



UNIVERSITAT
POLITÈCNICA
DE VALÈNCIA



Escuela Técnica Superior de Ingeniería del Diseño

UNIVERSITAT POLITÈCNICA DE VALÈNCIA

Escuela Técnica Superior de Ingeniería del Diseño

TRABAJO FINAL DEL

REALIZADO POR

TUTORIZADO POR

CURSO ACADÉMICO: 2019/2020

*A mi hermano.
Aquí tienes la prueba fehaciente de que con sacrificio
y perseverancia puedes finalmente alcanzar tus metas.*

Agradecimientos

A mi familia, tanto los que viven bajo mi techo y como los que no. Desde siempre me he sentido arropado y querido por todos ellos, pero durante la etapa universitaria he apreciado aún más esa mano que siempre estuvo ahí para ayudarme a levantarme después de cada tropiezo y mantenerme en la batalla. Gracias de corazón.

A mis amigos, *los de aquí y los de allí*, que siguen conmigo después de tantos años y momentos vividos. De entre ellos a mi amigo Germán Ramos Dos Santos por su ayuda con el uso de Adobe Illustrator para realizar las ilustraciones de este trabajo, y a Mauricio Di Rado por ser mi diccionario de referencia con el inglés.

A todas aquellas personas anónimas que altruistamente colaboran en foros y comunidades online para resolver las dudas de los demás y compartir conocimiento de forma desinteresada.

A mis tutores Pau Bares y Benjamín Pla, profesores del Dpto. de Máquinas y Motores Térmicos de la Universidad Politécnica de Valencia.

Y una vez más a mi amigo Ruymán Cruz, profesor del Dpto. de Análisis Matemático de la Universidad de La Laguna, que me ha ofrecido su inestimable ayuda, apoyo y consejo durante todos estos años universitarios. Él ha sido, sin lugar a dudas, la pieza clave para que este TFM tenga el rigor y calidad que se merece.

*Eduardo de la Rosa Padrón
Valencia, 2020*

Resumen

El uso de los vehículos aéreos no tripulados (UAV) se ha incrementado de manera asombrosa en los últimos años. En la actualidad estas plataformas se emplean en infinidad de aplicaciones, tanto en el ámbito civil como en el industrial o militar. De entre todas ellas existe un conjunto de aplicaciones, tales como por ejemplo la fotogrametría o la agricultura de precisión, cuyo objetivo es obtener cierto tipo de información de un área de estudio o interés. Este trabajo se basa en la búsqueda de la trayectoria que dicho vehículo deberá recorrer para cumplir satisfactoriamente este objetivo pero de una manera óptima, es decir, de acuerdo a un cierto criterio.

Esta Memoria comienza con una breve introducción que sitúa al lector en el contexto del problema que se pretende abordar. En el siguiente capítulo se plantea y formaliza el problema en cuestión, presentando la región de interés y los parámetros de la misión. El capítulo tercero es donde se encuentra desarrollada toda la metodología llevada a cabo para generar la trayectoria. Este capítulo se ha dividido en dos secciones en función de si el área de interés es convexa o cóncava, ya que requieren de un tratamiento diferenciado. El método propuesto se ha puesto a prueba en el capítulo cuarto, en el que se toman dos terrenos reales arbitrarios y se comentan los resultados obtenidos. A modo de ampliación, se ha añadido un quinto capítulo en el que se analizan las implicaciones que tiene para la generación de la trayectoria la presencia de un viento estacionario y constante. Para finalizar, el último capítulo recoge las conclusiones alcanzadas con la realización de este trabajo, así como una serie de propuestas sobre la ampliación y mejora del mismo.

Abstract

The use of Unmanned Aerial Vehicles (UAVs) has undergone a remarkable increase in the past few years. Nowadays, these platforms can be used in many different situations, not only in civilian fields, but also industrially or in the military. Amongst all of them, there are a few, such as photogrammetry and precision agriculture, that aim to gather some sort of information from an area of interest. This dissertation is based on the search of a path that a vehicle must follow in order to satisfy said objective in an optimal way, being compliant with a given criteria.

We begin with a brief introduction to get the reader in context regarding the problem that needs to be solved. The following chapter sets out and formalises the problem itself, presenting the area of interest and the mission parameters. The third chapter goes deep into the procedure required to generate the right path. This chapter has been divided into two sections, analysing the cases that have either a concave or a convex area, as they need to be treated differently. On chapter number four, the proposed method has been tested with two real but arbitrary terrains, discussing the results we have obtained. In order to go deeper, we find a fifth chapter that studies the several implications in the generation of the path that a stationary and constant wind in the studied area has. To summarise, the final chapter gathers up the conclusions we have reached along the development of this project, as well as a series of proposals in order to expand and improve it.

Índice

Agradecimientos	I
Resumen	III
Abstract	V
Índice	VII
1. Introducción	1
2. Planteamiento del problema	5
2.1. Área de interés	7
2.2. Características del UAV y del sensor	9
2.3. Patrón de vuelo	11
3. Generación de la trayectoria	13
3.1. CPP en RoI convexa	14
3.1.1. Dirección de barrido óptima	14
3.1.2. Caminos de Dubins	18
3.2. CPP en RoI cóncava	29
3.2.1. Descomposición	30
3.2.2. Conexionado entre subpolígonos	38
4. Aplicación práctica	45
4.1. Terreno convexo	45
4.2. Terreno cóncavo	47
5. Presencia de viento en el RoI	49
5.1. Efecto del viento en los <i>sweep paths</i>	50
5.2. Efecto del viento en los virajes	51
5.3. Dirección óptima de barrido en presencia de viento	56
6. Conclusiones y trabajos futuros	61
6.1. Conclusiones	61
6.2. Propuestas de ampliación y mejora	62
Nomenclatura	65
Bibliografía	67

Capítulo 1

Introducción

*You don't have to be great to start,
but you have to start to be great.*

Zig Ziglar,
escritor estadounidense

Las posibles aplicaciones de vehículos aéreos no tripulados (Unmanned Aerial Vehicles, UAVs) han aumentado significativamente en los últimos años. Actualmente se pueden observar UAVs destinados a labores de todo tipo, tales como vigilancia, salvamento, agricultura de precisión, fotogrametría, seguimiento de vida salvaje, supervisión de estructuras, entre otras. Los UAVs consisten en plataformas aéreas sin pilotos a bordo que pueden ser operadas de forma manual y remota por un humano, aunque el progreso tecnológico de los últimos años ha permitido que estos vehículos puedan también llevar a cabo vuelos de forma autónoma [1]. Estos tipos de vehículos aéreos pueden ser clasificados en dos configuraciones principales: de ala fija (*fixed-wing*) o de ala rotatoria (*rotary-wing*). Ambas configuraciones presentan tanto ventajas como inconvenientes [1].

- Los UAVs de ala fija presentan alas rígidas compuestas por una sucesión continua de perfiles aerodinámicos dispuestos en la dirección de la envergadura. El movimiento relativo de estos perfiles aerodinámicos respecto al aire circundante crea un flujo que genera la sustentación necesaria para hacer volar el UAV. Las superficies de control para una configuración estándar de la aeronave son: alerones (*ailerons*), timón de profundidad o elevadores (*elevators*), y timón de dirección (*rudder*)¹. La aerodinámica que gobierna estos UAVs permite realizar vuelos de largo alcance, incluso a altas velocidades. Además, estos vehículos pueden transportar cargas de pago mayores en comparación con los de ala rotatoria. Sin embargo, estas plataformas requieren de una pista para despegar y aterrizar, y no permiten el vuelo en punto fijo (*hovering*) ya que necesitan estar en constante movimiento para generar sustentación.
- Los UAVs de ala rotatoria presentan ventajas en la maniobrabilidad mediante el uso de palas giratorias. Estas plataformas son capaces de despegar y ate-

¹Para UAVs de pequeño tamaño se pueden (y suelen) combinar las acciones de dos de estas superficies. Por ejemplo, la combinación *rudder+elevator* da lugar a una nueva superficie de control denominada *rudderator*, mientras que la combinación *elevator+aileron* da lugar a otra superficie de control denominada *elevon* [2].

rrizar en vertical (*Vertical Take-Off and Landing, VTOL*) y realizar tareas volando en punto fijo. El uso de palas giratorias produce fuerzas aerodinámicas de empuje y no requiere de velocidad relativa. Este tipo de plataforma aérea se puede clasificar en monorrotor si cuenta con un solo rotor, p. ej. helicóptero, o en multirrotor si cuenta con diversos rotores para proporcionar empuje, p. ej. cuadricópteros o hexacópteros que cuentan con cuatro y seis rotores respectivamente. En la Fig. 1.1 se puede ver ejemplos de ambos tipos de UAV.



Figura 1.1: Ejemplos de UAV: de ala fija, modelo Delair UX11 (izq); y de ala rotatoria, modelo Yuneec H520 (der).

Tanto si el UAV es de ala fija como si es de ala rotatoria, los principales sistemas en los que se divide el software de un UAV son los mostrados en la Fig. 1.2.

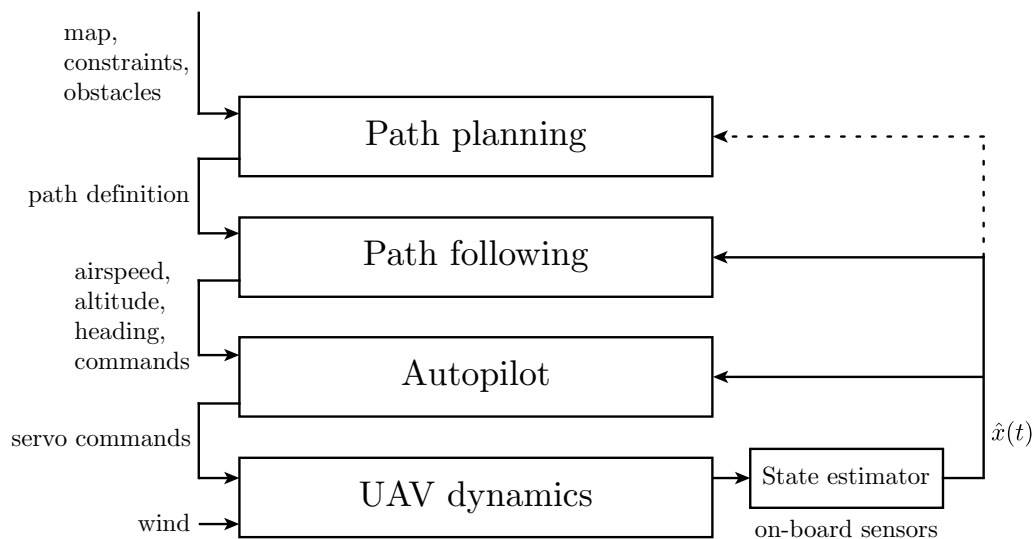


Figura 1.2: Esquema de los sistemas en los que se divide el software de un UAV.

- *Path planning*: se encarga de suministrar una trayectoria que cumpla la misión a la vez que satisface las limitaciones del vehículo y restricciones del escenario.
- *Path following*: su objetivo es proporcionar al sistema de control los valores de estado de referencia para que la aeronave siga la trayectoria establecida. Usualmente se le denomina guiado.

- *Autopilot*: se refiere a la algoritmia de control que se ocupa de mantener los ángulos de balanceo y cabeceo, la velocidad de vuelo, la altitud y el ángulo de rumbo conforme a una referencia.
- *UAV dynamics*: modelo físico de 6 grados de libertad que responde a los comandos de control que actúan sobre los servos (aleros, elevadores, timón de cola y palanca de gases), así como a la acción del viento y otras perturbaciones.

Nos centraremos en particular en el primero de los bloques, el *path planning*, para el cual existen principalmente dos enfoques diferentes: el *deliberative motion planning*, donde las trayectorias y rutas son calculadas en base al conocimiento que se tiene del entorno, o el *reactive motion planning*, que emplea métodos para reaccionar ante la información captada por sensores. En general, el *deliberative motion planning* es útil cuando el entorno es conocido a priori, aunque si este es muy dinámico puede volverse computacionalmente exigente. Por otra parte, el *reactive motion planning* es un enfoque más adecuado cuando el entorno es desconocido o muy dinámico, como por ejemplo en el problema de evasión de obstáculos, donde la información es incompleta o incierta, por lo que se pierde la capacidad de planificar la trayectoria global [2]. El *reactive motion planning* va a requerir de conocer el/los estado/s anterior/es del UAV (línea discontinua en Fig. 1.2) para ser capaz de planificar la trayectoria posterior, mientras que el *deliberative motion planning* permite desacoplar bloque del *path planning* del resto de bloques elementales.

El concepto de *path planning* usualmente se refiere al problema “punto a punto”, donde el objetivo es construir una ruta entre un origen y un destino minimizando un cierto coste y evitando obstáculos si los hubiera. Sin embargo, cuando lo que interesa es obtener información de una cierta región o área el problema pasa a denominarse “problema de cobertura” (*Coverage Path Planning*, CPP) [3].

En los últimos años, los trabajos sobre el problema CPP se han centrado principalmente en el uso de vehículos terrestres, mencionando brevemente a los UAVs como una extensión de estos vehículos. Aunque las técnicas de exploración desarrolladas para vehículos terrestres pueden ser extendidas y aplicadas a los UAVs, existen varios aspectos adicionales que deben ser considerados cuando se trata con vehículos aéreos, como son las características físicas del vehículo, autonomía, restricciones en la maniobrabilidad, limitaciones en la carga de pago, entre otros. Las cámaras y sensores embarcados pueden incrementar el peso del vehículo y por tanto reducir su autonomía, la cual es bastante limitada en el caso de los multirrotores². Además, las maniobras de viraje y la presencia de viento incrementan el consumo de energía en misiones realizadas en campo abierto [1].

En este trabajo abordaremos el problema CPP mediante el uso de UAVs de ala fija. Supondremos conocido de antemano todo lo necesario del entorno, en particular la forma del área a analizar, permitiendo así el cálculo de la trayectoria con anterioridad a la ejecución de la misión. El objetivo principal del trabajo será proponer un método de generar la “mejor” trayectoria, en el sentido de minimizar su longitud total, que debería recorrer el vehículo para que el área de interés se cubierta de forma completa.

²La autonomía máxima de los UAVs multirrotor está actualmente entre los 20-25 min, incluso en los modelos más recientes [1].

Capítulo 2

Planteamiento del problema

A problem well stated is a problem half solved.

Charles F. Kettering,
ingeniero estadounidense

Enunciado

Dada una cierta región de interés cuya frontera puede aproximarse por un polígono simple, determinar el conjunto de puntos $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ de la trayectoria que debería recorrer un UAV con el objetivo de proporcionar una cobertura exhaustiva del área interior del polígono mediante el uso de un sensor embarcado.

Criterio de optimización

Mínima longitud de la trayectoria completa (véase Observación 1).

Restricciones

- Maniobrabilidad del UAV limitada por su radio mínimo de giro, ρ .
- Resolución del mapeado impuesta por la aplicación.

Suposiciones

- UAV será modelado como un sistema no holónimo (véase Observación 2) definido por el estado (x, y, ψ) , donde $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ representa la posición de su centro de masas y $\psi \in [0, 2\pi)$ su rumbo medido en sentido horario respecto del norte local.
- La forma del polígono es conocida con anterioridad a la ejecución del vuelo (permite generar la trayectoria *offline*).
- Sin imposiciones sobre punto de inicio y fin de la trayectoria.
- Velocidad y altitud de vuelo del UAV constante.
- Ausencia de viento y obstáculos en el interior del polígono.
- Aplicado al uso de UAV de ala fija.
- Posibilidad de volar por fuera de la frontera del polígono.
- Masa del UAV constante durante todo el vuelo.
- Los ángulos de ataque y resbalamiento α y β son despreciables, por lo que podemos asumir las equivalencias $\mu = \phi$, $\chi = \psi$ y $\gamma = \theta$ (véase Observación 3).

Observación 1. A pesar de que el criterio principal de optimización elegido en este trabajo haya sido minimizar la longitud total de la trayectoria completa, en [3] se demuestra que para un UAV volando sin presencia de viento y en condiciones ideales a una altitud y velocidad fija, la reducción en el número de giros que ejecute la aeronave implicará una disminución en (i) la longitud de la trayectoria, (ii) la duración de vuelo, y (iii) el consumo de energía. Por tanto, en este trabajo se empleará eventualmente el criterio de minimizar el número de giros como equivalente al criterio de minimización de longitud.

Observación 2. El modelo asumido es no holónimo ya que se cumple la ecuación de ligadura

$$f(\dot{x}, \dot{y}, \psi) = -\dot{x} \cos \psi + \dot{y} \sin \psi = 0,$$

que en definitiva representa que la velocidad del vehículo es siempre tangencial a su trayectoria [4].

Observación 3. En el contexto de la Mecánica de Vuelo, el hecho de que los ángulos de ataque α y resbalamiento β sean despreciables hace que los ejes viento y los ejes cuerpo del vehículo sean coincidentes [5], y por tanto:

- El ángulo de asiento de velocidad γ es igual al ángulo de asiento θ .
- El ángulo de guiñada de velocidad χ es igual al ángulo de guiñada ψ .
- El ángulo de balance de velocidad μ es igual al ángulo de balance ϕ .

Observación 4. El concepto de «cobertura exhaustiva» del interior de un recinto de interés P se refiere a que si el UAV, a lo largo de su trayectoria, va tomando capturas

sucesivas Z_s de porciones del terreno mediante un sensor embarcado, el interior del recinto es cubierto al completo (o lo que es lo mismo, de forma exhaustiva) si se cumple que

$$\bigcup_{s=1}^N Z_s \supseteq P, \quad (2.1)$$

donde N es el número de capturas totales realizadas durante la misión. Es obvio que la forma de las capturas Z_s dependerá de las características del sensor que se disponga. Obsérvese que (2.1) no exige que las capturas realizadas cubran exclusivamente el interior del recinto de interés; estas pueden contener información exterior a dicho recinto siempre que se asegure que la unión de todas las capturas tenga información sobre el interior (véase Fig. 2.1).

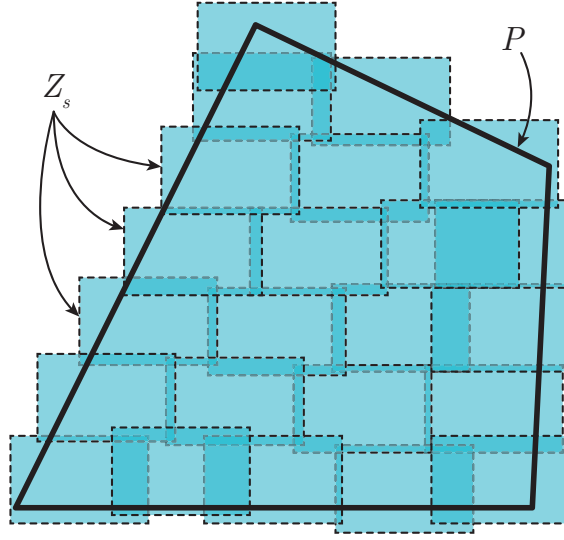


Figura 2.1: Ejemplo de conjunto de capturas Z_s en el entorno de P .

2.1. Área de interés

Para el tratamiento matemático de un área de interés (o RoI, *Region of Interest*) su frontera puede ser (usualmente) aproximada con mayor o menor precisión por un polígono. Llamaremos P al polígono simple³, ya sea convexo o cóncavo (véase Definición 2 y 3 posteriormente), con n vértices donde el conjunto de vértices $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ que lo definen se encuentran especificados por sus coordenadas cartesianas $v_i = (x_i, y_i)$, con $i \in I_1 := \{1, 2, \dots, n\}$ según el orden contrario a las agujas del reloj (denotado en lo sucesivo como CCW⁴ y a su sentido opuesto como CW⁵), cumpliéndose que ningún trío de vértices consecutivos sean colineales. La unión de dos vértices consecutivos v_i y v_{i+1} da lugar a un segmento que denominamos lado i -ésimo del polígono P y que denotamos como $e_i = \overline{v_i v_{i+1}}$. El origen de la numeración es arbitrario. En la Fig. 2.2 se muestran algunos ejemplos de polígonos.

³Polígono cuyos lados no se intersectan entre ellos y no tiene agujeros.

⁴Del inglés *counter-clockwise*.

⁵Del inglés *clockwise*.

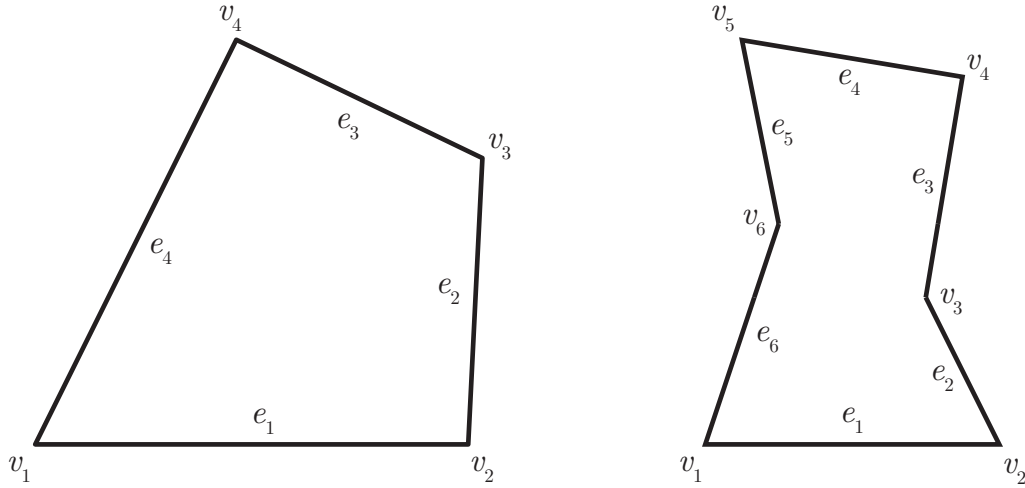


Figura 2.2: Ejemplos de recintos poligonales: (izq) polígono convexo; (der) polígono cóncavo.

Observación 5. Es importante destacar lo siguiente: la notación en formato de subíndice $(\cdot)_{i+1}$ se refiere al vértice consecutivo posterior a $(\cdot)_i$, mientras que $(\cdot)_{i-1}$ se refiere al vértice consecutivo anterior. Nótese que matemáticamente esta notación produciría que

$$\begin{aligned}
 i = n &\rightarrow i + 1 = n + 1 \notin I_1, \\
 i = 1 &\rightarrow i - 1 = 0 \notin I_1,
 \end{aligned}$$

por lo que se obtendría un vértice consecutivo (anterior o posterior) fuera del conjunto I_1 . Formalmente, la notación anterior se expresa en el sentido

$$\begin{aligned}
 (\cdot)_{i+1} &\rightarrow \text{mod}(i, n) + 1, \\
 (\cdot)_{i-1} &\rightarrow \text{mod}(i + n - 2, n) + 1,
 \end{aligned}$$

haciendo que podamos definir el índice i como “cíclico”. La operación $\text{mod}(\cdot, \cdot)$ representa la operación módulo, cuya interpretación se puede observar en la Fig. 2.3.

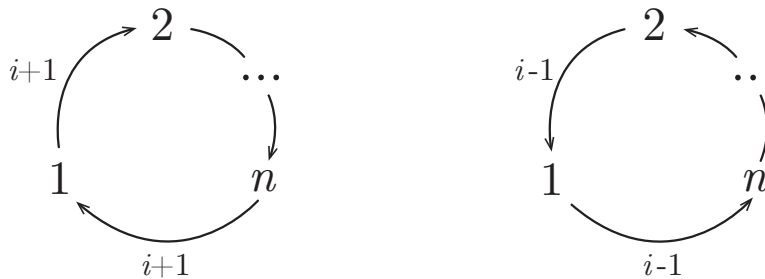


Figura 2.3: Interpretación de los índices cíclicos: (der) índice posterior; (izq) índice anterior.

2.2. Características del UAV y del sensor

El interés de necesitar dar cobertura a un área viene dado regularmente por la necesidad de adquirir cierta información (dependiendo de la aplicación concreta) sobre dicho área. Si ese proceso de cobertura se realiza mediante un UAV, como es este caso, lo habitual será emplear un sensor embarcado que recopilará la información tal y como se muestra en la Fig. 2.4, donde h es la altura de vuelo del UAV respecto del suelo, fov_y y fov_x son los ángulos longitudinal y transversal del campo de visión del sensor, y d_y y d_x las longitudes longitudinal y transversal del rectángulo asociado a la proyección de un píxel sobre el terreno.

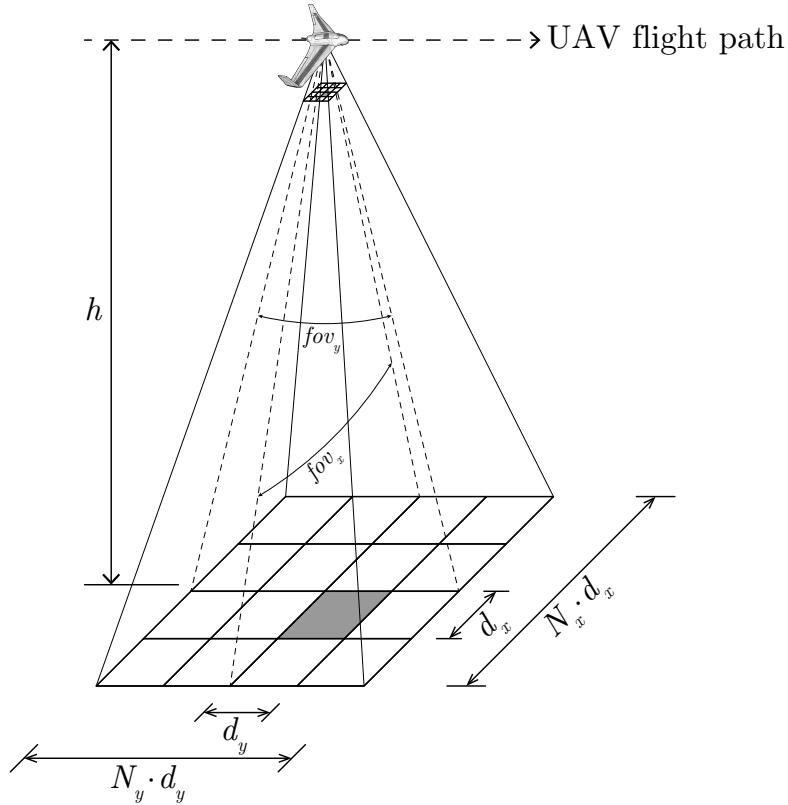


Figura 2.4: Área proyectada por el sensor embarcado (*sensor footprint*).

A lo largo de la trayectoria recorrida por el vehículo y con una cierta frecuencia de muestreo, el sensor tomará capturas del terreno Z_s que se corresponderán a una específica porción del área interior de P . Por cuestiones de simplicidad, asumiremos que el eje óptico del sensor es perpendicular al terreno, tal y como se muestra en la Fig. 2.5-(izq). Esto hará que la porción de terreno muestreado pueda ser tratado digitalmente como un rectángulo de $N_x \times N_y$ píxeles.

Cada tipo de aplicación requerirá de un tipo de sensor embarcado específico y de un valor de GSD (del inglés *Ground Sample Distance*). Por un lado, la elección de un sensor concreto determinará los valores de los parámetros fov_y , fov_x , N_x y N_y , ya que suelen ser establecidos y fijados durante la fabricación del sensor. Por otro lado, el concepto del GSD se refiere al tamaño máximo que debe tener un píxel proyectado sobre el terreno (usualmente en unidades de m/píxel), por lo que en definitiva se trata de un requisito de resolución que viene impuesto por la aplica-

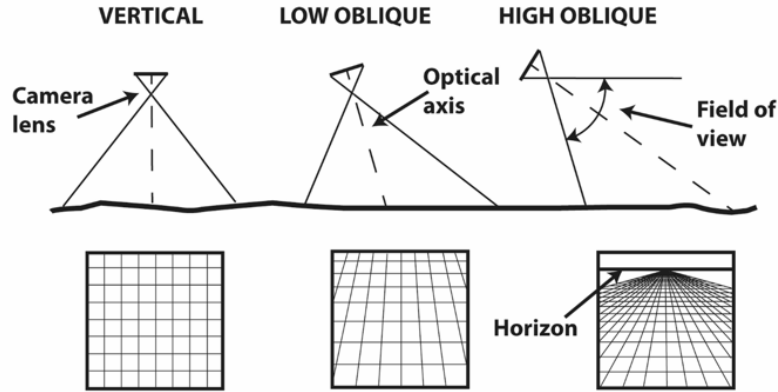


Figura 2.5: Diferentes orientaciones del eje óptico respecto del terreno y sus campos de visión asociados.

ción (véase Fig. 2.7). La “baja” resolución de los satélites es aceptable para algunas aplicaciones, pero existen muchas otras que requieren un GSD subcentimétrico que es inaccesible por los satélites [6]. Además, la aplicación también puede requerir un cierto solapamiento longitudinal y/o transversal entre dos muestreos consecutivos⁶ (*longitudinal overlap* y *sidelap* respectivamente), como se muestra en la Fig. 2.6. Cuantificaremos estos solapamientos en tanto por uno mediante las variables w_o y w_s respectivamente, teniendo que $w_{(*)} = 0$ corresponde a un solapamiento nulo y $w_{(*)} = 1$ a un solapamiento completo. En consecuencia, $w_{(*)} \in [0, 1]$.

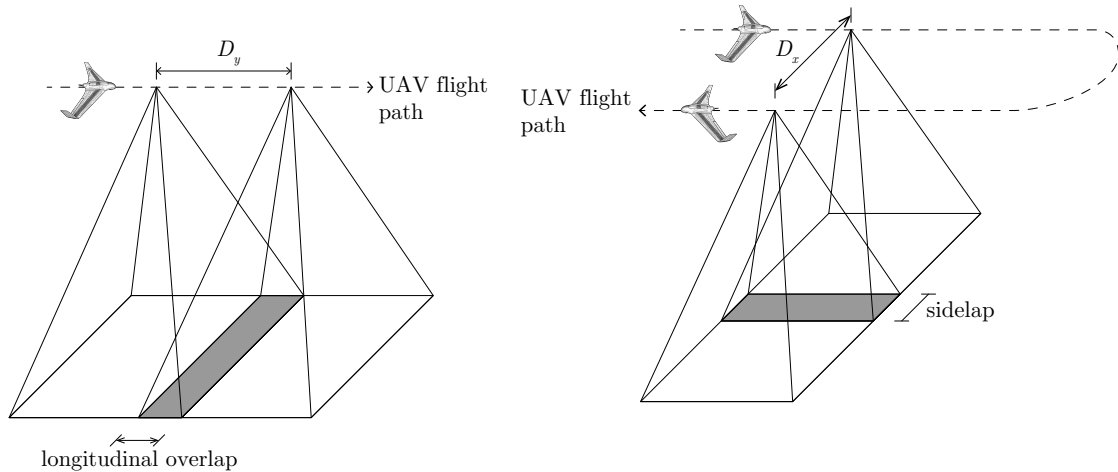


Figura 2.6: Solapamiento longitudinal (izq) y transversal (der).

Una vez la aplicación haya especificado los parámetros del sensor, el GSD y los requisitos de solapamiento, el conjunto de valores $\{fov_y, fov_x, N_x, N_y, w_o, w_s, GSD\}$

⁶Por ejemplo, en aplicaciones de modelos digitales de elevaciones de alta precisión se requiere un solapamiento transversal $> 70\%$, mientras que para la captura de ortofotos este solapamiento puede reducirse hasta aproximadamente el 50% (véase [6]).

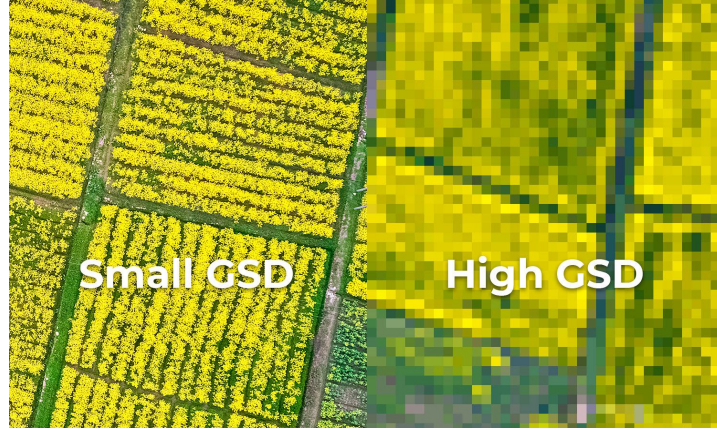


Figura 2.7: Interpretación del GSD (véase [7]).

queda fijado. Por lo tanto, únicamente quedaría por determinar la altura⁷ de vuelo h (Fig. 2.4) y las distancias D_x y D_y , que representan el espaciado entre *tracks* paralelas y la distancia a lo largo del *flight path* entre dos capturas consecutivas del sensor, respectivamente (Fig. 2.6).

Tomando los triángulos marcados con líneas discontinuas en la Fig. 2.4 tenemos que

$$h_x(d_x) = \frac{d_x N_x}{2 \tan(\text{fov}_x/2)},$$

$$h_y(d_y) = \frac{d_y N_y}{2 \tan(\text{fov}_y/2)}.$$

Además, el requisito de resolución impone las condiciones

$$0 \leq d_x \leq \text{GSD}, \quad (2.2)$$

$$0 \leq d_y \leq \text{GSD}. \quad (2.3)$$

Podemos considerar que la máxima altura de vuelo para la que se cumple simultáneamente (2.2) y (2.3) será por tanto

$$h = \min \{h_x(\text{GSD}), h_y(\text{GSD})\}.$$

Por otro lado, los espaciados D_x y D_y pueden calcularse como se indica en [6]:

$$D_x = 2h \tan(\text{fov}_x/2)(1 - w_s),$$

$$D_y = 2h \tan(\text{fov}_y/2)(1 - w_o).$$

2.3. Patrón de vuelo

Cuando se planifica la trayectoria para la exploración de áreas de interés con formas simples, el uso de patrones geométricos simples suele resultar suficiente. El patrón más empleado, y por tanto el adoptado para este trabajo, es el conocido como *back-and-forth* (BF), que consiste en un serie de líneas rectas paralelas (espaciadas

⁷La altura de vuelo es la distancia vertical de la aeronave con respecto a una referencia específica, en este caso el terreno. No confundir con altitud de vuelo, en el que la referencia es el MSL (*mean sea level*).

entre sí en función de los requisitos de la misión) que se recorren por el vehículo en sentidos opuestos alternativamente. El software de control de vuelo más popular, *Mission Planner*⁸, toma por defecto este patrón cuando la misión se trata de dar cobertura a un área [1].

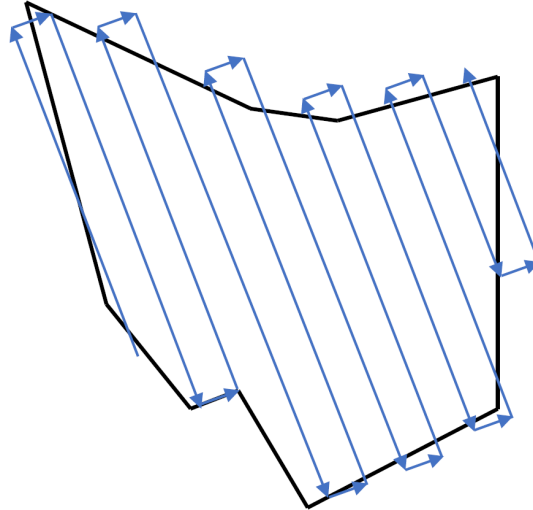


Figura 2.8: Patrón *back-and-forth* (véase [1]).

Véase en la Fig. 2.8 como cada línea paralela se recorre solamente mientras pase por el interior del polígono (más un cierto margen necesario para que el UAV pueda transicionar entre líneas sucesivas), ya que los exteriores de este no son de interés. A cada uno de los segmentos resultantes de intersectar estas líneas paralelas con el polígono se les denomina en la literatura como *sweep paths* (caminos de barrido).

Definición 1 (Sweep path). *Un sweep path de un polígono convexo P es un segmento recto que tiene sus extremos situados en dos lados diferentes de P .*

A pesar de que este sea el patrón más habitual, existen otros tipos que pueden resultar más convenientes en función de la aplicación. En la Fig. 2.9 mostramos algunos ejemplos extraídos de la literatura.

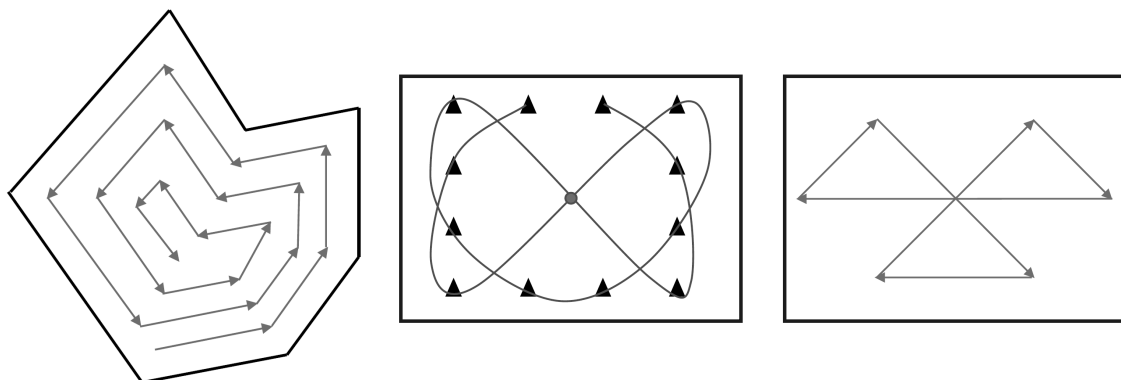


Figura 2.9: Ejemplos de patrones de vuelo alternativos: (izq) espiral, (centro) *barrier patrol*, y (der) *sector search* (véase [1]).

⁸<https://ardupilot.org/planner/>

Capítulo 3

Generación de la trayectoria

An alleged scientific discovery has no merit unless it can be explained to a barmaid.

Ernest Rutherford,
físico británico

Comenzamos este capítulo definiendo dos conceptos importantes y recurrentes a lo largo de esta Memoria:

Definición 2 (Polígono convexo). *Un polígono P será convexo si ninguno de sus vértices v_i es cóncavo.*

Definición 3 (Polígono cóncavo). *Un polígono P será cóncavo si al menos uno de sus vértices v_i es cóncavo.*

Para determinar si un vértice $v_i = (x_i, y_i)$ es cóncavo o convexo emplearemos la función $\mathcal{S}(v_i)$, que se encuentra relacionada con el producto vectorial de los dos lados adyacentes a dicho vértice [3].

$$\mathcal{S}(v_i) = \begin{vmatrix} x_{i-1} & y_{i-1} & 1 \\ x_i & y_i & 1 \\ x_{i+1} & y_{i+1} & 1 \end{vmatrix} = \begin{cases} > 0, & v_i \text{ es un vértice convexo,} \\ < 0, & v_i \text{ es un vértice cóncavo.} \end{cases}$$

Nótese que $\mathcal{S}(v_i) \neq 0$. Que $\mathcal{S}(v_i) = 0$ significa que los vértices v_{i-1} , v_i y v_{i+1} son colineales, por lo que al listar los vértices que definen al polígono podría suprimirse v_i , eliminando así esta coyuntura.

Denotaremos como ncc al número de vértices cóncavos de un polígono, donde se cumplirá que $ncc \in [0, n - 2)$, por lo que $ncc < n$ [3]. Por ejemplo, el polígono de la Fig. 2.2-(der) es cóncavo porque sus vértices v_3 y v_6 lo son, y por tanto $ncc = 2$.

Por los motivos que se presentarán en la Subsección 3.2.1, vamos a dividir este análisis en dos secciones en función de si el RoI es convexo o es cóncavo. Un pequeño estudio llevado a cabo en Finlandia [8] analizó las formas de los campos de cultivo de aquel país y obtuvo una serie de estadísticas aproximadas. El estudio declara que sólo el 13 % de sus terrenos son convexos, de los que un 25 % tienen formas simples como círculos, rectángulos o triángulos. Esto deja un 87 % de terrenos cóncavos, por lo que existe una necesidad real para el desarrollo de técnicas eficientes que den solución al problema CPP en este tipo de campos [6].

3.1. CPP en RoI convexa

En esta sección nos ocuparemos del caso particular en que el polígono P es convexo $\iff ncc = 0 \iff \mathcal{S}(v_i) > 0, \forall i \in I_1$.

3.1.1. Dirección de barrido óptima

Definición 4 (Recta de soporte). *Una recta de soporte l es una recta que intersecta al polígono P por uno de sus vértices y deja a todo P en uno de los dos semiplanos que delimita.*

Definición 5 (Envergadura). *Dadas dos rectas paralelas de soporte⁹ l_1 y l_2 de un polígono P , se define la envergadura D como la distancia entre ambas rectas (véase Fig. 3.1).*

Definición 6 (Anchura). *La anchura W de un polígono convexo P es su mínima envergadura posible.*

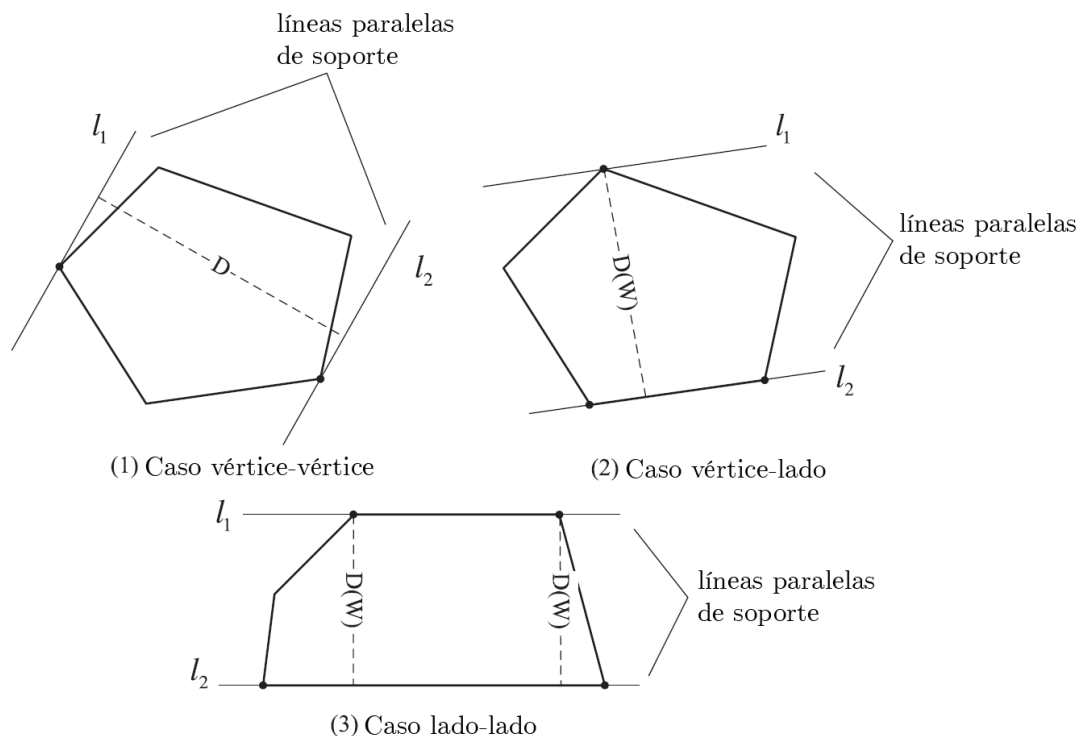


Figura 3.1: Envergaduras y ancho de un polígono convexo. En las subfiguras (2) y (3) la envergadura calculada coincide con la anchura del polígono (véase [3]).

Definición 7 (Dirección de barrido). *Si consideramos una recta del plano que intersecta perpendicularmente a un conjunto de sweep paths paralelos y que se recorre en la dirección del vector (dirección de barrido), entonces el orden en el que se recorren los sweep path será el orden en que son intersectados por dicha recta.*

⁹Si no se especifica lo contrario, cuando se empleó el término *rectas de soporte* se asumirá que todas ellas son paralelas entre sí, sin necesidad de añadir el calificativo *paralelas*.

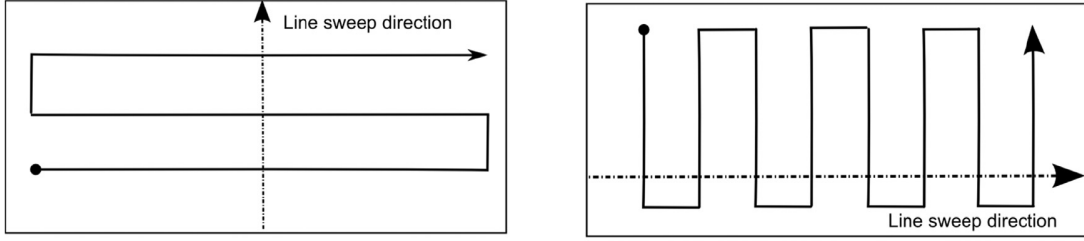


Figura 3.2: Dirección de barrido óptima (izquierda) y no óptima (derecha). Nótese como para la dirección no óptima se tiene un número de giros mayor que para la dirección óptima (véase [9]).

Se puede demostrar que para un polígono convexo en el que la dirección de barrido sea colineal con la dirección de una envergadura D arbitraria, el número de giros a realizar decrecerá a medida que lo haga D (siempre que esté fijo el espaciado entre *sweep paths*, D_x) [3]. Dado que la anchura del polígono es $W = \min\{D\}$, el mínimo número de giros a realizar se obtendrá cuando la dirección de barrido sea colineal a la dirección de la anchura del polígono, la cual denominaremos *dirección óptima de barrido* (véase Fig. 3.2). Como acabamos de indicar, la búsqueda de la dirección óptima de barrido de un polígono requiere del cálculo del ancho de dicho polígono. El siguiente algoritmo, propuesto en [3], permite la búsqueda de este¹⁰.

Un polígono convexo admite rectas paralelas de soporte l_1 y l_2 en cualquier dirección, y por cada dirección la envergadura es (usualmente) diferente. Sin embargo, la anchura es un invariable del polígono convexo [3]. Para una dirección concreta la intersección de las rectas l_1 y l_2 con el polígono P puede ser de tres tipos:

- V-V (vértice-vértice): ambas rectas de soporte intersectan dos vértices v_i y v_j tal que $i, j \in I_1, i \neq j$. En este caso ambos vértices se les denomina *vértices antipodales* (Fig. 3.1-(1)).
- V-E (vértice-lado): una de las rectas de soporte es coincidente con el lado e_i y la otra intersecta al vértice v_j tal que $i \in I_1$ y $j \in I_2$, siendo I_2 el conjunto $I_2 := \{i + 2, \dots, n, 1, \dots, i - 1\}$. En este caso al vértice v_j se le denomina *vértice antipodal asociado al lado e_i* , que denotaremos como va_i (Fig. 3.1-(2)).
- E-E (lado-lado): puede ser considerado un caso particular de V-E (Fig. 3.1-(3)).

Teorema 1. *La anchura de un polígono convexo P sólo se manifiesta en los casos V-E [3].*

Definición 8 (Envergadura asociada a un lado). *Se define como envergadura asociada al lado e_i de un polígono P como aquella envergadura, calculada para un caso de intersección de rectas paralelas de soporte vértice-lado, donde este lado es e_i . Esta envergadura la denotaremos como D_i , con $i \in \{1, 2, \dots, n\}$.*

El Teorema 1 permite reducir enormemente el abanico de búsqueda de W , ya que pasamos de tener infinitas direcciones de las rectas de soporte (infinitas envergaduras) a sólo tener que considerar aquellas en las que (al menos) una de las rectas es

¹⁰De hecho, una de las principales contribuciones que presenta [3] es el desarrollo de este algoritmo con complejidad $O(n)$.

paralela al lado e_i de P . Por lo tanto, $W = \min \{D_1, D_2, \dots, D_n\}$.

Para el cálculo del vértice antipodal va_i haremos uso de los siguientes dos resultados demostrados en [3]:

1. Definamos la función $\Psi_{i,j}$ asociada al lado e_i como

$$\Psi_{i,j} = (y_{i+1} - y_i)(x_{j+1} - x_j) - (x_{i+1} - x_i)(y_{j+1} - y_j), \quad (3.1)$$

tal que $i \in I_1$ y $j \in I_2$. Si evaluamos la función $\Psi_{i,j}$ para los posibles valores de j de forma ordenada (tratando el conjunto I_2 como un conjunto ordenado), el vértice antipodal va_i asociado al lado e_i será aquel que vértice $v_j = (x_j, y_j)$ que primero cumpla

$$\text{sign}(\Psi_{i,j}) \neq \text{sign}(\Psi_{i,j-1}). \quad (3.2)$$

Si (3.2) no se cumple para ningún valor de $j \in I_2$, entonces va_i será v_j con j tomando el primer valor del conjunto ordenado I_2 .

2. En caso de conocer que el vértice antipodal del lado e_i es va_i , el vértice antipodal de e_{i+1} será va_i o alguno de los vértices subsiguientes a este. Este resultado permitirá trabajar con un subconjunto de I_2 .

Ejemplo 1 (Cálculo de vértices antipodales). Tomemos el polígono convexo de $n = 10$ vértices mostrado en la Fig. 3.3. En este ejemplo ilustraremos el cálculo de los vértices antipodales asociados a los lados e_1, e_2 y e_3 de este polígono.

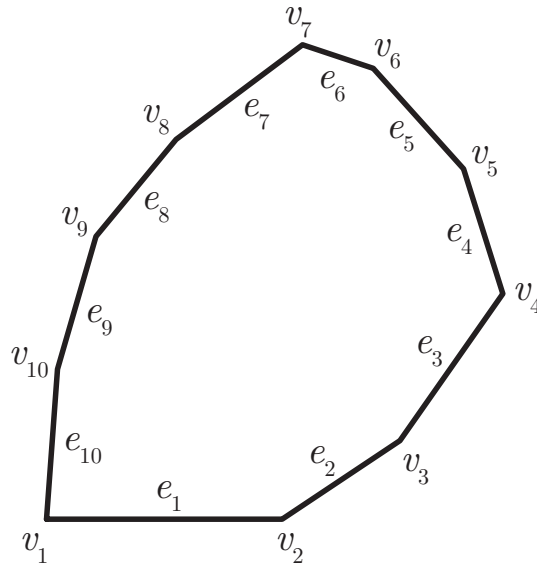


Figura 3.3: Ejemplo de polígono convexo (véase [3]).

1. Cálculo del vértice antipodal del lado e_1 :

$$i = 1 \implies j \in I_2 = \{3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}.$$

Como no se conoce el valor del vértice antipodal anterior $va_{i-1} = va_{10}$, el conjunto ordenado I_2 no podrá ser recortado. Aplicando la función $\Psi_{1,j}$ se tiene

$$\begin{aligned}\operatorname{sgn}(\Psi_{1,3}) &= -1, \\ \operatorname{sgn}(\Psi_{1,4}) &= -1, \\ \operatorname{sgn}(\Psi_{1,5}) &= -1, \\ \operatorname{sgn}(\Psi_{1,6}) &= -1, \\ \operatorname{sgn}(\Psi_{1,7}) &= +1.\end{aligned}$$

De acuerdo con (3.2), como se ha producido un cambio de signo entre las funciones $\Psi_{1,6}$ y $\Psi_{1,7}$ el vértice v_7 será el vértice antipodal va_1 asociado al lado e_1 .

2. Cálculo del vértice antipodal del lado e_2 :

$$i = 2 \implies j \in I_2 = \{4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 1\}.$$

Como ahora se conoce que el valor del vértice antipodal anterior $va_{i-1} = va_1 = v_7$, el conjunto ordenado I_2 puede ser recortado, de forma que

$$I_2 = \{\cancel{4}, \cancel{5}, \cancel{6}, 7, 8, 9, 10, 1\} = \{7, 8, 9, 10, 1\}.$$

Aplicando la función $\Psi_{2,j}$ se tiene

$$\begin{aligned}\operatorname{sgn}(\Psi_{2,7}) &= +1, \\ \operatorname{sgn}(\Psi_{2,8}) &= +1, \\ \operatorname{sgn}(\Psi_{2,9}) &= +1, \\ \operatorname{sgn}(\Psi_{2,10}) &= +1, \\ \operatorname{sgn}(\Psi_{2,1}) &= +1.\end{aligned}$$

Como no se ha producido ningún cambio de signo en la función para todos los valores posibles de j , se concluye que $va_2 = va_1 = v_7$.

3. Cálculo del vértice antipodal del lado e_3 :

$$i = 3 \implies j \in I_2 = \{5, 6, 7, 8, 9, 10, 1, 2\}.$$

Como ahora se conoce que el valor del vértice antipodal anterior $va_{i-1} = va_2 = v_7$, el conjunto ordenado I_2 puede ser recortado, de forma que

$$I_2 = \{\cancel{5}, \cancel{6}, 7, 8, 9, 10, 1, 2\} = \{7, 8, 9, 10, 1, 2\}.$$

Aplicando la función $\Psi_{3,j}$ se tiene

$$\begin{aligned}\operatorname{sgn}(\Psi_{3,7}) &= -1, \\ \operatorname{sgn}(\Psi_{3,8}) &= -1, \\ \operatorname{sgn}(\Psi_{3,9}) &= +1.\end{aligned}$$

De acuerdo con (3.2), como se ha producido un cambio de signo entre las funciones $\Psi_{3,8}$ y $\Psi_{3,9}$ el vértice v_9 será el vértice antipodal va_3 asociado al lado e_3 .

Una vez se conoce el vértice antipodal $va_i = (x_0, y_0)$ asociado al lado e_i del polígono, la envergadura D_i asociada a este lado se calcula mediante

$$D_i = \frac{|(y_{i+1} - y_i)x_0 - (x_{i+1} - x_i)y_0 + x_{i+1}y_i - y_{i+1}x_i|}{\sqrt{(y_{i+1} - y_i)^2 + (x_{i+1} - x_i)^2}}.$$

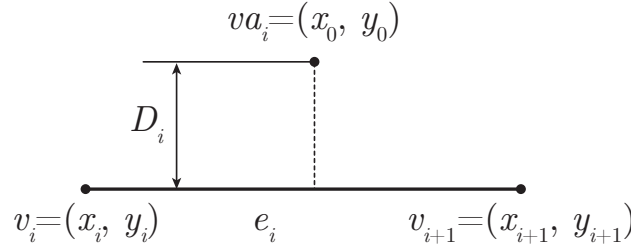


Figura 3.4: Distancia del lado e_i a su vértice antipodal va_i .

Ya estamos en disposición de presentar los pasos del algoritmo:

Algoritmo para determinar dirección óptima de barrido

- (I) Buscar la envergadura D_1 a través del cálculo del vértice antipodal va_1 asociado al lado e_1 , empleando (3.1) y (3.2).
- (II) Buscar la envergadura D_2 a través del cálculo del nuevo vértice antipodal asociado al lado e_2 pero comenzando desde el vértice antipodal anterior va_1 .
- (III) Repetir el paso (II) para el resto de lados del polígono.
- (IV) La anchura del polígono P será el mínimo de todas las envergaduras calculadas en los pasos anteriores, es decir, $W = \min \{D_1, D_2, \dots, D_n\}$.

Definición 9 (Lado base). *El lado base de un polígono P es aquel lado e_i que cumple que $D_i = \min \{D_1, D_2, \dots, D_n\}$, con $i \in \{1, 2, \dots, n\}$.*

Ejemplo 2 (Polígono convexo). Tomemos el polígono convexo ya presentado en la Fig. 2.2-(izq). Para cada uno de sus 4 lados $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ se calcula su vértice antipodal asociado y envergadura (véase Fig. 3.5) mediante el algoritmo presentado anteriormente. Para este polígono en particular $W = \min \{D_1, D_2, D_3, D_4\} = D_4$, y por lo tanto su lado base será e_4 . Por consiguiente, la forma óptima de recorrer este polígono será la mostrada en la subfigura inferior derecha de la Fig. 3.5.

3.1.2. Caminos de Dubins

En la Subsección 3.1.1 hemos dado respuesta a cómo deberían ser los *sweep paths* para recorrer un cierto polígono convexo. Sin embargo, para que la trayectoria global quede completamente definida habrá que determinar también la forma que deberán tener los tramos de unión entre dos *sweep paths* consecutivos, o lo que es lo mismo, la trayectoria de menor longitud que debe unir el estado inicial $p = (x_i, y_i, \psi_i)$ (final

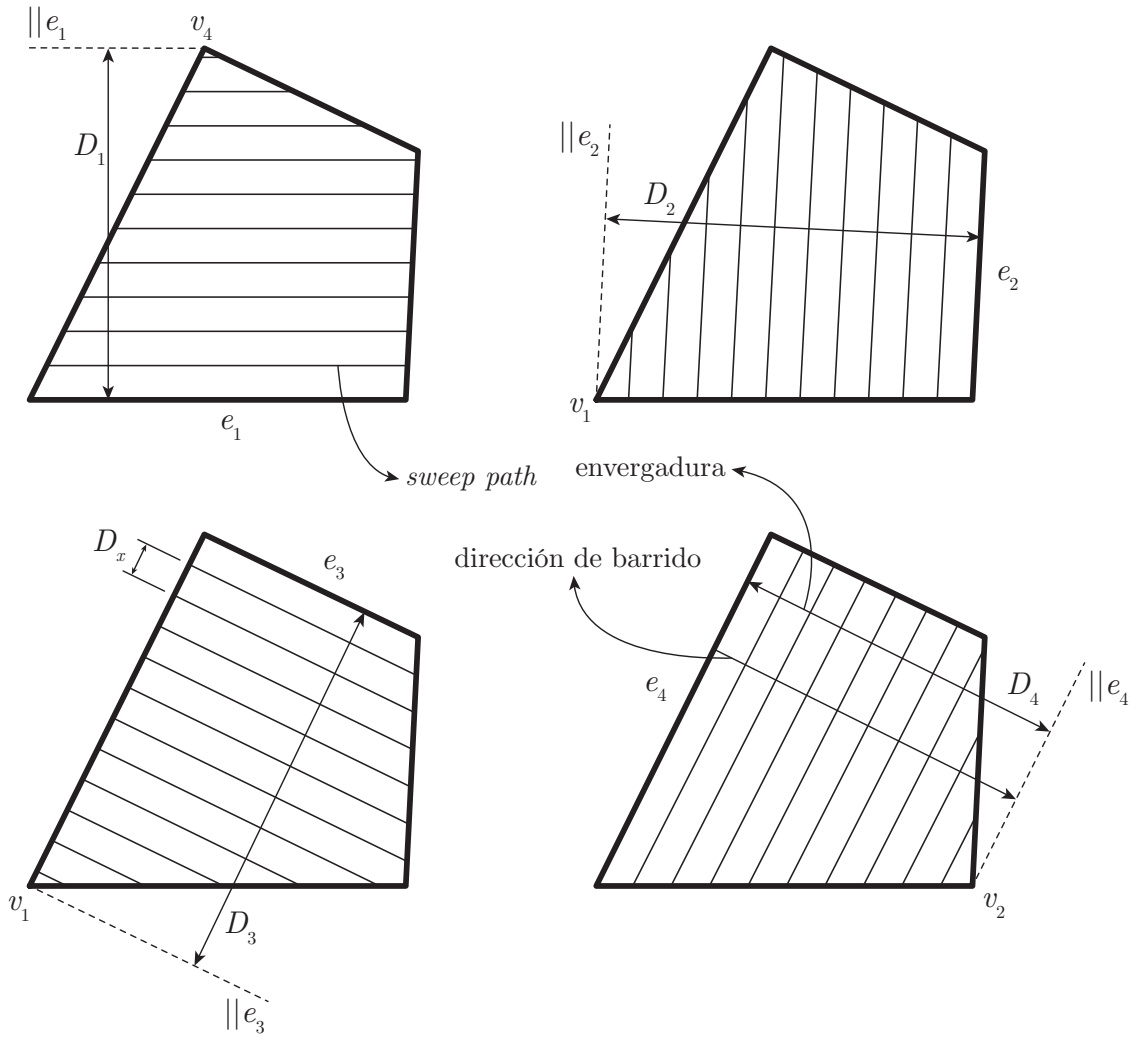


Figura 3.5: Vértices antipodales, envergaduras y *sweep paths* asociados a cada uno de los lados del polígono convexo en estudio.

de un *sweep path* arbitrario) con el estado final $q = (x_f, y_f, \psi_f)$ (inicio del *sweep path* siguiente). Véase Fig. 3.6.

Es inmediato ver que si no se impone ninguna restricción adicional, la solución es trivial: unir con una línea recta los puntos (x_i, y_i) con (x_f, y_f) . Sin embargo, esto no se puede llevar a cabo en la práctica debido a una limitación estructural habitual en las aeronaves, el factor de carga máximo $n_{\text{máx}}$ de forma que $1 < n_{\text{máx}} < \infty$. Esta limitación es más propia de aeronaves con ala fija que con ala rotatoria [1]. Las actuaciones de una aeronave durante un viraje horizontal uniforme¹¹, que en definitiva se trata de una trayectoria circular en el plano horizontal, vienen definidas por las siguientes expresiones (asumiendo ángulos de ataque y resbalamiento despreciables)

¹¹A velocidad de vuelo V constante.

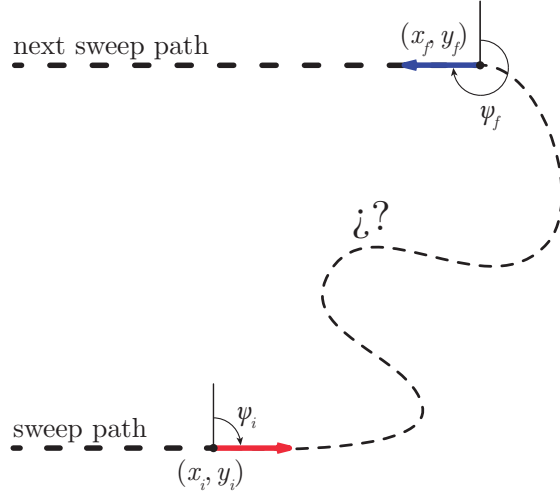


Figura 3.6: Planteamiento del problema de Dubins para un U -turn que se inicia con el estado (x_i, y_i, ψ_i) y finaliza con el estado (x_f, y_f, ψ_f) .

[5]:

$$n(\phi) = \frac{1}{\cos(\phi)}, \quad (3.3)$$

$$\dot{\psi}(\phi) = \frac{g \tan(\phi)}{V}, \quad (3.4)$$

$$R(\phi) = \frac{V}{\dot{\psi}(\phi)} = \frac{V^2}{g \tan(\phi)}. \quad (3.5)$$

donde n es el factor de carga, ϕ es el ángulo de balanceo, V la velocidad de vuelo, g la aceleración de la gravedad, $\dot{\psi}$ la velocidad de guiñada, y R el radio de giro.

Por definición, el ángulo de balanceo se encuentra definido en el intervalo $\phi \in [-\pi, \pi)$. Sin embargo, la gran mayoría de las aeronaves (salvo las militares) operan en el intervalo $\phi \in (-\pi/2, \pi/2)$, donde las Ecs. (3.3)-(3.5) se encuentran bien definidas. En este intervalo $\phi < 0$ se corresponde con un viraje CCW y $\phi > 0$ con un viraje CW. Si asumimos un viraje CW realizado al máximo factor de carga permisible, y sabiendo que $n(\phi)$ es una función continua y monótona creciente en el intervalo $(0, \pi/2)$, y por tanto biyectiva en este intervalo, tal que $n(0) < n_{\text{máx}} < n(\pi/2)$, se asegura que

$$\exists! \phi^* \in (0, \pi/2) \quad \text{tal que} \quad n(\phi^*) = n_{\text{máx}}.$$

Por lo tanto, el rango admisible para el ángulo de balance será $\phi \in (0, \phi^*]$. Sabiendo que la función $R(\phi)$ es monótona decreciente en el intervalo $\phi \in (0, \pi/2)$, y por consiguiente también lo será en el rango admisible $\phi \in (0, \phi^*]$, definiremos el radio mínimo de giro ρ como

$$\rho = R(\phi^*) \leq R(\phi) \quad \forall \phi \in (0, \phi^*].$$

El desarrollo es análogo para un viraje CCW, prestando atención a los signos. Por lo tanto, los virajes horizontales uniformes que tienen una restricción en el factor de carga tienen aparejado una restricción en su radio mínimo de giro ρ , lo que convierte el problema anterior en la búsqueda de una trayectoria entre dos estados p y q en la cual la curvatura absoluta a lo largo de dicha trayectoria está acotada

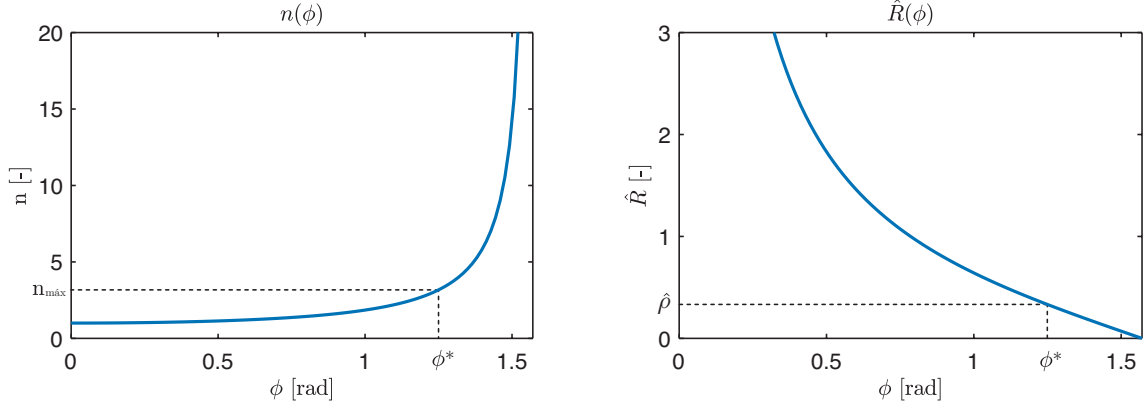


Figura 3.7: Gráficas de la función $n(\phi)$ y de la versión adimensionalizada de la función $R(\phi)$, de forma que $\hat{R}(\phi) = R(\phi)/(V^2/g)$ y $\hat{\rho} = \rho/(V^2/g)$.

superiormente por $1/\rho$, y donde las direcciones tangentes al inicio y al fin deben coincidir con los rumbos de p y q respectivamente, ψ_i y ψ_f .

Dubins [10] fue el primero que estudió el problema de encontrar la trayectoria de menor longitud sujeta a restricciones de curvatura entre dos puntos de \mathbb{R}^2 , probando el siguiente teorema.

Teorema 2 (Dubins, 1957). *Dados dos estados $p, q \in \mathbb{R}^2 \times [0, 2\pi)$ cualesquiera y una restricción de radio mínimo de curvatura ρ , si C representa un arco de circunferencia y S un segmento recto, entonces la trayectoria de menor longitud que los une será de alguno de los siguientes tipos:*

1. *CCC*
2. *CSC*
3. *Un caso degenerado de las anteriores*

Usualmente a estas trayectorias descritas por Dubins se le denominan caminos de Dubins (*Dubins paths*). Si denotamos a L y R como giros en sentido antihorario y horario respectivamente, tenemos entonces que la trayectoria puede ser alguna de las siguientes seis combinaciones:

Tipo	Combinaciones
CCC	LRL, RLR
CSC	LSL, RSR, LSR, RSL

Tabla 3.1: Posibles combinaciones (no degeneradas) de los caminos de Dubins.

Se puede demostrar que cuando la distancia entre el punto inicial y final es mayor que 4ρ la trayectoria de menor longitud corresponderá a alguna de las combinaciones de la familia CSC [11]. Asumiremos en adelante que esta condición se cumplirá, por lo que sólo tendremos que analizar los cuatro casos CSC mostrados en la Fig. 3.8.

En primer lugar, calcularemos ciertos parámetros que dependerán exclusivamente de los estados inicial $p = (x_i, y_i, \psi_i)$ y final $q = (x_f, y_f, \psi_f)$. Por un lado, las

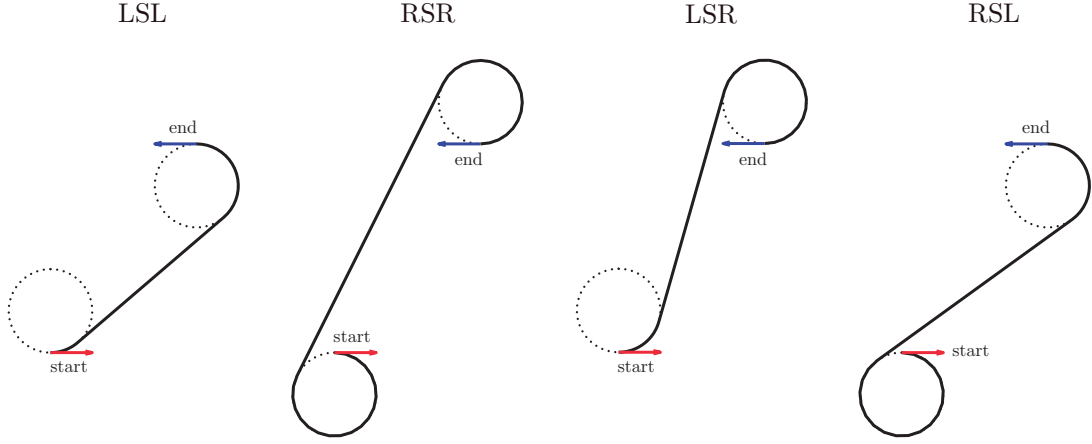


Figura 3.8: Posibles caminos de Dubins para la familia de trayectorias CSC para una misma configuración inicial y final.

coordenadas de los centros de las circunferencias de viraje se calculan mediante [12]

$$\begin{aligned}
 CR_i &= (x_{Ri}, y_{Ri}) = (x_i + \rho \cos \psi_i, y_i - \rho \sin \psi_i), \\
 CL_i &= (x_{Li}, y_{Li}) = (x_i - \rho \cos \psi_i, y_i + \rho \sin \psi_i), \\
 CR_f &= (x_{Rf}, y_{Rf}) = (x_f + \rho \cos \psi_f, y_f - \rho \sin \psi_f), \\
 CL_f &= (x_{Lf}, y_{Lf}) = (x_f - \rho \cos \psi_f, y_f + \rho \sin \psi_f).
 \end{aligned}$$

Por otro lado definiremos la posición angular de los puntos de inicio y final, β_i y β_f respectivamente, con respecto a sus circunferencias de viraje asociadas (el superíndice + está relacionado con un viraje CCW y - con un viraje CW) como

$$\begin{aligned}
 \beta_i^- &= \psi_i - \frac{\pi}{2}, \\
 \beta_f^- &= \psi_f - \frac{\pi}{2}, \\
 \beta_i^+ &= \psi_i + \frac{\pi}{2}, \\
 \beta_f^+ &= \psi_f + \frac{\pi}{2}.
 \end{aligned}$$

Por último definiremos la función

$$f : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\} \rightarrow [0, 2\pi) \text{ tal que } f(x, y) = \text{mod}(\text{atan2}(x, y), 2\pi). \quad (3.6)$$

que nos proporcionará el rumbo de un vector con coordenadas (x, y) [13]. La operación $\text{atan2}(a, b)$ representa la función tangente inversa con dos argumentos.

- **Caso RSR:** La trayectoria RSR es generada comenzando por una rotación en sentido horario desde la posición inicial (x_i, y_i) describiendo un arco de radio ρ y con centro CR_i hasta que la aeronave alcanza un ángulo de rumbo de θ . El ángulo θ es el ángulo del segmento recto d medido desde el eje vertical y que se calcula particularizando la función descrita en (3.6) con los valores

$$\theta = f(x_{Rf} - x_{Ri}, y_{Rf} - y_{Ri}).$$

Conociendo el valor de θ podremos definir

$$\beta_{\theta}^{-} = \theta - \frac{\pi}{2}.$$

$$\begin{bmatrix} x_{R1}(u) \\ y_{R1}(u) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_{Ri} + \rho \sin u \\ y_{Ri} + \rho \cos u \end{bmatrix}, \quad \text{donde } u \in [\beta_i^{-}, u_1] : u_1 = \begin{cases} \beta_{\theta}^{-}, & \text{si } \beta_{\theta}^{-} > \beta_i^{-}, \\ \beta_{\theta}^{-} + 2\pi, & \text{si } \beta_{\theta}^{-} < \beta_i^{-}. \end{cases}$$

Se continúa con un segmento recto d de longitud \bar{d} , valor que coincide con la distancia $\overline{CR_i CR_f}$ entre los centros de las circunferencias CR_i y CR_f , de forma que

$$\bar{d} = \sqrt{(x_{Rf} - x_{Ri})^2 + (y_{Rf} - y_{Ri})^2}.$$

$$\begin{bmatrix} x_S(u) \\ y_S(u) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_{R1}(u_1) + u \sin \theta \\ y_{R1}(u_1) + u \cos \theta \end{bmatrix}, \quad \text{donde } u \in [0, \bar{d}].$$

La trayectoria finaliza con un giro nuevamente en sentido horario describiendo otro arco de radio ρ y centro CR_f hasta que la aeronave alcanza el rumbo final ψ_f :

$$\begin{bmatrix} x_{R2}(u) \\ y_{R2}(u) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_{Rf} + \rho \sin u \\ y_{Rf} + \rho \cos u \end{bmatrix}, \quad \text{donde } u \in [\beta_{\theta}^{-}, u_2] : u_2 = \begin{cases} \beta_f^{-}, & \text{si } \beta_f^{-} > \beta_{\theta}^{-}, \\ \beta_f^{-} + 2\pi, & \text{si } \beta_f^{-} < \beta_{\theta}^{-}. \end{cases}$$

La trayectoria completa se muestra en la Fig. 3.9.

Los resultados expuestos para el caso RSR asumen que se cumple

$$\bar{d} \geq 0 \iff CR_i \neq CR_f \iff l \geq 0.$$

- **Caso LSL:** La trayectoria LSL es generada comenzando por una rotación en sentido antihorario desde la posición inicial (x_i, y_i) describiendo un arco de radio ρ y con centro CL_i hasta que la aeronave alcanza un ángulo de rumbo de θ . En esta ocasión el ángulo θ se obtiene mediante

$$\theta = f(x_{Lf} - x_{Li}, y_{Lf} - y_{Li}).$$

Conociendo el valor de θ podremos definir

$$\beta_{\theta}^{+} = \theta + \frac{\pi}{2}.$$

$$\begin{bmatrix} x_{L1}(u) \\ y_{L1}(u) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_{Li} + \rho \sin u \\ y_{Li} + \rho \cos u \end{bmatrix}, \quad \text{donde } u \in [\beta_i^{+}, u_1] : u_1 = \begin{cases} \beta_{\theta}^{+}, & \text{si } \beta_{\theta}^{+} < \beta_i^{+}, \\ \beta_{\theta}^{+} - 2\pi, & \text{si } \beta_{\theta}^{+} > \beta_i^{+}. \end{cases}$$

Se continúa con un segmento recto d de longitud \bar{d} , valor que coincide ahora con la distancia $\overline{CL_i CL_f}$ entre los centros de las circunferencias CL_i y CL_f , de forma que

$$\bar{d} = \sqrt{(x_{Lf} - x_{Li})^2 + (y_{Lf} - y_{Li})^2}.$$

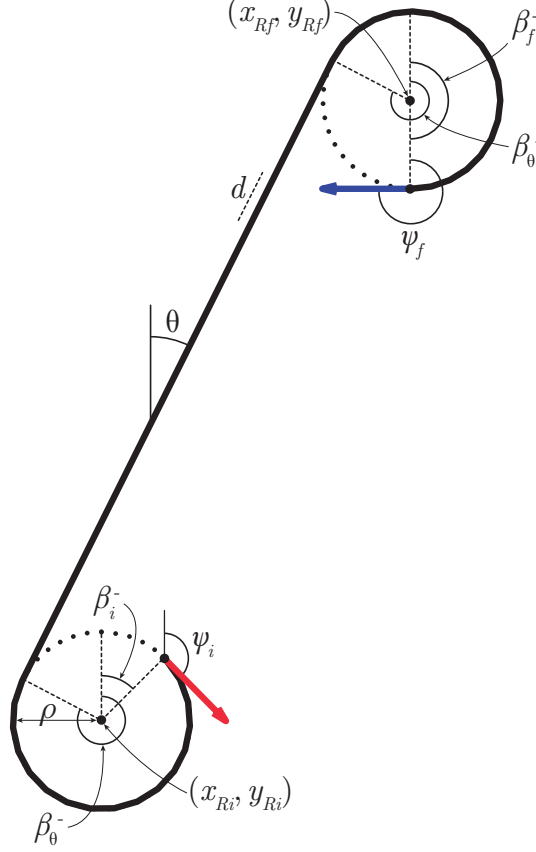


Figura 3.9: Trayectoria RSR.

$$\begin{bmatrix} x_S(u) \\ y_S(u) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_{L1}(u_1) + u \sin \theta \\ y_{L1}(u_1) + u \cos \theta \end{bmatrix}, \quad \text{donde } u \in [0, \bar{d}].$$

La trayectoria finaliza con un giro nuevamente en sentido antihorario describiendo otro arco de radio ρ y centro CL_f hasta que la aeronave alcanza el rumbo final ψ_f :

$$\begin{bmatrix} x_{L2}(u) \\ y_{L2}(u) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_{L_f} + \rho \sin u \\ y_{L_f} + \rho \cos u \end{bmatrix}, \quad \text{donde } u \in [\beta_\theta^+, u_2] : u_2 = \begin{cases} \beta_f^+, & \text{si } \beta_f^+ < \beta_\theta^+, \\ \beta_f^+ - 2\pi, & \text{si } \beta_f^+ > \beta_\theta^+. \end{cases}$$

La trayectoria completa se muestra en la Fig. 3.10.

Los resultados expuestos para el caso LSL asumen que se cumple

$$\bar{d} \geq 0 \iff CL_i \neq CL_f \iff l \geq 0.$$

- Caso RSL:** La trayectoria RSL es generada comenzando por una rotación en sentido horario desde la posición inicial (x_i, y_i) describiendo un arco de radio ρ y con centro CR_i hasta que la aeronave alcanza un ángulo de rumbo de θ . En esta ocasión el cálculo del ángulo θ hace uso del triángulo formado por CR_i , el punto medio del segmento recto d y el punto tangente de dicho segmento con la primera circunferencia, de forma que

$$\theta = \eta - \gamma + \frac{\pi}{2},$$

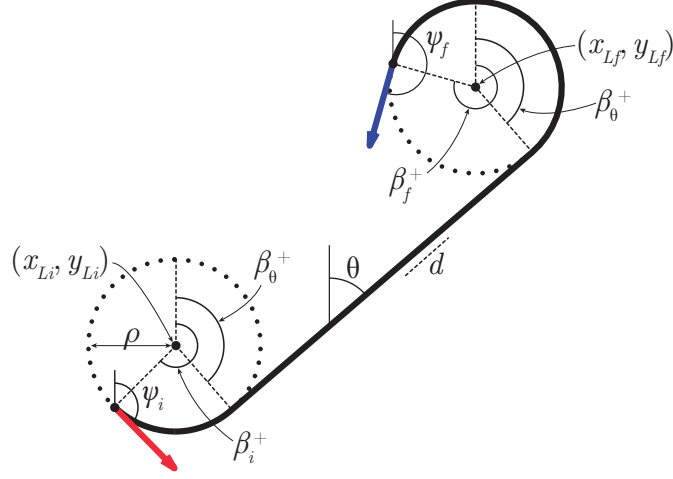


Figura 3.10: Trayectoria LSL.

donde η es el ángulo del segmento $\overline{CR_iCL_f}$ medido desde el eje vertical y

$$\eta = f(x_{Lf} - x_{Ri}, y_{Lf} - y_{Ri}),$$

y donde γ es el ángulo formado entre el segmento $\overline{CR_iCL_f}$ y la normal al punto tangente del círculo CR_i y el segmento d . Este ángulo se calcula mediante

$$\gamma = \arctan\left(\frac{d}{2\rho}\right).$$

$$\begin{bmatrix} x_{R1}(u) \\ y_{R1}(u) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_{Ri} + \rho \sin u \\ y_{Ri} + \rho \cos u \end{bmatrix}, \quad \text{donde } u \in [\beta_i^-, u_1] : u_1 = \begin{cases} \beta_\theta^-, & \text{si } \beta_\theta^- > \beta_i^-, \\ \beta_\theta^- + 2\pi, & \text{si } \beta_\theta^- < \beta_i^-. \end{cases}$$

Se continúa con un segmento recto d de longitud \bar{d} que se calcula haciendo uso de la distancia l del segmento $\overline{CR_iCL_f}$ y del radio ρ , por lo que

$$\bar{d} = \sqrt{l^2 - 4\rho^2},$$

$$l = \sqrt{(x_{Lf} - x_{Ri})^2 + (y_{Lf} - y_{Ri})^2}.$$

Conociendo el valor de θ podremos definir

$$\beta_\theta^- = \theta - \frac{\pi}{2},$$

$$\beta_\theta^+ = \theta + \frac{\pi}{2}.$$

$$\begin{bmatrix} x_S(u) \\ y_S(u) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_{R1}(u_1) + u \sin \theta \\ y_{R1}(u_1) + u \cos \theta \end{bmatrix}, \quad \text{donde } u \in [0, \bar{d}].$$

La trayectoria finaliza con un giro en sentido antihorario describiendo otro arco de radio ρ y centro CL_f hasta que la aeronave alcanza el rumbo final ψ_f :

$$\begin{bmatrix} x_{L2}(u) \\ y_{L2}(u) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_{Lf} + \rho \sin u \\ y_{Lf} + \rho \cos u \end{bmatrix}, \quad \text{donde } u \in [\beta_\theta^+, u_2] : u_2 = \begin{cases} \beta_f^+, & \text{si } \beta_f^+ < \beta_\theta^+, \\ \beta_f^+ - 2\pi, & \text{si } \beta_f^+ > \beta_\theta^+. \end{cases}$$

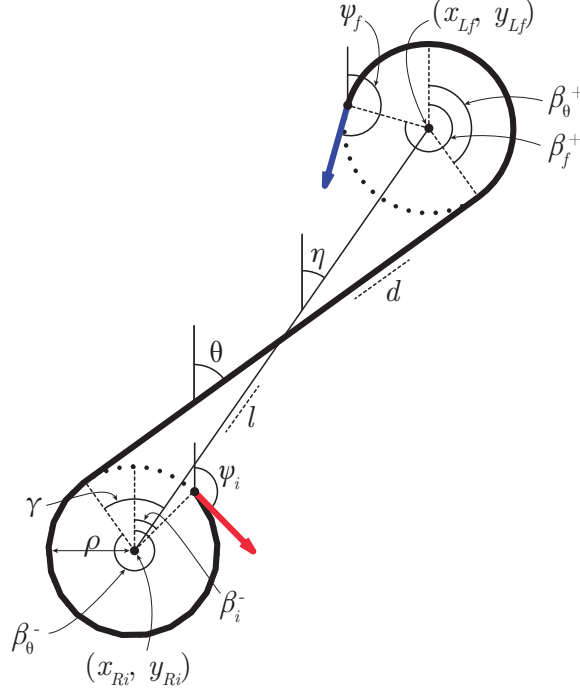


Figura 3.11: Trayectoria RSL.

La trayectoria completa se muestra en la Fig. 3.11.

Los resultados expuestos para el caso RSL asumen que se cumple

$$\bar{d} \geq 0 \iff l \geq 2\rho.$$

- Caso LSR:** La trayectoria LSR es generada comenzando por una rotación en sentido antihorario desde la posición inicial (x_i, y_i) describiendo un arco de radio ρ y con centro CL_i hasta que la aeronave alcanza un ángulo de rumbo de θ . En esta ocasión el cálculo del ángulo θ hace uso del triángulo formado por CL_i , el punto medio del segmento recto d y el punto tangente de dicho segmento con la primera circunferencia, de forma que

$$\theta = \eta + \gamma - \frac{\pi}{2},$$

donde η es el ángulo del segmento $\overline{CL_iCR_f}$ medido desde el eje vertical y

$$\eta = f(x_{Rf} - x_{Li}, y_{Rf} - y_{Li}),$$

y donde γ es el ángulo formado entre el segmento $\overline{CL_iCR_f}$ y la normal al punto tangente del círculo CL_i y el segmento d . Este ángulo se calcula mediante

$$\gamma = \arctan\left(\frac{d}{2\rho}\right).$$

$$\begin{bmatrix} x_{L1}(u) \\ y_{L1}(u) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_{Li} + \rho \sin u \\ y_{Li} + \rho \cos u \end{bmatrix}, \quad \text{donde } u \in [\beta_i^+, u_1] : u_1 = \begin{cases} \beta_\theta^+, & \text{si } \beta_\theta^+ < \beta_i^+, \\ \beta_\theta^+ - 2\pi, & \text{si } \beta_\theta^+ > \beta_i^+. \end{cases}$$

Se continúa con un segmento recto d de longitud \bar{d} que se calcula haciendo uso de la distancia l del segmento $\overline{CL_iCR_f}$ y del radio ρ , por lo que

$$\bar{d} = \sqrt{l^2 - 4\rho^2},$$

$$l = \sqrt{(x_{Rf} - x_{Li})^2 + (y_{Rf} - y_{Li})^2}.$$

Conociendo el valor de θ podremos definir

$$\beta_{\theta}^{-} = \theta - \frac{\pi}{2},$$

$$\beta_{\theta}^{+} = \theta + \frac{\pi}{2}.$$

$$\begin{bmatrix} x_S(u) \\ y_S(u) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_{L1}(u_1) + u \sin \theta \\ y_{L1}(u_1) + u \cos \theta \end{bmatrix}, \quad \text{donde } u \in [0, \bar{d}].$$

La trayectoria finaliza con un giro en sentido horario describiendo otro arco de radio ρ y centro CR_f hasta que la aeronave alcanza el rumbo final ψ_f :

$$\begin{bmatrix} x_{R2}(u) \\ y_{R2}(u) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_{Rf} + \rho \sin u \\ y_{Rf} + \rho \cos u \end{bmatrix}, \quad \text{donde } u \in [\beta_{\theta}^{-}, u_2] : u_2 = \begin{cases} \beta_f^{-}, & \text{si } \beta_f^{-} > \beta_{\theta}^{-}, \\ \beta_f^{-} + 2\pi, & \text{si } \beta_f^{-} < \beta_{\theta}^{-}. \end{cases}$$

La trayectoria completa se muestra en la Fig. 3.12.

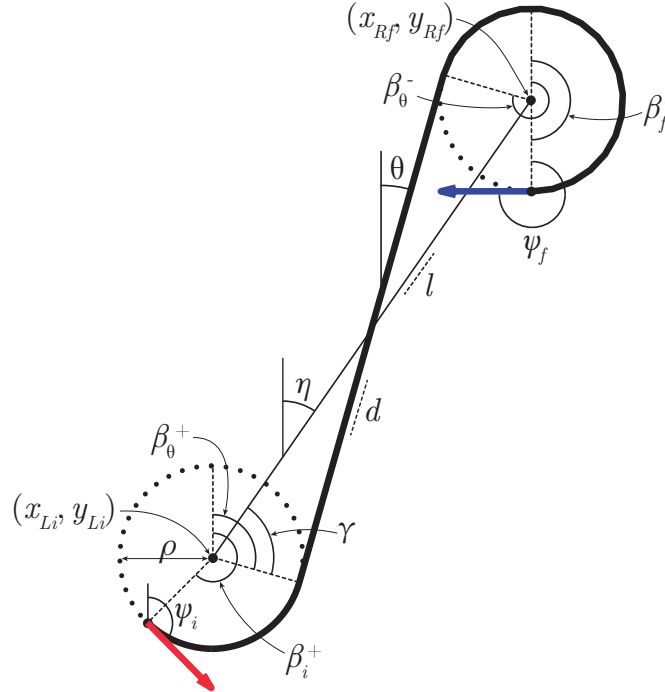


Figura 3.12: Trayectoria LSR.

Los resultados expuestos para el caso LSR asumen que se cumple

$$\bar{d} \geq 0 \iff l \geq 2\rho.$$

Observación 6. Hasta ahora se han parametrizado las curvas RSR, LSL, RSL y LSR para cualesquiera dos estados inicial $p = (x_i, y_i, \psi_i)$ y final $q = (x_f, y_f, \psi_f)$. Sin embargo, para cada curva CSC existe una condición de existencia:

$$\begin{aligned}\exists \text{RSR} &\iff l \geq 0, \\ \exists \text{LSL} &\iff l \geq 0, \\ \exists \text{RSL} &\iff l \geq 2\rho, \\ \exists \text{LSR} &\iff l \geq 2\rho.\end{aligned}$$

Por lo tanto, podemos asegurar que si $l \geq 2\rho$, podremos ir de un estado inicial p a otro final q por cualquier curva de la familia CSC. Sin embargo, en concordancia con el objetivo principal de la generación de la trayectoria, lo que nos interesará será seleccionar aquel camino de Dubins que proporcione la menor longitud. Por otro lado, recuérdese que hemos asumido que se cumple

$$\sqrt{(x_f - x_i)^2 + (y_f - y_i)^2} \geq 4\rho$$

para poder reducir la búsqueda de los caminos de Dubins óptimos a la familia CSC, descartando la búsqueda en la familia CCC. Se puede demostrar que

$$\sqrt{(x_f - x_i)^2 + (y_f - y_i)^2} \geq 4\rho \implies l \geq 2\rho,$$

por lo que en nuestro caso siempre podremos ir del estado p al q por cualquier camino CSC.

Observación 7. Recuérdese que la motivación de introducir estos caminos de Dubins fue la de unir dos *sweep paths* consecutivos. Sin embargo, dado que una pareja consecutiva de estos segmentos es paralela y se recorren en sentidos opuestos, se cumple que

$$\psi_f = \psi_i + \pi, \tag{3.7}$$

lo que permite reducir el espectro de búsqueda a únicamente dos combinaciones: RSR o LSL (véase Fig. 3.13). En los casos en los que se cumple (3.7) diremos que el vehículo realizará un *U-turn*. Para saber cuál de ambas trayectorias será la de menor longitud únicamente será necesario saber en qué semiplano (derecho o izquierdo) se encuentra el punto de destino (x_f, y_f) con respecto al de origen (x_i, y_i) :

$$\begin{cases} (y_f - y_i) \sin \psi_i - (x_f - x_i) \cos \psi_i > 0 &\implies (x_f, y_f) \text{ en semiplano izquierdo,} \\ (y_f - y_i) \sin \psi_i - (x_f - x_i) \cos \psi_i < 0 &\implies (x_f, y_f) \text{ en semiplano derecho.} \end{cases}$$

Calculando longitudes de segmentos y de arcos de circunferencias, es un simple ejercicio comprobar que si $\psi_f = \psi_i + \pi$, entonces de las cuatro posibles disposiciones LSL, RSR, LSR y RSL cuando (x_f, y_f) está situado en el semiplano izquierdo, la que minimiza el recorrido es precisamente la configuración LSL. Del mismo modo, por simetría, cuando (x_f, y_f) está situado en el semiplano derecho, la disposición RSR será la que minimice en este caso la longitud recorrida.

Gracias a este resultado se evita tener que calcular las longitudes de las cuatro disposiciones para saber cuál hay que aplicar. A pesar de ello, se han presentado las ecuaciones de las cuatro curvas de la familia CSC, a sabiendas de que en la Sección 3.2 la condición (3.7) no tiene porque cumplirse y por tanto será necesario calcular sus longitudes y compararlas.

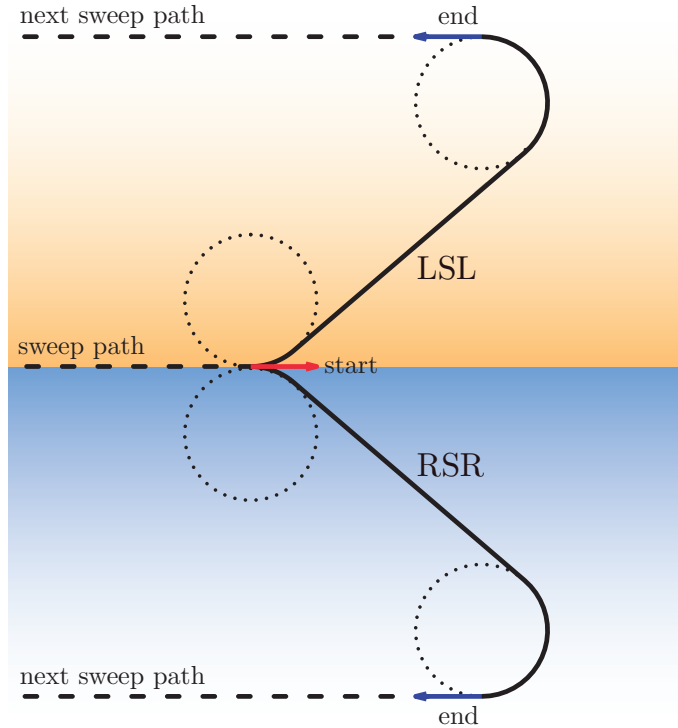


Figura 3.13: Semiplanos en los que queda dividido \mathbb{R}^2 por el vector asociado al estado (x_i, y_i, ψ_i) . En el caso de los *U-turns*, si (x_f, y_f) se encuentra en el semiplano derecho (azul) el camino de Dubins asociado será de tipo RSR, mientras que si se encuentra en el semiplano izquierdo (naranja) el camino de Dubins asociado será de tipo LSL.

Ejemplo 3 (Polígono convexo (cont.)). Siguiendo con el polígono del Ejemplo 2, del cuál ya se analizó cuál era la dirección óptima de barrido y en consecuencia, cómo debían ser las *sweep paths* correspondientes, se muestra ahora cómo quedaría el resultado de la unión de estos *sweep paths* mediante los caminos de Dubins explicados en esta sección (véase Fig. 3.14).

Es importante destacar que existen 4 posibles puntos de inicio de la trayectoria (puntos rojos, denominados *joint-points*) para un mismo conjunto de *sweep paths*, o lo que es lo mismo, 4 posibles formas diferentes de recorrer las *sweep paths*. Cada punto de inicio tendrá asociado un único punto de salida (puntos azules). La existencia de estas 4 posibilidades será la pieza fundamental para el desarrollo de la Subsección 3.2.2. De las 4 posibles combinaciones, 2 de ellas tienen una misma longitud y las otras 2 otra longitud. Aunque usualmente la diferencia entre ambas longitudes no será significativa, de conformidad con el criterio adoptado habría que seleccionar la de menor longitud, pudiéndola recorrer en cualquiera de los dos sentidos posibles, ya que una misma trayectoria tiene exactamente la misma longitud en cualquiera de los sentidos en los que se recorra.

3.2. CPP en RoI cóncava

Trataremos ahora el caso en el que el polígono P es cóncavo $\iff ncc > 0 \iff \exists i \in I_1 : \mathcal{S}(v_i) < 0$.

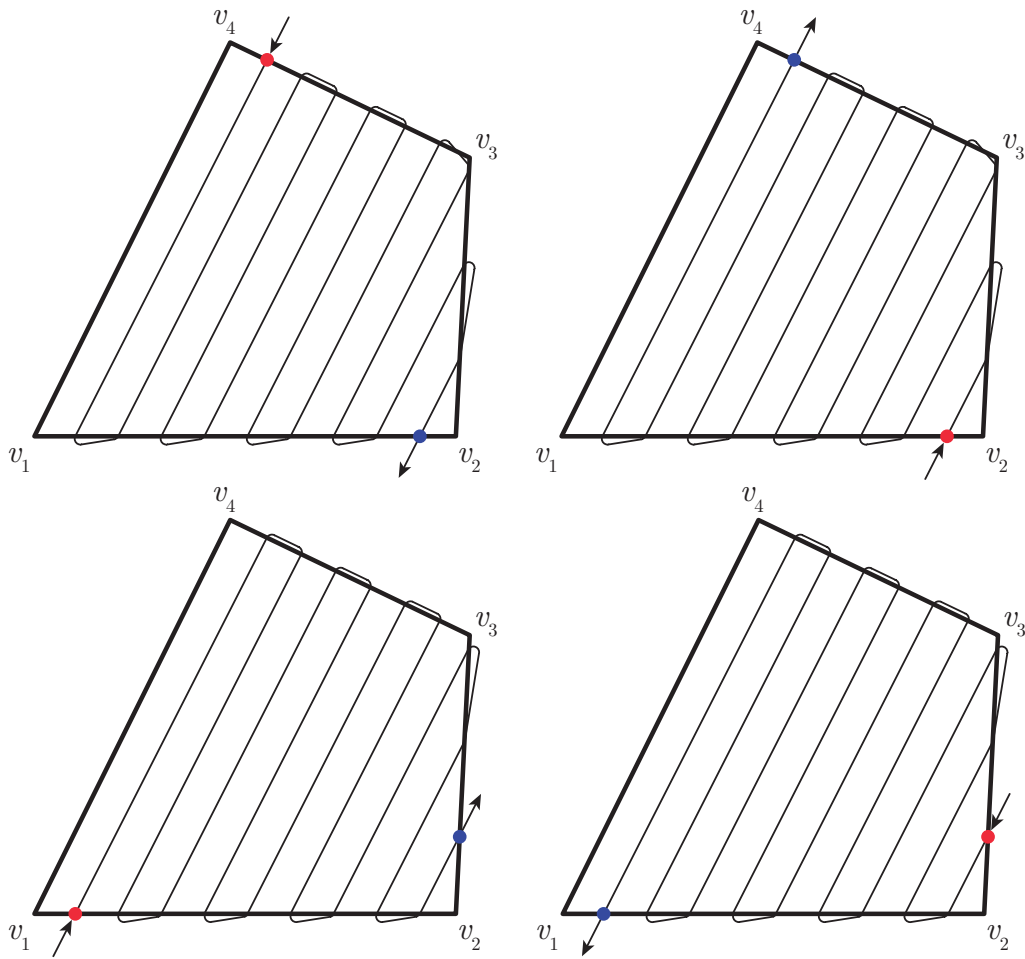


Figura 3.14: Posibles trayectorias completas para la dirección óptima de barrido del polígono convexo en estudio. Los puntos rojo y azul representan el inicio y fin de la trayectoria respectivamente.

3.2.1. Descomposición

La estrategia de recorrer el interior de P mediante segmentos perpendiculares a una única dirección de barrido no es la más adecuada cuando P es un polígono cóncavo. La Fig. 3.15 muestra un ejemplo sencillo de que asignar una dirección de barrido a cada subregión resulta en una mejor trayectoria, ya que en la Fig. 3.15-(1) el UAV tendrá que ejecutar 11 U -turns, mientras que en la Fig. 3.15-(2) serán 8 U -turns y 1 giro de 90° .

Para obtener el mínimo número de U -turns en cada subregión, el área interior del polígono cóncavo deberá ser descompuesta en subregiones convexas en concordancia con el principio de mínima suma de anchuras [3]. Si tenemos un polígono P con n vértices y ncc vértices cóncavos, tras la descomposición de P obtendremos m subpolígonos convexas P_1, P_2, \dots, P_m cuyas anchuras¹² serán W_1, W_2, \dots, W_m respectivamente. Por tanto, el problema de la descomposición de un polígono cóncavo en

¹²Recuérdese que la anchura W de un polígono sólo está definida para polígonos convexas.

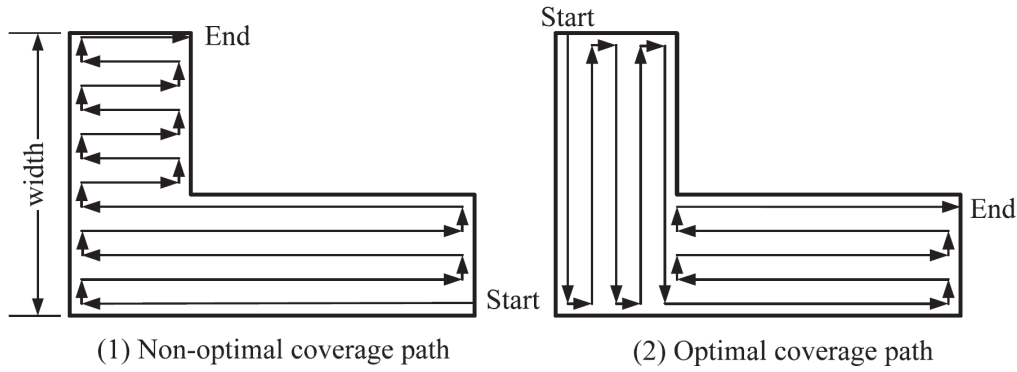


Figura 3.15: Comparativa entre dos métodos de cobertura diferentes (véase [3]).

subpolígonos convexos con la menor suma de anchuras¹³ puede ser descrito como:

$$\begin{cases} \text{mín} & \sum_{i=1}^m W_i, \\ \text{tal que} & P_i \text{ sea un polígono convexo.} \end{cases}$$

Destacar que la descomposición anteriormente descrita es de tipo exacta, en el que la unión de todos los subpolígonos generados por la descomposición ocupan exactamente el área objetivo, de forma que $\bigcup_{i=1}^m P_i = P$, lo que en la literatura se denomina como *exact cellular decomposition*. Es evidente que esta descomposición no es única; es más, el problema de descomponer un polígono en subpolígonos más simples es de interés en multitud de campos como por ejemplo la geometría computacional, reconocimiento de patrones sintácticos o la generación de gráficos [14].

En la Fig. 3.16 se representan los cuatro tipos de descomposición de un polígono cóncavo con mínima suma de anchuras, que son:

- (1) Extender uno de los lados de un vértice cóncavo.
- (2) Conectar dos vértices cóncavos.
- (3) Hacer una línea que pase por un vértice cóncavo y sea paralela a un lado.
- (4) Conectar un vértice cóncavo con otro convexo.

En este trabajo, al igual que en [3], se empleará el método de descomposición (3) por ser el más general de los aquí propuestos, pudiendo así abarcar un espacio de soluciones óptimas más amplio.

Definición 10 (Segmento de descomposición). *Segmento recto que tiene sus extremos situados en dos lados diferentes del polígono cóncavo P , se encuentra completamente contenido en su interior, y además pasa por un vértice cóncavo.*

Tomemos un polígono P con n vértices. Asumamos que al menos uno de sus vértices es cóncavo, lo que implica que P es un polígono cóncavo y por tanto, la generación de la trayectoria requerirá descomponerlo.

¹³Este problema es de tipo NP-hard, por lo que sólo puede ser resuelto en tiempo polinomial de forma aproximada.

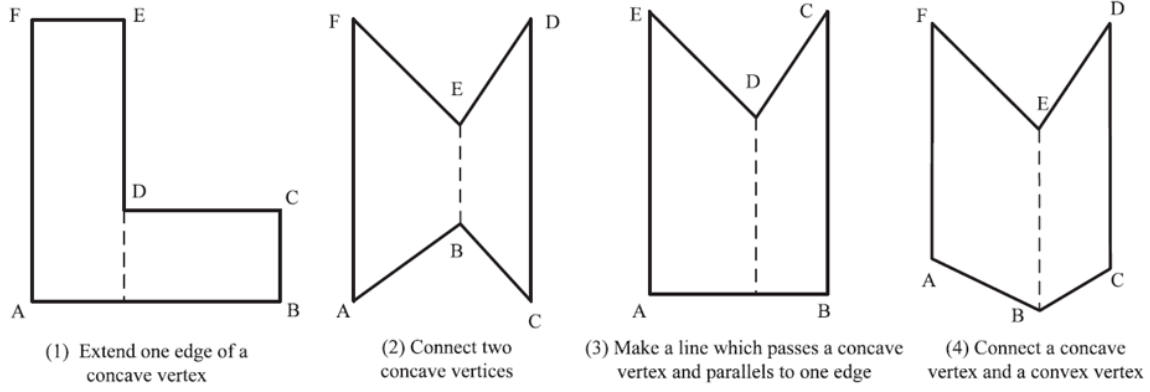


Figura 3.16: Los cuatro tipos de descomposición de un polígono cóncavo con mínima suma de anchuras (véase [3]).

Recordemos que en la Sección 2.1 definimos el conjunto discreto de valores $I_1 = \{1, \dots, n\}$. Dado que $\mathcal{S}(v_i) \neq 0$, consideremos la partición $I_1 = I_1^{cx} \cup I_1^{cv}$ tal que $I_1^{cx} \cap I_1^{cv} = \emptyset$ y donde

$$I_1^{cx} = \{i \in I_1 \mid \mathcal{S}(v_i) > 0\},$$

$$I_1^{cv} = \{i \in I_1 \mid \mathcal{S}(v_i) < 0\}.$$

Denominemos $i \in I_1^{cv}$ al índice del vértice cóncavo por el que tiene que pasar el segmento de descomposición, y denominemos $j \in I_1$ al índice que indica el lado e_j de P al cual el segmento de descomposición debe ser paralelo.

Que una recta sea paralela a e_j significa que tendrá como vector director (unitario) al vector \vec{u} , siendo este

$$\vec{u} = \frac{\vec{v}_j \vec{v}_{j+1}}{\|\vec{v}_j \vec{v}_{j+1}\|} = (u_x, u_y).$$

Definimos la recta $C_{i,j}(\lambda)$ como aquella que pasa por el vértice $v_i = (x_i, y_i)$ y tiene como vector director $\vec{u} = (u_x, u_y)$, de forma que

$$C_{i,j}(\lambda) = \begin{cases} x(\lambda) = x_i + u_x \cdot \lambda \\ y(\lambda) = y_i + u_y \cdot \lambda \end{cases}, \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}.$$

Definamos el subconjunto estricto $I_3 \subset I_1$ como

$$I_3 = I_1 \setminus \{j, i, r\}, \quad \text{donde } r = \text{mod}(i + n - 2, n) + 1.$$

Aquellos lados e_k de P , con $k \in I_3$, serán segmentos de recta que, a priori, podrían intersectar a la recta $C_{i,j}$ en algún punto. Para comprobar qué lados e_k efectivamente intersectan a $C_{i,j}$ se emplea el siguiente resultado:

$$e_k \text{ intersecta a la curva } C_{i,j} \iff \langle \vec{v}_j \vec{v}_k, \vec{u}^\perp \rangle \cdot \langle \vec{v}_j \vec{v}_{k+1}, \vec{u}^\perp \rangle < 0, \quad (3.8)$$

donde $\vec{u}^\perp = (-u_y, u_x)$ representa al vector perpendicular a \vec{u} , y $\langle \cdot, \cdot \rangle$ denota el producto escalar de dos vectores. El conjunto de índices para los que se cumple (3.8) se le denotará como $I_4 \subseteq I_3$ (puede ocurrir que $I_4 = I_3$), por lo que ahora $k \in I_4$.

Ejemplo 4 (Segmento de descomposición). Supongamos el polígono cóncavo P de la Fig. 3.17. Este polígono tiene $n = 7$ vértices de los cuales $ncc = 2$ son cóncavos; en particular, v_5 y v_6 . Nos centraremos en descomponer este polígono mediante un segmento de descomposición que pasará por el vértice v_6 y que será paralelo al lado e_2 , por lo que se tiene que $i = 6$ y $j = 2$. Con ello, podemos obtener la recta paramétrica $C_{6,2}(\lambda)$, paralela a e_2 .

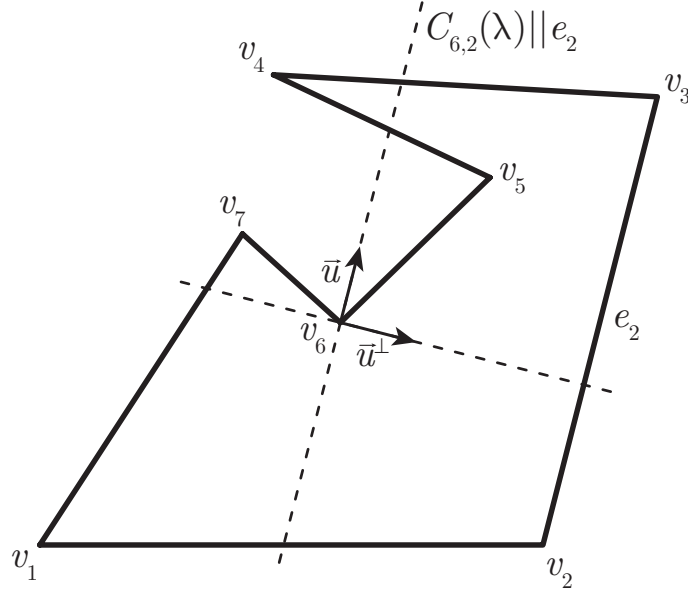


Figura 3.17: Búsqueda del segmento de descomposición de un polígono cóncavo. Para este ejemplo, el segmento de descomposición estará asociado al vértice cóncavo v_6 ($j = 6$) y será paralelo al lado e_2 ($i = 2$).

Como el polígono tiene $n = 7$ vértices se tiene que

$$I_1 = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}.$$

Siendo $r = \text{mod}(6 + 7 - 2, 7) + 1 = 5$, el conjunto I_3 será

$$I_3 = I_1 \setminus \{2, 6, 5\} = \{1, 3, 4, 7\}.$$

El criterio (3.8) aplicado $\forall k \in I_3$ establece que existe intersección con $C_{6,2}$ para los lados e_1 , e_3 y e_4 pero no para e_7 , por lo que ahora, para este ejemplo, $k \in I_4 = \{1, 3, 4\} \subset I_3$.

Retomando el desarrollo teórico, definamos ahora la recta $C_k(\mu)$ como aquella que pasa por los vértices $v_k = (x_k, y_k)$ y $v_{k+1} = (x_{k+1}, y_{k+1})$, es decir, que contiene al lado e_k , de forma que

$$C_k(\mu) = \begin{cases} x(\mu) = x_k + a \cdot \mu \\ y(\mu) = y_k + b \cdot \mu \end{cases}, \quad \forall \mu \in \mathbb{R},$$

donde $a = x_{k+1} - x_k$ y $b = y_{k+1} - y_k$. De esta manera, es equivalente

$$e_k \text{ intersecciona a la recta } C_{i,j} \iff C_k \text{ intersecciona a la curva } C_{i,j}.$$

Ya nos hemos asegurado de que $\forall k \in I_4$ existirá intersección entre las curvas $C_k(\mu)$ y $C_{i,j}(\lambda)$, que no es otra cosa que afirmar que

$$\exists \lambda^*, \mu^* \in \mathbb{R} \text{ tal que } C_{i,j}(\lambda^*) = C_k(\mu^*).$$

Los valores λ^* y μ^* se calculan mediante

$$\begin{bmatrix} \mu^* \\ \lambda^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & -u_x \\ b & -u_y \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} x_i - x_k \\ y_i - y_k \end{bmatrix},$$

pudiendo así obtener las coordenadas cartesianas de las intersecciones $\forall k \in I_4$, es decir, todas y cada una de las intersecciones que se produzcan. Denotaremos al punto de intersección de e_k con $C_{i,j}$ como Q_k .

Ejemplo 5 (Segmento de descomposición (cont.)). Continuando con el Ejemplo 4, las tres intersecciones que se producen entre las rectas $C_{6,2}$, y C_1 , C_3 y C_4 se denotan como Q_1 , Q_3 y Q_4 (véase Fig. 3.18).

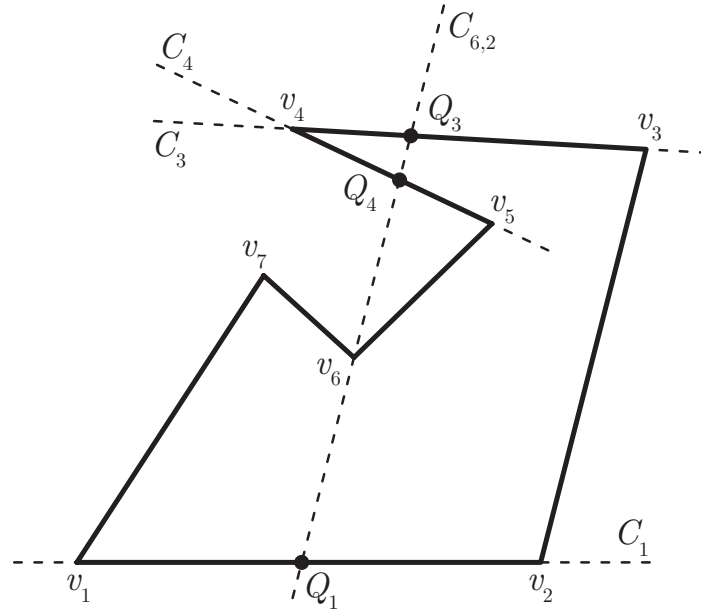


Figura 3.18: Intersecciones Q_k de las rectas C_1, C_3 y C_4 con la recta $C_{6,2}$.

Volviendo al desarrollo, dividamos ahora la recta $C_{i,j}$ en dos semirrectas $C_{i,j}^u$ y $C_{i,j}^l$ cuyo único punto en común sea el vértice v_i . Por otro lado, consideremos la primera intersección J^u de la semirrecta $C_{i,j}^u$ como aquella intersección Q_k contenida en ella (siempre que exista al menos una) que diste menos del vértice v_i . Del mismo modo, J^l será la primera intersección de la semirrecta $C_{i,j}^l$. Con ellos podremos crear los segmentos $\overline{v_i J^u}$ y $\overline{v_i J^l}$.

El segmento de descomposición del polígono cóncavo P asociado al vértice cóncavo v_i y paralelo al lado e_j será la unión de segmentos $\overline{v_i J^u}$ y $\overline{v_i J^l}$ siempre que ambos se encuentren en el interior del polígono. Si alguno de los segmentos no se encuentra en el interior del polígono P , entonces no se considera como parte del segmento de

descomposición. Para saber si un segmento (cuyos extremos están situado en lados diferentes del polígono) se encuentra en el interior al polígono nos basaremos en el siguiente resultado, que puede verse en [15]: la definición de si un punto se encuentra en el interior de una región viene dado por el Teorema de la curva de Jordan, también conocido como el test de paridad o regla par-impar (*parity test/even-odd rule*). Básicamente, esta regla establece que un punto se encuentra dentro de un polígono si, para cualquier semirrecta que parta desde ese punto, se produce un número impar de intersecciones con los lados del polígono. En consecuencia, si se produce un número par de intersecciones el punto en cuestión se encontrará en el exterior del polígono (véase Fig. 3.19).

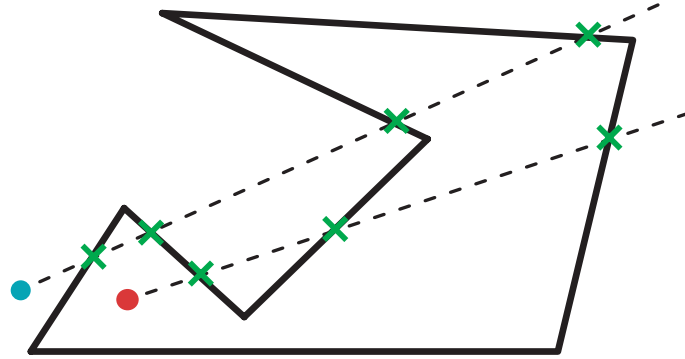


Figura 3.19: Test de paridad: el punto azul se encuentra fuera del polígono porque su semirrecta interseca un número par de veces (4), mientras que el punto rojo se encuentra dentro del polígono porque su semirrecta interseca un número impar de veces (3).

De este resultado se sigue que los segmentos $\overline{v_i J^u}$ y $\overline{v_i J^l}$ se encontrarán en el interior del polígono P si las semirrectas $C_{i,j}^u$ y $C_{i,j}^l$, respectivamente, intersecan a P un número impar de veces (sin contar con el propio vértice v_i). En caso de interseccionar un número par de veces, dicho segmento se encontrará en el exterior de P , y por tanto no nos interesa para formar el segmento de descomposición.

Ejemplo 6 (Segmento de descomposición (cont.)). Prosiguiendo con los Ejemplos 4 y 5, dividiremos la recta $C_{6,2}$ en sus dos semirrectas $C_{6,2}^u$ y $C_{6,2}^l$, teniendo que

$$Q_1 \in C_{6,2}^l \rightarrow C_{6,2}^l \text{ contiene 1 intersección (impar),} \quad (3.9)$$

$$Q_3, Q_4 \in C_{6,2}^u \rightarrow C_{6,2}^u \text{ contiene 2 intersecciones (par).} \quad (3.10)$$

Puede comprobarse fácilmente en la Fig. 3.20 como la primera (y única) intersección de la semirrecta $C_{6,2}^l$ es Q_1 , por lo que $J^l = Q_1$, mientras que la primera intersección de la semirrecta $C_{6,2}^u$ es Q_3 , y por tanto $J^u = Q_3$.

$$\text{Segmento asociado a } C_{6,2}^l \rightarrow \overline{v_6 J^l}.$$

$$\text{Segmento asociado a } C_{6,2}^u \rightarrow \overline{v_6 J^u}.$$

Sin embargo, de acuerdo con el corolario expuesto antes de este ejemplo y teniendo en cuenta (3.9) y (3.10), podemos concluir finalmente que

$$\left. \begin{array}{l} \overline{v_6 J^l} \text{ está en el interior de } P \\ \overline{v_6 J^u} \text{ no está en el interior de } P \end{array} \right\} \implies \text{el segmento de descomposición será } \overline{v_6 J^l}.$$

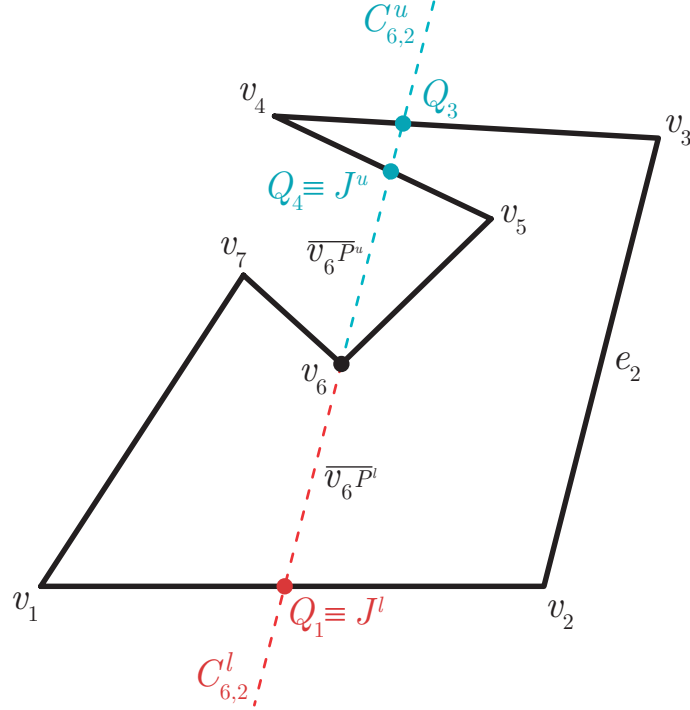


Figura 3.20: Semirrectas $C_{6,2}^u$ (azul) y $C_{6,2}^l$ (roja) y sus respectivas primeras intersecciones J^u y J^l . El segmento de descomposición en este caso es $\overline{v_6J^l}$.

Ejemplo 7 (Polígono cóncavo). Tomemos el polígono cóncavo ya presentado en la Fig. 2.2-(der). En esta ocasión, el hecho de que este polígono sea cóncavo nos obliga a tener que descomponerlo en subpolígonos convexos. Empleando el método de descomposición seleccionado tenemos que las 6 posibles descomposiciones (una por cada lado que tiene el polígono) son las mostradas en la Fig. 3.21. Nótese que en este ejemplo existen 2 vértices cóncavos, v_3 y v_6 , por lo que habrán 2 rectas de descomposición que pasarán por ambos vértices. Véase también que el número de subpolígonos convexos P_1, P_2, \dots, P_m en los que se descompone el polígono cóncavo original P depende de cuántas veces intersecten las líneas de descomposición a los lados de P , en definitiva, dependerá de la propia descomposición.

Para cada una de las descomposiciones calcularemos y sumaremos las envergaduras de cada uno sus subpolígonos convexos, obteniendo una suma $\sum_{i=1}^m W_i$ asociada a cada descomposición. Seleccionaremos aquella descomposición que proporcione el menor valor de esta suma. En este caso en particular, ese mínimo se obtiene para la descomposición en la que las líneas de descomposición son paralelas a e_3 (subfigura superior derecha de la Fig. 3.21). Para calcular los *paths* de cada uno de los subpolígonos convexos de la descomposición seleccionada sólo habría que aplicar lo ya visto en la Sección 3.1, obteniendo lo mostrado en la Fig. 3.22. La cuestión importante ahora es la siguiente: ¿cómo debería de ser la conexión entre las trayectorias de los subpolígonos para que la longitud total de la trayectoria sea el menor posible? La respuesta a esta pregunta la abordaremos en la Subsección 3.2.2. De momento, como no sabemos cómo será la mejor forma de final de la trayectoria completa, en la Fig. 3.22 se representan los potenciales *joint-points* de cada subpolígono convexo y no los caminos de Dubins.

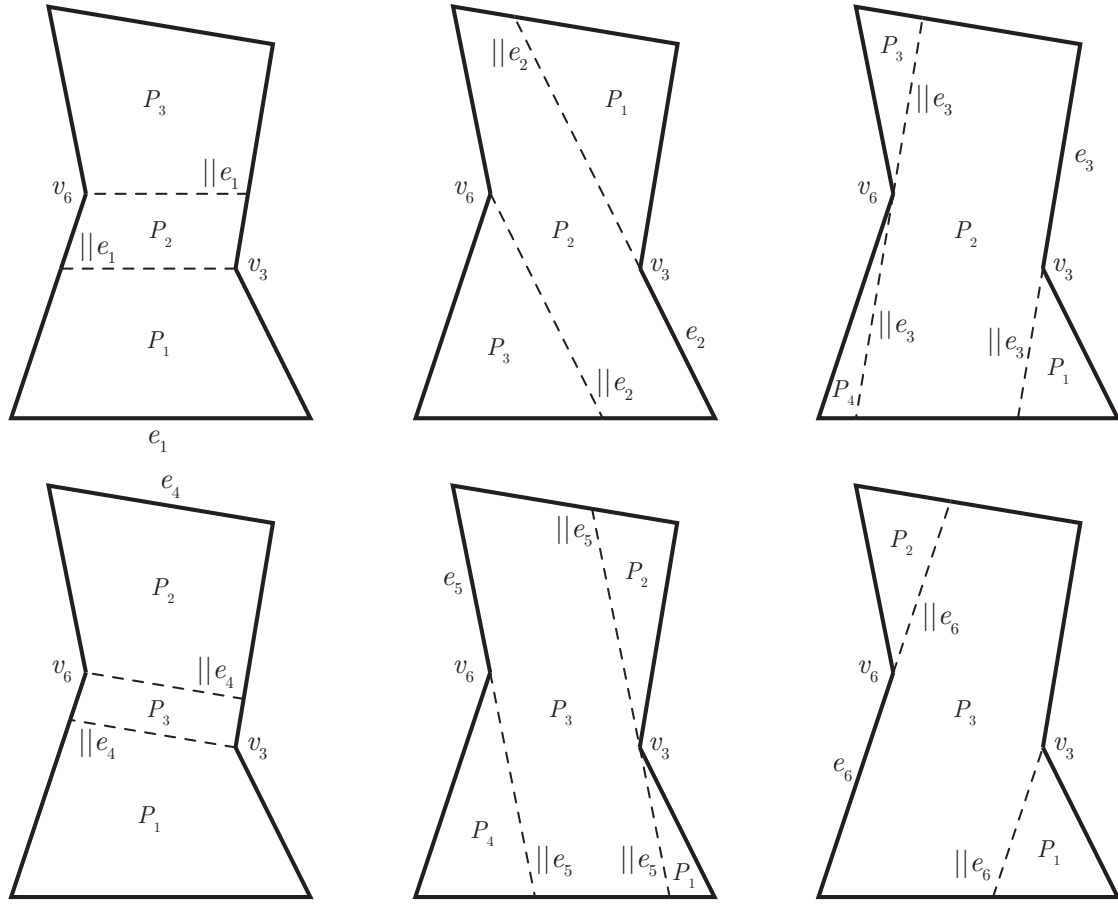


Figura 3.21: Descomposición del polígono cóncavo mostrado en la Fig. 2.2-(der) según el método desarrollado en este trabajo. En cada una de las subfiguras, las rectas (discontinuas) que efectúan la descomposición pasan por cada uno de los vértices cóncavos (v_3 y v_6 en este caso) y son paralelas a uno de los lados del polígono.

Observación 8. Tras una descomposición particular puede darse el caso que cierto subpolígono (o varios de ellos) P_i tenga una anchura W que sea menor que D_x . Esto significa que ese subpolígono no va a poder ser barrido mediante *sweep paths* de la forma habitual. Aunque resolver este problema no va a ser objeto de este trabajo, podemos comentar diferentes alternativas para estos subpolígonos:

- A la hora de seleccionar la descomposición con menor suma $\sum_{i=1}^m W_i$ ignorar aquellas descomposiciones que generan subpolígonos de este tipo.
- Barrer el subpolígono mediante un único *sweep path* en la dirección óptima de barrido de dicho subpolígono pero a una distancia de, por ejemplo, $W/2$ de su lado base. El hecho de usar un único *sweep path* hará que ese subpolígono sólo tenga dos *joint-points*, lo que modificaría lo explicado en la Subsección 3.2.2.
- Disminuir el valor de D_x (siempre que fuera admisible) para el barrido de estos subpolígonos (se seguirán cumpliendo (2.2) y (2.3)). El inconveniente principal será que aumentará el número de giros que ejecutará el vehículo.

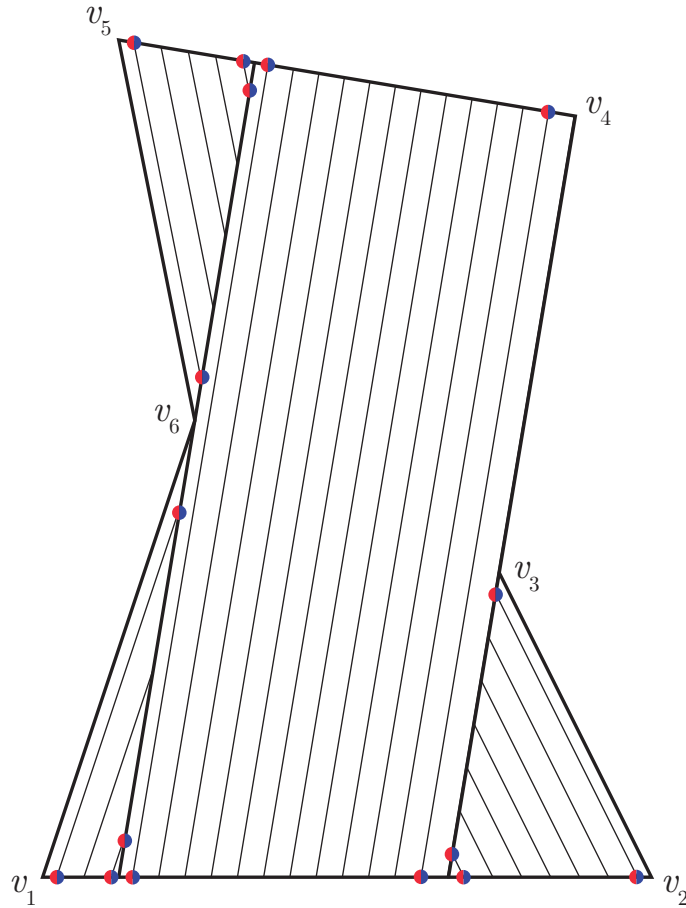


Figura 3.22: *Sweep paths* y *joint-points* de cada uno de los subpolígonos en los que se ha descompuesto el polígono cóncavo original.

3.2.2. Conexionado entre subpolígonos

El procedimiento de descomposición explicado en la Subsección 3.2.1 puede interpretarse como un bloque funcional que recibe como entrada el polígono P cóncavo, y devuelve m subpolígonos convexos P_1, P_2, \dots, P_m tales que $\bigcup_{i=1}^m P_i = P$. De cada uno de estos subpolígonos convexos P_i es posible conocer su dirección óptima de barrido, y por tanto, también sus correspondientes *sweep paths* y *joint-points*. Denotaremos por $P_{i,j}$ al *joint-point* j -ésimo del subpolígono convexo i -ésimo, tal que $i \in \{1, 2, \dots, m\}$ y $j \in \{1, 2, 3, 4\}$.

Por otro lado, si $\tilde{P}_i = \{P_{i,1}, P_{i,2}, P_{i,3}, P_{i,4}\}$, definiremos la aplicación biyectiva¹⁴ sin punto fijo¹⁵ $\Phi_i : \tilde{P}_i \rightarrow \tilde{P}_i$ que nos proporcionará el *joint-point* de salida correspondiente a entrar por el *joint-point* de entrada $P_{i,j}$ del subpolígono P_i . Como esta aplicación depende exclusivamente del conjunto de *sweep paths* de P_i , es conocida también de antemano a raíz de la descomposición.

Ejemplo 8. Rescatemos la Fig 3.14 y denotemos arbitrariamente sus *joint-points*

¹⁴Una función es biyectiva si es al mismo tiempo inyectiva y sobreyectiva. Si los conjuntos de partida y de llegada son ambos finitos, se sigue entonces que ambos deben tener el mismo cardinal. Por esta razón, se denomina también aplicación “uno a uno”.

¹⁵Un punto x que cumple $f(x) = x$ se dice que es un punto fijo de la función f .

tal y como se muestra en la Fig 3.23. Para este ejemplo tendríamos que la aplicación Φ_i proporcionaría

$$\begin{aligned} P_{i,1} &\xrightarrow{\Phi_i} P_{i,3}, \\ P_{i,2} &\xrightarrow{\Phi_i} P_{i,4}, \\ P_{i,3} &\xrightarrow{\Phi_i} P_{i,1}, \\ P_{i,4} &\xrightarrow{\Phi_i} P_{i,2}. \end{aligned}$$

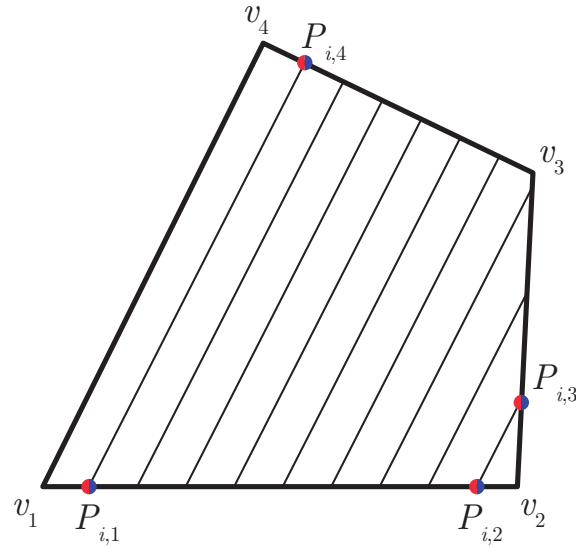


Figura 3.23: *Joint-points* asociados a la trayectoria del polígono convexo la Fig 3.14.

La motivación de esta subsección es dar respuesta a la siguiente pregunta: del conjunto de subpolígonos convexos P_1, P_2, \dots, P_m , ¿cuál será aquella permutación que haga que, al recorrer los subpolígonos en el orden establecido por esa permutación, la longitud total de la trayectoria sea la menor posible?

Recordemos los siguientes resultados sobre combinatoria [16]:

Definición 11 (Variaciones con repetición). *Dado un conjunto de n elementos distinguibles, se llama variación con repetición de p elementos elegidos entre los n a cualquier disposición ordenada, con repeticiones eventuales, de p elementos del conjunto. En este caso p puede ser mayor o igual que n .*

El número de variaciones con repetición de p elementos elegidos entre los n se denota habitualmente como VR_n^p y su valor es $VR_n^p = n^p$.

Definición 12 (Permutaciones sin repetición). *Dado un conjunto de n elementos distinguibles, se llama permutación de los n elementos a cualquier disposición ordenada de todos ellos.*

El número de permutaciones sin repetición de n elementos distintos se denota habitualmente P_n y su valor es $P_n = n!$ (no confundir con la notación P_i , que corresponde

al subpolígono convexo i -ésimo producto de la descomposición de P).

Como deberemos visitar todos y cada uno de los subpolígonos P_i una única vez, el número de posibilidades vendrá dado por la permutación sin repetición de m elementos, de forma que $P_m = m!$. Llamaremos a la matriz $\mathcal{A}^*(m)$ de dimensiones $m! \times m$ en la que en cada fila se almacena una de las $m!$ permutaciones posibles. Por ejemplo, para $m = 3$

$$\mathcal{A}^*(3) = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}.$$

Sin embargo, el hecho de que una misma trayectoria tenga exactamente la misma longitud en cualquiera de los sentidos en los que se recorra permite reducir el número de filas a la mitad. Esto es válido siempre que se cumpla la suposición de ausencia de viento. La nueva matriz reducida $\mathcal{A}(m)$ tendrá dimensiones $\frac{m!}{2} \times m$. Para $m = 3$ quedaría

$$\mathcal{A}(3) = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \end{bmatrix}. \quad (3.11)$$

Es evidente que la matriz $\mathcal{A}(m)$ no es única. Basta observar que si se selecciona una fila arbitraria de la matriz $\mathcal{A}(m)$ dada por (3.11) y los elementos que forman esa fila

$$[a_1 \quad a_2 \quad \cdots \quad a_m]$$

se reordenan de la forma

$$[a_m \quad a_{m-1} \quad \cdots \quad a_1],$$

entonces la nueva matriz que obtenemos seguirá siendo igualmente válida.

Si el *joint-point* de entrada a cada P_i estuviera fijo de antemano, el hecho de tener una cierta permutación de subpolígonos proporcionaría la trayectoria completa para esa permutación concreta. Sin embargo, al no imponer de antemano ese punto de entrada, cada subpolígono P_i tiene 4 posibles *joint-points* de entrada, lo que aumenta significativamente el rango de búsqueda de la trayectoria con menor longitud. Definiremos la matriz $\mathcal{B}(m)$ de dimensiones $4^m \times m$ en la que cada fila contiene una variación con repetición del conjunto de elementos $\{1, 2, 3, 4\}$ (relacionado con los cuatro $P_{i,j}$ de un cierto polígono P_i) tomados de m en m , de ahí que el número de

filas sea $VR_4^m = 4^m$. Por ejemplo, para $m = 2$

$$\mathcal{B}(2) = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 1 & 3 \\ 1 & 4 \\ 2 & 1 \\ 2 & 2 \\ 2 & 3 \\ 2 & 4 \\ 3 & 1 \\ 3 & 2 \\ 3 & 3 \\ 3 & 4 \\ 4 & 1 \\ 4 & 2 \\ 4 & 3 \\ 4 & 4 \end{bmatrix}.$$

La exploración de todas las posibles trayectorias vendrá dada por combinar todas y cada una de las filas de $\mathcal{A}(m)$ con todas y cada una de las filas de $\mathcal{B}(m)$ (véase Fig. 3.24), resultando en un número total de $(m! \cdot 4^m)/2$ posibles rutas.

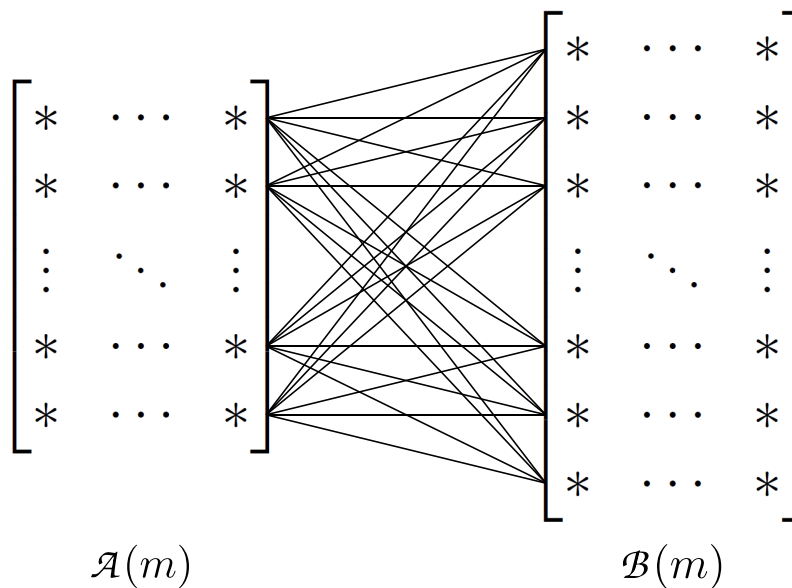


Figura 3.24: Esquema de posibles combinaciones entre las filas de $\mathcal{A}(m)$ y de $\mathcal{B}(m)$.

De todas esas posibles trayectorias tomemos arbitrariamente una fila de $\mathcal{A}(m)$ y una de $\mathcal{B}(m)$, de forma que

$$\begin{aligned} \text{Fila arbitraria de } \mathcal{A}(m) &\rightarrow [a_1 \ a_2 \ \cdots \ a_m], \\ \text{Fila arbitraria de } \mathcal{B}(m) &\rightarrow [b_1 \ b_2 \ \cdots \ b_m]. \end{aligned}$$

Para esta combinación, la sucesión de *joint-points* que marcarán la trayectoria a realizar será

$$P_{a_1, b_1} \xrightarrow{\Phi_{a_1}} P_{a_1, *}, \rightarrow P_{a_2, b_2} \xrightarrow{\Phi_{a_2}} P_{a_2, *}, \rightarrow \dots \rightarrow P_{a_m, b_m} \xrightarrow{\Phi_{a_m}} P_{a_m, *}.$$

Obsérvese que

- $P_{i,*} \xrightarrow{\Phi_i} P_{i,*}$: corresponde a la trayectoria de barrido (*sweep paths + U-turns*) del interior del subpolígono P_i .
- $P_{i,*} \rightarrow P_{j,*}$ con $i \neq j$: corresponde al camino de Dubins que une el *joint-point* de salida del subpolígono P_i con el *joint-point* de entrada al subpolígono P_j .

Observación 9. A diferencia del caso de las *U-turns*, el camino de Dubins $P_{i,*} \rightarrow P_{j,*}$ no cumple necesariamente la condición (3.7). Por lo tanto, en estos casos no podemos limitarnos a las trayectorias RSR y LSL, sino que habrá que incluir en la búsqueda a las trayectorias RSL y LSR.

Observación 10. Se ha supuesto en todo momento que la trayectoria de unión entre dos subpolígonos de una descomposición puede contener puntos que se encuentren fuera de los límites del RoI. Esta hipótesis es usualmente admisible en el caso de que el vehículo que ejecute el ejercicio de cobertura sea un UAV y siempre que persista la ausencia de obstáculos, no teniendo porque ser así para el caso de un vehículos terrestres.

Observación 11. En la Fig. 3.25 se ha representado como crece el número de posibles rutas $(m! \cdot 4^m)/2$ en función del número de subpolígonos m en lo que se ha descompuesto un polígono cóncavo (nótese que el eje de ordenadas está en escala logarítmica). Sin lugar a dudas estamos ante la peor de las complejidades algorítmicas posibles: la complejidad de orden factorial $O(n!)$. Por lo tanto, el método aquí propuesto sólo debería ser aplicado cuando el valor de m sea bajo ya que el tiempo de cómputo se vuelve prohibitivo.

Ejemplo 9 (Polígono cóncavo (cont.)). Para el polígono cóncavo que estamos estudiando, cuya descomposición produce $m = 4$ subpolígonos, el número total de posibles combinaciones de conexión entre subpolígonos es de $(4! \cdot 4^4)/2 = 3072$. La exploración de todas ellas arroja como resultado que la trayectoria completa (*sweep paths + Dubins paths + trayectorias de conexión entre subpolígonos*) de menor longitud es la que se muestra en la Fig. 3.26.

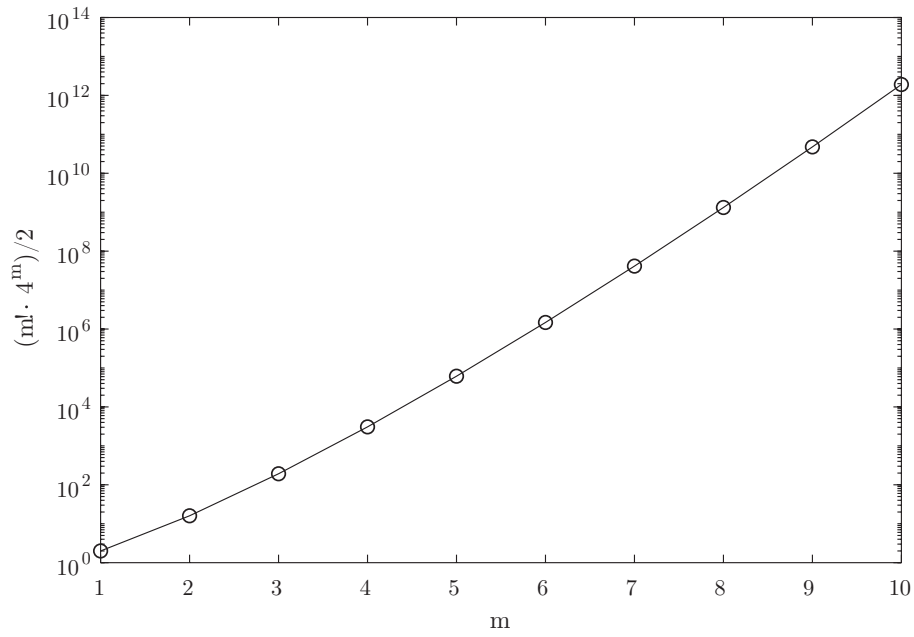


Figura 3.25: Número de combinaciones posibles en función del número de subpolígonos.

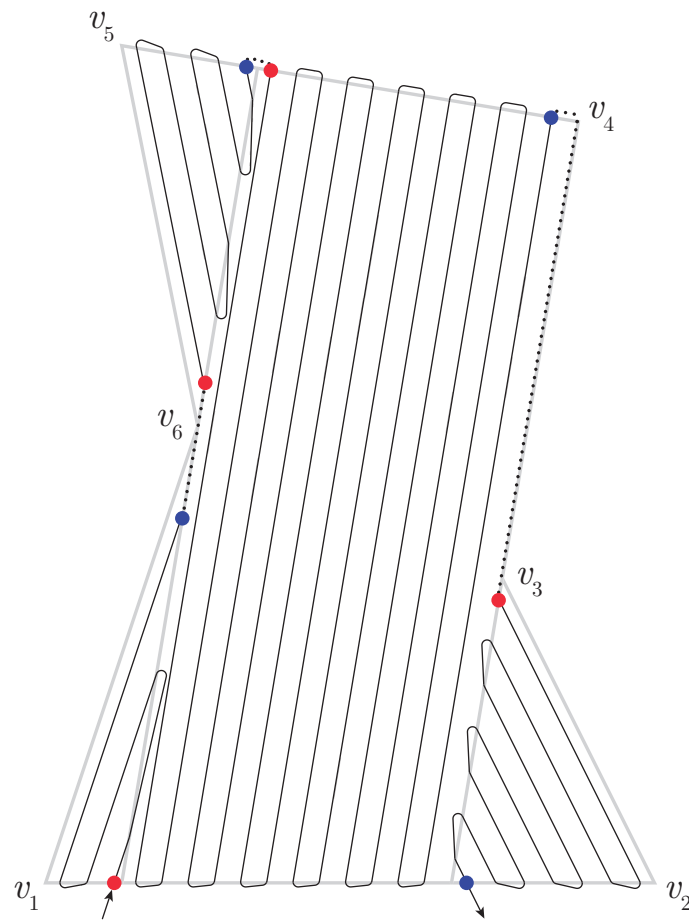


Figura 3.26: Trayectoria completa para el polígono cóncavo en estudio. Las trayectorias de unión entre los subpolígonos se han dibujado con trazo discontinuo para identificarlas sobre el resto de la trayectoria.

Capítulo 4

Aplicación práctica

*Engineering is achieving function
while avoiding failure.*

Henry Petroski,
ingeniero americano

Para comprobar el desempeño del software que ha sido desarrollado en MATLAB[®] en base a todo lo expuesto en el Capítulo 3 tomaremos dos terrenos perimetrados de forma arbitraria¹⁶.

4.1. Terreno convexo

El primero de ellos corresponderá a un terreno de cultivo de arroz situado al oeste de El Perenollet, en el Parque Natural de la Albufera, Valencia (Fig. 4.1). En el año 2015 se propuso el uso de UAVs para la fumigación aérea de arrozales de la albufera para erradicar las plagas de mosquitos [17], así que esta podría ser una de sus aplicaciones.

Es inmediato comprobar que el recinto perimetrado se trata de un polígono convexo. Este polígono ha sido creado con Google Earth Pro[®] y posteriormente exportado a MATLAB[®]. Se tomarán como referencia los propuestos en las simulaciones realizadas en [6], donde $D_x = 88$ m, $V = 10$ m/s y $\dot{\psi} = 0,7$ rad/s. Para este polígono convexo, la trayectoria completa generada mediante el software desarrollado se muestra en la Fig. 4.2. La dirección óptima de barrido resulta ser perpendicular al lado e_1 , de acuerdo a que $D_1 = \min\{D_1, \dots, D_{11}\}$ (ver Tabla 4.1).

¹⁶No se ha comprobado catastralmente que los terrenos seleccionados correspondan a parcelas pertenecientes al mismo propietario, ni que estén destinados al mismo tipo de cultivo.



Figura 4.1: Campo de cultivo de arroz en el Parque Natural de la Albufera, Valencia.

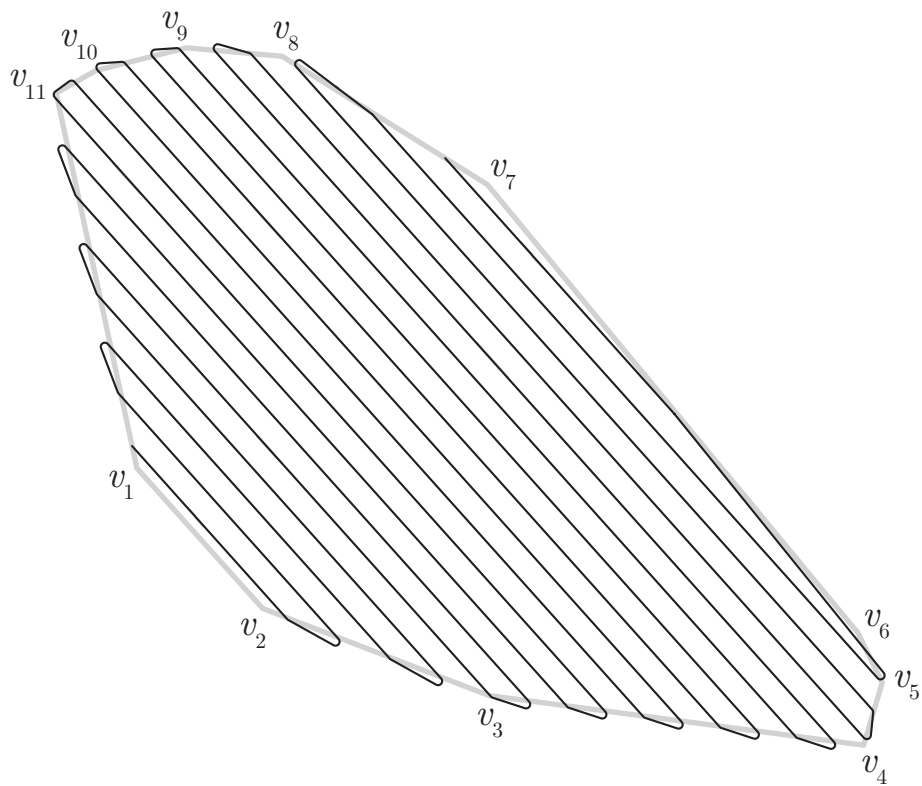


Figura 4.2: Trayectoria completa generada para terreno convexo.

i	D_i [m]	va_i	# giros
1	1583,9	7	17
2	1837,1	8	20
3	2133,6	8	24
4	3375,5	11	38
5	2027,9	1	22
6	1585,9	1	17
7	1683,2	2	19
8	2233,8	4	25
9	2957,4	4	33
10	3399,6	4	38
11	2404,4	5	27

Tabla 4.1: Resultados del algoritmo de búsqueda de la anchura del polígono.

4.2. Terreno cóncavo

Por otro lado presentaremos un terreno dedicado al cultivo de viñedos al oeste de Logroño, en La Rioja (Fig. 4.3). En grandes extensiones de este tipo de cultivos se puede hacer uso de UAVs para fotografiar las hojas de la vid y obtener un mapa cromático. Este mapa permite a los técnicos y enólogos conocer el grado de concentración y calidad de la uva, pudiendo así determinar el momento idóneo para realizar la vendimia [18]. Este podría ser otro ejemplo real de aplicación del problema CPP.



Figura 4.3: Campo de cultivo de vid en Logroño, La Rioja.

A diferencia del recinto anterior, este se trata de un polígono cóncavo y por tanto debe ser descompuesto. Sin embargo, en este caso particular los tres subpolígonos convexos en los que se ha descompuesto el polígono original tienen todos la misma

dirección óptima de barrido. Como nuevamente se desconocen los valores habituales de los parámetros que se emplean para esta misión, usaremos unos similares a los empleados en 4.1, con $D_x = 25$ m, $V = 9$ m/s y $\dot{\psi} = 0,9$ rad/s. La trayectoria completa generada para este caso se muestra en la Fig. 4.4.

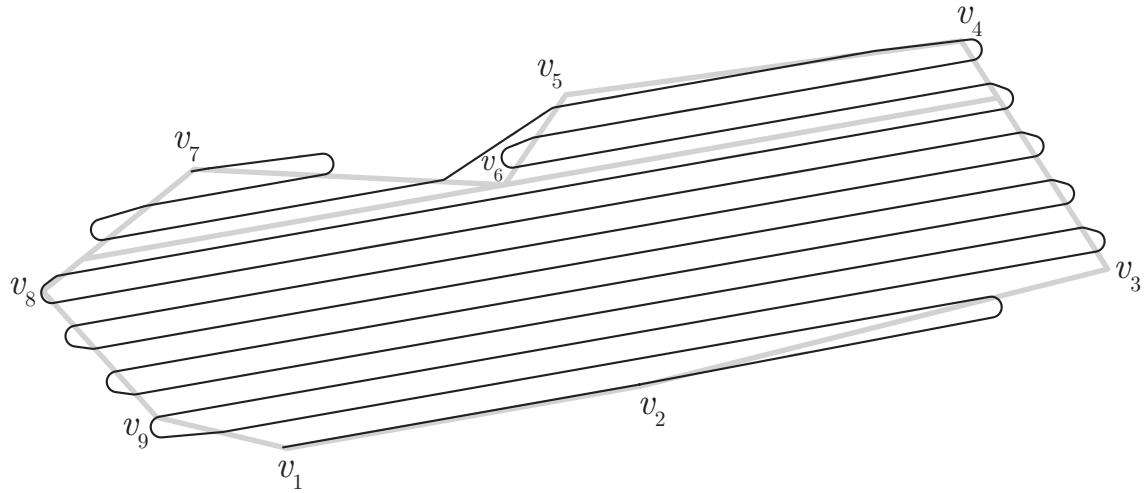


Figura 4.4: Trayectoria completa generada para terreno cóncavo.

Capítulo 5

Presencia de viento en el RoI

*I was taught that the way of
progress was neither swift nor easy.*

Marie Curie,
científica polaca

Uno de los principales desafíos de los UAVs de dimensiones reducidas es el vuelo en presencia de viento. Debido a que las velocidades de vuelo de estos vehículos oscilan en el entorno de los 20 - 40 mph (32,2 - 64,4 km/h), y a que las velocidades del viento a varios centenares de pies sobre el nivel del suelo casi siempre sobrepasan los 10 mph (16,1 km/h), los UAVs deben ser capaces de maniobrar eficazmente con viento [2]. Esto justifica que deba tenerse en cuenta la presencia de viento a la hora de generar la trayectoria.

En la Observación 1 se indicó que en condiciones ideales y en ausencia de viento, existía una equivalencia entre la longitud total de la trayectoria, la duración de vuelo y el consumo de energía. Por lo tanto, se concluía que aquella trayectoria con el menor número de giros resultará ser la de menor longitud. Sin embargo, la *ground speed* de una aeronave de ala fija y el tiempo necesario para dar un giro dependen fuertemente del *airspeed* y de la dirección y velocidad del viento. Por lo tanto, emplear como criterio de optimización la minimización del número de giros no es el parámetro más adecuado para un problema CPP real con UAV de ala fija [6].

Para estar en consonancia con la nomenclatura de la bibliografía consultada, en este Capítulo 5 la coordenada x_N representará las ordenadas (positivo en dirección norte) y la coordenada y_E a las abscisas (positivo en dirección este).

Asumiremos un viento estacionario, horizontal y constante, por lo que podremos tratarlo como el campo vectorial bidimensional \vec{V}_w .

$$\vec{V}_w : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2 \quad \text{tal que} \quad \vec{V}_w(x_N, y_E) = (w_N, w_E)$$

A pesar de que la dinámica meteorológica es altamente caótica, el campo de viento puede ser tomado como estacionario y constante siempre que la misión de barrido se lleve a cabo en un corto periodo de tiempo y en un área relativamente pequeña, lo que permite asumir que la variabilidad temporal y espacial son pequeñas [6]. La presencia de viento presenta los siguientes efectos:

- Para mantener la aeronave sobre la trayectoria deseada, el rumbo de la aeronave debe corregir la deriva que produce el viento (ver Sección 5.1).
- Los giros realizados mediante curvas de Dubins (Subsección 3.1.2) partían de la hipótesis de que no había viento. Cuando se ejecuta la misma maniobra con viento, la forma de la curva descrita se transformará en una *curva trocoide* (ver Sección 5.2).

5.1. Efecto del viento en los *sweep paths*

De forma general, se tiene que la velocidad del vehículo con respecto a tierra (*ground speed*) puede expresarse como $\vec{V}_g = \vec{V}_a + \vec{V}_w$, siendo \vec{V}_a la velocidad aerodinámica (*airspeed*) y \vec{V}_w la velocidad del viento (*wind speed*) [5]. Hasta ahora, como no habíamos considerado el efecto del viento, se tenía que $\vec{V}_g = \vec{V}_a$. La presencia de viento forma el triángulo vectorial de vientos de la Fig. 5.1.

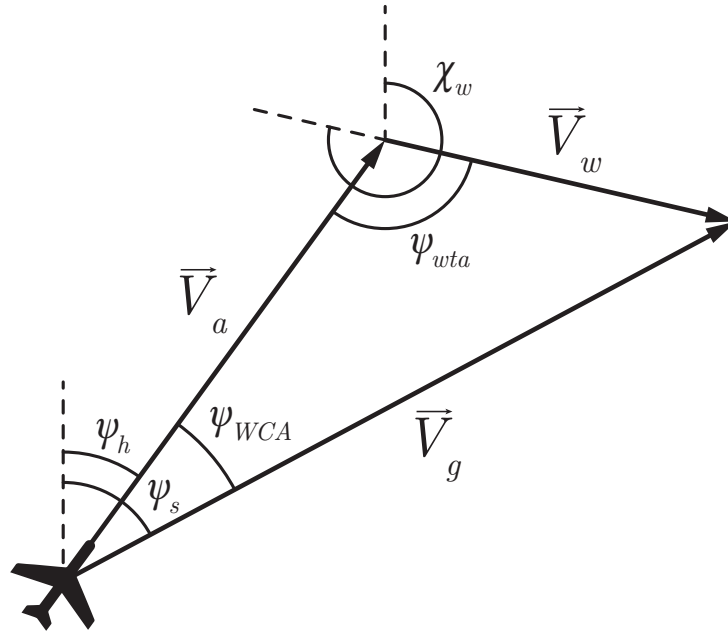


Figura 5.1: Triángulo de vientos.

donde ψ_h es el ángulo de rumbo (dirección a la que orienta el morro de la aeronave), ψ_s el ángulo de curso y χ_w el ángulo de la dirección de procedencia del viento (*downwind direction*).

Suponiendo que conocemos el vector \vec{V}_w (con módulo V_w y ángulo χ_w), el módulo de la velocidad aerodinámica V_a y el ángulo de curso deseado ψ_s , queremos calcular cuál será el módulo del vector \vec{V}_g y el rumbo ψ_h que será necesario imponer. En primer lugar definiremos la relación *wind-to-airspeed* como

$$\beta = \frac{V_w}{V_a},$$

donde $V_{(*)} = |\vec{V}_{(*)}|$. Calcularemos los ángulos ψ_{wta} y ψ_{WCA} de la Fig. 5.1 mediante

$$\begin{aligned}\psi_{wta} &= \psi_s - \chi_w, \\ \psi_{WCA} &= \arcsin(\beta \sin(\psi_{wta})),\end{aligned}$$

que nos permitirán calcular la *ground speed*

$$V_g = V_a \cos(\psi_{WCA}) + V_w \cos(\psi_{wta})$$

y el valor del rumbo

$$\psi_h = \psi_s + \psi_{WCA}.$$

Observación 12. A diferencia de lo que ocurría en ausencia de viento, en el que se tarda el mismo tiempo en recorrer un segmento de cierta longitud en un sentido o su opuesto (ya que la velocidad era la misma en ambos sentidos), las *ground speeds* para una misma dirección pero en sentidos opuestos (V_{g1} y V_{g2} en la Fig. 5.2) no tienen porqué coincidir. Si para una dirección e un sentido se tiene un ángulo de rumbo ψ_s , para la misma dirección en sentido opuesto se tendrá el ángulo de rumbo recíproco $\psi_s + \pi$.

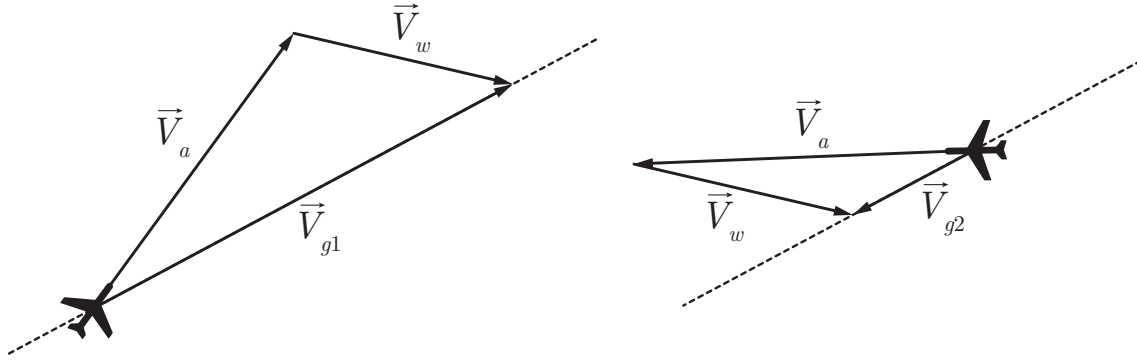


Figura 5.2: Cambio en la *ground speed* para sentidos opuestos de un misma dirección. En ambos casos se mantienen iguales \vec{V}_w (en módulo y ángulo), V_a y ψ_s .

5.2. Efecto del viento en los virajes

Supongamos que tenemos una aeronave situada en el origen de coordenadas del sistema de coordenadas inercial \mathcal{F}_I , cuyas coordenadas son x_N y y_E , y con un rumbo $\psi_h = 315^\circ$ (véase Fig. 5.3). Si la aeronave ejecuta un viraje horizontal uniforme alrededor de radio $\rho = 12,5$ m, la trayectoria que describirá será un arco de circunferencia, llegando eventualmente al punto de inicio y repitiendo así la misma trayectoria (trayectoria azul en Fig. 5.3). Sin embargo, en presencia de viento el centro de giro se irá desplazando con el tiempo, por lo que la aeronave describirá una trayectoria diferente (trayectoria roja en Fig. 5.3)¹⁷.

Consideraremos el problema dinámico descrito por las ecuaciones cinemáticas en el sistema \mathcal{F}_I

$$\begin{aligned}\dot{x}_N(t) &= V_a \cos(\psi_h(t)) + w_N, \\ \dot{y}_E(t) &= V_a \sin(\psi_h(t)) + w_E, \\ \dot{\psi}_h(t) &= u(t),\end{aligned}\tag{5.1}$$

¹⁷Prácticamente la totalidad del desarrollo presentado en esta sección se ha extraído de [19].

donde las componentes w_N y w_E son las componentes del viento bidimensional. El ángulo $\psi_h(t)$ representa el rumbo de la aeronave medido en sentido horario desde el eje x_N y $u(t)$ la velocidad de giro, tomada como variable de control. Asumiremos en todo momento que $\beta < 1$ para asegurar que existe solución viable. Si hacemos girar la aeronave con la máxima velocidad de giro posible tenemos que $u(t) = \delta\omega$, donde $\omega = V_a/\rho$ y $\delta = \{-1, 1\}$ describe la dirección del giro (-1 corresponde a giro CCW y $+1$ a giro CW). Sobre el sistema (5.1) se imponen las siguientes condiciones de frontera de Dirichlet (condiciones iniciales y finales):

$$\begin{aligned} x_N(0) &= x_{N_0}, & y_E(0) &= y_{E_0}, & \psi_h(0) &= \psi_{h_0}, \\ x_N(T) &= x_{N_f}, & y_E(T) &= y_{E_f}, & \psi_h(T) &= \psi_{h_f}, \end{aligned}$$

donde T es el tiempo empleado para ir de (x_{N_0}, y_{E_0}) a (x_{N_f}, y_{E_f}) .

Definiremos ahora el sistema de coordenadas \mathcal{F}_T como aquel en el que el eje x se encuentre orientado en el sentido del viento, el eje z hacia dentro de la imagen, y el eje y completando el triedro a derechas. En definitiva \mathcal{F}_T no es más que una rotación de \mathcal{F}_I , de forma que

$$\begin{bmatrix} x_t(t) \\ y_t(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\psi_w) & \sin(\psi_w) \\ -\sin(\psi_w) & \cos(\psi_w) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_N(t) \\ y_E(t) \end{bmatrix}, \quad (5.2)$$

donde $\psi_w = \chi_w \pm \pi$. Las ecuaciones (5.1) expresadas en \mathcal{F}_T son

$$\begin{aligned} \dot{x}_t(t) &= V_a \cos(\psi_h(t) - \psi_w) + V_w, \\ \dot{y}_t(t) &= V_a \sin(\psi_h(t) - \psi_w), \\ \dot{\psi}_h(t) &= \delta\omega, \end{aligned} \quad (5.3)$$

donde $V_w = \sqrt{w_N^2 + w_E^2}$. Integrando la última ecuación diferencial de (5.3) tenemos que

$$\psi_h(t) = \delta\omega t + \psi_h(0),$$

con lo que las dos primeras ecuaciones de (5.3) puede ser reescritas como

$$\begin{aligned} \dot{x}_t(t) &= V_a \cos(\delta\omega t + \phi_t) + V_w, \\ \dot{y}_t(t) &= V_a \sin(\delta\omega t + \phi_t), \end{aligned} \quad (5.4)$$

donde $\phi_t = \psi_h(0) - \psi_w$. Integrando (5.4) obtenemos

$$\begin{aligned} x_t(t) &= \frac{V_a}{\delta\omega} \sin(\delta\omega t + \phi_t) + V_w t + x_{t_0}, \\ y_t(t) &= -\frac{V_a}{\delta\omega} \cos(\delta\omega t + \phi_t) + y_{t_0}. \end{aligned} \quad (5.5)$$

La curva descrita por las ecuaciones paramétricas (5.5) se corresponde con una *curva trocoide* en el sistema \mathcal{F}_T , de ahí que a partir de ahora se le denomine sistema de coordenadas trocoidal.

En la Observación 7 ya vimos que para un RoI convexo las trayectorias de unión entre dos *sweep paths* son caminos de Dubins de tipo RSR o LSL, donde recordemos que R denota un arco de circunferencia en sentido CW y L un arco de circunferencia en sentido CCW. Denotaremos como TST al conjunto $TST = \{RSR, LSL\}$. En presencia de viento estos arcos de circunferencia se convertirán en curvas trocoides, tal

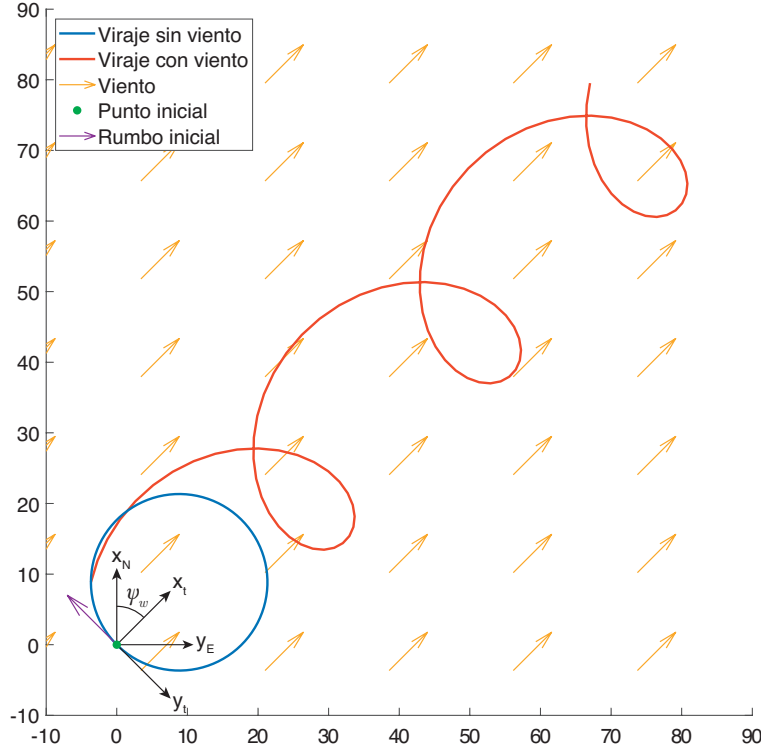


Figura 5.3: Efecto del viento en un viraje horizontal uniforme.

y como se ha señalado anteriormente en esta sección. Por lo tanto, nuestro objetivo es encontrar las curvas trocoides

$$T_1(t) = (x_{t_1}(t), y_{t_1}(t))^{\mathcal{F}_T},$$

$$T_2(t) = (x_{t_2}(t), y_{t_2}(t))^{\mathcal{F}_T}.$$

que sustituyen al primer y segundo giro de TST respectivamente. La notación $(*)^{\mathcal{F}_T}$ sirve para recalcar que las coordenadas se están expresando en el sistema \mathcal{F}_T .

▪ **Primera trocoide, $T_1(t)$**

$$x_{t_1}(t) = \frac{V_a}{\delta_1 \omega} \sin(\delta_1 \omega t + \phi_{t_1}) + V_w t + x_{t_{10}},$$

$$y_{t_1}(t) = -\frac{V_a}{\delta_1 \omega} \cos(\delta_1 \omega t + \phi_{t_1}) + y_{t_{10}},$$

en el que se han introducido las siguientes constantes

$$x_{t_{10}} = x_0 - \frac{V_a}{\delta_1 \omega} \sin(\phi_{t_1}),$$

$$y_{t_{10}} = y_0 + \frac{V_a}{\delta_1 \omega} \cos(\phi_{t_1}),$$

$$\phi_{t_1} = \psi_{h_0} - \psi_w,$$

y donde se cumplen las condiciones iniciales

$$[x_N, y_E]^{\mathcal{F}_I} |_{t=0} \rightarrow [x_{t_1}, y_{t_1}]^{\mathcal{F}_T} |_{t=0} = [x_0, y_0]^{\mathcal{F}_T}.$$

▪ **Segunda trocoide, $T_2(t)$**

$$\begin{aligned}x_{t_2}(t) &= \frac{V_a}{\delta_2\omega} \sin(\delta_2\omega t + \phi_{t_2}) + V_w t + x_{t_{20}}, \\y_{t_2}(t) &= -\frac{V_a}{\delta_2\omega} \cos(\delta_2\omega t + \phi_{t_2}) + y_{t_{20}},\end{aligned}$$

en el que se han introducido las siguientes constantes

$$\begin{aligned}x_{t_{20}} &= x_f - \frac{V_a}{\delta_2\omega} \sin(\delta_2\omega t_{2\pi} + \phi_{t_2}) - V_w t_{2\pi}, \\y_{t_{20}} &= y_f + \frac{V_a}{\delta_2\omega} \cos(\delta_2\omega t_{2\pi} + \phi_{t_2}), \\ \phi_{t_2} &= \psi_{h_f} - \psi_w - \delta_2\omega t_{2\pi}, \\ t_{2\pi} &= 2\pi/\omega,\end{aligned}$$

y donde se cumplen las condiciones finales

$$[x_N, y_E]^{fT}|_{t=T} \rightarrow [x_{t_2}, y_{t_2}]^{fT}|_{t=t_{2\pi}} = [x_f, y_f]^{fT}.$$

El subíndice $i \in \{1, 2\}$ de δ_i en las ecuaciones anteriores indica a qué trocoide corresponde el valor de δ ($\delta_1 = \{-1, +1\}$ y $\delta_2 = \{-1, +1\}$).

Llamaremos al punto en el que la trayectoria TST abandona la primera curva trocoide (para pasar a un segmento recto) como P_A y al punto en el que la trayectoria TST inicia la segunda curva trocoide (para finalizar en el punto final) como P_B . Entonces, definiremos t_A y t_B de la siguiente forma:

$$\begin{aligned}P_A &= \begin{bmatrix} x_A \\ y_A \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_{t_1}(t_A) \\ y_{t_1}(t_A) \end{bmatrix}, \\ P_B &= \begin{bmatrix} x_B \\ y_B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_{t_2}(t_B) \\ y_{t_2}(t_B) \end{bmatrix}.\end{aligned}$$

La tarea ahora es encontrar los valores de los parámetros t_A y t_B que cumplan las siguientes condiciones:

1. Las velocidades en los puntos P_A y P_B deben ser iguales:

$$(\dot{x}_{t_1}(t_A), \dot{y}_{t_1}(t_A))^{fT} = (\dot{x}_{t_2}(t_B), \dot{y}_{t_2}(t_B))^{fT}.$$

2. El segmento recto que une los puntos P_A y P_B debe ser tangente a los vectores velocidad en ambos puntos:

$$\begin{aligned}\tan(\alpha) &= \frac{y_{t_2}(t_B) - y_{t_1}(t_A)}{x_{t_2}(t_B) - x_{t_1}(t_A)}, \\ \tan(\alpha) &= \frac{\dot{y}_{t_2}(t_B)}{\dot{x}_{t_2}(t_B)} = \frac{\dot{y}_{t_1}(t_A)}{\dot{x}_{t_1}(t_A)}.\end{aligned}$$

3. Los parámetros deben satisfacer:

$$t_A \in [0, 2t_{2\pi}), \quad t_B \in (-t_{2\pi}, t_{2\pi}]. \quad (5.6)$$

Operando según el desarrollo seguido en [19], y advirtiendo que en los casos TST $\text{sign}(\delta_1) = \text{sign}(\delta_2) = \delta$, se llega a los siguientes resultados:

$$\tan(\alpha) = \frac{y_{t_{20}} - y_{t_{10}}}{x_{t_{20}} - x_{t_{10}} + V_w \frac{\phi_{t_1} - \phi_{t_2} + 2k\pi}{\delta\omega}}, \quad \text{con } k \in \mathbb{Z}, \quad (5.7)$$

$$V_a \tan(\alpha) \cos(\delta\omega t_A + \phi_{t_1}) - V_a \sin(\delta\omega t_A + \phi_{t_1}) = -V_w \tan(\alpha), \quad (5.8)$$

$$t_B = t_A + \frac{\phi_{t_1} - \phi_{t_2} + 2k\pi}{\delta\omega}, \quad \text{con } k \in \mathbb{Z}. \quad (5.9)$$

Podemos calcular α despejando en (5.7) e introducirlo en (5.8) para obtener numéricamente t_A , y este a su vez en (5.9) para obtener t_B . Obsérvese que las ecuaciones (5.7) y (5.9) dependen de un parámetro $k \in \mathbb{Z}$, por lo que los valores de α , t_A y t_B no son únicos. En la práctica sólo será necesario comprobar que las soluciones cumplen (5.6) para los valores $k \in \{-3, \dots, 2\}$ ¹⁸.

Viraje en presencia de viento

Definiremos la trayectoria $\Gamma(t)$ con $t \in [0, T]$ en el sistema de coordenadas \mathcal{F}_T de forma que

$$\begin{aligned} \Gamma(t) &= \begin{bmatrix} x_{t_1}(t) \\ y_{t_1}(t) \end{bmatrix}, & t \in [0, t_A] \\ \Gamma(t) &= \begin{bmatrix} x_{t_1}(t_A) + \dot{x}_{t_1}(t_A)(t - t_A) \\ y_{t_1}(t_A) + \dot{y}_{t_1}(t_A)(t - t_A) \end{bmatrix}, & t \in [t_A, t_\beta] \\ \Gamma(t) &= \begin{bmatrix} x_{t_2}(t - t_\beta + t_B) \\ y_{t_2}(t - t_\beta + t_B) \end{bmatrix}, & t \in [t_\beta, T] \end{aligned}$$

donde

$$\begin{aligned} t_\beta &= t_A + \frac{\sqrt{(x_{t_2}(t_B) - x_{t_1}(t_A))^2 + (y_{t_2}(t_B) - y_{t_1}(t_A))^2}}{\sqrt{\dot{x}_{t_2}(t_B)^2 + \dot{y}_{t_2}(t_B)^2}}, \\ T &= t_\beta + (t_{2\pi} - t_B), \\ \alpha &= \arctan\left(\frac{y_{t_{20}} - y_{t_{10}}}{x_{t_{20}} - x_{t_{10}} + V_w \frac{\phi_{t_1} - \phi_{t_2} + 2k\pi}{\delta\omega}}\right), \\ t_B &= t_A + \frac{\phi_{t_1} - \phi_{t_2} + 2k\pi}{\delta\omega}, \quad \text{con } k \in \{-3, -2, -1, 0, 1, 2\}, \end{aligned}$$

siendo t_A la solución de

$$f(t_A) = V_a \tan(\alpha) \cos(\delta\omega t_A + \phi_{t_1}) - V_a \sin(\delta\omega t_A + \phi_{t_1}) + V_w \tan(\alpha) = 0,$$

y debiéndose cumplir que

$$t_A \in [0, 2t_{2\pi}] \quad \text{y} \quad t_B \in (-t_{2\pi}, t_{2\pi}].$$

Observación 13. Si se desea tener la trayectoria $\Gamma(t)$ en el sistema de coordenadas \mathcal{F}_I no hay más que aplicar la transformación inversa de (5.2).

¹⁸La interpretación del efecto que tiene el valor k sobre la solución puede consultarse en [19].

Ejemplo 10 (Viraje con viento). Consideremos el viraje de un UAV volando a $V_a = 15$ m/s y $\dot{\psi} = 0,28$ rad/s que una la posición inicial $(0,0)$ y rumbo inicial 90° con la posición final $(150,40)$ y rumbo final 270° . En la Fig. 5.4 se muestra el efecto que tiene sobre la trayectoria el aumento en la intensidad del viento, pero manteniendo constante su ángulo $\psi_w = 120^\circ$.

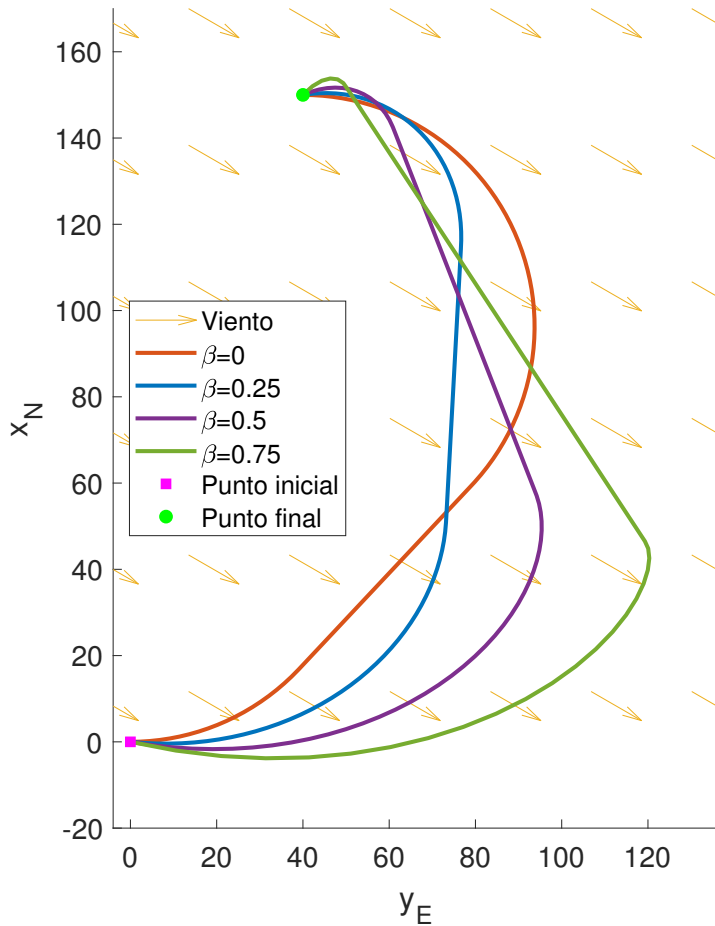


Figura 5.4: Efecto del viento sobre un viraje LSL.

El caso $\beta = 0$ es cuando hay ausencia de viento, por lo que la trayectoria asociada se corresponde con un camino de Dubins de tipo LSL. Para valores $V_w > 0 \implies \beta > 0$, los tramos de giro L del camino de Dubins se transformarán en curvas trocoides, más “pronunciadas” cuando mayor sea V_w . El tramo intermedio seguirá siendo un segmento recto, pero sus puntos de inicial y final variarán en función de β .

5.3. Dirección óptima de barrido en presencia de viento

La velocidad que es siempre tangente a la trayectoria es la *ground speed*, \vec{V}_g . Cuando $\vec{V}_w = 0$ se cumple que $\vec{V}_g = \vec{V}_a$, y como en todo momento hemos asumido que \vec{V}_a es constante, entonces \vec{V}_g también lo será y por tanto pueden considerarse

como criterios equivalentes la minimización de longitud de la trayectoria con la minimización de la duración del vuelo (Observación 1). Sin embargo, cuando $\vec{V}_w \neq 0$ la velocidad \vec{V}_g seguirá siendo tangente a la trayectoria pero no tiene porqué mantenerse constante. En definitiva, en presencia de viento la equivalencia (longitud de trayectoria) \longleftrightarrow (autonomía del UAV) deja de estar vigente y deja de poder aplicarse el método desarrollado en la Subsección 3.1.1. Para seleccionar ahora uno de los dos criterios, téngase en cuenta que el consumo de energía de la planta motora se encuentra íntimamente ligado a la autonomía del UAV, o lo que es lo mismo, su tiempo máximo de vuelo. Por esta razón se tomará como criterio de optimización la minimización del tiempo de vuelo, que denotaremos como $FTIW$ (*Flight Time in Wind*).

En la Subsección 3.1.1 y gracias al Teorema 1, la búsqueda de la dirección óptima de barrido se reducía a un número finito y bastante reducido de casos: sólo aquellos en los que los *sweep paths* son paralelos a unos de los lados del polígono P . Al no poder aplicar ahora esta reducción, afrontaremos el problema de forma diferente. Definamos el ángulo $\psi_p \in [0, 2\pi)$ como un ángulo de rotación alineado inicialmente con el eje x_N y rotación positiva en el sentido antihorario, tal y como se ilustra en la Fig. 5.5. Aplicando la rotación (5.10) a todos los vértices $v_i = (x_i, y_i)$ de P podemos obtener el conjunto de vértices rotados $v_i^r = (x_i^r, y_i^r)$ que formarán el polígono rotado P^r .

$$\begin{bmatrix} x_i^r \\ y_i^r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\psi_p) & -\sin(\psi_p) \\ \sin(\psi_p) & \cos(\psi_p) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_i \\ y_i \end{bmatrix}. \quad (5.10)$$

Para una rotación particular ψ_p se obtendrán las *sweep paths* verticales al polígono rotado P^r , teniendo en cuenta las consideraciones presentadas en 5.1. El polígono y sus correspondientes *sweep paths* pueden ser devueltos a su orientación original sin más que aplicar la transformación inversa de (5.10). Teniendo ya calculadas las *sweep paths* para esta determinada rotación se pueden calcular las trayectorias de los giros según lo expuesto en la Sección 5.2.

Si repetimos esta operación $\forall \psi_p \in [0, 2\pi)$ y calculamos el tiempo de vuelo asociado obtendremos la función $FTIW(\psi_p)$. La dirección óptima de barrido en este caso será aquella cuyos *sweep paths* estén asociados a la rotación ψ_p^* , de forma que

$$FTIW(\psi_p^*) \leq FTIW(\psi_p), \quad \forall \psi_p \in [0, 2\pi).$$

Observación 14. En ausencia de viento se tarda el mismo tiempo en recorrer una misma trayectoria en sentido de “ida” que en sentido de “vuelta”, lo que permitía recortar la matriz \mathcal{A} y emplear su versión reducida \mathcal{A}^* en la Subsección 3.2.2. Esto no es cierto cuando existe viento porque $V_{g1} \neq V_{g2}$ (véase Observación 12). Esto supone que en el caso de tener un RoI cóncavo el número total de posibles rutas a evaluar es de $m! \cdot 4^m$. Así pues, el rango de ψ_p en el que debe ser evaluado la función es $[0, 2\pi)$ y no $[0, \pi)$. Efectivamente, obsérvese como la función $FTIW(\psi_p)$ de la Fig. 5.6 no es simétrica respecto a $\psi_p = \pi$.

Ejemplo 11 (Polígono convexo en presencia de viento). Consideremos el mismo polígono convexo P de la Fig. 5.5 como la región de interés sobre la que se quiere dar cobertura exhaustiva y que se encuentra sometida a un viento de componente este $\chi_w = 90^\circ \implies \psi_w = 270^\circ$ y de magnitud $V_w = 3$ m/s. Los parámetros asociados a la misión serán:

$$D_x = 50 \text{ m}, \quad \dot{\psi}_h = 0,8 \text{ rad/s}, \quad V_a = 10 \text{ m/s} \rightarrow \beta = 0,3.$$

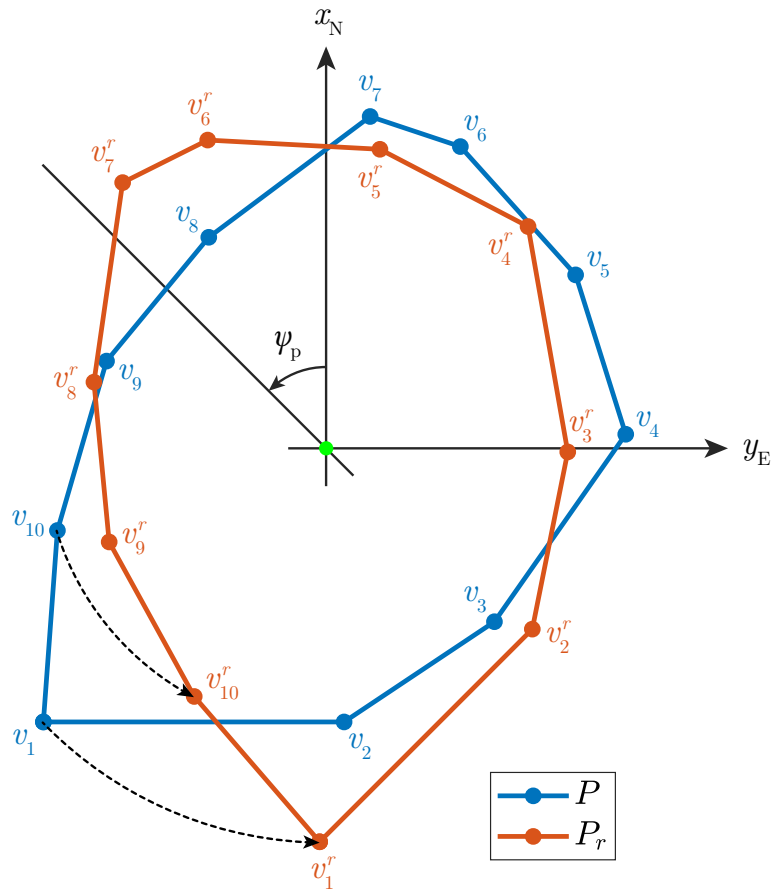


Figura 5.5: Rotación del polígono P un ángulo $\psi_p = +45^\circ$ alrededor de su centroide, obteniendo así el polígono rotado P_r .

Para este polígono se hallan las funciones $FTIW(\psi_p)$ y $L(\psi_p)$ (Fig. 5.6).

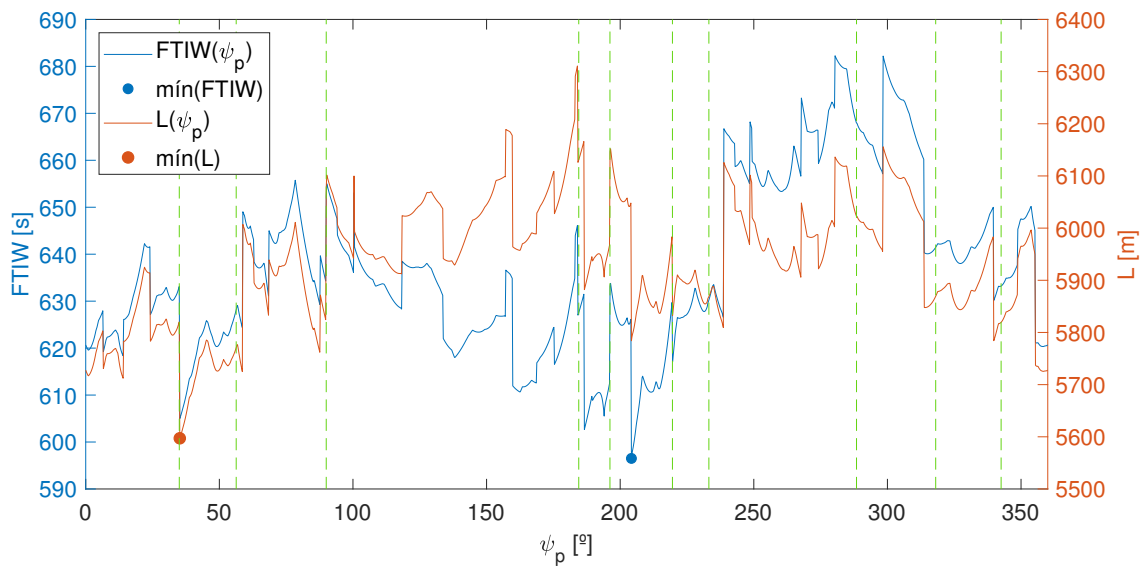


Figura 5.6: Tiempo de vuelo $FTIW$ y longitud de la trayectoria L asociado a cada valor de $\psi_p \in [0, 2\pi)$. Se han resaltado los puntos en los que se obtiene el mínimo valor de $FTIW$ y L .

Adicionalmente, se han ploteado unas líneas verticales discontinuas verdes que representan aquellos valores de ψ_p en los que los *sweep paths* generados son paralelos al lado e_i de P . Este conjunto finito de valores es el que se empleaba en la Subsección 3.1.1.

Los resultados que se han obtenido para este ejemplo son:

$$\psi_p^* = 204,4^\circ, \quad FTIW(\psi_p^*) = 596,51 \text{ s}, \quad L(\psi_p^*) = 5784,03 \text{ m}.$$

Obsérvese que el valor de ψ_p^* no coincide con el valor de ψ_p de ninguna de las líneas verdes discontinuas, por lo que demuestra que efectivamente era necesario un barrido continuo de $\psi_p \in [0, 2\pi)$ para encontrar el óptimo. Nótese también cómo en la Fig. 5.6 el valor de ψ_p que hace mínimo el tiempo de vuelo no coincide con el que hace mínimo la longitud de la trayectoria, en concordancia con lo expuesto en la Sección 5.3.

La trayectoria final propuesta se muestra en la Fig. 5.7. Adviértase como la dirección óptima de barrido en este caso no es perpendicular a ningún lado particular de P . En esta Figura se ha ploteado también el rumbo $\psi_h(t)$ (asociado a \vec{V}_a y no a \vec{V}_g) del UAV en cada instante de la trayectoria, ya que en presencia de viento no es (necesariamente) tangente a la propia trayectoria.

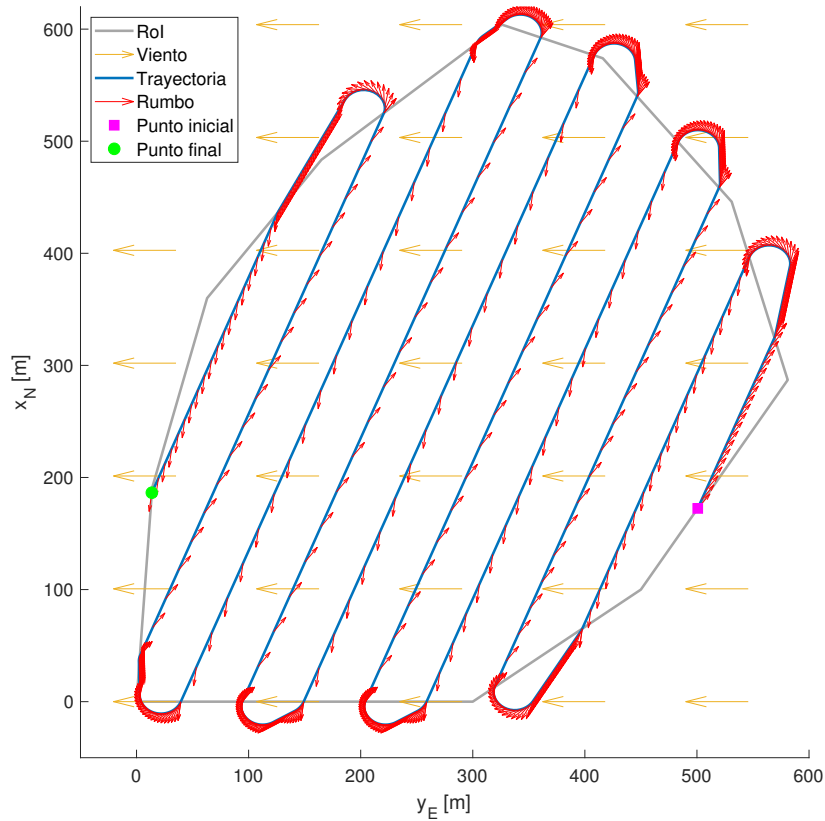


Figura 5.7: Trayectoria completa de barrido para el caso de un RoI convexo en presencia de viento de componente este.

Capítulo 6

Conclusiones y trabajos futuros

Simplicity is the final achievement.

Frédéric Chopin,
compositor polaco

6.1. Conclusiones

Multitud de diversas aplicaciones requieren obtener cierto/s tipo/s de información/es del interior de una región mediante el uso de UAVs. Antes de que la aeronave lleve a cabo dicha misión es necesario planificar de alguna manera cuál debe de ser la “mejor trayectoria posible” para ello, siendo aquella que cumpla satisfactoriamente la recopilación de información a la vez que minimiza un cierto coste. Este problema, denominado en la literatura como CPP (*Coverage Path Planning*), ha sido el abordado en este trabajo.

- Por ser el más habitual, y además funcionar razonablemente bien a pesar de su simpleza, el patrón de vuelo seleccionado ha sido el BF (*back-and-forth*): recorrer el área a cubrir mediante segmentos rectos de ida y vuelta equiespaciados entre sí (*sweep paths*) según los requisitos de la misión.
- Las áreas de interés pueden ser aproximadas por polígonos simples que pueden ser convexos o cóncavos. Esta diferenciación es importante porque ambos casos deben ser tratados de manera diferente a la hora de generar la trayectoria, teniendo en cuenta que la intención es minimizar el número de virajes presentes en la trayectoria (criterio equivalente a minimizar la longitud de la trayectoria o maximizar la autonomía del vehículo). Para polígonos convexos lo que se requiere es 1^o) hallar la dirección óptima de barrido que determine cómo debe estar orientado el patrón BF, y 2^o) conectar los *sweep paths* consecutivos aplicando limitaciones en la maniobrabilidad del UAV, que se traducen en restricciones de curvatura. Para el caso de polígonos cóncavos, una única dirección de barrido puede no ser la mejor solución, por lo que se introduce la descomposición del polígono cóncavo en una serie de subpolígonos convexos sobre los que sí se puede aplicar lo ya explicado para el caso convexo. Además, se ha estudiado mediante combinatoria con fuerza bruta cuál es la mejor manera de interconectar estos subpolígonos para que la longitud total de la

trayectoria sea lo más pequeña posible. Todo este fundamento se materializado en un algoritmo de *path planning* escrito en lenguaje MATLAB[®] que recibe la forma del polígono y los parámetros de misión y que devuelve la trayectoria que debe seguir el UAV. A partir de este paso entrarían en juego los bloques posteriores de guiado y control, no abordados en este trabajo.

- Para comprobar el buen funcionamiento del algoritmo propuesto con terrenos reales, se han tomado dos campos arbitrarios de cultivo, uno convexo y otro cóncavo, sobre los que se han generado satisfactoriamente trayectorias de cobertura para misiones diferentes (fumigación y fotogrametría).
- La presencia de un viento uniforme y estacionario que afecte al área de interés ocasiona una serie de consecuencias que hace que el método propuesto inicialmente para generar la trayectoria de barrido no pueda ser empleado. En particular, los *sweep paths* deben ser recorridos con un determinado ángulo de rumbo (no necesariamente tangente a la trayectoria) para compensar los efectos del viento; mientras que los caminos de Dubins que componían los virajes se convierten en curvas trocoides, cuyo cálculo se vuelve más laborioso. Para este caso también se ha tomado un polígono convexo arbitrario y se ha simulado la generación de la trayectoria correspondiente.

6.2. Propuestas de ampliación y mejora

A pesar de haberse cumplido el objetivo principal propuesto para este trabajo, siempre existen aspectos que son susceptibles de ampliación y mejora. A continuación se reúnen aquellos que han surgido a lo largo del desarrollo del mismo y que se creen interesantes de abordar en un futuro con el objetivo de enriquecer el estudio aquí comenzado.

- El objetivo principal de este trabajo ha sido el de la generación de la trayectoria. Sin embargo, en la planificación inicial se sugirió como objetivo complementario el desarrollo de un modelo fidedigno de UAV con el que poder abordar la parte del guiado y control y su posterior simulación y validación. Lamentablemente no ha sido posible finalmente desarrollar dicho modelo. No obstante, el camino queda abierto para que otras personas aborden estos apartados y le otorguen una mayor entidad y completitud a este trabajo.
- De acuerdo con la Observación 11, el método propuesto para la exploración de todas las posibles trayectorias durante el conexionado de subpolígonos sólo es aplicable en la práctica cuando el valor de m es bajo. Al fin y al cabo no deja de ser una exploración por “fuerza bruta”, por lo que sería muy interesante tratar de mejorar esta exploración. Por ejemplo, en [3] se propone el uso de un algoritmo alternativo que se basa en abordar el problema de las conexiones entre los subpolígonos mediante su transformación en otro que consiste en minimizar el recorrido en un grafo ponderado no dirigido (*minimum traversal of weighted undirected graph*). Otra opción podría ser la introducción de simplificaciones como se plantea en [6], donde los autores imponen que la aeronave sólo podrá volar de un subpolígono a otro si ambos son adyacentes, es decir, si comparten algún lado en común.

- Una vez se ha realizado la descomposición del polígono cóncavo en sus respectivos subpolígonos convexos, puede ocurrir que se hayan generado un número innecesario de subpolígonos convexos para garantizar la cobertura completa del RoI original. En la mayoría de la literatura consultada se propone que para evitar barridos innecesarios habrá que combinar previamente estos subpolígonos conforme a ciertos criterios. Esto no ha podido ser implementado en este trabajo debido al enfoque que se adoptó para el algoritmo de cálculo de los *sweep paths* asumía que trataría exclusivamente con polígonos convexos, pero la combinación de dos polígonos convexos no necesariamente tiene porque dar como resultado un polígono convexo.

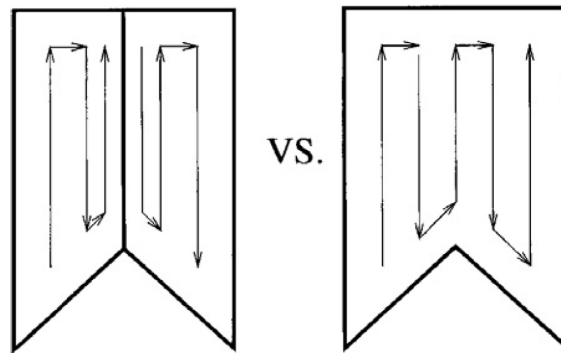


Figura 6.1: Tener menos subpolígonos es mejor (véase [3]).

La necesidad de combinar subpolígonos es especialmente importante cuando el polígono tiene muchos vértices cóncavos. En línea con esto, incluso podría considerarse un cambio de estrategia y optar por usar una descomposición en el que el objetivo fuera obtener el número mínimo de subpolígonos convexos [14].

- Un vértice v_i se considera cóncavo si se cumple que $\mathcal{S}(v_i) < 0$, y de ser así entonces habrá que descomponerlo de acuerdo con lo expuesto en la Subsección 3.2.1. Sin embargo, el valor de $\mathcal{S}(v_i)$ tiene cierta relevancia.

Para el polígono de la Fig. 6.2 se tiene que

$$\begin{aligned} \mathcal{S}(v_{10}) > 0 &\implies v_{10} \text{ es un vértice convexo,} \\ \mathcal{S}(v_{10}^*) < 0 &\implies v_{10}^* \text{ es un vértice cóncavo.} \end{aligned}$$

El hecho de que $\mathcal{S}(v_{10})$ sea un valor positivo pero muy cercano a 0 quiere decir que cualquier pequeña variación en la posición del vértice v_{10} , como por ejemplo v_{10}^* , puede volverlo cóncavo y desencadenar la necesidad de hacer una descomposición, cuando previsiblemente la longitud de la trayectoria sea similar tanto si el décimo vértice del polígono es v_{10} o es v_{10}^* .

En definitiva, lo que se ha querido ilustrar es que el método empleado es muy sensible al número de vértices cóncavos que tenga el RoI. Sería interesante tratar de cuantificar de alguna manera “cuánto de cóncavo es un polígono” (en el caso cóncavo de la Fig. 6.2 lo sería “poco”) y así poder valorar si en vez de tratar el polígono cóncavo como tal, fuera más interesante trabajar con su envolvente convexa.

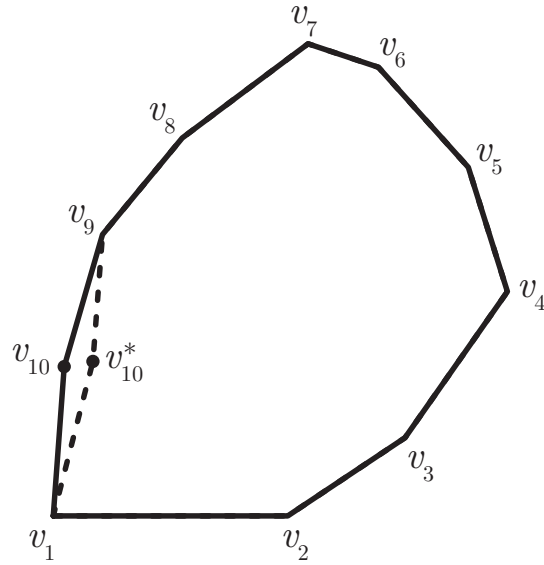


Figura 6.2: Polígono convexo o cóncavo en función de la posición de v_{10} .

- En los ejemplos que se han mostrado a lo largo de esta Memoria no se produce lo comentado en la Observación 8. Sin embargo, si se quiere aportar robustez a este trabajo habría que aportar alguna solución a estos casos de subpolígonos “degenerados”. Asimismo, el estudio aquí realizado es susceptible de ampliación si se considera la existencia de obstáculos o zonas con sobrevuelo prohibido/innecesario en el interior del RoI, por lo que en este caso habría que trabajar con polígonos con agujeros interiores.

Nomenclatura

P	Polígono simple que representa la frontera del RoI
n	Número de vértices totales de un polígono
v_i	Vértice i -ésimo ($i \in \{1, \dots, n\}$) de un polígono
va_i	Vértice antipodal asociado al lado i -ésimo ($i \in \{1, \dots, n\}$) de un polígono
e_i	Lado i -ésimo ($i \in \{1, \dots, n\}$) de un polígono
ncc	Número de vértices cóncavos de un polígono
ρ	Radio mínimo de giro horizontal admisible por el UAV
D_i	Envergadura asociada al lado i -ésimo ($i \in \{1, \dots, n\}$) de un polígono
W	Anchura de un polígono
m	Número de subpolígonos en los que se descompone un cierto polígono cóncavo
P_i	Polígono convexo i -ésimo ($i \in \{1, \dots, m\}$) de la descomposición de un polígono cóncavo P
$P_{i,j}$	<i>Joint-point</i> i -ésimo ($i \in \{1, \dots, 4\}$) del (sub)polígono convexo j -ésimo ($i \in \{1, \dots, m\}$)
V, V_a	<i>Airspeed</i>
V_g	<i>Ground speed</i>
V_w	<i>Wind speed</i>
$FTIW$	Tiempo de vuelo en presencia de viento (<i>Flight Time in Wind</i>)
UAV	<i>Unmanned Aerial Vehicle</i>
CPP	<i>Coverage Path Planning</i>
BF	Patrón <i>back-and-forth</i>

RoI	<i>Region of Interest</i>
GSD	<i>Ground Sample Distance</i>
CW	En el sentido de las agujas del reloj (<i>clockwise</i>)
CCW	En el sentido contrario de las agujas del reloj (<i>counterclockwise</i>)
\mathcal{F}_I	Sistema de coordenadas inercial
\mathcal{F}_T	Sistema de coordenadas trocoidal
<i>CSC</i>	Familia de caminos de Dubins formados por la secuencia arco de circunferencia + segmento recto + arco de circunferencia (RSR, LSL, RSL, LSR)
<i>CCC</i>	Familia de caminos de Dubins formados por tres arcos de circunferencias consecutivos (LRL, RLR)
β	Relación <i>wind-to-airspeed</i>
D_x	Distancia entre <i>sweep paths</i> paralelas
ψ_h	Rumbo de la aeronave, medido desde la dirección norte en sentido CW
ψ_w	Ángulo de dirección del viento, medido desde la dirección norte en sentido CW
ψ_p	Ángulo de rotación de un polígono, medido desde la dirección norte en sentido CCW
$\dot{\psi}$	Velocidad angular de giro de la aeronave

Bibliografía

- [1] Tauã M. Cabreira, Lisane B. Brisolara y Paulo R. Ferreira Jr. «Survey on Coverage Path Planning with Unmanned Aerial Vehicles». En: *Drones* 3.1 (2019). ISSN: 2504-446X. DOI: 10.3390/drones3010004.
- [2] Randal W. Beard & Timothy W. McLain. *Small unmanned aircraft: theory and practice*. Princeton University Press, 2012. ISBN: 978-0-691-14921-9.
- [3] Yan Li y col. «Coverage path planning for UAVs based on enhanced exact cellular decomposition method». En: *Mechatronics* 21.5 (2011). Special Issue on Development of Autonomous Unmanned Aerial Vehicles, págs. 876-885. ISSN: 0957-4158. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.mechatronics.2010.10.009>.
- [4] Yulong Ding, Bin Xin y Jie Chen. «Curvature-constrained path elongation with expected length for Dubins vehicle». En: *Automatica* 108 (2019). ISSN: 0005-1098. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.automatica.2019.108495>.
- [5] Damián Rivas Rivas. *Apuntes de Mecánica de Vuelo y Operaciones de Vuelo, Curso 2015-16*. Escuela Técnica Superior de Ingeniería, Universidad de Sevilla.
- [6] Matthew Coombes y col. «Optimal Polygon Decomposition for UAV Survey Coverage Path Planning in Wind». En: *Sensors* 18.7 (2018). ISSN: 1424-8220. DOI: 10.3390/s18072132.
- [7] *How to fly your agriculture drone to get accurate plot data*. <https://delair.aero/agriculture/how-to-fly-your-drone-to-get-accurate-plot-data/>. Accedido el 26/10/2020.
- [8] Timo Oksanen y Arto Visala. «Coverage path planning algorithms for agricultural field machines». En: *Journal of Field Robotics* 26.8 (2009), págs. 651-668. DOI: 10.1002/rob.20300.
- [9] M. Torres y col. «Coverage path planning with unmanned aerial vehicles for 3D terrain reconstruction». En: *Expert Syst. Appl.* 55 (2016), págs. 441-451.
- [10] L. E. Dubins. «On Curves of Minimal Length with a Constraint on Average Curvature, and with Prescribed Initial and Terminal Positions and Tangents». En: *American Journal of Mathematics* 79.3 (1957), págs. 497-516. DOI: 10.2307/2372560.
- [11] Satyanarayana G. Manyam y col. «Shortest Dubins path to a circle». En: *AIAA Scitech 2019 Forum*. DOI: 10.2514/6.2019-0919.
- [12] I. Lugo-Cárdenas y col. «Dubins path generation for a fixed wing UAV». En: *2014 International Conference on Unmanned Aircraft Systems (ICUAS)*. 2014, págs. 339-346. DOI: 10.1109/ICUAS.2014.6842272.

- [13] Mahendra Mallick. *A Note on Bearing Measurement Model*. Mayo de 2018. DOI: 10.13140/RG.2.2.13441.35681.
- [14] J. Mark Keil. «Decomposing a Polygon into Simpler Components». En: *SIAM Journal on Computing* 14.4 (1985), págs. 799-817. DOI: 10.1137/0214056.
- [15] Eric Haines. «I.4. - Point in Polygon Strategies». En: *Graphics Gems*. Ed. por Paul S. Heckbert. Academic Press, 1994, págs. 24-46. ISBN: 978-0-12-336156-1. DOI: <https://doi.org/10.1016/B978-0-12-336156-1.50013-6>.
- [16] Grupo CDPYE-UGR. *Nociones básicas de combinatoria*. <https://www.ugr.es/~proman/PyE/Combinatoria.pdf>. Universidad de Granada.
- [17] Paco Moreno. (27 de febrero de 2015). *Valencia fumigará con drones plagas de mosquitos en los arrozales de la Albufera*. <https://www.lasprovincias.es/valencia-ciudad/201502/27/valencia-fumigara-drones-plagas-20150227000321-v.html?ref=https:%2F%2Fwww.google.com%2F>. Periódico *Las Provincias*. Accedido el 05/11/2020.
- [18] *Los drones se van de vendimia en Viñas del Vero*. <https://www.tecnovino.com/los-drones-se-van-de-vendimia-en-vinas-del-vero/>. Revista digital *TecnoVino*. (agosto de 2014). Accedido el 05/11/2020.
- [19] Laszlo Techy y Craig A. Woolsey. «Minimum-Time Path Planning for Unmanned Aerial Vehicles in Steady Uniform Winds». En: *Journal of Guidance, Control, and Dynamics* 32.6 (2009), págs. 1736-1746. DOI: 10.2514/1.44580.

