000
Redacción	200		4000
Total			24000 €

Tabla 9.1: Costes del proyecto asociados al ingeniero graduado.

Concepto	Horas	Coste/hora del ingeniero (€)	Subtotal (€)
Tutorías	20		800
Revisión de código	20	40	800
Revisión de texto	20		800
Total			2400 €

Tabla 9.2: Costes del proyecto asociados al ingeniero doctorado.

### 9.2. Hardware

En este apartado se incluyen todos los equipos físicos empleados en la elaboración de este proyecto. Dado que solo van a utilizarse durante un periodo de tiempo determinado, se tendrá en cuenta su coste de amortización.

Producto	Coste (€)	Tiempo (meses)	Coficiente de amortización	Subtotal (€)
Ordenador Lenovo	265.59	3	0.25	16.60
Total				16.60 €

### 9.3. Software

En este apartado se incluyen todos los programas digitales empleados en la elaboración de este proyecto. Dado que solo van a utilizarse durante un periodo de tiempo determinado, se tendrá en cuenta su coste de amortización.

Producto	Coste (€)	Tiempo (meses)	Coefficiente de amortización	Subtotal (€)
MATLAB R2020a	800	3	0.25	50
TexStudio	0	3	0.25	0
Microsoft 365 Personal	69.00	3	0.25	4.31
Total				54.31 €

### 9.4. Presupuesto total

En este último apartado se añaden los impuestos a los costes de ejecución del proyecto.

Concepto	Importe (€)
Coste de mano de obra	26400
Coste hardware	16.60
Coste software	54.31
<b>Total ejecución material</b>	<b>26470.91</b>
Beneficio industrial (5 %)	1323.55
<b>Total con beneficio industrial</b>	<b>27794.46</b>
IVA (21 %)	5836.84
<b>Total presupuesto base de licitación</b>	<b>33631.30</b>

Asciende el presupuesto de ejecución material a la expresada cantidad en EUROS:

VEINTISÉIS MIL CUATROCIENTOS SETENTA CON NOVENTA Y UNO

Asciende el presupuesto con beneficio industrial a la expresada cantidad en EUROS:

VEINTISIETE MIL SETECIENTOS NOVENTA Y CUATRO CON CUARENTA Y SEIS

Asciende el presupuesto base de licitación a la expresada cantidad en EUROS:

TREINTA Y TRES MIL SEISCIENTOS TREINTA Y UNO CON TREINTA

# Bibliografía

- [1] H. D. Curtis. *Orbital Mechanics for Engineering Students*. Butterworth-Heinemann, 3 edition, 2014.
- [2] T. Ishimatsu; J. Hoffman; O. de Weck. Method for rapid interplanetary trajectory analysis by delta-v maps with flyby options. *Journal of the British Interplanetary Society*, 2011.
- [3] Online pork-chop plotting application. <http://sdg.aero.upm.es/index.php/online-apps/porkchop-plot>. Fecha: 19/08/2020.
- [4] Mars 2020 mission, perseverance rover launch. <https://mars.nasa.gov/mars2020/timeline/launch/>. Fecha: 24/08/2020.
- [5] S. Wagner; B. Wie. Hybrid algorithm for multiple gravity-assist and impulsive delta-v maneuvers. *Journal of guidance, control and dynamics*, 38(11), 11 2015.
- [6] S. Matousek; A. Sergeevsky. To mars and back: 2002-2020 ballistic trajectory data for the mission architect. *AIAA 98-4396, AIAA/AAS Astrodynamics Specialist Conference and Exhibit*, 1998.
- [7] Horizons web-interface. <https://ssd.jpl.nasa.gov/horizons.cgi>. Fecha: 31/08/2020.
- [8] Tabla de coeficientes de amortización lineal. [https://www.agenciatributaria.es/AEAT.internet/Inicio/\\_Segmentos\\_/Empresas\\_y\\_profesionales/Empresas/Impuesto\\_sobre\\_Sociedades/Periodos\\_impositivos\\_a\\_partir\\_de\\_1\\_1\\_2015/Base\\_imponible/Amortizacion/Tabla\\_de\\_coeficientes\\_de\\_amortizacion\\_lineal.shtml](https://www.agenciatributaria.es/AEAT.internet/Inicio/_Segmentos_/Empresas_y_profesionales/Empresas/Impuesto_sobre_Sociedades/Periodos_impositivos_a_partir_de_1_1_2015/Base_imponible/Amortizacion/Tabla_de_coeficientes_de_amortizacion_lineal.shtml). Fecha: 01/09/2020.
- [9] S. Kemble. *Interplanetary Mission Analysis and Design*. Springer-Praxis, 2006.
- [10] A.J. Hahn. *Basic Calculus of Planetary Orbits and Interplanetary Flight: The Missions of the Voyagers, Cassini and Juno*. Springer, 2020.
- [11] U. Walter. *Astronautics: The Physics of Space Flight*. Springer, 3 edition, 2018.
- [12] R. Biesbroek. *Lunar and Interplanetary Trajectories*. Springer-Praxis, 2016.

# ANEXOS

# A. Código

En este anexo se hará una breve descripción de algunos fragmentos del código empleado para obtener los resultados presentados en el trabajo.

En primer lugar se presentan las funciones utilizadas de forma común por el programa de cálculo de las trayectorias directas y de las trayectorias con flyby. La función interplanetario (Código A.1) se basa en un código propuesto en [1] y se encarga de obtener los elementos orbitales y los vectores de estado de los planetas de origen y de destino empleando una subfunción llamada “planetas\_elementos\_vec\_est”. Dichos parámetros son introducidos en otra subfunción “lambert” que, como su nombre indica, se encarga de resolver el problema de Lambert siguiendo el procedimiento descrito en [1]. Una vez obtenidas las velocidades de la nave en el origen y en el destino, se generan dos vectores que contendrán los vectores de posición, los de velocidad y los elementos orbitales de los planetas así como un tercero llamado “trayectoria” que almacenará las velocidades de la nave en ambos instantes.

```
1 function [planeta1, planeta2, trayectoria] = ...
   interplanetario(origen, destino)
3
4 % Algoritmo 8.2, trayecto de la esfera de influencia del planeta 1
5 % a la esfera de influencia del planeta 2
6
7 id_planeta = origen(1);
8 anyo       = origen(2);
9 mes        = origen(3);
10 dia        = origen(4);
11 hora       = origen(5);
12 minuto     = origen(6);
13 segundo    = origen(7);
14
15 % Obtención del vector de estado del planeta 1
16 [~, Rp1, Vp1, jd1] = planetas_elementos_vec_est ...
17   (id_planeta, anyo, mes, dia, hora, minuto, segundo);
18
19 id_planeta = destino(1);
20 anyo       = destino(2);
21 mes        = destino(3);
22 dia        = destino(4);
23 hora       = destino(5);
24 minuto     = destino(6);
25 segundo    = destino(7);
26
27 % Obtención del vector de estado del planeta 2
28 [~, Rp2, Vp2, jd2] = planetas_elementos_vec_est ...
29   (id_planeta, anyo, mes, dia, hora, minuto, segundo);
30
31 tof = (jd2 - jd1)*24*3600;
32
33 % Se asume "patched conics"
34 R1 = Rp1;
35 R2 = Rp2;
36
37 % Asumiendo una trayectoria prógrada, se obtiene la velocidad de la nave
```

```

39 %en el origen y el destino.
[V1, V2] = lambert(R1, R2, tof, 'pro');

41 planeta1 = [Rp1, Vp1, jd1];
planeta2 = [Rp2, Vp2, jd2];
43 trayectoria = [V1, V2];

45 end

```

### Código A.1: Función “interplanetario”

La función “dv\_v\_fecha\_tof” (Código A.2) es la que llama a la función “interplanetario” y su objetivo es la obtención del delta-v en la salida y la llegada dado un tiempo de vuelo determinado así como una fecha concreta. El código establece un vector “origen” con la fecha de salida desde el planeta de origen indicada y calcula el vector “destino” que contiene la fecha de llegada al planeta de destino a partir del tiempo de vuelo. Acto seguido llama a la función “interplanetario” para obtener la información de la trayectoria conseguida al resolver el problema de Lambert. Se almacenan los vectores de velocidad de ambos planetas así como los de la nave en el origen y en el destino. Finalmente se procede al cálculo de los delta-v de salida y de llegada. Se puede tener en cuenta la influencia de una órbita de estacionamiento en el planeta de origen así como una órbita de captura en el de destino.

```

1 function [dvd, dva, V1, V2, Vp1, Vp2] = ...
    dv_v_fecha_tof(p1, p2, hpo, hco, rpo, rco, mupo, mupd, tof, y, m, d, h, min, s)
3 % Obtención rápida de las delta v para la salida y la llegada para un
% tiempo de vuelo determinado y una fecha concreta calculando la
5 % trayectoria directa empleando el método de lambert.

7 %%Cálculo de la trayectoria
origen = [p1, y, m, d, h, min, s];
9
destino = [p2, y, m, d+tof, h, min, s];
11
[planeta1, planeta2, trayectoria] = interplanetario(origen, destino);
13
Vp1 = planeta1(1,4:6);
15 Vp2 = planeta2(1,4:6);

17 V1 = trayectoria(1,1:3);
V2 = trayectoria(1,4:6);
19
%% Calculo de deltaV
21
vc = sqrt(mupo/rpo); %%Cálculo de la velocidad circular.
23
dvd1 = norm(V1 - Vp1);
25
% Si se proporciona una altitud de la órbita de estacionamiento, se
27 % incluye el efecto de la misma sobre el delta-v.
if hpo == 0
29     dvd = dvd1;
else
31     dvd = vc*(sqrt(2+(dvd1/vc)^2)-1);
    % Se considera órbita circular
33 end

```

```

35 dva1 = norm(V2 - Vp2);
37
38 % Si se proporciona una altitud de la órbita de captura, se
39 % incluye el efecto de la misma sobre el delta-v.
40 if hco == 0
41     dva = dva1;
42 else
43     dva = sqrt(dva1^2+2*mupd/rco)-sqrt((mupd)/rco);
44     % Se considera órbita circular
45 end
46
47 end

```

Código A.2: Función “dv\_v\_fecha\_tof”

La función “calculo\_flyby” emplea el procedimiento descrito en [5] para la obtención del delta-v requerido en la maniobra de asistencia gravitatoria.

```

,,
1 function [dvPFM, rper] = ...
2     calculo_flyby(Va12, Vd23, Vp2, muP)
3
4 %% Hipérbola de flyby
5
6 V_inf1_vec = Va12 - Vp2;
7 V_inf2_vec = Vd23 - Vp2;
8
9 V_inf1     = norm(V_inf1_vec);
10 V_inf2    = norm(V_inf2_vec);
11
12 a1        = -muP/V_inf1^2;
13 a2        = -muP/V_inf2^2;
14
15 delta     = acos(dot(V_inf1_vec, V_inf2_vec) / ...
16                 (abs(V_inf1)*abs(V_inf2)));
17
18 % Se usa Newton-Rhapon para calcular e2
19 syms x;
20 ar = a2/a1;
21 f=(ar*(x-1)+1)*sin(delta-asin(1/x))-1;
22 g=(ar*x-ar+1)*...
23     cos(delta-asin(1/x))/(x^2*sqrt(1-1/x^2))+...
24     ar*sin(delta-asin(1/x));
25 n=1;
26 epsilon = 5*10^-(n+1);
27 x0 = 1.1;
28 err = 100;
29 while err > epsilon
30     f0     = vpa(subs(f, x, x0));
31     f0_der = vpa(subs(g, x, x0));
32     y     = x0-f0/f0_der;
33     err   = abs(y-x0);
34     x0   = y;
35 end

```

```

37 e2          = double(real(y));
39 e1          = ar*(e2-1)+1;
41 rper       = a1*(1-e1);
43 V_per_in   = sqrt(V_inf1^2+2*muP/rper);
V_per_out    = sqrt(V_inf2^2+2*muP/rper);
45
47 dvPFM      = V_per_out - V_per_in;
49 end

```

Código A.3: Función que calcula la maniobra de flyby.

## A.1. Trayectorias directas

A continuación se comentará el código empleado para el cálculo de las trayectorias balísticas directas entre el planeta de origen y de destino.

En primer lugar se introducen los parámetros del problema a calcular. Las funciones “mu\_planetas” y “radio\_planetas” obtienen el valor del parámetro gravitacional y el radio de cada planeta a partir de su posición en el Sistema Solar siendo el 1 Mercurio y el 8 Neptuno.

```

1 %% Inputs
3 p1 = 3; % Planeta de origen
p2 = 4; % Planeta de destino
5
hpo = 300; % Altitud en km de la órbita de estacionamiento en origen
7 hco = 0; % Altitud en km de la órbita de captura en destino
9
% Fecha de inicio de búsqueda
11 anyo    = 2020;
mes      = 1;
dia      = 1;
13 hora   = 12;
minuto   = 0;
15 segundo = 0;
17
% Restricciones de la trayectoria
18 periodo = 365;
19 max_tof = 700;
21
max_dvd = sqrt(30);
max_dva = sqrt(20);
23
%% Constantes
25
27 global mu
mu = 1.327124e11; % (km^3/s^2)

```

```

29 mu1 = mu_planetas(p1);
mu2 = mu_planetas(p2);
31
% Radio en km de la órbita de estacionamiento en origen
33 rpo = hpo + radio_planetas(p1);
% Radio en km de la órbita de captura en destino
35 rco = hco + radio_planetas(p2);

```

Código A.4: Sección de introducción de parámetros.

La siguiente sección del código llama a la función “dv\_v\_fecha\_tof” (Código A.2) dentro de un doble bucle “for” que recorre todos los tiempos de vuelo comprendidos entre 1 día y el máximo establecido por el usuario para cada una de las fechas a partir de la fecha de inicio de búsqueda elegida y hasta el número de días seleccionado. Los resultados se almacenan en una “struct” de *MATLAB*.

```

1 %% Cálculo
indice = 1;
3 h = waitbar(0, 'Calculando ... ');
5 for i = 1:periodo
    for j = 1:max_tof
7
        [dvd, dva] = dv_v_fecha_tof(p1, p2, hpo, hco, rpo, rco, mu1, mu2, ...
9            j, anyo, mes, dia+i-1, 12, 0, 0);
11
        dvtot = dvd + dva;
13
        fecha1 = datetime(anyo, mes, dia+i-1, 12, 0, 0);
        fecha2 = fecha1 + j;
15
        dir_final(indice).FechaSalida = fecha1;
17        dir_final(indice).dvd = dvd;
        dir_final(indice).tof = j;
19        dir_final(indice).dva = dva;
        dir_final(indice).FechaLlegada = fecha2;
21        dir_final(indice).dvtot = dvd;
        % En este caso dvtot no tiene en cuenta dva porque estoy
23        % considerando aerocaptura.
        % Esto lo cambiaré cuando haya terminado de comparar con el
25        % artículo.
27
        indice = indice + 1;
29
        waitbar(indice/(periodo*max_tof));
31
    end
end
33
close(h);

```

Código A.5: Sección de cálculo de las trayectorias.

Los datos obtenidos se ordenan en matrices que permiten su visualización mediante gráficos de contornos:

```

%%Se crea la matriz de dv
2
fecha_buff(1) = 0;
4 k = 0;

6 indice = 1;
h = waitbar(0, 'Creando matrices de datos... ');
8
for i = 1:length(dir_final)
10
    if datenum(dir_final(i).FechaSalida) ~= fecha_buff(end)
12        k = k + 1;
        fecha_buff(k) = datenum(dir_final(i).FechaSalida);
14    end

16    j = dir_final(i).tof;

18    matriz_dvd(k,j) = dir_final(i).dvd;
    matriz_dva(k,j) = dir_final(i).dva;

20    if dir_final(i).dva > max_dva || dir_final(i).dvd > max_dvd
22        matriz_dvtot(k,j) = Inf;
    else
24        matriz_dvtot(k,j) = dir_final(i).dvtot;
    end

26    indice = indice + 1;

28    waitbar(indice/(length(dir_final)));

30 end
32
matriz_fechas = repmat(fecha_buff',1,max_tof);
34 matriz_tof = repmat([1:max_tof],length(fecha_buff),1);

36 close(h);

```

Código A.6: Sección de creación de las matrices de datos.

A continuación se emplea la matriz que contiene el delta-v total calculado para obtener los mínimos regionales de dicho parámetro haciendo uso de la función “imregmin” integrada en *MATLAB*. Las trayectorias óptimas obtenidas se ordenan en función de la fecha de salida desde el planeta de origen y se almacenan en un vector. A su vez, se obtienen los índices de dichas trayectorias en el struct generado en el Código A.5.

```

%%Cálculo de los mínimos locales de Delta V
2
regmin = imregionalmin(matriz_dvtot,18);
4 regmin_ind = find(regmin);

6
mins = [matriz_dvtot(regmin_ind),matriz_fechas(regmin_ind),...
8     matriz_tof(regmin_ind),matriz_dvd(regmin_ind),matriz_dva(regmin_ind)];

10 [~,ind_ord] = sort(mins(:,2));

12 mins_ord = [mins(ind_ord,1),mins(ind_ord,2),...

```

```

14     mins(ind_ord ,3) ,mins(ind_ord ,4) ,mins(ind_ord ,5) ]];
16 for i = 1:size(mins_ord ,1)
18     if mins_ord(i,1) <= max_dvd && mins_ord(i,4) <= max_dva
20         mins_sel(indMin ,:) = mins_ord(i ,:);
22         indMin = indMin + 1;
24     end
26 end
28 ind_min = [];
30 for i = 1:size(mins_sel ,1)
32     [~,ind_buff] = find(datenum([ dir_final.FechaSalida]) == mins_sel(i,2) &...
34                         [ dir_final.tof] == mins_sel(i,3));
36 ind_min = [ind_min , ind_buff];
38 end

```

Código A.7: Sección de obtención de trayectorias óptimas.

Finalmente se genera el gráfico *porkchop*, se genera una tabla con los óptimos calculados y se guardan los datos obtenidos:

```

1 %% "Porkchop plot"
3 col_1 = [0.8 ,0.2 ,0.2];
5 dir_plot_fecha = matriz_fechas;
6 dir_plot_tof = matriz_tof;
7 dir_plot_dv = matriz_dvtot;
9 data = dir_plot_dv (:);
11 min_dv = min(data);
12 max_dv = max(data(~isinf(data)));
13 niveles_dv = [min_dv:0.1:max_dv];
15 figure
17 [c1 ,h1] = contour(dir_plot_fecha ,dir_plot_tof ,dir_plot_dv ,...
19     niveles_dv , 'linewidth' ,0.5);
21 colormap('parula')
23 hold on
25 scatter(datenum([ dir_final(ind_min).FechaSalida]) ,...
27     [ dir_final(ind_min).tof] ,...
29     'filled' , 'x' , 'MarkerEdgeColor' , col_1)
31 dateFormat = 'dd mmm yyyy';
32 datetick('x' ,dateFormat);
34 % Etiquetas del contorno
35 % clabel(c1 ,h1 , 'Color' , col_1)
36 colorbar
38

```

```

box on
35
p1str = nombre_planetas(p1);
37 p2str = nombre_planetas(p2);

39 ylabel('Tiempo de vuelo (días)')
title(['\DeltaV para trayectorias de ',p1str, ' a ', p2str...
41 ],'FontSize',11)
% legend({'$v_{\infty}$','$\rm C}_3$', 'TOF'},...
43 % 'Location','northeastoutside','fontsize',16)

45 %% Guardado de datos

47 emptyCol = cell(size(ind_min,2),1);

49 FechaSalida = [ dir_final(ind_min).FechaSalida ]';
DVd          = [ dir_final(ind_min).dvd ]';
51 TOF1        = emptyCol;
FechaFlyby   = emptyCol;
53 DVpfm       = emptyCol;
Rper         = emptyCol;
55 TOF2        = emptyCol;
DVa          = [ dir_final(ind_min).dva ]';
57 FechaLlegada= [ dir_final(ind_min).FechaLlegada ]';
DVtot        = [ dir_final(ind_min).dvtot ]';
59 TOFtot      = [ dir_final(ind_min).tof ]';

61 dir_res = table(FechaSalida, DVd, TOF1, FechaFlyby, DVpfm, Rper, TOF2,...
    DVa, FechaLlegada, DVtot, TOFtot);
63
65 fechafin = datetime(anyo,mes,dia) + periodo;
67
69 % filename = sprintf('Datos_Directa_%-%-%-d_%-%-%-d',...
    % dia,mes,anyo,day(fechafin),month(fechafin),year(fechafin));
filename = 'Tierra-Marte-2020-2021_men_dva';
71
73 save(filename, 'dir_res', 'dir_final',...
    'dir_plot_fecha', 'dir_plot_tof', 'dir_plot_dv');
75
writetable(dir_res, [filename, '.xlsx'])

```

Código A.8: Sección de presentación de resultados y guardado de datos.

## A.2. Trayectorias con flyby

En esta sección se comenta el código empleado para la obtención de las trayectorias con maniobra de asistencia gravitatoria. En primer lugar se introducen los parámetros que determinan el cálculo a realizar. En este caso, el máximo tiempo de vuelo determinado por “max\_tof” está referido al tiempo de vuelo máximo para cada una de las dos trayectorias que componen la trayectoria final.

```

1 %% Inputs
3 p1 = 3; % Planeta de origen
  p2 = 2; % Planeta de flyby
5 p3 = 4; % Planeta de destino
7 hpo = 300; % Altitud en km de la órbita de estacionamiento en origen
  hm = 250; % Altitud mínima en km de la órbita de flyby
9 hco = 0; % Altitud en km de la órbita de captura en destino
11 % Fecha de inicio de búsqueda
  anyo = 2021;
13 mes = 10;
  dia = 24;
15 hora = 12;
  minuto = 0;
17 segundo = 0;
19 % Restricciones de la trayectoria
  periodo = 1;
21 max_tof = 400;
23 max_dvd = sqrt(30);
  max_dva = sqrt(40);
25 max_dvPFM = 0.3;
27 %% Constantes
29 global mu
  mu = 1.327124e11; % (km^3/s^2)
31
  mu1 = mu_planetas(p1);
33 mu2 = mu_planetas(p2);
  mu3 = mu_planetas(p3);
35
  % Radio en km de la órbita de estacionamiento en origen
37 rpo = hpo + radio_planetas(p1);
  % Radio en km de la órbita de flyby
39 rfo = hm + radio_planetas(p2);
  % Radio en km de la órbita de captura en destino
41 rco = hco + radio_planetas(p3);

```

Código A.9: Sección de introducción de parámetros.

Una vez introducidos los parámetros se pueden calcular las trayectorias directas entre el planeta de origen y el planeta de flyby así como entre el planeta de flyby y el planeta de destino. Este procedimiento es similar al empleado para las trayectorias directas entre el planeta de origen y de destino. Una vez obtenidas dichas trayectorias, se eliminan aquellas trayectorias cuyo delta-v de salida o de llegada esté por encima de los límites establecidos y se seleccionan aquellas que son coincidentes. Se consideran coincidentes aquellas trayectorias desde el planeta de origen cuyas fechas de llegada al planeta de flyby coincide con la fecha de salida de otra trayectoria desde el planeta de flyby al de destino.

```

1 %% Cálculo de trayectorias directas
3 indice = 1;
  h = waitbar(0, 'Calculando trayectorias directas...');

```

```

5 for i_fechasalida = 1:periodo+max_tof
7   for i_tof = 1:max_tof
9     if i_fechasalida <= periodo
11        [dvd1, dva2, Vd1, Va2, Vp1, Vp2a] = dv_v_fecha_tof...
            (p1,p2,hpo,0,rpo,rco,mu1,mu2,i_tof,...
13            anyo,mes,dia+i_fechasalida -1,...
            12,0,0);
15        [dvd2, dva3, Vd2, Va3, Vp2b, Vp3] = dv_v_fecha_tof...
            (p2,p3,0,hco,rpo,rco,mu2,mu3,i_tof,...
17            anyo,mes,dia+i_fechasalida -1,...
            12,0,0);
19
21        tray.a(indice).fechasalida = ...
            datetime(anyo,mes,dia+i_fechasalida -1,12,0,0);
23        tray.a(indice).fechallegada= ...
            datetime(anyo,mes,dia+i_fechasalida -1+i_tof,12,0,0);
25        tray.a(indice).tof           = i_tof;
27        tray.a(indice).dvd           = dvd1;
29        tray.a(indice).dva           = dva2;
31        tray.a(indice).Vd            = Vd1;
33        tray.a(indice).Va            = Va2;
35        tray.a(indice).Vp1           = Vp1;
37        tray.a(indice).Vp2           = Vp2a;
39
41    else
43        [dvd2, dva3, Vd2, Va3, Vp2b, Vp3] = dv_v_fecha_tof...
            (p2,p3,0,hco,rpo,rco,mu2,mu3,i_tof,...
45            anyo,mes,dia+i_fechasalida -1,...
            12,0,0);
47
49    end
51
53    tray.b(indice).fechasalida = ...
        datetime(anyo,mes,dia+i_fechasalida -1,12,0,0);
55    tray.b(indice).tof           = i_tof;
57    tray.b(indice).dvd           = dvd2;
59    tray.b(indice).dva           = dva3;
61    tray.b(indice).Vd            = Vd2;
        tray.b(indice).Va            = Va3;
        tray.b(indice).Vp1           = Vp2b;
        tray.b(indice).Vp2           = Vp3;

        indice = indice + 1;
        waitbar(indice/((periodo+max_tof)*max_tof));

        end
    end
    close(h);

    %%Cálculo de trayectorias coincidentes

    indice = 1;

```

```

63 h = waitbar(0, 'Calculando trayectorias coincidentes...');
65 %En primer lugar se criban las trayectorias obtenidas en base a los
66 %límites de dva y dvd.
67
68 i_purga1_b = find([tray.b.dva] < max_dva);
69
70 i_purga2_a = find([tray.a.dvd] < max_dvd);
71
72 criba.traya = tray.a(i_purga2_a); % Trayectorias A que cumplen < max dvd
73 criba.trayb = tray.b(i_purga1_b); % Trayectorias B que cumplen < max dva
74
75 % Obtención de trayectorias directas coincidentes entre 1-2 y 2-3
76
77 i_coin = [];
78
79 for i = 1:length(criba.trayb)
80     i_coin_temp = find([criba.traya.fechallegada] ...
81         == criba.trayb(i).fechasalida);
82
83     i_coin(i).a = i_coin_temp;
84     i_coin(i).b = i;
85
86     indice = indice + 1;
87     waitbar(indice/length(criba.trayb));
88 end
89 close(h)

```

Código A.10: Sección de cálculo de las trayectorias directas.

Se puede efectuar ahora el cálculo de las maniobras de flyby para cada una de las combinaciones posibles obtenidas. Para ello, se emplea la función “calculo\_flyby” (Código ??).

```

1 %Se procede al cálculo de la maniobra de flyby
2
3 i_flyby=1;
4 indice = 1;
5 h = waitbar(0, 'Calculando flyby...');
6
7 for i = 1:length(i_coin)
8     for j = 1:length(i_coin(i).a)
9
10        Va12 = criba.traya(i_coin(i).a(j)).Va;
11        dvd = criba.traya(i_coin(i).a(j)).dvd;
12
13        dva = criba.trayb(i_coin(i).b).dva;
14        Vd23 = criba.trayb(i_coin(i).b).Vd;
15        Vp2 = criba.trayb(i_coin(i).b).Vp1;
16
17        fecha1 = criba.traya(i_coin(i).a(j)).fechasalida;
18        fecha2 = criba.trayb(i_coin(i).b).fechasalida;
19        fecha3 = fecha2 + criba.trayb(i_coin(i).b).tof;
20
21        tof1 = criba.traya(i_coin(i).a(j)).tof;
22        tof2 = criba.trayb(i_coin(i).b).tof;
23
24        [dvPFM, rper] = calculo_flyby(Va12, Vd23, Vp2, mu2);
25

```

```

27     if abs(dvPFM) > max_dvPFM || rper < rfo
        continue
29     else
        fly_final(i_flyby).FechaSalida = fecha1;
31         fly_final(i_flyby).dvd = dvd;
        fly_final(i_flyby).tof1 = tof1;
33         fly_final(i_flyby).FechaFlyby = fecha2;
        fly_final(i_flyby).dvPFM = dvPFM;
35         fly_final(i_flyby).rper = rper;
        fly_final(i_flyby).tof2 = tof2;
37         fly_final(i_flyby).dva = dva;
        fly_final(i_flyby).FechaLlegada = fecha3;
39         fly_final(i_flyby).dvtot = abs(dvd) + abs(dvPFM);
        fly_final(i_flyby).toftot = tof1 + tof2;
41         %En este caso dvtot no tiene en cuenta dva porque estoy
        %considerando aerocaptura.
43         %Esto lo cambiaré cuando haya terminado de comparar con el
        %artículo.
45
        i_flyby = i_flyby + 1;
47
    end
49     indice = indice + 1;
51     waitbar(indice/length(i_coin));
end
53 close(h)

```

Código A.11: Sección de cálculo de la maniobra de flyby.

Una vez obtenidos todos los datos necesarios se procede a la preparación y ordenación de los datos en matrices de delta-v que permiten obtener los gráficos buscados. Dado que diferentes combinaciones en el tiempo de vuelo para cada rama de la trayectoria final pueden dar lugar a los mismos resultados de delta-v total, se seleccionarán aquellas combinaciones para las que dicho parámetro sea mínimo.

```

1 %% Preparación y ordenación de los datos
3 % Se genera una matriz de dvtot que permita mostrar los datos en el
  % gráfico porkchop buscado.
5
6 for i = 1:length(fly_final)
7
8     final_array(i,:) = [datenum(fly_final(i).FechaSalida), ...
9         fly_final(i).dvtot, ...
10        fly_final(i).tof1, ...
11        fly_final(i).tof2, ...
12        fly_final(i).toftot];
13
14 end
15
16 [~, ind_ord_final] = sort(final_array(:,1));
17
18 final_array_ord = [final_array(ind_ord_final,1), ...
19     final_array(ind_ord_final,2), ...
20     final_array(ind_ord_final,3), ...

```

```

21     final_array(ind_ord_final,4) ,...
22     final_array(ind_ord_final,5) ];
23
24
25 fecha_buff(1) = 0;
26 k = 0;
27
28 for i = 1:size(final_array_ord,1)
29
30     if final_array_ord(i,1) ~= fecha_buff(end)
31         k = k + 1;
32         fecha_buff(k) = final_array_ord(i,1);
33     end
34
35 end
36
37 k = 0;
38
39 matriz_plot = ones(length(fecha_buff),max_tof*2);
40 matriz_plot = matriz_plot * Inf;
41
42 clear fecha_buff
43 fecha_buff(1) = 0;
44
45 for i = 1:size(final_array_ord,1)
46     for j = 1:max_tof*2
47
48         if final_array_ord(i,1) ~= fecha_buff(end)
49             k = k + 1;
50             fecha_buff(k) = final_array_ord(i,1);
51         end
52
53         if final_array_ord(i,5) == j && ...
54             final_array_ord(i,1) < matriz_plot(k,j)
55
56             matriz_plot(k,j) = final_array_ord(i,2);
57         end
58     end
59 end
end

```

Código A.12: Sección de obtención de matrices de delta-v.

En este caso, por las razones presentadas en la memoria del trabajo, los óptimos se obtienen de forma absoluta para periodos de tiempo discretizados. De esta forma, se calculará el mínimo absoluto de una ventana de lanzamiento teniendo en cuenta que la diferencia en la fecha de dicha ventana y la consecutiva sea superior a un año.

```

%%Cálculo de los mínimos locales de Delta-V
2
array_fin_dv = [fly_final.dvtot];
4
[array_fin_sort, array_fin_ind] = sort(array_fin_dv);
6
ind_min = [array_fin_ind(1)];
8
diff_fechas = 0;

```

```

10 for i = 2:length(array_fin_sort)
12     indice = array_fin_ind(i);
14     for j = 1:length(ind_min)
16         diff_fechas_buff = abs(datenum(fly_final(indice).FechaSalida) - ...
18             datenum(fly_final(ind_min(j)).FechaSalida));
20         if diff_fechas_buff < 365
22             diff_fechas = 0;
24             break
26         elseif diff_fechas_buff > diff_fechas
28             diff_fechas = diff_fechas_buff;
30         end
32     end
34     if diff_fechas >= 365
36         ind_min = [ind_min indice];
38     end
40     diff_fechas = 0;
42 end

```

Código A.13: Sección de obtención de las trayectorias óptimas.

Finalmente, se obtienen los gráficos y las tablas deseadas y se guardan los datos de la misma forma que en el caso de las trayectorias directas:

```

1 %% Porkchop plot
3 fly_plot_fecha = fecha_buff;
4 fly_plot_tof = [1:2*max_tof];
5 fly_plot_dv = matriz_plot';
7 data = fly_plot_dv(:);
9 min_dv = min(data);
10 max_dv = max(data(~isinf(data)));
11 niveles_dv = [min_dv:0.1:max_dv];
13 col_1 = [0.8,0.2,0.2];
15
16 figure
17 [c1,h1] = contour(fly_plot_fecha, fly_plot_tof, fly_plot_dv, ...
19     niveles_dv, 'linewidth', 0.5);
21 colormap('parula')
23 hold on
24 scatter(datenum([fly_final(ind_min).FechaSalida]), ...
26     [fly_final(ind_min).toftot], ...
28     'filled', 'x', 'MarkerEdgeColor', col_1)

```

```

27 % scatter(mins_fecha ,...
%      mins_tof ,...
29 %      'filled ', 'x', 'MarkerEdgeColor', col_1)

31 dateFormat = 'mmm yyyy';
datetick('x',dateFormat);

33
colorbar
35
box on
37
p1str = nombre_planetas(p1);
39 p2str = nombre_planetas(p2);
p3str = nombre_planetas(p3);
41

43 ylabel('Tiempo de vuelo (días)')
title(['\DeltaV para trayectorias de ',p1str, ' a ', p3str, ...
45 ' usando flyby en ', p2str], 'FontSize',11)
% legend({'$v_{\infty}$', '$C_{-3}$', 'TOF'}, ...
47 % 'Location', 'northeastoutside', 'fontsize',16)

49 %% Guardado de datos

51 emptyCol = cell(size(ind_min,2),1);

53 FechaSalida = [fly_final(ind_min).FechaSalida]';
DVd           = [fly_final(ind_min).dvd]';
55 TOF1         = [fly_final(ind_min).tof1]';
FechaFlyby    = [fly_final(ind_min).FechaFlyby]';
57 DVpfm       = [fly_final(ind_min).dvPFM]';
Rper          = [fly_final(ind_min).rper]';
59 TOF2        = [fly_final(ind_min).tof2]';
DVa           = [fly_final(ind_min).dva]';
61 FechaLlegada= [fly_final(ind_min).FechaLlegada]';
DVtot         = [fly_final(ind_min).dvtot]';
63 TOFtot      = [fly_final(ind_min).toftot]';

65 fly_res = table(FechaSalida, DVd, TOF1, FechaFlyby, DVpfm, Rper, TOF2,...
    DVa, FechaLlegada, DVtot, TOFtot);
67
fechafin = datetime(anyo,mes,dia) + periodo;
69
filename = sprintf('Datos_Flyby_%-%-%-%-%-%',...
71     dia,mes,anyo,day(fechafin),month(fechafin),year(fechafin));

73 save(filename, 'fly_res', 'fly_final', ...
    'fly_plot_fecha', 'fly_plot_tof', 'fly_plot_dv');
75
writetable(fly_res, [filename, '.xlsx'])

```

Código A.14: Sección de presentación y guardado de resultados.

# B. Glosario

## B.1. Símbolos griegos

- $\alpha$  Recíproco del semieje mayor de una elipse.
- $\beta$  Ángulo que determina la orientación de la línea de ápsides de una hipérbola.
- $\chi$  Anomalía universal.
- $\delta$  Ángulo de giro en una maniobra de flyby.
- $\theta$  Anomalía verdadera.
- $\mu$  Parámetro gravitacional de un planeta.

## B.2. Símbolos latinos

- $a$  Semieje mayor de una elipse.
- $C(z)$  Función de Stumpff.
- $C_3$  Energía característica.
- $e$  Excentricidad de una elipse.
- $F_p$  Fuerza de atracción gravitatoria de un planeta.
- $F_{sol}$  Fuerza de atracción gravitatoria del Sol.
- $G$  Constante de atracción gravitacional.
- $h$  Altitud respecto a la superficie de un cuerpo celeste.
- $m_p$  Masa de un planeta.
- $m_{sol}$  Masa del Sol.
- $P_1$  Punto situado en el centro del planeta de origen.
- $P_2$  Punto situado en el centro del planeta de destino.
- $r_1$  Vector de posición del planeta de origen.
- $r_2$  Vector de posición del planeta de destino.
- $r_p$  Radio del periapsis.
- $S(z)$  Función de Stumpff.
- $v_1$  Velocidad heliocéntrica de la nave en el origen.
- $v_2$  Velocidad heliocéntrica de la nave en el destino.
- $v_c$  Velocidad en una órbita circular.
- $v_p$  Velocidad en el periapsis.
- $v_{p1}$  Velocidad heliocéntrica del planeta de origen.
- $v_{p2}$  Velocidad heliocéntrica del planeta de destino.
- $v_{infly}$  Velocidad hiperbólica.

### B.3. Acrónimos

- SOI* Esfera de influencia (*sphere of influence*).
- PFM* Maniobra de asistencia gravitacional propulsada (*powered flyby maneuver*).