

UNIVERSITAT POLITÈCNICA DE VALÈNCIA



MÁSTER EN INGENIERÍA DEL HORMIGÓN

DEPARTAMENTO DE INGENIERÍA DE LA CONSTRUCCIÓN  
Y PROYECTOS DE INGENIERÍA CIVIL

**ESTUDIO SOBRE LÁMINAS CILÍNDRICAS DE HORMIGÓN  
ARMADO. ANÁLISIS ESTRUCTURAL DE LA CUBIERTA DE  
LA IGLESIA DE VILLAVERDE DE EDUARDO TORROJA**

Trabajo Final de Máster

Pedro Jesús Sevilla Toboso

Arquitecto







## **Agradecimientos**

Agradezco especialmente a mi padre y a mi madre su amor, apoyo y ejemplo incondicionales. Gracias a mis hermanas por la serenidad y seguridad que han mostrado siempre. Agradezco especialmente a mi tía Hortensia por ayudarme en una ciudad desconocida. Y agradezco a toda mi familia el apoyo que siempre me ha mostrado. ¡Gracias!

También me gustaría agradecer al Instituto Torroja por aportar la información necesaria para conocer la obra de Torroja. También agradecer al Archivo Torroja del CEHOPU, y en especial a Isabel García por aportar información clave para el presente estudio. Agradecer a Ignacio Payá Zaforteza y a José Miguel Adam Martínez por haber compartido conmigo sus conocimientos y experiencia para hacer posible este trabajo. También agradecer a Oswaldo Medina Vera, alumno de Ingeniería de Caminos, Canales y Puertos, por su paciente ayuda. Y me gustaría resaltar la ayuda que ha significado los escritos de Eduardo Torroja así como los de Joaquín Antuña, que me han aportado un amplio conocimiento.



## Prólogo

En el mundo de la ciencia o del arte no hay nada más asombroso como la imaginación. Su potencial de creación es comparable al vasto universo y el misterio del cuerpo humano. Imaginar es a veces la clave para resolver un enigma de la naturaleza. En arquitectura e ingeniería la imaginación también es el punto de partida para cualquier proyecto. Lo podemos comprobar en la siguiente fotografía, donde Eduardo Torroja reflexiona sobre uno de sus proyectos (figura 1).

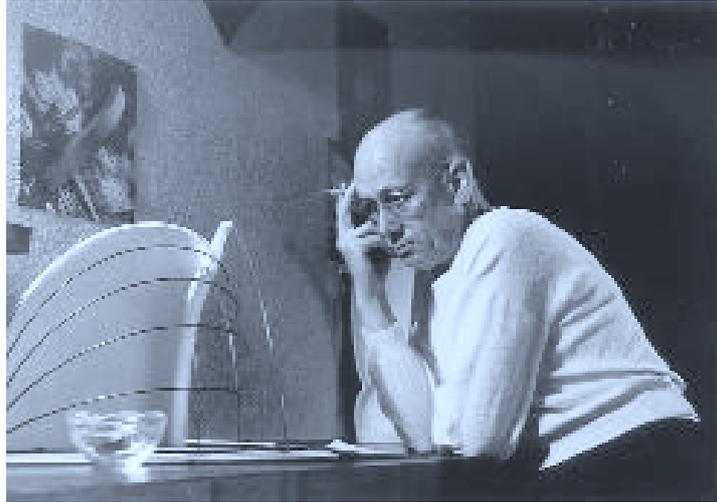


Figura 1. Imagen de Eduardo Torroja. (56)

La bóveda es uno de los elementos de más historia en la técnica de la construcción. No cabe aquí analizar todo el bosque de soluciones al que dan lugar estos elementos y las diversas intersecciones que pueden obtenerse. Las obras de cantería de este género están hoy desplazadas por los nuevos materiales y las nuevas técnicas. Pero aún hoy los técnicos continúan encontrando en su comportamiento lecciones de inmenso valor.

La lámina cilíndrica es una estructura totalmente diferente de la bóveda de cañón tradicional. El comportamiento estructural de las láminas se caracteriza por una eficiencia mecánica muy alta. Dependen de su configuración y no de su masa para mantenerse estables. Utilizando el hormigón armado se utiliza su resistencia a tracción para alcanzar soluciones más ligeras y de fenómeno tensional más complejo. Así se obtiene un tipo estructural totalmente nuevo: láminas cilíndricas sobre arcos rígidos o muros transversales distanciados y colocados según las directrices sin necesidad de apoyos intermedios. Estos elementos son estéticos y estructuralmente más eficientes. Derivan su acción estructural de su forma, la cual determina su comportamiento. Parecen ligeras y hermosas.

Para comprender mejor su comportamiento conviene considerar las tensiones y los esfuerzos agrupados en dos conjuntos diferentes. Podrían llamarse primarias las tensiones longitudinales, que más o menos se reparten como en una viga, y las tensiones cortantes que actúan en el plano tangente a la lámina. Pero además deben incluirse en este grupo las compresiones y tracciones según la directriz. Su comportamiento en general se podría asimilar a una viga.

Sin embargo, el interés de los arquitectos e ingenieros por este tipo de construcción no ha venido acompañado por el descubrimiento de métodos dignos de confianza para el análisis de esfuerzos en dichas estructuras y sobre todo de métodos suficientemente sencillos para que pueda reglamentarse su aplicación y puedan ser utilizados por técnicos no especializados. Incluso en los proyectos de estas estructuras, la elección de su forma y su disposición se hace generalmente de manera bastante arbitraria. En muchos casos una forma de comprobación para determinar la seguridad de las estructuras era mediante las pruebas de carga, como se puede apreciar en la siguiente fotografía sobre uno de los módulos de la cubierta del Hipódromo de la Zarzuela (figura 2).

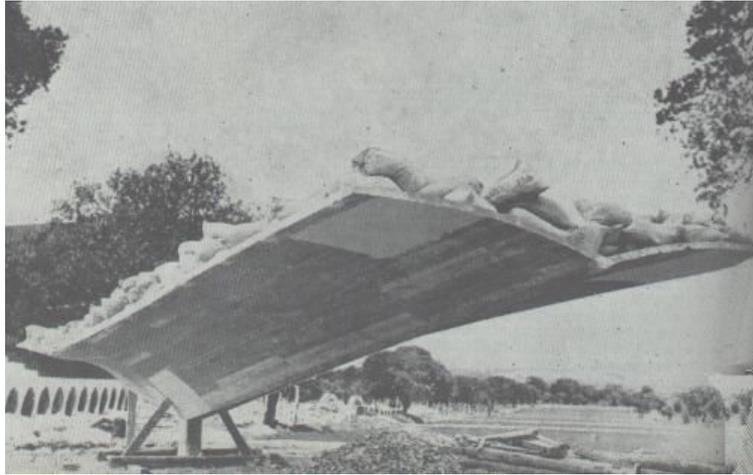


Figura 2. Prueba de carga de uno de los módulos del hipódromo de la Zarzuela. Las pruebas de carga se convertían en un método adecuado para las comprobaciones. (56)

El lento desarrollo de los cascarones puede atribuirse en parte al intento de construir enorme y espectacularmente y a la creencia común de que son caros y muy difíciles de construir. Debido al desconocimiento general sobre este tema, se han dedicado los esfuerzos a la investigación de estructuras laminares. Se ha examinado públicamente el estado actual del problema del diseño y se ha divulgado cuales son las posibilidades razonables de ejecución de las distintas formas conocidas. Las investigaciones se han centrado en varios puntos en concreto:

- A) El problema de la forma en relación con el comportamiento estructural.
- B) Limitaciones impuestas por el cálculo de esfuerzos así como el coste de la construcción.
- C) La influencia en el proyecto del tamaño de la estructura.
- D) Las dificultades e inconvenientes del análisis mediante modelos reducidos. Ante la complejidad del problema matemático que el intento del cálculo analítico plantea, muchos técnicos abogaban por el empleo de pruebas sobre modelos reducidos, creyendo hallar en ellos un método cómodo de eludir estas dificultades. Pero muchas veces se olvidan las limitaciones y el alcance real de tal procedimiento. En la siguiente fotografía se puede apreciar un modelo reducido sobre la biblioteca de Basilea (figura 3).



Figura 3. Ensayo sobre modelo de la biblioteca de Basilea, realizado por Hossdorf. (24)

Hasta el siglo XIX estas grandes estructuras fueron concebidas con pocos conocimientos de matemáticas y sin conocimientos de mecánica. Los antiguos diseños no estaban basados en el conocimiento analítico, pero si en una cultura basada en la geometría y el sentido común. Lo podemos comprobar en las siguientes fotografías, donde se aprecian distintos métodos de obtención de la forma óptima a través de la forma invertida mediante el peso propio (figuras 4 y 5). La geometría

se basa en la relación entre formas, líneas y poliedros. El problema analítico de los cascarones se complicaba al considerar las condiciones de borde, porque había que tenerlos en cuenta al resolver los sistemas de ecuaciones que resultantes. Finalmente se han impuesto los métodos de cálculo científico que han permitido un mejor análisis de las estructuras. Pero actualmente la geometría ha vuelto al punto de mira y ha demostrado ser un método que siempre hay que tener en cuenta en combinación con los métodos avanzados de cálculo.

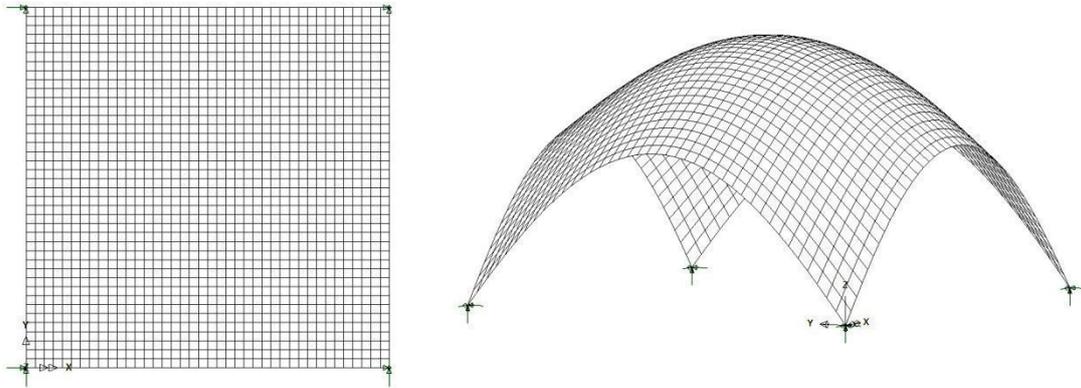


Figura 4. Una lámina rectangular y plana, al ser sometida a su peso propio, toma la forma por la cual, al invertirla, se obtiene un modelo de trabajo adecuado

El objetivo ideal de todos los diseñadores de laminas fue muy bien resumido por AM Haas, quien escribió: *"Para obtener la mayor eficiencia estructural, el diseñador debe seleccionar una forma que, bajo las condiciones del proyecto, se aproxime al estado de tensión en la membrana tanto como sea posible y, en consecuencia, reduzca la flexión secundaria a mínimos". Esto no sólo es sencillo desde el punto de vista analítico, sino que también proporciona la solución más económica estructural*"(23). Además el hormigón puede adquirir cualquier forma, ofreciendo un rango casi ilimitado de formas.



Figura 5. Algunos diseños experimentales de Heinz Isler. (57)



# Índice

	Página
<b>Agradecimientos</b> .....	5
<b>Prólogo</b> .....	7
<b>Índice</b> .....	11
<b>Lista de figuras y gráficas</b> .....	13
<b>Objetivos y metodología de estudio</b> .....	23
<b>1. Estado del Arte</b> .....	25
A. Elementos compositivos de láminas cilíndricas.....	25
B. Construcción.....	30
C. Teoría de láminas cilíndricas.....	31
D. Investigación sobre láminas cilíndricas.....	37
E. Revisión histórica sobre obras realizadas.....	40
F. Evolución de Eduardo Torroja. Revisión de construcciones laminares.....	46
G. El perfil elíptico.....	63
<b>2. Iglesia de Villaverde</b> .....	67
A. Villaverde.....	67
B. Iglesia de de San Andrés de Villaverde.....	67
C. Diseño de la cubierta.....	71
<b>3. Estudio paramétrico comparativo</b> .....	77
A. Esfuerzos longitudinales.....	79
B. Esfuerzos transversales.....	84
C. Esfuerzos tangenciales.....	86
D. Esfuerzos flectores transversales.....	87
E. Esfuerzos flectores longitudinales.....	88

F. Desplazamientos verticales.....	89
G. Comparación entre el perfil semicircular y semielíptico.....	89
H. Conclusiones.....	93
<b>4. Aproximación al modelo de la cubierta de Villaverde.....</b>	<b>95</b>
A. Bóveda completa sin nervios y apoyada en las testas.....	102
B. Bóveda completa con nervios y apoyada en las testas.....	103
C. Bóveda completa sin nervios y apoyada en testas y muros laterales.....	104
D. Bóveda completa con nervios y apoyada en testas y muros laterales.....	106
E. Comparación entre modelos.....	107
<b>5. Análisis comparativo del comportamiento de la cubierta ante diferentes hipótesis de carga.....</b>	<b>113</b>
A. Esfuerzos longitudinales.....	114
B. Esfuerzos transversales.....	115
C. Esfuerzos tangenciales.....	116
D. Desplazamientos verticales.....	117
<b>6. Análisis completo de la cubierta.....</b>	<b>119</b>
A. Análisis comparativo: lineal y no lineal.....	119
B. Estabilidad de la cubierta.....	140
<b>7. Conclusiones.....</b>	<b>157</b>
<b>8. Propuestas de Investigación.....</b>	<b>161</b>
<b>9. Referencias.....</b>	<b>163</b>
A. Bibliografía.....	163
B. Otras referencias.....	164

## Listado de figuras y gráficas.

### Figuras.

Figura 1. Imagen de Eduardo Torroja

Figura 2. Prueba de carga de uno de los módulos del hipódromo de la Zarzuela.

Figura 3. Ensayo sobre modelo de la biblioteca de Basilea, realizado por Hossdorf.

Figura 4. Una lámina rectangular y plana, al ser sometida a su peso propio, toma la forma por la cual, al invertirla, se obtiene un modelo de trabajo adecuado

Figura 5. Algunos diseños experimentales de Heinz Isler.

Figura 6. De izquierda a derecha: A) Ejemplo de láminas larga y corta; B) Ejemplo de láminas múltiples; C) Ejemplo de láminas continuas.

Figura 7. Esquema de los distintos tipos de lámina cilíndrica que podemos encontrar en la práctica.

Figura 8. De izquierda a derecha y de arriba a abajo: A) Ejemplo de lámina corrugada para una floristería; B) Ejemplo lámina basada en arco central con dos cantiléver para las Aduanas.

Figura 9. De arriba a abajo y de izquierda a derecha: A) Arco circular con viga de borde; B) Arco circular simple; C) Arco elíptico; D) Arco parabólico.

Figura 10. De arriba a abajo: A) Arco circular con viga de borde; B) Arco elíptico.

Figura 11. Esquema de lámina múltiple.

Figura 12. A) Viga de borde vertical; B) Viga de borde horizontal; C) Membrana adyacente.

Figura 13. A) Apoyo sobre viga rígida; B) Apoyo sobre muro.

Figura 14. Anillos de refuerzo para el Frontón Recoletos.

Figura 15. Imagen de la cimbra para la construcción del Frontón de Recoletos.

Figura 16. Esquema de lámina cilíndrica apoyada en los extremos y rigidizada mediante vigas de borde

Figura 17. Esfuerzos existentes en una lámina cilíndrica de hormigón armado.

Figura 18. Esquema general de transmisión de cargas para láminas cilíndricas asumida por el estado de membrana.

Figura 19. Esquema de sistemas de apoyo para láminas cilíndricas.

Figura 20. Esquema de esfuerzos longitudinales a lo largo de la lámina.

Figura 21. Esquema de esfuerzos transversales a lo largo de la lámina.

Figura 22. Perturbación a flexión en el rigidizador transversal en membranas.

Figura 23. Esquema de transmisión de esfuerzos tangenciales, tanto en sentido transversal como longitudinal.

Figura 24. Esquema de esfuerzos tangenciales a lo largo de la lámina.

Figura 25. Esquema de fuerzas resultantes en la lámina.

Figura 26. Esquema de esfuerzos principales, consecuencia del estado de esfuerzos tangenciales puros, ó estado de corte puro.

Figura 27. Esquema de pandeo en láminas cilíndricas cortas.

Figura 28. Esquema de pandeo en láminas cilíndricas largas.

Figura 29. Esquema dimensional del modelo de ensayo utilizado: A) Sección transversal; B) Alzado; C) Planta. Unidades en centímetros.

Figura 30. Distintos modelos de armado de los nervios de borde.

Figura 31. Distintos esquemas de armado: A) Armado longitudinal en corona; B) Armado en los nervios de borde.

Figura 32. Resultados obtenidos de la investigación: A) Modelo A2; B) Modelo A1; C) Modelo B; D) Modelo C.

Figura 33. Perspectiva del Hangar en el aeropuerto civil de Karachi.

Figura 34. Perspectiva del Garaje para la Bournemouth Corporation.

Figura 35. Perspectiva del Garaje en Wythenshawe.

Figura 36. Perspectiva de las bodegas de almacén de grano.

Figura 37. Perspectiva del mercado de Colonia.

Figura 38. Perspectiva de la fábrica de Lindau.

Figura 39. Perspectiva de la fábrica Triumph international.

Figura 40. Aceros de México.

Figura 41. Almacén del Consorcio Wagen realizado por Hossdorf.

Figura 42. Esquema de las oficinas.

Figura 43. Esquema extraído del manuscrito de Torroja sobre el Frontón Recoletos.

Figura 44. Armado de los cajones de cimentación de Sancti Petri.

Figura 45. Voladizos del Instituto Escuela.

Figura 46. Mercado de Algeciras.

Figura 47. Dibujo del mercado de Guinea.

Figura 48. Esquema de la cubierta del cobertizo de la escuela elemental de trabajo.

Figura 49. Vista frontal e interior de la nave Torroja en Villaverde.

Figura 50. Perfil para la cubierta para el Seminario de Madrid.

Figura 51. Vista de la Estación de los ministerios.

Figura 52. Vista del Frontón de Recoletos.

Figura 53. Vista actual del exterior y del interior.

Figura 54. Imagen durante la construcción.

Figura 55. Esquema estructural de cada módulo.

Figura 56. Esquema de esfuerzos actuantes en la lámina.

Figura 57. Esquema para la cubierta del mercado de Ferrol.

Figura 58. Detalle longitudinal de la Factoría CASA. Archivo Torroja.

Figura 59. Sección transversal de la Factoría CASA. Archivo Torroja.

Figura 60. Detalle de la estructura de cubierta de la Factoría CASA. Archivo Torroja.

Figura 61. Aspecto actual del Acueducto de Alloz.

Figura 62. Hangar de Alcalá. Actualmente abandonado.

Figura 63. Proyecto de nave industrial.

Figura 64. Aspecto actual del Frontón de Añorga.

Figura 65. Cubierta de la nave de ensayos del Instituto Torroja.

Figura 66. Exterior e interior de la Iglesia de Pont de Suert.

Figura 67. Vista de la Universidad Laboral de Tarragona. En primer plano, la cubierta plegada realizada por Torroja.

Figura 68. Deposito Fedala, Mohamedia, Marruecos.

Figura 69. Maqueta del Club Tachira

Figura 70. Vistas exterior e interior actual de la Iglesia de la Grao de Gandía.

Figura 71. Imágenes de la solución adoptada.

Figura 72. De izquierda a derecha: A) Imagen de la bóveda ojival de la Iglesia de Vinça. Languedoc-Roussillon; B) Imagen de la bóveda carpanel de la Iglesia de San Miguel Arcángel.

Figura 73. Arcos escarzanos en el Museo de Historia de Valencia.

Figura 74. De izquierda a derecha: A) Imagen Interior de la Mezquita de Córdoba; B) Imagen de la bóveda elíptica de la Cartuja de Granada.

Figura 75. Imagen general de la Iglesia de San Luis, cubierta mediante bóveda elíptica.

Figura 76. Imagen general de la Iglesia Católica de la Transfiguración de Lagos.

Figura 77. Imagen de la iluminación para una de las Fallas de Valencia (Año 2011).

Figura 78. Antigua vista de Villaverde. En primer plano podemos ver la Nave Torroja, y más alejada, la Iglesia de San Andrés de Villaverde

Figura 79. Grabado de época. Cedida por la parroquia de San Andrés de Villaverde.

Figura 80. Fotografía tras la Guerra Civil Española.

Figura 81. Imagen de época después de la rehabilitación.

Figura 82. Aspecto actual del exterior de la iglesia. Todavía se puede observar en el muro exterior del ábside el perfil de apoyo elíptico de la antigua cubierta.

Figura 83. Aspecto actual del interior de la iglesia. A la izquierda observamos la entrada y el coro; a la derecha observamos la nave central y el ábside.

Figura 84. A la izquierda detalle de la cubierta del actual ábside, a la izquierda; A la derecha vista de una de las naves laterales.

Figura 85. Esquema de la planta de la Iglesia. Cotas en metros.

Figura 86. Croquis realizado por Torroja para la solución metálica. A la izquierda un esquema de la planta donde se pueden intuir los soportes intermedios; a la derecha un esquema que muestra la solución en alzado. (26)

Figura 87. Esquema de la solución metálica, donde se puede apreciar las reacciones en cada apoyo. La cercha central se corresponde con la nave central, delimitada por los apoyos intermedios. A) Cordones formados por 4 ángulos de 45x45/10 y 5,2m de longitud; B) Cordón formado por 2 ángulos de 40x40/6 y 9,3m de largo; C) Cordón formado por 2 ángulos de 40x40/6 y 3m de largo; D) Cordón formado por 2 ángulos de 40x40/6 y 1,5m de longitud.

Figura 88. Esquema realizado por Torroja que describe su idea de sección transversal.

Figura 89. Sección transversal de la bóveda definitiva. Cotas en metros.

Figura 90. Simulación por ordenador de la visión resultante. Hay que destacar el efecto espacial que se consiguió al suprimir los apoyos intermedios que separaban las naves.

Figura 91. De izquierda a derecha: A) detalle para los apoyos; B) detalle para el centro de la lámina. Cotas en milímetros.

Figura 92. Plano de armado de la lámina y los nervios.

Figura 93. Plano de armado del coro y la cubierta del campanario.

Figura 94. Fotografía tomada durante la construcción de la bóveda. Podemos ver el detalle de armado tanto de la lámina en general, como el refuerzo que se dispuso en el nervio de intersección entre lóbulos.

Figura 95. Intersección en detalle del lóbulo semielíptico con la cúpula del ábside. La unión se materializa con un doble nervio en forma de arco.

Figura 96. Sección transversal a través de la cúpula. Podemos ver que ésta se apoya tanto en los muros laterales como en el arco de intersección así como en una lámina trasera, que a su vez apoya en los muros existentes.

Figura 97. Fotografía de detalle de la cúpula. Podemos ver que estaba perforada para permitir la entrada de luz natural a la iglesia.

Figura 98. Deformada de la viga biapoyada. El punto rojo muestra un descenso de 2,7cm en el centro de la lámina.

Figura 99. Deformada resultante para una viga de 1m de ancho.

Figura 100. Hipótesis consideradas: A) Peso propio; B) Peso propio y sobrecarga de nieve; C) Peso propio y sobrecarga de viento.

Figura 101. Modelo de cálculo de la bóveda apoyada en los extremos.

Figura 102. Modelo de cálculo de la bóveda apoyada en todo el contorno.

Figura 103. Gráfico para coeficientes  $C_{pe}$  del Eurocódigo 1.

Figura 104. Esquema sobre las deformadas para cada hipótesis.

Figura 105. Modelo de cálculo de la cubierta completa.

Figura 106. Esquema de la correspondencia entre los momentos flectores transversales de la lámina y el armado dispuesto en los planos originales.

Figura 107. De izquierda a derecha: Deformada de una lámina elíptica sin nervios de borde; Deformada de una lámina elíptica con nervios de borde.

Figura 108. Esquema de pandeo según el primer modo.

Figura 109. Esquema de pandeo para distintos modos: A) 2º modo; B) 3º modo; C) 4º modo; D) 5º modo.

Figura 110. Gráfica para carga superior crítica.

Figura 111. Valores de coeficiente  $\omega$  (Basados en Kollar y Dulacska).

Figura 112. Corrección de la carga crítica superior debido al armado y la fisuración (Basados en Kollar y Dulacska).

## **Gráficas**

Gráfica 1. Esfuerzos longitudinales de la lámina en casquete esférico.

Gráfica 2. Esfuerzos longitudinales de la lámina semicircular.

Gráfica 3. Esfuerzos longitudinales de la lámina parabólica.

Gráfica 4. Esfuerzos longitudinales de la lámina hiperbólica de directriz curva hacia abajo.

Gráfica 5. Esfuerzos longitudinales de la lámina hiperbólica de directriz curva hacia arriba

Gráfica 6. Esfuerzos longitudinales de la lámina toroidal.

Gráfica 7. Esfuerzos longitudinales de la lámina elíptica pura.

Gráfica 8. Comparación de esfuerzos longitudinales en  $X=0m$ .

Gráfica 9. Comparación de esfuerzos longitudinales en  $X=0,9m$ .

Gráfica 10. Comparación de esfuerzos longitudinales en  $X=4,4m$ .

Gráfica 11. Esfuerzos transversales de la lámina hiperbólica de directriz curva hacia arriba.

Gráfica 12. Esfuerzos transversales de la lámina toroidal.

Gráfica 13. Esfuerzos transversales de la lámina elíptica pura.

Gráfica 14. Comparación de esfuerzos transversales en  $L=0m$ .

Gráfica 15. Comparación de esfuerzos transversales en  $L=12,75m$ .

Gráfica 16. Esfuerzos tangenciales de la lámina toroidal.

Gráfica 17. Esfuerzos tangenciales de la lámina elíptica pura.

Gráfica 18. Comparación de esfuerzos tangenciales en  $L=0m$ .

Gráfica 19. Comparación de esfuerzos tangenciales en  $L=12,75m$ .

Gráfica 20. Esfuerzos flectores transversales de la lámina semicircular.

Gráfica 21. Esfuerzos flectores transversales de la lámina toroidal.

Gráfica 22. Momentos transversales de la lámina elíptica pura.

Gráfica 23. Comparación de los esfuerzos flectores transversales en  $L=0m$ .

Gráfica 24. Comparación de movimientos verticales longitudinales en  $X=0m$ .

Gráfica 25. Comparación de movimientos verticales longitudinales en  $X=4,4m$ .

Gráfica 26. Comparación de esfuerzos longitudinales en la lámina semicircular en  $X=0m$ .

Gráfica 27. Comparación de esfuerzos longitudinales en la lámina semicircular en  $X=4,4m$ .

Gráfica 28. Comparación de esfuerzos longitudinales en la lámina semielíptica en  $X=0m$ .

Gráfica 29. Comparación de esfuerzos longitudinales en la lámina semielíptica en  $L=4,4m$ .

Gráfica 30. Comparación de esfuerzos transversales en la lámina semicircular en  $L=12,75m$ .

Gráfica 31. Comparación de esfuerzos transversales en la lámina semielíptica en  $L=12,75m$ .

Gráfica 32. Comparación de esfuerzos tangenciales en la lámina semicircular en  $L=0m$ .

Gráfica 33. Comparación de esfuerzos tangenciales en la lámina semicircular en  $L=12,75m$ .

Gráfica 34. Comparación de esfuerzos tangenciales en la lámina semielíptica en  $L=0m$ .

Gráfica 35. Comparación de esfuerzos tangenciales en la lámina semielíptica en  $L=12,75m$ .

Gráfica 36. Esfuerzos longitudinales de la lámina semielíptica calculados por Torroja (H. peso propio).

Gráfica 37. Esfuerzos longitudinales de la lámina semielíptica calculados mediante LUSA (H. peso propio).

Gráfica 38. Esfuerzos longitudinales de la lámina de cuarto de elipse calculada mediante LUSAS (H. peso propio).

Gráfica 39. Esfuerzos transversales de la lámina semielíptica calculados por Torroja (H. peso propio).

Gráfica 40. Esfuerzos transversales de la lámina semielíptica calculados mediante LUSAS (H. peso propio).

Gráfica 41. Esfuerzos transversales de la lámina de cuarto de elipse calculada mediante LUSAS (H. peso propio).

Gráfica 42. Esfuerzos tangenciales de la lámina semielíptica calculados por Torroja (H. peso propio).

Gráfica 43. Esfuerzos tangenciales de la lámina semielíptica calculados por LUSAS (H. peso propio).

Gráfica 44. Esfuerzos tangenciales de la lámina de cuarto de elipse calculada mediante LUSAS (H. peso propio).

Gráfica 45. Esfuerzos longitudinales de la lámina total calculados por Torroja (H. peso propio).

Gráfica 46. Esfuerzos transversales de la lámina total calculados por Torroja (H. peso propio).

Gráfica 47. Esfuerzos tangenciales de la lámina total calculados por Torroja (H. peso propio).

Gráfica 48. Esfuerzos longitudinales (H. peso propio).

Gráfica 49. Esfuerzos transversales (H. peso propio).

Gráfica 50. Esfuerzos tangenciales (H. peso propio).

Gráfica 51. Esfuerzos longitudinales (H. peso propio).

Gráfica 52. Esfuerzos transversales (H. peso propio).

Gráfica 53. Esfuerzos tangenciales (H. peso propio).

Gráfica 54. Esfuerzos longitudinales (H. peso propio).

Gráfica 55. Esfuerzos transversales (H. peso propio).

Gráfica 56. Esfuerzos tangenciales (H. peso propio).

Gráfica 57. Esfuerzos flectores transversales (H. peso propio).

Gráfica 58. Esfuerzos longitudinales (H. peso propio).

Gráfica 59. Esfuerzos transversales (H. peso propio).

Gráfica 60. Esfuerzos tangenciales (H. peso propio).

Gráfica 61. Esfuerzos flectores transversales (H. peso propio).

Gráfica 62. Comparación de esfuerzos longitudinales en  $X=0m$  (H. peso propio).

Gráfica 63. Comparación de esfuerzos longitudinales en  $X=4,19m$  (H. peso propio).

Gráfica 64. Comparación de esfuerzos longitudinales en  $X=8,6m$  (H. peso propio).

Gráfica 65. Comparación de esfuerzos transversales en  $L=3m$  (H. peso propio).

Gráfica 66. Comparación de esfuerzos transversales en  $L=12,75m$  (H. peso propio).

Gráfica 67. Comparación de esfuerzos tangenciales en  $L=0m$  (H. peso propio).

Gráfica 68. Comparación de esfuerzos tangenciales en  $L=12,75m$  (H. peso propio).

Gráfica 69. Comparación de esfuerzos flectores transversales en  $L=12,75m$  (H. peso propio).

Gráfica 70. Comparación de movimientos verticales en  $L=12,75m$  (H. peso propio).

Gráfica 71. Comparación de esfuerzos longitudinales en  $X=1,7m$ .

Gráfica 72. Comparación de esfuerzos longitudinales en  $X=4,19m$ .

Gráfica 73. Comparación de esfuerzos longitudinales en  $X=6,1m$ .

Gráfica 74. Comparación de esfuerzos longitudinales en  $X=8,6\text{m}$ .

Gráfica 75. Comparación de tensiones transversales en  $L=3\text{m}$ .

Gráfica 76. Comparación de tensiones transversales en  $L=12,75\text{m}$ .

Gráfica 77. Comparación de tensiones tangenciales en  $L=0\text{m}$ .

Gráfica 78. Comparación de tensiones tangenciales en  $L=12,75\text{m}$ .

Gráfica 79. Comparación de movimientos verticales en  $L=12,75\text{m}$ .

Gráfica 80. Comparación de esfuerzos longitudinales en  $X=4,19\text{m}$  (H. peso propio)

Gráfica 81. Comparación de esfuerzos longitudinales en  $X=8,6\text{m}$  (H. peso propio)

Gráfica 82. Comparación de esfuerzos transversales en  $L=22,5\text{m}$  (H. peso propio)

Gráfica 83. Comparación de esfuerzos transversales en  $L=12,75\text{m}$  (H. peso propio)

Gráfica 84. Comparación de esfuerzos tangenciales (H. peso propio)

Gráfica 85. Comparación de esfuerzos tangenciales (H. peso propio)

Gráfica 86. Comparación de movimientos verticales en  $L=22,5\text{m}$  (H. peso propio)

Gráfica 87. Comparación de movimientos verticales en  $L=12,75\text{m}$  (H. peso propio)

Gráfica 88. Comparación de esfuerzos longitudinales a lo largo de la lámina (H. peso propio)

Gráfica 89. Comparación de esfuerzos transversales entre  $L=3\text{m}$  y  $L=22,5\text{m}$  (H. peso propio)

Gráfica 90. Comparación de esfuerzos transversales  $L=9\text{m}$  y  $L=16,5\text{m}$  (H. peso propio)

Gráfica 91. Comparación de esfuerzos tangenciales entre  $L=3\text{m}$  y  $L=22,5\text{m}$  (H. peso propio)

Gráfica 92. Comparación de esfuerzos tangenciales entre  $L=9\text{m}$  y  $L=16,5\text{m}$  (H. peso propio)

Gráfica 93. Comparación de movimientos verticales entre  $L=0\text{m}$  y  $L=25,5\text{m}$  (H. peso propio)

Gráfica 94. Comparación de movimientos verticales entre  $L=9\text{m}$  y  $L=16,5\text{m}$  (H. peso propio)

Gráfica 95. Comparación de esfuerzos longitudinales en  $X=1,7\text{m}$ .

Gráfica 96. Comparación de esfuerzos longitudinales en  $X=4,19\text{m}$ .

Gráfica 97. Comparación de esfuerzos longitudinales en  $X=6,1\text{m}$ .

Gráfica 98. Comparación de esfuerzos longitudinales en  $X=8,6\text{m}$ .

Gráfica 99. Comparación de esfuerzos transversales en  $L=22,5\text{m}$ .

Gráfica 100. Comparación de esfuerzos transversales en  $L=12,75\text{m}$

Gráfica 101. Comparación de esfuerzos tangenciales en  $L=3\text{m}$

Gráfica 102. Comparación de esfuerzos tangenciales en  $L=12,75\text{m}$

Gráfica 103. Comparación de movimientos verticales en  $L=22,5\text{m}$

Gráfica 104. Comparación de movimientos verticales en  $L=12,75\text{m}$

Gráfica 105. Comparación de esfuerzos flectores transversales en  $L=22,5\text{m}$

Gráfica 106. Comparación de esfuerzos flectores transversales en  $L=12,5\text{m}$

Gráfica 107. Comparación de esfuerzos flectores en el nervio de intersección, en  $X=4,19\text{m}$

Gráfica 108. Comparación de esfuerzos torsores en el nervio de intersección, en  $X=4,19\text{m}$

Gráfica 109. Comparación de esfuerzos cortantes verticales en el nervio de intersección, en  $X=4,19\text{m}$

Gráfica 110. Comparación de esfuerzos cortantes transversales en el nervio de intersección, en  $X=4,19\text{m}$ .

Gráfica 111. Comparación de esfuerzos flectores en el arco de apoyo, en  $L=25,5\text{m}$

Gráfica 112. Comparación de esfuerzos cortantes verticales en el arco de apoyo, en  $L=25,5\text{m}$

Gráfica 113. Comparación de esfuerzos cortantes transversales en el arco de apoyo, en  $L=25,5\text{m}$

Gráfica 114. Comparación de esfuerzos longitudinales en  $X=1,7\text{m}$  (H. peso propio, sobrecarga de nieve y viento en presión).

Gráfica 115. Comparación de esfuerzos longitudinales en  $X=4,19\text{m}$  (H. peso propio, sobrecarga de nieve y viento en presión).

Gráfica 116. Comparación de esfuerzos longitudinales en  $X=6,1\text{m}$  (H. peso propio, sobrecarga de nieve y viento en presión).

Gráfica 117. Comparación de esfuerzos longitudinales en  $X=8,6\text{m}$  (H. peso propio, sobrecarga de nieve)

Gráfica 118. Comparación de esfuerzos transversales en  $L=22,5\text{m}$  (H. peso propio, sobrecarga de nieve y viento en presión).

Gráfica 119. Comparación de esfuerzos transversales en  $L=16,5\text{m}$  (H. peso propio, sobrecarga de nieve y viento en presión).

Gráfica 120. Comparación de esfuerzos tangenciales en  $L=19,5\text{m}$  (H. peso propio y viento de presión y succión vertical).

Gráfica 121. Comparación de esfuerzos tangenciales en  $L=19,5\text{m}$  (H. peso propio, sobrecarga de nieve y viento en presión).

Gráfica 122. Comparación de esfuerzos flectores transversales en  $L=22,5\text{m}$  (H. peso propio, sobrecarga de nieve y viento en presión).

Gráfica 123. Comparación de esfuerzos flectores transversales en  $L=12,75\text{m}$  (H. peso propio, sobrecarga de nieve y viento en presión)

Gráfica 124. Comparación de movimientos verticales en  $L=12,75\text{m}$  (H. peso propio y sobrecarga de nieve).

Gráfica 125. Comparación de movimientos verticales en  $L=12,75\text{m}$  (H. peso propio y viento de presión y succión vertical)

Gráfica 126. Comparación de movimientos verticales en  $L=12,75\text{m}$  (H. peso propio, sobrecarga de nieve y viento en presión)

Gráfica 127. Comparación de esfuerzos flectores en el nervio de intersección, en  $X=4,19\text{m}$  (H. peso propio y sobrecarga de nieve y viento en presión)

Gráfica 128. Comparación de esfuerzos torsores en el nervio de intersección, en  $X=4,19\text{m}$  (H. peso propio y sobrecarga de nieve y viento en presión)

Gráfica 129. Comparación de esfuerzos cortantes verticales en el nervio de intersección, en  $X=4,19\text{m}$  (H. peso propio y sobrecarga de nieve y viento en presión)

Gráfica 130. Comparación de esfuerzos cortantes transversales en el nervio de intersección,  $X=4,19\text{m}$  (H. peso propio y sobrecarga de nieve y viento en presión)

Gráfica 131. Comparación de esfuerzos flectores en el arco de apoyo, en  $L=25,5\text{m}$  (H. peso propio y sobrecarga de nieve y viento en presión)

Gráfica 132. Comparación de esfuerzos cortantes verticales en el arco de apoyo, en  $L=25,5\text{m}$  (H. peso propio y sobrecarga de nieve y viento en presión)

Gráfica 133. Comparación de esfuerzos cortantes transversales en el arco de apoyo, en  $L=25,5\text{m}$  (H. peso propio y sobrecarga de nieve y viento en presión)

## Objetivos y metodología de estudio

La cubierta de la iglesia de Villaverde fue una aportación que realizó Eduardo Torroja al estudio de las láminas cilíndricas de hormigón armado tras dar el primer paso con la cubierta de Areneros. Con esta obra el ingeniero experimenta con un perfil que apenas había sido utilizado, como es el elíptico. tanto, el objetivo principal de este trabajo es continuar la labor del diseñador a través del estudio de la cubierta utilizando los recursos que actualmente aporta la informática, utilizando LUSAS, un programa de análisis estructural mediante elementos finitos. Por ello se realiza este trabajo final de máster, encuadrado dentro de la línea de investigación del Arte Estructural e Historia de la Construcción, adscrito al programa de Doctorado en Ingeniería de la Construcción. La metodología que se va a seguir en este trabajo se basa en la comprensión previa de publicaciones hasta el momento sobre láminas cilíndricas y la teoría establecida sobre ellas, de la experiencia de los diseñadores de la época dorada de este tipo de láminas, así como en el análisis del comportamiento de estos cascarones ante distintas situaciones consideradas.

En primer lugar se lleva a cabo una revisión sobre el Estado del Arte sobre láminas cilíndricas de hormigón armado. Se realizará el estudio teórico sobre láminas cilíndricas así como un repaso de algunos ejemplos construidos que utilizan este sistema estructural y de las investigaciones realizadas. En este trabajo se presta especial interés en la evolución que se produjo a lo largo de los años del trabajo de Eduardo Torroja, para poder situarnos en su contexto y así entender mejor las decisiones que tomó el proyectista.

En segundo lugar se lleva a cabo una aproximación al modelo real construido por el ingeniero a través del análisis de diferentes modelos e hipótesis de carga introducidos en el programa de elementos finitos, comparándolos a su vez con los resultados obtenidos por Torroja, así como con la información extraída de los documentos existentes del proyecto de la cubierta.

En tercer lugar se realiza un análisis comparativo de toda la cubierta resultante mediante el un estudio lineal y no lineal de la cubierta, para conocer la influencia de los desplazamientos resultantes en la lámina y los posibles efectos que estos pudieran causar. Se establecerá además un análisis más detallado de la estabilidad de la cubierta mediante el estudio del pandeo y los efectos de tracción.

Finalmente se establecerán unas conclusiones que resumirán el estudio y permitirán tener una visión más completa de este tipo estructural, con la esperanza de que los resultados obtenidos contribuyan al desarrollo moderno de las láminas cilíndricas de hormigón armado. Adicionalmente se proponen una serie de conceptos para que en el futuro sean investigados y así esclarecer ciertos aspectos controvertidos en este tema.



# 1. Estado del Arte

## A. Elementos compositivos de láminas cilíndricas

En este tipo de estructuras laminares encontramos tres elementos fundamentales:

1. Lámina cilíndrica.
2. Viga o tensor de borde
3. Apoyos.
4. Anillos de rigidización.

### Lámina cilíndrica

Los cascarones de cañón desarrollables son curvas en solo una dirección y formadas por extrusión en una línea curva a lo largo de una trayectoria recta. Se trata por tanto de una lámina sinclástica.

En su clasificación se atiende a dos criterios:

- A) De acuerdo a la relación entre el radio ( $r$ ) y el largo ( $L$ ), se clasifican en láminas cortas  $L / r < 2$  y en láminas largas  $L / r > 2$  (figura 6A).
- B) De acuerdo a su disposición pueden ser simples, múltiples si se acoplan lateralmente (figura 6B), o continuas cuando se acoplan longitudinalmente (figura 6C).

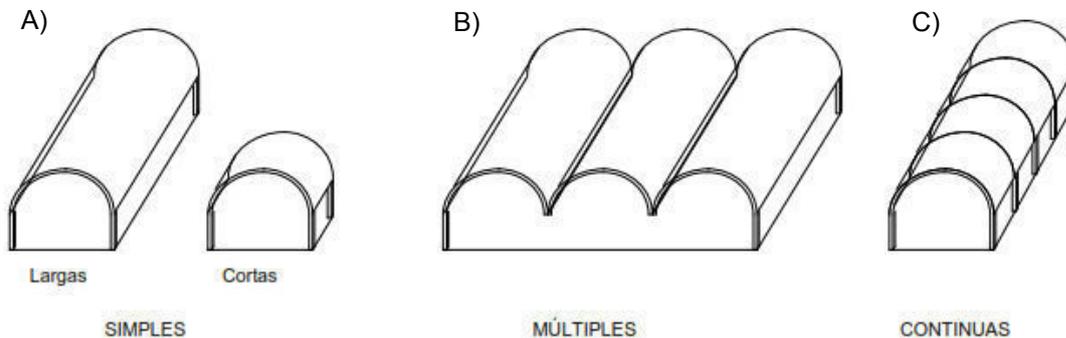


Figura 6. De izquierda a derecha: A) Ejemplo de láminas larga y corta; B) Ejemplo de láminas múltiples; C) Ejemplo de láminas continuas. (15)

Teniendo en cuenta la sección transversal, las láminas pueden adoptar varias formas, por ejemplo:

- A) Un simple arco de círculo, de elipse u otra curva adecuada (figura 7A).
- B) Arco con bordes reforzados (figura 7B).
- C) Sección compuesta de arcos múltiples, donde se distinguen los extremos de los centrales (figura 7C).
- D) Arcos simples con vigas de borde altas (figura 7D).
- E) Sección compuesta de arcos múltiples con vigas de borde altas, tanto para bordes extremos como para interiores (figura 7E).
- F) Sección asimétrica, con vigas de borde en el frente (figura 7F).
- G) Con vigas horizontales (figura 7G).
- H) Cantiléver (figura 7H).
- I) Arco central con dos cantiléver (figura 7I). Un ejemplo claro es el reflejado en la figura 8B.
- J) Corrugada (figura 7J). Un ejemplo claro es el reflejado en la figura 8A.
- K) Tipo SHED (figura 7K).
- L) Polilobulares, formadas por dos arcos de círculo de distintos radios (figura 7L).

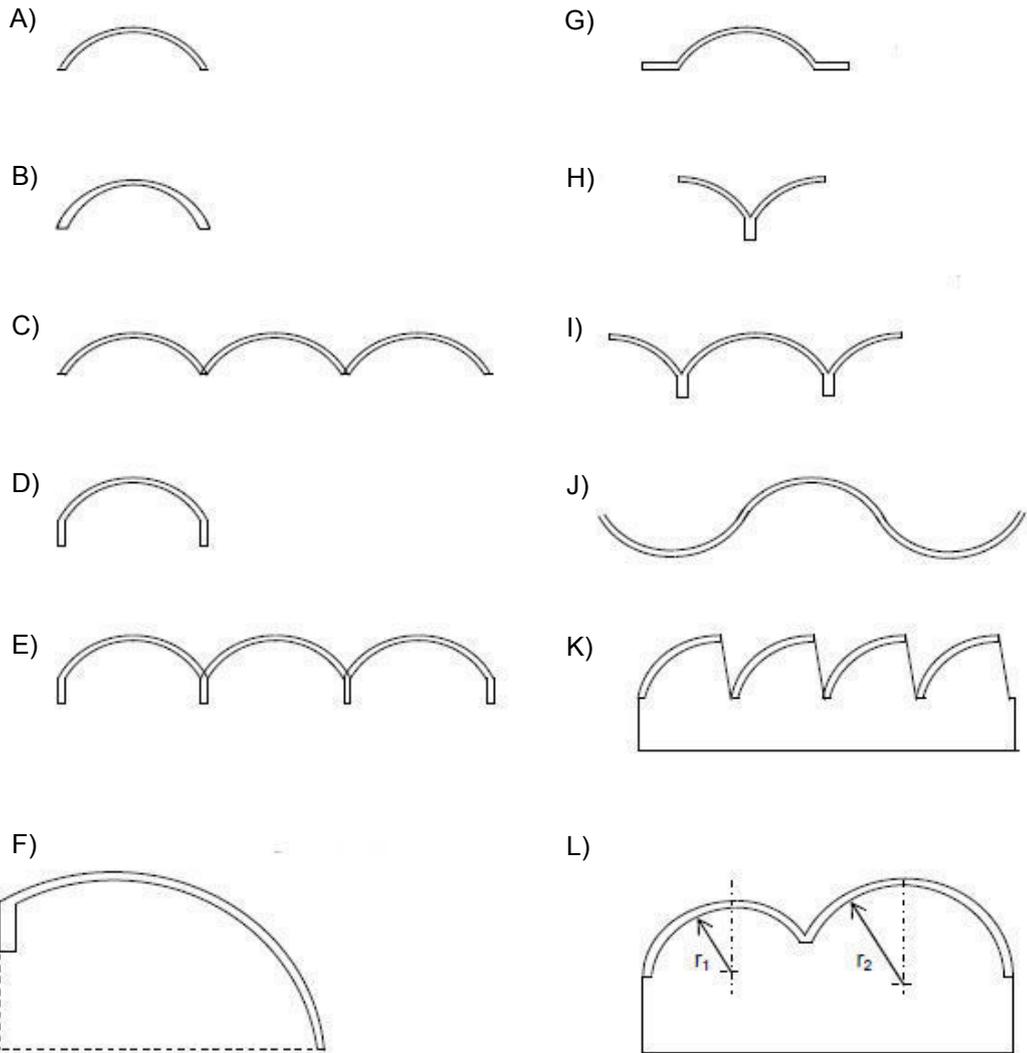


Figura 7. Esquema de los distintos tipos de lámina cilíndrica que podemos encontrar en la práctica. (15)

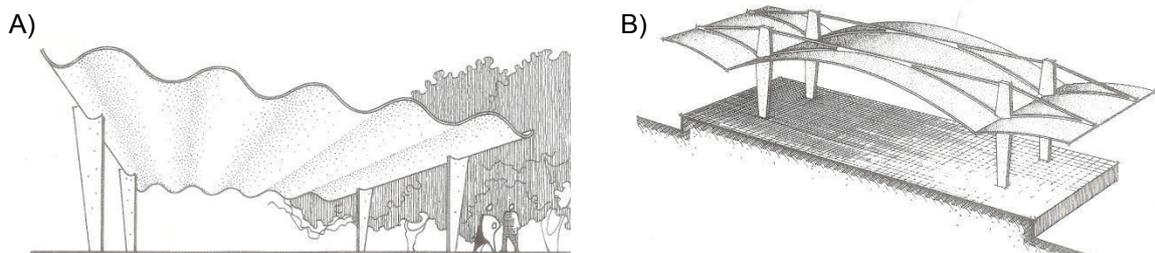


Figura 8. De izquierda a derecha y de arriba a abajo: A) Ejemplo de lámina corrugada para una floristería; B) Ejemplo lámina basada en arco central con dos cantiléver para las Aduanas. (12)

### Láminas cilíndricas cortas

Estas suelen estar apoyadas en las esquinas y se pueden diseñar de dos formas:

- A) Cuando cada extremo se rigidiza para mantener la forma de un arco, con el cascarón actuando como losa, el cual salva una distancia entre los extremos de los arcos.

- B) Cada borde longitudinal inferior es rigidizado mediante vigas de borde, de tal manera que el cascarón se comporta como una serie de arcos adyacentes que salvan una distancia entre las vigas laterales.

Como el espesor mínimo que se necesita para la construcción práctica es muy superior al que se requiere para el comportamiento estructural rara vez se usan.

### Láminas cilíndricas largas

Se encuentran apoyadas en los extremos y se comportan como vigas largas en la dirección longitudinal. Esto da como resultado que los esfuerzos en los cascarones se parezcan a los esfuerzos de flexión en una viga. La parte superior está a compresión a lo largo de toda su longitud, mientras que la parte inferior está traccionada. La acción de diafragma del cascarón delgado proporciona la resistencia necesaria para el cortante horizontal y vertical inherente al comportamiento a flexión.

En este tipo de láminas debe descartarse por razones estáticas, las directrices parabólicas ó catenaria (figura 9D) siendo las más recomendables la elíptica y la circular, como se puede ver en la fotografía siguiente (figura 9A, 9B y 9C)

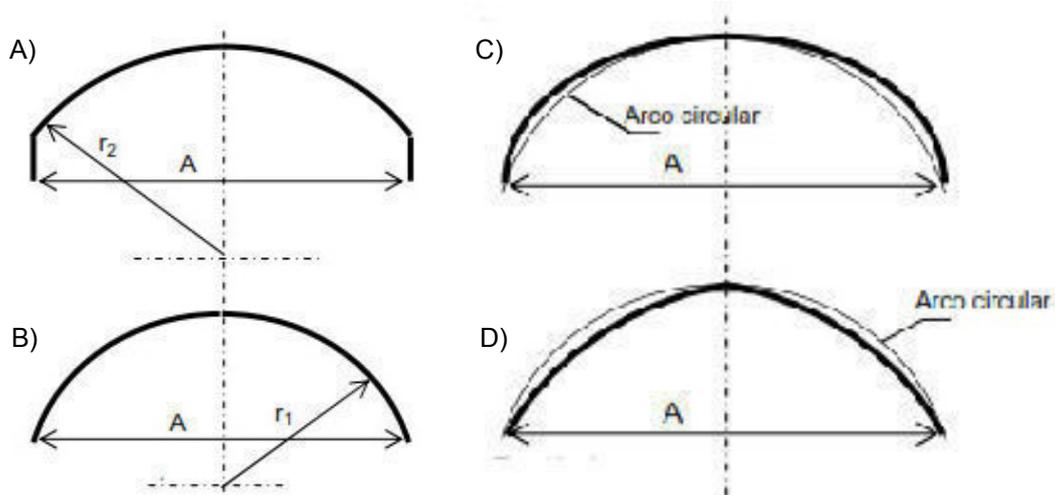


Figura 9. De arriba a abajo y de izquierda a derecha: A) Arco circular con viga de borde; B) Arco circular simple; C) Arco elíptico; D) Arco parabólico. (15)

El comportamiento estructural de la lámina con curva directriz catenaria es completamente distinto al de la directriz circular. Al ser la catenaria la línea de presiones del peso propio, los arcos que conforman la lámina están exentos de flexión y sometidos solamente a esfuerzos de compresión. Es decir que cada arco que forma la lámina actuará en forma independiente uno del otro, sin ninguna transmisión de esfuerzos entre ellos. Se generan empujes actuando como arcos, y es necesario controlar los esfuerzos verticales y horizontales con vigas de borde, y entonces no funciona como lámina cilíndrica autoportante, sino como sucesión de arcos a los que hay que sustentar por medio de apoyos.

En láminas parabólicas en los bordes el ángulo es menor a  $90^\circ$ , entonces el esfuerzo  $N_y$  no se anula y es necesario absorberlo con vigas de borde. Los esfuerzos tangenciales en estas láminas son positivos, produciendo sobre los apoyos extremos acciones de tracción, es decir, los esfuerzos actuantes van de abajo hacia arriba. Así mismo, los esfuerzos  $N_x$  son de tracción en la zona superior de la lámina. Por estas razones, la directriz parabólica no es recomendable para proyectos de láminas cilíndricas autoportantes sometidas a peso propio.

Para arcos circulares así como para los elípticos existen una serie de recomendaciones referentes a sus dimensiones que son necesarias conocer para un diseño más adecuado de la lámina. Estas recomendaciones son: las que siguen (figura 10):

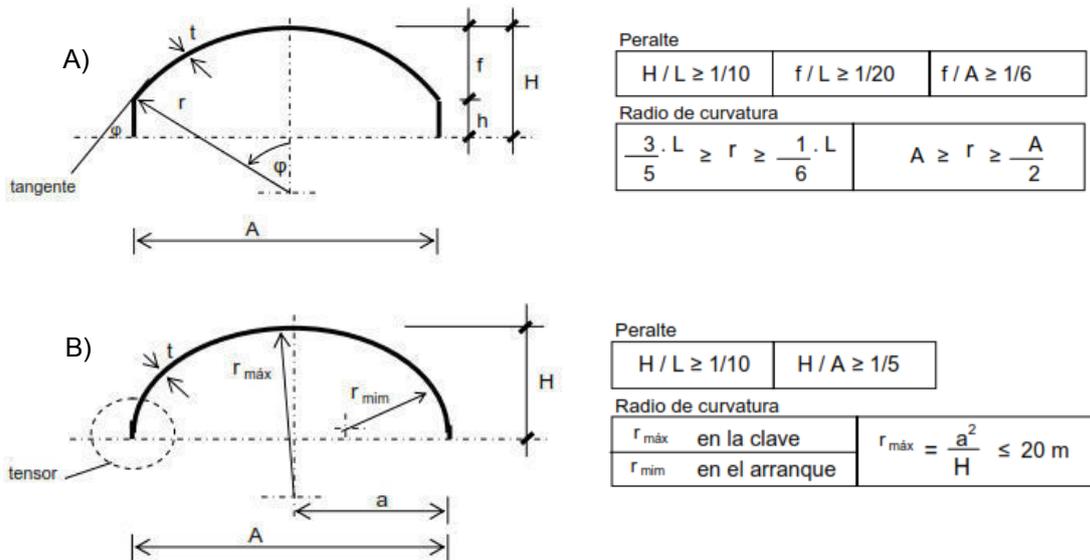


Figura 10. De arriba a abajo: A) Arco circular con viga de borde; B) Arco elíptico. (15)

Para láminas múltiples también existen normas de referencia que es necesario conocer, y son las que siguen (figura 11):

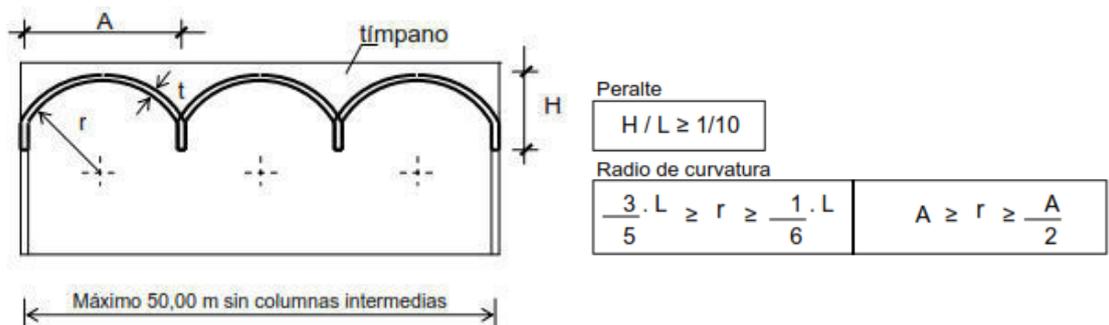


Figura 11. Esquema de lámina múltiple. (15)

### Viga o tensor de borde

En estructuras de láminas cilíndricas se producen grandes esfuerzos de tracción en las generatrices de borde de las láminas. Por ello se suele disponer de un engrosamiento del perfil en esta zona de la lámina o una viga de borde en vertical (figura 12A), ó en horizontal (figura 12B). Con pequeños nervios se reduce sustancialmente el refuerzo del borde. Se puede disponer también de una membrana adyacente (figura 12C).

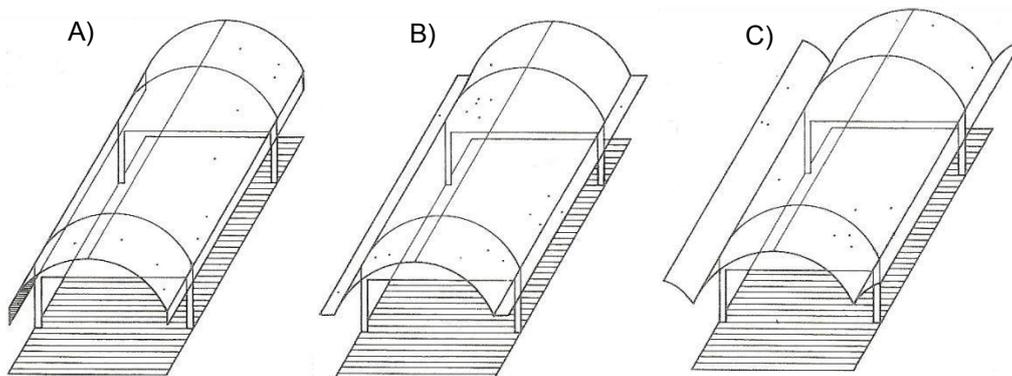


Figura 12. A) Viga de borde vertical; B) Viga de borde horizontal; C) Membrana adyacente. (11)

Esta viga tiene un peso importante que recibe la bóveda. Como consecuencia de ello introducimos en la bóveda esfuerzos incompatibles con el estado de membrana que tienen que ser compensados con procesos de flexión transversal, alcanzándose grandes perturbaciones en la membrana.

Una regla general para el dimensionamiento general del conjunto es la que sigue (10):

$$H_{viga} + F_{lámina} \geq L_{lámina}/15$$

A menudo las dimensiones de las vigas de borde pueden reducirse sustancialmente si se usa postesado.

### Apoyos

Se trata de los apoyos transversales, los cuales pueden ser extremos o intermedios y cuyas formas pueden ser como muro macizo, arco ó armadura.

Es necesario restringir los extremos del cascarón con el fin de mantener su forma en condiciones de carga no funiculares. Esto se suele lograr ya sea rigidizando los extremos, engrosándolos en arcos sobre columnas de soporte y agregando varillas de conexión para resistir el empuje lateral, como se observa en la figura 13A, ó usando muros de carga en los extremos, como en la figura 13B, los cuales resisten la carga vertical, mantienen la forma en los extremos del cascaron y se comportan como muros de cortante para resistir el empuje hacia afuera.

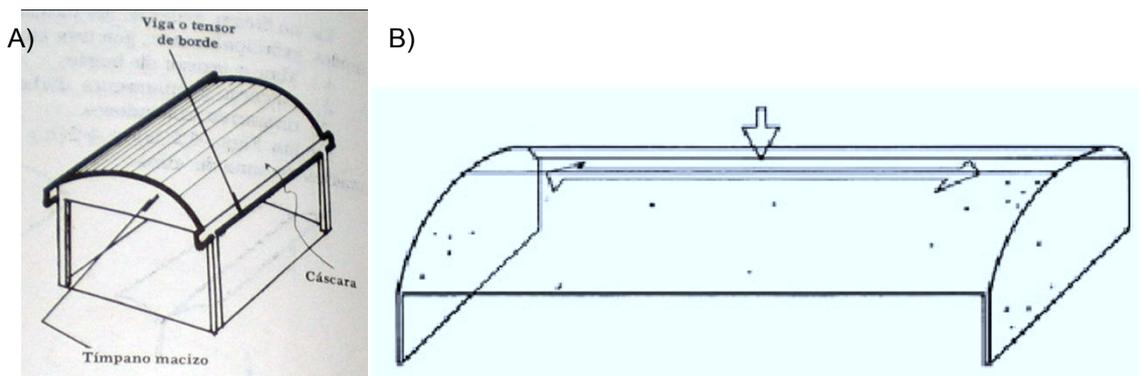


Figura 13. A) Apoyo sobre viga rígida; B) Apoyo sobre muro. (10) y (16)

### Anillos de rigidización

La rigidez transversal puede aumentarse en gran medida, con pequeño incremento de peso, estableciendo anillos de rigidización según directrices oportunamente espaciadas a modo de arcos perpiaños, para constituir la llamada lámina heterogénea. Así podemos verlo en la siguiente imagen (figura 14).

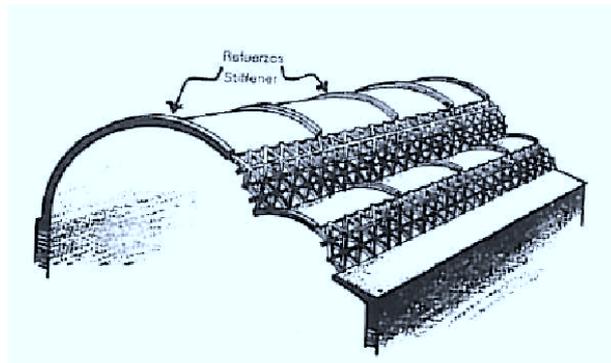


Figura 14. Anillos de refuerzo para el Frontón Recoletos. (8)

## B. Construcción

La magnitud de los esfuerzos que se pueden presentar en láminas de hasta 30m de largo, si la forma ha sido escogida cuidadosamente no pasaran de 2,5 a 4,0 MPa (10), por lo que los hormigones de alta resistencia no están justificados, siempre que las sobrecargas sean de baja intensidad. El empleo de hormigones de alta resistencia exige una selección más rigurosa de los materiales. Lo único que justifica el uso de hormigones de alta resistencia es la flecha provocada, lo que queda solucionado incorporando una contraflecha.

La cimbra empleada puede ser normal en cascarones desde 6cm. Un ejemplo de este tipo de cimbras es el utilizado para la cubierta del Frontón Recoletos (figura 15). Con espesores menores se deben usar cimbras más elaboradas.



Figura 15. Imagen de la cimbra para la construcción del Frontón de Recoletos. (55)

En cuanto al armado, por su facilidad se ha extendido la costumbre de armar en retícula ortogonal, lo cual abarata la mano de obra considerablemente, aunque el refuerzo aumente ligeramente, y también garantiza el anclaje en la cáscara cilíndrica.

En el caso de las cáscaras cilíndricas de gran longitud es recomendable concentrar la armadura de tracción cerca de los bordes antes que distribuirla en la totalidad de la zona traccionada. Además las armaduras de la lámina se colocarán en posición rigurosamente simétrica, respecto a la superficie media de la misma, y la máxima separación admisible de la armadura será igual a tres veces el espesor de la lámina, si se dispone una malla en la superficie media, o igual a cinco veces el espesor de la cáscara si se disponen mallas junto a los dos paramentos.

Algunas recomendaciones prácticas para construir láminas cilíndricas de hasta 30 o 40m de longitud son:

- A) Escoger adecuadamente la forma y la dimensión de la lámina.
- B) Elegir las condiciones de apoyo para que las deformaciones en ellos sean lo más uniformes posibles.
- C) No emplear espesores de lámina menores a 7cm para láminas de simple curvatura.
- D) Reducir en la medida de lo posible la viga de borde hasta convertirla en un tensor de borde.
- E) Proyectar las láminas de tal manera que las cimbras utilizadas se puedan usar varias veces.
- F) Proyectar la cimbra de tal manera que el descimbrado sea fácil.
- G) Procurar que el armado quede siempre bien anclado.
- H) Emplear hormigones de resistencia normal, siempre que los esfuerzos no sobrepasen los esfuerzos de pandeo de la lámina.
- I) El descimbrado no debe provocar en la lámina esfuerzos no previstos en el diseño.
- J) Realizar un curado eficiente, cuanto menos 8 días después del hormigonado.

Otras recomendaciones:

- A) Postesar la lámina abaratará el refuerzo. Cuando dentro de una cáscara delgada hay cables de postesado curvos, el diseño debe considerar las componentes de las fuerzas resultantes de la geometría de los cables. En el caso de las cáscaras cilíndricas, se debe observar que el cable no se encuentra en un plano.
- B) Estudiar la posibilidad de emplear hormigón aligerado. El empleo de hormigón aligerado es posible siempre y cuando se tengan en cuenta las deformaciones en los apoyos, ya que en esas zonas los esfuerzos son bastante grandes, por efecto de los anclajes.
- C) Se puede eliminar buena parte de los efectos de las deformaciones plásticas si se deja la posibilidad de retensar la estructura.

### C. Teoría de láminas cilíndricas

En el análisis de láminas cilíndricas apoyadas en sus extremos se suele asumir frecuentemente la teoría del estado de membrana, la cual implica que la lámina puede resistir esfuerzos que actúan en el plano de la lámina, como los esfuerzos normales o tangenciales, sin resistencia a la flexión. En la figura 16 se muestran los elementos compositivos generales de una lámina cilíndrica. En la figura 17 se muestran los esfuerzos existentes en las láminas cilíndricas según los ejes locales de un elemento superficie para el cálculo de elementos finitos. Finalmente en la figura 18 se muestra el esquema general de transmisión de esfuerzos en una lámina cilíndrica

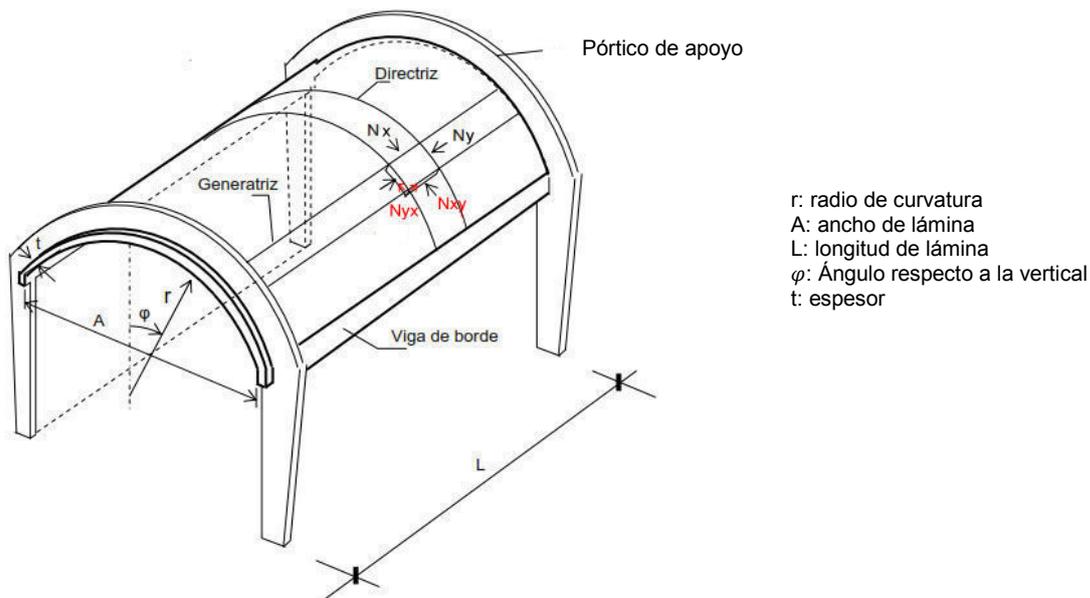


Figura 16. Esquema de lámina cilíndrica apoyada en los extremos y rigidizada mediante vigas de borde. (15)

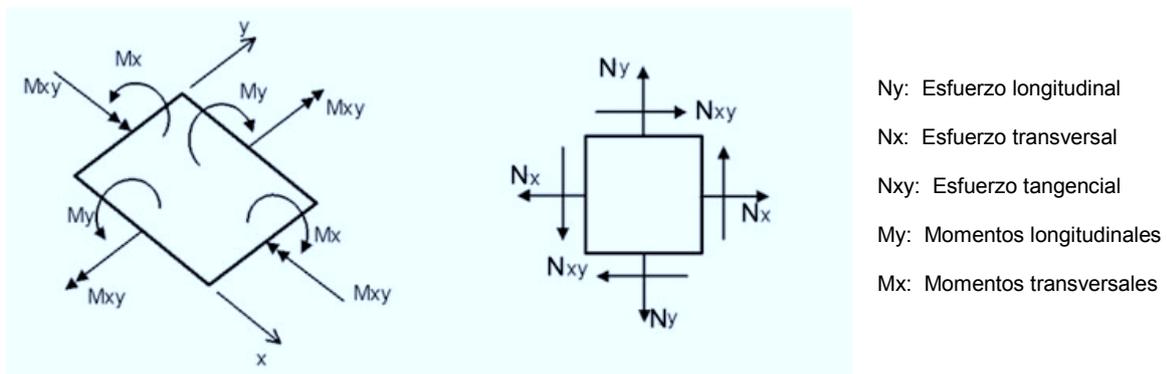


Figura 17. Esfuerzos existentes en una lámina cilíndrica de hormigón armado. (25)

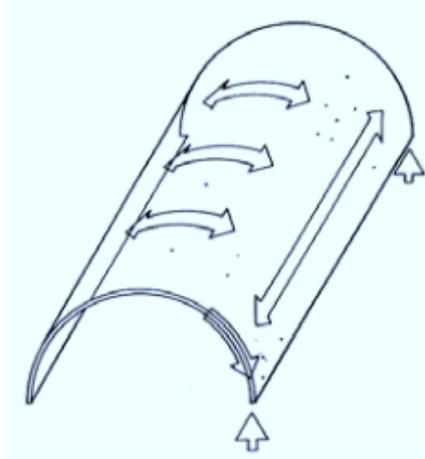


Figura 18. Esquema general de transmisión de cargas para láminas cilíndricas asumida por el estado de membrana. (16)

Para que se cumpla la simplificación del *estado de membrana* es necesario que se cumplan las siguientes condiciones:

- A) El espesor debe ser muy pequeño respecto a los radios de curvatura de la superficie media, y no debe presentar variaciones bruscas, con objeto de que tengan poca rigidez transversal y puedan despreciarse los esfuerzos de flexión. Además existe la ventaja de la posibilidad de la adaptación en su comportamiento estructural a casos de carga no previstas, sin salirse del régimen de membrana.
- B) La superficie media debe tener, generalmente, una curvatura continua.
- C) Las cargas no deben ser concentradas, sino repartidas de la manera más uniforme posible; con cargas concentradas normales a la superficie media de la lámina no es posible establecer las ecuaciones de equilibrio de la membrana.
- D) Las cargas y reacciones de los bordes deben obrar tangencialmente a la superficie media; disponiendo el apoyo como se indica en la figura 19A, el equilibrio de membrana puede establecerse. Pero también puede resolverse esta dificultad disponiendo un elemento de borde apropiado, como en la figura 19B, donde la componente vertical del esfuerzo de membrana tangente al meridiano, es equilibrada por la reacción vertical del apoyo, mientras que la componente horizontal la absorbe un tirante.

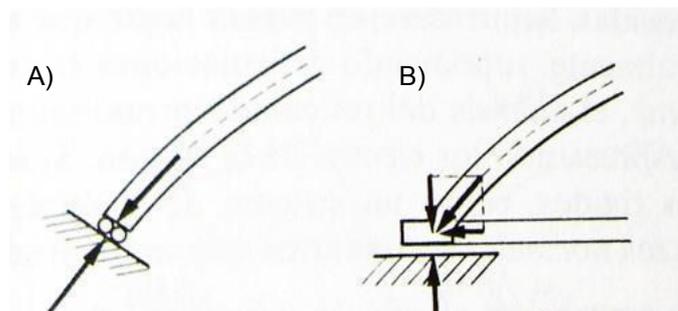


Figura 19. Esquema de sistemas de apoyo para láminas cilíndricas.

Además el análisis de láminas cilíndricas se puede llevar a cabo en dos fases:

- A) Como una lámina simplemente apoyada con las condiciones de borde ya satisfechas.
- B) En conjunto de la lámina y el pórtico sustentante, donde las condiciones de borde deben estudiarse.

### Esfuerzos longitudinales ( $N_y$ )

A causa de las tensiones  $N_{xy}$ , que se originan para equilibrar el efecto del arco, en las caras normales aparecen esfuerzos tangenciales  $N_{yx}$  de igual magnitud, según el teorema de Cauchy. Así podemos verlos en la figura 23. Estos esfuerzos tangenciales originan una tracción creciente desde los apoyos hacia el centro donde se hacen máximos, como podemos ver en la figura 20. La fuerza de tracción puede ser absorbida por un tensor en el borde, bien engrosando la lámina en dicha zona, o bien mediante una viga de borde.

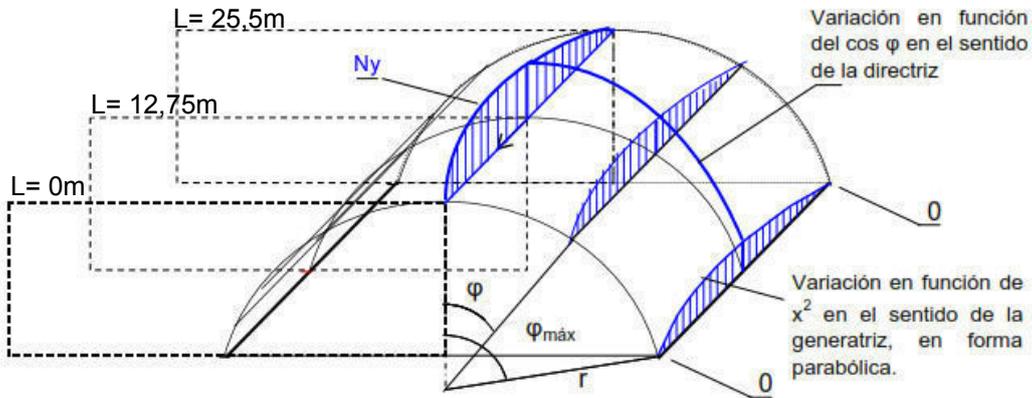


Figura 20. Esquema de esfuerzos longitudinales a lo largo de la lámina. (15)

El equilibrio estático de la lámina exige que el esfuerzo de tracción se equilibre con uno de compresión, siendo que una variación que compense en cada sección, al esfuerzo de tracción. De aquí se deduce que el esfuerzo de compresión será máximo en el centro de la lámina, disminuyendo en forma parabólica hasta anularse en los apoyos. La importancia de las tensiones longitudinales es tanto mayor cuanto más pequeña es la altura total en relación con la luz.

No existen esfuerzos normales en apoyos, entonces no debe existir rigidez en esta zona para que efectivamente se cumpla esta hipótesis.

### Esfuerzos transversales ( $N_x$ )

En el sentido transversal, la lámina cilíndrica se comporta con un efecto particular de arco, como podemos ver en la figura 21, en que cada uno de ellos soporta por esfuerzos de compresión una parte de la carga exterior actuante, y para sostener el arco inmediato anterior, lo hace a través de esfuerzos tangenciales. Este comportamiento es idéntico para todos los infinitos arcos que pueden considerarse dividida la lámina, hasta llegar a los apoyos.

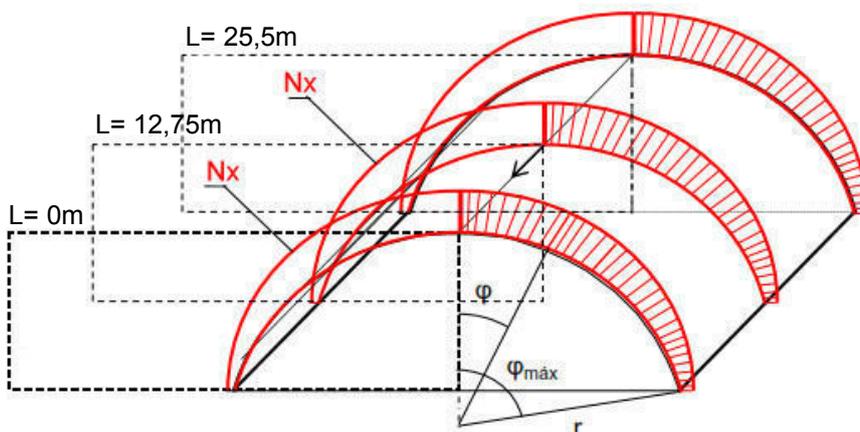


Figura 21. Esquema de esfuerzos transversales a lo largo de la lámina. (15)

El sistema se mantiene en equilibrio entre las cargas externas  $Q$ , los esfuerzos anulares  $N_y$  que son máximos en la clave y tienden a anularse en los bordes, y los esfuerzos en los bordes curvos con los arcos contiguos  $N_{xy}$ .

Los apoyos reciben toda la carga de la lámina por medio de esfuerzos tangenciales, estando exento de esfuerzos normales. Por esta causa el tímpano necesita rigidez en el plano vertical y no en el horizontal.

Los esfuerzos de arco provocan una reducción de las fibras transversales y un descenso de la parte superior del arco. En la proximidad de los rigidizadores transversales, el arco no puede deformarse y aparece una flexión, como se aprecia en la figura 22. En las membranas largas con forma de bóveda de cañón, la perturbación por flexión solo afecta a una franja estrecha junto a los extremos. En cambio, en las membranas cortas, la perturbación por flexión se extiende, debido al mayor radio y a la mayor proximidad de los rigidizadores, por una superficie proporcionalmente mayor.

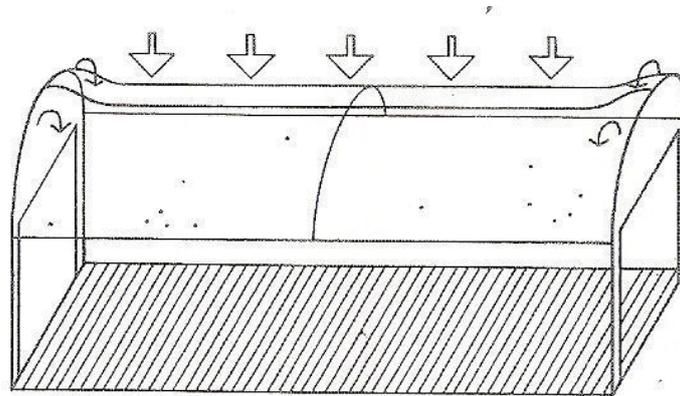


Figura 22. Perturbación a flexión en el rigidizador transversal en membranas. (11)

### **Esfuerzos tangenciales ( $N_{xy}$ )**

Los esfuerzos tangenciales varían según la directriz, de un máximo en los bordes de la lámina, disminuyendo hasta anularse en la clave, y a su vez varían en forma lineal desde un valor cero en el centro de la lámina, hasta un máximo en los apoyos extremos, como podemos ver en la figura 24. Los esfuerzos tangenciales presentan entonces, en la dirección de la generatriz una variación lineal similar al de una viga simplemente apoyada con carga uniformemente repartida.

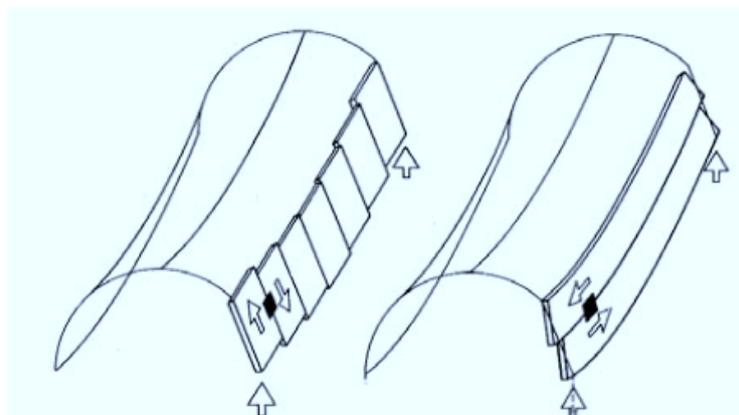


Figura 23. Esquema de transmisión de esfuerzos tangenciales, tanto en sentido transversal como longitudinal. (16)

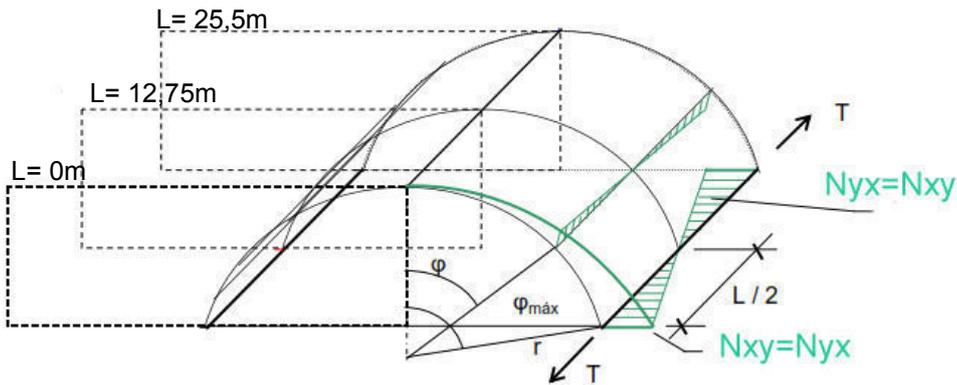


Figura 24. Esquema de esfuerzos tangenciales a lo largo de la lámina. (15)

El esfuerzo de tracción en el borde (T) es originado por las tensiones tangenciales, cuya fuerza equivale a la superficie del triángulo.

### **Momentos flectores ( $M_x$ y $M_y$ )**

Se presentan otros esfuerzos debidos a la deformación que toman las directrices (sobre todo las centrales) y que dan lugar al hundimiento o flecha de los bordes. Estos momentos flectores  $M$  varían a lo largo de la directriz como de la generatriz. Su importancia no es, ni con mucho despreciable, y puede ser causa de la rotura y hundimiento de la lámina, por razón del pequeño espesor de esta. La ley de reparto de estos esfuerzos, a lo largo de la directriz, depende mucho de la forma de esta y de que las generatrices de borde estén libres o ensambladas en una u otra forma a otros elementos contiguos. Los momentos flectores serán tanto mayores cuanto mayor sea el espesor de la lámina.

Estas flexiones pueden reducirse mediante la disposición de vigas de borde o la consideración de la continuidad entre dos bóvedas contiguas. Pero estas flexiones existen de todos modos, lo que obliga a dar a la misma un espesor sustancial.

### **Fuerzas resultantes de compresión y tracción.**

De todo lo expuesto, al considerar toda la lámina, vemos que está sometida a esfuerzos de compresión  $N_x$  desarrollados sobre la directriz que generan una fuerza de compresión  $C$ , que será equilibrada por las fuerzas de tracción  $T$  que generan los esfuerzos tangenciales, como vemos en la figura 25.

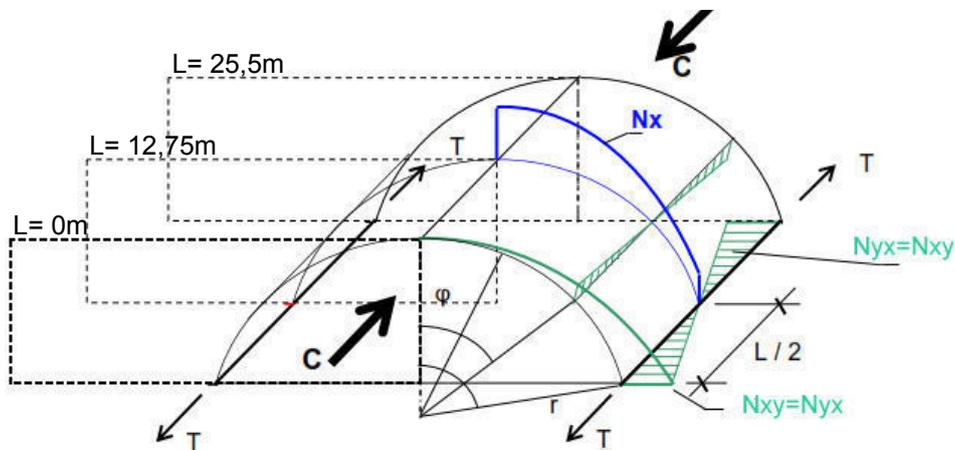


Figura 25. Esquema de fuerzas resultantes en la lámina. (15)

### **Tensiones principales de tracción en las esquinas**

En las esquinas situadas en los extremos de la lámina, existe un estado tangencial puro ( $N_x = 0$ ;  $N_y = 0$ ). La existencia de este estado hace introducir deformaciones de tal tipo, que actuando sobre cualquier elemento diferencial de superficie, hace cambiar de forma, tendiendo a un rombo lo que en estado descargado es un cuadrado, como podemos ver en la figura 26. Una diagonal se acorta por compresión, y la otra diagonal se alarga por tracción.

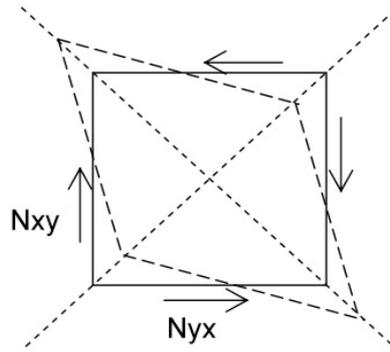


Figura 26. Esquema de esfuerzos principales, consecuencia del estado de esfuerzos tangenciales puros, ó estado de corte puro. (15)

Este efecto provoca que en la zona de las esquinas aparezcan esfuerzos de tracción y compresión, llamados esfuerzos principales y son consecuencia del estado de esfuerzos tangenciales puros (estado de corte puro). Todo estado de corte puro se puede concebir como combinación de dos elementos simples: tracción y compresión.

Si bien las tensiones de compresión son absorbidas por el hormigón, es necesario que éstas no sean grandes para tener seguridad, por posibles efectos de pandeo. Y con respecto a las tensiones de tracción, no debería superar valores admisibles para no producir fisuración en el hormigón. Para absorber estas fuerzas se coloca armadura de tracción a  $45^\circ$  en la dirección de las tensiones de tracción.

### **Pandeo en láminas cilíndricas.**

En las láminas cilíndricas, al estar sometidas a compresión, se debe verificar la estabilidad frente al efecto de pandeo. La pérdida de estabilidad puede ser ocasionada por la acción del esfuerzo  $N_x$  que se produce a lo largo de la directriz o por el esfuerzo  $N_y$ , desarrollado a lo largo de la generatriz. Las láminas experimentan una reducción en la carga de pandeo. Lo cual hace que la lámina sea sensible a las imperfecciones.

#### **Láminas cilíndricas cortas.**

Cuando la lámina es de tipo corta el pandeo debe verificarse por efecto del esfuerzo transversal, que es mayor que el longitudinal, como vemos en la figura 27.

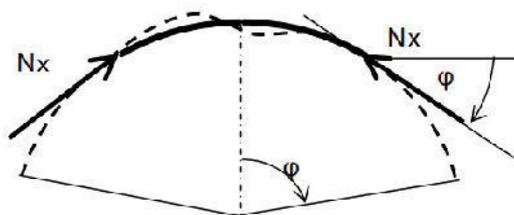


Figura 27. Esquema de pandeo en láminas cilíndricas cortas. (15)

### Láminas cilíndricas largas.

Cuando la lámina es de tipo larga, el pandeo debe verificarse por efecto del esfuerzo longitudinal, como podemos observar en la figura 28. Cuanto menor es el radio de curvatura, mayor es la estabilidad de la lámina.

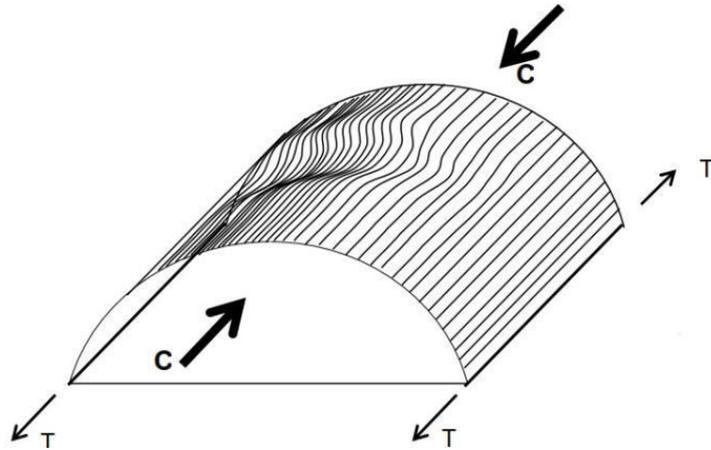


Figura 28. Esquema de pandeo en láminas cilíndricas largas. (15)

### D. Investigación sobre láminas cilíndricas

En la bibliografía consultada se ha encontrado un estudio sobre este tipo de láminas que se ha considerado de interés dado los resultados que se obtuvieron.

La investigación realizada por A. C. Van Reil, W. J. Beranek y A. L. Bouma, del Instituto T.N.O. para materiales y construcciones de edificios de Delft, Holanda, tenía como objetivo determinar en qué grado el agrietamiento y la plasticidad del hormigón, así como la cantidad y la posición del refuerzo, influyen en la distribución de los esfuerzos y en la intensidad de la carga de rotura.

La escala de los modelos fue de 1:8 respecto del real. Las dimensiones y armado utilizado se pueden ver en las figuras 29, 30 y 31. Se eligió el mortero con refuerzo de alambre para la construcción del modelo. Se fue variando el refuerzo y la longitud de las láminas. El mortero fue vibrado, y tratado a temperaturas de 35° a 40°C mediante vapor. La carga aplicada se materializó con placas de madera de 20x10cm.

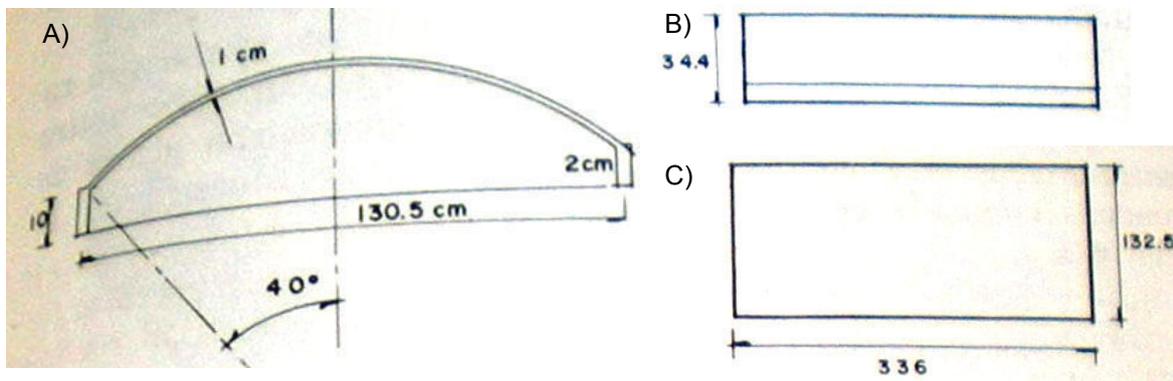


Figura 29. Esquema dimensional del modelo de ensayo utilizado: A) Sección transversal; B) Alzado; C) Planta. Unidades en centímetros. (10)

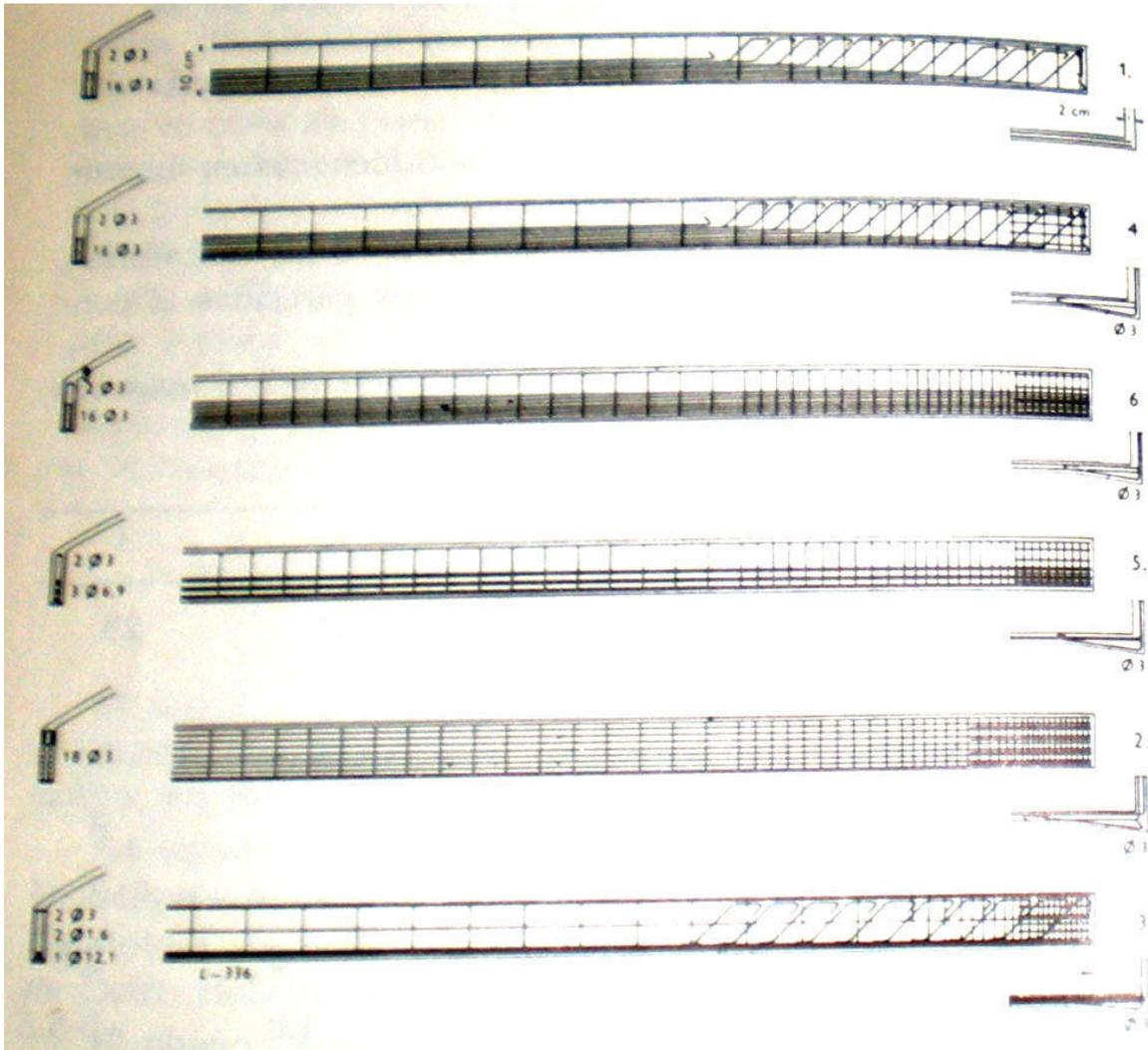


Figura 30. Distintos modelos de armado de los nervios de borde. (10)

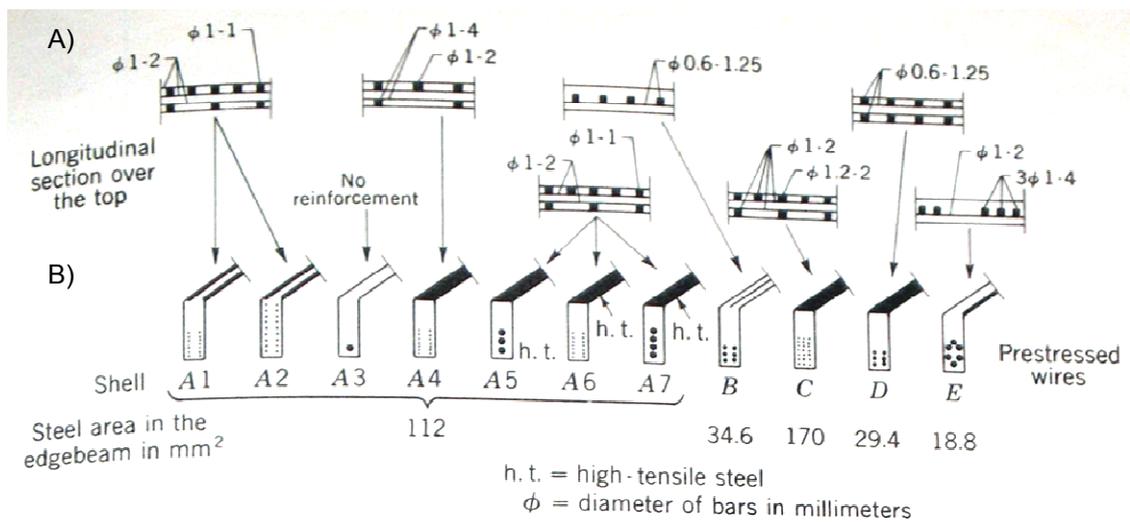


Figura 31. Distintos esquemas de armado: A) Armado longitudinal en corona; B) Armado en los nervios de borde. (13)

En las pruebas se midieron:

- A) Desplazamientos verticales.
- B) Deformaciones en la dirección de la luz de la viga de borde.
- C) Deformaciones de la cáscara en sentido longitudinal.
- D) Curvaturas en la dirección transversal.

Los resultados obtenidos para algunas de las probetas se presentan en la figura 32.

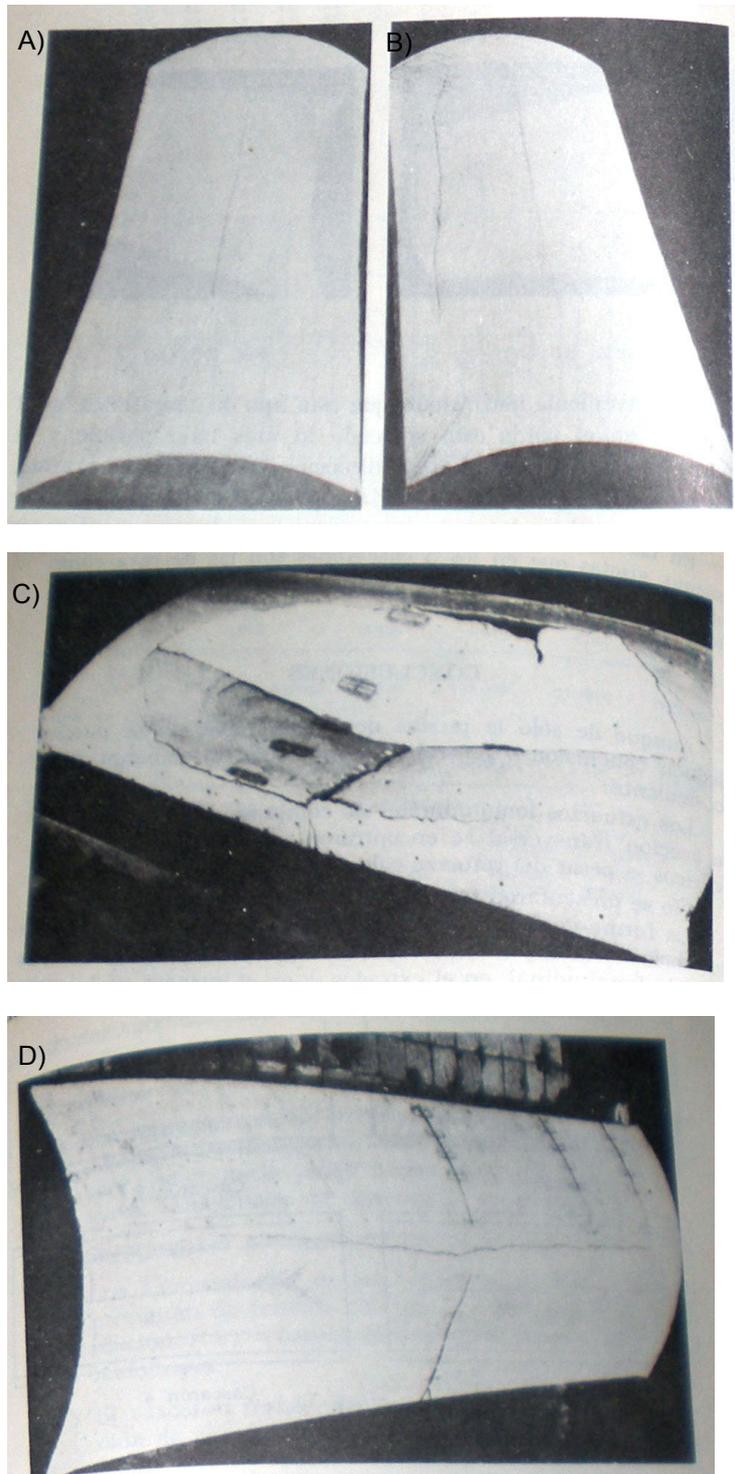


Figura 32. Resultados obtenidos de la investigación: A) Modelo A2; B) Modelo A1; C) Modelo B; D) Modelo C. (10)

Las conclusiones a las que llegaron fueron las siguientes:

- A) Los esfuerzos longitudinales de compresión en el centro de la sección transversal se encontraron muy próximos a los teóricos.
- B) La forma de rotura fue muy diferente a la supuesta en la teoría de la ruptura, presentándose grietas en la corona. En el sentido longitudinal, en el extradós, y en el intradós en la zona de flexión positiva si se considera la sección transversal de la mitad de la lámina como doblemente empotrada.
- C) En este tipo de láminas, si el refuerzo de borde está colocado lo más abajo posible y si el refuerzo en la cáscara en la dirección transversal es grande, se obtiene una reserva en la capacidad de carga y además las deformaciones son pequeñas.

### **E. Revisión histórica de obras realizadas.**

Tras la cúpula de Jena, construida en 1922 por Frank Dischinger, se desarrollaron otras formas diferentes, principalmente las estructuras laminares cilíndricas, como la bóveda construida en Frankfurt en 1927 o la construida en Budapest en 1930. Sin embargo, el deseo incesante del diseñador para obtener estructuras más ambiciosas no cesó y nuevas formas consistentes en la intersección de láminas cilíndricas fueron diseñadas, como la Iglesia de Villaverde o el Frontón Recoletos, de Eduardo Torroja.

Entre los años 1920 y 1960, considerada la edad de oro de las estructuras laminares, estas construcciones fueron desarrolladas como una solución de ingeniería a fin de lograr grandes luces de estructuras industriales y comerciales.

Posteriormente el número de nuevas estructuras laminares de hormigón disminuyó notablemente, debido principalmente al alto coste de la construcción y al encarecimiento de los encofrados y apuntalamientos temporales asociados para el curado del hormigón. Este proceso de trabajo intensivo y caro, junto con la creciente facilidad en el análisis informático de complejas estructuras esqueléticas espaciales, ha hecho que las láminas cilíndricas de hormigón armado sean menos competitivas.

Aquí se presentan algunos ejemplos realizados a lo largo del siglo XX, muestra de la evolución que experimentó este tipo de estructuras laminares.

#### ***Hangar en el aeropuerto civil de Karachi***

El aeropuerto tenía dimensiones interiores de 120m x 39,5m. La cubierta estaba formada por cascarones cilíndricos de 39,5m de longitud y cuerda de 10m. El espesor de la cáscara era aproximadamente de 6,5cm. Podemos ver una imagen de época en la figura 33.

Las vigas de borde son postesadas y tenían unas dimensiones de 2,15m de altas y 25cm de ancho.

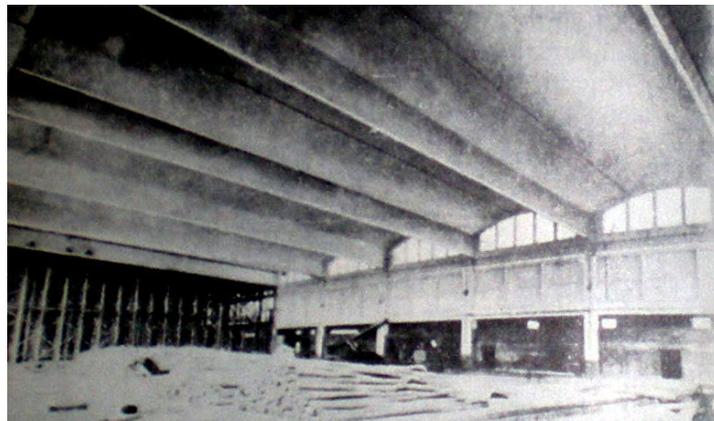


Figura 33. Perspectiva del Hangar en el aeropuerto civil de Karachi. (10)

### ***Garaje para la Bournemouth Corporation***

Estos cascarones fueron los más grandes construidos en Inglaterra. El proyecto era de Jackson y Greenen.

La cubierta estaba formada por nueve cascarones cilíndricos de 46m de longitud y 10m de cuerda, siendo el espesor de 6,5cm. Las vigas de borde eran de 1,7m de alto y 25 cm de ancho. Podemos ver una fotografía en la figura 34.

Las vigas de borde fueron postesadas por el sistema Magnel Blaton. Dichas vigas tienen 152 alambres con una tracción inicial de 8800 KG/cm<sup>2</sup>.

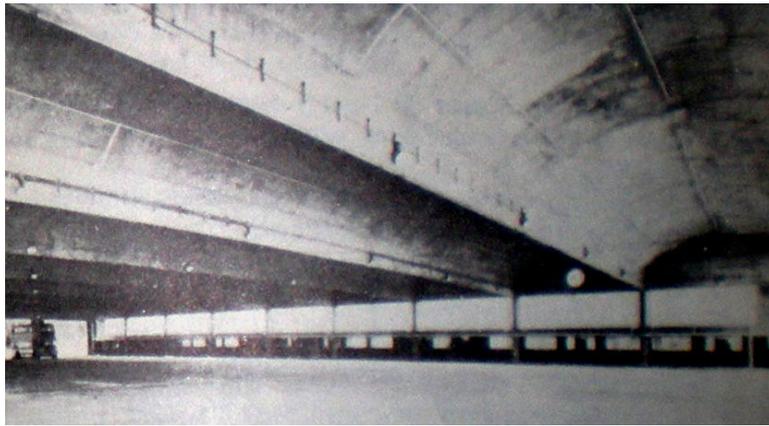


Figura 34. Perspectiva del Garaje para la Bournemouth Corporation. (10)

### ***Garaje en Wythenshawe, Manchester***

La cubierta estaba formada mediante láminas cilíndricas cortas con un espesor de 7cm, y estaban apoyados en una serie de arcos de dos articulaciones, separados entre sí 12,7m. La distancia cubierta por los arcos es de 51m. Existían grandes tragaluzes para lograr una buena iluminación. Podemos ver una imagen en la figura 35.

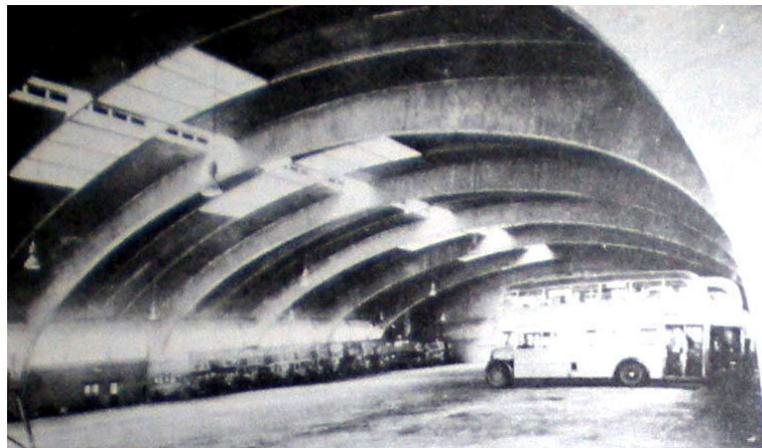


Figura 35. Perspectiva del Garaje en Wythenshawe. (10)

### ***Bodegas de almacenamiento de grano, Mexico***

Se buscaba una forma económica de almacenar el grano, y se escogieron los cascarones verticales empotrados en la cimentación para los muros y cascarones cilíndricos de 20 a 30m de longitud.

Las marquesinas son también cascarones en voladizo, con una longitud de 3m. La misma cimbra que se empleó para las paredes se utilizó también para las marquesinas. El espesor de estas son de 5cm. La techumbre se construyó mediante cascarones cilíndricos de 30,5m de largo, siendo el espesor de la cáscara de 8cm. La altura total de estos cascarones incluyendo el nervio de borde es de 2,1m. Las traveses de borde tienen un peralte de 50cm y un ancho de 20cm. La superficie en planta de la bodega era de 1250m<sup>2</sup>. Podemos ver una imagen de época según la figura 36.



Figura 36. Perspectiva de las bodegas de almacén de grano. (10)

### ***Mercado de Colonia***

La cubierta está formada por una serie de cascarones cortos apoyados en arcos. La distancia que cubren los arcos es de 55m y la separación entre ellos es de 15m. Podemos ver una imagen en la figura 37.

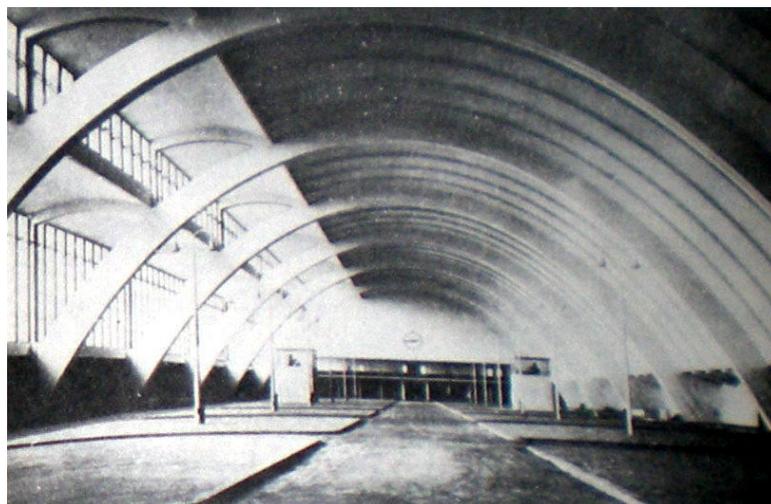


Figura 37. Perspectiva del mercado de Colonia. (10)

### ***Fábrica en Lindau, Alemania***

La cubierta estaba formada por cascarones en diente de sierra con una distancia entre apoyos de 15m y cuerda de 10m. Los tímpanos tenían forma de arco asimétrico. Podemos ver una imagen en la figura 38.



Figura 38. Perspectiva de la fábrica de Lindau. (10)

### ***Fábrica Triumph international, Alemania***

La cubierta estaba formada por cascarones en diente de sierra postesados con una longitud de 39m y una cuerda de 10,5m. Es espesor era de 8cm. Podemos ver una imagen en la figura 39.

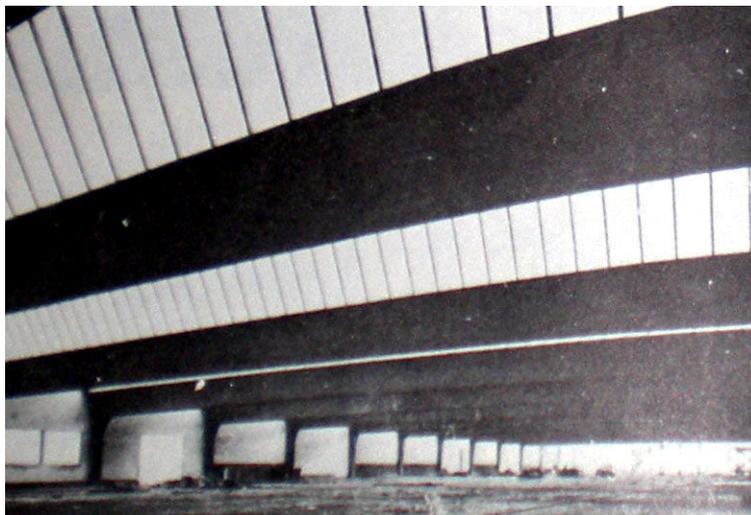


Figura 39. Perspectiva de la fábrica Triumph international. (10)

### ***Acero de México.***

Es una obra realizada por Felix Candela. La cubierta está formada por bóvedas cortas que conforman una sala de 243m de largo, muy impresionante, ya que esta cubierta descansa sobre columnas de 11m de altura. Éstas son notablemente delgadas. Podemos ver una imagen de época en la figura 40.

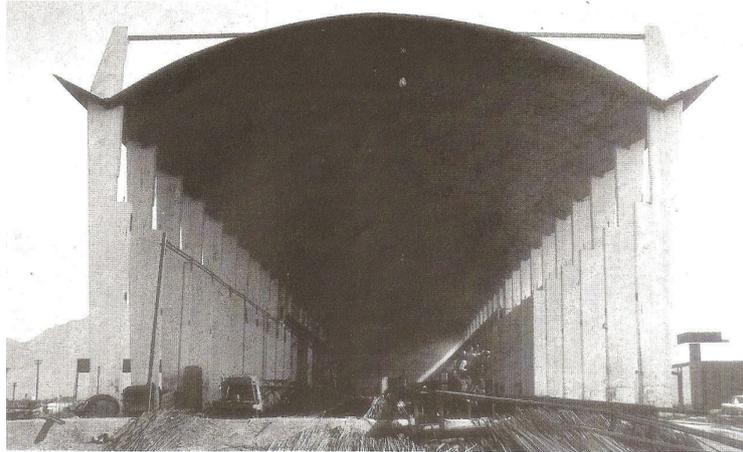


Figura 40. Aceros de México. (12)

### **Almacén Consorcio Wagen**

En el año 1964, Hossdorf inventa el postesado aéreo, sacando fuera de la masa del hormigón la armadura postesa, optimizando así la sección resistente de hormigón y posibilitando la construcción de nuevas formas más esbeltas y racionales, y abriendo también nuevas posibilidades hacia la optimización de la prefabricación y tecnificación de la producción en serie. Utilizó esta nueva técnica por primera vez en el Almacén Central del Consorcio Wagen en Suiza, que podemos ver en la figura 41.

Con una superficie de 13.500m debía construirse en un reducido plazo de tiempo, razón por la cual Hossdorf recurrió a la utilización de piezas prefabricadas de hormigón armado, proyectando una técnica de colaboración estructural entre ellas para cubrir la totalidad del espacio con la superficie laminar resultante. Cada una de estas piezas, de 8,40x1,40m de desarrollo en planta y 4,5cm de espesor, tenían una directriz curva que permitía unir 18 unidades mediante "postesado aéreo" formando módulos independientes de 8,40m de ancho y 25,20m de luz entre apoyos.

Los cables de postesado optimizan con su trazado curvo la absorción de esfuerzos del conjunto de las piezas que se unen. Gracias a esto, la lámina cuenta con un canto resistente de tan solo 4,5cm de hormigón armado, con un pequeño incremento en su extradós de 15cm a lo largo de todo su borde. Este incremento de sección cumple las funciones de:

- A) Albergar el anclaje de los cables de postesado fuera de la masa del hormigón de la pieza prefabricada.
- B) Absorber flexiones.
- C) Facilitar el transporte y puesta en obra.
- D) Servir de apoyo al recubrimiento final de la cubierta, creando una cámara de aire ventilada sobre los cables, una vez protegidos.



Figura 41. Almacén del Consorcio Wagen realizado por Hossdorf. (11)

### Edificio de oficinas de la U.S. Plywood

El edificio se realizó en 1967, siendo el arquitecto Krammer y el ingeniero estructurista Rodney. La cubierta se formalizó por un conjunto de cascarones prefabricados de madera contrachapada de 9,1m de longitud y 2,8m de ancho, con un espesor de 3,1cm. Cada directriz de borde fue rigidizado a través de un atiesador perpendicular. Las láminas estaban apoyadas en cada extremo mediante un perfil tubular de acero. Este tipo de madera podía resistir esfuerzos de tracción y compresión en su plano y se puede doblar en una sola dirección. Podemos ver una imagen en la figura 42.

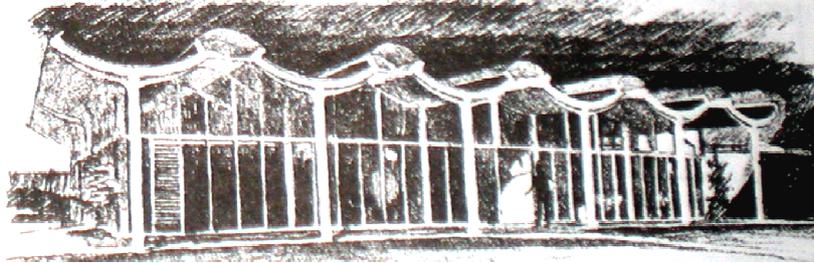


Figura 42. Esquema de las oficinas. (17)

Otros ejemplos de láminas cilíndricas construidas a lo largo del siglo XX son las recogidas por Torroja en su manuscrito sobre el Frontón Recoletos (figura 43):

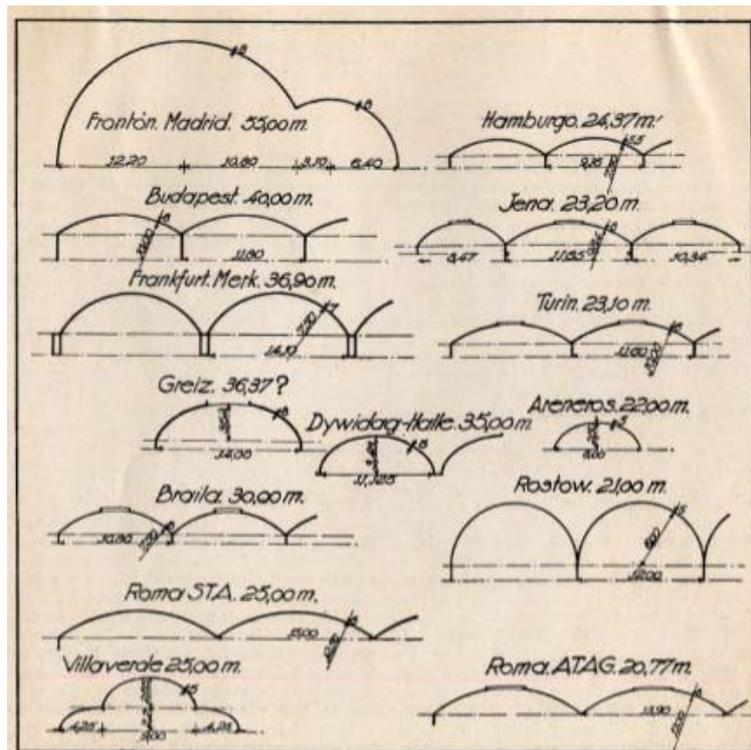


Figura 43. Esquema extraído del manuscrito de Torroja sobre el Frontón Recoletos. (3)

Como podemos observar en todos los ejemplos mencionados, la mayoría de láminas cilíndricas construidas tenían una longitud comprendida entre los 20 y lo 40m. Pocas láminas superaron estas distancias, siendo un ejemplo de novedad y sagacidad de la ingeniería el Frontón Recoletos. Además es destacable que ciertas tipologías de construcciones cilíndricas tan interesantes como las disposiciones en diente de sierra, en cantiléver o soluciones postesadas fueran desarrolladas a finales de la época de oro de estas estructuras laminares. Esto refleja el interés arquitectónico que las impulsó y que no estuvo respaldado en cierta medida por los inconvenientes dados en la época. Por ellos han de ser revisados para retomar estas tipologías con las ventajas tecnológicas actuales.

## **F. Evolución de Eduardo Torroja. Revisión de construcciones laminares.**

La construcción de cubiertas con láminas delgadas de hormigón armado era una técnica utilizada sobre todo en Francia y Alemania desde principios de siglo y, a partir de los años veinte, se publican numerosos trabajos en los que se explica el comportamiento de estas estructuras, tanto en libros como en Congresos de Ingeniería.

Los ingenieros españoles tenían referencias de estos proyectos y conocían la forma de analizar estas estructuras. Torroja era uno de ellos. Su carrera fue muy prolífera en cuanto al diseño de estructuras laminares de hormigón armado. Sus diseños abarcan un amplio período del siglo XX, desde 1923 hasta 1961. Las obras laminares que llevó a cabo son un claro ejemplo de la actividad desempeñada por muchos ingenieros y arquitectos de este siglo.

Aquí se realiza una revisión de sus obras, a través de una síntesis recogida de la Tesis de Joaquín Antuña titulada "Las Estructuras de Edificación de Eduardo Torroja Miret" (5), para poder entender mejor la evolución que tuvo el ingeniero, lo cual nos ayudará a comprender las decisiones que tomó en el momento de la construcción de la Iglesia de Villaverde.

### ***Cajones de cimentación de los puentes de San Telmo, en Sevilla, y de Sancti Petri.***

El primer proyecto en el que utiliza estructuras laminares es en los cajones de cimentación de aire comprimido, realizados mientras trabajaba en la compañía Hidrocivil entre los años 1923 y 1927. Son estructuras auxiliares empleadas para formar una cámara en la que excavar la cimentación de las pilas de puentes en ríos o en el mar.

Para mejorar las condiciones resistentes y reducir la cantidad de material empleado, en los cajones del puente de San Telmo de Sevilla Torroja modificó la forma del techo de la cámara, sustituyendo el forjado plano por dos cúpulas secantes de 8.30 m de diámetro y de 7 cm de espesor. En la figura 44 podemos ver uno de estos cajones para el puente de Sancti Petri.

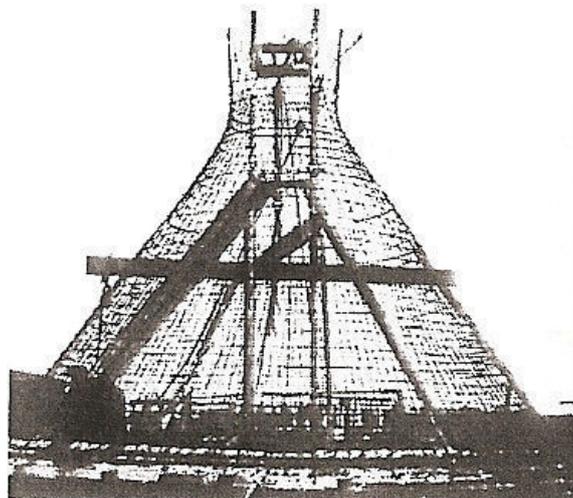


Figura 44. Armado de los cajones de cimentación de Sancti Petri. (6)

### ***Depósito cubierto de Osuna***

Esta cubierta es la primera cúpula proyectada por Torroja, y consiste en un casquete esférico de 16,65 m de radio medio, con una flecha de 2,00 m, que determina en planta una circunferencia de 16.10 m de diámetro. El espesor medio es de 15 cm.

### ***Voladizos del Instituto Escuela***

La solución construida, realizada en junio de 1934, se basaba en una losa maciza continua en voladizo. El canto de la losa varía desde el arranque, 35 cm, hasta el extremo 10 cm. Éste último, además, se termina en un borde en arco de circunferencia. Los apoyos del pórtico longitudinal se reducen a dos, con un vano de 6,40 m de luz y un voladizo de 6,95 m, y la viga se realiza con canto variable. En la figura 45 podemos ver el voladizo.



Figura 45. Voladizos del Instituto Escuela. (35)

### ***Mercado de Algeciras***

La planta es un octógono de 18,20 m de lado, inscrito en una circunferencia de 23,88 m de radio, cubierto con una cúpula que salva una luz entre apoyos de 47,76 m formada por un casquete esférico de una circunferencia de 41,20 m de radio. La lámina tiene un espesor de 10 cm. En la figura 46 podemos ver una vista de época del Mercado de Algeciras.



Figura 46. Mercado de Algeciras. (36)

Entre los soportes se colocan unos tramos de bóvedas cilíndricas de eje horizontal que intersectan con la cúpula, formándose unos arcos que salvan la luz entre soportes. Estos arcos permiten que los esfuerzos de la superficie de la cubierta se concentren hacia los pilares. Además, a partir del paralelo que coincide con la clave de las bóvedas de fachada, el espesor de la lámina aumenta hasta llegar a los 50 cm que posee sobre los soportes.

### **Lucernario de la Facultad de Ciencias**

En este edificio había un patio interior cuyo techo se plantea de forma que permita la iluminación del interior. Para ello se propone una estructura laminar.

La cubierta se divide en dos niveles, con lo que se aumenta la superficie de entrada de luz. El primer tramo, situado a más altura, es de forma rectangular de 10,00 por 5,39 m de lado y se resuelve apoyando unas vigas entre los soportes, sobre las que arranca una bóveda en rincón de claustro de hormigón armado de 10 cm de espesor. La otra parte de la cubierta, la que cubre el hueco perimetral, consiste en tramos de bóvedas cilíndricas cuya directriz, en el caso de las longitudinales, es un arco de circunferencia de 10,85m de radio, y que se apoyan en las directrices extremas. Éstas están formadas por unos nervios de 55 cm de canto en el arranque que sobresalen por encima de la lámina, y que forman una ménsula empotrada en los soportes. El tramo lateral de la cubierta entre dos ménsulas consiste en un sector de bóveda cilíndrica de 10,85 m de radio, que se representa en la figura 4.33, con 10,0 m de luz y de 3,24 m de ancho.

### **Mercado de Guinea**

El mercado tiene planta octogonal de 11.75 m de lado, inscrito en una circunferencia de 35.80 m. de diámetro. La estructura consiste en ocho arcos articulados en los apoyos y atirantados que arrancan de los vértices del octógono y se unen en el centro a una altura de 11.80 m. Entre los arcos, se coloca una lámina cilíndrica de hormigón apoyada en la cara inferior de estos, con lo que se manifiestan al exterior. La parte central está cubierta por un lucernario de 6.50 m de lado. Entre los soportes se abren, en todas las caras, unos huecos y, en ellos, el borde de la lámina se refuerza con unos tramos de lóbulos cilíndricos, con una disposición similar a la utilizada en el proyecto de Algeciras. En la figura 47 podemos ver una imagen del Mercado de Guinea.

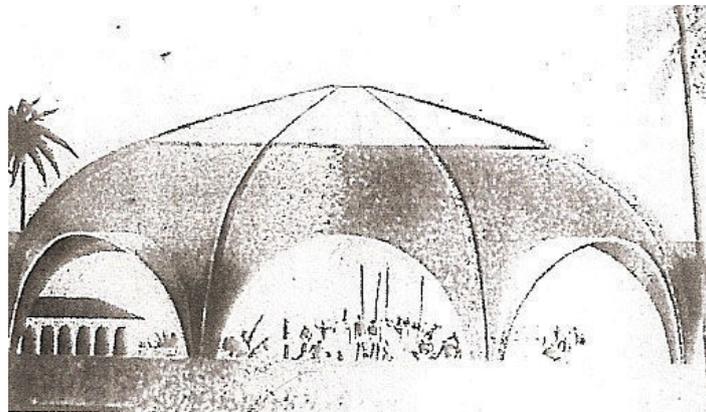


Figura 47. Dibujo del mercado de Guinea. (6)

### **Cobertizo de la escuela elemental de trabajo (Areneros)**

El proyecto es una cubierta de una superficie rectangular de 24,00 m por 8,00 m y un espesor de 5cm, situada en el patio interior de una edificación existente. Para resolverlo, Torroja proyecta una lámina cilíndrica cuya directriz es media elipse, de diámetros 8,00 m y 4,85 m, sin utilizar soportes intermedios. La lámina cilíndrica resultante apoyaba en las directrices extremas, en las que se colocaban unos nervios de 50 cm por 20 cm de sección transversal. Éstos últimos colgaban, por medio de unos tirantes, de unos bloques de hormigón empotrados en la fachada del edificio. De esta forma, la cubierta no necesitaba soportes, eliminando la excavación para los cimientos. Esta disposición permitía la libre dilatación de la cubierta sin causar esfuerzos secundarios, dada la flexibilidad de los tirantes. En la figura 48 podemos ver una imagen de la cubierta de Areneros.

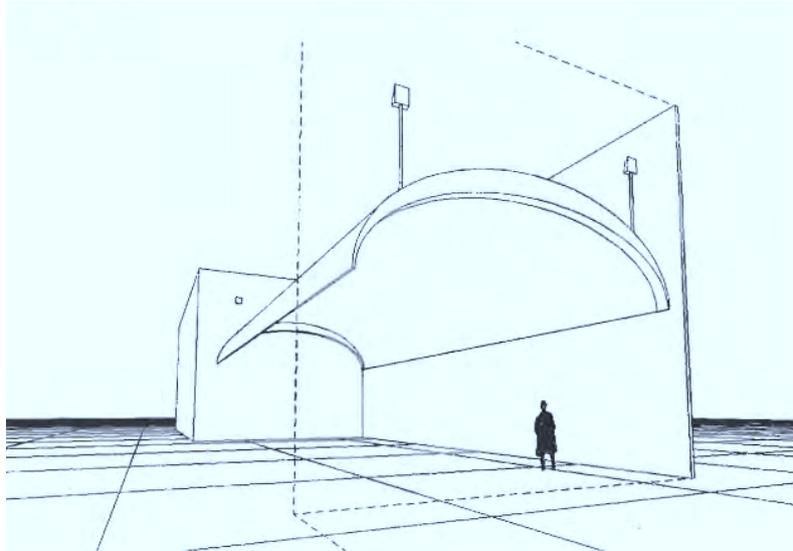


Figura 48. Esquema de la cubierta del cobertizo de la escuela elemental de trabajo. (7)

Esta solución precedió a la Iglesia de Villaverde. Ambas obras se trataban de proyectos de reforma o rehabilitación, por lo que la elección de una lámina semielíptica reducía los posibles efectos de la nueva construcción sobre la existente.

### ***Iglesia de Villaverde***

La novedad de esta cubierta consiste en que se forma uniendo tres lóbulos diferentes. El tramo central es una estructura igual que la de la Escuela Elemental de Trabajo, con una luz y una anchura similar y del mismo espesor.

Más adelante se realizará un estudio detallado de este edificio.

### ***Talleres Gómez-Navarro, en Villaverde***

La sección transversal recuerda la de la iglesia, aunque el comportamiento estructural es diferente. Las naves son bóvedas atirantadas. En la figura 49 podemos ver imágenes del estado actual de la Nave Torroja. Actualmente las instalaciones se encuentran todavía en pie y en pleno proceso de rehabilitación.



Figura 49. Vista frontal e interior de la nave Torroja en Villaverde. (37)

### **Cubierta para el Seminario de Madrid**

Este proyecto no se contruyó. Se trataba de una cubierta de una superficie de 27.20 m por 10.10 m, que se resuelve con una lámina de 5 cm de espesor y con sección transversal elíptica de diámetros 10.00 m y 8.30 m, respectivamente. La estructura está organizada de la misma forma que la bóveda de Areneros, y apoya en las directrices extremas, que son unos nervios de 60 cm de canto. Por la forma de estas vigas de borde, parece que se repite el mismo sistema de apoyo. Se introduce un lucernario en la parte superior de la cubierta, realizado en la propia lámina. En la figura 50 podemos ver una sección de la cubierta.

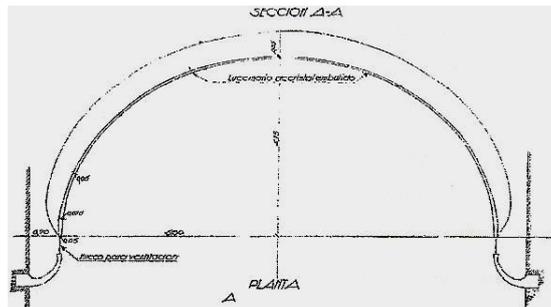


Figura 50. Perfil para la cubierta para el Seminario de Madrid. (6)

### **Estación de los Ministerios**

El proyecto original consistía en dos andenes paralelos de 20.00 m de ancho cada uno, resueltos con bóvedas de cañón separadas por un machón continuo de 4.00 m de ancho. Para conseguir la comunicación entre ellos se modificó el proyecto, introduciendo unas bóvedas transversales de 12.00 m de luz que, por la intersección con las primeras, dan lugar a unas bóvedas de arista. La separación entre las bóvedas transversales era de 6.00 m, con lo que el machón intermedio se reducía a una serie de pilas de 6.00 por 4.00 m de sección. En la figura 51 podemos ver una imagen de la Estación de los Ministerios.

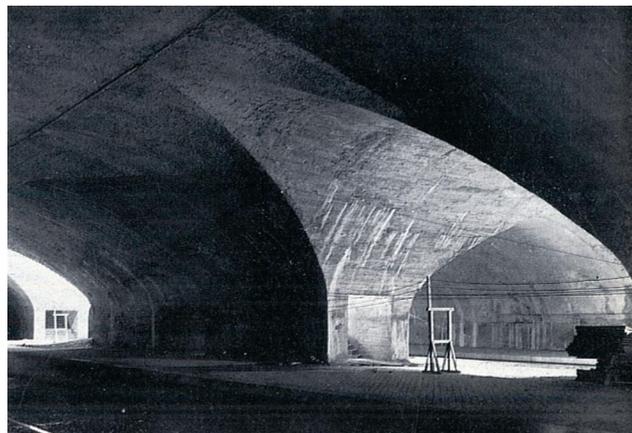


Figura 51. Vista de la Estación de los Ministerios. (38)

### **La iglesia de Bellas Vistas**

Es el proyecto de la cubierta de una planta rectangular de 9,055 m de ancho y 17,45 m de longitud. Para cubrirlo, se utilizaba una lámina de hormigón de 5 cm de espesor. Se planteaban dos soluciones: en una la directriz de la lámina era media circunferencia de 9.04 m de radio y, en la otra, era media elipse de ejes 9.05 y 6.00 m, respectivamente. En las dos posibilidades el apoyo se

realizaba en el lado largo, en soportes colocados cada 6,00 m y, entre ellos, se colocaban unos tramos de bóveda de sección semicircular y con la generatriz perpendicular al eje de la nave.

### ***Teatro de Cáceres***

La planta del edificio es un rectángulo irregular, con los lados largos ligeramente convergentes. La cubierta se organiza a base de varios tramos de bóvedas tóricas orientadas transversalmente y de secciones del mismo radio, excepto una de ellas. Están apoyadas en los muros laterales del teatro, de forma que la luz que salvan no es grande comparada con la de los proyectos anteriores. Cada tramo de bóveda se superpone en parte sobre el siguiente, dejando un espacio oculto entre las dos láminas, quedando a la vista la forma de la cubierta, caracterizada por la arista de unión de cada tramo, nuevamente sin la presencia de la viga de borde de rigidez.

### ***Centro de Fermentación de Tabacos***

Para formar la cubierta, la trama de soportes era de lado doble que el de la planta baja, formando cuadrados de 10,00 m en un sentido y variable entre 9,00 y 9.70 m en el otro. La cubierta se resolvía con una losa cuya sección sigue la forma de un arco de circunferencia y apoyaba en unas vigas de celosía de hormigón armado, dispuestas paralelas entre sí, separadas 10.00 m, y que salvan los vanos variables entre 9.00 y 9.70m.

### ***Frontón de Recoletos***

La cubierta estaba formada por una lámina cilíndrica de dos lóbulos de sección circular de diferente radio, ambos con tangente vertical en los extremos y que se encontraban en ángulo recto. Las generatrices eran horizontales, de 55,00 m de largo y estaban orientadas en la dirección longitudinal. Parte de la superficie continua se sustituía por una estructura de barras trianguladas, todo ello de hormigón.

La sección transversal consistía en dos arcos de circunferencia, la mayor de 12,20 m de radio y la menor de 6,40m, que se cortaban ortogonalmente. De esta forma la luz, en el sentido transversal, era de 32,51 m. La distancia entre ejes de apoyo, en el sentido longitudinal, era de 55,0 m.

De los cuatro lados del perímetro, tres estaban formados por muros de hormigón, de 110 cm de espesor el lateral y de 140 cm el frontal y el de rebote; el otro lado coincide con la grada. Para resolver el apoyo extremo se organizaba un entramado de tirantes horizontales y soportes que arrancan del muro y que son suficientemente flexibles (en el sentido longitudinal tienen 30,00 cm de lado) como para permitir el movimiento del apoyo en la dirección longitudinal, pero que, gracias a los tirantes horizontales, permitían que se mantuviera la forma de las directrices extremas. En la figura 52 podemos ver una fotografía del Frontón Recoletos.

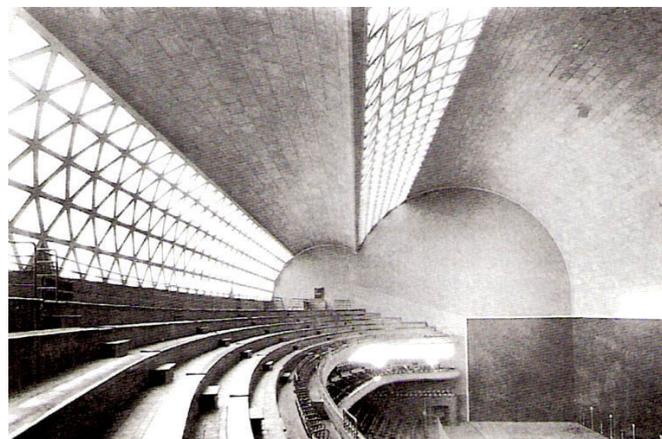


Figura 52. Vista del Frontón de Recoletos. (39)

### ***Hipódromo de la Zarzuela***

La cubierta es el elemento más destacado del proyecto. Para explicar a definición del módulo se dibuja una sección longitudinal del mismo en la que se indican las dimensiones de 28 secciones transversales situadas cada 75,0 cm en la zona en voladizo, y a una distancia variable en torno a los 60 cm en el resto. En la figura 53 podemos ver el aspecto actual del Hipódromo de la Zarzuela.



Figura 53. Vista actual del exterior y del interior. (52) y (53)

Por tanto la cubierta estaba formada por sectores de hiperboloide, con un vuelo de 12,80m. En el borde la lámina tiene un espesor de 5cm. En la imagen podemos ver claramente la forma de trabajo de cada módulo. En la figura 54 podemos ver el aspecto durante la construcción del Hipódromo. Por otro lado en la figura 55 se observa una sección transversal del proyecto.



Figura 54. Imagen durante la construcción. (50)

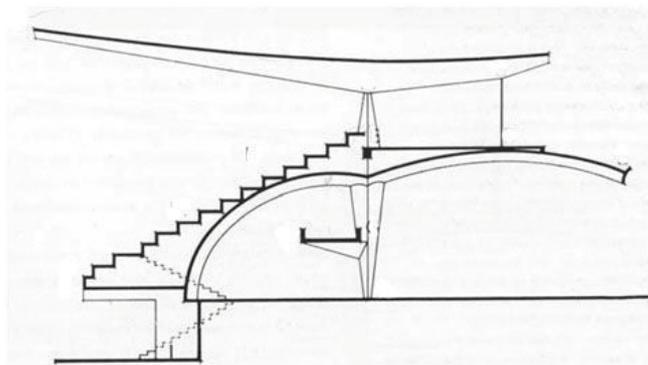


Figura 55. Esquema estructural de cada módulo. (51)

La teoría de la elasticidad no había desarrollado procesos matemáticos adecuados para el análisis de esfuerzos de este tipo estructural en concreto. En la figura 56 se observan los esfuerzos que se producen en la lámina.

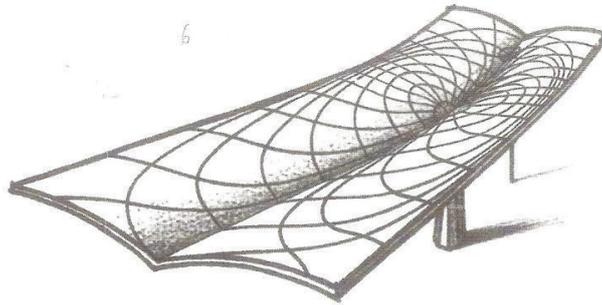


Figura 56. Esquema de esfuerzos actuantes en la lámina. (1)

### **Estación de servicio**

Se planteó una cubierta de planta octogonal con la que se resolvía un voladizo de 6,00 m de luz, apoyando únicamente en un soporte central. La superficie estaba formada por ocho tramos de bóvedas cilíndricas unidas, de 5 cm de espesor en el extremo. En la superficie de la cubierta no se disponía ningún nervio de refuerzo ni en las aristas ni en el borde. La sección de las láminas cilíndricas tenían la forma de dos arcos de circunferencia tangentes, de menor radio en el arranque, y mayor en el extremo, con lo que se conseguía aumentar el vuelo de la cubierta sin aumentar la altura.

### **Mercado de El Ferrol**

La estructura consistía en una sucesión de arcos de hormigón armado de 11,80 m de luz libre, separados 4,00 m y apoyados en soportes de sección variable, con 20 cm de ancho y canto variable entre los 30 cm en la parte alta hasta los 80 cm que tenía en la base. Los arcos se prolongaban en un voladizo de 3,00 m de luz desde la cara interior de los soportes, y su sección era variable entre 40 cm sobre el apoyo y 7 cm en la clave. La cubierta se formaba con una lámina cilíndrica dispuesta entre los arcos coincidiendo con la cara inferior, de forma que los arcos se manifestaban en la cara superior como unos refuerzos de canto variable. El tramo en voladizo servía para sujetar una losa continua, también enrasada con la cara inferior, dispuesta con una ligera inclinación. Esta losa perimetral tenía la función estructural de garantizar la estabilidad del conjunto, ya que en su interior se colocaba una armadura con la que se equilibran los empujes de los arcos. Estas barras se anclaban en la zona rigidizada transversalmente por el muro que cerraba el frente de la bóveda. En la figura 57 se observa una imagen del Mercado de Ferrol

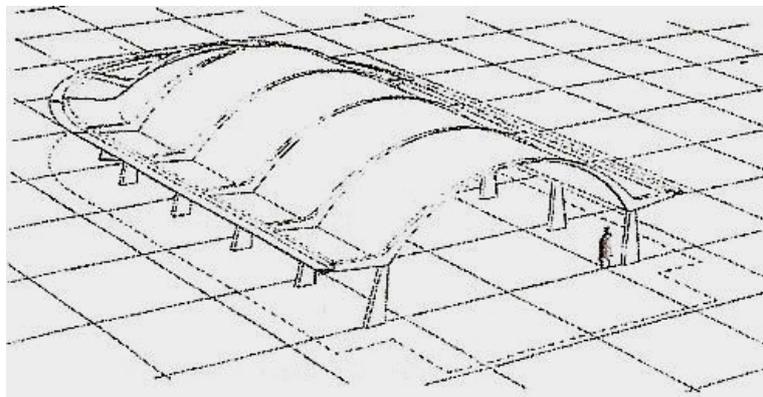


Figura 57. Esquema para la cubierta del mercado de Ferrol. (6)



### ***El acueducto de Alloz***

La estructura se diseña con la intención de que la cara interior de la cuba esté siempre comprimida para conseguir la estanqueidad del canal sin necesidad de impermeabilización. Cada tramo de acueducto consiste en una viga biapoyada con una luz de 20,00 m y dos voladizos extremos de 10,00 m, de forma que, como las solicitaciones de la estructura siempre serán cargas uniformemente distribuidas (el peso propio y el agua), sin alternancias, y por la proporción entre vanos y voladizos, todo el tramo está sometido a momentos flectores negativos o nulos. En la figura 61 podemos ver una imagen del estado actual del acueducto.

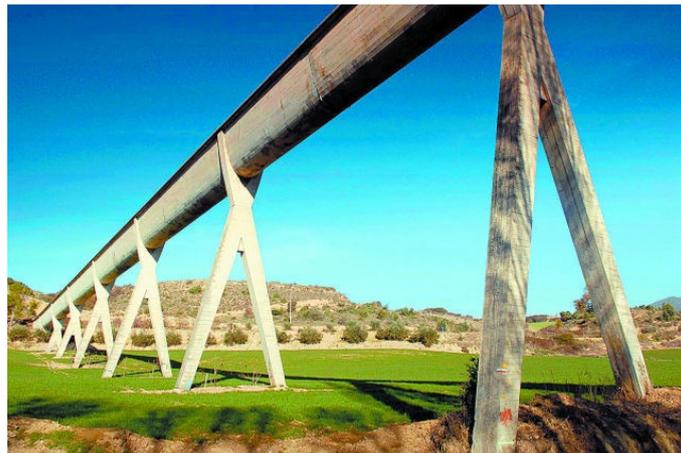


Figura 61. Aspecto actual del Acueducto de Alloz. (40)

### ***Hangar de Pamplona***

El proyecto tenía una planta rectangular de 27,05 m de largo y 20,20m de ancho. La cubierta era una lámina cilíndrica que apoyaba en los extremos. La sección transversal de la cubierta estaba formada por dos arcos de circunferencia tangentes de radios diferentes y con tangente vertical en ambos extremos. Una de las generatrices extremas se apoyaba en el terreno y la otra forma el dintel de la puerta del hangar. La lámina se reforzaba con unos nervios en la cara superior colocados cada 3,00m.

### ***Escuela Naval de Marín***

Proyecto de un gimnasio con piscina cubierta, cuya techumbre consistía en una serie de arcos de 25.50 m de luz separados 7.0 m entre sí. Entre los arcos se disponía una losa maciza reforzada con vigas de canto que sobresalían por la cara superior y que salvaban la luz entre arcos. Los arcos de la piscina eran triarticulados y el que separaba la zona de piscina del acceso era biarticulado con un tirante.

### ***Hangar de Alcalá***

Se trata de un edificio de planta rectangular alargada, con un cuerpo central formado por una estructura reticular de vigas y soportes, con dos pórticos paralelos unidos transversalmente entre si, en los que apoyan unas ménsulas simétricas respecto a dicho cuerpo central. Entre las ménsulas se coloca unas láminas cilíndricas de hormigón de 5 cm de espesor cuya sección transversal es elíptica. Entre las ménsulas en que se apoyan, las láminas tienen dos refuerzos en la cara superior, paralelos a las directrices extremas. En la figura 62 podemos ver una imagen del estado actual del hangar.



Figura 62. Hangar de Alcalá. Actualmente abandonado. (41) y (42)

### **Proyecto de nave industrial. ENASA**

Torroja presentó la documentación del proyecto incluyendo otras seis propuestas con modificaciones alternativas. Aquí se estudian las soluciones laminares.

- A) Solución C: Consistía en una lámina cilíndrica de hormigón cuya directriz era una cicloide. En una parte del cilindro, la superficie se sustituía por una estructura triangulada en celosía, formada por nervios de hormigón armado. En la generatriz común a dos lóbulos se incluía una armadura con unos tensores para compensar el alargamiento elástico de éstos al entrar en carga la cubierta. La lámina va rigidizada por nervios que sobresalen por encima de la superficie en la dirección de la directriz, colocados cada tres metros. Cada una de las bóvedas va apoyada en arcos transversales cada 20.00 m, y los tramos se consideraban apoyados en sus extremos sin tener en cuenta los efectos de la continuidad en la lámina. Los efectos de asimetría de carga se resolvían mediante contrafuertes. En la figura 63 vemos una imagen de esta solución.

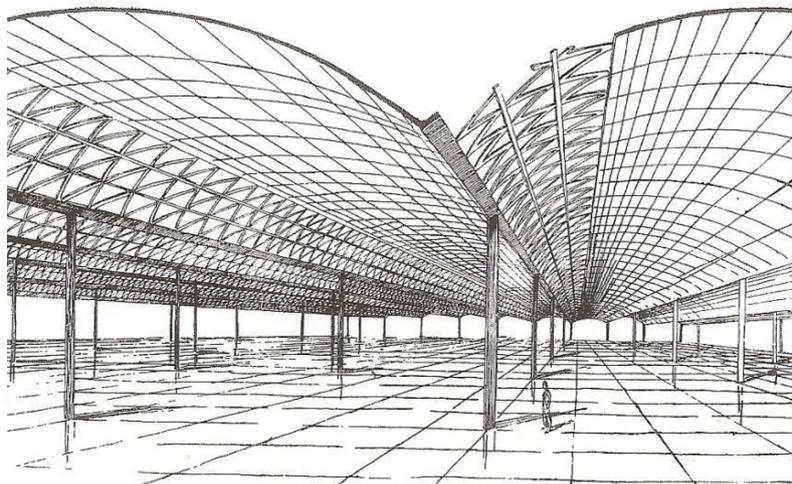


Figura 63. Proyecto de nave industrial. (2)

- B) Solución E: es una variación de la anterior, en la que la directriz de la bóveda no era una cicloide, sino un arco de circunferencia, cuya apertura es de  $90^\circ$ , con lo que las bóvedas se cortaban formando un ángulo recto. Se incluían unos pequeños nervios de refuerzo coincidiendo con la directriz, colocados cada tres metros, con la intención de aumentar la rigidez frente al pandeo.

### **Frontón de Añorga**

Proyecto para cubrir una superficie rectangular, que consistía en una lamina de 12,60 m de luz entre ejes de apoyo y una longitud total de 34,75m formada por varios tramos iguales que se repiten cada 7,81m. La superficie total es de 446m<sup>2</sup>. La sección transversal de la lámina está formada por arcos de 90° de abertura, con un radio de 2,694 m, formando una sección ondulada. La lámina se apoya en unas vigas colocadas en los lados largos de la planta del mismo canto que la altura de la lámina. Una de ellas apoya en el muro lateral de cierre del frontón, fijada al mismo en el centro de la luz y colocada sobre rodillos que permiten la libre dilatación en el sentido longitudinal. El otro lado se apoya en dos soportes, formando un pórtico con un vano y dos voladizos desiguales. En la figura 64 podemos el aspecto actual del frontón.



Figura 64. Aspecto actual del Frontón de Añorga. (43)

### **Marquesina de la estación de Orense**

Cuando se redacta el proyecto ya estaban construidos los andenes, que apenas tienen 4,50m de ancho. Para no dificultar la circulación por ellos, una de las alineaciones de soportes se colocaba entre dos de las vías, y la otra en coincidencia con el edificio existente. La luz entre apoyos era de 25,91m con un vuelo de 12,19m sobre los soportes. En el tramo frente al edificio, un extremo de la marquesina se apoyaba en una ménsula situada a la altura de la cornisa, y el otro sobre soportes alineados, separados 6,62m. El conjunto estaba organizado por una serie de tramos independientes de 6,62m de ancho, que funcionan como una viga colocada transversalmente a las vías con dos apoyos y un voladizo, cuya alma era de forma curva.

### **Palacio de deportes, Madrid**

La planta del proyecto era elíptica. La estructura consistía en una serie de pórticos dispuestos radialmente. La separación entre ellos variaba entre los 8,00 m en el extremo del eje mayor de la elipse que define la planta, y los 9,40 m en el extremo del eje menor. La cara superior de las vigas de los pórticos tenía la forma de la grada que apoyaba en ellas, y la cara inferior tenía forma curva. Uniéndolas se colocaba un elemento de hormigón de 10 cm de espesor de directriz de arco de circunferencia y cuyas generatrices eran elipses, con lo que daba lugar a una superficie tórica.

Para resolver la cubierta se estudió una solución con arcos, apoyados en los extremos de la jácena superior de los pórticos, dispuestos en el sentido de la luz menor. Dichos arcos se estudiaron como unas celosías de 3,00 m de canto y los cordones formados por perfiles de acero laminado. Se planteaba la posibilidad de prolongar en voladizo la viga superior del pórtico para apoyar en ella la cubierta, con lo que las dimensiones de los ejes mayor y menor de la elipse que forma la planta de la

cubierta de ésta se reducían a 78,00 m y 54,00 m respectivamente; o bien, hacer el apoyo sobre los soportes directamente, con lo que las dimensiones aumentan a 85,00 m y 54,00 m. La cubierta se resolvía colocando unas correas de perfiles laminados entre los arcos.

### ***Nave de ensayos del Instituto Técnico de la Construcción y el Cemento (Costillares)***

Consiste en un bloque alargado de 77,64m de longitud por 14,50m de ancho con dos plantas. El edificio está orientado en la dirección norte-sur. Su particularidad está en la cubierta. Ésta se divide en siete tramos de 9,60m, más otro de la mitad de anchura, que se apoyan en pórticos de soportes y vigas de perfiles metálicos situados en los bordes laterales, pero de forma independiente respecto a los muros de cerramiento. Cada tramo de cubierta consiste en una bóveda cilíndrica formada por una malla triangular de perfiles metálicos. La sección transversal tiene la forma de un arco de circunferencia de 6,55m de radio y 90° de apertura. En la figura 65 observamos el aspecto actual de la nave.



Figura 65. Cubierta de la nave de ensayos del Instituto Torroja. (5)

### ***Iglesia de Pont de Suert***

El edificio de la iglesia de Pont de Suert se divide en cuatro partes: la nave, el baptisterio, la capilla y el ábside. En cada una de estas partes, la estructura está claramente dividida en dos: Por un lado, el forjado del piso y los muros verticales, de mampostería, revestidos por la cara exterior con muros de sillarejo y, por otro, la cubierta, realizada con cúpulas de formas diversas, construida con fábrica de dos o tres roscas de rasilla, ligeramente armadas por la cara exterior. En cada una de las zonas del edificio, la sección de la cubierta es diferente. En la figura 66 observamos el aspecto actual de la iglesia.



Figura 66. Exterior e interior de la Iglesia de Pont de Suert. (48) y (47)

*La Nave.* Es de 13,00 m de ancho entre las caras exteriores, por 20,00 m de largo. Los muros laterales son de mampostería de 2,75 m de altura, sobre el plano del piso, y 1,35 m de ancho,

contando con el revestimiento exterior de una hoja de sillarejo. Su cara superior forma un plano continuo para el apoyo de la cubierta. Por la cara interior, el macizo del muro se aligera realizando unos nichos con forma elipsoidal de 3,00 m de ancho. La cubierta está dividida en 5 tramos transversales independientes de 4,00m de ancho, que coinciden con los aligeramientos elipsoidales de los muros verticales, y que arrancan 2,75m por encima del piso de la planta. Cada tramo tiene forma de un arco apuntado. La luz entre las caras interiores de los lóbulos en el arranque es de 12,00 m, y la flecha desde la cota de arranque hasta el punto más alto de la cara interior en la clave es de 8,45 m. Cada lóbulo del tramo es, por tanto, una superficie de doble curvatura, con las secciones transversales formadas por arcos de circunferencia cuyo radio van variando, aumentando desde el arranque hasta la clave.

*El baptisterio.* Su cubierta está formada por tres cúpulas de revolución de radios diferentes superpuestas. Las dos interiores tienen el mismo eje vertical, y el de la exterior está separado 35,0cm del de aquellas. La exterior es una cúpula apuntada de 5,56m de diámetro en el arranque, en donde acomete con una inclinación de 45° sobre un anillo de hormigón armado. Este anillo va colocado sobre un muro de mampostería y, sobre él, arrancan la cúpula intermedia.

*La Capilla.* La cubierta es una cúpula apuntada de 7,16 m de diámetro interior y 7,51 m de altura desde el suelo hasta el vértice por la cara exterior. La cúpula continúa por debajo del plano horizontal en el que está el centro de la sección transversal apoyando 1,22 m por debajo. Está formada por tres roscas de ladrillo.

*El Ábside.* Está cubierto con media cúpula apuntada que arranca a la misma altura que los lóbulos de aquella. La superficie de la cubierta se genera de forma parecida a los lóbulos de la nave: Se hace girar un plano en el que está la curva generatriz. Se trata siempre de la misma curva, de la que se toman tramos sucesivamente más largos conforme se avanza desde el arranque hacia la clave.

### ***Refugio de Sancti Spirit***

El refugio consiste en un cuarto de cúpula apuntada, cuya forma se genera de forma similar a la del ábside de Pont de Suert.

### ***Cúpula del gimnasio de Sao Paulo***

Torroja estudió la solución de una cubierta formada por una cúpula de 105,00 m de diámetro y 19,00 m de flecha, para un gimnasio en Sao Paulo. Se trata de un casquete esférico de 82,00 m de diámetro. Sólo se conservan los estudios preliminares. La estructura es de acero laminado y consiste en una serie de arcos meridianos rigidizados por barras en la dirección de los paralelos.

### ***Cubierta de palacio de los deportes***

Se trata de una propuesta para la cubierta de un recinto de planta rectangular con una superficie continua de hormigón armado. La estructura consistía en 9 arcos dispuestos radialmente entre los que se colocaba la lámina continua. Los arcos eran de directriz circular, pero el radio de cada uno era diferente, ya que todos arrancaban a la misma altura, pero la luz era diferente porque se adaptaban a la planta rectangular.

### ***Cubierta de la Universidad Laboral de Tarragona***

Era la cubierta de una sala rectangular de 57,60m de longitud y 19,40m de ancho entre ejes de apoyos, que se resolvía con una lámina continua plegada, que formaba unos elementos principales de 4,80m de ancho unidos entre sí y que salvaban la luz menor. La cubierta apoyaban en unos elementos triangulares colocados sobre las fachadas, y que estaban contenidos en un plano ligeramente inclinado respecto al vertical de la fachada. La lámina descansaba en los lados inclinados de dichos triángulos que eran de sección variable, aumentando desde el arranque hasta el vértice

superior, mientras que el lado horizontal de los mismos, era de sección constante. En la figura 67 observamos el aspecto que presentaba la cubierta.



Figura 67. Vista de la Universidad Laboral de Tarragona. En primer plano, la cubierta plegada realizada por Torroja. (49)

### ***Deposito Fedala, Mohamedia, Marruecos***

Para evitar que la pared se fisurase por la presión hidrostática, se planteó una estructura realizada con hormigón pretensado. El hiperboloide se apoya en una viga que, a su vez, descansa en los soportes existentes y que coincide con el círculo de garganta. En la figura 68 observamos el aspecto que presentaba el depósito.

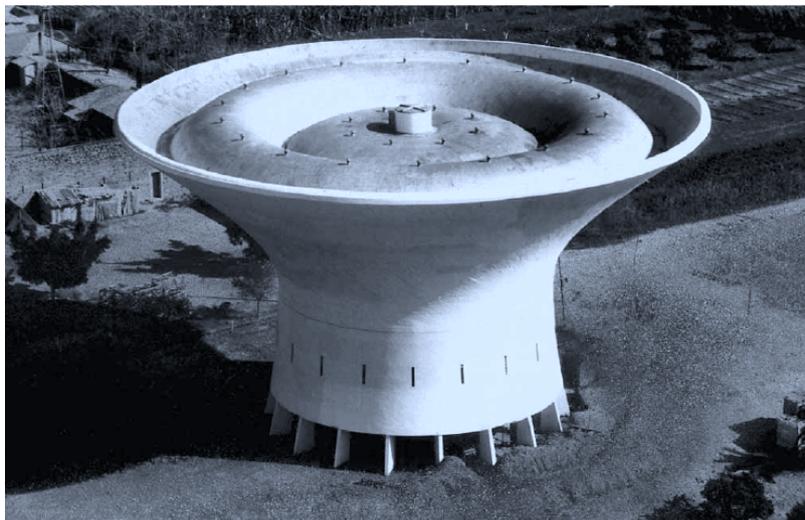


Figura 68. Deposito Fedala, Mohamedia, Marruecos. (44)

### ***Depósito de Marsella***

Consistía en hacer las paredes del depósito con el sistema de doble muro de fábrica con mortero inyectado entre ambos. En este proyecto el fondo del depósito se resolvía de la misma forma que en el de Fedala, y la cubierta se realizaba de la misma forma que en el proyecto anterior, a base de unas bóvedas tabicadas en forma de sector de toro apoyadas en unas vigas radiales que se apoyaban en la torre central del depósito y en un soporte intermedio.

### ***Club Tachira***

La forma de la cubierta se obtiene al desplazar una curva generatriz, a lo largo de otra curva directriz. La generatriz es una catenaria de eje vertical, y la directriz, una curva alabeada en el espacio. Uno de los lados de la cubierta apoya en el terreno de forma continua y, el otro, tiene dos apoyos puntuales y, entre ellos, un arco de descarga. La separación entre los puntos de apoyo es de 31,60m. En la figura 69 podemos ver un modelo a escala reducida.



Figura 69. Maqueta del Club Tachira (44)

### ***Trebol de la Hayada***

No se pasó de la fase de anteproyecto, donde se estudiaron dos soluciones. En ambos casos el piso del auditorio estaba formado por una losa de doble curvatura. En la segunda solución se dibuja esta losa de dos formas, maciza de gran canto, o con menos espesor pero reforzada con nervios. Las dos soluciones estudiadas se diferencian en la forma de equilibrar los esfuerzos del voladizo y como anclar la estructura al resto del edificio.

### ***Iglesia del Grao de Gandía***

Consiste en un edificio de una sola nave, de planta trapezoidal, con los lados ligeramente convergentes, con una longitud total de 41,00 m. La cubierta consiste en dos láminas plegadas de hormigón, que salvan una luz libre de 28,00 m. Ambas láminas están reforzadas por una serie de nervios transversales que, en una de ellas, la que está orientada al sur, se manifiestan en la cara exterior y, en la otra, sobresalen en el interior. En ambos casos, la sección transversal es asimétrica, siendo ésta más acusada en la primera. La cubierta, soportando únicamente el peso propio, está sometida a momentos torsores muy fuertes, y para resistirlos se introducen unos esfuerzos horizontales por medio de un sistema de pretensado. Cada uno de los faldones de la lámina, funciona como una viga en su propio plano, a la que los nervios transversales dan la rigidez necesaria. En la figura 70 podemos ver el estado actual de la iglesia.



Figura 70. Vistas exterior e interior actual de la Iglesia de la Grao de Gandía. (45) y (46)

### ***Cubierta del Depósito enterrado de Marrakech***

La planta era un hexágono y el interior se organizaba en una trama paralela a las caras. De esta forma la planta quedaba dividida en triángulos en cuyos vértices se situaban los soportes para el apoyo de la cubierta del depósito que se protegía con una capa de tierra de 1.0 m de espesor. Una de las alternativas para resolver la cubierta consistía en una estructura laminar para soportar las presiones del terreno, únicamente con solicitaciones de compresión, con lo que se puede hacer con un espesor mínimo.

### ***Cubierta de la Iglesia de la Paz***

Consiste en una nave rectangular de 50,00m de largo, por 26,00m de ancho, que está cubierta con una lámina continua, cuya sección transversal consiste en dos láminas cilíndricas secantes, generando una forma similar a la de las marquesinas de las tribunas del Hipódromo de la Zarzuela. Con esta sección se forma una viga que salva la luz de 50,00m, que se apoya sobre el punto medio de los lados cortos en la arista que se forma en la intersección de ambas láminas cilíndricas. El espesor de la lámina es de 10cm, pero está reforzada por unos nervios transversales que sobresalen por ambas caras de la superficie, colocados cada 1,66m. Sobre los muros longitudinales del perímetro se colocan unos soportes metálicos, coincidiendo con estos nervios, de tal forma que cada nervio de refuerzo se apoya en un pilar. Así, el peso de la cubierta se reparte en todo el perímetro de edificio.

### ***Otras ideas***

Otras formas estructurales y diseños fueron dilucidados por Torroja, a la espera de traducirse en edificios. Uno de esos proyectos consta de dos láminas cilíndricas, cada una de las cuales dibuja un arco de 90°. Estas láminas apoyan solo en las paredes delantera y trasera. Los lucernarios están en la mejor posición posible, permitiendo la entrada no solo de luz directa sino también de la luz reflejada en las superficies de las cubiertas adyacentes. En la figura 71 podemos ver un esquema general de la solución

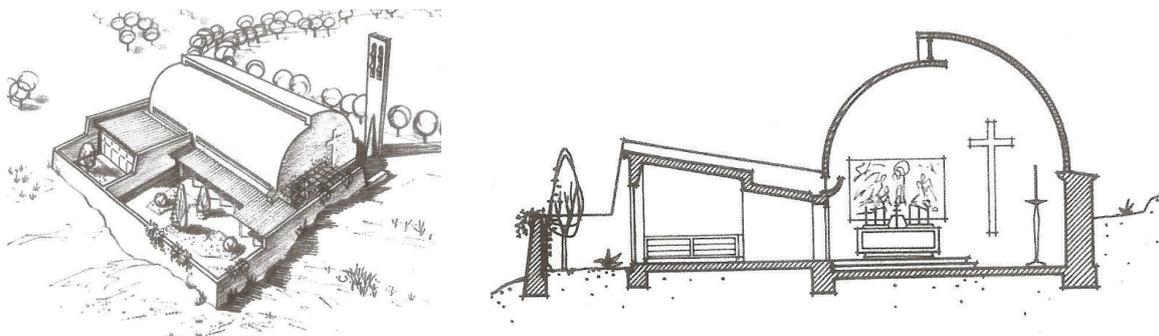


Figura 71. Imágenes de la solución adoptada. (1)

Cuando observamos las obras de toda su carrera, se puede apreciar una trayectoria con una clara tendencia a incorporar variaciones y mejoras a proyectos que suceden a otros. Cada proyecto se convierte en un experimento de una idea nueva. En el caso de las cubiertas cilíndricas comienza aprendiendo el sistema realizando la cubierta de Areneros donde realiza el modelo más sencillo. Sobre ese modelo se producen variaciones e innovaciones hasta llegar el proyecto del Frontón de Recoletos, donde se introduce una forma totalmente nueva para la época.

### G. El perfil elíptico.

Tradicionalmente, en la arquitectura occidental, cuando la rasante permitía el medio círculo completo se utiliza una bóveda de medio punto. Si era necesario rebajar las bóvedas, se daba al intradós la forma de un arco de círculo, tratándose entonces de bóvedas escarzanas. También se empleaban para bóvedas rebajadas las curvas carpanel y elípticas, que tienen, como las bóvedas de medio punto, tangentes verticales en los arranques. En otros casos se hizo uso del arco ojival.

En cada caso había que estudiar los rebajamientos más convenientes, teniendo en cuenta que a medida que las flechas disminuían, la oblicuidad de los empujes y, por tanto, los espesores de los muros de apoyo aumentaban.

En la arquitectura eclesiástica se han utilizado varios perfiles de bóveda, atendiendo sobre todo a cuestiones compositivas y estéticas. El más extendido hasta el siglo XVI fue el perfil semicircular. También fueron utilizados los perfiles carpanel y ojival, y en menor medida el perfil escarzano.

El perfil carpanel se basaba en el trazado de arcos de círculo tangentes entre sí y cuyos radios van aumentando desde los arranques a la clave, como podemos ver en la figura 72B. Se justificaba la preferencia por estos por su fácil trazado gráfico así como por el fácil despiece y labra de los sillares. Pero hoy día, en que las bóvedas se construyen con hormigón, estas ventajas desaparecen.

El perfil ojival estaba formado por la intersección de dos perfiles circulares, que se cortan en la clave, como podemos ver en la figura 72A.



Figura 72. De izquierda a derecha: A) Imagen de la bóveda ojival de la Iglesia de Vinça. Languedoc-Roussillon; B) Imagen de la bóveda carpanel de la Iglesia de San Miguel Arcángel. (33) y (34)

El perfil escarzano permitía cubrir grandes espacios entre muros con una flecha reducida. Pero el problema residía en los grandes empujes que transmitía a los apoyos. De ahí su uso reducido en edificación, siendo más amplio en puentes. Podemos ver un ejemplo en la figura 73.



Figura 73. Arcos escarzanos en el Museo de Historia de Valencia. (32)

El perfil elíptico rara vez era utilizado en edificación, sobre todo debido a las dificultades de su trazado. Podemos ver un ejemplo en la figura 74A, en la Mezquita de Córdoba. Pero a partir del siglo XVII se produce un cambio en la estética de la arquitectura eclesiástica. Durante el Barroco la búsqueda del refinamiento arquitectónico hizo que los diseñadores implantaran en iglesias y catedrales el perfil elíptico, tanto para bóvedas como para cúpulas, como podemos ver en las figuras 74B y 75. Este perfil reducía los empujes sobre los muros laterales y además reducía la altura de la rasante. A partir de entonces el perfil elíptico sería un elemento recurrente en numerosos edificios públicos.



Figura 74. De izquierda a derecha: A) Imagen Interior de la Mezquita de Córdoba; B) Imagen de la bóveda elíptica de la Cartuja de Granada. (58) y (59)



Figura 75. Imagen general de la Iglesia de San Luis, cubierta mediante bóveda elíptica. (60)

Ya en épocas más recientes la elipse volvió a ser el centro de atención para el diseño de iglesias. Un claro ejemplo es la Iglesia de Villaverde, donde abandona su papel de bóveda tradicional, para ser objeto del diseño de una lámina de hormigón armado. Actualmente existen algunas referencias al perfil elíptico, como puede ser la Iglesia La Iglesia Católica de la Transfiguración de Lagos, en Nigeria, por Dos Architects (figura 76).



Figura 76. Imagen general de la Iglesia Católica de la Transfiguración de Lagos. (31)

Como anécdota para este trabajo es de destacar una obra realizada durante las Fallas de Valencia en 2011 (figura 77), donde se pudo observar un perfil semejante al de Villaverde. Aquí se puede ver como este tipo de perfiles de cubierta están tan arraigados a la cultura española.

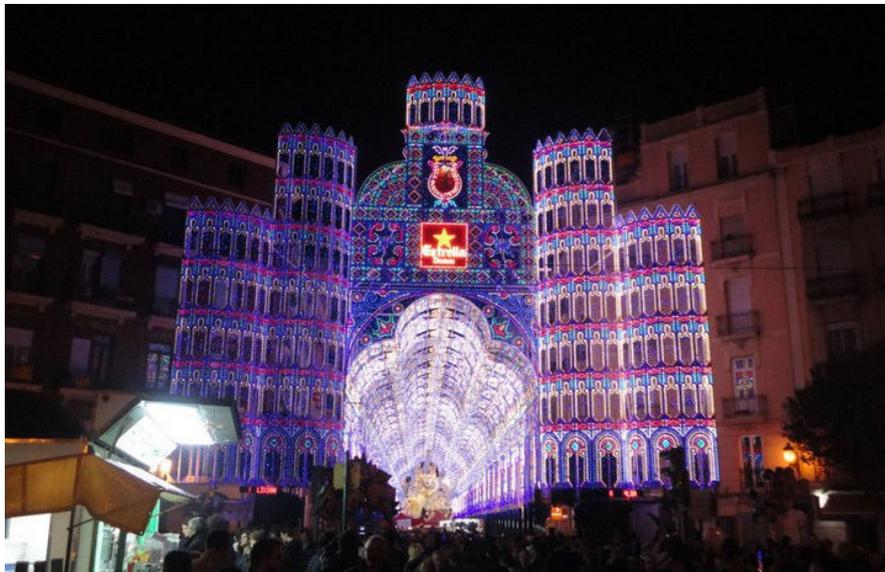


Figura 77. Imagen de la iluminación para una de las Fallas de Valencia (Año 2011)



## 2. Iglesia de Villaverde

### A. Villaverde.

Es el distrito municipal situado en el extremo sur del municipio de Madrid (España). Anteriormente, fue un municipio independiente, el último en ser absorbido por Madrid, el 31 de julio de 1954. En este año, justo antes de la absorción por parte de Madrid, los límites de Villaverde eran: por el oeste con los términos municipales de Leganés y Carabanchel, por el sur con Getafe, al este con el municipio de Vallecas (situándose el límite pasado el río Manzanares) hasta el arroyo Abroñigal y al norte con el municipio de Madrid.

Ya en el siglo XVI el pueblo tenía 250 vecinos (sin contar mujeres e hijos), dedicados la mayoría a la agricultura. Constaba de una parroquia (la actual parroquia de San Andrés de Villaverde), pero no poseía hospitales, conventos u otros edificios importantes. Existían dos graneros (uno de ellos real), tres tiendas, una taberna, un mesón y una posada.

En el siglo XVIII Villaverde comenzó a ser lugar de paso de la Corte en sus viajes a Aranjuez. Ello motivó un auge económico en la pequeña aldea. Así mismo, favorecida por la composición arcillosa del terreno, floreció la industria de la teja, convirtiéndose Villaverde en la mayor población productora de tejas para Madrid, y la que las proporcionaba de mayor calidad.

A mediados del siglo XIX existían en el término de Villaverde dos paradores en el Camino Real (antigua carretera de Andalucía y Aranjuez), algunas casas de crianza de toros de lidia, cuatro fábricas de horno de teja y dos molinos harineros. Y en la segunda mitad del siglo XIX fue el ferrocarril el causante del cambio completo en la fisonomía y economía del municipio.

En la siguiente imagen podemos ver una vista del pueblo de Villaverde durante la primera mitad del siglo XX (figura78).



Figura 78. Antigua vista de Villaverde. En primer plano podemos ver la Nave Torroja, y más alejada, la Iglesia de San Andrés de Villaverde

### B. Iglesia de de San Andrés de Villaverde.

La iglesia que actualmente encontramos en Villaverde es una construcción renacentista que data del siglo XIV. Pero fue a partir del siglo XVIII cuando empezó a cobrar cierta importancia debido al frecuente paso de la corte por la zona.

Ya en el siglo XIX sufrió las consecuencias de la Guerra de Independencia española, lo que provocó el derrumbe de la cubierta original. Los muros originales de mampostería permanecieron en pie. Tras ello, se decidió techar la iglesia mediante un artesanado de madera. Existen algunos grabados de época que reflejan el estado de la iglesia hasta el siglo XX.

Podemos observar en la siguiente imagen la conformación de la iglesia (figura 79). Estaba formada por tres naves, una principal y dos laterales, separadas por una columnata de piedra que sustentaba arcos de medio punto, que a su vez sostenían el artesanado de madera. Tras las naves podemos observar el ábside. Este estaba separado del resto de la iglesia mediante un arco y estaba cubierto mediante una bóveda nervada de cantería de estilo gótico. Parece que esta bóveda intersectaba en su parte trasera con otra bóveda nervada del mismo estilo. Por tanto, observando esta imagen se observa una combinación de estilos gótico y renacentista, lo que lleva a pensar que la iglesia pudo construirse a principios del siglo XVI.

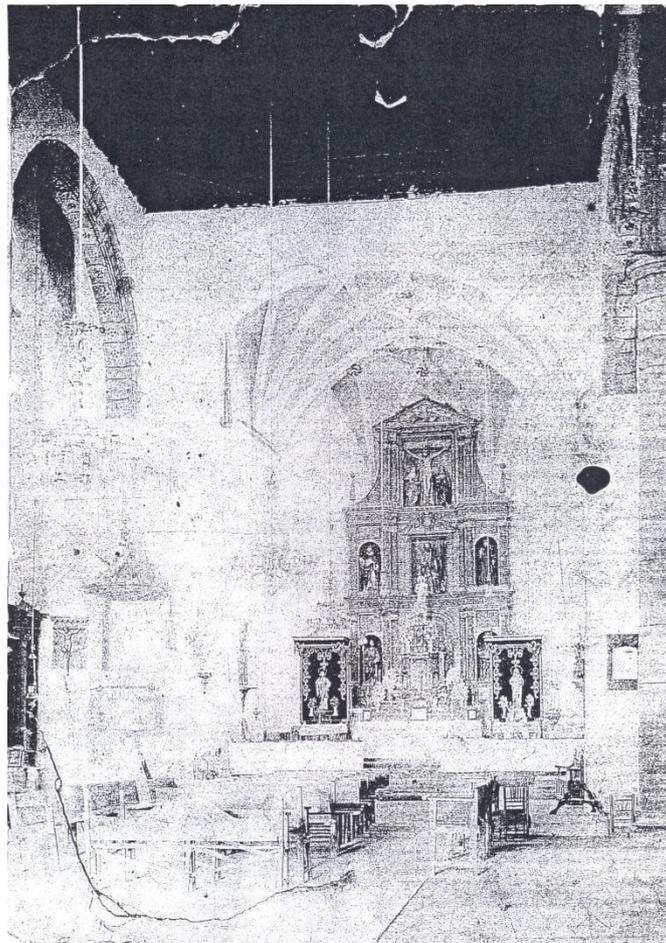


Figura 79. Grabado de época. Cedida por la parroquia de San Andrés de Villaverde.

Ya en el siglo XX la iglesia sufrió otro accidente al incendiarse la cubierta de madera. No se sabe muy bien si fue por causa del incendio o por causas proyectuales posteriores, pero las columnas y arcos de las naves desaparecieron por completo. Los muros perimetrales y el campanario permanecieron en pie.

Fue entonces cuando se proyecta y construye la cubierta de Eduardo Torroja para la Iglesia. En el proyecto se respetan las funciones primitivas de la iglesia, lo que se ve reflejado en la solución adoptada. Las naves se cubrirían mediante lóbulos elípticos que recordaban a la disposición de tres naves, y el ábside se cubriría mediante una lámina cupular. Ambos espacios se separaban mediante un arco. Para la construcción también se haría uso de los muros perimetrales que se habían salvado.

Pero fue muy poco tiempo el que esta cubierta permaneció en pie, pues durante la Guerra Civil Española, la cubierta se derrumbó debido a los bombardeos. Esta vez fue afectada toda la construcción. En la figura 80 podemos observar el estado en el que quedó la iglesia.

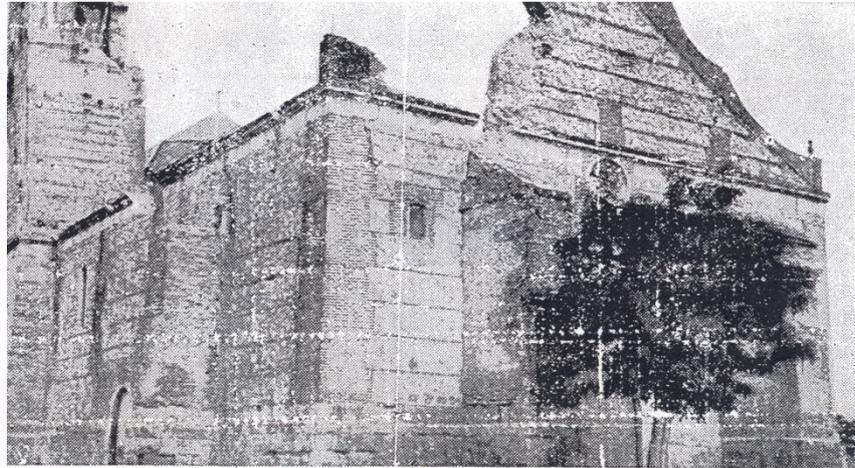


Figura 80. Fotografía tras la Guerra Civil Española.

Tras ello la iglesia volvió a ser rehabilitada. Se recompuso el campanario y la cubierta. Esta vez, la cubierta se planteaba como un híbrido de las dos situaciones que se habían planteado antes. Se seguían conservando las tres naves, separadas mediante columnas y arcos de nueva realización, los cuales sustentaban bóvedas de perfil circular. El ábside fue cubierto mediante cúpula esférica. Es interesante destacar la incorporación de los lucernarios en la cubierta resultante. En la figura 81 podemos ver el resultado tras la rehabilitación. Además en las figuras 82, 83 y 84 podemos ver el estado actual de la iglesia.



Figura 81. Imagen de época después de la rehabilitación



Figura 82. Aspecto actual del exterior de la iglesia. Todavía se puede observar en el muro exterior del ábside el perfil de apoyo elíptico de la antigua cubierta.



Figura 83. Aspecto actual del interior de la iglesia. A la izquierda observamos la entrada y el coro; a la derecha observamos la nave central y el ábside.

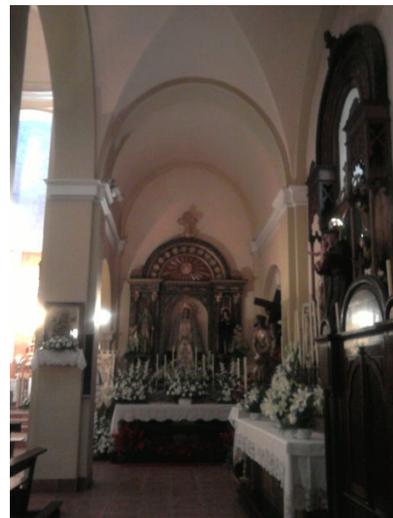
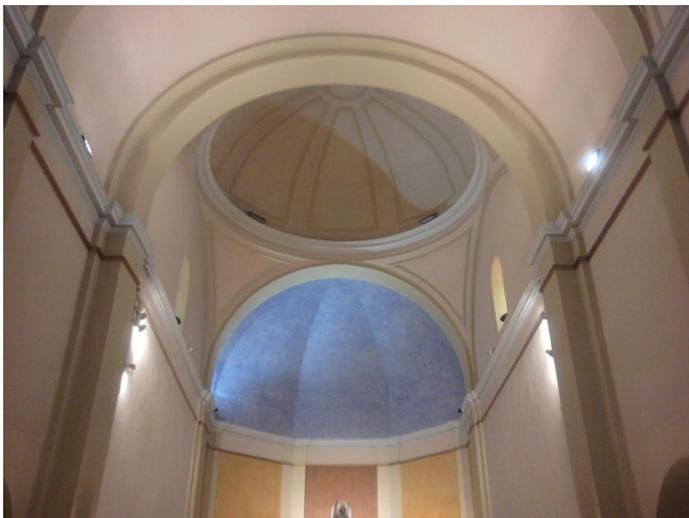


Figura 84. A la izquierda detalle de la cubierta del actual ábside, a la izquierda; A la derecha vista de una de las naves laterales.

### C. Diseño de la cubierta.

Como ya hemos visto, la primera lámina elíptica que construye Torroja fue para el cobertizo de Areneros, de 24m de largo y 8m de ancho, con un espesor de 5cm. Este proyecto fue el antecesor de la Iglesia de Villaverde.

En la siguiente imagen se presentan las dimensiones de la iglesia de Villaverde (figura 85)

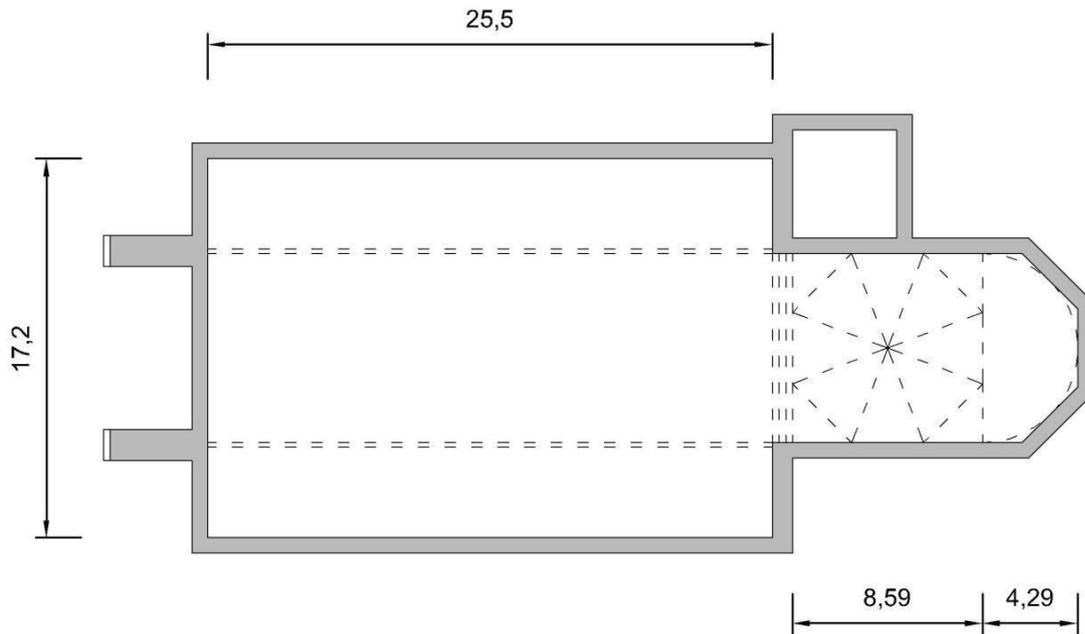


Figura 85. Esquema de la planta de la Iglesia. Cotas en metros.

La nueva cubierta para la iglesia de Villaverde se proyecta en 1934. Torroja planteo varias opciones para la resolución de la techumbre. Una de ellas estaría realizada en acero y la otra en hormigón armado. La primera consistía en una cubierta basada en cerchas de acero, entre las cuales correrían las correas metálicas. Además Torroja retomaba en esta solución la idea de soportes intermedios como separación de las naves. En la figura 86 podemos ver los esquemas realizados por el ingeniero para esta solución. Así mismo en la figura 87 se presenta el esquema de la cercha metálica.

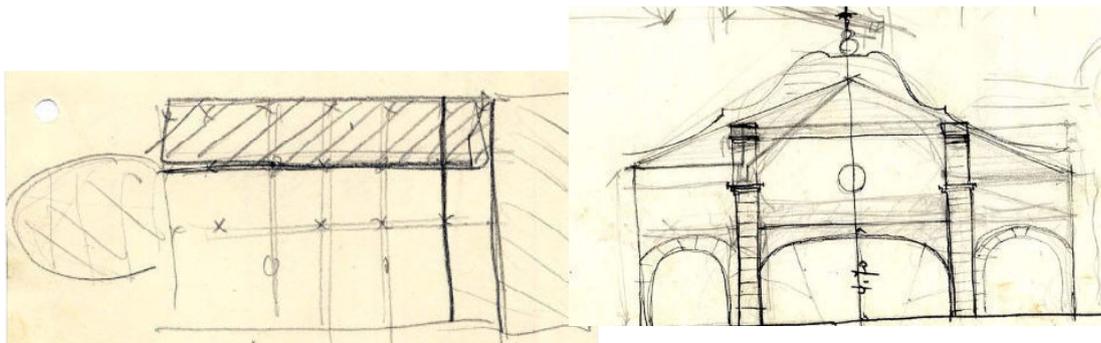


Figura 86. Croquis realizado por Torroja para la solución metálica. A la izquierda un esquema de la planta donde se pueden intuir los soportes intermedios; a la derecha un esquema que muestra la solución en alzado. (30)

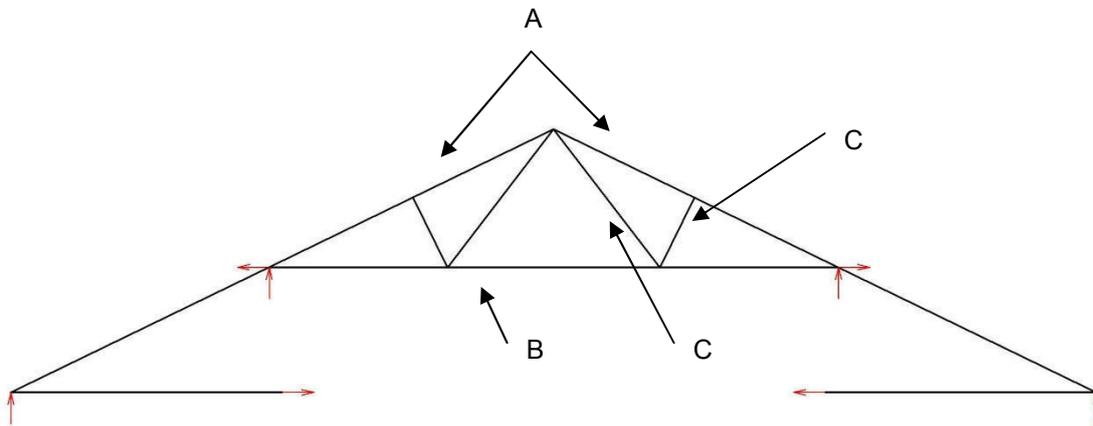


Figura 87. Esquema de la solución metálica, donde se puede apreciar las reacciones en cada apoyo. La cercha central se corresponde con la nave central, delimitada por los apoyos intermedios. A) Cordones formados por 4 ángulos de 45x45/10 y 5,2m de longitud; B) Cordón formado por 2 ángulos de 40x40/6 y 9,3m de largo; C) Cordón formado por 2 ángulos de 40x40/6 y 3m de largo; D) Cordón formado por 2 ángulos de 40x40/6 y 1,5m de longitud.

Pero finalmente se decidió por la solución en hormigón armado. La nueva cubierta consistió en una bóveda de perfil cilíndrico de 25,5m, si bien la directriz está formada por una semielipse en el centro y un cuarto de elipse en cada lateral, con un espesor de 5cm. Según los datos aportados por Joaquín Antuña en su tesis doctoral, la bóveda apoyaría únicamente en los muros extremos. Sin embargo, a la vista de los dibujos realizados por Torroja la bóveda apoyaría también en los muros laterales de la iglesia (figura 88). En la figura 89 se observa el esquema resultante del perfil de la bóveda.

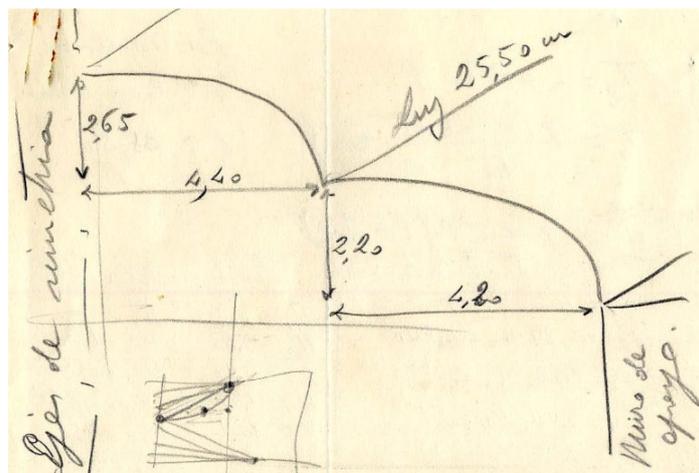


Figura 88. Esquema realizado por Torroja que describe su idea de sección transversal. (30)

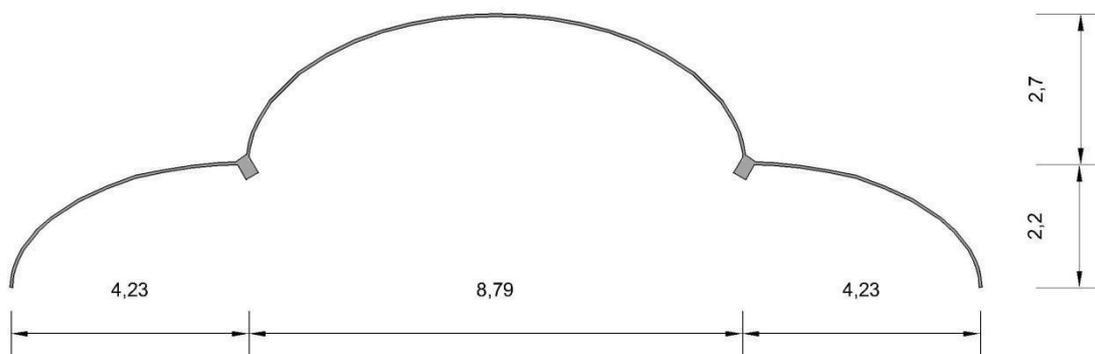


Figura 89. Sección transversal de la bóveda definitiva. Cotas en metros

En la siguiente imagen se puede apreciar el resultado espacial que se consigue mediante la bóveda resultante (figura 90). Es de especial relevancia el efecto conseguido al eliminar los soportes interiores.



Figura 90. Simulación por ordenador de la visión resultante. Hay que destacar el efecto espacial que se consiguió al suprimir los apoyos intermedios que separaban las naves.

Los esfuerzos principales de tracción se concentran en el encuentro de los lóbulos laterales con la bóveda central. La lámina está engrosada en esa línea y reforzada mediante una armadura longitudinal para absorber esfuerzos. Además de las tensiones generadas es la estructura por el funcionamiento de la lámina como viga, debe tenerse en cuenta la flexión transversal que, si bien es relativamente pequeña, produce tensiones no despreciables debido al escaso canto de la lámina.

Según los datos recogidos en las láminas de la Oficina Técnica de Torroja para este proyecto podemos establecer el armado específico para la lámina y los nervios situados en la intersección entre lóbulos. Se aporta también como dato adicional el armado para el forjado del coro y de la torre.

### **Lámina**

#### *Dirección longitudinal*

Esta armadura se reparte a lo largo de la directriz según conviene. Se sitúa en la cara superior en la zona baja del lóbulo superior y en las zonas superiores y bajas de los lóbulos laterales, y en la cara inferior en la zona alta del lóbulo semielíptico así como en las zonas medias de los lóbulos laterales. En toda la lámina esta armadura se compone de diámetros de 8mm distanciados cada 16cm, siendo simétrica según el eje central de la directriz.

### Dirección transversal

Esta armadura se reparte a lo largo de la generatriz en seis zonas, simétricas según la directriz central de la lámina. Cada una de estas zonas se establece en una distancia de 4,25m. La primera, la más cercana a los apoyos se compone de 34 diámetros de 12mm situados cada 13,5cm. La contigua se compone de 34 diámetros de 8mm situados cada 11,5cm. Y por último la zona de centro de luz se compone de 24 diámetros de 8mm situados cada 16cm. Todas estas armaduras se disponen según convenga en la cara inferior o superior de la lámina. Se sitúan en la cara superior en la zona baja del lóbulo superior y en las zonas superiores y bajas de los lóbulos laterales, y en la cara inferior en la zona alta del lóbulo semielíptico así como en las zonas medias de los lóbulos laterales.

### Nervios

La armadura longitudinal estaba compuesta en la cara superior por 3 diámetros de 15mm, y la de la cara inferior es variable y situada en la zona más baja del nervio, siendo en la zona de apoyos 3 diámetros de 35mm (figura 91A), aumentando sucesivamente a 6 diámetros de 35mm, a 9 diámetros de 35mm y finalmente en el centro de la lámina a 10 diámetros de 35mm (figura 91B). Los estribos también son variables, colocándose en la zona cercana a los apoyos 3 diámetros de 8mm cada 18cm, mientras que en el resto del nervio se colocan 3 diámetros de 8mm cada 30cm. La disposición de armaduras también es simétrica según la directriz central de la lámina.

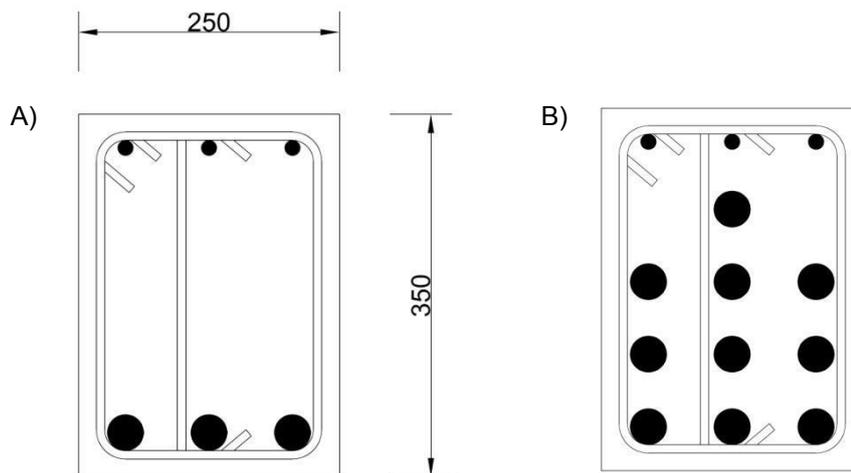


Figura 91. De izquierda a derecha: A) detalle para los apoyos; B) detalle para el centro de la lámina. Cotas en milímetros.

En las siguientes páginas podemos observar distintas imágenes recogidas de la documentación. En la figura 92 se observa el plano de armado de la lámina y los nervios. En la figura 93 se observa el plano de armado del forjado del coro y la cubierta del campanario. En la figura 94 podemos ver la cubierta en el momento de su construcción. En la figura 95 se observa el detalle de intersección, en el arco de apoyo, entre la bóveda y la cúpula. En la figura 96 encontramos la sección transversal a través de la cúpula. Y por último, en la figura 97 observamos la parte superior de la cúpula en detalle, con los ventanales en forma de cruz.

(Figura 92. Plano de armado de la lámina y los nervios) (30)

(Figura 93. Plano de armado del coro y la cubierta del campanario) (30)

02:120100103 [ A^A00( 00[ A^A00( { 0 00 A| • A^içã • A^HE

proc.

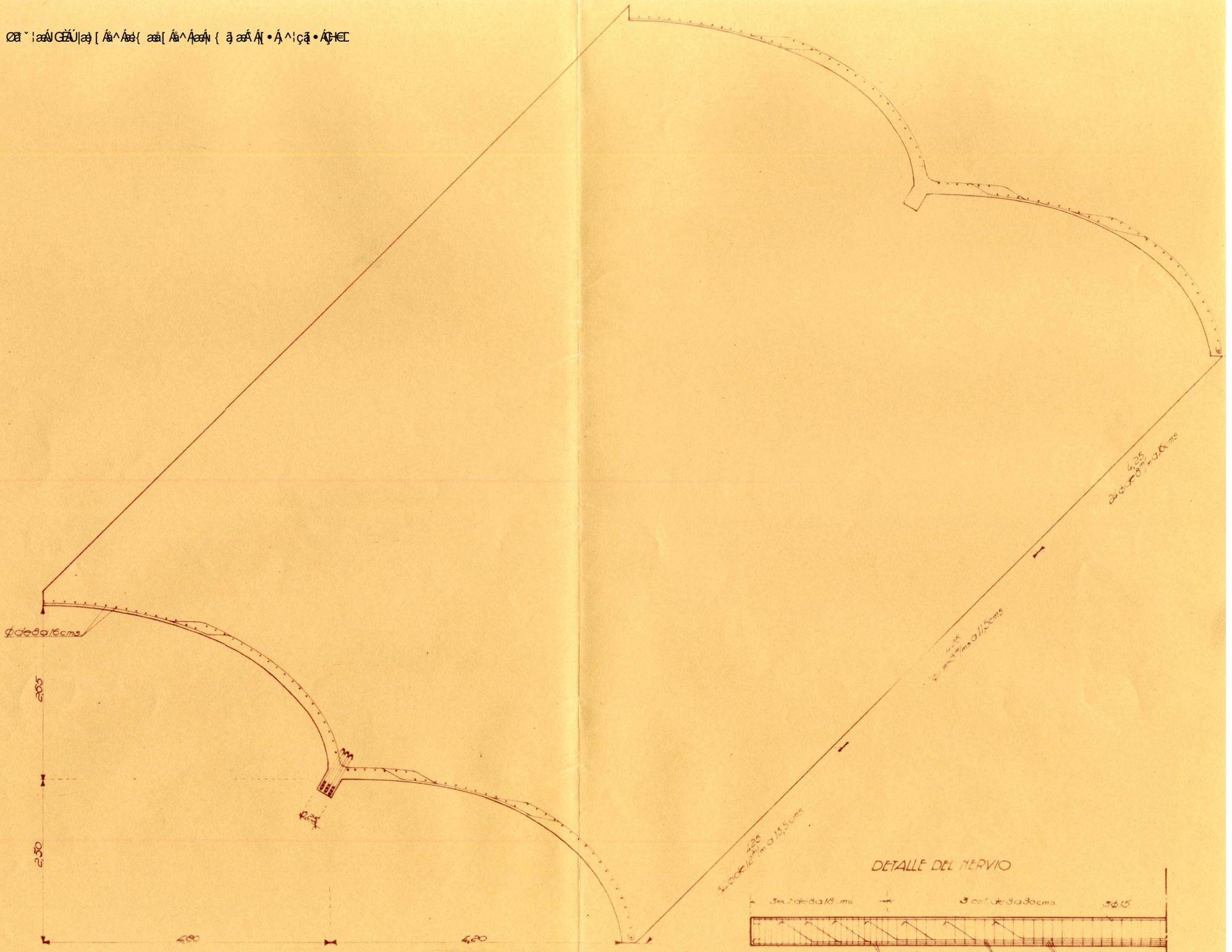
comp.

dib. Bousa.

traz. Daza

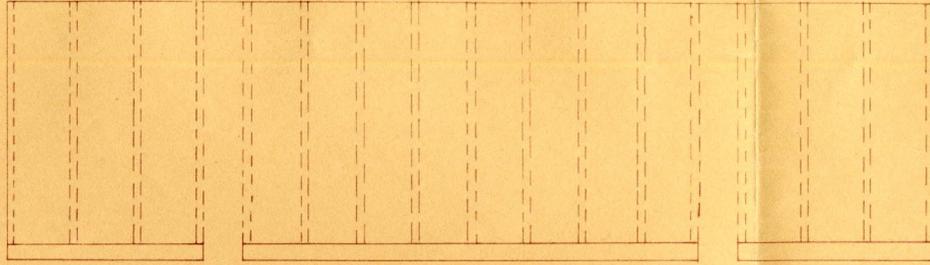
ord. 12/11/1934

Eduardo Torroja  
Oficina Técnica nº 248.202

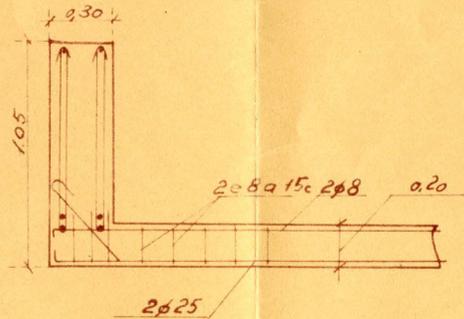
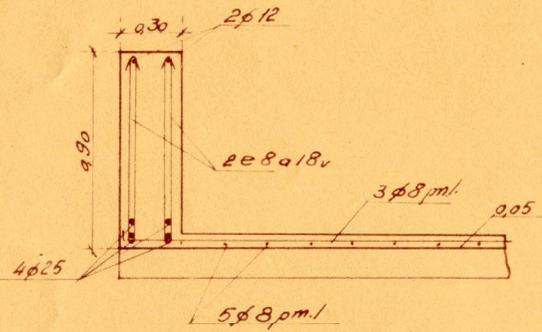
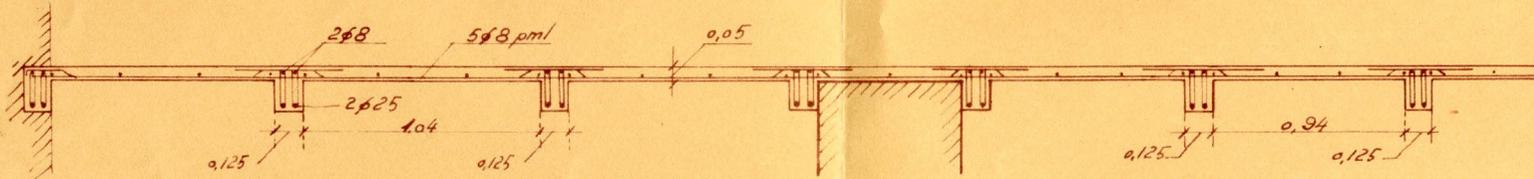
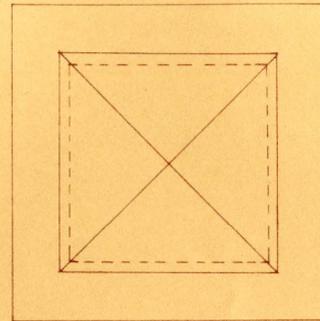


08-12-1934 [ ... ]

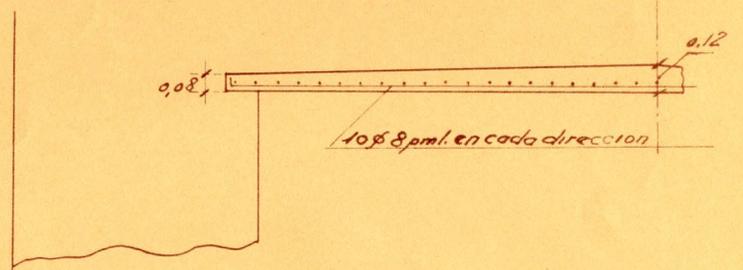
Forjado del coro



Cubierta de la torre



Detalle del forjado de la torre



Eduardo Torroja 13/11/1934  
Oficina Técnica nº 248, 203

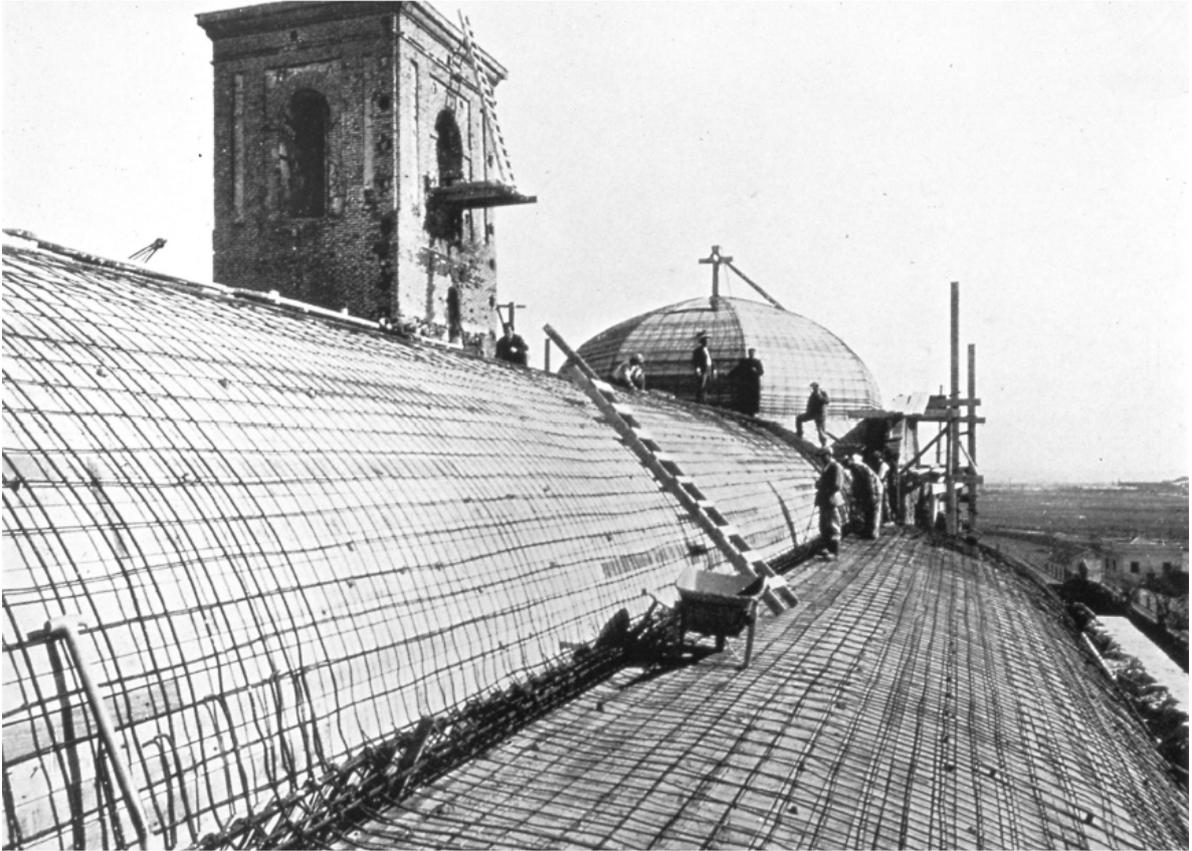


Figura 94. Fotografía tomada durante la construcción de la bóveda. Podemos ver el detalle de armado tanto de la lámina en general, como el refuerzo que se dispuso en el nervio de intersección entre lóbulos. (30)

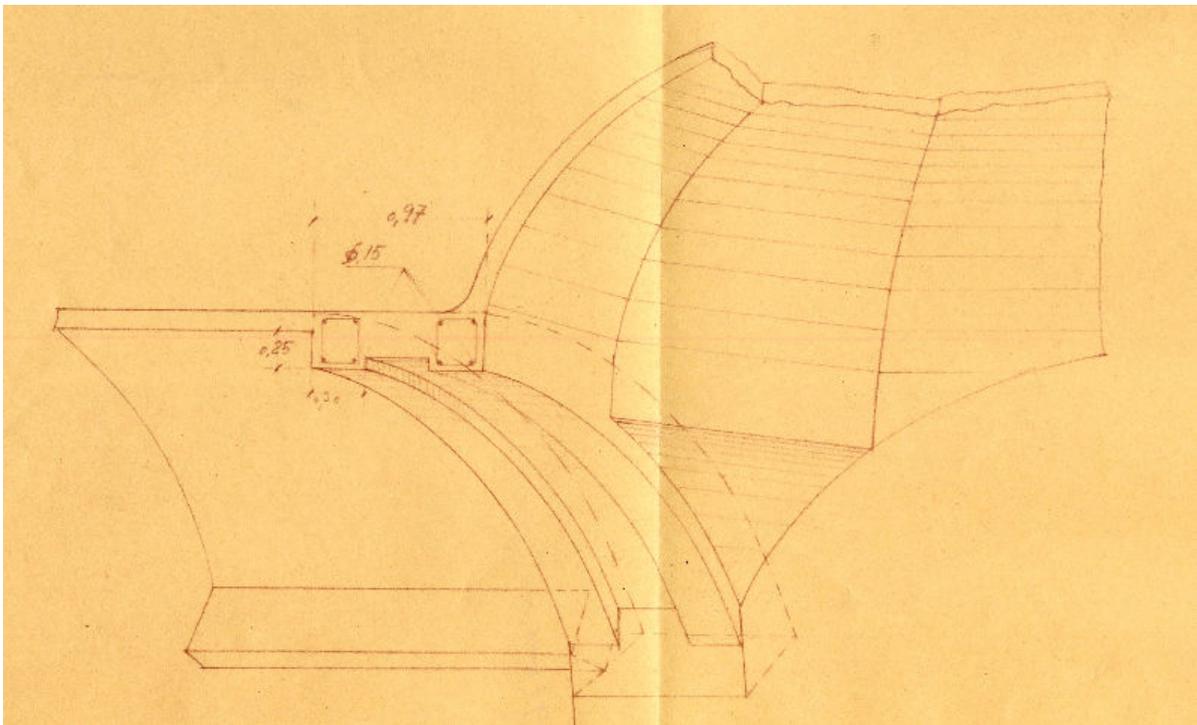


Figura 95. Intersección en detalle del lóbulo semielíptico con la cúpula del ábside. La unión se materializa con un doble nervio en forma de arco. (30)

La cúpula de la iglesia es una lámina octogonal, también de 5cm de espesor y apoyada en todos sus lados. Se previeron cuatro orificios en forma de cruz para permitir la entrada de luz natural.

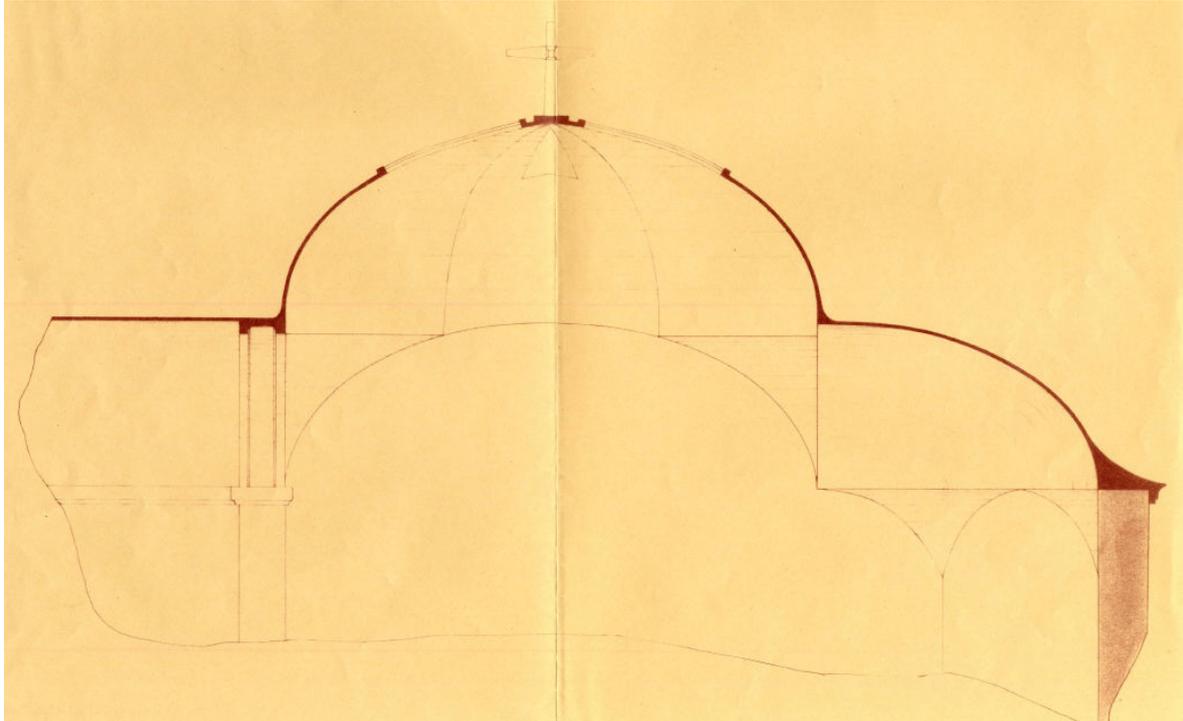


Figura 96. Sección transversal a través de la cúpula. Podemos ver que ésta se apoya tanto en los muros laterales como en el arco de intersección así como en una lámina trasera, que a su vez apoya en los muros existentes. (30)

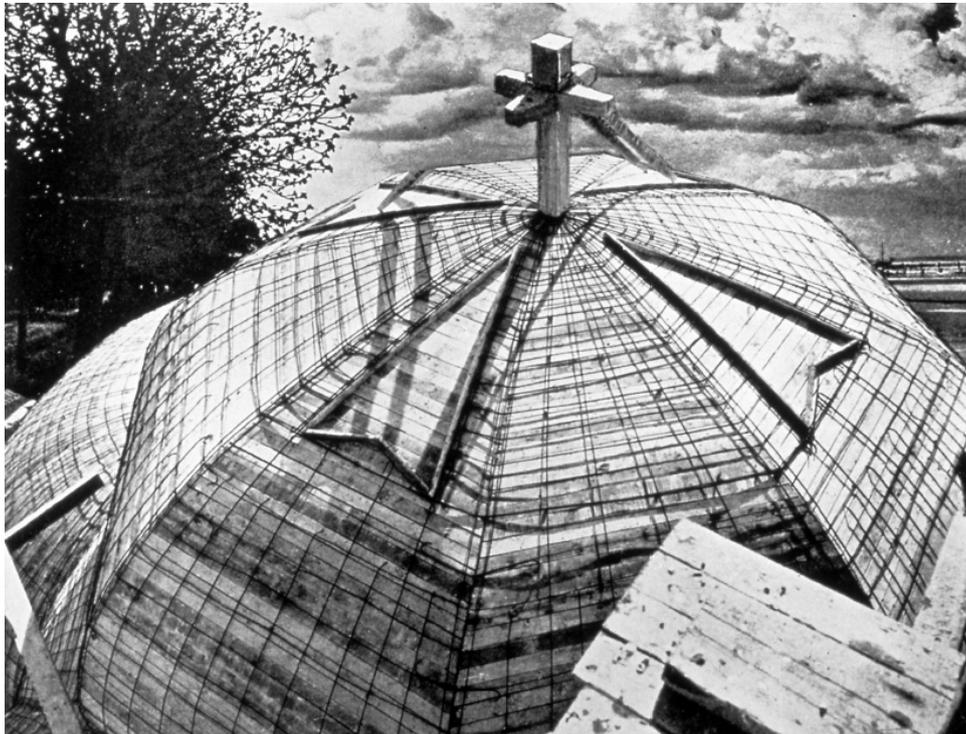


Figura 97. Fotografía de detalle de la cúpula. Podemos ver que estaba perforada para permitir la entrada de luz natural a la iglesia. (30)

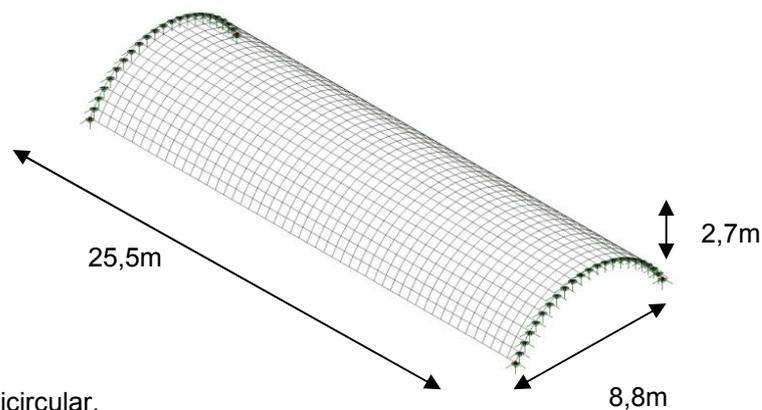
### 3. Estudio paramétrico comparativo

Antes de llevar a cabo un análisis pormenorizado de la cubierta de Villaverde, se realizará una aproximación al problema mediante un estudio paramétrico que comparará diferentes modelos geométricos utilizados a lo largo de la historia para la construcción de cubiertas. El criterio utilizado para establecer estos modelos se basan en el perfil semielíptico que Torroja utiliza para materializar el lóbulo superior de la cubierta. Todos los modelos respetan las dimensiones del lóbulo semielíptico, es decir, su longitud es de 25,5m, el ancho de 8,8m y el espesor es de 5cm. Además, todos los modelos, excepto el semicircular por su carácter geométrico, tienen la misma altura, que es de 2,7m.

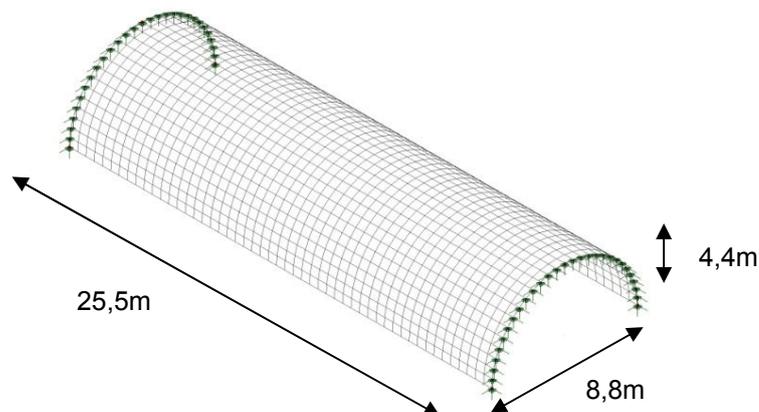
Los modelos han sido modelizados mediante el programa de cálculo basado el método de elementos finitos LUSAS. El análisis se ha realizado dentro del rango lineal, utilizando para ello el elemento QSI4, cuadrilátero, con 4 nodos y 6 grados de libertad por cada nodo, tres para los movimientos en las tres direcciones del espacio, y otros tres en los giros para cada dirección del espacio. Es un elemento adecuado para láminas finas en 3D, y que cuenta con el comportamiento de membrana así como las deformaciones a flexión de la lámina. Al adecuarse a la teoría de placa delgada se excluyen las deformaciones de corte transversal. Por otra parte solo se ha contado con una única hipótesis de carga, siendo esta la del peso propio de cada lámina para el espesor de 5cm y el material que forma la lámina, esto es, el hormigón armado. El análisis se ha llevado a cabo en servicio, sin mayorar las cargas. Por último, los apoyos se han fijado en los extremos de cada lámina, restringiendo cualquier movimiento en horizontal o vertical, pero no lo giros.

Las formas son las siguientes:

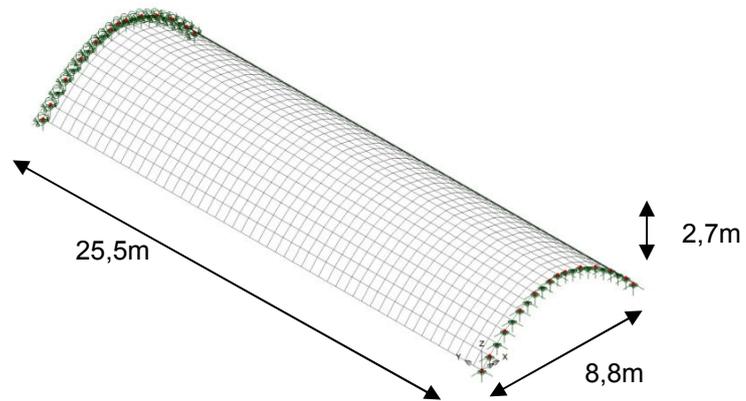
A) Perfil en casquete esférico.



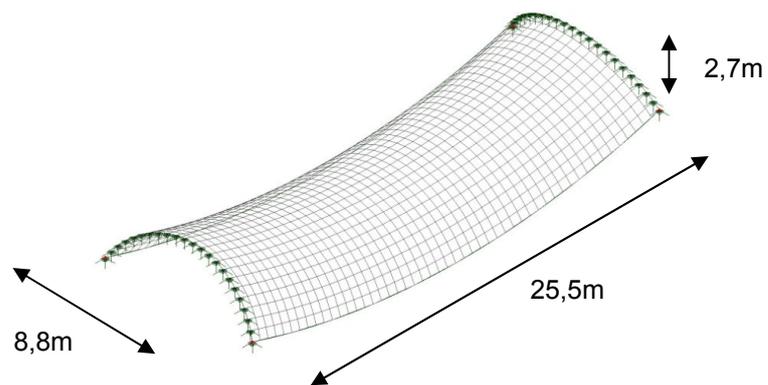
B) Perfil semicircular.



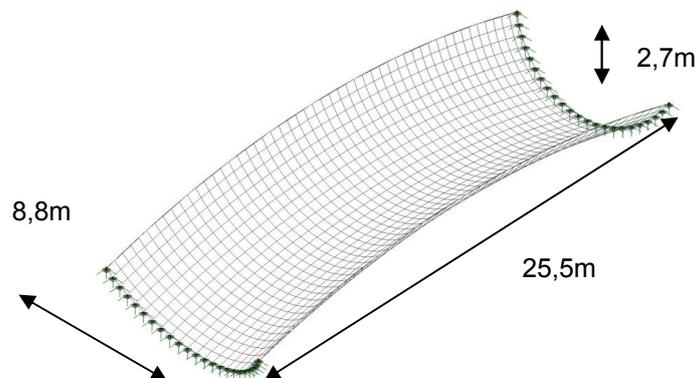
C) Perfil parabólico.



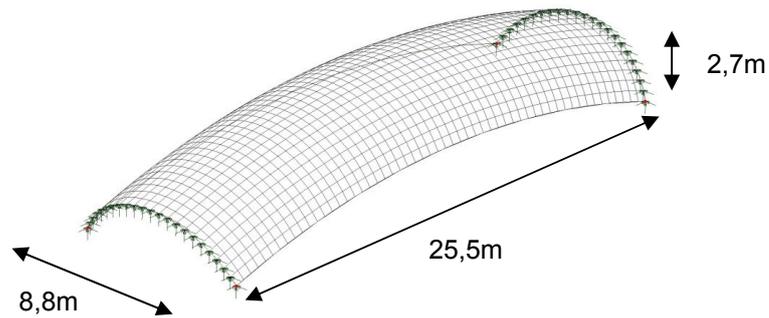
D) Perfil hiperbólico de directriz curva hacia abajo.



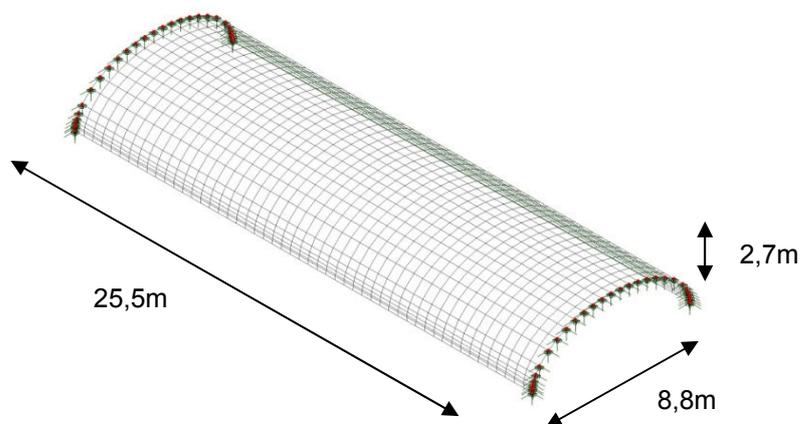
E) Perfil hiperbólico de directriz curva hacia arriba.



F) Perfil toroidal.



G) Perfil elíptico.



En primer lugar se llevará a cabo un estudio por separado de cada uno de los modelos, desde el punto de vista de los esfuerzos longitudinales, transversales, tangenciales, flectores así como de los desplazamientos verticales. A medida que progrese el estudio se descartarán formas no eficientes, hasta encontrar aquellas que resulten más efectivas desde el punto de vista estructural.

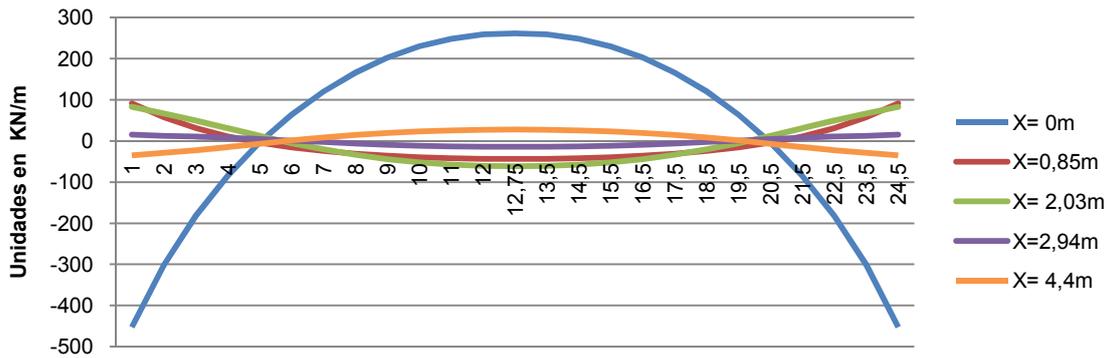
Para llevar a cabo este estudio se ha denominado X a las generatrices, tomando como origen el extremo inferior de cada lámina y tomando distancias en la dirección transversal a ella, siendo X= 0m la generatriz de borde y X= 4,4m la generatriz media; al mismo tiempo se han denominado L a las directrices, tomando como origen uno de los extremos de la lámina y tomando distancias en la dirección longitudinal de la bóveda, siendo L= 0m la directriz de apoyo, L=12,75m la directriz media de la lámina y L=25,5m la directriz de apoyo opuesta.

## A. Esfuerzos longitudinales

### *Perfil en casquete esférico*

Presenta en las directrices extremas compresiones en los bordes así como en la parte central, y tracciones en las partes intermedias. El efecto se invierte en la parte media de la lámina.

La generatriz extrema así como la superior presentan compresiones en los extremos y tracciones en la parte media de la lámina. En las demás generatrices se invierte la tendencia (gráfica 1). En las directrices L=5m y L=20,5m se producen esfuerzos nulos.



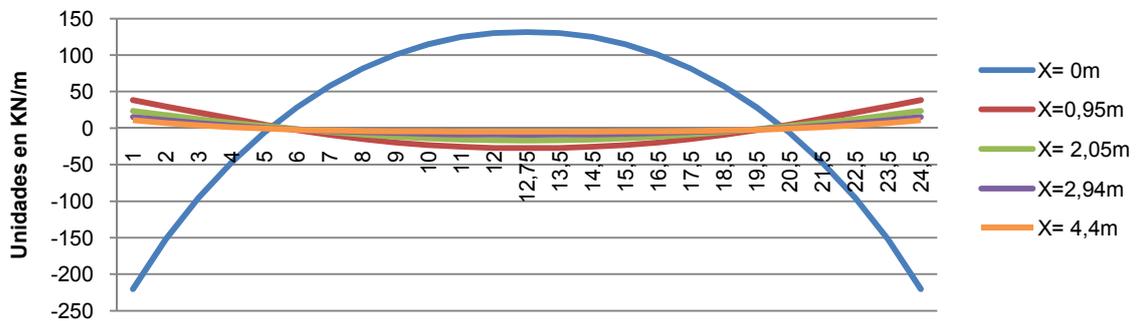
Gráfica 1. Esfuerzos longitudinales de la lámina en casquete esférico

### Perfil semicircular

Los esfuerzos son mucho menores. En las directrices extremas se producen compresiones en la parte baja, mientras en las zonas más altas se producen tracciones. Sin embargo en las directrices intermedias se producen tracciones en la parte baja y compresiones en las zonas superiores.

La generatriz de borde se caracteriza por esfuerzos de compresión en los extremos y tracciones en la parte media de la lámina. A partir de ahí la tendencia se invierte, puesto que en los extremos la lámina se tracciona y en la parte media se comprime (gráfica 2). Se debe al efecto arco producido en los extremos.

En las directrices  $L=5\text{m}$  y  $L=20,5\text{m}$  se producen esfuerzos nulos.

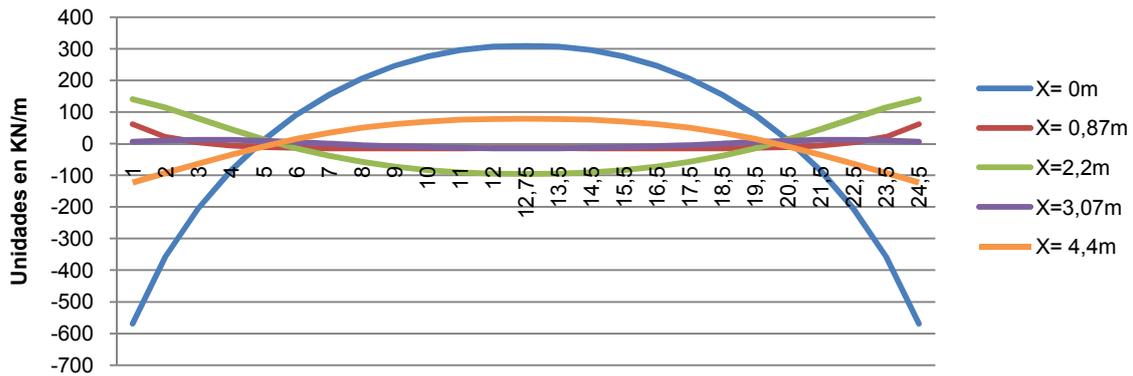


Gráfica 2. Esfuerzos longitudinales de la lámina semicircular

### Perfil parabólico

Presenta unos esfuerzos muy elevados. Al igual que en el casquete esférico, en las directrices extremas compresiones en los bordes así como en la parte central, y tracciones en las partes intermedias. El efecto se invierte en la parte media de la lámina. Pero los esfuerzos resultantes son mayores que en el casquete esférico.

Y al igual que en la lámina de perfil en casquete esférico, la generatriz extrema así como la superior presentan compresiones en los extremos y tracciones en la parte media de la lámina. En las demás generatrices se invierte la tendencia (gráfica 3). En las directrices  $L=5\text{m}$  y  $L=20,5\text{m}$  se producen esfuerzos nulos.

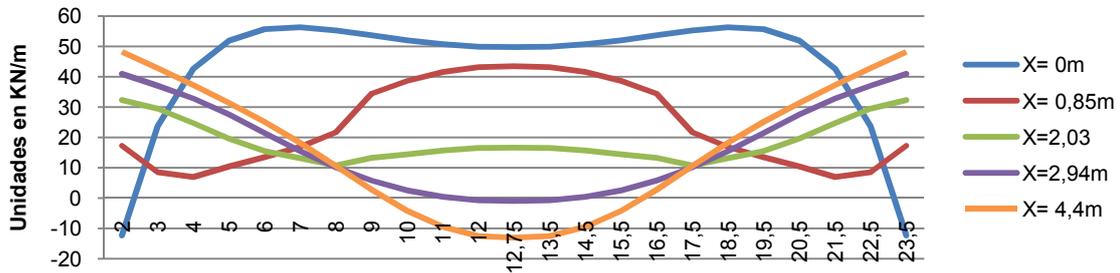


Gráfica 3. Esfuerzos longitudinales de la lámina parabólica

### Perfil hiperbólico de directriz curva hacia abajo

Presenta en las directrices extremas compresiones mínimas en la parte baja y tracciones en las zonas elevadas. En las siguientes directrices las zonas bajas ganan en esfuerzo de tracción y reducen la tracción en las zonas centrales, hasta estar comprimidas en la directriz media de la lámina.

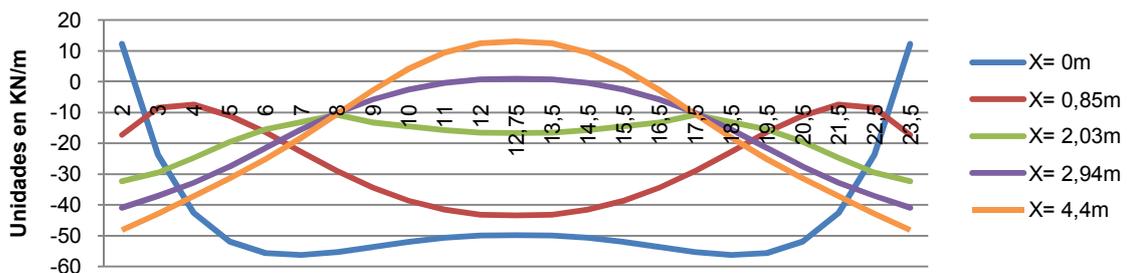
La generatriz de borde se encuentra comprimida en los extremos y traccionada en las zonas centrales de la lámina, lo que se debe al efecto arco de los extremos, crea un pseudo-empotramiento, quedando la parte media suspendida como de un cable. Las generatrices superiores ganan en tracción en la zona de apoyos y reducen la tracción en la zona media de la lámina, hasta comprimirse en la generatriz superior, debido al efecto viga que se produce (gráfica 4).



Gráfica 4. Esfuerzos longitudinales de la lámina hiperbólica de directriz curva hacia abajo

### Perfil hiperbólico de directriz curva hacia arriba

Presenta en las directrices extremas tracciones mínimas en la parte baja y compresiones en las zonas elevadas. En las siguientes directrices las zonas bajas ganan en esfuerzo de compresión y reducen la compresión en las zonas centrales, hasta estar traccionadas en la directriz media de la lámina. El efecto producido es el inverso que en el caso anterior.

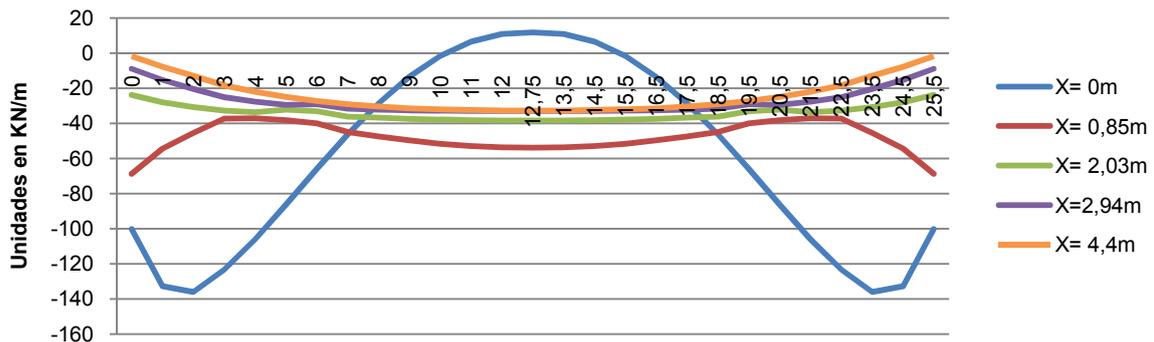


Gráfica 5. Esfuerzos longitudinales de la lámina hiperbólica de directriz curva hacia arriba

La generatriz de borde se encuentra traccionada en los extremos y comprimida en las zonas centrales de la lámina, lo que se debe al efecto arco que se produce en el borse. Las generatrices inferiores ganan en compresión en la zona de apoyos y reducen la compresión en la zona media de la lámina, hasta traccionarse en la generatriz superior, debido al efecto viga que se produce en la lámina (gráfica 5).

### Perfil toroidal

Las directrices extremas están comprimidas, y a medida que nos acercamos a la directriz media, observamos una reducción de los esfuerzos de compresión generalizado, hasta llegar a 12,75m en donde se producen tracciones en los bordes y mínima compresión en la zona superior.



Gráfica 6. Esfuerzos longitudinales de la lámina toroidal

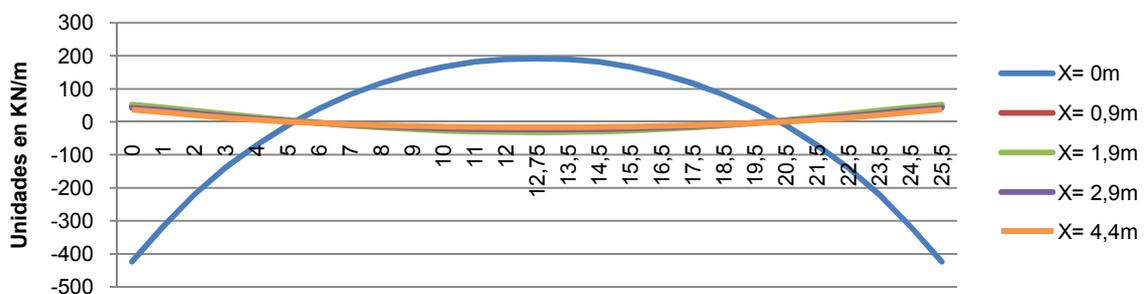
En la generatriz de borde, se producen compresiones en los extremos y tracciones en la parte media, debido al efecto viga. En las generatrices superiores se reducen las compresiones tanto en los apoyos como en la parte media, siendo mayor en esta última parte (gráfica 6).

### Perfil elíptico

En las directrices extremas se producen compresiones en la parte baja, mientras en las zonas más altas se producen tracciones. Sin embargo en las directrices intermedias se producen tracciones en la parte baja y compresiones en las zonas superiores.

La generatriz de borde se caracteriza por esfuerzos de compresión en los extremos y tracciones en la parte media de la lámina. A partir de ahí la tendencia se invierte, puesto que en los extremos la lámina se tracciona y en la parte media se comprime (gráfica 7). Se debe al efecto arco producido en los extremos.

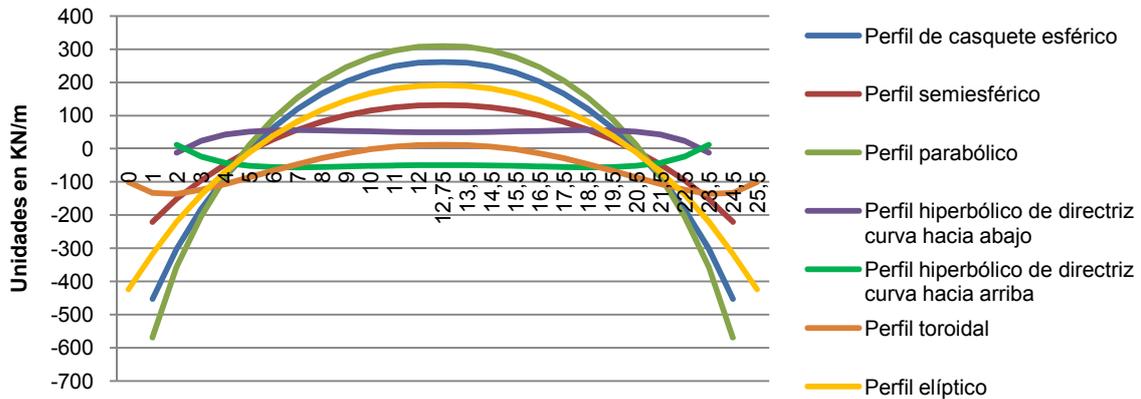
En las directrices L=5m y L=20,5m se producen esfuerzos nulos.



Gráfica 7. Esfuerzos longitudinales de la lámina elíptica pura

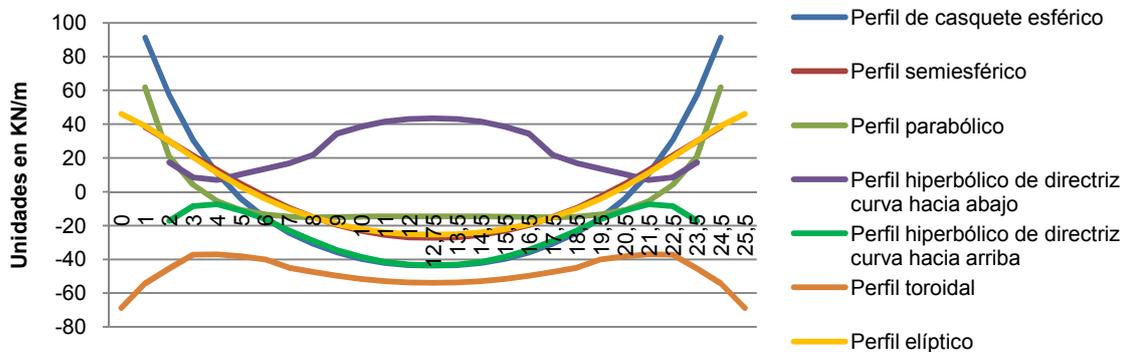
## Comparación general

En cuanto a las directrices extremas, en las zonas de borde los perfiles parabólico, de casquete esférico y elíptico presentan elevadas compresiones, mientras que el perfil toroidal, y los dos hiperboloides presentan los valores mínimos. En las zonas superiores se producen elevadas tracciones en los perfiles parabólicos y en el de casquete esférico, concentradas en los laterales, mientras que en los demás perfiles se producen esfuerzos moderados, e incluso compresiones en el perfil tórico, hiperbólico de directriz curva hacia arriba, así como en el parabólico, siendo esta última la que presenta mayores compresiones.



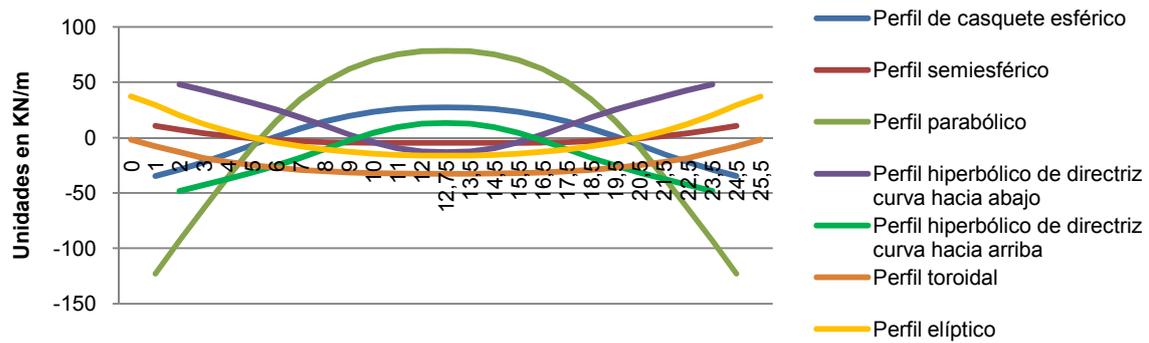
Gráfica 8. Comparación de esfuerzos longitudinales en X=0m

En las directrices intermedias, en las zonas de borde la parabólica, de casquete esférico y elíptico presentan elevadas tracciones, mientras que el perfil semicircular y el hiperbólico de directriz curva hacia abajo presentan los valores mínimos. Los demás presentan compresiones. En las zonas intermedias se producen compresiones, excepto en el parabólico donde se producen tracciones en la parte superior.



Gráfica 9. Comparación de esfuerzos longitudinales en X=0,9m

En la mayoría de modelos, en la generatriz de borde se producen compresiones en los apoyos y tracciones en la parte media de la lámina, siendo los esfuerzos más elevados para las láminas parabólica y de casquete esférico (gráfica 8). Solo el toroide y la lámina hiperbólica curvada hacia arriba están casi por completo comprimidas por esfuerzos moderados. En las generatrices intermedias la tendencia se invierte, pues en los extremos la mayoría de las láminas quedan traccionadas y en la zona media comprimidas (gráfica 9). Los mayores esfuerzos se atribuyen a la lámina parabólica y de perfil de casquete esférico. En la generatriz superior se produce el llamado efecto arco en los apoyos tanto en el perfil semicircular, en el semielíptico. Se invierte el efecto para los perfiles parabólico, en el casquete esférico y en el perfil hiperbólico con la curva hacia arriba. El toroide queda totalmente comprimido (gráfica 10).



Gráfica 10. Comparación de esfuerzos longitudinales en X=4,4m

Desde el punto de vista de los esfuerzos longitudinales, quedan descartados los perfiles en casquete esférico, parabólico por ser los que crean esfuerzos más elevados en la lámina, así como el perfil hiperbólico con la curva hacia abajo, puesto que crea en la lámina casi exclusivamente esfuerzos de tracción. Ninguna de estas formas es óptima para la función de cubierta. Por el contrario, los perfiles toroidal y hiperbólico con la curva hacia arriba son las formas que mejor aprovechan el material pétreo. Las demás láminas siguen un comportamiento homogéneo conocido por la teoría de láminas.

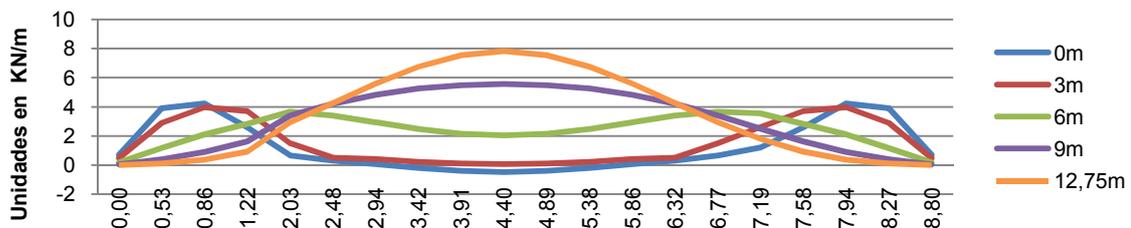
## B. Esfuerzos transversales

### Perfil semicircular

Los esfuerzos transversales o esfuerzos de arco son similares y de compresión en toda la lámina.

### Perfil hiperbólico de directriz curva hacia arriba

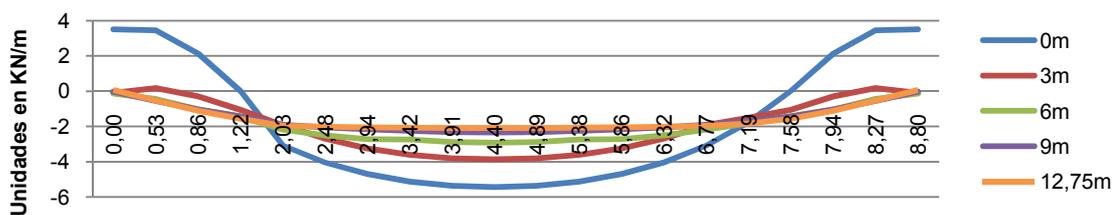
Los esfuerzos transversales son de tracción en prácticamente toda la lámina, tendiendo a aumentar conforme nos acercamos a la zona media de la lámina (gráfica 11).



Gráfica 11. Esfuerzos transversales de la lámina hiperbólica de directriz curva hacia arriba

### Perfil toroidal

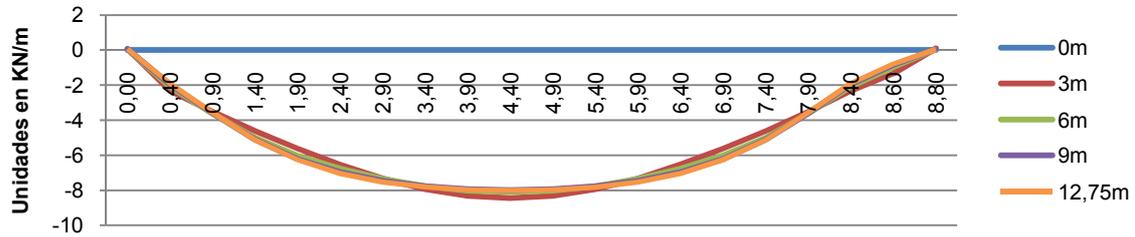
Los esfuerzos transversales o esfuerzos de arco son de compresión en prácticamente toda la lámina, siendo mayor a L=3m, excepto en los apoyos, donde existen tracciones elevadas en las zonas bajas (gráfica 12).



Gráfica 12. Esfuerzos transversales de la lámina toroidal

### Perfil elíptico

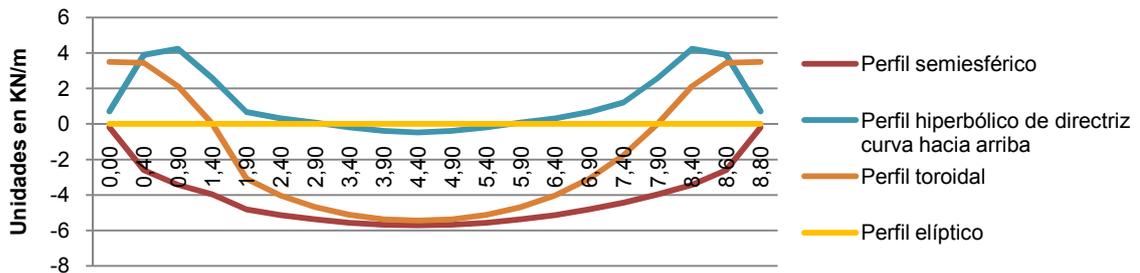
Los esfuerzos transversales o esfuerzos de arco son similares y de compresión en toda la lámina, siendo mayor a L=3m (gráfica 13).



Gráfica 13. Esfuerzos transversales de la lámina elíptica pura

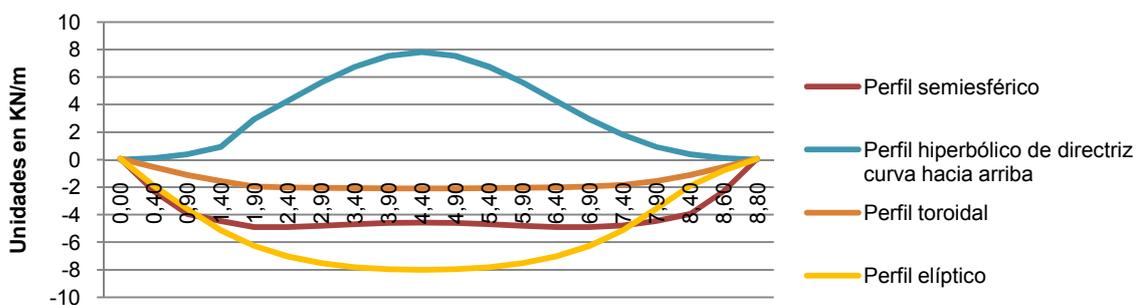
### Comparación general

El perfil que presenta mayores compresiones es el perfil semielíptico, seguido del semicircular y el toroidal. Se observa una tendencia de los dos primeros en mantener los esfuerzos constantes, sin embargo se aprecia que el semicircular tiene una tendencia a aumentar los esfuerzos en las zonas medias, lo que provoca una deformación característica de los arcos a articularse por los laterales. Se observa además que el perfil toroidal está sometido a tracciones en la zona de los apoyos (gráfica 14). Por último la lámina hiperbólica con la curva orientada hacia arriba posee esfuerzos transversales casi en la totalidad de la lámina a tracción.



Gráfica 14. Comparación de esfuerzos transversales en L=0m

Por tanto, desde el punto de vista de las tensiones transversales, queda descartado el hiperboloide con la directriz curvada hacia arriba puesto que la forma desaprovecha las propiedades del hormigón, debido a las elevadas tracciones que se producen en él (gráfica 15). Por el contrario, los perfiles semielíptico, semicircular y toroidal son las formas que mejor se adaptan al material, aunque el semicircular y el toroidal son más propensos a sufrir mayores deformaciones debido a los esfuerzos creados.



Gráfica 15. Comparación de esfuerzos transversales en L=12,75m

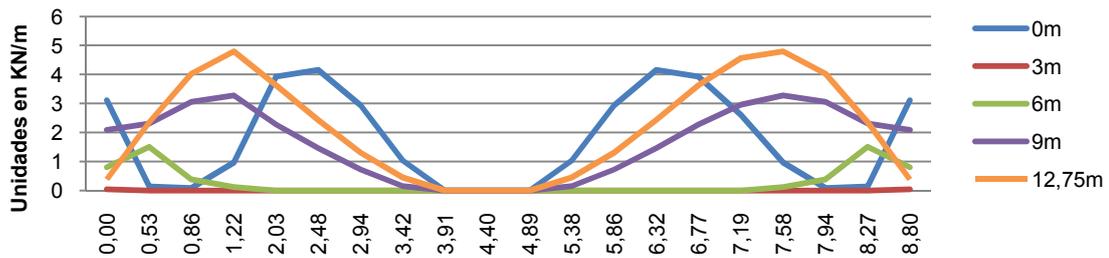
### C. Esfuerzos tangenciales

#### Perfil semicircular

Se producen mayores esfuerzos de cortante en la zona de los apoyos, como se esperaba.

#### Perfil toroidal

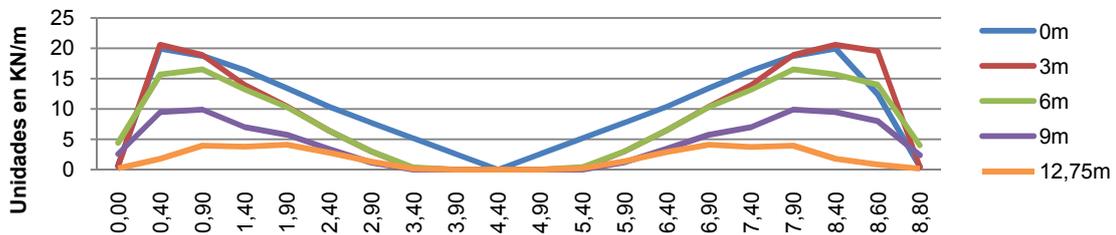
Se producen grandes esfuerzos de tracción en las zonas medias de los apoyos, como se esperaba. El cortante disminuye progresivamente hasta la zona media de la lámina, donde se producen los mayores esfuerzos de tracción, también en la zona media de la directriz (gráfica 16).



Gráfica 16. Esfuerzos tangenciales de la lámina toroidal

#### Perfil elíptico

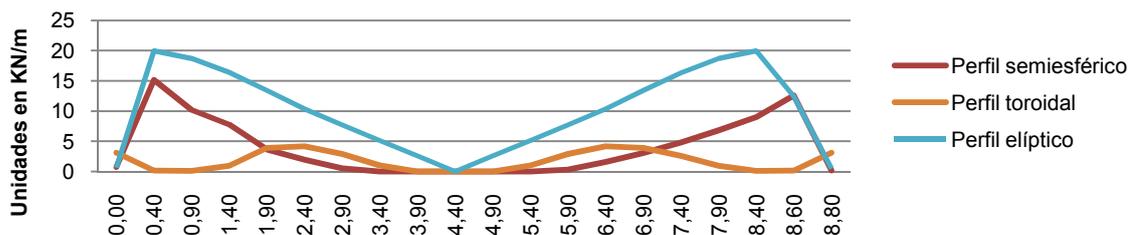
Se producen grandes esfuerzos de tracción en las zonas medias de los apoyos, como se esperaba. El cortante disminuye progresivamente hasta la zona media de la lámina (gráfica 17).



Gráfica 17. Esfuerzos tangenciales de la lámina elíptica pura

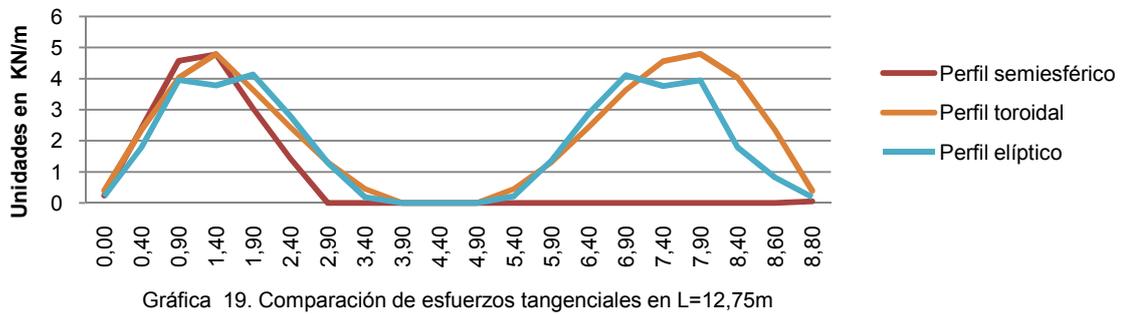
#### Comparación general

El perfil que presenta mayores tracciones tangenciales en los extremos es el semielíptico, seguido por el semicircular y el toroidal, los cuales distan mucho del primero (gráfica 18). En la zona media de la lámina el perfil semicircular presenta mínimos esfuerzos a tracción. El perfil semielíptico reduce progresivamente el cortante hasta llegar a igualar en la directriz central al del toroide (gráfica 19).



Gráfica 18. Comparación de esfuerzos tangenciales en L=0m

Por tanto, desde el punto de vista de las tensiones tangenciales, es el perfil semicircular el que mejor comportamiento presenta a cortante, seguido de los perfiles toroidal y semielíptico, siendo este último el que mayores esfuerzos tangenciales asume.

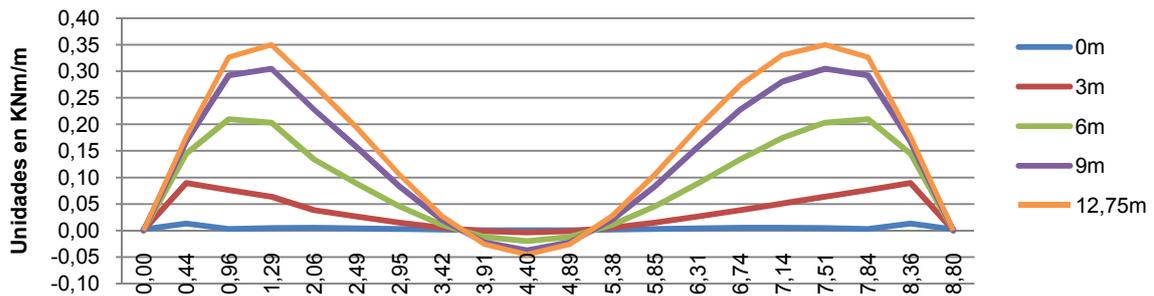


Gráfica 19. Comparación de esfuerzos tangenciales en L=12,75m

#### D. Esfuerzos flectores transversales

##### Perfil semicircular

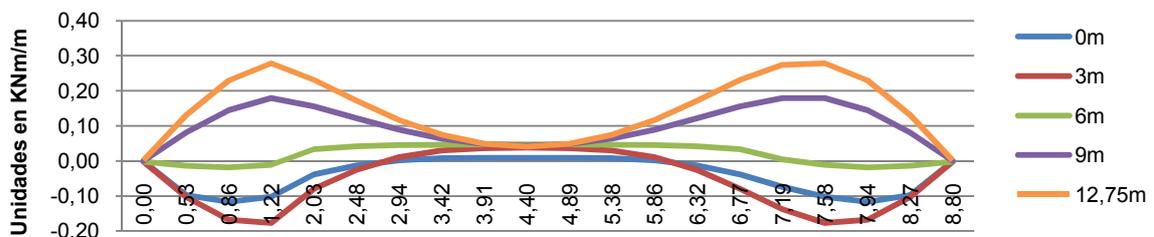
Se producen tracciones en la cara superior de la lámina, a excepción de la zona central, donde se producen en la cara inferior (gráfica 20).



Gráfica 20. Esfuerzos flectores transversales de la lámina semicircular

##### Perfil toroidal

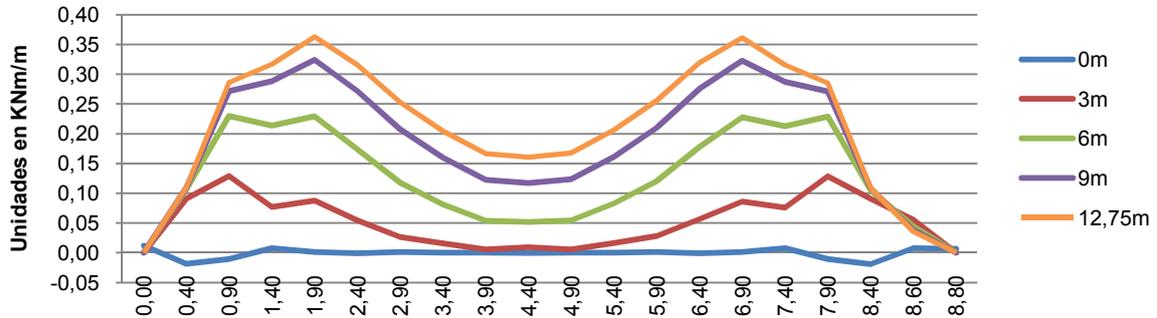
Se producen tracciones en la cara inferior de la lámina en la zona de apoyos, mientras que en la zona media se producen tracciones en la cara superior. Los momentos son mayores en las zonas medias de la directriz (gráfica 21).



Gráfica 21. Esfuerzos flectores transversales de la lámina toroidal

### Perfil elíptico

Se producen tracciones en la cara superior de toda la lámina, siendo mayor en la directriz central. El momento es mayor en la zona media de la lámina (gráfica 22).

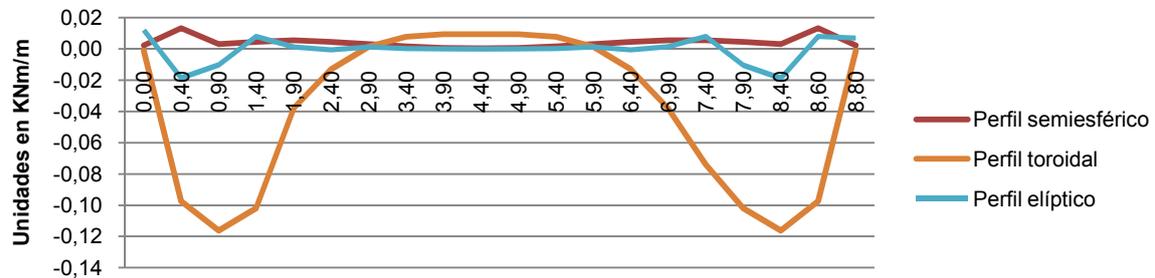


Gráfica 22. Momentos transversales de la lámina elíptica pura

### Comparación general

En la zona de apoyos, el perfil toroidal presenta mayores momentos transversales en comparación con el perfil semielíptico y semicircular, los cuales presentan unas leyes de momentos semejantes en toda la lámina (gráfica 23). En la zona intermedia el toroide presenta una ley de momentos de menor magnitud hasta asemejarse con la de los otros dos perfiles en la zona media de la lámina.

Esto hace que sean más eficaces las láminas semicircular y semielíptica que la toroidal.



Gráfica 23. Comparación de los esfuerzos flectores transversales en L=0m

## E. Esfuerzos flectores longitudinales

### Perfil semicircular

Se producen mayores esfuerzos en las generatrices de borde, con tracciones en la cara superior en la zona de apoyos y en la cara inferior en la zona media, como era de esperar según la semejanza a una viga.

### Perfil toroidal

Se producen mayores esfuerzos en las generatrices de borde, con tracciones en la cara superior en la zona de apoyos con máximos a 2m de los apoyos reales debido a que es en esa zona donde se produce un mayor efecto arco (ver gráfica Nx del toroide) y en la cara inferior en la zona media, como era de esperar según la semejanza a una viga.

## Perfil elíptico

Se producen mayores esfuerzos en las generatrices de borde, con tracciones en la cara superior en la zona de apoyos con máximos a 2m de los apoyos reales debido a que es en esa zona donde se produce un mayor efecto arco, y en la cara inferior en la zona media, como era de esperar según la semejanza a una viga.

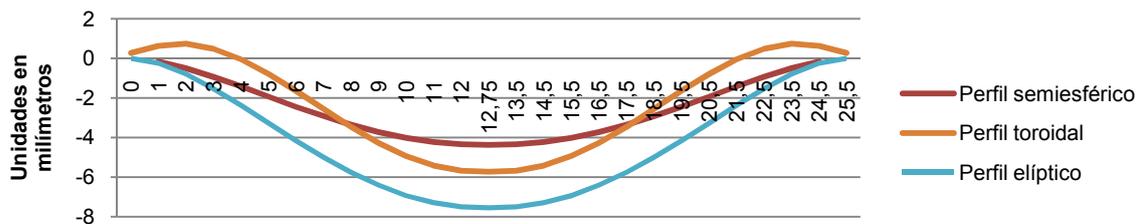
## Comparación general

En cuanto a ello, las tres láminas difieren en muy poco en los esfuerzos producidos, siendo las magnitudes muy pequeñas.

## F. Desplazamientos verticales.

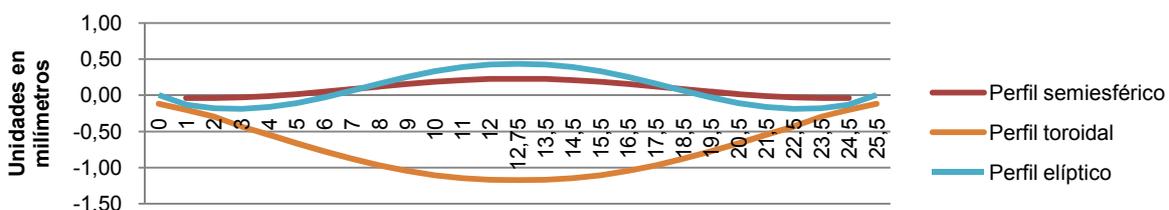
### Comparación general

En las generatrices inferiores de la bóveda se producen movimientos similares en los tres perfiles, siendo mayores en el perfil elíptico (gráfica 24). Sin embargo en zonas superiores se invierte la tendencia y los perfiles semielíptico y semicircular tienen un menor descenso que el toroidal (gráfica 25). De hecho en la generatriz superior se produce un pequeño ascenso de los perfiles elpítico y semicircular, lo que era de esperar.



Gráfica 24. Comparación de movimientos verticales longitudinales en X=0m

Por tanto, se descarta el perfil toroidal como una solución adecuada, puesto que presenta mayores desplazamientos, que los otros dos perfiles.



Gráfica 25. Comparación de movimientos verticales longitudinales en X=4,4m

## G. Comparación entre el perfil semicircular y semielíptico.

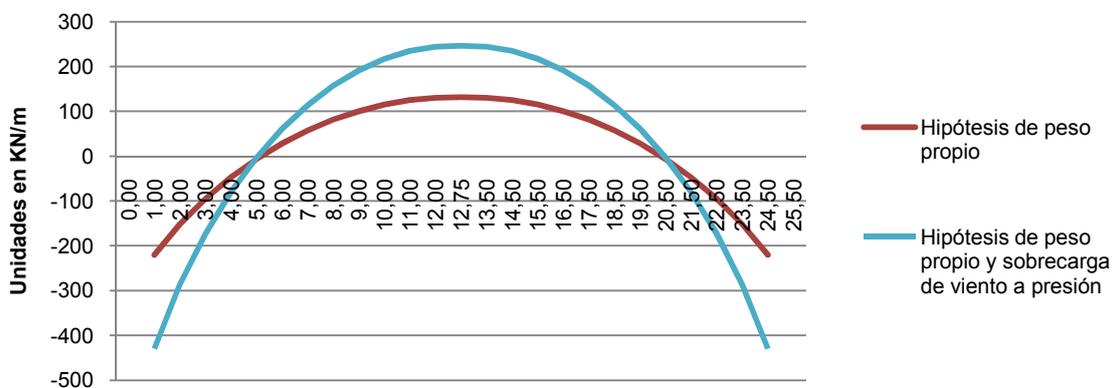
Según los datos analizados queda patente que tanto la lámina semicircular como la semielíptica son los perfiles más apropiados para este tipo estructural. En principio parecería que el semicircular es el más idóneo, pero si analizamos el comportamiento de ambos perfiles en diferentes hipótesis podemos observar qué perfil es el más idóneo ante sobrecargas imprevistas.

De nuevo los modelos propuestos han sido modelizados mediante el programa de cálculo basado en el método de elementos finitos LUSAS. El análisis se ha realizado dentro del rango lineal, utilizando para ello el elemento QSI4, cuadrilátero, con 4 nodos y 6 grados de libertad por cada nodo, tres para los movimientos en las tres direcciones del espacio, y otros tres en los giros para cada dirección del

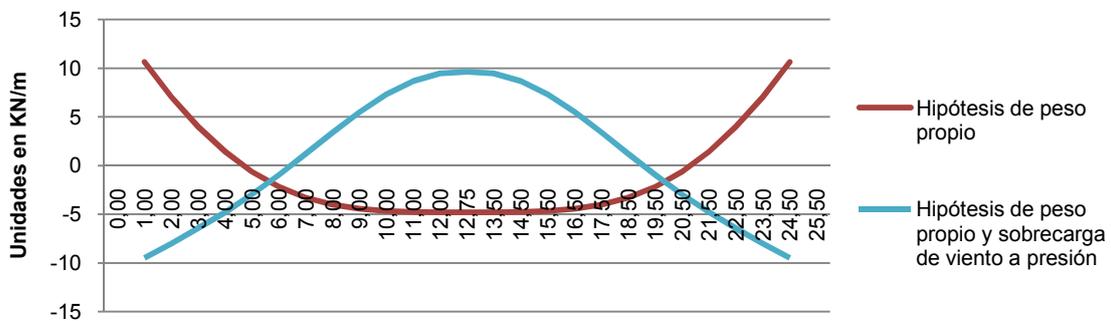
espacio. Es un elemento adecuado para láminas finas en 3D, y que cuenta con el comportamiento de membrana así como las deformaciones a flexión de la lámina. Al adecuarse a la teoría de placa delgada se excluyen las deformaciones de corte transversal. En la modelización se han utilizado varias hipótesis de carga:

- A) Peso propio: para el espesor de 5cm y el material que forma la lámina, esto es, el hormigón armado.
- B) Peso propio y una sobrecarga de viento a presión sobre uno de los laterales de la lámina de  $0,5\text{KN/m}^2$ , según normativa.

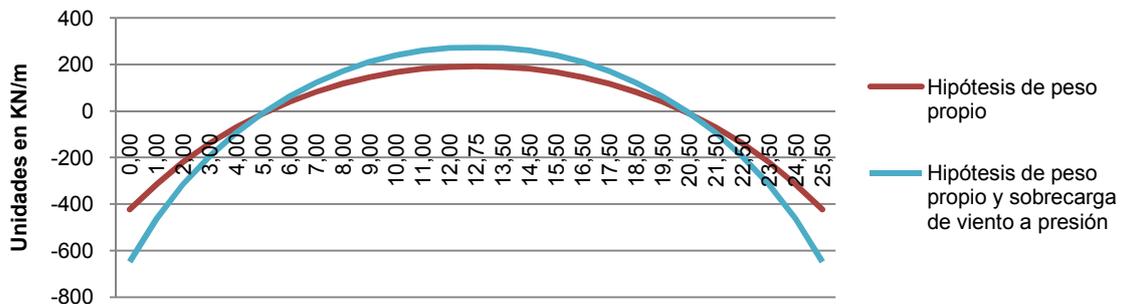
Respecto a los esfuerzos longitudinales podemos observar que ante una situación de presión del viento, en la lámina semicircular se producen cambios de carga considerables (gráfica 26), e incluso llega a invertirse la tendencia de carga normal (gráfica 27), mientras que en la lámina semielíptica se produce una menor diferencia entre esfuerzos (gráfica 28), e incluso se llegan a reducir los esfuerzos producidos (gráfica 29).



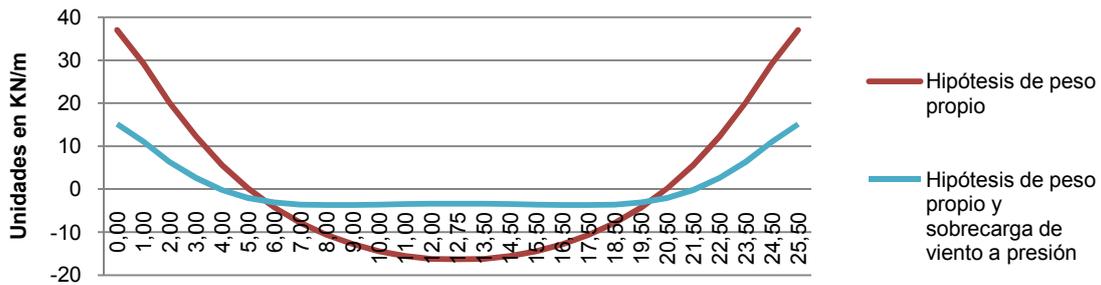
Gráfica 26. Comparación de esfuerzos longitudinales en la lámina semicircular en X=0m



Gráfica 27. Comparación de esfuerzos longitudinales en la lámina semicircular en X=4,4m

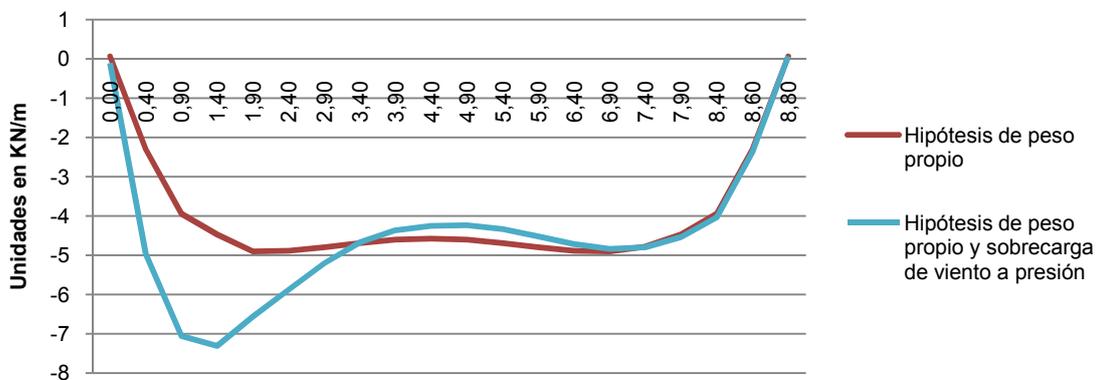


Gráfica 28. Comparación de esfuerzos longitudinales en la lámina semielíptica en X=0m

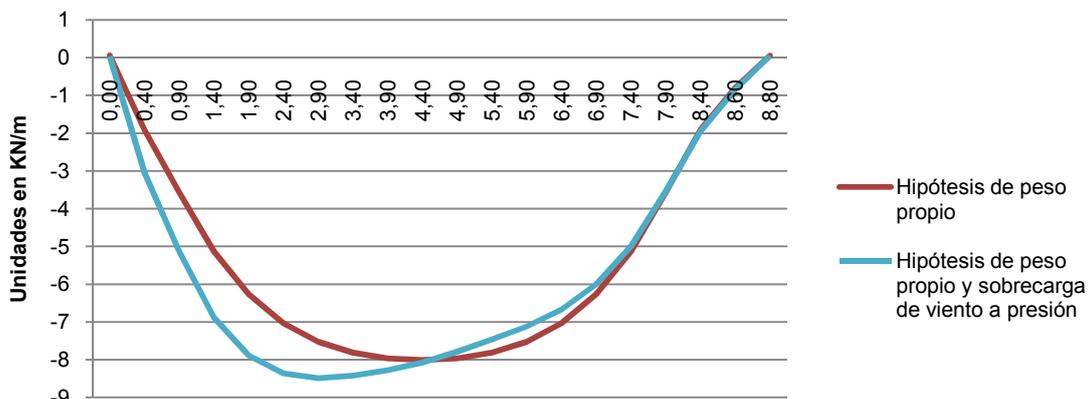


Gráfica 29. Comparación de esfuerzos longitudinales en la lámina semielíptica en L=4,4m

Si ahora comparamos los esfuerzos transversales producidos por ambas hipótesis en las láminas también observamos cambios significativos provocados por la presión del viento en la lámina semicircular (gráfica 30), al contrario que en la semielíptica, que permanece estable (gráfica 31), dada su inercia en la dirección del viento.

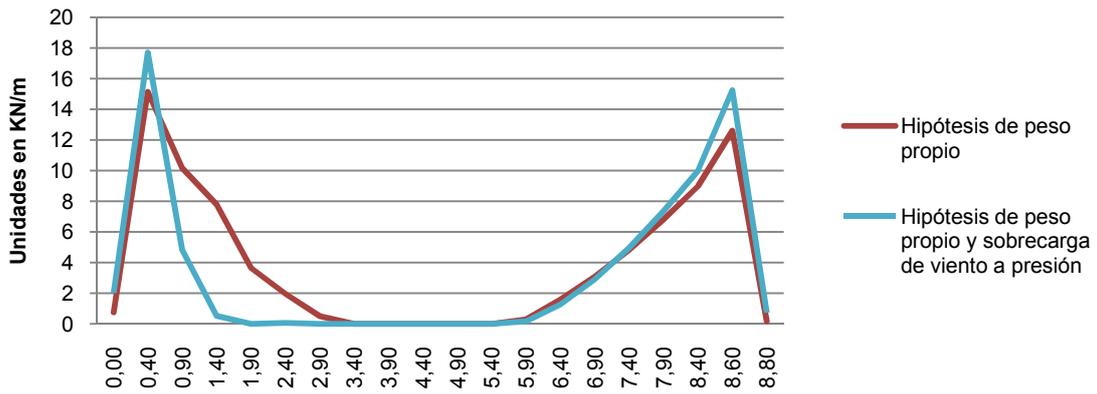


Gráfica 30. Comparación de esfuerzos transversales en la lámina semicircular en L=12,75m

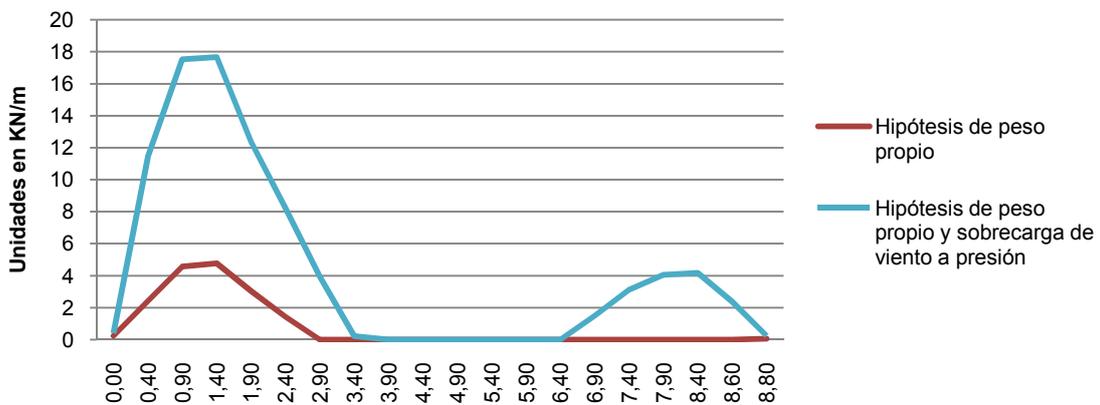


Gráfica 31. Comparación de esfuerzos transversales en la lámina semielíptica en L=12,75m

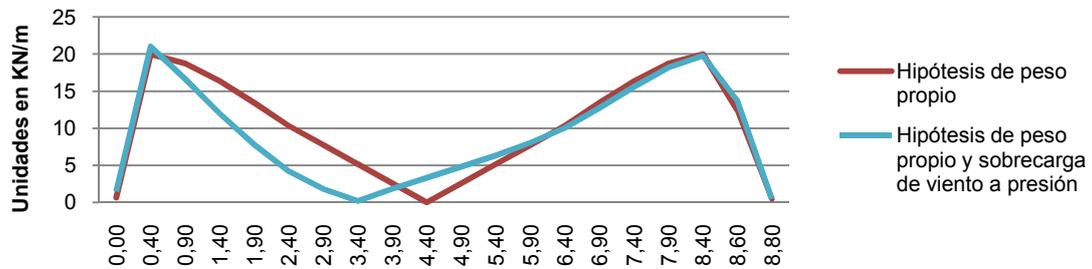
Respecto de los esfuerzos tangenciales que se producen en ambas láminas debidos a las hipótesis de carga consideradas podemos observar que en apoyos ambas láminas tienen un comportamiento similar para esfuerzos cortantes (gráficas 32 y 34). También en la directriz central de ambas láminas se obtiene un comportamiento cualitativo similar, aunque es en la lámina semicircular donde se obtienen esfuerzos de mayor magnitud (gráficas 33 y 35).



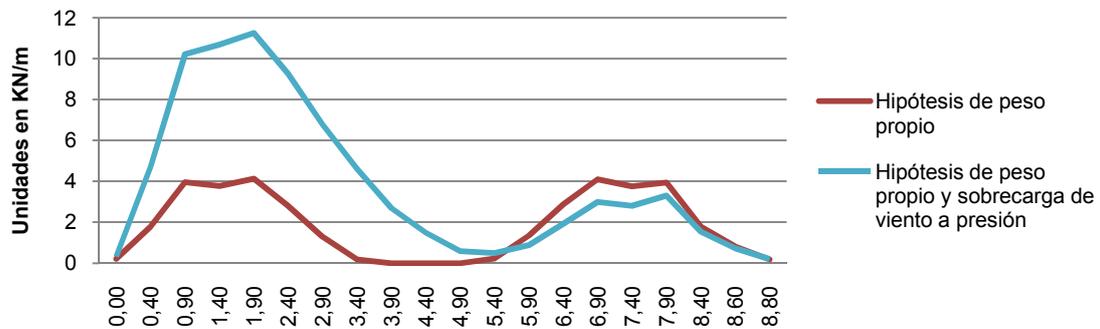
Gráfica 32. Comparación de esfuerzos tangenciales en la lámina semicircular en L=0m



Gráfica 33. Comparación de esfuerzos tangenciales en la lámina semicircular en L=12,75m



Gráfica 34. Comparación de esfuerzos tangenciales en la lámina semielíptica en L=0m



Gráfica 35. Comparación de esfuerzos tangenciales en la lámina semielíptica en L=12,75m

## H. Conclusiones.

Según los datos obtenidos del anterior análisis, el perfil elíptico es aquel que otorga resultados más eficientes. Además, mediante la solución propuesta por el ingeniero consigue resolver la cubrición de toda la iglesia con una menor altura de cubierta y además el uso de hormigón es inferior, como podemos ver considerando el volumen de material en el lóbulo central:

Volumen semicírculo:  $0,6948 \times 25,5 = 17,7 \text{m}^3$

Volumen semielipse:  $0,5657 \times 25,5 = 14,4 \text{m}^3$



#### 4. Aproximación al modelo de la cubierta de Villaverde.

Una vez establecida la eficiencia del perfil elíptico para llevar a cabo una cubierta como la de Villaverde, es necesario aproximarse a la solución que fue construida sobre la iglesia, para obtener el modelo de cálculo idóneo. Primero se establecerá una aproximación a través de un estudio primario de la bóveda mediante un modelo de viga biapoyada con las características de la bóveda completa, así como el estudio de la sección transversal de la misma. Seguidamente se plantea un análisis más detallado. Para ello se parte, por un lado de la formulación utilizada por Torroja para el cálculo de bóvedas cilíndricas rigidizadas, y por otro se proponen cuatro modelos de cubierta, según la información obtenida, donde se varían las condiciones de contorno así como las condiciones de unión entre lóbulos. De esta manera podemos comprobar la proximidad de los resultados de Torroja con los de cada modelo, y así establecer el modelo de cálculo que será utilizado para posteriores comprobaciones.

Si analizamos la cubierta como una viga simplemente biapoyada en ambos extremos de la lámina y con el perfil de la bóveda, incluidos los nervios, podemos analizar un comportamiento simplificado de la bóveda. Si la sometemos a su propio peso podemos observar un desplazamiento en centro de vano de 2,7cm (figura 98). Si Además la sometemos a una sobrecarga de viento equivalente en longitud a la carga de viento prevista para la cubierta observamos que el desplazamiento vertical no cambia, y el horizontal es prácticamente nulo. Por tanto si observamos que en las actuales normativas se establecen comprobaciones para las flechas admisibles podemos establecer una primera aproximación a la validez de la cubierta. Aunque para cubiertas se admite una flecha de L/300, utilizaremos la más restrictiva, L/500, debido a la naturaleza de la cubierta:

$$\frac{2550}{500} = 5,1\text{cm} > 2,7\text{cm} \rightarrow \text{Flecha admisible}$$

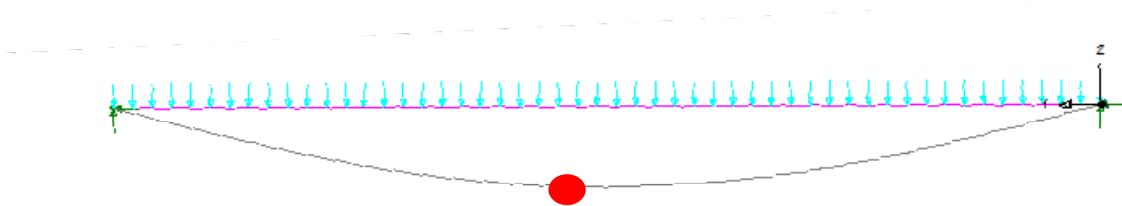


Figura 98. Deformada de la viga biapoyada. El punto rojo muestra un descenso de 2,7cm en el centro de la lámina.

Analizando la cubierta en la dirección transversal a través de una viga de un metro de ancho (figura 99), con carga uniformemente repartida y apoyos en los extremos y apoyos intermedias poco rígidos, simulando los nervios de intersección se puede observar que la deformada resultante nos aproxima a una solución que nos recuerda a la que tomó Torroja.

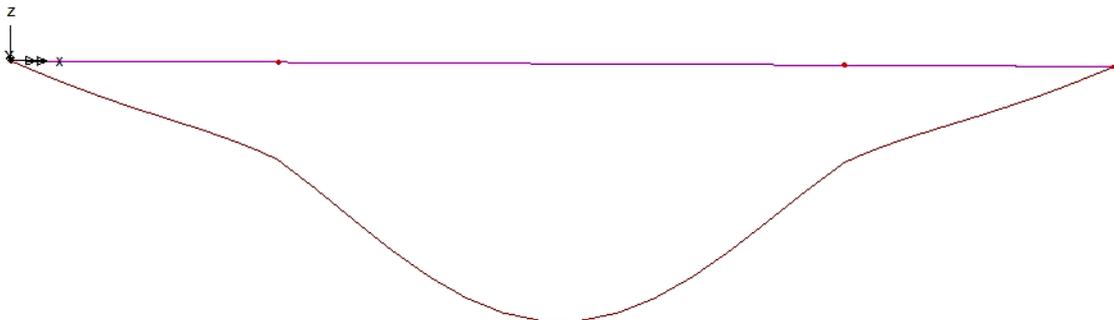


Figura 99. Deformada resultante para una viga de 1m de ancho.

Los cálculos realizados por Torroja se basan en las teorías de Dischinger y Finsterwelder. El cálculo se desarrolla de acuerdo con las teorías de mecánica elástica, admitiendo las hipótesis establecidas para esta clase de elementos por los maestros, que son:

- A) La ley de Hooke.
- B) La ley de Kirchoff
- C) Nulidad del módulo de Poisson.
- D) Nulidad de los esfuerzos de torsión y de los de flexión alrededor de la tangente de la directriz en cada elemento diferencial de la lámina a todo su espesor. Se debe a la delgadez de las láminas. No se debe confundir con la flexión longitudinal de la lámina.
- E) Uniformidad del reparto en todo el espesor de la lámina del esfuerzo cortante en el plano tangente al cilindro.
- F) Uniformidad de sección y momento de inercia alrededor de toda la generatriz en toda la lámina.
- G) Los esfuerzos debido al viento suponen esfuerzos nulos en la clave y compresiones en los faldones. Las succiones quedan despreciadas.

Para hacer más simple los cálculos se descompone el problema en dos simplificaciones, tratando por separado las cargas exteriores y por otro los efectos de borde.

Se considerará que cada uno de los lóbulos que forma la cubierta forma parte de un cilindro completo. En esta hipótesis el lóbulo trabaja como membrana. Pero la solución real no es esta. Para que así fuera habría que sustituir la parte del cilindro no existente por los corrimientos y esfuerzos en las generatrices de borde por ellas por el cálculo de cada lóbulo como membrana. Por ello se superpone al cálculo realizado como membrana los que se obtienen suponiendo nulos las cargas exteriores y aplicando en las generatrices de borde un sistema de esfuerzos y deformaciones iguales a la diferencia entre los que da para ella los cálculos de membrana y los que realmente producen las condiciones de sustentación.

En los cálculos realizados por el ingeniero se han utilizado las siguientes hipótesis de carga:

- C) Peso propio de la lámina de  $1,2\text{KN/m}^2$
- D) Peso propio de  $1,2\text{KN/m}^2$  y una sobrecarga de nieve de  $0,65\text{KN/m}^2$
- E) Peso propio y una sobrecarga de viento a presión (en la documentación encontrada sobre los cálculos realizados por Torroja no se ha encontrado un valor característico de sobrecarga de viento, así que se adopta la que actualmente se utilizaría según la normativa, que es de  $0,5\text{KN/m}^2$ )

Cada carga se introduce en las formulas propuestas por Torroja, según las ecuaciones que se reflejan seguidamente en este documento.

Por otra parte, mediante el cálculo basado en elementos finitos comprobaremos la proximidad de estos cálculos a la realidad. Comprobaremos primero por separado cada uno de los lóbulos según las hipótesis propuestas por Torroja, para luego pasar a un modelo aproximado de la cubierta definitiva, para ver qué modelo de cálculo es el más aproximado.

De nuevo los modelos propuestos han sido modelizados mediante el programa de cálculo basado en el método de elementos finitos LUSAS. El análisis se ha realizado dentro del rango lineal, utilizando para ello el elemento QSI4, cuadrilátero, con 4 nodos y 6 grados de libertad por cada nodo, tres para los movimientos en las tres direcciones del espacio, y otros tres en los giros para cada dirección del espacio. Es un elemento adecuado para láminas finas en 3D, y que cuenta con el comportamiento de membrana así como las deformaciones a flexión de la lámina. Al adecuarse a la teoría de placa delgada se excluyen las deformaciones de corte transversal. Además se ha utilizado el elemento BMS3 en los modelos que incorporan los nervios de intersección. Es un elemento viga en 3D con tres nodos, donde el tercer nodo se usa para definir el plano XY. Tiene 6 grados de libertad en cada nodo extremo, tres en las direcciones del espacio, y otros tres en los giros para cada dirección del espacio. Incluye las deformaciones de corte. En la modelización se han utilizado varias hipótesis de carga:

- F) Peso propio: para el espesor de 5cm y el material que forma la lámina, esto es, el hormigón armado (figura 100A).
- G) Peso propio y una sobrecarga de nieve de  $0,65\text{KN/m}^2$  (figura 100B).
- H) Peso propio y una sobrecarga de viento a presión sobre uno de los laterales de la lámina de  $0,5\text{KN/m}^2$ , según normativa (figura 100C).

Las cargas utilizadas se han utilizado en servicio y por lo tanto no han sido mayoradas.

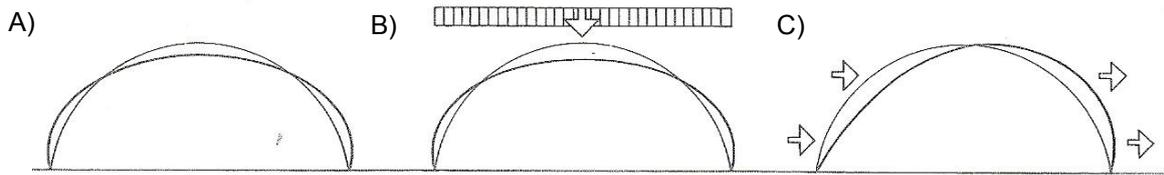


Figura 100. Hipótesis consideradas: A) Peso propio; B) Peso propio y sobrecarga de nieve; C) Peso propio y sobrecarga de viento. (11)

Los apoyos se han fijado según para cada modelo, en los extremos o bien en todo el contorno, restringiendo cualquier movimiento en horizontal o vertical, pero no lo giros. Se ha considerado la fricción que existía entre la propia lámina y los muros de la iglesia, la cual produciría una restricción de movimientos horizontales.

Para llevar a cabo este estudio se ha denominado X a las generatrices, tomando como origen el extremo inferior de uno de los lóbulos laterales y tomando distancias en la dirección transversal a la lámina, siendo X= 0m la generatriz de borde y X= 4,19m la generatriz de intersección entre lóbulos y X= 8,6m a la generatriz superior; al mismo tiempo se han denominado L a las directrices, tomando como origen uno de los extremos de la lámina y tomando distancias en la dirección longitudinal de la bóveda, siendo L= 0m la directriz de apoyo, L=12,75m la directriz media de la lámina y L=25,5m la directriz de apoyo opuesta.

Atendiendo a los esfuerzos longitudinales de la semielipse calculada por Torroja (gráfica 36), podemos observar que tanto para la hipótesis de peso propio como para la que incorpora la sobrecarga de nieve, el ingeniero obtenía unas leyes de esfuerzos de solo compresión. La directriz más solicitada era la intermedia. Pero los esfuerzos máximos se producían en las zonas medias de las directrices. En cuanto a la hipótesis de viento observamos que la zona afectada por el viento se encuentra más comprimida que la parte opuesta. La directriz más solicitada es la central, produciéndose en toda la lámina un mínimo de compresión en torno a la generatriz superior, mientras que la generatriz mas comprimida es la inferior, mientras que la menos comprimida es la superior. La misma tendencia se observa en cuanto los lóbulos laterales.

$$T1 = \left[ \frac{g}{R} \cos \delta - \frac{V}{R} (\cos^2 \delta - \sin^2 \delta) \right] x (x^2 - Lx)$$

Siendo:

*T1: Esfuerzo longitudinal por unidad de longitud (KN/m).*

*g: Carga vertical.*

*V: Carga de viento.*

*R: Radio de curvatura.*

*L: Longitud de la lámina.*

*X: Directriz considerada.*

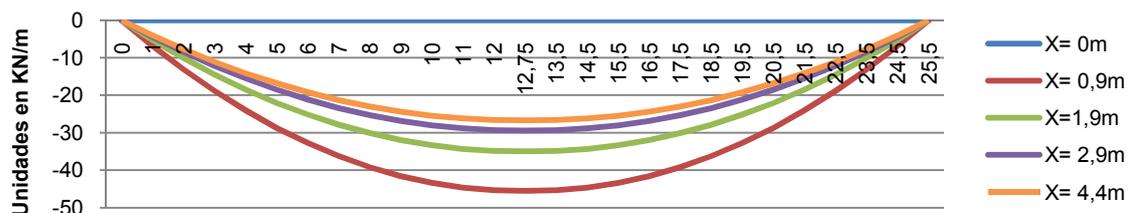
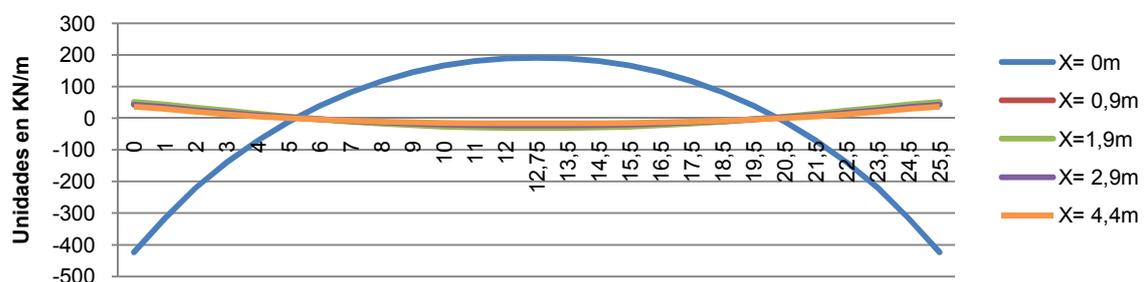
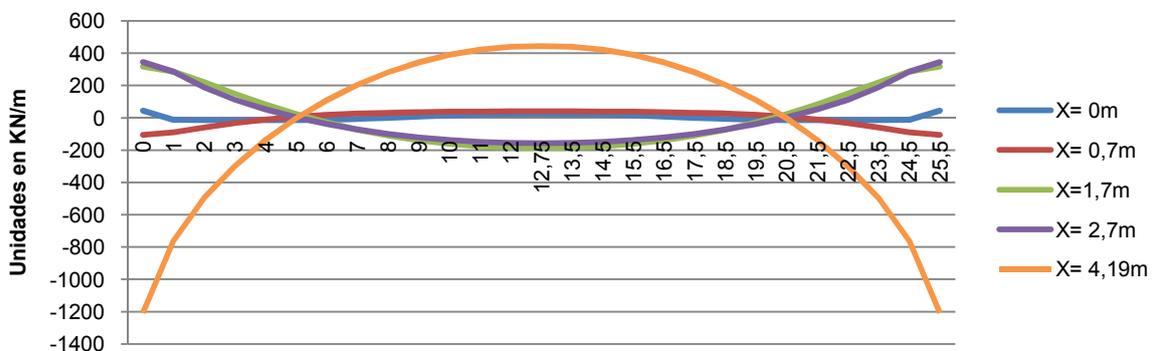


Tabla 36. Esfuerzos longitudinales de la lámina semielíptica calculados por Torroja (H. peso propio)

Si ahora observamos los resultados obtenidos mediante el programa de elementos finitos observamos un comportamiento muy distinto de la lámina en la dirección longitudinal. En la semielipse podemos ver, tanto en la hipótesis de peso propio (gráfica 37) como en aquella con sobrecarga de nieve, que en las directrices cercanas a los apoyos existen compresiones en las zonas bajas y tracciones en las superiores. En la zona media de la bóveda el efecto se invierte, produciéndose tracciones en la parte inferior y compresiones en la zona superior. Por tanto queda que la generatriz de borde queda comprimida en los apoyos debido a un efecto arco producido en la lámina y traccionada en la parte media, según el efecto viga. En generatrices superiores se invierte la situación atendiendo a las causas expuestas. La misma tendencia se observa en la hipótesis que considera la sobrecarga de presión del viento, solo que en este caso la parte expuesta al viento queda más solicitada que la expuesta. En cuanto al lóbulo formado por un cuarto de elipse (gráfica 38), podemos observar que tanto en la generatriz superior como inferior se producen compresiones en los apoyos y tracciones en la parte media, siendo en la parte superior los esfuerzos mucho mayores. Esto se debe a la discontinuidad que se produce en la bóveda, creándose un nuevo borde que hace que el comportamiento de la lámina cambie. Las demás generatrices se comportan como en la semielipse.



Gráfica 37. Esfuerzos longitudinales de la lámina semielíptica calculados mediante LU SAS (H. peso propio)



Gráfica 38. Esfuerzos longitudinales de la lámina de cuarto de elipse calculada mediante LUSAS (H. peso propio)

Atendiendo a los esfuerzos transversales de la semielipse calculada por Torroja (gráfica 39), podemos observar que toda la bóveda se encuentra comprimida por la misma ley de esfuerzos en cualquiera de las hipótesis consideradas por Torroja, situándose el máximo en la generatriz superior. La misma tendencia se observa en cuanto a los esfuerzos en los lóbulos laterales.

$$T2 = -R[g \cos \delta + V \sin^2 \delta]$$

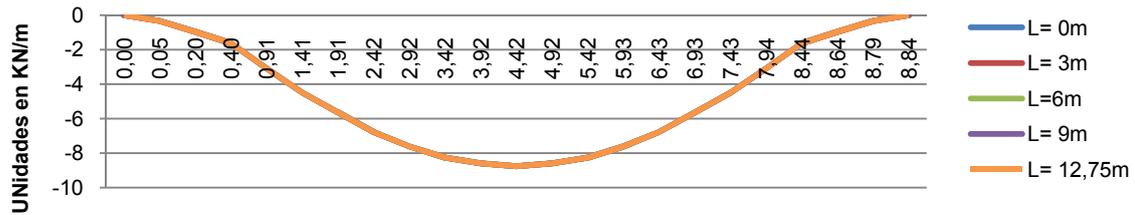
Siendo:

$T2$ : Esfuerzo transversal por unidad de longitud (KN/m).

$g$ : Carga vertical.

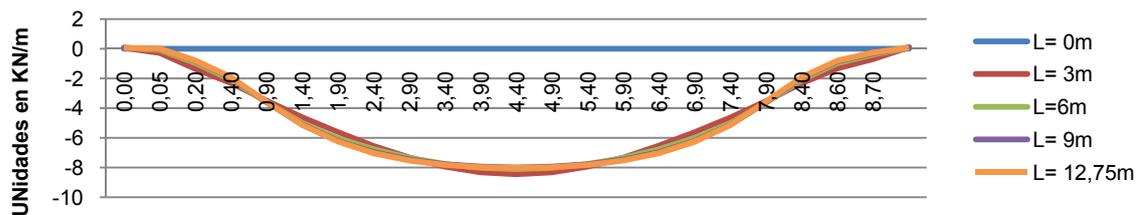
$V$ : Carga de viento.

$R$ : Radio de curvatura.

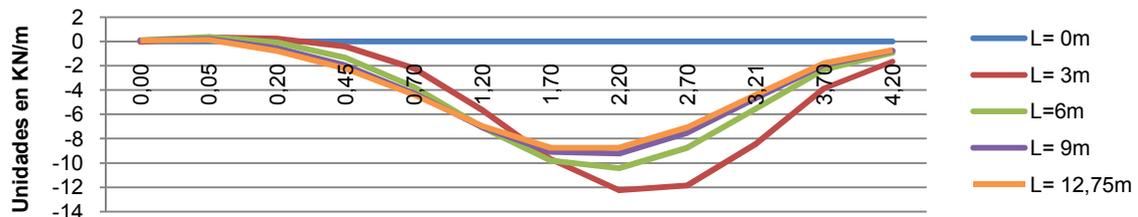


Gráfica 39. Esfuerzos transversales de la lámina semielíptica calculados por Torroja..

Si ahora observamos los resultados obtenidos mediante el programa de elementos finitos observamos un comportamiento muy similar al previsto por Torroja. En la semielipse podemos ver, tanto en la hipótesis de peso propio (gráfica 40), como en aquella con sobrecarga de nieve, que los esfuerzos en cada una de las directrices son muy similares y de compresión, con un máximo similar al calculado por el ingeniero. Además en ambos casos los esfuerzos en las generatrices de borse tienden a ser nulos. Sin embargo, en la hipótesis referente a la presión del viento observamos que en gran parte de la láminas de desplaza el máximo hacia la generatriz situada a 2,9m del origen. En cuanto al lóbulo formado por un cuarto de elipse (gráfica 41), podemos observar que tanto en la hipótesis de peso propio como en aquella con sobrecarga de nieve, los esfuerzos en cada una de las directrices son muy similares y de compresión, cercanos a los esfuerzos calculados por Torroja aunque situados en la zona intermedia de la lámina, no en el borse superior como preveía él, excepto en la directriz L=3m que posee un máximo desplazado mayor al previsto. En cuanto a la hipótesis de carga de viento a presión no se observan cambios significativos.



Gráfica 40. Esfuerzos transversales de la lámina semielíptica calculados mediante LUSAS..



Gráfica 41. Esfuerzos transversales de la lámina de cuarto de elipse calculada mediante LUSAS (H. peso propio)

Atendiendo a los esfuerzos tangenciales de la semielipse calculada por Torroja (gráfica 42), podemos observar que toda la bóveda se encuentra traccionada, excepto en la generatriz superior así como en la directriz central, que tiene esfuerzos nulos. La tendencia es de aumento de las tracciones conforme nos acercamos a los apoyos y a la zona inferior de la lámina, como era de esperar. La misma tendencia se observa para los lóbulos laterales. El comportamiento es similar para todas las hipótesis.

$$S = [V \text{ Sen} \delta \text{ Cos} \delta - g \text{ Sen} \delta] (2x - L)$$

Siendo:

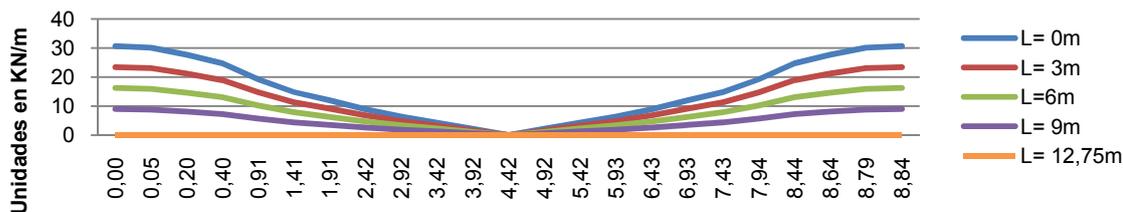
*S*: Esfuerzo tangencial por unidad de longitud (KN/m).

*g*: Carga vertical.

*V*: Carga de viento.

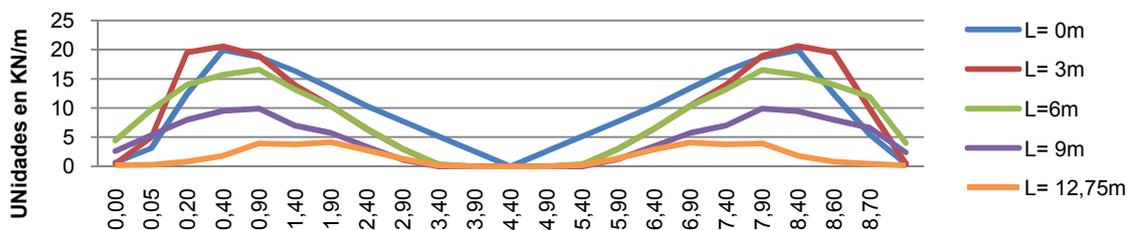
*L*: Longitud de la lámina.

*X*: Directriz considerada.

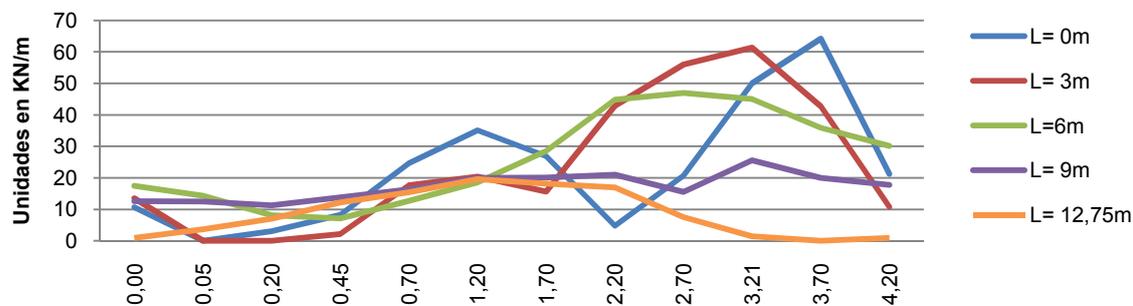


Gráfica 42. Esfuerzos tangenciales de la lámina semielíptica calculados por Torroja..

Si ahora observamos los resultados obtenidos mediante el programa de elementos finitos observamos un comportamiento muy similar al previsto por Torroja para la lámina semielíptica (gráfica 43). Las tracciones tienden a ser nulas en las generatrices superiores, y en las extremas, y sin embargo los máximos se producen en las zonas intermedias. Los esfuerzos resultantes resultan menores que los previstos por el ingeniero. Solo para la hipótesis de presión de viento la situación difiere, puesto que aumentan los máximos esfuerzos. Sin embargo para los lóbulos laterales la situación es totalmente distinta a la prevista para todas las hipótesis (gráfica 44). Se producen esfuerzos prácticamente nulos en las generatrices inferiores, se producen los máximos esfuerzos en las zonas intermedias y en las zonas posteriores se reducen, sin llegar a anularse.



Gráfica 43. Esfuerzos tangenciales de la lámina semielíptica calculados por LUSAS (H. peso propio)

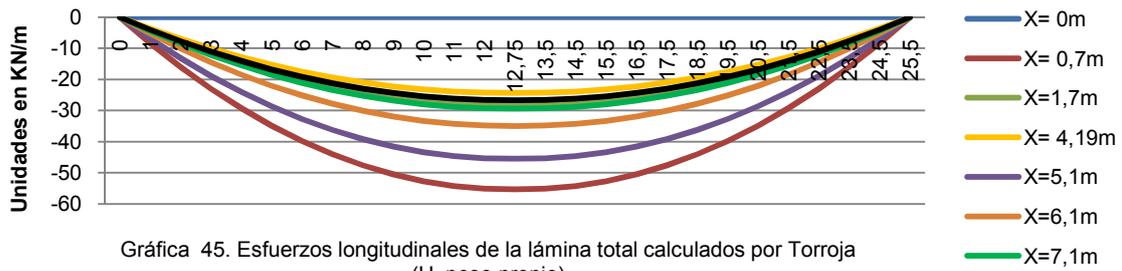


Gráfica 44. Esfuerzos tangenciales de la lámina de cuarto de elipse calculada mediante LUSAS (H. peso propio)

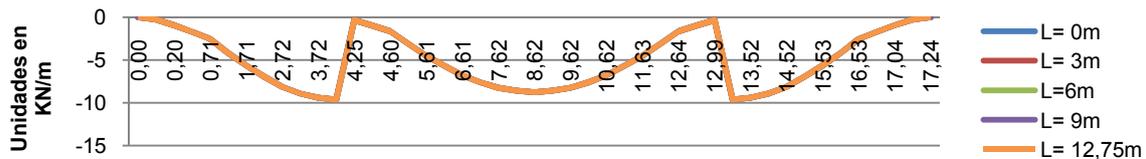
Podemos concluir que para cada una de las láminas por separado las comprobaciones de Torroja solo son ciertas para los esfuerzos transversales y tangenciales en el lóbulo semielíptico. Para los esfuerzos longitudinales así como tangenciales para los lóbulos inferiores, las diferencias son considerables.

Sin embargo, según los principios expuestos por el mismo ingeniero para este tipo de estructuras, establece una serie de principios por los cuales estas fórmulas se aproximan a la realidad estructural. Uno de los principios fundamentales es la rigidización del conjunto laminar. Por tanto aquí se realizarán una serie de aproximaciones a través de distintos modelos de cálculo, con los cuales podremos comprobar la interacción de los distintos elementos de la cubierta para las tres hipótesis consideradas.

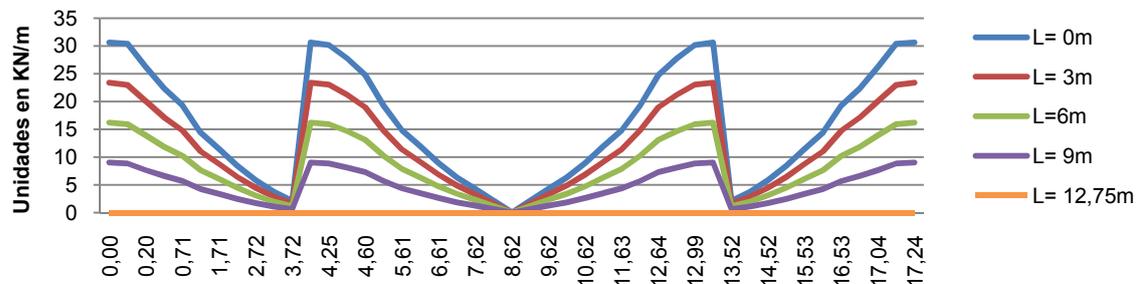
Si comprobamos los resultados en conjunto de toda la lámina obtenidos por Torroja (gráfica 45) podemos observar que respecto a los esfuerzos longitudinales toda la lámina se encuentra a compresión, obteniéndose valores mínimos en la zona de encuentro entre lóbulos. Estos valores se reducen ante la acción de presión de viento. Se obtienen valores nulos para las generatrices de borde de los lóbulos inferiores. En cuanto a los esfuerzos transversales (gráfica 46), podemos ver que toda la lámina se encuentra a compresión, y existen valores máximos en la zona intermedia de los lóbulos laterales y en la generatriz superior del lóbulo central, y valores mínimos en las generatrices de borde, así como en la zona de intersección. Con la acción del viento tanto los máximos y mínimos aumentan en magnitud. En cuanto a los esfuerzos tangenciales podemos ver que existen valores máximos de cortante en la zona de intersección de lóbulos, así como en las generatrices de borde de los lóbulos laterales (gráfica 47). Existen valores mínimos en la generatriz superior así como en las inmediaciones de las intersecciones.



Gráfica 45. Esfuerzos longitudinales de la lámina total calculados por Torroja (H. peso propio)



Gráfica 46. Esfuerzos transversales de la lámina total calculados por Torroja (H. peso propio)



Gráfica 47. Esfuerzos tangenciales de la lámina total calculados por Torroja (H. peso propio)

Ahora proponemos cuatro modelos progresivos que tienen en cuenta diferentes condiciones de apoyo y la utilización de elementos rigidizadores, para comprobar su influencia en la veracidad del cálculo realizado por Torroja. Los modelos que analizaremos serán los siguientes: Bóveda completa sin nervios y apoyada en las testas mediante apoyos que coaccionan el movimiento en las tres direcciones del espacio; otra será la misma bóveda pero apoyada tanto en las testas como en las generatrices laterales; la siguiente será una bóveda con nervios en la intersección de los lóbulos y apoyada en las testas de forma rígida; y por último analizaremos esta misma bóveda para apoyada tanto en testas como en los muros laterales. Las hipótesis consideradas serán las mismas que las consideradas por el Torroja.

## A. Bóveda completa sin nervios y apoyada en las testas

En la siguiente imagen podemos ver el modelo de cálculo en elementos finitos (figura 101).

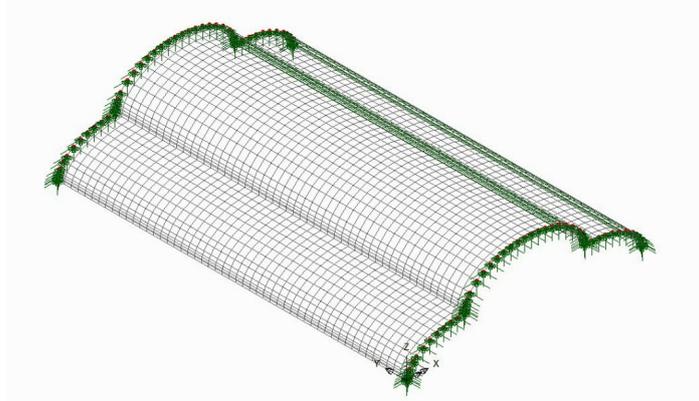
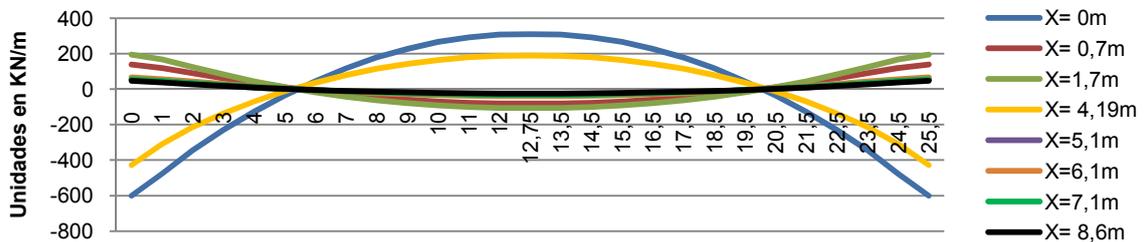


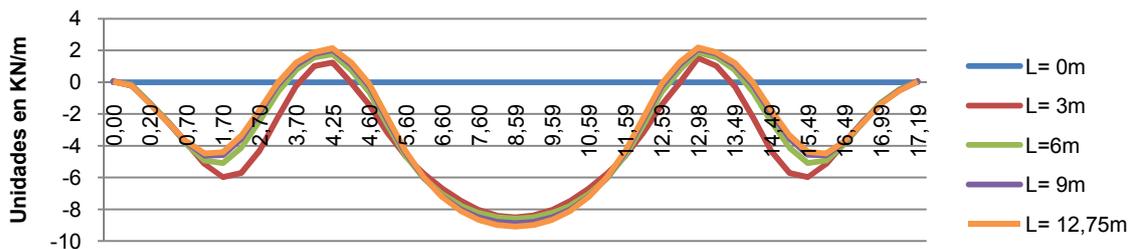
Figura 101. Modelo de cálculo de la bóveda apoyada en los extremos.

Desde el punto de vista de los esfuerzos longitudinales y para todas las hipótesis observamos que las generatrices de borde así como las correspondientes a la intersección entre lóbulos presentan esfuerzos de compresión en torno a la zona de los apoyos, mientras que en la zona media presentan tracciones. Esto se debe al efecto arco que se produce en la zona apoyada, simulando una especie de empotramiento, mientras que en la zona media las tracciones son debidas a esfuerzos correspondientes a una viga. El resto de la lámina queda traccionada en la zona de apoyos y comprimida en la zona media, debida a los mismos motivos que en el caso de las generatrices de borde (gráfica 48). Se obtienen zonas de esfuerzo nulo en torno a  $L=5\text{m}$  y  $L=20,5\text{m}$ .



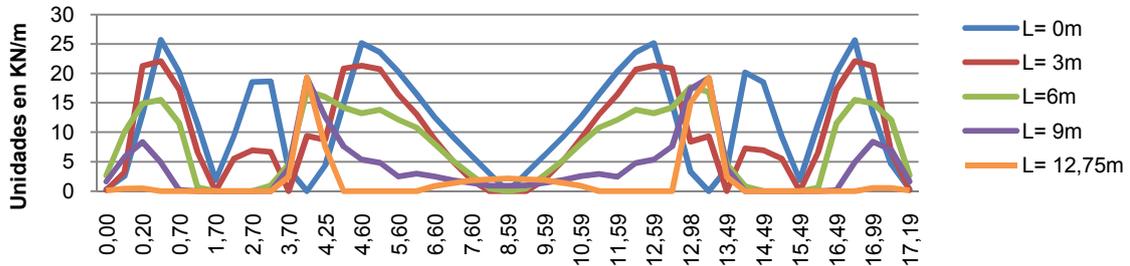
Gráfica 48. Esfuerzos longitudinales (H. peso propio)

Desde el punto de vista de los esfuerzos transversales y para todas las hipótesis observamos que se producen esfuerzos de tracción en la zona de intersección de los lóbulos, debido al descenso que se produce en la zona superior de los lóbulos laterales, mientras que se producen compresiones máximas en las zonas medias de las directrices de los lóbulos laterales y en la generatriz superior de la semielipse (gráfica 49). Para todas las hipótesis, los mayores valores de compresión para las láminas laterales se produce en la directriz  $L=3\text{m}$ , mientras que en la directriz media de la lámina se produce el mayor valor de compresión en la generatriz superior así como los mayores valores de tracción, como era de esperar, en las zonas de intersección. Los esfuerzos tienden a cero en las generatrices de borde.



Gráfica 49. Esfuerzos transversales (H. peso propio)

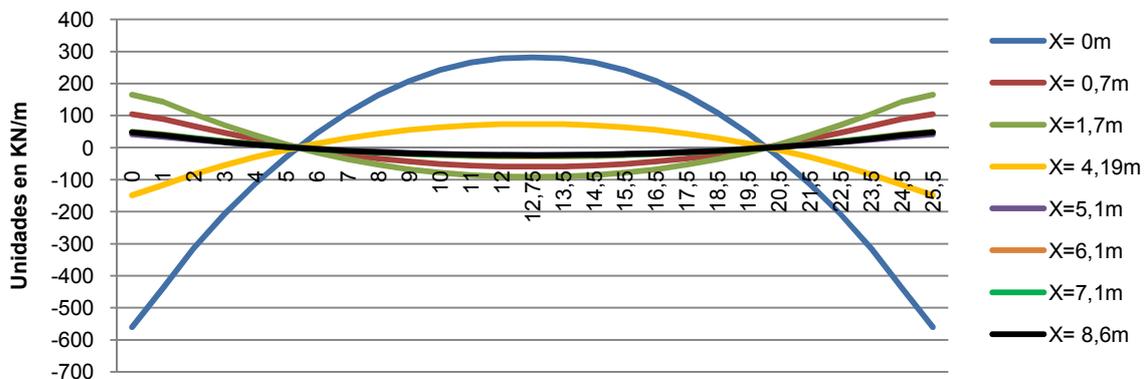
Desde el punto de vista de los esfuerzos de cortante y para todas las hipótesis observamos que los esfuerzos en la zona de apoyos se concentran en las zonas medias de las directrices, y con tendencia a anularse en las zonas de intersección, y en las generatrices de borde y en la superior. Sin embargo, en la zona media de la lámina se invierte la tendencia, puesto que en esta zona el cortante se concentra en la zona de intersección de lóbulos así como en la zona superior del perfil semielíptico (gráfica 50).



Gráfica 50. Esfuerzos tangenciales (H. peso propio)

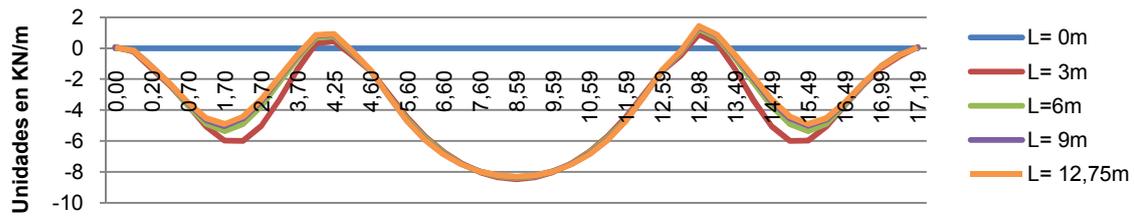
### B. Bóveda completa con nervios y apoyada en las testas

Desde el punto de vista de los esfuerzos longitudinales y para todas las hipótesis observamos que las generatrices de borde así como las correspondientes a la intersección entre lóbulos presentan esfuerzos de compresión en torno a la zona de los apoyos, mientras que en la zona media presentan tracciones. Esto se debe al efecto arco que se produce en la zona apoyada, simulando una especie de empotramiento, mientras que en la zona media las tracciones son debidas a esfuerzos correspondientes a una viga. El resto de la lámina queda traccionada en la zona de apoyos y comprimida en la zona media, debida a los mismos motivos que en el caso de las generatrices de borde (gráfica 51). Se obtienen zonas de esfuerzo nulo en torno a L=5m y L=20,5m.



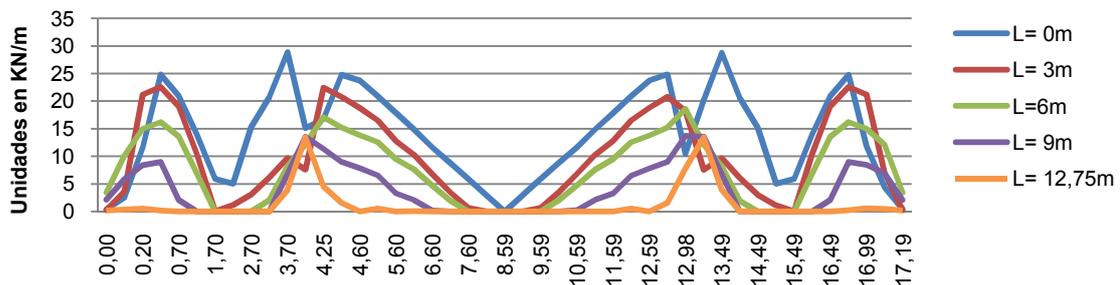
Gráfica 51. Esfuerzos longitudinales (H. peso propio)

Desde el punto de vista de los esfuerzos transversales y para todas las hipótesis observamos que se producen esfuerzos de tracción prácticamente nulos en la zona de intersección de los lóbulos debido a la incorporación de los nervios, mientras que se producen compresiones máximas en las zonas medias de las directrices de los lóbulos laterales y en la generatriz superior de la semielipse (gráfica 52). Para todas las hipótesis, los mayores valores de compresión para las láminas laterales se produce en la directriz L=3m, mientras que en la directriz media los esfuerzos quedan igualados para la lámina superior. Los esfuerzos tienden a cero en las generatrices de borde.



Gráfica 52. Esfuerzos transversales (H. peso propio)

Desde el punto de vista de los esfuerzos de cortante y para todas las hipótesis observamos que los esfuerzos en la zona de apoyos se concentran en las zonas medias de las directrices así como en la zona de nervios, y con tendencia a anularse en las generatrices de borde y en la superior. Los esfuerzos de cortante disminuyen conforme nos acercamos a la zona media, en donde los cortantes máximos se presentan en torno a los nervios (gráfica 53).



Gráfica 53. Esfuerzos tangenciales (H. peso propio)

### C. Bóveda completa sin nervios y apoyada en testas y muros laterales

En la siguiente imagen podemos ver el modelo de cálculo en elementos finitos (figura 102).

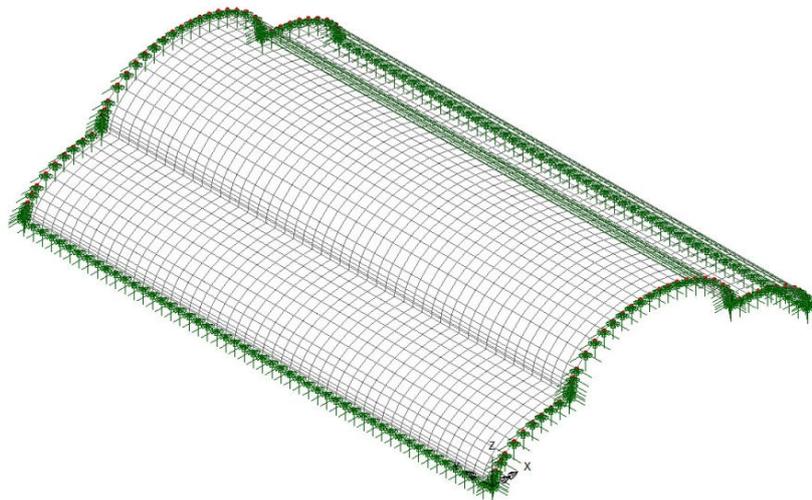
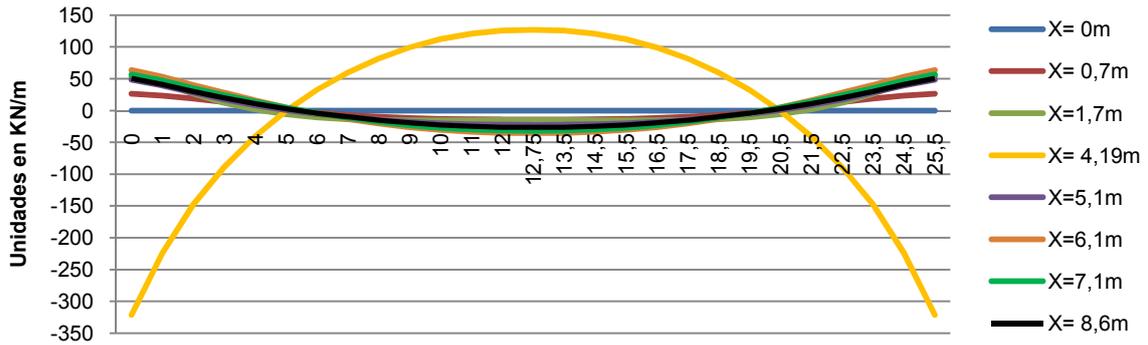


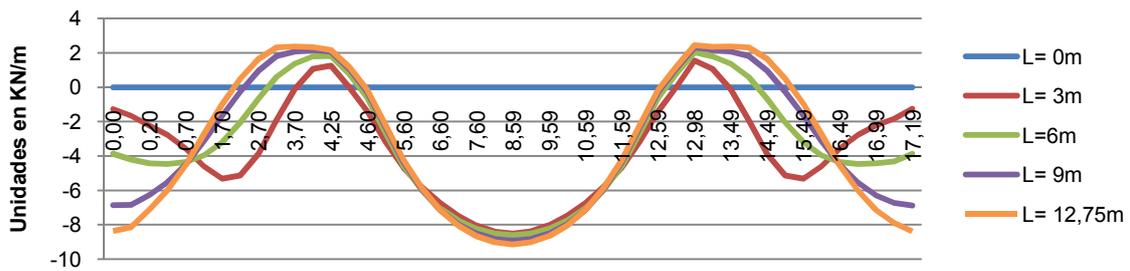
Figura 102. Modelo de cálculo de la bóveda apoyada en todo el contorno.

Desde el punto de vista de los esfuerzos longitudinales y para todas las hipótesis observamos que las generatrices de borde tienden a esfuerzo nulo, mientras que en la intersección entre lóbulos presenta esfuerzos de compresión en torno a la zona de los apoyos y en la zona media tracciones. El resto de la lámina queda traccionada en la zona de apoyos y comprimida en la zona media, debida al comportamiento de arco en la zona de apoyos y el comportamiento general en forma de viga de la lámina (gráfica 54). Se obtienen zonas de esfuerzo nulo en torno a  $L=5m$  y  $L=20,5m$ .



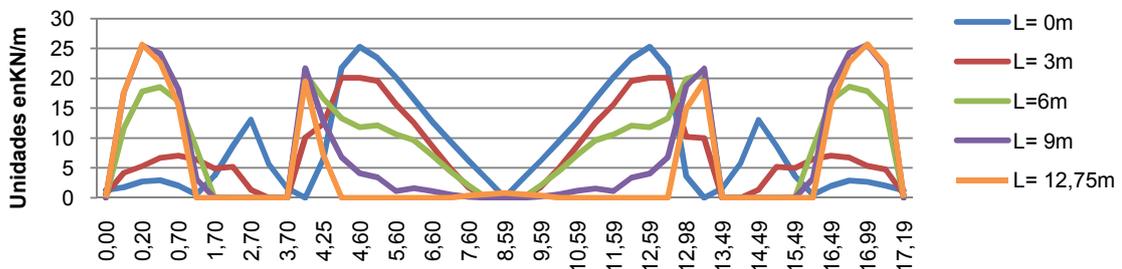
Gráfica 54. Esfuerzos longitudinales (H. peso propio)

Desde el punto de vista de los esfuerzos transversales y para todas las hipótesis observamos que se producen esfuerzos de tracción en la zona de intersección de los lóbulos debido al descenso que se produce en la zona superior de los lóbulos laterales, mientras que se producen compresiones máximas en las zonas medias de las directrices de los lóbulos laterales y en la generatriz superior de la semielipse, excepto en la zona media de la cubierta, donde se producen máximos de compresión en las generatrices de apoyo en los muros laterales (gráfica 55). Para todas las hipótesis, los mayores valores de compresión se producen en la directriz  $L=12,75\text{m}$ , así como los mayores valores de tracción, como era de esperar, en las zonas de intersección.



Gráfica 55. Esfuerzos transversales (H. peso propio)

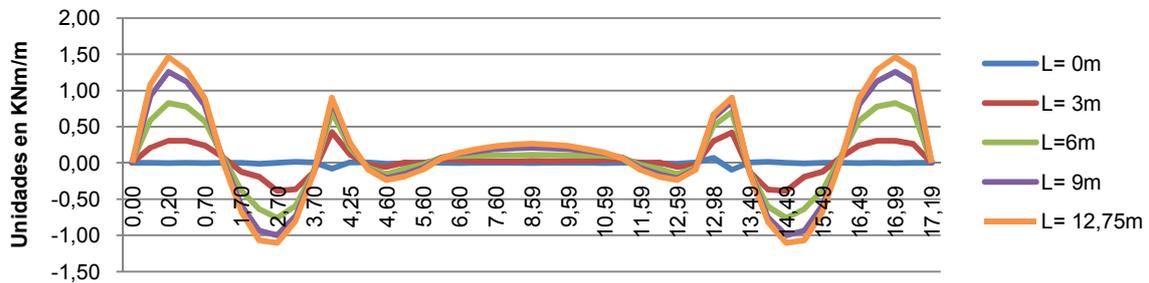
Desde el punto de vista de los esfuerzos de cortante y para todas las hipótesis observamos que los esfuerzos en la zona de apoyos se concentran en las zonas medias de las directrices del lóbulo superior, y con tendencia a anularse en los lóbulos laterales así como en la generatriz superior. Sin embargo, en la zona media de la lámina se invierte la tendencia, puesto que en esta zona el cortante se concentra en la zona de intersección de lóbulos así como en la zona media de las directrices de los lóbulos laterales (gráfica 56).



Gráfica 56. Esfuerzos tangenciales (H. peso propio)

Desde el punto de vista de los momentos transversales observamos que toda la lámina tiene la misma tendencia, obteniendo los valores máximos en la directriz media de la misma. Quedan traccionadas por la cara superior tanto la zona de intersección como la zona de apoyo en los muros laterales así como la zona superior de la semielipse, mientras que la cara inferior queda traccionada

en las zonas inmediatas a las intersecciones. Tanto la línea de intersección como las generatrices de borde funcionan como líneas de rigidización que provocan la inversión de los momentos transversales (gráfica 57).

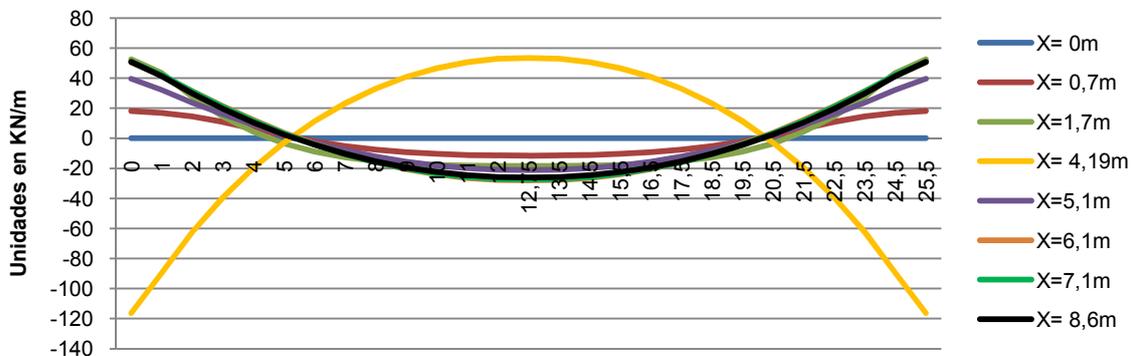


Gráfica 57. Esfuerzos flectores transversales (H. peso propio)

Desde el punto de vista de los momentos longitudinales observamos que los mayores esfuerzos quedan reservados para las intersecciones en zona de apoyos, donde queda traccionada la cara inferior.

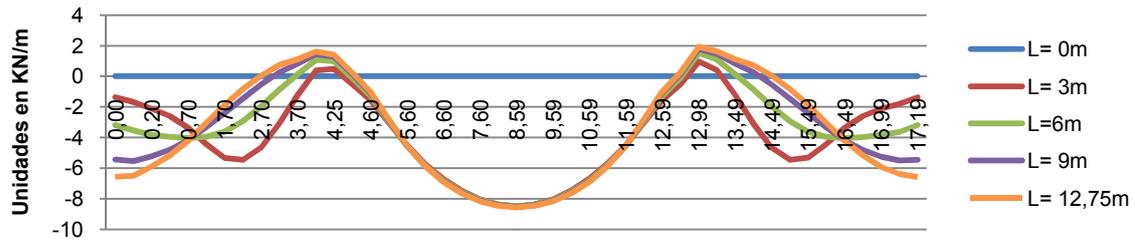
#### D. Bóveda completa con nervios y apoyada en testas y muros laterales

Desde el punto de vista de los esfuerzos longitudinales y para todas las hipótesis observamos que las generatrices de borde tienden a esfuerzo nulo, mientras que en la intersección entre lóbulos presenta esfuerzos de compresión en torno a la zona de los apoyos y en la zona media tracciones. El resto de la lámina queda traccionada en la zona de apoyos y comprimida en la zona media, debida al comportamiento de arco en la zona de apoyos y el comportamiento general en forma de viga de la lámina (gráfica 58). Se obtienen zonas de esfuerzo nulo en torno a L=5m y L=20,5m.



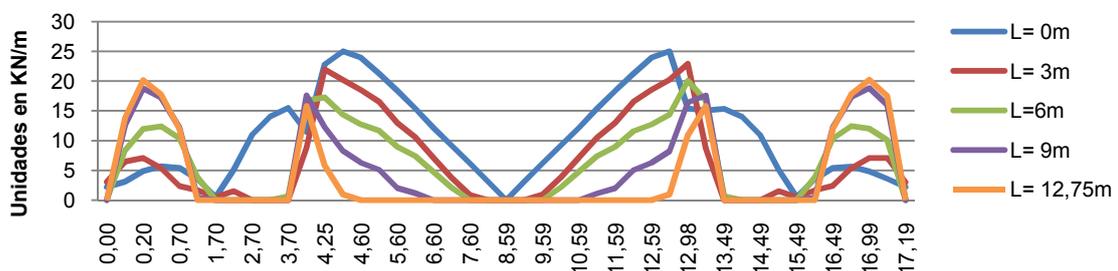
Gráfica 58. Esfuerzos longitudinales (H. peso propio)

Desde el punto de vista de los esfuerzos transversales y para todas las hipótesis observamos que se producen esfuerzos de tracción en la zona de intersección de los lóbulos, mientras que se producen compresiones máximas en las zonas medias de las directrices de los lóbulos laterales y en la generatriz superior de la semielipse, excepto en la zona media de la cubierta, donde se producen máximos de compresión en las generatrices de apoyo en los muros laterales (gráfica 59). Para todas las hipótesis, los mayores valores de compresión se producen en la directriz L=12,75m, así como los mayores valores de tracción, como era de esperar, en las zonas de intersección.



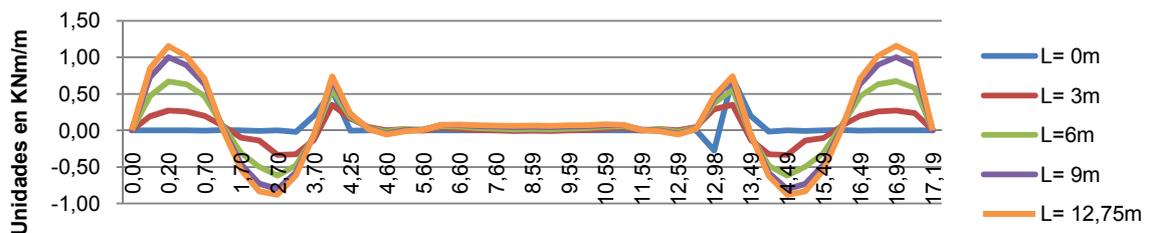
Gráfica 59. Esfuerzos transversales (H. peso propio)

Desde el punto de vista de los esfuerzos de cortante y para todas las hipótesis observamos que los esfuerzos en la zona de apoyos se concentran en la zona de nervios, tendiendo a cero en las demás zonas de los apoyos. En la zona media de la lámina el cortante se concentra tanto en los nervios como en la zona de apoyo de las láminas laterales en los muros laterales (gráfica 60).



Gráfica 60. Esfuerzos tangenciales (H. peso propio)

Desde el punto de vista de los momentos transversales observamos que toda la lámina tiene la misma tendencia, obteniendo los valores máximos en la directriz media de la misma. Quedan traccionadas por la cara superior tanto la zona de intersección como la zona de apoyo en los muros laterales así como la zona superior de la semielipse, mientras que la cara inferior queda traccionada en las zonas inmediatas a las intersecciones. Tanto la línea de intersección como las generatrices de borde funcionan como líneas de rigidización que provocan la inversión de los momentos transversales (gráfica 61).



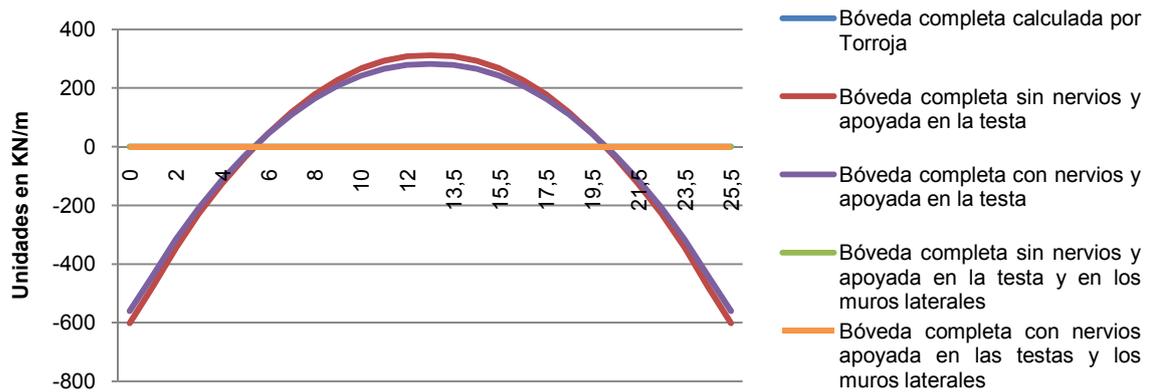
Gráfica 61. Esfuerzos flectores transversales (H. peso propio)

Desde el punto de vista de los momentos longitudinales observamos que los mayores esfuerzos quedan reservados para las intersecciones en la zona de apoyo, donde queda traccionada la cara superior.

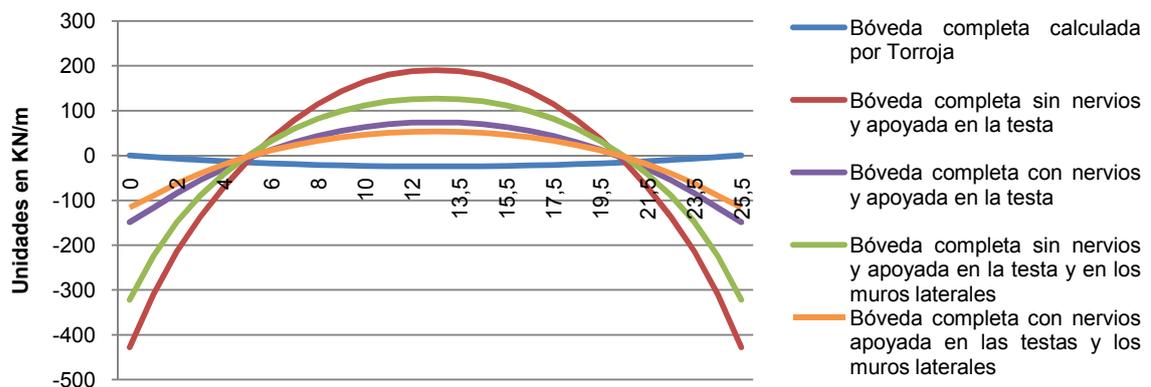
### E. Comparación entre modelos

Respecto a los esfuerzos longitudinales observamos que los modelos que no consideran el apoyo de la cubierta en los muros laterales son aquellos que presentan fuertes esfuerzos de compresión en los extremos y de tracción en la zona central. Los modelos que si lo consideran presentan esfuerzos de borde nulos, lo cual se corresponde con el modelo de Torroja (gráfica 62). Si ahora observamos los lóbulos laterales podemos comprobar que el modelo más próximo al de Torroja es aquel que presenta

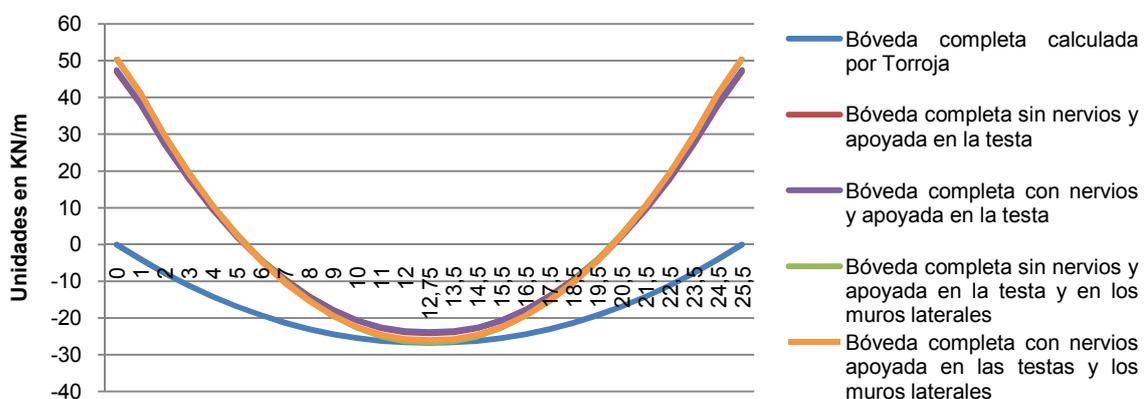
nervios en las intersecciones de los lóbulos así como apoyos en todos sus bordes. La diferencia estriba en que Torroja preveía una lámina completamente comprimida, mientras que en este caso, la lámina se encuentra traccionada en los apoyos extremos y comprimida, en menor medida, en el centro del lóbulo. En la línea de intersección todos los modelos invierten la tendencia, excepto el de Torroja, el cual sigue consistiendo en esfuerzos de compresión (gráfica 63). A pesar de ello, el modelo que sigue más próximo al torrojiano es el anteriormente mencionado, pero con la diferencia de presentar fuertes compresiones en los extremos y tracciones en el centro. Y por último nos fijamos en la lámina semielíptica. En esta zona observamos que todos los modelos se comportan de manera homogénea, produciéndose tracciones en los extremos y compresiones en la zona media similares a las previstas por el ingeniero (gráfica 64). Solo en la hipótesis que considera la presión del viento difiere la situación ligeramente, dando como resultado compresiones mayores a las previstas por Torroja.



Gráfica 62. Comparación de esfuerzos longitudinales en X=0m (H. peso propio)

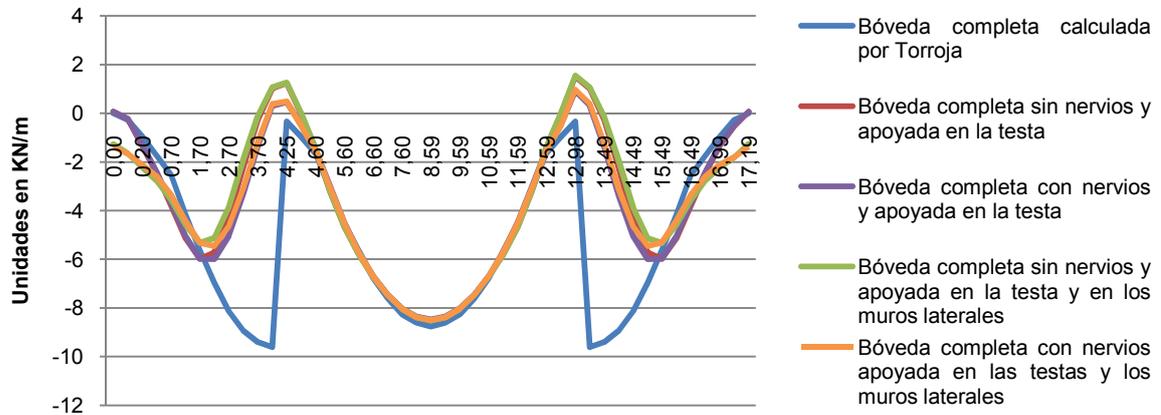


Gráfica 63. Comparación de esfuerzos longitudinales en X=4,19m (H. peso propio)

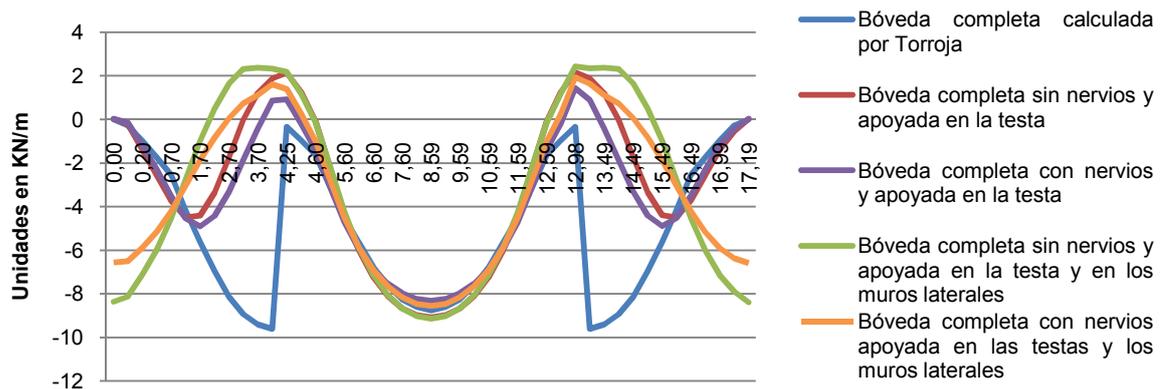


Gráfica 64. Comparación de esfuerzos longitudinales en X=8,6m (H. peso propio)

Respecto a los esfuerzos transversales (gráficas 65 y 66), observamos que todos los modelos tienen un comportamiento semejante al propuesto por Torroja. Las diferencias estriban en que todos los modelos presentan tracciones en la zona de intersección entre lóbulos. Sin embargo en la zona de las generatrices de borde, solo los modelos que se apoyan en los muros laterales los que presentan diferencias. Por tanto en este caso el modelo más fiel al de Torroja es la cubierta con nervios y simplemente apoyada en las testas. Por otra parte Torroja previó compresiones en las zonas intermedias de los lóbulos laterales mayores que las que resultaron de los modelos considerados.

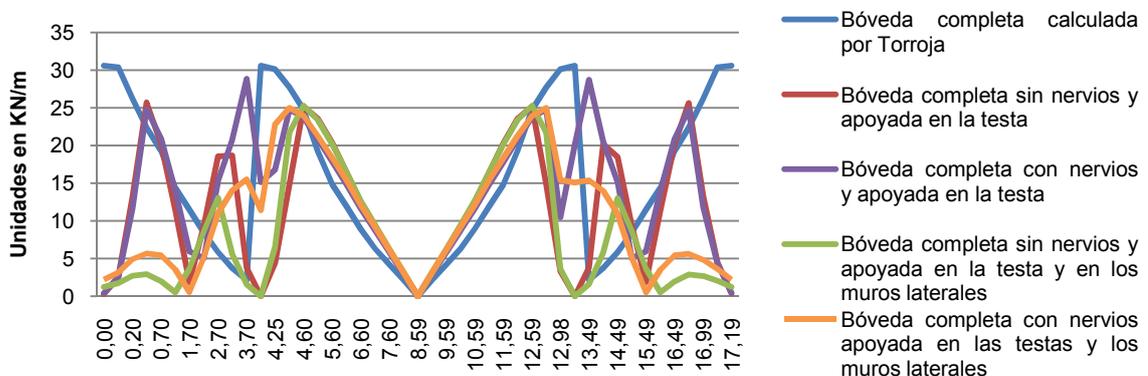


Gráfica 65. Comparación de esfuerzos transversales en L=3m (H. peso propio)

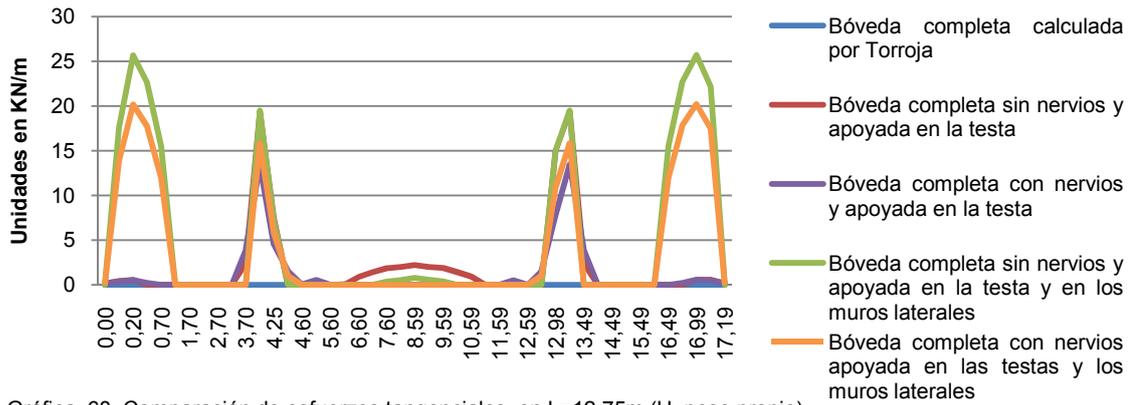


Gráfica 66. Comparación de esfuerzos transversales en L=12,75m (H. peso propio)

Respecto a los esfuerzos tangenciales (gráficas 67 y 68) observamos que en la zona de apoyo extremo el modelo que más se asemeja a los esfuerzos teóricos de Torroja es aquella cubierta que solo se apoya en las testas y posee nervios en las intersecciones.

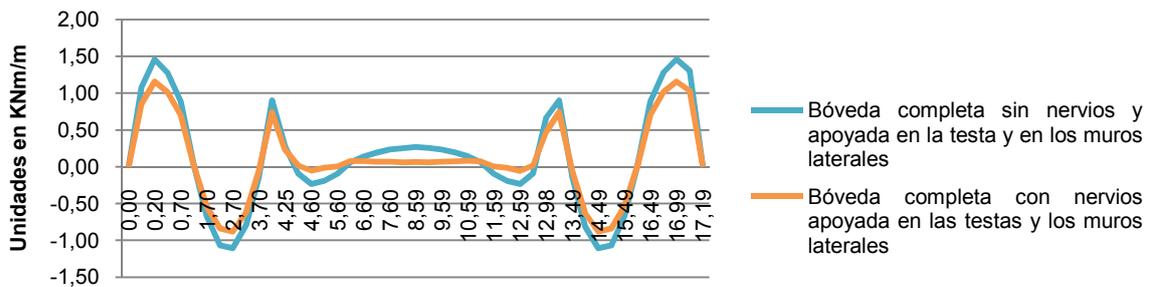


Gráfica 67. Comparación de esfuerzos tangenciales en L=0m (H. peso propio)



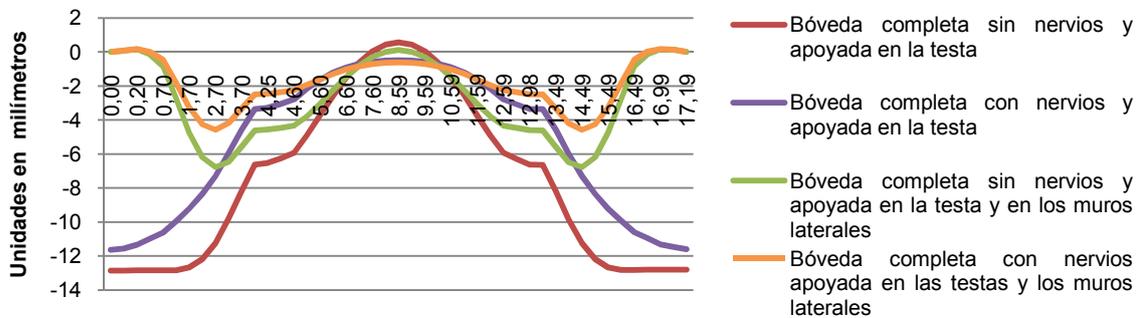
Gráfica 68. Comparación de esfuerzos tangenciales en L=12,75m (H. peso propio)

Respecto a las leyes de momentos (gráfica 69), podemos observar que la cubierta que menor magnitud de esfuerzo presenta es aquella apoyada en todos los bordes y posee nervios en las intersecciones. Además podemos comprobar que, a la vista de los resultados obtenidos mediante LUSAS y atendiendo a los planos de armado aportados en la documentación técnica sobre el armado de la bóveda, se adoptó una solución adecuada al problema de la lámina para los momentos transversales.



Gráfica 69. Comparación de esfuerzos flectores transversales en L=12,75m (H. peso propio)

Finalmente respecto de los desplazamientos verticales podemos observar claramente que los desplazamientos verticales vienen condicionados por las condiciones de apoyo y el enlace entre lóbulos. Queda constatado por tanto que la bóveda que menos afectada se ve por las acciones exteriores es el último modelo, apoyado en todos sus extremos y rigidizada mediante los nervios (gráfica 70).



Gráfica 70. Comparación de movimientos verticales en L=12,75m (H. peso propio)

Por tanto, y a la vista de los datos aportados aquí se concluye que las leyes aportadas por Torroja podrían corresponderse tanto a un modelo apoyado solo en testa o también en los muros laterales, pero ambos estarían rigidizados mediante nervios en las intersecciones. Podemos así concluir que la teoría de Torroja respecto a la rigidización de toda la cubierta es cierta. Solo queda el problema de los apoyos en muros laterales. Si consideramos las imágenes de época donde se ve la obra en su desarrollo y atendemos al croquis realizado por el ingeniero donde consideraba el apoyo en estos muros, podemos concluir que el modelo adecuado para la cubierta es el último.



## 5. Análisis comparativo del comportamiento de la cubierta ante diferentes hipótesis de carga.

Una vez establecido el modelo de cálculo adecuado para el análisis de la cubierta, es necesario estudiar las hipótesis a considerar para la investigación sobre el comportamiento de la cubierta en diferentes situaciones. En las hipótesis observadas por Torroja solo se considera las hipótesis de peso propio, y aquellas donde se establece una sobrecarga de nieve así como una sobrecarga de viento. Aquí estudiaremos los efectos diferentes hipótesis de viento y los diferentes efectos que estos pudieran tener sobre la cubierta. Se ha considerado para ello lo establecido en el eurocódigo 1 (figura 103), donde se establecen las bases de cálculo para bóvedas cilíndricas. De esta manera se puede realizar un análisis más próximo al real, y establecerse las situaciones en las cuales la bóveda podría verse más solicitada.

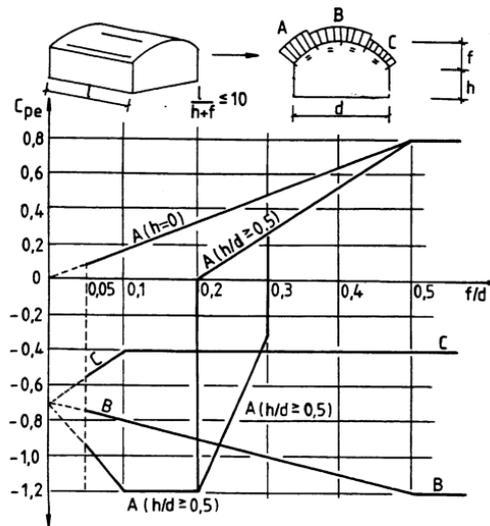


Figura 103. Gráfico para coeficientes  $C_{pe}$  del Eurocódigo 1. (19)

El modelo propuesto ha sido modelizado mediante el programa de cálculo basado en el método de elementos finitos LUSAS. El análisis se ha realizado dentro del rango lineal, utilizando para ello el elemento QSI4, cuadrilátero, con 4 nodos y 6 grados de libertad por cada nodo, tres para los movimientos en las tres direcciones del espacio, y otros tres en los giros para cada dirección del espacio. Es un elemento adecuado para láminas finas en 3D, y que cuenta con el comportamiento de membrana así como las deformaciones a flexión de la lámina. Al adecuarse a la teoría de placa delgada se excluyen las deformaciones de corte transversal. Además se ha utilizado el elemento BMS3 en los modelos que incorporan los nervios de intersección. Es un elemento viga en 3D con tres nodos, donde el tercer nodo se usa para definir el plano XY. Tiene 6 grados de libertad en cada nodo extremo, tres en las direcciones del espacio, y otros tres en los giros para cada dirección del espacio. Incluye las deformaciones de corte. En la modelización se han utilizado varias hipótesis de carga:

- Peso propio: para el espesor de 5cm y el material que forma la lámina, esto es, el hormigón armado.
- Peso propio y una sobrecarga de nieve de  $0,65\text{KN/m}^2$
- Peso propio y una sobrecarga de viento a presión sobre uno de los laterales de la lámina de  $0,5\text{KN/m}^2$ , según normativa.
- Peso propio y sobrecarga de viento a presión de  $0,5\text{KN/m}^2$  en uno de los laterales y succión horizontal por el otro de valor  $1\text{KN/m}^2$ .
- Peso propio y sobrecarga de viento a presión de  $0,5\text{KN/m}^2$  en la parte baja de los lóbulos, succión horizontal opuesta en las zonas altas del mismo lateral de los lóbulos de  $1\text{KN/m}^2$ , viento en succión de la misma magnitud que el anterior en todo el lateral opuesto, excepto en la zona baja del lóbulo lateral opuesto a la presión, donde el valor de la succión horizontal es de  $0,4\text{KN/m}^2$ .

- F) Peso propio y sobrecarga de viento a presión de  $0,5\text{KN/m}^2$  en la parte baja de los lóbulos, succión vertical hacia arriba en las zonas altas de los lóbulos de  $1\text{KN/m}^2$ , viento en succión horizontal de la misma magnitud en el resto de la lámina, excepto en la zona baja del lóbulo lateral opuesto a la presión, donde el valor de la succión horizontal es de  $0,4\text{KN/m}^2$ .

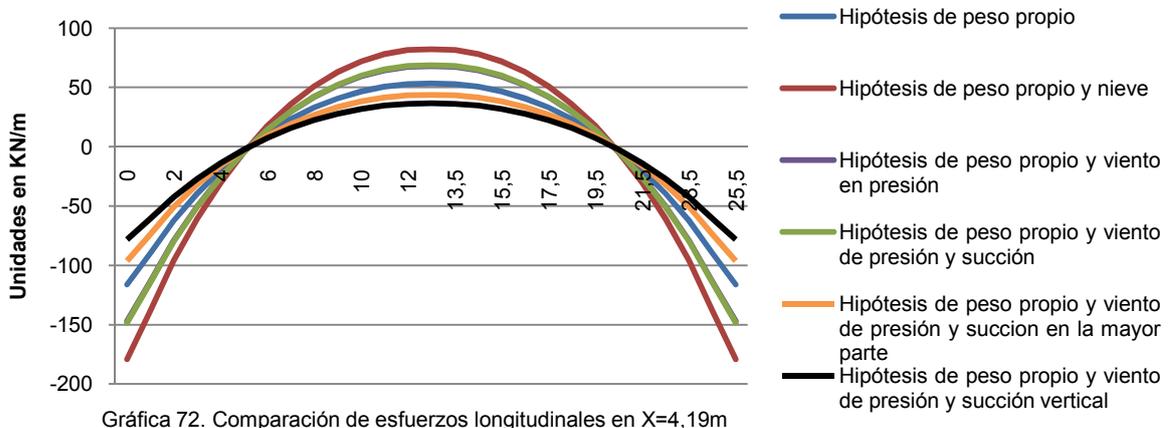
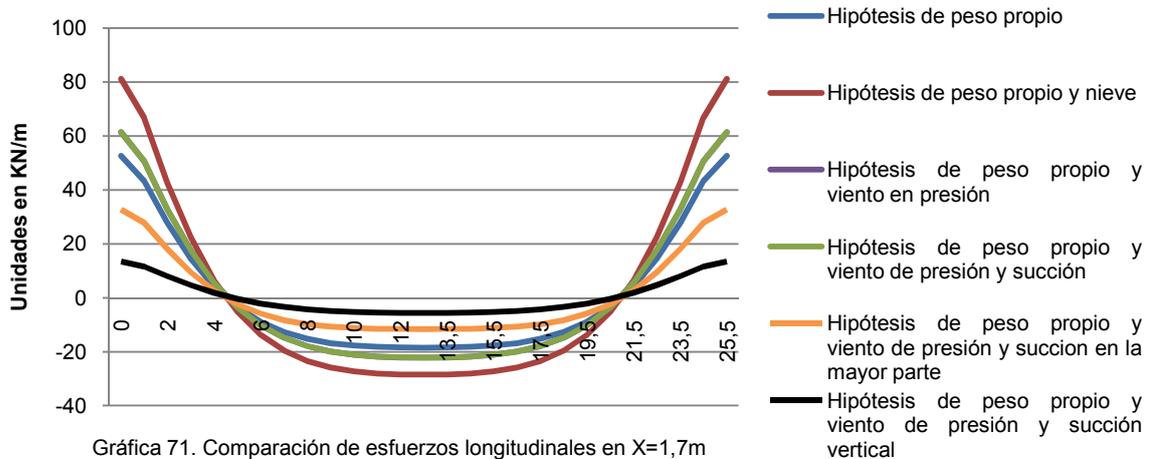
Las cargas se han insertado en servicio, por lo que no se han mayorado.

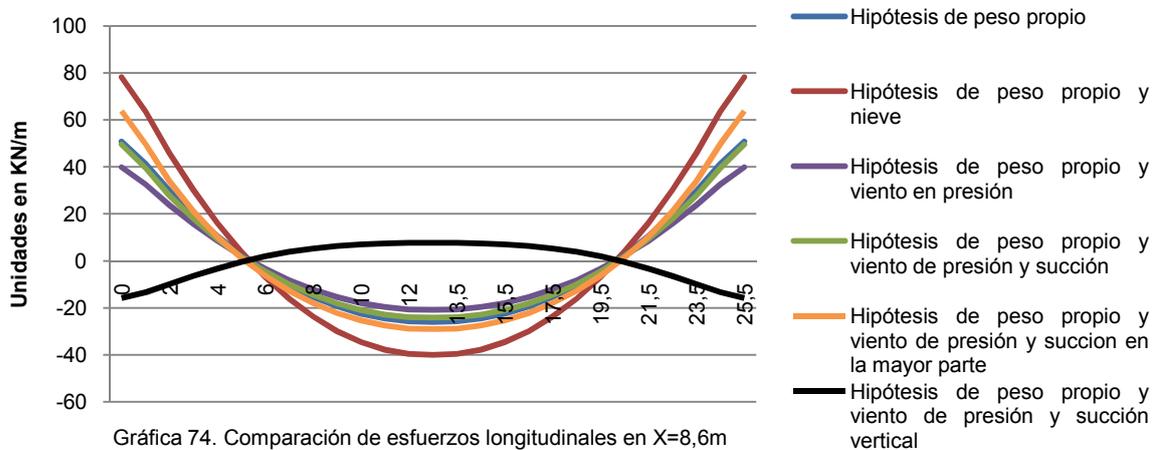
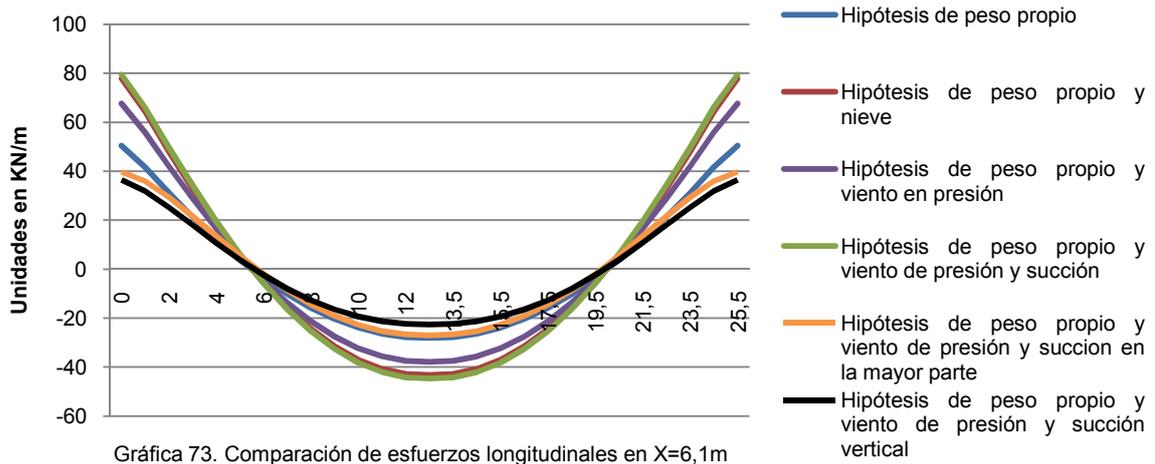
Los apoyos se han fijado en todo el contorno, restringiendo cualquier movimiento en horizontal o vertical, pero no los giros. Se ha considerado la fricción que existía entre la propia lámina y los muros de la iglesia, la cual produciría una restricción de movimientos horizontales.

Una vez establecidas las hipótesis de cálculo, serán comparadas entre ellas desde varios puntos de vista para observar detenidamente como afectan a la cubierta.

### A. Esfuerzos longitudinales.

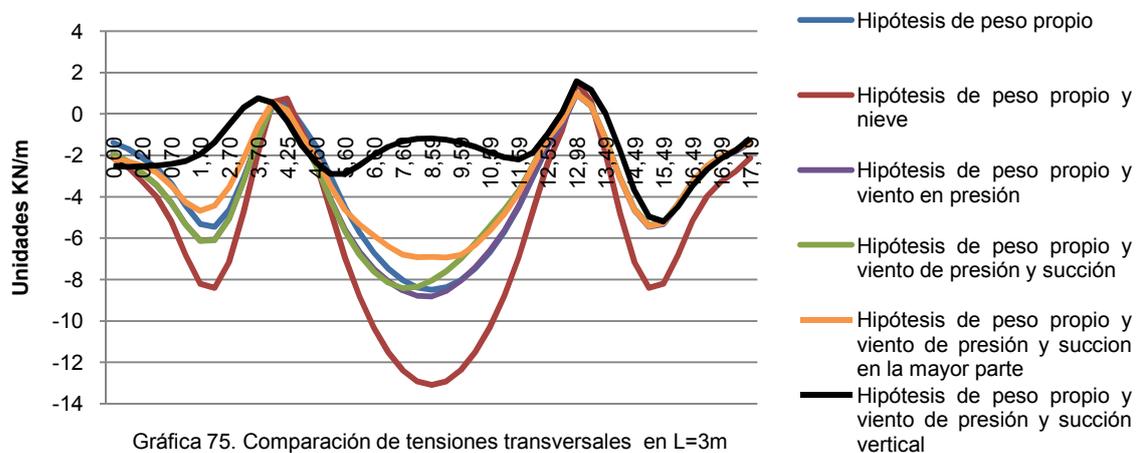
En todas las hipótesis consideradas los esfuerzos son nulos en las directrices de borde, dado que los lóbulos laterales apoyan en los antiguos muros de la iglesia. En las zonas intermedias de los lóbulos laterales todas las hipótesis de carga siguen la misma tendencia cualitativamente, pero aquella que provoca esfuerzos de mayor magnitud es la hipótesis B, seguida por la D. Las hipótesis E y F son las que presentan menor intensidad (gráfica 71). En la zona de nervios se produce la misma tendencia, así como en las zonas medias del lóbulo superior (gráficas 72 y 73). En la generatriz superior la hipótesis B sigue siendo la que mayores esfuerzos produce, seguida ahora por la hipótesis E (gráfica 74). Sin embargo la hipótesis F provoca la inversión de los esfuerzos, provocando tracciones donde se deberían producir compresiones. Por tanto podemos observar que la hipótesis que produce mayores esfuerzos en la lámina es la B. Pero a pesar de ello no podemos perder de vista la hipótesis F, pues produce efectos imprevistos en la lámina y que es necesario considerar.

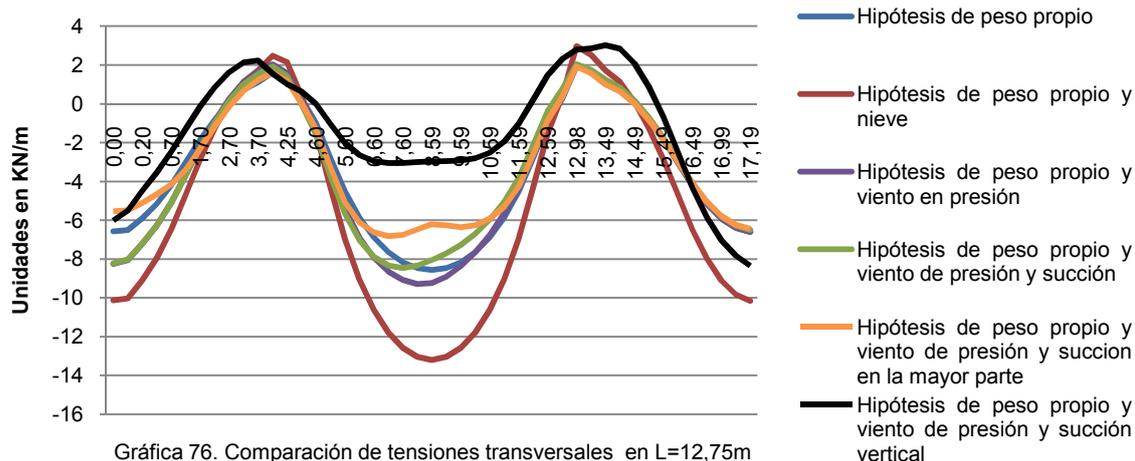




## B. Esfuerzos transversales.

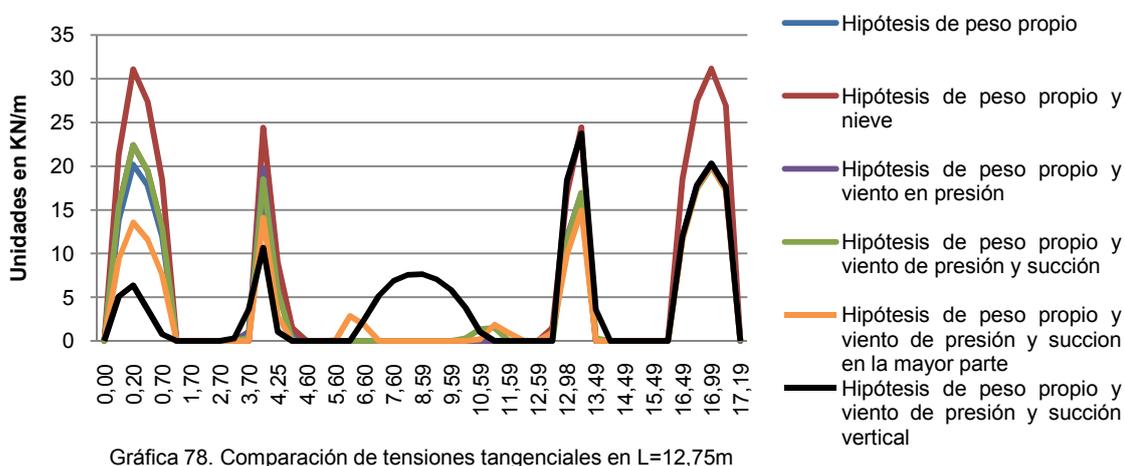
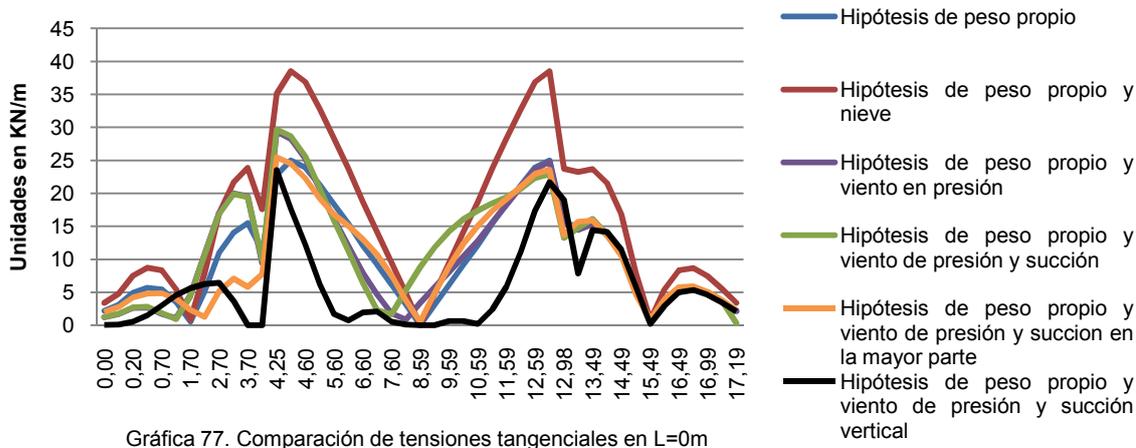
En toda la lámina se sigue la misma tendencia, puesto que la hipótesis de B es aquella que produce mayores esfuerzos que el resto. Hay que destacar que la hipótesis F produce tracciones en una zona más extensa de las intersecciones que el resto de las hipótesis, lo cual es necesario tener en cuenta para evaluar la seguridad de la lámina. En la zona de apoyos los esfuerzos son de mayor magnitud que en el resto de la lámina (gráficas 75 y 76). De nuevo observamos que son las hipótesis B y F más desfavorables.





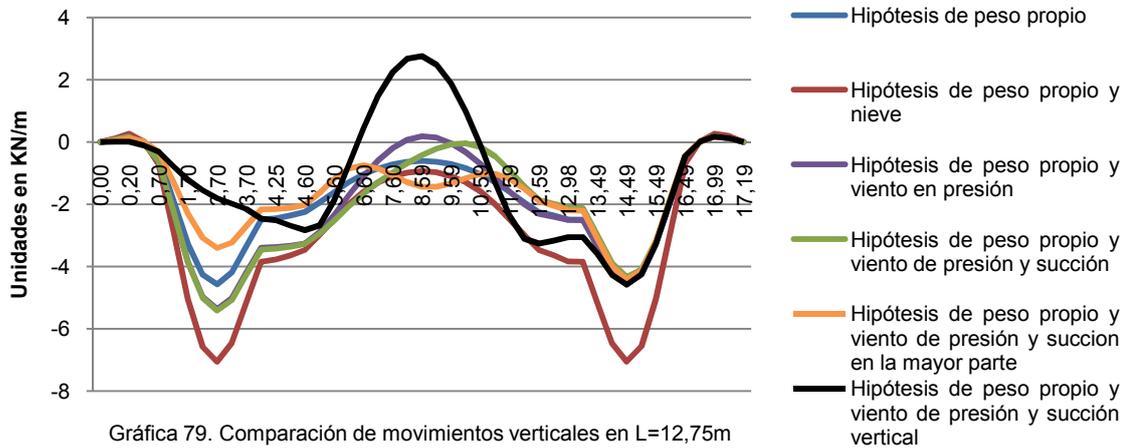
### C. Esfuerzos tangenciales.

En toda la lámina se puede observar que es la hipótesis B aquella que produce mayores esfuerzos de cortante, sobre todo en la zona de apoyos (gráfica 77). Sin embargo, es en la zona media de la lámina donde se puede observar que la hipótesis F produce esfuerzos cortantes en la zona opuesta a la presión del viento similares a la hipótesis B en la zona de intersección de láminas, incluso superando al resto de hipótesis en la directriz media (gráfica 78). Se puede observar también que en la hipótesis F se produce cortante en la zona superior del lóbulo semielíptico, lo cual será necesario considerar en posteriores análisis dado, que según la teoría no se producen este tipo de esfuerzo en esta zona. Por tanto de nuevo observamos que son las hipótesis B y F más desfavorables.



#### D. Desplazamientos verticales.

Se produce una tendencia generalizada a lo largo de toda la bóveda en cuanto desplazamientos se refiere, puesto que es la hipótesis B aquella que produce mayores descensos en la lámina, en especial en las zonas medias de los lóbulos laterales. Sin embargo es la hipótesis F la que produce una ruptura en esta tendencia, puesto que provoca un ascenso de la zona superior de la bóveda (gráfica 79). Esto produce unos esfuerzos flectores en la lámina que no corresponden con el armado transversal de la lámina, lo cual podría afectar a la propia estabilidad de la cubierta.



Por tanto, queda claro que la lámina es más susceptible para las sobrecargas de nieve y de viento que produce succiones en dirección vertical hacia arriba. En la figura 104 se puede observar el perfil resultante según los desplazamientos para cada hipótesis de carga.

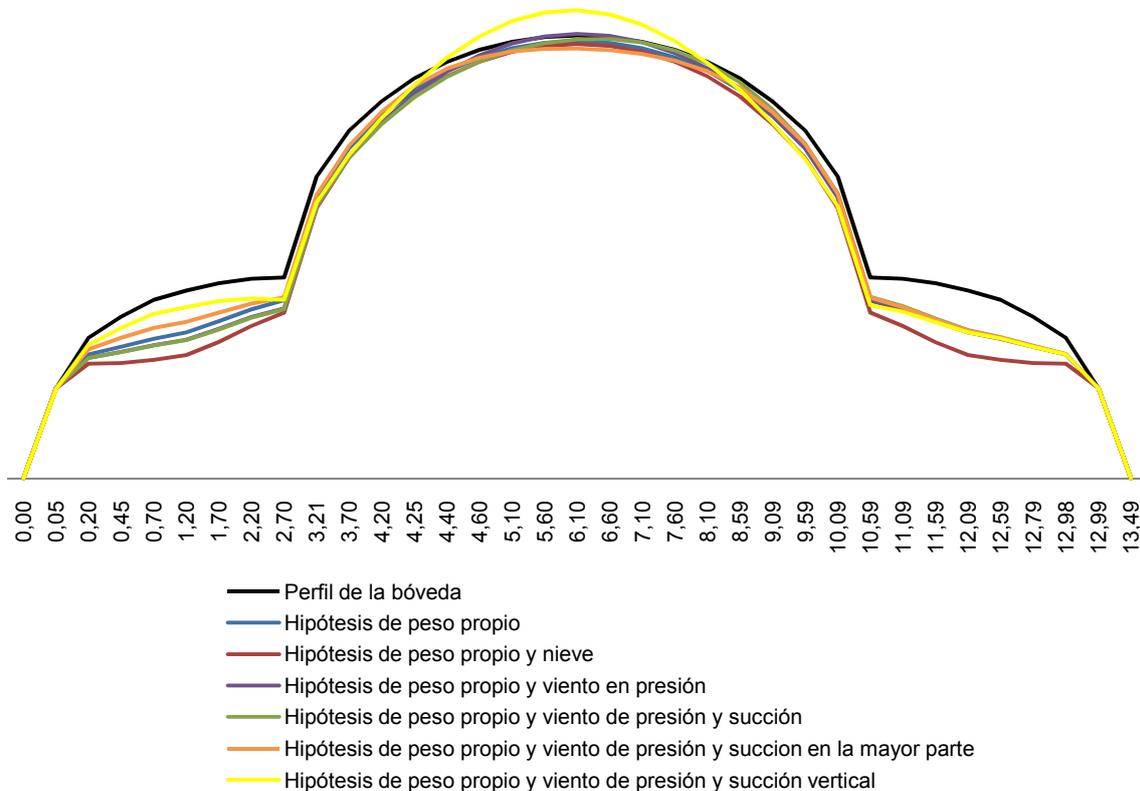


Figura 104. Esquema sobre las deformadas para cada hipótesis.



## 6. Análisis completo de la cubierta.

Para llevar a cabo un análisis completo y pormenorizado de la cubierta es necesario introducir el resto de elementos que componían la cubierta de la iglesia. Aquí se incorporan el arco que separa el ábside de la nave, así como la cúpula del ábside, la cual apoya sobre dicho arco. De esta manera se parte de un modelo más realístico de la cubierta para llevar un análisis no lineal de la solución, para establecer la influencia de la no linealidad geométrica sobre el elemento lámina que estudiamos. Así podremos establecer esfuerzos no previstos mediante el análisis lineal.

### A. Análisis comparativo: lineal y no lineal

Como hemos visto con anterioridad, el modelo de cubierta adecuado para el análisis era aquel que estaba provisto de apoyo en todo el contorno de la cubierta. Pero esto solo es cierto como una aproximación. Si atendemos a la documentación y planos existentes observamos que la cubierta queda apoyada en uno de sus extremos mediante dos muros laterales y un arco central que sustenta el lóbulo semielíptico. Además, el ábside se cubría mediante una cúpula apoyada a su vez sobre porciones laminares adyacentes a ella (figura 105). Este hecho hace que en la zona del arco se produzcan esfuerzos diferentes a los previstos en el modelo inicial, como podemos ver en las siguientes gráficas.

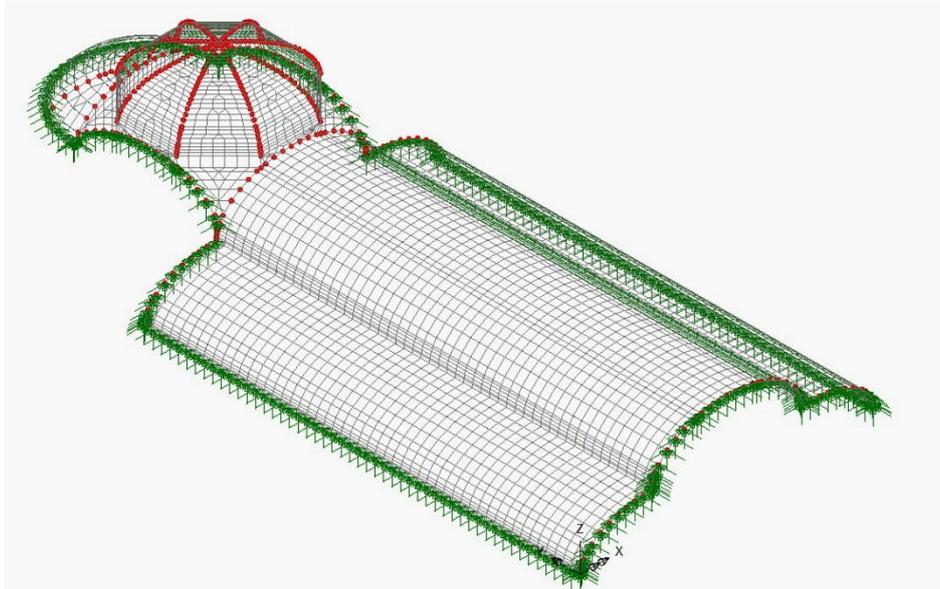


Figura 105. Modelo de cálculo de la cubierta completa.

Para el análisis lineal, el modelo propuesto ha sido modelizado mediante el programa de cálculo basado en el método de elementos finitos LUSAS. El análisis se ha realizado dentro del rango lineal, utilizando para ello el elemento QSI4, cuadrilátero, con 4 nodos y 6 grados de libertad por cada nodo, tres para los movimientos en las tres direcciones del espacio, y otros tres en los giros para cada dirección del espacio. Es un elemento adecuado para láminas finas en 3D, y que cuenta con el comportamiento de membrana así como las deformaciones a flexión de la lámina. Al adecuarse a la teoría de placa delgada se excluyen las deformaciones de corte transversal. Además se ha utilizado el elemento BMS3 en los modelos que incorporan los nervios de intersección. Es un elemento viga en 3D con tres nodos, donde el tercer nodo se usa para definir el plano XY. Tiene 6 grados de libertad en cada nodo extremo, tres en las direcciones del espacio, y otros tres en los giros para cada dirección del espacio. Incluye las deformaciones de corte. En la modelización se han utilizado varias hipótesis de carga:

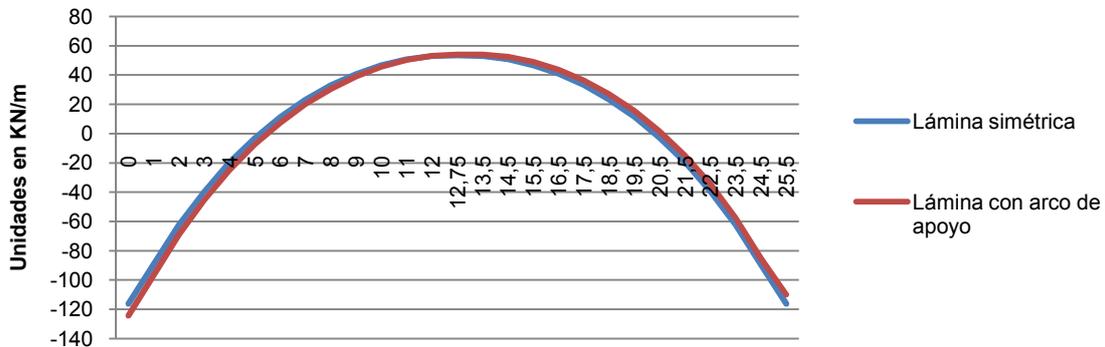
- A) Peso propio: para el espesor de 5cm y el material que forma la lámina, esto es, el hormigón armado.
- B) Peso propio y una sobrecarga de nieve de  $0,65\text{KN/m}^2$

- C) Peso propio y una sobrecarga de viento a presión sobre uno de los laterales de la lámina de  $0,5\text{KN/m}^2$ , según normativa.
- D) Peso propio y sobrecarga de viento a presión de  $0,5\text{KN/m}^2$  en la parte baja de los lóbulos, succión vertical hacia arriba en las zonas altas de los lóbulos de  $1\text{KN/m}^2$ , viento en succión horizontal de la misma magnitud en el resto de la lámina, excepto en la zona baja del lóbulo lateral opuesto a la presión, donde el valor de la succión horizontal es de  $0,4\text{KN/m}^2$ .
- E) Peso propio, una sobrecarga de nieve de  $0,65\text{KN/m}^2$ , y una sobrecarga de viento a presión sobre uno de los laterales de la lámina de  $0,5\text{KN/m}^2$ , según normativa.

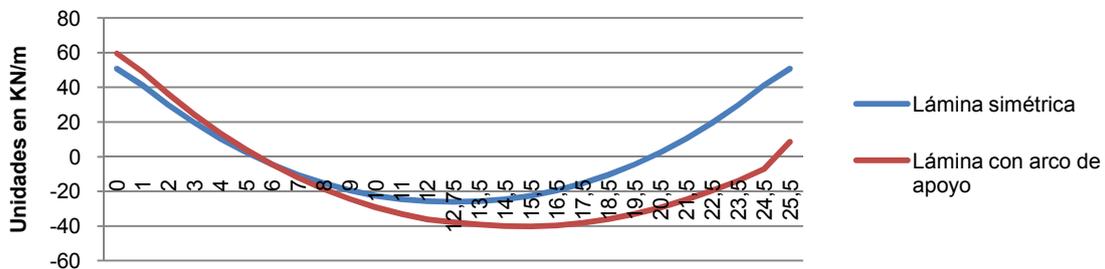
De nuevo las cargas no han sido mayoradas. Los apoyos se han fijado en todo el contorno, restringiendo cualquier movimiento en horizontal o vertical, pero no lo giros. Se ha considerado la fricción que existía entre la propia lámina y los muros de la iglesia, la cual produciría una restricción de movimientos horizontales.

Se ha denominado X a las generatrices, tomando como origen el extremo inferior de uno de los lóbulos laterales y tomando distancias en la dirección transversal a la lámina, siendo  $X= 0\text{m}$  la generatriz de borde y  $X= 4,19\text{m}$  la generatriz de intersección entre lóbulos y  $X= 8,6\text{m}$  a la generatriz superior; al mismo tiempo se han denominado L a las directrices, tomando como origen uno de los extremos de la lámina y tomando distancias en la dirección longitudinal de la bóveda, siendo  $L= 0\text{m}$  la directriz de apoyo en el muros de testa,  $L=12,75\text{m}$  la directriz media de la lámina y  $L=25,5\text{m}$  la directriz de apoyo sobre el arco.

En cuanto a los esfuerzos longitudinales las mayores diferencias las encontramos en los esfuerzos producidos en el lóbulo semielíptico, dada la influencia que el arco tiene sobre sus condiciones de contorno, mientras que en el resto de la lámina no se producen diferencias significativas (gráfica 80). Se observa que las tracciones en la zona del arco se reducen, mientras que las de compresión aumentan y se desplazan de la directriz central, acercándose a la zona del arco, lo que podría afectar a la estabilidad de la lámina (gráfica 81). Esto se debe principalmente al descenso que la lámina experimenta en su apoyo en el arco.



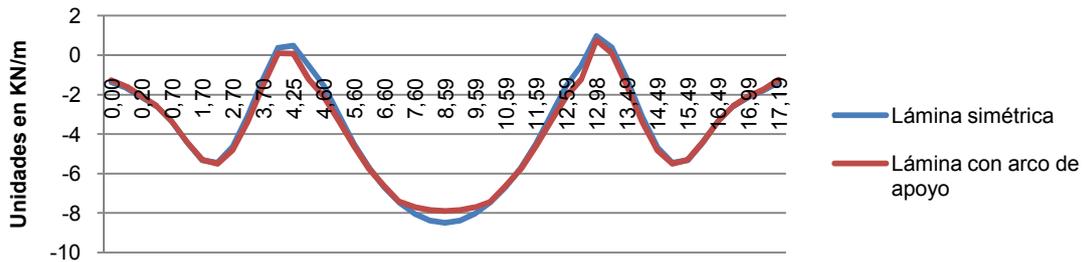
Gráfica 80. Comparación de esfuerzos longitudinales en  $X= 4,19\text{m}$  (H. peso propio)



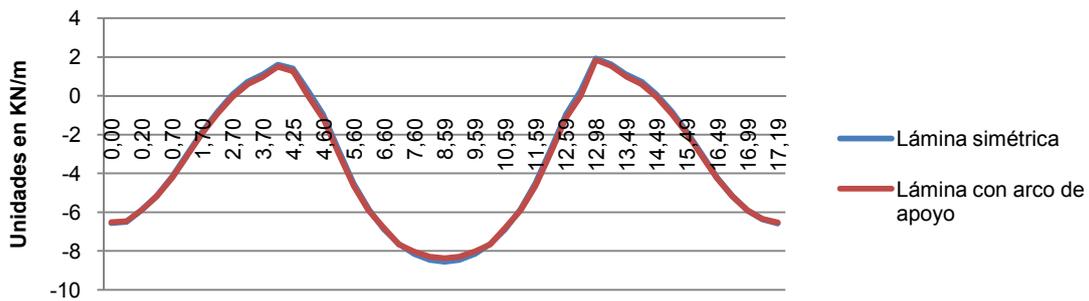
Gráfica 81. Comparación de esfuerzos longitudinales en  $X=8,6\text{m}$  (H. peso propio)

Respecto de los esfuerzos transversales podemos observar que las mayores discrepancias entre modelos se encuentran en la zona de apoyo en el arco, debido a la forma intrínseca de trabajo de aquel, así como de la presencia de esfuerzos debida a la cúpula (gráfica 82). Se produce una

reducción de los esfuerzos. En el resto de la lámina no se aprecian diferencias significativas (gráfica 83).

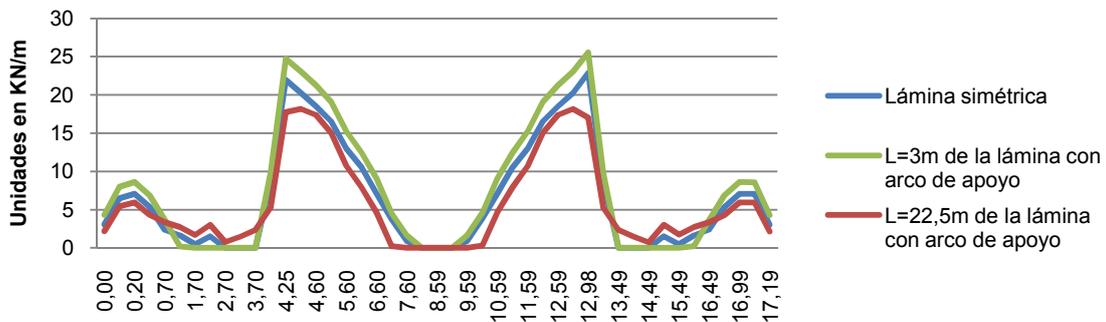


Gráfica 82. Comparación de esfuerzos transversales en L=22,5m (H. peso propio)

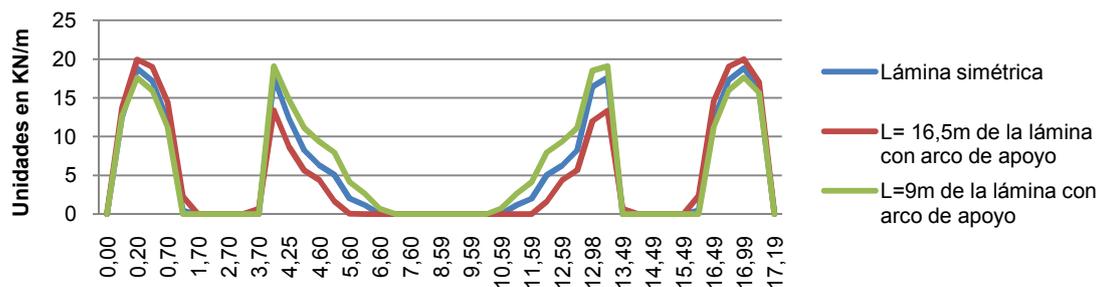


Gráfica 83. Comparación de esfuerzos transversales en L=12,75m (H. peso propio)

Respecto de los esfuerzos tangenciales podemos observar que se produce una reducción de los esfuerzos tangenciales en la zona del arco, mientras que se produce un aumento de estos esfuerzos en la parte apoyado en el muro de testa (gráfica 84). Eso se debe a que el arco es más flexible, con lo que los esfuerzos se redistribuyen hacia el apoyo más rígido. En el resto de la lámina se produce la misma tendencia (gráfica 85).

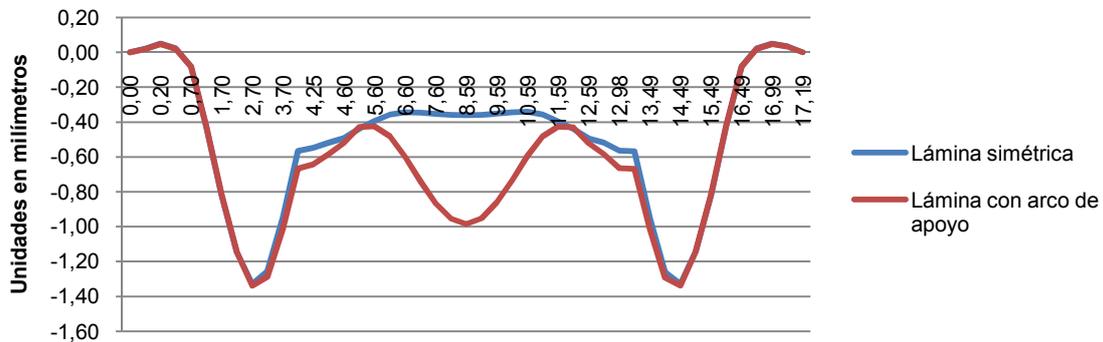


Gráfica 84. Comparación de esfuerzos tangenciales (H. peso propio)

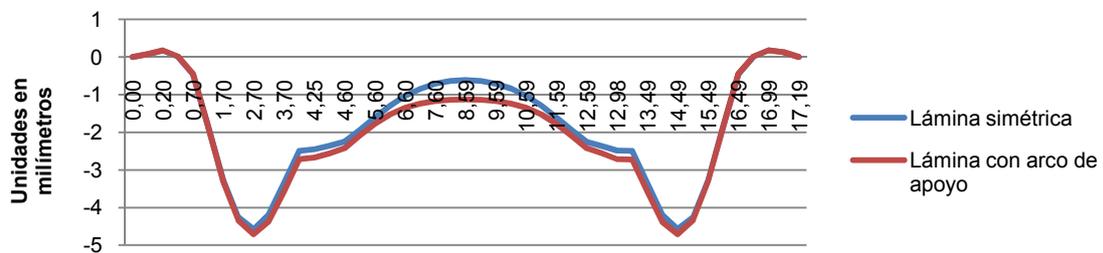


Gráfica 85. Comparación de esfuerzos tangenciales (H. peso propio)

Respecto de los movimientos verticales podemos observar que debido a la menor rigidez del arco de apoyo se producen movimientos no previstos con anterioridad (gráfica 86), haciéndose estos más pronunciados en la zona media de la bóveda (gráfica 87).



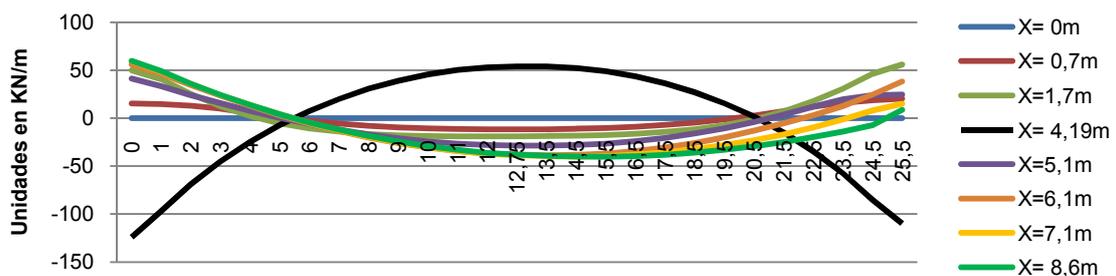
Gráfica 86. Comparación de movimientos verticales en L=22,5m (H. peso propio)



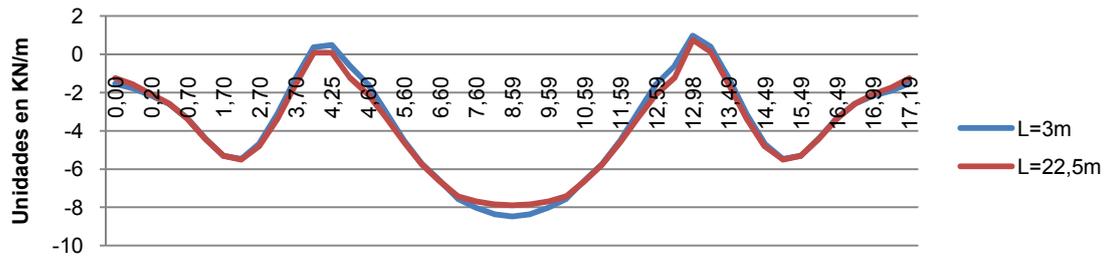
Gráfica 87. Comparación de movimientos verticales en L=12,75m (H. peso propio)

Pero las diferencias en los resultados van más allá. Como sabemos, las condiciones de contorno en la cubierta no son simétricas. Es decir, mientras que uno de los apoyos extremos están materializados a través de un muro, con una rigidez casi infinita, el otro extremo está condicionado por un arco de rigidez determinada así como con la carga adicional venida de la cúpula, de tal manera que el comportamiento final de la cubierta no es simétrico, y por lo tanto los esfuerzos críticos ahora han de ser estudiados con detenimiento para conocer cómo este hecho afecta a la estabilidad de la lámina.

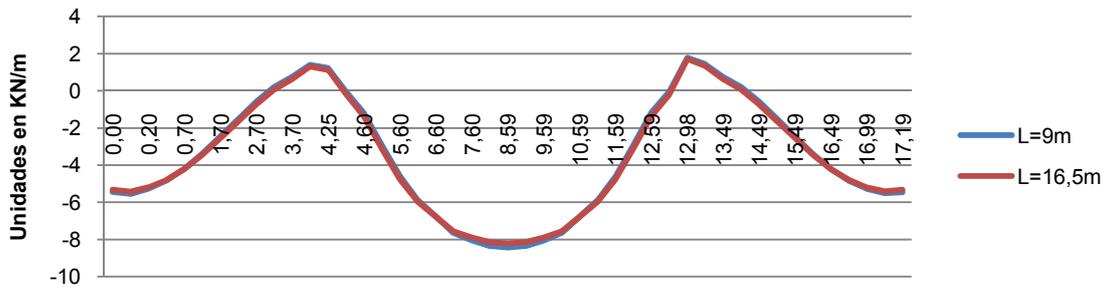
Si observamos los esfuerzos longitudinales así como los transversales de la bóveda en el nuevo modelo (gráficas 88, 89 y 90), podemos ver que el lóbulo central semielíptico queda afectado, mientras que en los laterales se obtienen en la práctica los mismos resultados. Respecto de los esfuerzos longitudinales observamos que se reducen las tracciones en la zona del arco, lo que provoca un aumento de las compresiones en una zona central de la lámina, ligeramente desplazada hacia el arco. Por otro lado observamos que el efecto del arco es positivo respecto de los esfuerzos transversales, pues se reducen las tracciones en las intersecciones entre lóbulos a la vez que se reducen las compresiones en las generatrices superiores.



Gráfica 88. Comparación de esfuerzos longitudinales a lo largo de la lámina (H. peso propio)

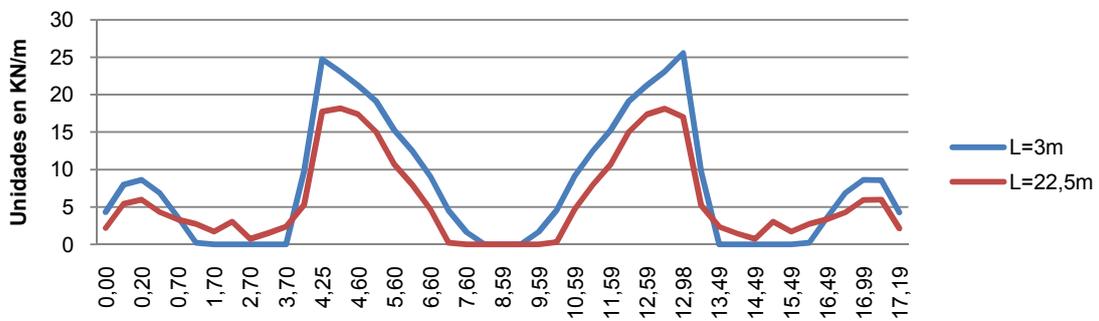


Gráfica 89. Comparación de esfuerzos transversales entre L=3m y L=22,5m (H. peso propio)

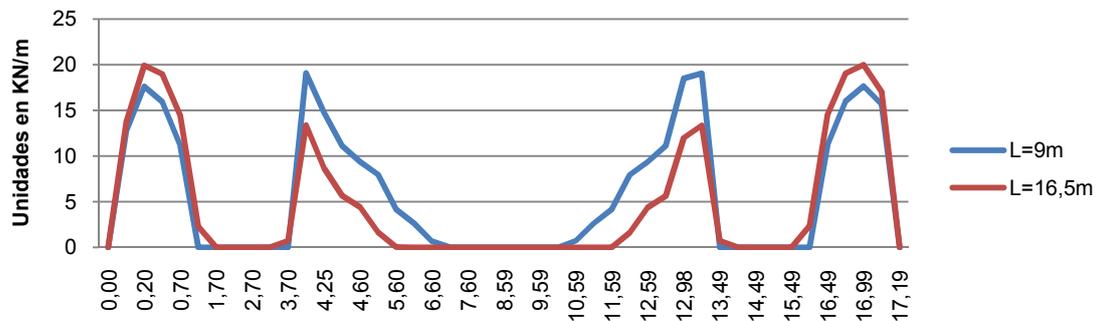


Gráfica 90. Comparación de esfuerzos transversales L=9m y L=16,5m (H. peso propio)

Por otro lado, los esfuerzos tangenciales cambian a lo largo de toda la lámina, dadas las nuevas condiciones de contorno. Debido a la reducción de rigidez en el apoyo del arco, los esfuerzos tangenciales en el lóbulo central disminuyen, mientras que tienden a aumentar en los lóbulos laterales (gráfica 91). Esto se debe a que el arco absorbe menos esfuerzos dada su mayor flexibilidad, lo que provoca la redistribución de esfuerzos hacia los lóbulos laterales, quedando en la nueva situación estos penalizados (gráfica 92).

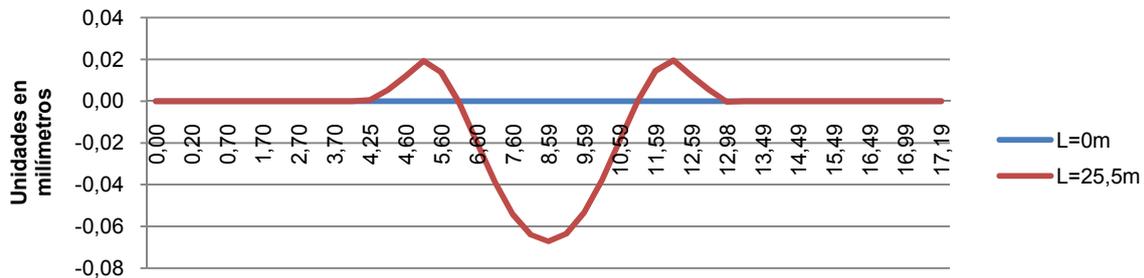


Gráfica 91. Comparación de esfuerzos tangenciales entre L=3m y L=22,5m (H. peso propio)

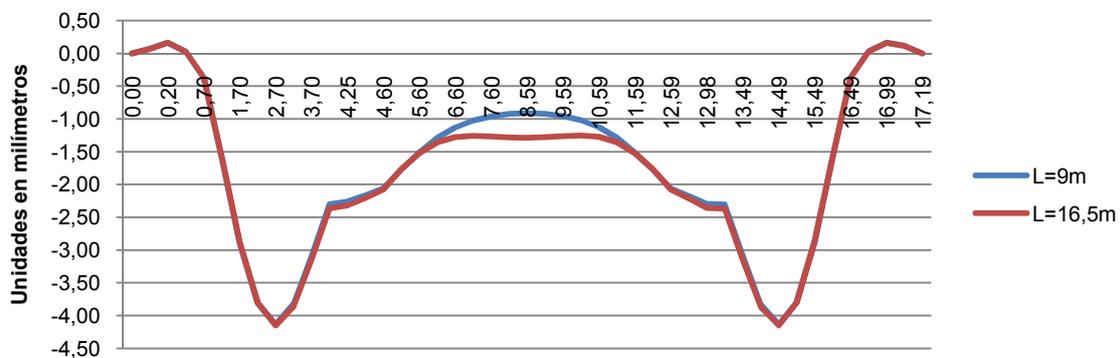


Gráfica 92. Comparación de esfuerzos tangenciales entre L=9m y L=16,5m (H. peso propio)

En cuanto a los desplazamientos verticales era de esperar que fueran mayores en la zona afectada por el apoyo en el arco debido a la flexibilidad que esta forma presenta respecto de la rigidez de un muro de carga (gráfica 93). Los desplazamientos son mayores en la generatriz superior y se concentran en la zona media de la lámina (gráfica 94).



Gráfica 93. Comparación de movimientos verticales entre L=0m y L=25,5m (H. peso propio)



Gráfica 94. Comparación de movimientos verticales entre L=9m y L=16,5m (H. peso propio)

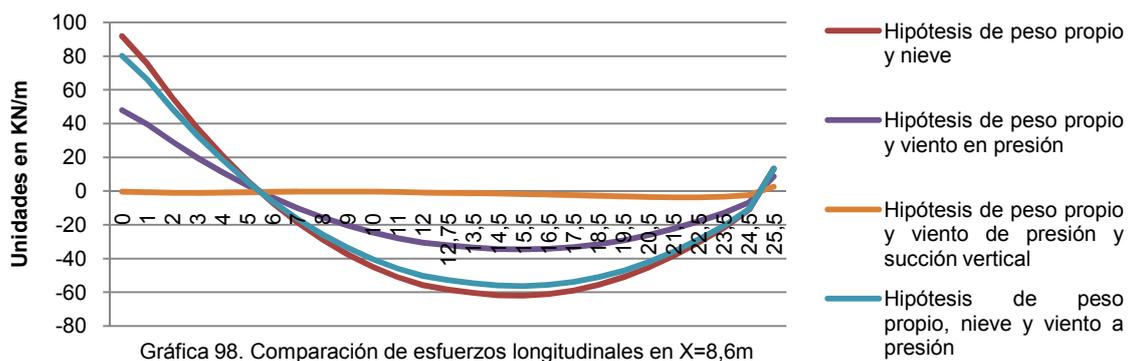
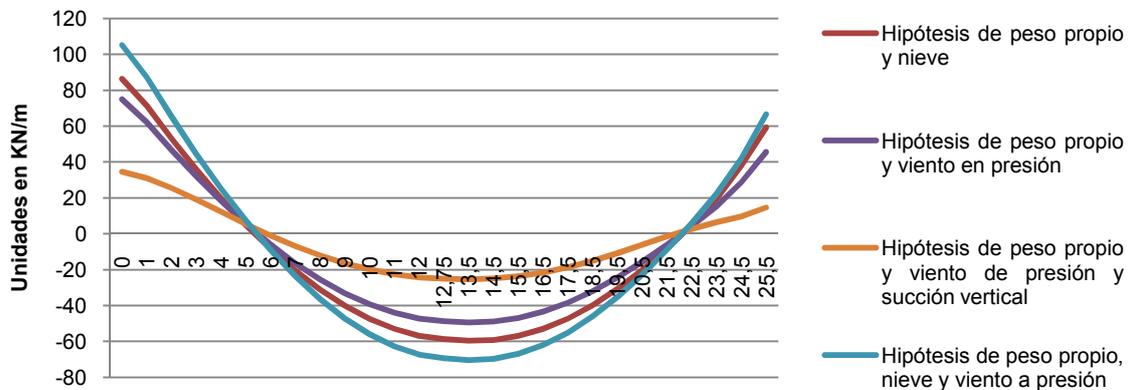
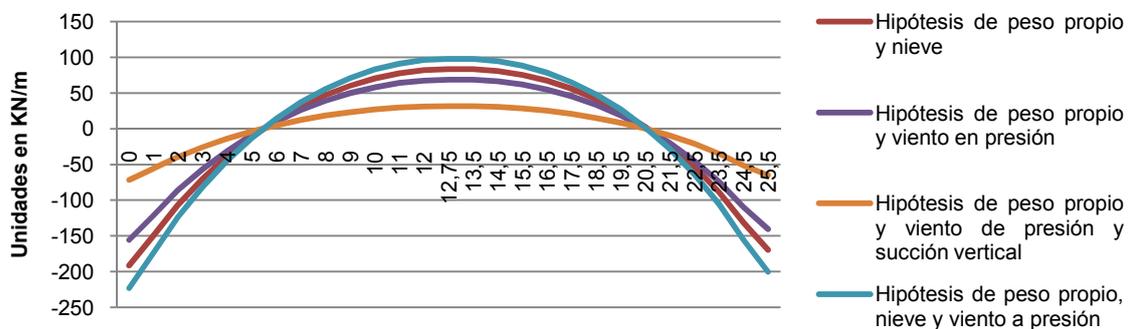
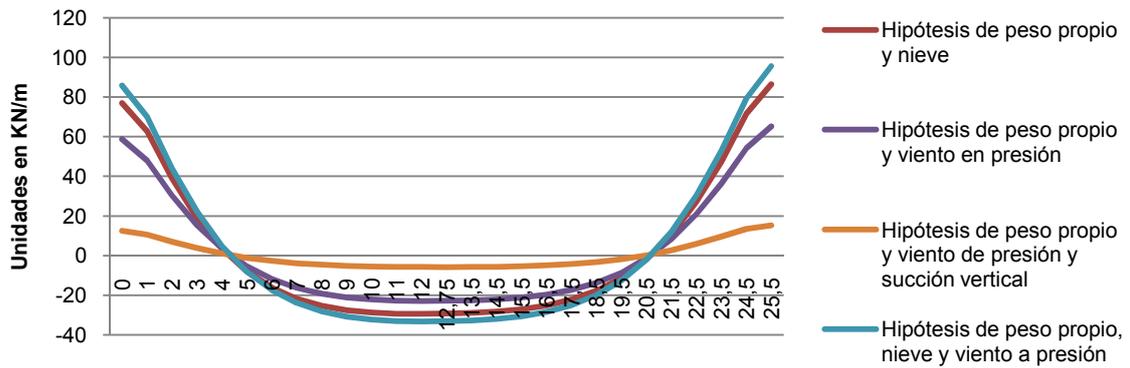
Una vez analizados los efectos producidos por la variación de las condiciones contorno así como la introducción de nuevos elementos de carga, se estudian los efectos provocados por las distintas hipótesis consideradas en este trabajo. Se trabaja con las siguientes hipótesis:

- A) Peso propio y una sobrecarga de nieve de  $0,65\text{KN/m}^2$
- B) Peso propio y una sobrecarga de viento a presión sobre uno de los laterales de la lámina de  $0,5\text{KN/m}^2$ , según normativa.
- C) Peso propio y sobrecarga de viento a presión de  $0,5\text{KN/m}^2$  en la parte baja de los lóbulos, succión vertical hacia arriba en las zonas altas de los lóbulos de  $1\text{KN/m}^2$ , viento en succión horizontal de la misma magnitud en el resto de la lámina, excepto en la zona baja del lóbulo lateral opuesto a la presión, donde el valor de la succión horizontal es de  $0,4\text{KN/m}^2$ .
- D) Peso propio, una sobrecarga de nieve de  $0,65\text{KN/m}^2$ , y una sobrecarga de viento a presión sobre uno de los laterales de la lámina de  $0,5\text{KN/m}^2$ , según normativa.

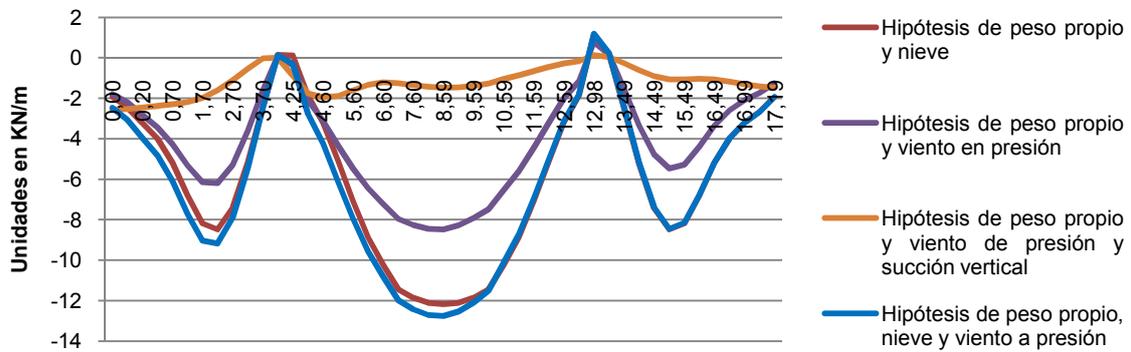
Las cargas introducidas se encuentran en situación de servicio, y por lo tanto no se han mayorado para este análisis.

Desde el punto de vista de los esfuerzos longitudinales producidos en la lámina podemos ver que la hipótesis predominante es la D, aunque la hipótesis A produce esfuerzos muy similares. La hipótesis C produce esfuerzos mínimos. Además podemos ver que la magnitud de esfuerzos es mayor para los lóbulos laterales apoyados en el muro contiguo al arco de carga, y las compresiones se centran en la zona media de la lámina (gráfica 95). Además como era de esperar la tendencia de esfuerzos cambia en la generatriz de nervio (gráfica 96). Sin embargo en el lóbulo semielíptico la tendencia cambia, pues los esfuerzos son de menor magnitud en el apoyo de la lámina en el arco, y al mismo tiempo las

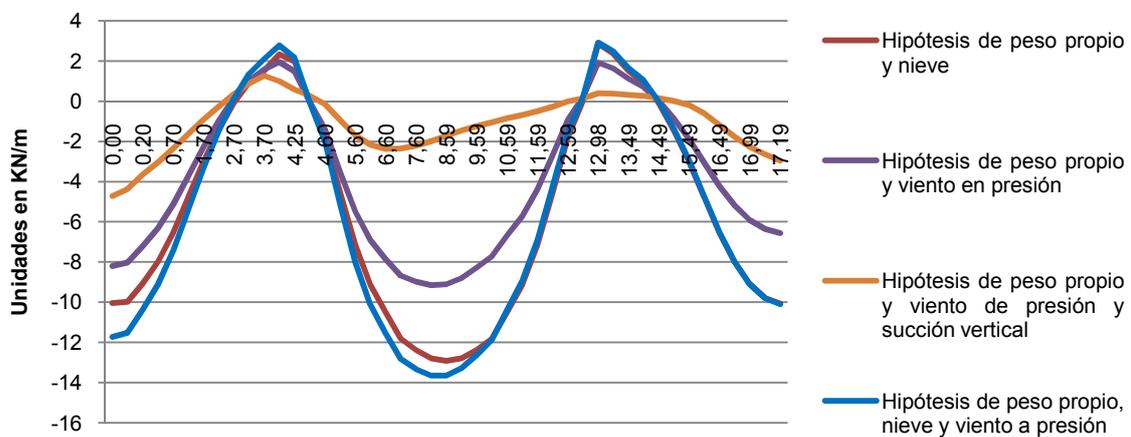
compresiones se desplazan hacia el arco (gráficas 97 y 98). Esto se debe a la flexibilidad del arco, de tal manera que los esfuerzos se redistribuyen desde la lámina semielíptica a los lóbulos laterales.



Respecto de los esfuerzos transversales podemos observar que de nuevo la hipótesis de carga predominante es la D, seguida por la A, mientras que la C produce esfuerzos mínimos (gráficas 99 y 100).

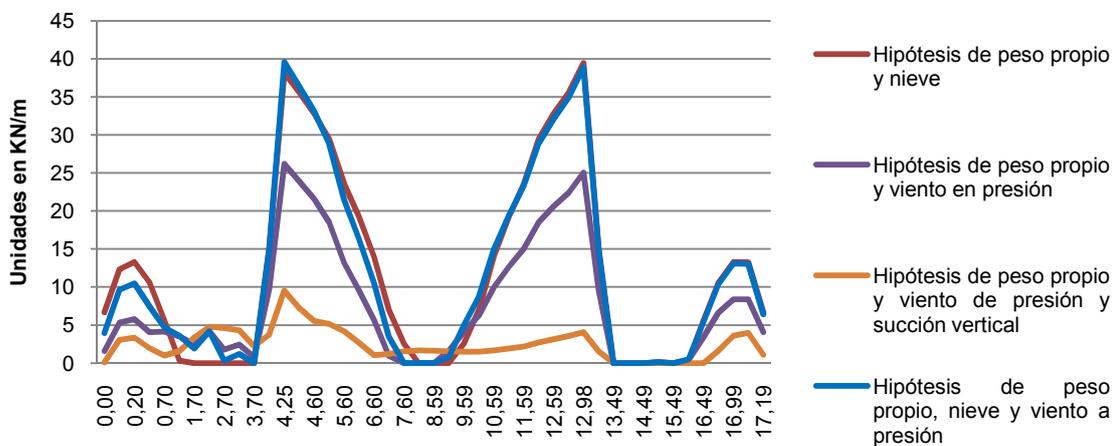


Gráfica 99. Comparación de esfuerzos transversales en L=22,5m

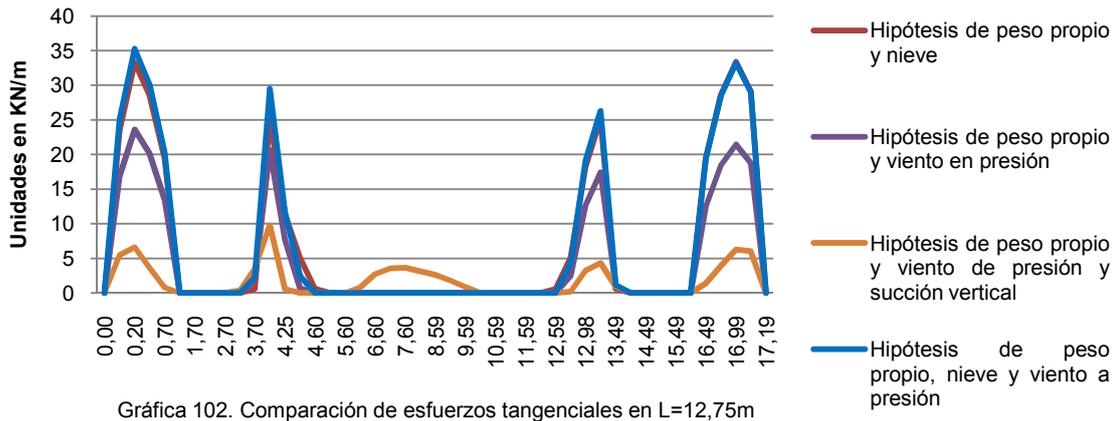


Gráfica 100. Comparación de esfuerzos transversales en L=12,75m

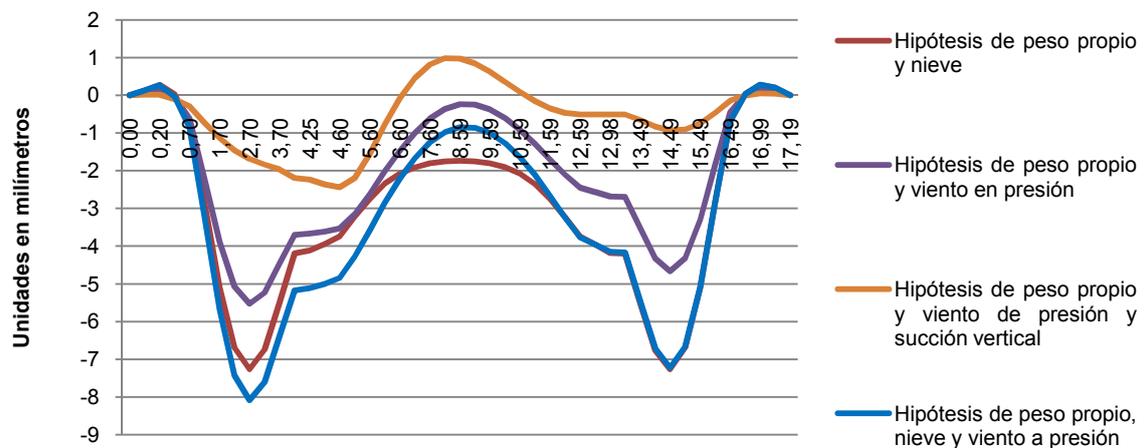
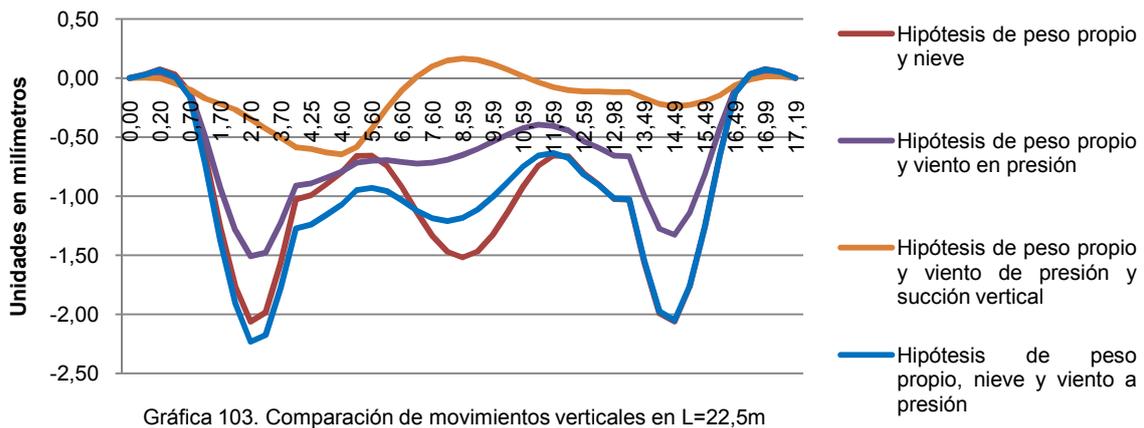
También respecto a los esfuerzos tangenciales podemos observar que la hipótesis de carga que produce mayores esfuerzos es la D (gráfica 101). Sin embargo la hipótesis C produce esfuerzos de corte en la zona central de la lámina en las generatrices superiores de la semielipse (gráfica 102).



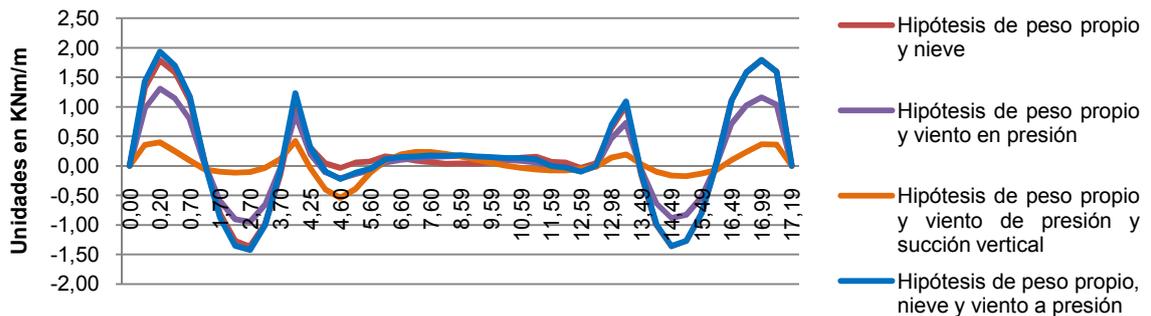
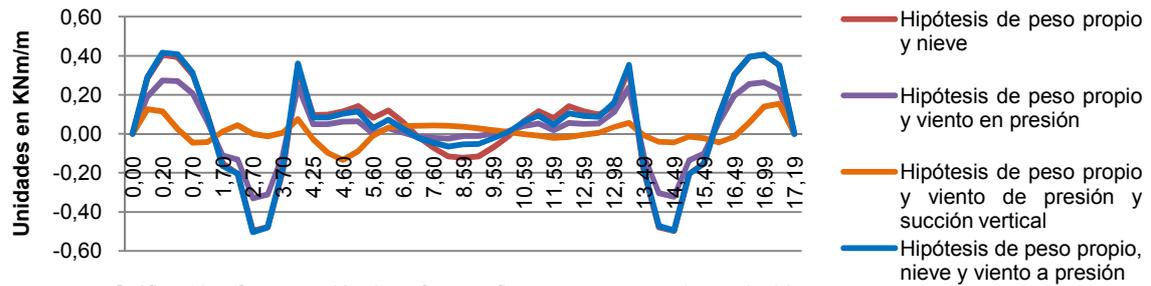
Gráfica 101. Comparación de esfuerzos tangenciales en L=3m



Respecto de los desplazamientos verticales (gráficas 103 y 104), podemos observar que la hipótesis D produce mayores descensos en la zona intermedia de los lóbulos laterales a lo largo de toda la bóveda. Sin embargo la hipótesis A es la que produce mayores descensos en la generatriz superior del lóbulo semielíptico. La hipótesis D produce el ascenso de la parte superior de la bóveda, lo que provoca esfuerzos flectores transversales distintos a los esperados, lo cual afecta al armado necesario.



Si analizamos los momentos flectores transversales podemos observar que la hipótesis C produce esfuerzos diferentes a las demás en las zonas cercanas al apoyo en el arco (gráficas 105 y 106).



Además si contrastamos las leyes de momentos flectores transversales con el armado que encontramos en los planos de Torroja podemos observar que existen discrepancias entre ellos (figura 106). Se comprueba que el armado de los lóbulos laterales no se corresponde con las tracciones que resultan en ellos, pues tanto en la cara inferior como en la superior en armado no cubre la longitud marcada mediante líneas rojas. Sin embargo en el lóbulo superior el armado se adapta prácticamente a las leyes de momentos, tanto en la zona de intersección entre lóbulos así como en el resto del lóbulo central, dado que aquí los momentos son casi nulos. Por lo tanto sería necesario comprobar si se producía fisuración en esta situación de armado.

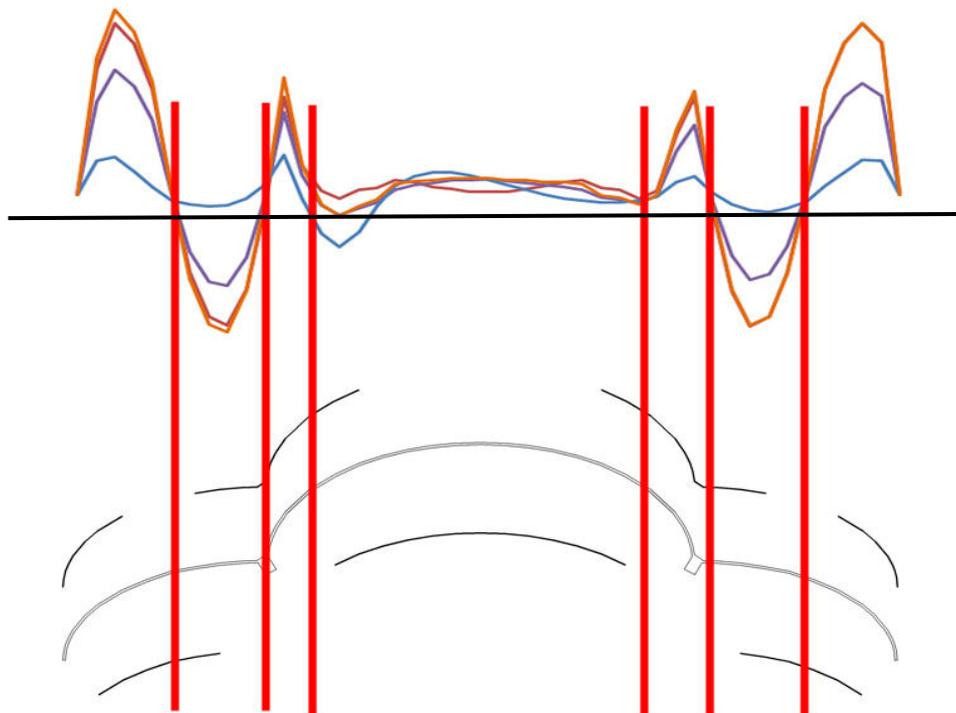
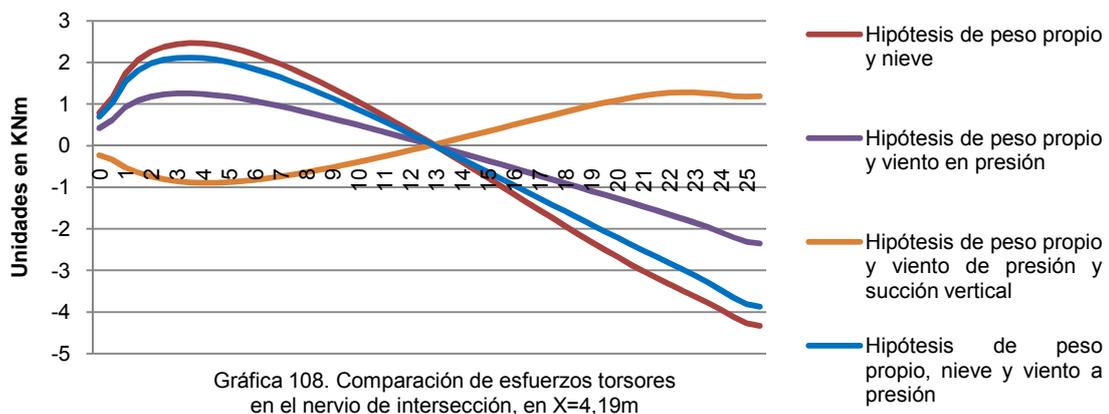
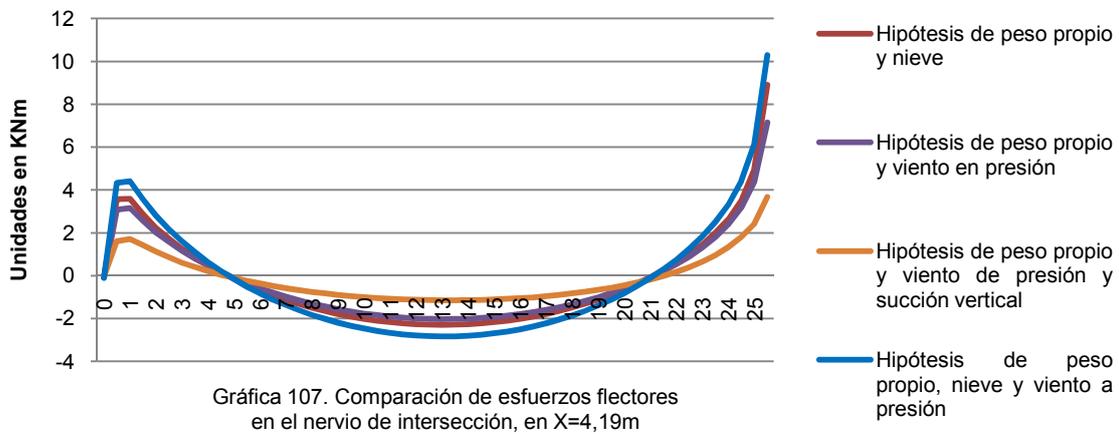


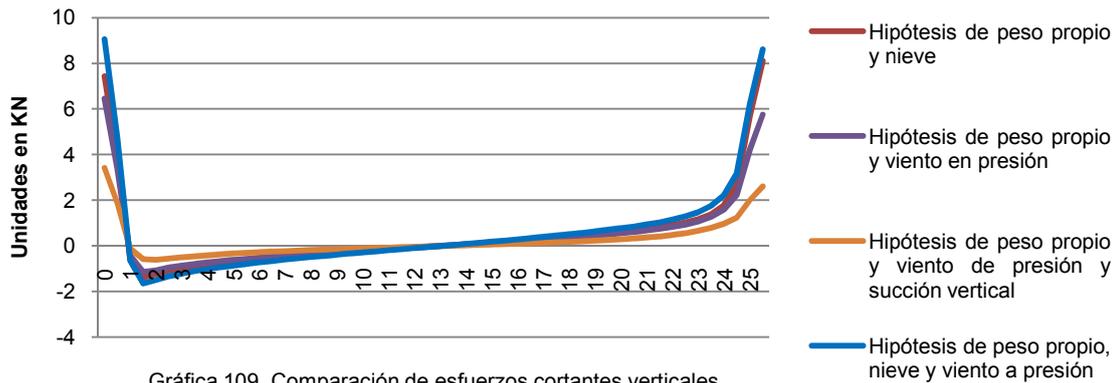
Figura 106. Esquema de la correspondencia entre los momentos flectores transversales de la lámina y el armado dispuesto en los planos originales.

Por tanto queda claro que las hipótesis más controvertidas que podrían actuar sobre la bóveda son A, C y D. Cada una afecta a la lámina de una manera distinta y por lo tanto es necesario tenerlas en cuenta.

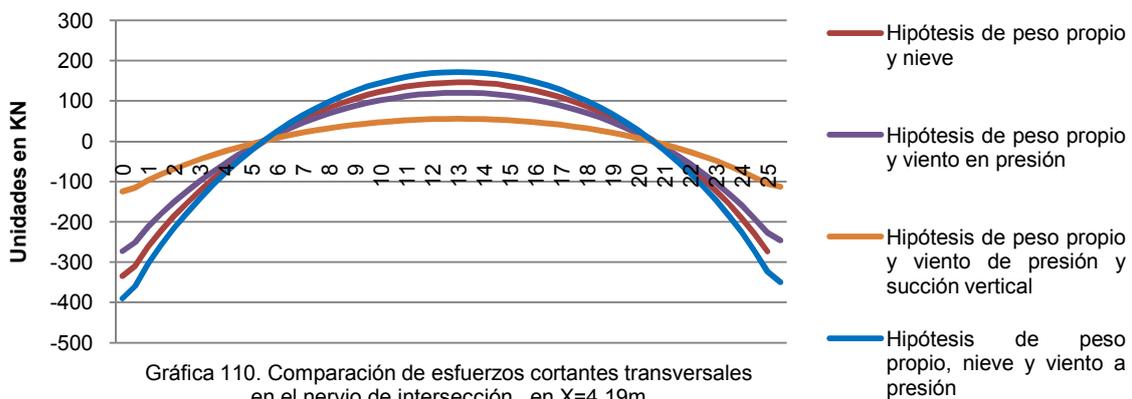
Ahora nos centraremos en los nervios situados en las intersecciones así como en el arco de apoyo. Se han estudiado los efectos de las distintas hipótesis para determinar los esfuerzos que actúan sobre ellos y así entender mejor su funcionamiento. Para el estudio de los nervios se ha utilizado una graduación del eje X que viene dada por la longitud de los nervios, graduando el eje cada metro. Mientras la graduación del eje X de las gráficas para el arco se ha utilizado las coordenadas dadas por Torroja en los planos técnicos. El arco inicia su eje a 4,19m del origen lateral de la bóveda, y termina a 12,98m de ese origen.

Si observamos los esfuerzos flexores que actúan sobre los nervios podemos ver que tienen esfuerzos similares a los de una viga, aunque de magnitud mucho menor, produciéndose los mayores esfuerzos en la zona del arco (gráfica 107). La hipótesis D es la más comprometida. Para los esfuerzos torsores se observa que la hipótesis C crea esfuerzos distintos, lo que hay que tener en cuenta, y la hipótesis A es la que produce esfuerzos de mayor magnitud (gráfica 108). En cuanto a los esfuerzos cortantes se sigue la misma tendencia tanto en dirección vertical como horizontal, aunque se produce esfuerzos de mayor magnitud en esta última (gráficas 109 y 110). Es destacable que los esfuerzos de mayor magnitud se concentran en los extremos, por lo que se deduce que los nervios contribuyen de manera destacable a absorber los esfuerzos cortantes, aliviando los esfuerzos en la lámina, aunque son de mayor magnitud en el apoyo más rígido. Por lo tanto a la vista de los datos aportados se puede deducir que los nervios de intersección entre lóbulos poseen una misión rigidizadora, pues absorben predominantemente esfuerzos no previstos tanto de torsión como de cortante en dirección horizontal, pues son los de mayor magnitud, lo cual explica la forma esviada con la que fueron diseñados. Así queda patente en la figura 107. Respecto del resto de esfuerzos se observa que quedan absorbidos casi por completo por la lámina, mientras que los nervios solo colaboran en una pequeña parte en ellos.





Gráfica 109. Comparación de esfuerzos cortantes verticales en el nervio de intersección, en X=4,19m



Gráfica 110. Comparación de esfuerzos cortantes transversales en el nervio de intersección, en X=4,19m

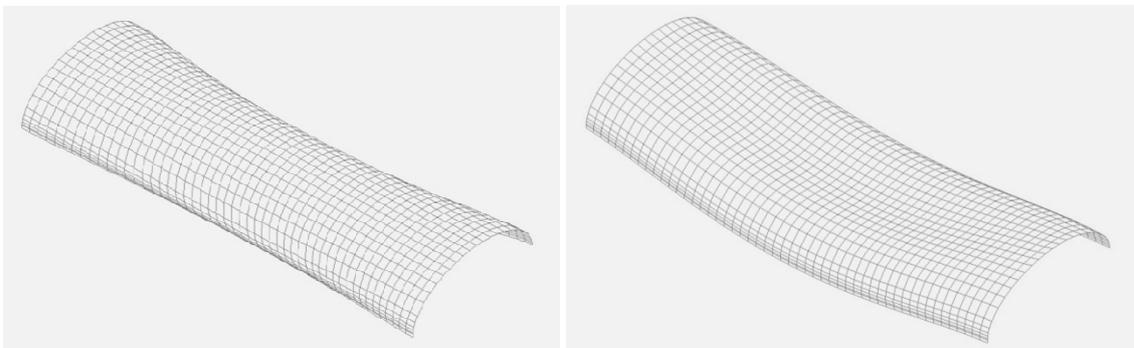
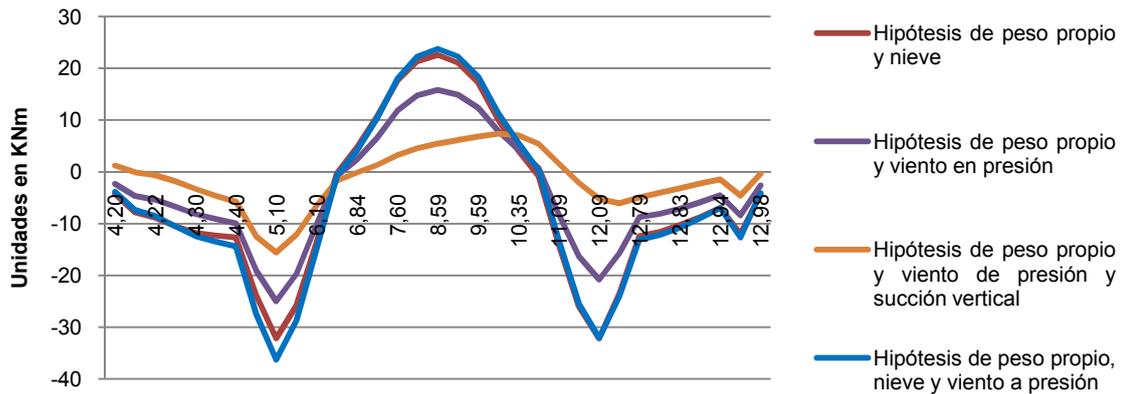
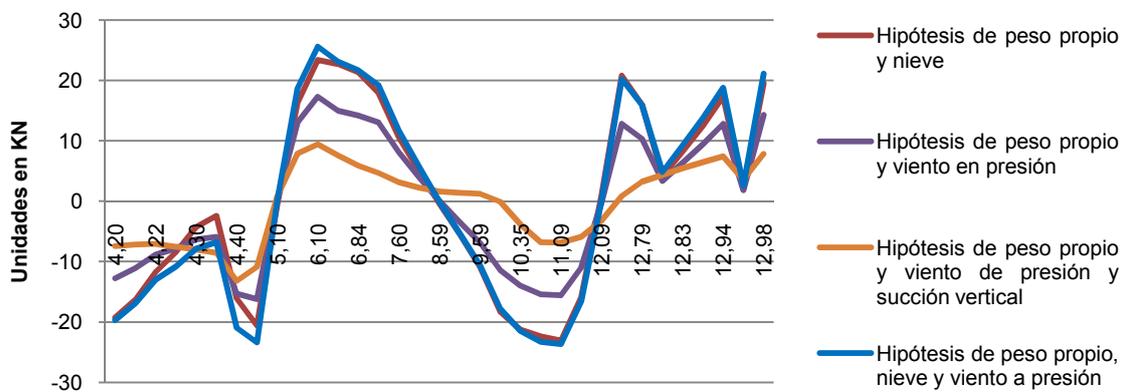


Figura 107. De izquierda a derecha: Deformada de una lámina elíptica sin nervios de borde; Deformada de una lámina elíptica con nervios de borde.

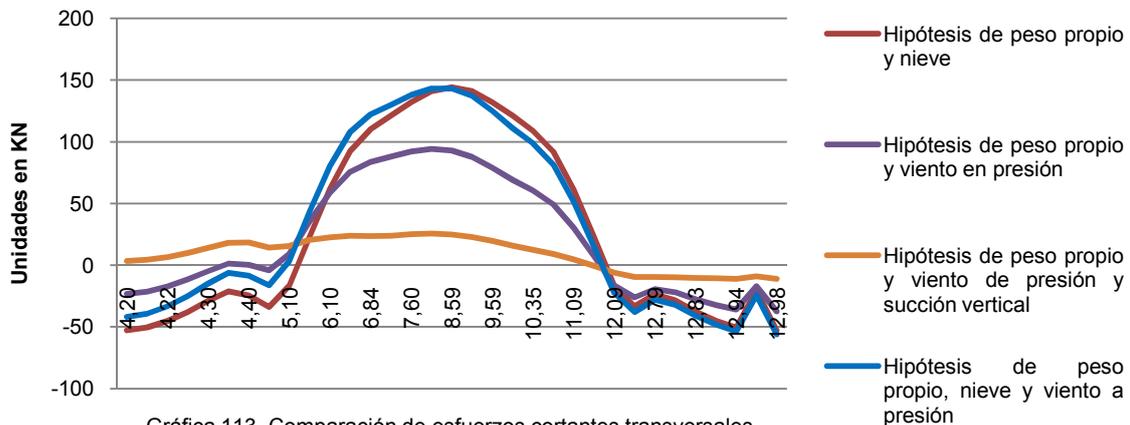
Si ahora observamos el arco de apoyo podemos ver que esta se encuentra solicitada por esfuerzos de mayor magnitud en comparación con los nervios longitudinales de la bóveda, excepto en su dirección transversal, dada la colaboración de la bóveda y la cúpula. Se producen esfuerzos flectores que producen tracción en la cara superior del arco en la parte media del arco, mientras que producen tracciones en la cara inferior en la parte inferior de éste (gráfica 111). En cuanto a los esfuerzos torsores se observa que son nulos en toda la longitud del arco. Podemos ver también que el arco colabora en la absorción de esfuerzos cortantes, aunque son de mayor magnitud aquellos que actúan horizontalmente, transversales al arco, lo cual era de esperar debido a la forma predominantemente horizontal que tiene el arco (gráficas 112 y 113). Las hipótesis más comprometidas son la D y la A. En este caso la hipótesis C no produce esfuerzos significativos.



Gráfica 111. Comparación de esfuerzos flectores en el arco de apoyo, en L=25,5m



Gráfica 112. Comparación de esfuerzos cortantes verticales en el arco de apoyo, en L=25,5m



Gráfica 113. Comparación de esfuerzos cortantes transversales en el arco de apoyo, en L=25,5m

En este estudio sobre la cubierta de Villaverde se han analizado muchos de los aspectos que influyen en los esfuerzos resultantes. Pero hasta ahora, los análisis que se han llevado a cabo se han realizado dentro del rango lineal. Como ya se ha dicho anteriormente, la geometría juega un papel muy importante en el funcionamiento de este tipo de estructuras. Por lo tanto, la ejecución de este tipo de láminas de hormigón armado ha de ser cuidadosa, pues se ha de tener en cuenta el espesor mínimo con el que fue ejecutada así como la gran luz que cubre. De esta manera vamos a realizar un análisis no lineal de la lámina para observar los esfuerzos imprevistos posibles debido a la no linealidad geométrica de la estructura, según las conclusiones anteriores.

Para el análisis no lineal geométrico, el modelo propuesto ha sido modelizado mediante el programa de cálculo basado en el método de elementos finitos LUSAS. El análisis se ha realizado dentro del rango no lineal geométrico únicamente, utilizando para ello el elemento QSL8, cuadrilátero, con 8 nodos, nombrados en sentido antihorario, con 3 grados de libertad en el movimiento en las tres direcciones del espacio para los nodos de esquina, mientras que el resto tiene cinco grados de libertad, tres para los movimientos en las direcciones del espacio, y de giro. elemento adecuado para láminas finas en 3D, y que cuenta con el comportamiento de membrana así como las deformaciones a flexión de la lámina. Al adecuarse a la teoría de placa delgada se excluyen las deformaciones de corte transversal. El programa LUSAS lo recomienda para este tipo de análisis. Por otra parte este elemento es muy eficaz para comprobar el comportamiento de estructuras laminares curvas que contienen varias intersecciones entre superficies. Además se ha utilizado el elemento BTX3 para modelizar los nervios de intersección. Es un elemento viga en 3D con tres nodos, donde el tercer nodo se usa para definir el plano XY. Tiene 6 grados de libertad en cada nodo extremo, tres en las direcciones del espacio, y otros tres en los giros para cada dirección del espacio. Se incluyen las deformaciones de corte. Se tendrán en cuenta las siguientes hipótesis de carga para cada tipo de esfuerzos y según el tipo de elemento:

A) Lámina.

- Esfuerzos longitudinales:
  1. Peso propio y una sobrecarga de nieve de  $0,65\text{KN/m}^2$
  2. Peso propio, una sobrecarga de nieve de  $0,65\text{KN/m}^2$ , y una sobrecarga de viento a presión sobre uno de los laterales de la lámina de  $0,5\text{KN/m}^2$ , según normativa.
- Esfuerzos transversales:
  1. Peso propio, una sobrecarga de nieve de  $0,65\text{KN/m}^2$ , y una sobrecarga de viento a presión sobre uno de los laterales de la lámina de  $0,5\text{KN/m}^2$ , según normativa.
- Esfuerzos tangenciales:
  1. Peso propio y sobrecarga de viento a presión de  $0,5\text{KN/m}^2$  en la parte baja de los lóbulos, succión vertical hacia arriba en las zonas altas de los lóbulos de  $1\text{KN/m}^2$ , viento en succión horizontal de la misma magnitud en el resto de la lámina, excepto en la zona baja del lóbulo lateral opuesto a la presión, donde el valor de la succión horizontal es de  $0,4\text{KN/m}^2$ .
  2. Peso propio, una sobrecarga de nieve de  $0,65\text{KN/m}^2$ , y una sobrecarga de viento a presión sobre uno de los laterales de la lámina de  $0,5\text{KN/m}^2$ , según normativa.
- Esfuerzos flectores transversales:
  1. Peso propio, una sobrecarga de nieve de  $0,65\text{KN/m}^2$ , y una sobrecarga de viento a presión sobre uno de los laterales de la lámina de  $0,5\text{KN/m}^2$ , según normativa.
- Desplazamientos verticales:
  1. Peso propio y una sobrecarga de nieve de  $0,65\text{KN/m}^2$
  2. Peso propio y sobrecarga de viento a presión de  $0,5\text{KN/m}^2$  en la parte baja de los lóbulos, succión vertical hacia arriba en las zonas altas de los lóbulos de  $1\text{KN/m}^2$ , viento en succión horizontal de la misma magnitud en el resto de la lámina, excepto en la zona baja del lóbulo lateral opuesto a la presión, donde el valor de la succión horizontal es de  $0,4\text{KN/m}^2$ .
  3. Peso propio, una sobrecarga de nieve de  $0,65\text{KN/m}^2$ , y una sobrecarga de viento a presión sobre uno de los laterales de la lámina de  $0,5\text{KN/m}^2$ , según normativa.
- 1. Nervios:
  1. Peso propio y una sobrecarga de nieve de  $0,65\text{KN/m}^2$

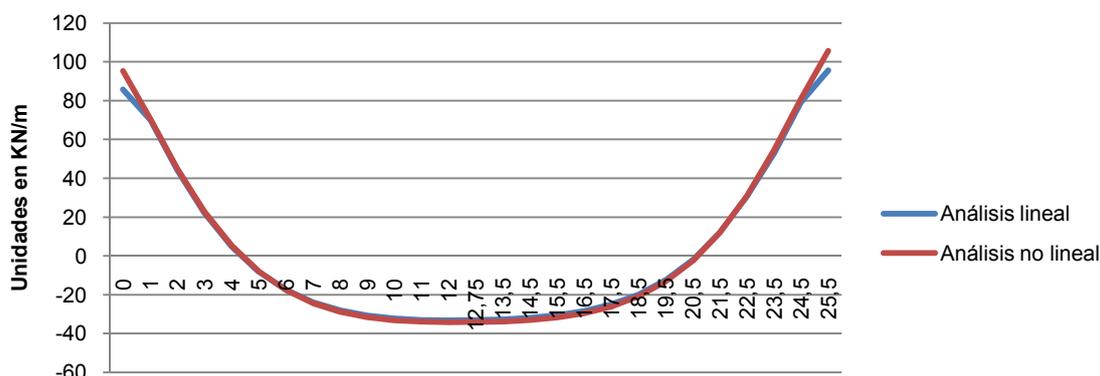
2. Peso propio y sobrecarga de viento a presión de  $0,5\text{KN/m}^2$  en la parte baja de los lóbulos, succión vertical hacia arriba en las zonas altas de los lóbulos de  $1\text{KN/m}^2$ , viento en succión horizontal de la misma magnitud en el resto de la lámina, excepto en la zona baja del lóbulo lateral opuesto a la presión, donde el valor de la succión horizontal es de  $0,4\text{KN/m}^2$ .
3. Peso propio, una sobrecarga de nieve de  $0,65\text{KN/m}^2$ , y una sobrecarga de viento a presión sobre uno de los laterales de la lámina de  $0,5\text{KN/m}^2$ , según normativa.

2. Arco de apoyo:

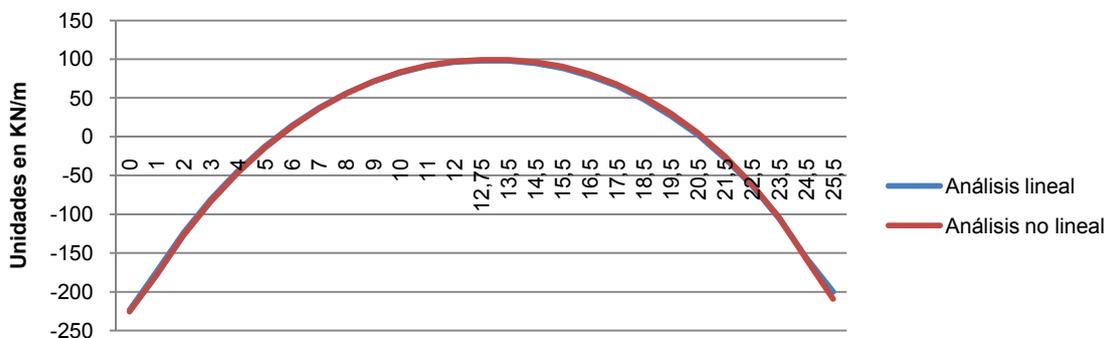
1. Peso propio y una sobrecarga de nieve de  $0,65\text{KN/m}^2$
2. Peso propio, una sobrecarga de nieve de  $0,65\text{KN/m}^2$ , y una sobrecarga de viento a presión sobre uno de los laterales de la lámina de  $0,5\text{KN/m}^2$ , según normativa.

Los apoyos se fijan de la misma manera que en el análisis lineal.

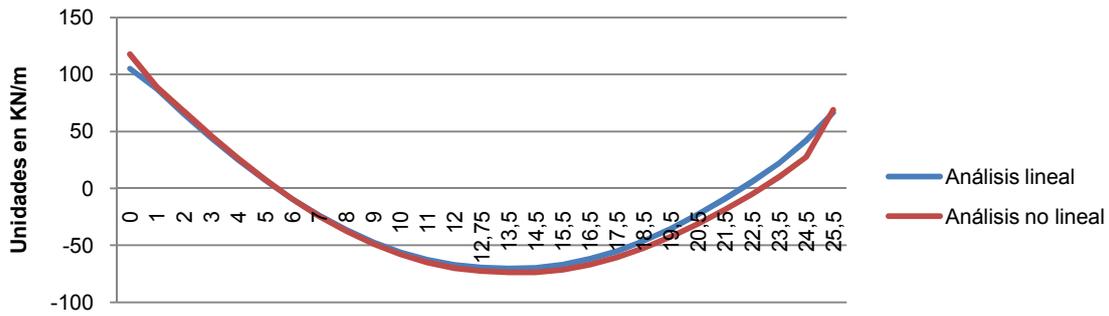
Con respecto a los esfuerzos longitudinales (gráficas 114, 115, 116) podemos observar que debido a la geometría, las condiciones de contorno de la bóveda y las hipótesis consideradas, las mayores discrepancias se encuentran en las zonas alejadas de los nervios, en los apoyos extremos, con diferencias de hasta  $20\text{KN/m}$  en tracción para la hipótesis de sobrecarga de nieve, un valor considerable, aunque hay que tener en cuenta que los valores de tracción máximos pueden llegar a superar los  $100\text{KN/m}$  en las zonas más altas de la bóveda (gráfica 117). En el centro de la lámina se produce un aumento de  $4\text{KN/m}$  en compresión. Ambas discrepancias habrá que tenerlas en cuenta en el caso de ser decisivas en la estabilidad de la lámina.



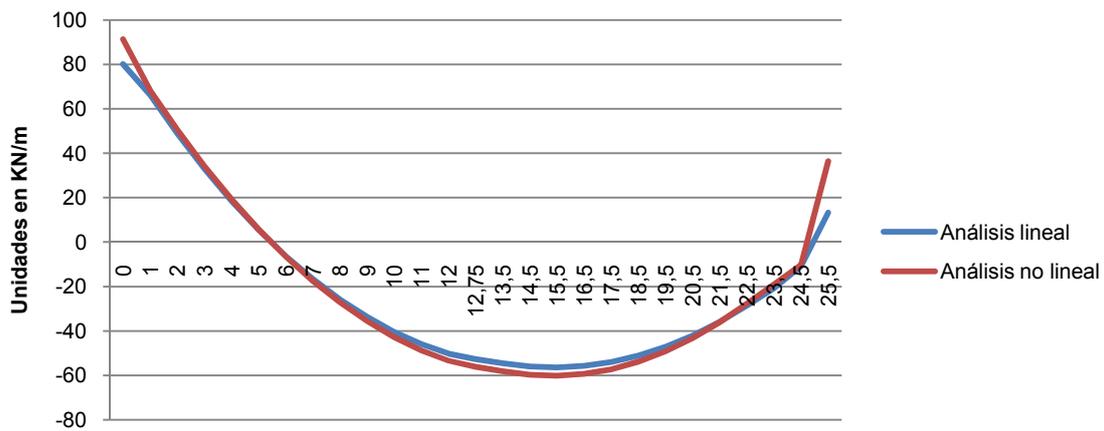
Gráfica 114. Comparación de esfuerzos longitudinales en  $X=1,7\text{m}$   
(H. peso propio, sobrecarga de nieve y viento en presión)



Gráfica 115. Comparación de esfuerzos longitudinales en  $X=4,19\text{m}$   
(H. peso propio, sobrecarga de nieve y viento en presión)

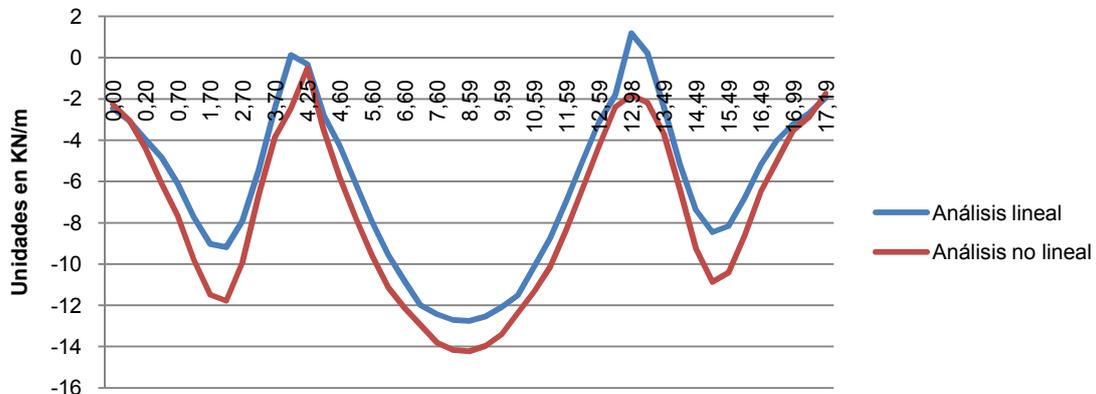


Gráfica 116. Comparación de esfuerzos longitudinales en X=6,1m (H. peso propio, sobrecarga de nieve y viento en presión)

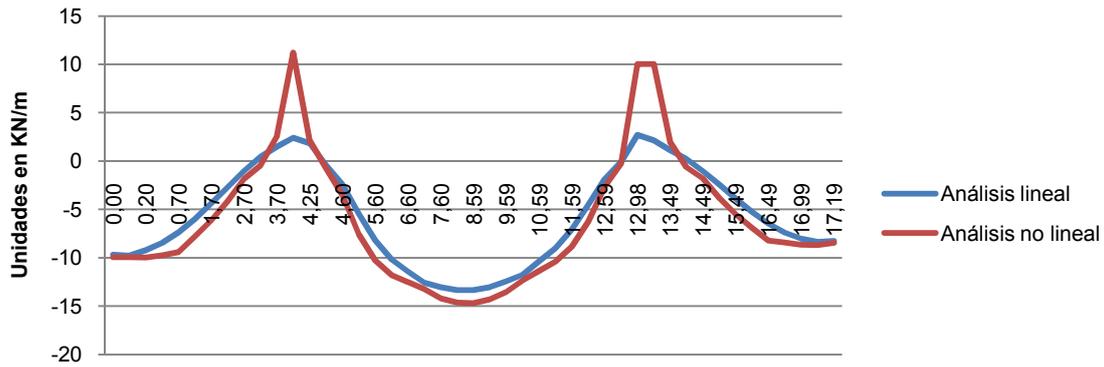


Gráfica 117. Comparación de esfuerzos longitudinales en X=8,6m (H. peso propio, sobrecarga de nieve)

Respecto de los esfuerzos transversales podemos observar que se producen discrepancias a lo largo de la lámina en los puntos de máximos esfuerzos. Podemos observar dos zonas que presentan mayores diferencias. En la zona de apoyos podemos observar que se produce un aumento de las compresiones entorno a 5KN/m debido al efecto arco que se presenta en esa zona (gráfica 118), mientras que se producen un aumento de las tracciones en la zona media de la lámina en torno a 9KN/m debido al peso que ejercen los lóbulos laterales sobre el central, así como por el efecto del viento (gráfica 119). Dado que las magnitudes de compresión entran dentro del orden establecido, no son preocupantes, mientras que hay que prestar especial atención a las tracciones producidas en la intersección entre lóbulos.

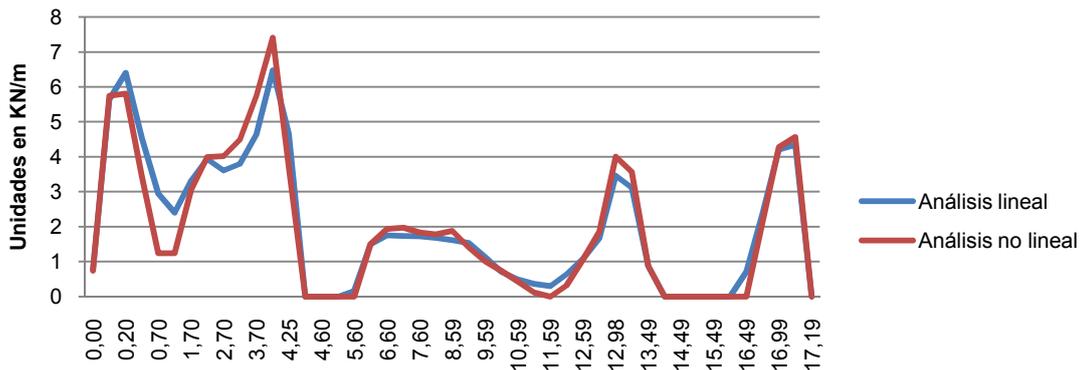


Gráfica 118. Comparación de esfuerzos transversales en L=22,5m (H. peso propio, sobrecarga de nieve y viento en presión)

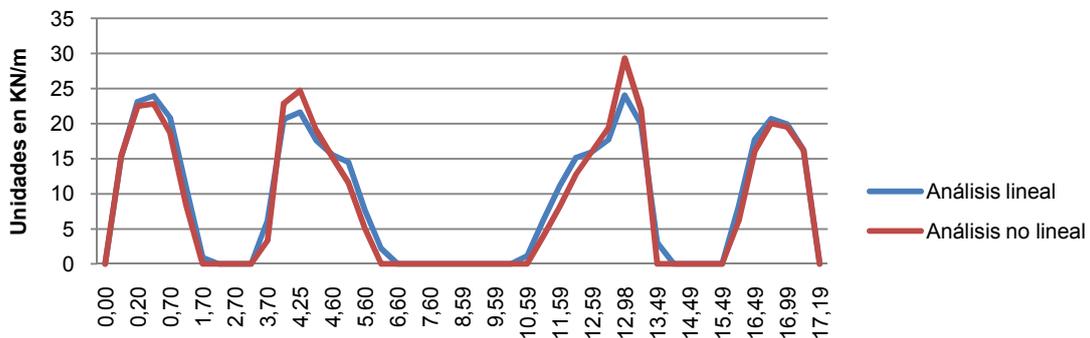


Gráfica 119. Comparación de esfuerzos transversales en L=16,5m (H. peso propio, sobrecarga de nieve y viento en presión)

Respecto de los esfuerzos tangenciales podemos ver que la hipótesis que realmente experimenta mayores cambios mediante un análisis geométrico no lineal es aquella donde se tienen en cuenta el peso propio, la sobrecarga de nieve y la de viento a presión, donde se producen diferencias de hasta 5KN/m en las zonas intermedias de la lámina debido precisamente a la actuación del viento sobre la lámina (gráfica 121). La hipótesis que considera la sobrecarga de viento tanto en presión como en succión no se ve influida por el tipo de análisis, lo que lleva a pensar que el viento en sí mismo no es una carga que influya significativamente en las irregularidades geométricas (gráfica 120).



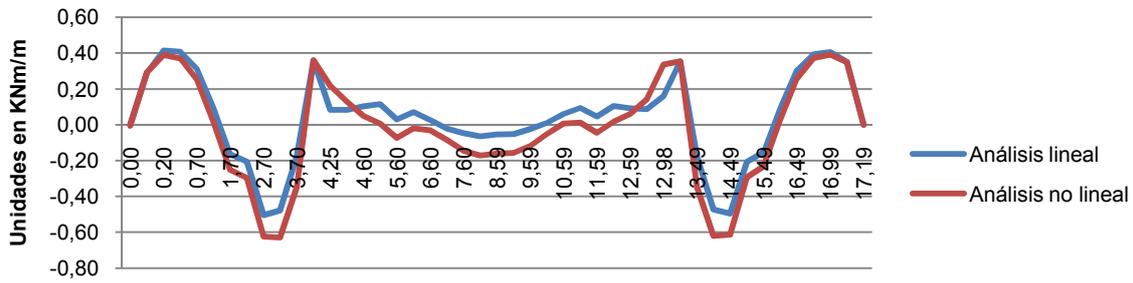
Gráfica 120. Comparación de esfuerzos tangenciales en L=19,5m (H. peso propio y viento de presión y succión vertical)



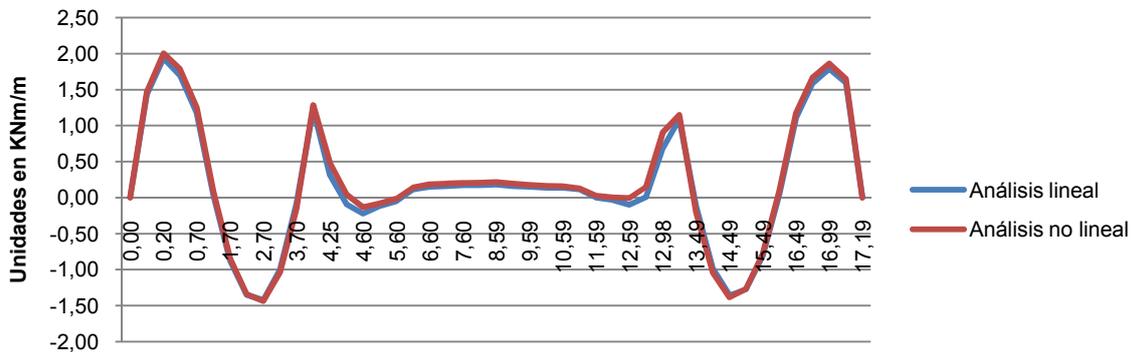
Gráfica 121. Comparación de esfuerzos tangenciales en L=19,5m (H. peso propio, sobrecarga de nieve y viento en presión)

Si atendemos a los esfuerzos de flexión transversal podemos observar que las mayores diferencias entre análisis se producen en las zonas de apoyo, donde se produce el efecto de empotramiento

debido al efecto arco en los apoyos (gráfica 122). El análisis apenas influye en las zonas medias de la bóveda, donde los esfuerzos se encuentran más estabilizados dentro de su rango (gráfica 123).

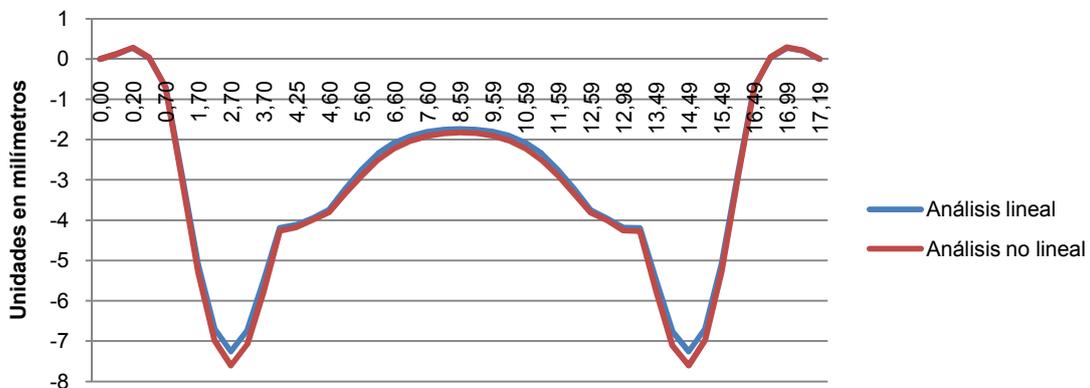


Gráfica 122. Comparación de esfuerzos flectores transversales en L=22,5m (H. peso propio, sobrecarga de nieve y viento en presión)

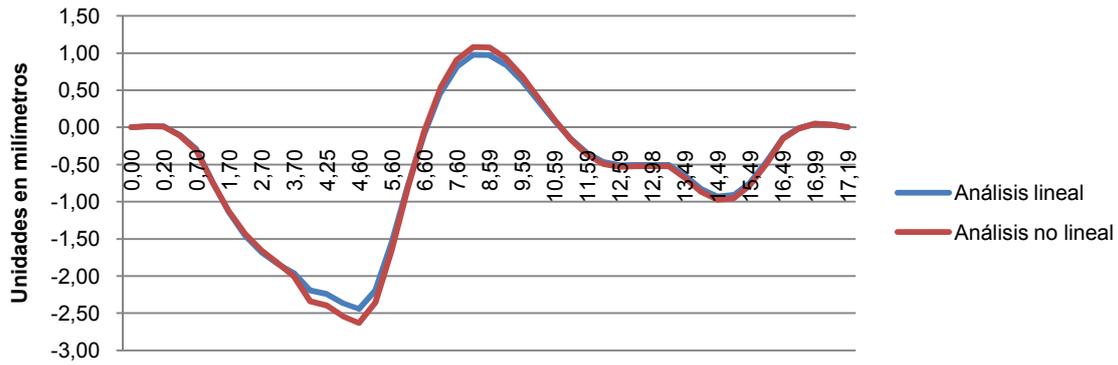


Gráfica 123. Comparación de esfuerzos flectores transversales en L=12,75m (H. peso propio, sobrecarga de nieve y viento en presión)

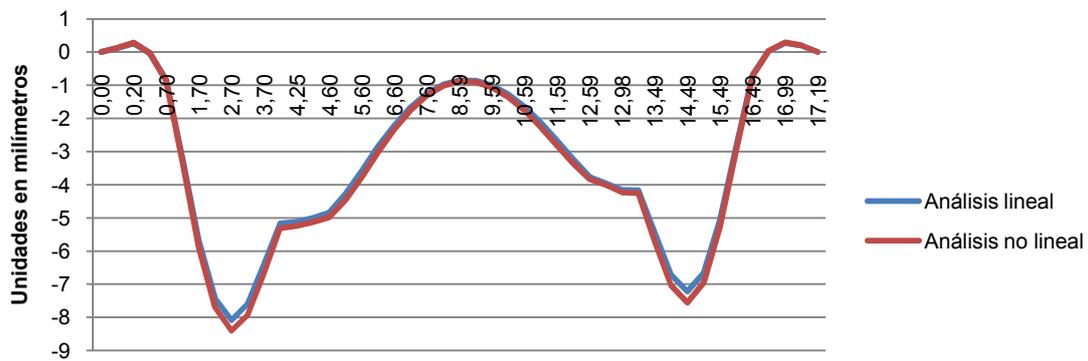
Respecto a los desplazamientos verticales que experimenta la lámina podemos observar que las hipótesis que solo tienen en cuenta las cargas gravitatorias afectan en mayor medida al punto medio de la lámina, con discrepancias de hasta 0,22mm, debido a la diferencia de compresiones que se producen en esa zona (gráfica 124). Sin embargo aquellas hipótesis que cuentan con la sobrecarga de viento afectan especialmente a las generatrices de intersección entre lóbulos, también en la zona media de la lámina debido a que es ahí donde se concentran los esfuerzos de la lámina en su rigidización ante movimientos transversales a la bóveda (gráficas 125 y 126). En ese caso es el viento a presión, sin contar con las succiones, el que produce mayores diferencias, en torno a 0,25mm. Aunque debido a la presencia de nieve, se pueden producir una situación comparable a la primera, aunque exista la presencia de viento.



Gráfica 124. Comparación de movimientos verticales en L=12,75m (H. peso propio y sobrecarga de nieve)

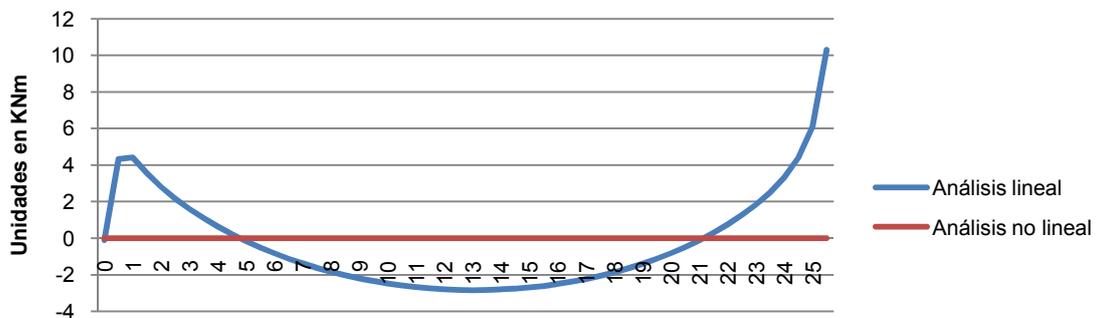


Gráfica 125. Comparación de movimientos verticales en L=12,75m (H. peso propio y viento de presión y succión vertical)

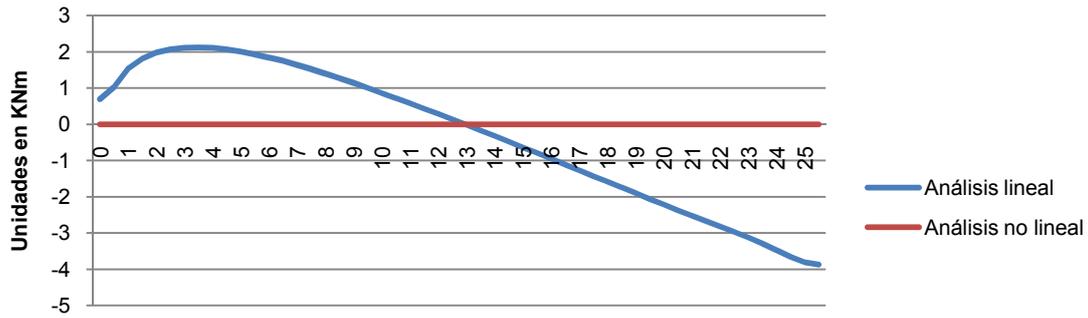


Gráfica 126. Comparación de movimientos verticales en L=12,75m (H. peso propio, sobrecarga de nieve y viento en presión)

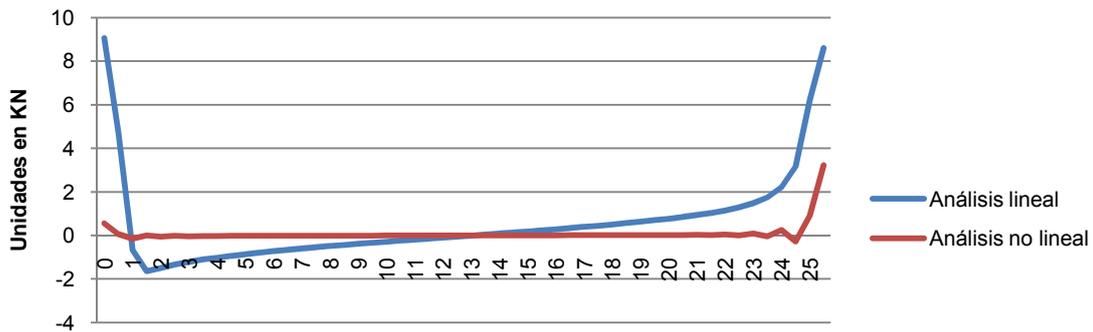
Una vez analizada la lámina nos centramos en los nervios y el arco, pues pueden aclararnos en mayor medida la influencia que la no linealidad geométrica pueda tener sobre la propia lámina. Si observamos los nervios constatamos la importancia de estos respecto de las sobrecargas no gravitatorias, puesto que es la hipótesis que tiene en cuenta tanto la sobrecarga de nieve como la de viento a presión es la que presenta mayores esfuerzos, incluso en un análisis no lineal. Observamos también que en general, ante un análisis no lineal los esfuerzos en los nervios disminuyen considerablemente, puesto que como ya ha quedado reflejado con anterioridad, es la lámina la que realmente se ve más perjudicada, absorbiendo mayores esfuerzos, y por tanto se reduce el trabajo a realizar por los nervios longitudinales. Un ejemplo claro es la flexión longitudinal, la torsión así como los cortantes verticales, esfuerzos que se hacen nulos para todas las hipótesis en una análisis no lineal (gráficas 127, 128 y 129)). Por otro lado, se observa que los nervios siguen absorbiendo los mismos esfuerzos cortantes transversales, puesto que estos no pueden ser absorbidos por la lámina, con lo que se constata la adecuada disposición de estos por parte del proyectista (gráfica 130).



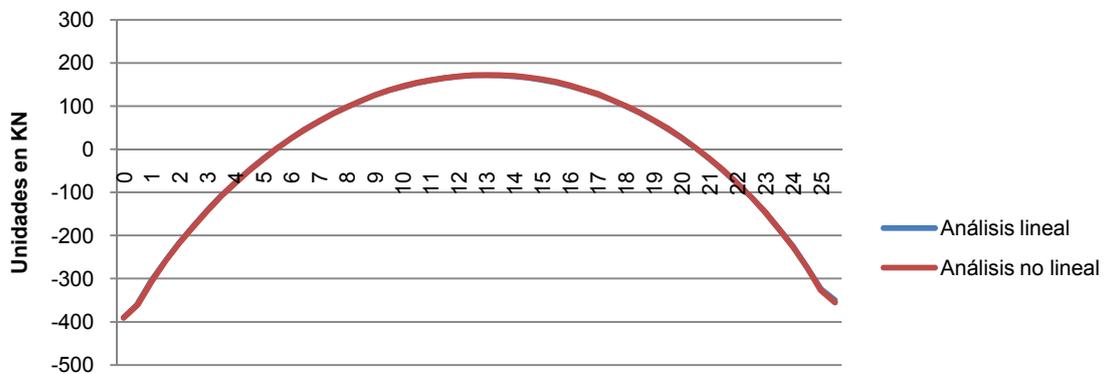
Gráfica 127. Comparación de esfuerzos flectores en el nervio de intersección, en X=4,19m (H. peso propio y sobrecarga de nieve y viento en presión)



Gráfica 128. Comparación de esfuerzos torsores en el nervio de intersección, en X=4,19m (H. peso propio y sobrecarga de nieve y viento en presión)

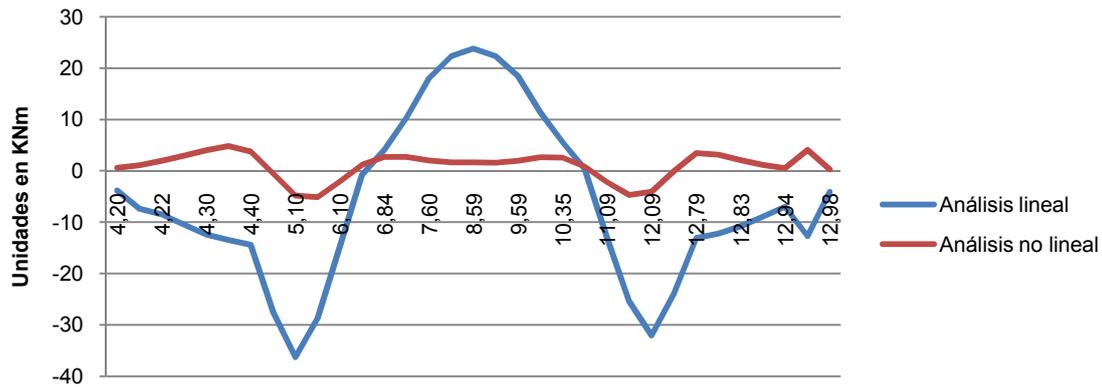


Gráfica 129. Comparación de esfuerzos cortantes verticales en el nervio de intersección, en X=4,19m (H. peso propio y sobrecarga de nieve y viento en presión)

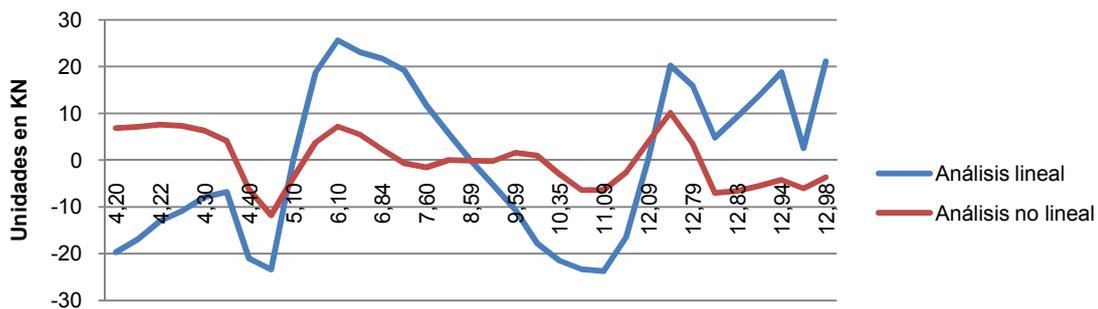


Gráfica 130. Comparación de esfuerzos cortantes transversales en el nervio de intersección, X=4,19m (H. peso propio y sobrecarga de nieve y viento en presión)

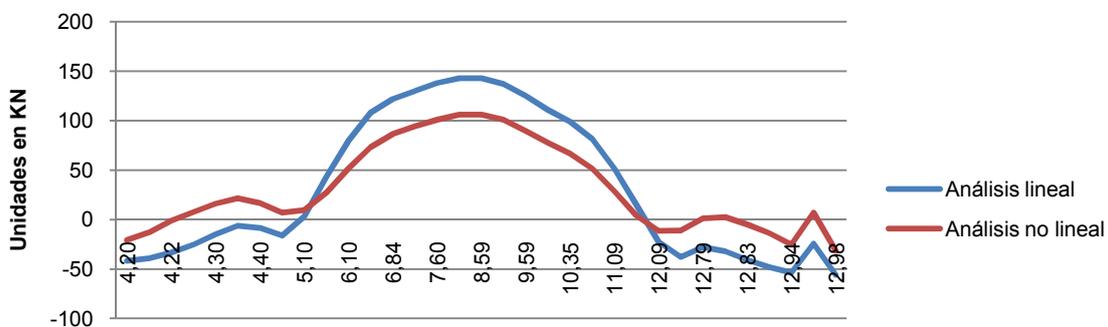
Se produce la misma tendencia en el arco de apoyo, donde la no linealidad geométrica produce una reducción generalizada de los esfuerzos, sobre todo los que actúan en el plano del eje del arco (gráfica 131 y 132). De nuevo se observa que el arco sigue absorbiendo gran parte de los esfuerzos transversales a él, producidos por la lámina (gráfica 133).



Gráfica 131. Comparación de esfuerzos flectores en el arco de apoyo, en L=25,5m (H. peso propio y sobrecarga de nieve y viento en presión)



Gráfica 132. Comparación de esfuerzos cortantes verticales en el arco de apoyo, en L=25,5m (H. peso propio y sobrecarga de nieve y viento en presión)



Gráfica 133. Comparación de esfuerzos cortantes transversales en el arco de apoyo, en L=25,5m (H. peso propio y sobrecarga de nieve y viento en presión)

Queda patente por tanto las múltiples diferencias que se pueden dar en los resultados obtenidos a través de las diferentes situaciones consideradas. Por un lado observamos que la introducción del arco como elemento de apoyo crea en el resultado final una redistribución de esfuerzos que afecta a toda la lámina. Hemos visto que debido a la flexibilidad de éste aumentan las tracciones en el apoyo opuesto así como las compresiones en el centro de la lámina, y además aumentan los esfuerzos en los lóbulos laterales, lo cual puede desembocar en un resultado que no había sido previsto anteriormente. Esto se ve agravado por el aumento de tracciones en las zonas de apoyo tras el análisis no lineal geométrico, quedando patente un riesgo de fisuración en el apoyo de la bóveda.

También los esfuerzos transversales se reducen en la zona del arco a la vez que aumentan en la zona de apoyos rígidos, debido precisamente a la redistribución de esfuerzos interna de la lámina y la colaboración del arco de apoyo en estos esfuerzos. Sin embargo en ambos apoyos aumentan las compresiones debidas a la influencia que ejerce la no linealidad geométrica en el efecto arco en los

apoyos, de la misma manera que lo hacen las tracciones en la zona de intersección entre lóbulos en la zona media de la lámina debido precisamente al aumento de desplazamientos en esa zona.

De la misma manera influye la presencia del arco en los esfuerzos tangenciales, pues en esa zona éstos disminuyen, aumentando en el extremo rígido. Sin embargo en la zona media de la lámina estos esfuerzos también aumentan en los lóbulos laterales, pues debido a la asimetría de la lámina éstos absorben parte de los esfuerzos en su redistribución. Es destacable el hecho de que estos esfuerzos se concentren tanto en los nervios, lo cual era de esperar, como en la zona media de los lóbulos laterales, lo cual hace ver que estos lóbulos son fundamentales y beneficiosos en el trabajo en conjunto de la lámina. Por otra parte los esfuerzos tangenciales no se ven influidos significativamente por irregularidad geométrica, al igual que los esfuerzos flectores transversales.

En general la hipótesis que mayor influencia tiene sobre la bóveda es la de peso propio, sobrecarga de nieve y viento en presión. Pero la hipótesis que incluye la succión vertical de viento produce esfuerzos tangenciales no previstos en la teoría y que pueden producir fisuración en la lámina y por tanto filtraciones indeseadas en la cubierta. Pero cada hipótesis ha de ser considerada puesto que cada una produce desplazamientos máximos en una zona determinada de la lámina. La hipótesis de nieve crea mayores descensos en el centro de la lámina, donde no hay que olvidar que se producen fuertes compresiones y las posibilidades de pandeo son elevadas. Pero es la hipótesis que considera peso propio, sobrecarga de nieve y viento en presión la que produce mayores descensos en la zona media de los lóbulos laterales, donde también se producen fuertes compresiones, aunque siempre menores que en el caso anterior. Por otra parte la hipótesis que considera succión vertical de viento produce un ascenso en el centro de la bóveda, lo que invierte los esfuerzos flectores de la lámina y para riesgos de fisuración en esa zona que no estaban previstos en el armado.

Además ha quedado reflejado sobradamente la influencia que ejercen los nervios como elemento rigidizador, especialmente ante esfuerzos cortantes transversales a la lámina. Estos nervios se oponen ante cargas de viento y rigidizan la lámina ante los movimientos transversales que se dan en este tipo estructural en las generatrices de borde inferior. Por otra parte se observa que ante irregularidades geométricas de la lámina, es ésta la que se ve afectada en gran medida, mientras que los nervios reducen su trabajo, excepto ante esfuerzos transversales a ellos, dada su función rigidizadora. Además debido al efecto arco de la lámina y a la flexibilidad que presenta el arco de apoyo, se observan momentos negativos de los nervios. Pero en general es visible que el nervio no trabaja como una viga, como generalmente se cree, sino que el ingeniero los incluyó como parte de ésta para rigidizar la lámina en la dirección donde es más débil.

## **B. Estabilidad de la cubierta.**

Para estudiar la estabilidad de la bóveda ha sido necesario un estudio exhaustivo de cada uno de los aspectos que influyen en ella. Conocemos el comportamiento de la lámina y por tanto podemos analizar las zonas más críticas de ésta. Las comprobaciones se realizarán mediante el método de Estados Límite, tanto de la tracción, cortante, pandeo y fisuración de la lámina. Serán objeto de análisis:

- A) Zona de apoyo de la lámina, donde existen fuertes esfuerzos de tracción.
- B) Los nervios, pues son ellos los que absorben los esfuerzos de tracción de borde de la lámina. También se comprobarán los esfuerzos cortantes del propio nervio, en especial los esfuerzos transversales, así como los esfuerzos flectores que se producen en él.
- C) Zona media de la lámina, donde existen fuertes esfuerzos de compresión que pueden dar lugar a fenómenos de pandeo. Además en esta zona se comprobarán los momentos flectores transversales
- D) Se comprobará el armado para los esfuerzos tangenciales que se dan en la lámina

Tanto las disposiciones de tracción como de compresión serán comparadas mediante las disposiciones que aparecen en la normativa. Debido a la falta de datos sobre los materiales empleados en la cubierta, hacemos aquí referencia a la comprobación de la estructura del Hipódromo de la Zarzuela de la empresa Carlos Fernández Casado S.L (27), donde:

1.  $F_{ck}=30\text{MPa}$
2.  $F_y=220\text{MPa}$
3.  $E_c=29000\text{MPa}$
4.  $E_s=200000\text{MPa}$

Por otra parte, para la mayor parte de las comprobaciones realizadas se han utilizado las exigencias dados por la EHE-08

### **Esfuerzos de tracción longitudinales y tangenciales en la zona de apoyos**

Para realizar esta comprobación se ha utilizado la hipótesis de peso propio, mayorado mediante un coeficiente de 1,35, una sobrecarga de nieve de  $0,65\text{KN/m}^2$ , mayorada por un coeficiente de 1,5, y una sobrecarga de viento a presión sobre uno de los laterales de la lámina de  $0,5\text{KN/m}^2$ , aplicándole un coeficiente igual a  $1,5 \times 0,6$ , según normativa.

Los esfuerzos longitudinales de tracción se producen en  $X=2,2\text{m}$  con un valor lineal de  $168\text{KN/m}$ . Por lo tanto en cada metro de lámina se produce una fuerza de  $168\text{KN}$ . En todo caso es recomendable la siguiente recomendación de armado, según el Artículo 42 de la EHE-08:

$$A_s \times f_y \geq A_c \times f_{ct}$$

Siendo:

*A<sub>s</sub>*: Area en mm de la armadura dispuesta por metro.

*f<sub>y</sub>*: resistencia del acero.

*A<sub>c</sub>*: Area bruta de hormigón.

*f<sub>c</sub>*: resistencia a compresión del hormigón.

*f<sub>ct</sub>*: resistencia del hormigón a tracción, en este caso:

$$f_{ct} = 0,3 \times f_{ck}^{2/3} = 2,89\text{N/mm}^2$$

En los planos encontrados en la documentación podemos ver que la lámina se armaba mediante una barra de 8mm cada 16cm, esto es, 8 barras de 8mm/m. Sin embargo como vemos la recomendación en este caso no se cumple, dado el bajo límite elástico del acero.

$$8 \times 50,26 \times 220 = 88457,6\text{N} \leq 50 \times 1000 \times 2,89 = 144500\text{N} \rightarrow \text{No cumple}$$

También debemos comprobar que la armadura dispuesta es suficiente para absorber los esfuerzos de tracción:

$$A_s \times f_y / 1000 \geq 166\text{KN}$$

Como podemos ver, dado el bajo límite elástico de la armadura empleada en la época no se cumplen las exigencias de la normativa actual para tracción. Necesitaríamos como mínimo 16 diámetros de 8mm del mismo acero que el de la época. Sin embargo hay que tener en cuenta que la normativa actual es más conservadora que la de la época, puesto que entonces se realizaban las comprobaciones en servicio. Y por otro lado hay que tener en cuenta que esta estructura es un elemento muy complejo, donde interactúan numerosos factores que influyen en la estabilidad de la lámina, y por lo tanto este análisis no es concluyente.

Por otro lado los esfuerzos tangenciales de tracción se producen en  $X=4,24\text{m}$  con un valor lineal de  $72,2\text{KN/m}$ . Por lo tanto en cada metro de lámina se produce una fuerza de  $72,2\text{KN}$ . La tensión rasante que existe en la lámina es:

$$\tau_{rd} = \frac{72200}{1000 * 50} = 1,44\text{N/mm}^2$$

Por tanto al ser esta tensión inferior a la estipulada en el Artículo 47 de la EHE-08 según la fórmula:

$$\tau > 2,5 \times B \times \left(1,3 - \left(0,3 \times \frac{f_{ck}}{25}\right)\right) \times f_{ct,d}$$

Siendo:

$$B=0,8$$

*f<sub>ck</sub>*: resistencia característica a compresión del hormigón.

*f<sub>ct,d</sub>*: resistencia de cálculo del hormigón a tracción, en este caso:  $2,89/1,5 = 1,92\text{N/mm}^2$

$$\tau_{rd} < 2,5 \times 0,8 \times \left(1,3 - \left(0,3 \times \frac{30}{25}\right)\right) \times 1,92 = 3,61\text{N/mm}^2$$

Entonces queda que la tensión rasante de agotamiento es:

$$\tau_{ru} = B \times \left(1,3 - \left(0,3 \times \frac{f_{ck}}{25}\right)\right) \times f_{ct,d} + \left[\frac{A_{st}}{s \times p} \times f_y \times (\mu \times \text{sen}\alpha + \text{cos}\alpha) + \mu \sigma_{cd}\right] \leq 0,25 \times f_{cd}$$

Siendo:

*A<sub>st</sub>*: área de la armadura transversal, en este caso  $8 \times 50,26 = 402,08$

*S*: separación de las barras según el plano de tangencia, en este caso  $0,16\text{m}$

*p*: superficie de contacto por unidad de longitud, en este caso  $50 \times 1000 = 50000\text{mm}^2$

*f<sub>y</sub>*: resistencia a tracción de las armaduras transversales

*u*:  $0,9$

*Alfa*:  $90^\circ$

*σ<sub>cd</sub>* =  $120900/50000 = 2,41\text{N/mm}^2$  de compresión

*f<sub>cd</sub>*: resistencia de cálculo a compresión del hormigón, en este caso  $30/1,5 = 20\text{Mpa}$

Por tanto:

$$\tau_{ru} = 0,8 \times \left(1,3 - \left(0,3 \times \frac{30}{25}\right)\right) \times 1,92 + \left[\frac{402,08}{160 \times 50000} \times 220 \times 0,9 + 0,9 \times 2,41\right] \leq 0,25 \times 20$$

$$\tau_{ru} = 3,62\text{N/mm}^2$$

De esta manera tenemos que la tensión rasante resultante en la lámina es menor que la última, por lo que la lámina cumple ante esfuerzos tangenciales.

$$1,44\text{N/mm}^2 < 3,62\text{N/mm}^2$$

### **Esfuerzos de tracción, flexión y corte en los nervios.**

Para realizar esta comprobación se ha utilizado la hipótesis de peso propio, mayorado mediante un coeficiente de 1,35, una sobrecarga de nieve de  $0,65\text{KN/m}^2$ , mayorada por un coeficiente de 1,5, y una sobrecarga de viento a presión sobre uno de los laterales de la lámina de  $0,5\text{KN/m}^2$ , aplicándole un coeficiente igual a  $1,5 \times 0,6$ , según normativa.

En los nervios la mayor tracción de la lámina se produce en  $L=12,75\text{m}$  con un valor lineal de  $133\text{KN/m}$ . Así mismo el valor de flexión en el nervio es máxima y de negativos en la zona del apoyo del arco, con un valor de  $13,9\text{KNm}$ . Además los valores máximos de cortante se producen en la zona de apoyo de la lámina en el muro rígido, siendo el valor de cortante vertical máximo igual a  $8,5\text{KN}$ , y el valor del cortante transversal igual a  $484\text{KN}$ . En todo caso es recomendable la siguiente

recomendación de armado para elementos sometidos a tracción compuesta, según el Artículo 42 de la EHE-08:

$$A_s f_y \geq \frac{W_1}{z} f_{ct,fl}$$

Siendo:

*A<sub>s</sub>*: Area en mm de la armadura dispuesta por metro.

*f<sub>y</sub>*: resistencia del acero.

*W<sub>1</sub>*: módulo resistente de la sección bruta relativo a la fibra más traccionada.

*z*: brazo mecánico. Para flexión el brazo mecánico se puede tomar como 0,8 de la altura de la pieza.

*F<sub>ct,fl</sub>*: Resistencia a flexotracción del hormigón, en este caso es  $1,55 \times f_{ct} = 1,55 \times 2,89 = 4,48 \text{ N/mm}^2$

En los planos encontrados en la documentación podemos ver que el nervio está armado en su zona media mediante 10 barras de 35mm. Por lo tanto en este caso se cumple las recomendaciones de armado:

$$10 \times 962,11 \times 220 = 2116642 \text{ N} \geq \frac{250 \times 350^2}{6 \times 0,8 \times 350} 4,48 = 81666,66 \text{ N} \rightarrow \text{Cumple}$$

Debemos comprobar que la armadura dispuesta en la zona media del nervio es suficiente para absorber los esfuerzos de tracción:

$$A_s \times f_y / 1000 \geq 133 \text{ KN}$$

Queda que la armadura dispuesta podría absorber un esfuerzo mucho mayor que el resultante.

$$\frac{10 \times 962,11 \times 220}{1000} = 2116,64 \text{ KN} \geq 133 \text{ KN} \rightarrow \text{Cumple}$$

También debemos comprobar que la armadura dispuesta en la cara superior de los nervios en la zona de apoyo más rígida es suficiente para absorber los esfuerzos de tracción producidos por la flexión. Para una comprobación sencilla y rápida se tomará como brazo mecánico:

$$z = 0,8 \times 0,35 = 0,28 \text{ m}$$

Por lo tanto si tenemos una flexión de 13,9KNm:

$$M = T \times z$$

Queda que la tracción en las armaduras será de:

$$T = \frac{M}{z} = \frac{13,9}{0,28} = 49,64 \approx 50 \text{ KN}$$

Ahora comprobamos si la armadura dispuesta es suficiente:

$$A_s \times f_y / 1000 \geq 50 \text{ KN}$$

Queda que esa armadura podía absorber estos esfuerzos:

$$\frac{3 \times 176,71 \times 220}{1000} = 116,63KN \geq 50KN \rightarrow \text{Cumple}$$

Comprobamos también que la armadura dispuesta para el esfuerzo cortante transversal en los nervios en la zona de apoyo más rígida es suficiente para absorberlo. Debemos comprobar que este que el cortante no supere el agotamiento por compresión oblicua en el alma, así como el agotamiento por tracción en el alma.

Para comprobar el agotamiento por compresión del alma se debe verificar según el Artículo 44 de la EHE-08:

$$Vd \leq Vu1$$

Donde:

$$Vu1 = K \times f1cd \times B \times D \times \frac{\cotg \theta + \cotg \alpha}{1 + \cotg^2 \theta}$$

Siendo:

El cociente es 1/2

K: 1,25

f1cd:  $0,6 \times 20 = 12 \text{Mpa}$

B: medida del lado del nervio perpendicular al esfuerzo cortante, en este caso 0,25m

D: canto útil, en este caso  $0,35 \times 0,9 = 0,32 \text{m}$

Queda que:

$$Vu1 = 1,25 \times 12 \times 250 \times 320 \times \frac{1}{2} \times 0,001 = 600KN$$

Por lo tanto no se supera el agotamiento de las bielas.

$$484KN \leq 600KN \rightarrow \text{Cumple}$$

Por otro lado para comprobar el agotamiento por tracción del alma se debe verificar según el Artículo 44 de la EHE-08:

$$Vd \leq Vu2$$

Donde:

$$Vu2 = Vcu + Vsu$$

Siendo Vcu la contribución del hormigón a la resistencia en esfuerzo cortante:

$$Vcu = \left[ \frac{0,15}{1,5} \times E \times (100 \times P1 \times fcv) \right] C \times B \times D$$

Siendo:

E=2

P1=  $(3 \times 176,71) / (350 \times 200) = 0,0075$

fcv: 15MPa

C=1

B: medida del lado del nervio perpendicular al esfuerzo cortante, en este caso 0,25m

D: canto útil, en este caso  $0,35 \times 0,9 = 0,32 \text{m}$

Queda que:

$$V_{cu} = \left[ \frac{0,15}{1,5} \times 2 \times (100 \times 0,0075 \times 15) \right] 1 \times 250 \times \frac{320}{1000} = 180KN$$

Al no resultar suficiente es necesario la colaboración de los estribos. La armadura transversal necesaria será igual a:

$$V_{su} = V_{u2} - V_{cu}$$

$$V_{su} = 484 - 180 = 304KN$$

La ecuación  $V_{su}$  viene dada por:

$$V_{su} = D \times \frac{U_{est}}{St}$$

Siendo:

*D*: canto útil, en este caso  $0,35 \times 0,9 = 0,32m$

*A<sub>est</sub>*: area de las ramas de los estribos por metro

*f<sub>y</sub>*: resistencia del acero de los estribos.

Para hallar la capacidad mecánica de la armadura necesaria utilizaremos la siguiente expresión:

$$U_{est} = \frac{V_{su} \times St}{z} = \frac{304 \times 180}{320} = 171KN$$

Necesitamos comprobar el área necesaria de estribos. Como los utilizados por Torroja eran de 3 diámetros 8mm cada 18cm. La capacidad mecánica necesaria sería de:

$$U_{st} = 3 \times 50,26 \times 220 \times 0,001 = 33,16KN < 171KN \rightarrow \text{No es suficiente}$$

Por lo tanto no cumpliría para el cortante transversal resultante. Pero como hemos dicho anteriormente, la normativa actual es mucho más exigente que la de aquella época, Y al tratarse de un elemento estructural con múltiples factores interactuando entre ellos, este análisis no sería concluyente sobre la estabilidad del nervio ante esfuerzos cortantes.

### **Esfuerzos de compresión y flexión.**

Para la comprobación a pandeo es necesario tener en cuenta que nos encontramos ante un tipo de lámina cilíndrica de clase larga, que suele acusar fenómenos de pandeo esencialmente ante los fuertes esfuerzos de compresión que se producen longitudinalmente, mientras que las compresiones transversales son mucho menores en comparación a los primeros. Además al tratarse de una lámina con amplio radio de curvatura en la zona media de la semielipse y paredes delgadas, el fallo producido será causado por la inestabilidad local de la sección delgada.

Por otro lado se han hallado los 5 primeros modos de pandeo utilizando LUSAS. Se ha utilizado para ello el elemento QSL8, cuadrilátero, con 8 nodos, nombrados en sentido antihorario, con 3 grados de libertad en el movimiento en las tres direcciones del espacio para los nodos de esquina, mientras que el resto tiene cinco grados de libertad, tres para los movimientos en las direcciones del espacio, y de giro. elemento adecuado para láminas finas en 3D, y que cuenta con el comportamiento de membrana así como las deformaciones a flexión de la lámina. Al adecuarse a la teoría de placa delgada se excluyen las deformaciones de corte transversal. El programa LUSAS lo recomienda para este tipo de análisis. Por otra parte este elemento es muy eficaz para comprobar el comportamiento de estructuras laminares curvas que contienen varias intersecciones entre superficies. Además se ha utilizado el elemento BTX3 para modelizar los nervios de intersección. Es

un elemento viga en 3D con tres nodos, donde el tercer nodo se usa para definir el plano XY. Tiene 6 grados de libertad en cada nodo extremo, tres en las direcciones del espacio, y otros tres en los giros para cada dirección del espacio. Se incluyen las deformaciones de corte. La hipótesis considerada es la de peso propio.

Los esfuerzos longitudinales de compresión críticos se producen en  $L=8,6m$  y la directriz media de la bóveda, con un valor lineal de  $97,2KN/m$ . Por lo tanto en cada metro de lámina se produce una fuerza de  $97,2KN$ . En todo caso es recomendable la siguiente recomendación de armado según el Artículo 42 de la EHE-08:

$$A_s \times f_y \geq 0,05Nd$$

$$A_{s1} \times f_y < 0,5 \times f_{cd} \times A_c$$

Siendo:

$A_s$ : Area en  $mm^2$  de la armadura dispuesta a compresión por metro, en este caso es de 8 diámetros, con un área de  $8 \times 50,26 = 402,08mm^2$

$f_y$ : resistencia del acero.

$N_d$ : axil de cálculo

$f_{cd}$ : resistencia de cálculo a compresión del hormigón.

$A_c$ : Area bruta de hormigón, en este caso de  $50000mm^2$ .

Por tanto queda que:

$$402,08 \times 220 = 88457,6N \geq 0,05 \times 97200 = 4860N \rightarrow \text{Cumple}$$

$$402,08 \times 220 = 88457,6N < 0,5 \times 20 \times 50000 = 500000N \rightarrow \text{Cumple}$$

Por otro lado obtenemos el factor de seguridad F en relación a la carga de peso propio, lo que significa que necesitaríamos en principio F veces el valor del carga según el peso propio para que se produjera pandeo en la lámina. La fórmula para hallar la carga y la tensión crítica de pandeo en una lámina cilíndrica es la que sigue (29):

$$N_{cr} = 0,606 \times \left( \frac{E \times h^2}{R} \right)$$

$$\sigma_{cr} = \frac{1}{\sqrt{3 \times (1 - \nu^2)}} \times \left( \frac{E \times h}{R} \right)$$

Siendo:

$N_{cr}$ : carga crítica por metro.

$\sigma_{cr}$ : tensión crítica de pandeo.

$R$ : Mayor radio de curvatura de la elipse, en este caso  $7,3m$

$h$ : espesor de la lámina, en este caso  $5cm$

$E$ : módulo de deformación del hormigón.

$\nu = 0,3$

De esta manera tenemos que:

$$N_{cr} = 0,606 \times \left( \frac{29000 \times 50^2}{7300} \right) = \frac{6018,5N}{mm} = 6018,5KN/m$$

$$\sigma_{cr} = \frac{1}{\sqrt{3 \times (1 - 0,3^2)}} \times \left( \frac{29000 \times 50}{7300} \right) = 121,11 \text{ N/mm}^2$$

$$F = \frac{121,11}{3} = 40,37$$

Ahora utilizamos el programa LUSAS, el cual nos da una serie de modos de pandeo, y para cada uno ofrece un autovalor por el que habría que multiplicar la tensión bajo peso propio para obtener la tensión de pandeo. Los resultados son los siguientes, y nos quedamos con el menor factor de carga:

Los valores obtenidos según el modelo LUSAS son:

Modo	Autovalor	Factor de carga	Error nom.
1	51,9517	<b>51,9517</b>	0,215234E-07
2	60,5913	60,5913	0,516547E-05
3	74,9149	74,9149	0,162413E-06
4	80,3720	80,3720	0,145798E-07
5	88,4069	88,4069	0,460882E-06

Queda que la carga crítica de pandeo en principio sería de 51,95 veces superior a la carga producida por el peso propio, correspondiente al modo 1 (figura 108). Las siguientes imágenes corresponden al resto de modos de pandeo propios de esta estructura (figura 109).

Podemos ver que mediante el cálculo informatizado se obtiene un factor de carga superior que el resultante de la formulación empírica existente. Este hecho se puede deber a que las condiciones de contorno consideradas en la fórmula empírica son más desfavorables que las condiciones consideradas en este modelo. Por otro lado, la zona central de la lámina está sometida a compresión tanto en dirección longitudinal como en transversal, lo que tenderá a incrementar la deformación de la misma. Esto conlleva que la carga de pandeo será menor que el que predice la teoría lineal con pequeñas deformaciones. Por tanto será necesario realizar una corrección de este factor de carga según las recomendaciones de la Asociación Internacional de láminas y estructuras espaciales.

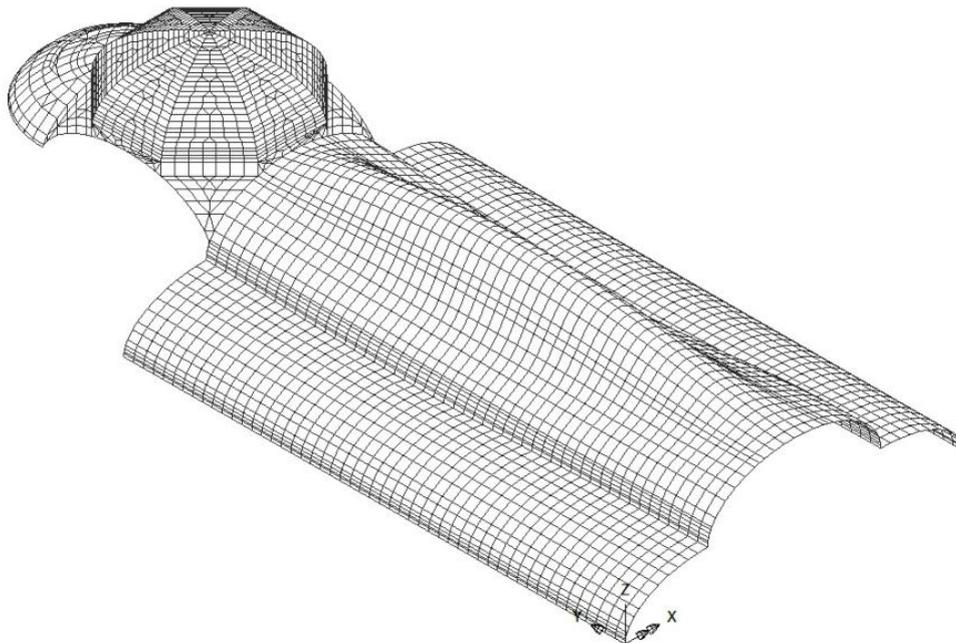


Figura 108. Esquema de pandeo según el primer modo.

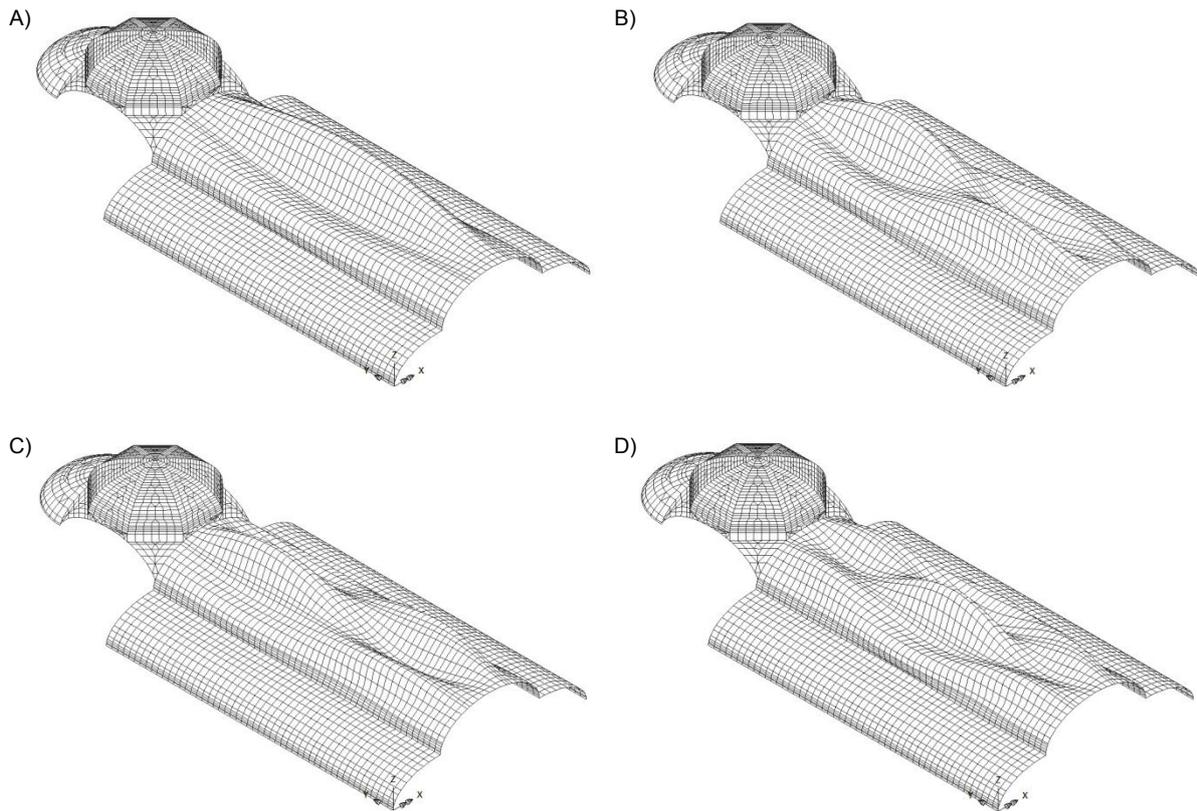


Figura 109. Esquema de pandeo para distintos modos: A) 2º modo; B) 3º modo; C) 4º modo; D) 5º modo.

Primero se ha de tener en cuenta las variaciones de la forma. Al construir la lámina de forma general la geometría resultante diferiría de la proyectada. En las zonas donde la lámina tiene un radio de curvatura mayor, en este caso en la zona superior de la lámina, las fuerzas son mayores que las previstas en cálculo. Por ello se debe realizar una reducción de la carga de pandeo. Por ello emplearemos el ratio siguiente y usaremos la curva I de la figura 110:

$$\frac{W_0}{h} = \frac{1,81}{50} = 0,0362$$

Siendo:

$W_0$ : desplazamiento vertical calculado mediante la teoría lineal.

$h$ : espesor de la lámina.

De tal manera que se tiene una reducción de la carga de pandeo mediante un coeficiente de 0,95.

$$\frac{p_{cr}^u}{p_{cr}^{lim}} = 0,95$$

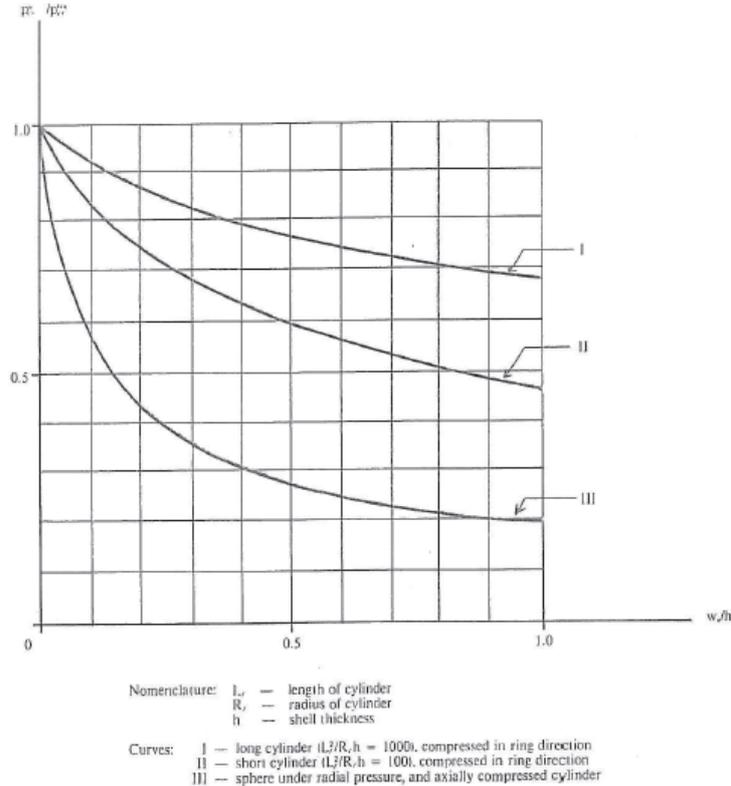


Figura 110. Gráfica para carga superior crítica. (28)

También se debe considerar el efecto de la fluencia que podrá ser estimado mediante la siguiente expresión:

$$E_{cr} = \frac{E_c}{1 + C_u}$$

$$C_u = 4 - 2 \times \log f_c$$

Siendo:

$E_{cr}$ : módulo de deformación reducido.

$f_c$ : resistencia a compresión del hormigón.

$E_c$ : módulo de elasticidad del hormigón.

La carga crítica última calculada anteriormente debe ser reducida en la misma proporción que el módulo de elasticidad del hormigón. Esta reducción presupone que todas las cargas actuantes en la lámina son a largo plazo. Si algunas de las cargas fueran a corto plazo, el módulo de deformación se reduciría parcialmente, en la proporción del ratio de las cargas a corto plazo con el total de las cargas.

$$C_u = 4 - 2 \times \log 9,3 = 2,06$$

$$E_{cr} = \frac{29000}{1 + 2,06} = 9477,12 \text{ MPa}$$

$$\frac{E_{cr}}{E_c} = \frac{9477,12}{29000} = 0,327$$

También se considerará el efecto del armado y la fisuración, que se tendrá en cuenta de la siguiente forma:

$$\frac{E_s}{E_{cr}} = \frac{200000}{9477,12} = 21,1$$

Siendo:

$E_s$ : Módulo de deformación del acero  
 $E_{cr}$ : módulo de deformación reducido.

$$\frac{A_s}{A_c} = \frac{402,08}{50000} = 0,008$$

Siendo:

$A_s$ : área de armadura por metro, en este caso  $8 \times 50,26 = 402,08 \text{ mm}^2$   
 $A_c$ : área bruta de hormigón por metro, en este caso  $1000 \times 50 = 50000 \text{ mm}^2$

$$\frac{E_s}{E_{cr}} \times \frac{A_s}{A_c} = 21,1 \times 0,008 = 0,17$$

Mediante la siguiente gráfica se obtiene  $\omega$ , en función de la tensión y la cuantía de armadura. Utilizando la curva superior de la figura 111, puesto que la bóveda de Villaverde posee un armado en dos capas, se obtiene un valor de 0,4. Con este valor, así como el valor del ratio  $W_o/h$  obtenido anteriormente, se obtiene el valor reducido de la carga crítica superior mediante la figura 112:

$$\frac{Q_{cr, reinf}^u}{Q_{cr}^u} = 0,97$$

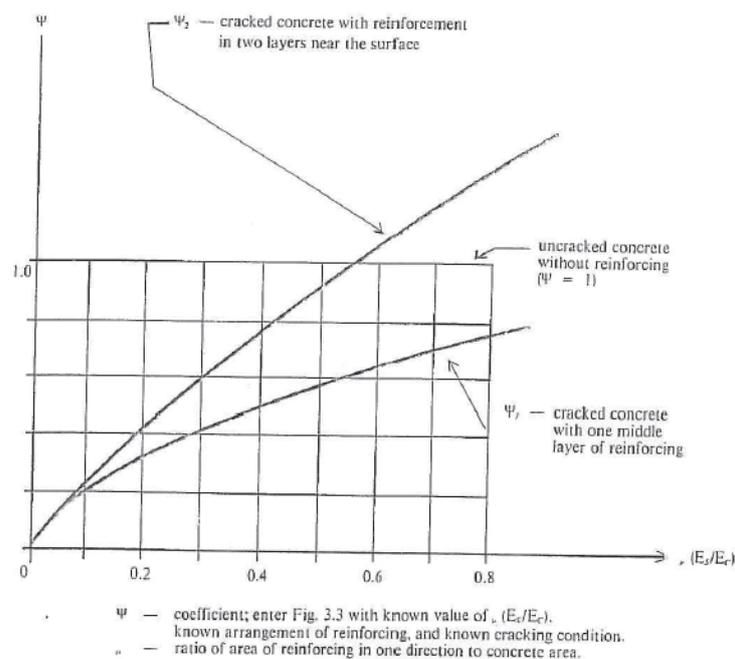


Figura 111. Valores de coeficiente  $\omega$  (Basados en Kollar y Dulacska). (28)

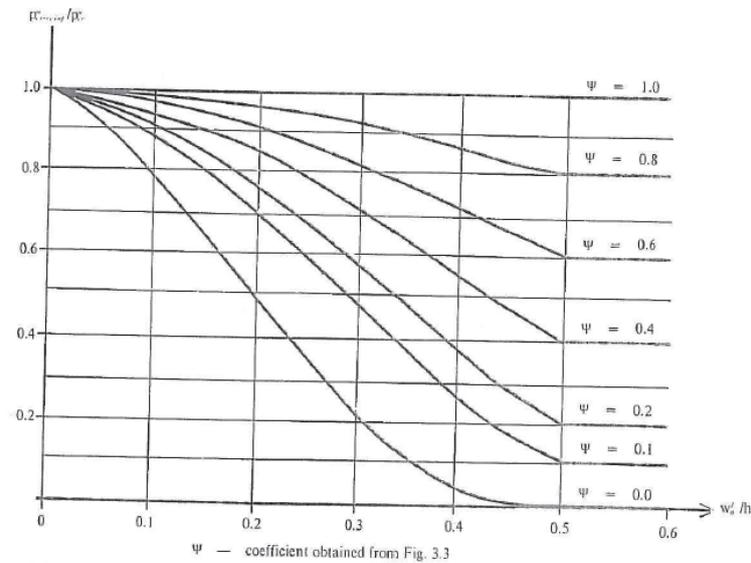


Figura 112. Corrección de la carga crítica superior debido al armado y la fisuración (Basados en Kollar y Dulacska). (28)

Por tanto queda que la carga crítica última reducida es:

$$Q_{cr, reinf}^u = 51,95 \times 0,95 \times 0,327 \times 0,97Q = 15,65Q$$

Por lo tanto, para que no se produzca pandeo en la lámina, los esfuerzos en cualquier momento de la vida útil de ésta nunca deberían superar la carga crítica. De esta manera realizaremos una sencilla comprobación sobre el nivel de seguridad conseguido en la cubierta. Por un lado tenemos que la carga de peso propio produce un esfuerzo de 55KN/m. Por otro lado tenemos que ante la hipótesis más desfavorable se produce un esfuerzo de compresión máximo de 99KN/m. Por lo tanto queda que el factor de seguridad ante el pandeo es de 8,7.

$$Q_{cr, reinf}^u = 15,65 \times 55 = 860,75KN/m$$

$$F.S. = \frac{860,75}{99} = 8,7$$

Podemos comprobar por tanto que la cubierta de la Iglesia de Villaverde presentaba una importante reserva de seguridad frente al pandeo producido por esfuerzos longitudinales de compresión. Podemos concluir que esta estructura era segura ante el pandeo.

Además es necesario comprobar el comportamiento de la lámina a flexión transversal. En este caso se comprobará el armado dispuesto en proyecto. Los esfuerzos serán tomados de la directriz media de la lámina. La hipótesis considerada será la de peso propio, mayorado mediante un coeficiente de 1,35, una sobrecarga de nieve de 0,65KN/m<sup>2</sup>, mayorada por un coeficiente de 1,5, y una sobrecarga de viento a presión sobre uno de los laterales de la lámina de 0,5KN/m<sup>2</sup>, aplicándole un coeficiente igual a 1,5 x 0,6, según normativa.

Los esfuerzos de flexión transversal más críticos se producen en L=8,6m y la directriz media de la bóveda, con un valor lineal de 2,77KNm/m. Por lo tanto en cada metro de lámina se produce una fuerza de 2,77KNm. En todo caso es recomendable la siguiente recomendación de armado según el artículo 42 de la EHE-08:

$$As f_y \geq \frac{W1}{z} f_{ct,fl}$$

Siendo:

*As*: Area en  $mm^2$  de la armadura dispuesta por metro.

*f<sub>y</sub>*: resistencia del acero.

*W1*: módulo resistente de la sección bruta relativo a la fibra más traccionada.

*z*: brazo mecánico. Para flexión el brazo mecánico se puede tomar como 0,8 de la altura de la pieza.

*F<sub>ct,fl</sub>*: Resistencia del hormigón a flexotracción:

En los planos encontrados en la documentación podemos ver que en esa zona se disponen 6 barras de 8mm cada metro. Por lo tanto queda:

$$6 \times 50,26 \times 220 = 66343,2N \geq \frac{1000 \times 50^2}{6 \times 0,8 \times 50} 4,48 = 46666,66N \rightarrow \text{Cumple}$$

Ahora vamos a comprobar si la armadura dispuesta en la lámina es suficiente para absorber los esfuerzos de tracción producidos por la flexión. Para una comprobación sencilla y rápida se tomará como brazo mecánico:

$$z = 0,8 \times 0,05 = 0,04m$$

Por lo tanto si tenemos una flexión de 2,76KNm:

$$M = T \times z$$

Queda que la tracción en las armaduras será de:

$$T = \frac{M}{z} = \frac{2,77}{0,04} = 69KN$$

Ahora comprobamos si la armadura dispuesta es suficiente:

$$As \times f_y/1000 \geq 69KN$$

Queda que:

$$\frac{6 \times 50,26 \times 220}{1000} = 66,34KN \geq 69KN \rightarrow \text{No cumple}$$

Como veíamos con anterioridad, el armado planteado no cubría toda la longitud necesaria resultante del cálculo informatizado. Ahora podemos observar que el armado dispuesto no es suficiente en aquellas zonas con esfuerzos máximos según la normativa actual. Pero este hecho no es concluyente para la estabilidad de la lámina, dado que la normativa actual es mucho más conservadora que la de época.

### **Comprobación para Estados Límite de Fisuración.**

Por último se llevará a cabo una comprobación de la fisuración del hormigón dadas las disposiciones originales en la bóveda, para saber con relativa seguridad si se hubieran producido patologías relacionadas con este fenómeno.

### *Aparición de fisuras por compresión*

Los esfuerzos de compresión más críticos se producen en el apoyo, en la generatriz del nervio, con un valor lineal de 223KN/m. Por lo tanto en cada metro de lámina se produce una fuerza de 223KN. Y se produce una tensión en el hormigón, más reducida que la límite, por lo que no se produce fisuración por compresión, según el Artículo 49 de la EHE-08.

$$\sigma_c \leq 0,6 \times f_c$$

Siendo:

*O<sub>c</sub>*: tensión de compresión en el hormigón.

*f<sub>c</sub>*: resistencia a compresión del hormigón.

Por lo tanto en este caso queda que:

$$\sigma_c \leq 0,6 \times f_c = 6KN/mm^2$$

$$\sigma \leq 223000/(250 \times 350) = 2,55KN/mm^2 < 6KN/mm^2$$

### *Aparición de fisuras por tracción*

La apertura de fisura se caracteriza mediante la expresión siguiente, según el Artículo 49 de la EHE-08:

$$W_k = B \times S_m \times \varepsilon_{sm}$$

Siendo :

*B*: 1,7

*S<sub>m</sub>*: separación media de la fisura. Viene dada por la expresión:

$$S_m = 2 \times c + 0,2 \times s + 0,4 \times K_1 \times \frac{\emptyset \times A_{c \text{ eficaz}}}{A_s}$$

*C*: Recubrimiento de la armadura a tracción. Se supondrá de 1,5cm

*S*: distancia entre barras longitudinales

*K<sub>1</sub>*: a tracción simple tiene un valor de 0,25 y a tracción compuesta tiene un valor de 0,125

$\emptyset$ : Diámetro de la armadura más traccionada

*A<sub>c</sub>*, eficaz: área de hormigón de la zona de recubrimiento en donde las barras a tracción influyen de forma efectiva en la abertura de las fisuras.

*A<sub>s</sub>*: sección total de las armaduras situadas en el área *A<sub>c</sub>*, efectiva.

$\varepsilon_{sm}$ : alargamiento medio de las armaduras, y viene dado por la expresión:

$$\varepsilon_{sm} = \frac{\sigma_s}{E_s}$$

$\sigma_s$  : tensión en el acero a tracción

*E<sub>s</sub>*: módulo de deformación longitudinal del acero.

Comprobamos ahora la fisuración por tracción en la zona de apoyo de la lámina, donde el valor máximo de tracción es de 121KN/m y la armadura está formada por 8 diámetros de 8mm, por lo que el área de acero será de  $8 \times 50,26 = 402,08mm^2$ . Por lo tanto:

$$\sigma_s = \frac{121000}{402,08} = 300,93N/mm^2$$

$$\varepsilon_{sm} = \frac{300,93}{200000} \approx 0,0015$$

$$S_m = 2 \times 15 + 0,2 \times 160 + 0,4 \times 0,25 \times \frac{8 \times 8 \times 15 \times 12,5}{402,08} = 65mm$$

$$W_k = 1,7 \times 65 \times 0,0015 = 0,165mm$$

Según la EHE-08, para el ambiente en el que se encuentra la Iglesia la apertura máxima de fisura será de 0,3mm, que es mayor que la apertura de fisura que se produciría en la situación considerada, por lo que en este caso no existiría problemas de durabilidad.

$$W_{max} = 0,3mm > W_k = 0,165mm$$

Ahora comprobamos ahora la fisuración por tracción en la zona media del nervio, donde la tracción es de 98,5KN y la armadura está formada por 10 diámetros de 35mm, por lo que el área de acero será de  $10 \times 962,11 = 9621,1mm^2$ . Por lo tanto:

$$\sigma_s = \frac{98500}{9621,1} = 10,24N/mm^2$$

$$\varepsilon_{sm} = \frac{10,24}{200000} \approx 0$$

$$S_m = 2 \times 15 + 0,2 \times 35 + 0,4 \times 0,125 \times \frac{35 \times 250 \times 350/2}{9621,1} = 45mm$$

$$W_k = 1,7 \times 35 \times 0 = 0mm$$

Según la EHE-08, para el ambiente en el que se encuentra la Iglesia la apertura máxima de fisura será de 0,3mm, que es mayor que la apertura de fisura que se produciría en la situación considerada, por lo que en este caso no existiría problemas de durabilidad.

$$W_{max} = 0,3mm > W_k = 0mm$$

Por otra parte es necesario comprobar si existiría fisuración provocada por las tracciones derivadas de la flexión. La tracción es de 69KN y la armadura está formada por 6 diámetros de 8mm, por lo que el área de acero será de  $6 \times 50,26 = 402,08mm^2$ . Por lo tanto:

$$\sigma_s = \frac{69000}{402,08} = 228,81N/mm^2$$

$$\varepsilon_{sm} = \frac{228,81}{200000} = 0,0011$$

$$S_m = 2 \times 15 + 0,2 \times 180 + 0,4 \times 0,125 \times \frac{6 \times 8 \times 15 \times 50/4}{402,08} = 68mm$$

$$W_k = 1,7 \times 68 \times 0,0011 = 0,127$$

Según la EHE-08, para el ambiente en el que se encuentra la Iglesia la apertura máxima de fisura será de 0,3mm, que es mayor que la apertura de fisura que se produciría en la situación considerada, por lo que en este caso según normativa no existiría problemas de durabilidad.

$$W_{max} = 0,3mm > W_k = 0,127mm$$

#### *Aparición de fisuras por cortante*

Según la normativa actual la estructura no cumpliría con las exigencias ante los problemas de fisuración en las zonas sometidas a cortante en los nervios. Sin embargo la norma actual es muy conservadora respecto a normativas anteriores. Por otro lado hay que tener en cuenta la complejidad estructural que la bóveda representa, y por tanto las conclusiones según la normativa actual no son concluyentes respecto de la durabilidad ante fisuración a cortante.



## 7. Conclusiones

En el presente documento se ha llevado a cabo el estudio de láminas cilíndricas de hormigón armado, y en especial de una obra clave en la trayectoria de Eduardo Torroja, como es la Iglesia de Villaverde. A lo largo de estas páginas se han expuesto diferentes conceptos conocidos hasta ahora relacionados con este tipo estructural, contrastándose con una obra realizada que en general no ha tenido gran repercusión en el mundo científico, pero que guarda en sí misma la esencia de los cascarones cilíndricos. Mediante su conocimiento y los nuevos avances tecnológicos este tipo estructural podrá volver a primera línea de la actualidad para dar como resultado nuevas soluciones adaptadas a las nuevas necesidades sociales.

Es destacable que ciertas tipologías de construcciones cilíndricas tan interesantes como las disposiciones en diente de sierra, en cantiléver o soluciones postesadas fueran desarrolladas a finales de la época de oro de estas estructuras laminares. Esto refleja el interés arquitectónico que las impulsó y que no estuvo respaldado en cierta medida por los inconvenientes dados en la época. Por ellos han de ser revisados para retomar estas tipologías con las ventajas tecnológicas actuales.

Hemos visto que las láminas cilíndricas cortas son menos efectivas que las largas, puesto que como el espesor mínimo que se necesita para su construcción práctica es muy superior al que se requiere para el comportamiento estructural rara vez se usan. Además debido a la reducción de las fibras transversales y un descenso de la parte superior del arco, provocados por los esfuerzos  $N_x$ , se producen flexiones cercanas a los apoyos, mucho mayores en láminas cortas que en láminas largas.

En cuanto a su diseño se recomienda diseños de lámina largas de muy poco espesor, pero no menores de 7cm, para reducir al máximo los efectos de flexión, así como el uso de perfiles con radios de curvatura lo más reducidos posible para controlar el riesgo de pandeo en láminas. Es recomendable el engrosamiento del perfil en las generatrices de borde de la lámina para disponer el armado suficiente dedicado a la absorción de las tracciones en esa zona. Este armado se situará lo más cerca posible del borde inferior como sea posible, condición que se hace ineludible en láminas mayores a 30m. Se evitarán elementos de gran tamaño dado que introducen esfuerzos incompatibles con el estado de membrana. Dado el avance actual en técnicas de postesado es interesante generalizar su uso en láminas cilíndricas ya que se reduce sustancialmente el refuerzo necesario. Además disponer las armaduras de manera longitudinal y transversal de manera que las dos familias de armaduras queden ortogonales entre sí. Aunque se utiliza mayor cantidad de material, se garantiza también el anclaje. Por otro lado se armará mediante barras situadas a  $45^\circ$ , en aquellas zonas que presenten fuertes esfuerzos tangenciales, y no solo en las esquinas de la lámina como era comúnmente aceptado.

En láminas de hasta 30m de luz no se justifica el uso de hormigones de alta resistencia, aunque es conveniente incorporar contraflecha en el diseño y el empleo de hormigón aligerado, ya que reduce el peso propio de la estructura, aunque su uso es posible siempre y cuando no se superen los esfuerzos admisibles en los apoyos.

Al analizar la obra de Torroja se encuentra un gran número de estructuras laminares con perfil semielíptico. En principio parecería que el semicircular es el perfil más idóneo, pero si analizamos el comportamiento de ambos perfiles en diferentes hipótesis podemos observar que ante una situación de presión del viento en la lámina semicircular se producen cambios de carga considerables, mientras que la lámina semielíptica permanece estable, dada su inercia en la dirección del viento, e incluso se llega a reducir los esfuerzos producidos. Por tanto se comprueba que la elección del ingeniero no fue arbitraria.

Se han estudiado las diferentes situaciones que pueden afectar a una lámina cilíndrica a través de la cubierta de la Iglesia de Villaverde, y ha quedado patente por tanto las múltiples diferencias que se pueden dar en los resultados obtenidos a través de las diferentes situaciones consideradas. Según la teoría de membrana los esfuerzos longitudinales serán máximos en la directriz media de la lámina. Sin embargo se ha comprobado que esta afirmación no es cierta puesto que en la zona de apoyos encontramos fuertes esfuerzos longitudinales de tracción. Esto se debe precisamente al efecto arco que se produce en la lámina en las zonas anexas a los apoyos. En esta zona la lámina actúa como un elemento rígido, que es justo lo opuesto de lo expuesto en la teoría de membrana. Además se ha

comprobado que el armado de la lámina no cual no es concluyente dadas las diferencias entre normativas aplicadas en uno y otro caso, así como la complejidad de la estructura. Por otro lado se comprueba que los esfuerzos de compresión en la zona media de la lámina se aproximan a los teóricos. A este respecto se ha observado que la cubierta de la iglesia no tenía riesgo de agotamiento por fenómenos de pandeo.

Respecto a los esfuerzos transversales observamos que los resultados teóricos se asemejan a los hallados en la práctica. Encontramos diferencias en la zona de intersección entre lóbulos, presentándose tracciones en esa zona. Otra discrepancia respecto a la teoría son los esfuerzos de compresión que encontramos en las generatrices de borde de los lóbulos laterales, puesto que los resultados teóricos dan esfuerzos nulos. Este hecho no es de especial relevancia en el proceso de comprobación, dado que esta diferencia es de 1KN/m, y los esfuerzos longitudinales de borde se corresponden a los resultados teóricos.

También se produce una discrepancia entre la teoría de membrana para los esfuerzos tangenciales y los resultados observados en este estudio. Según la teoría estos esfuerzos son nulos en la directriz media de la lámina, así como máximos en los vértices inferiores de cada uno de los lóbulos. Sin embargo a la vista de los resultados podemos observar que existen esfuerzos tangentes en la parte superior de la directriz media de la lámina a causa de las hipótesis de succión de viento, así como esfuerzos máximos en las generatrices medias de cada uno de los lóbulos, no en las de borde como estipula la teoría de membrana. Por otra parte se observa que en el caso de la lámina de la Iglesia de Villaverde, que se ha considerado apoyada en todo el contorno, la tendencia difiere de la teoría puesto que los esfuerzos cortantes son menores en los apoyos, y además se obtienen fuertes esfuerzos tangenciales en las zonas medias de estos lóbulos debido a la redistribución de esfuerzos dadas estas condiciones de contorno así como en la intersección entre ellos debido a la rigidez en esa zona.

Los momentos flectores transversales concuerdan con el esquema de armado que se presentan en los documentos, aunque las longitudes de armado no son suficientes para los esfuerzos hallados en el cálculo mediante LUSAS. Por otra parte el acero empleado en el armado satisfacía según las normativas actuales las necesidades para los esfuerzos de las hipótesis más comprometidas, lo cual no es concluyente dadas las diferencias entre normativas empleadas según la época, así como por la complejidad estructural.

Por lo tanto a la vista de los datos contrastados podemos afirmar que los datos teóricos obtenidos por Torroja se corresponden con la hipótesis de rigidización de toda la cubierta, puesto que sus resultados se adaptan a un modelo rigidizado mediante nervios y apoyado en los muros laterales. Además ha quedado reflejado sobradamente la influencia que ejercen los nervios como elemento rigidizador, se oponen a cargas de viento y rigidizan la lámina ante los movimientos transversales que se dan en este tipo estructural en las generatrices de borde inferior. Por otra parte se observa que ante irregularidades geométricas de la lámina, es ésta la que se ve afectada en gran medida, mientras que los nervios reducen su trabajo, excepto ante esfuerzos transversales a ellos, dada su función rigidizadora. Sin embargo el armado transversal previsto para los nervios era insuficiente según la normativa actual, dados los fuertes esfuerzos transversales observados. Pero dadas las diferencias entre normativas aplicadas, así como por la complejidad que esta estructura representa, los resultados no son concluyentes.

Sin embargo la introducción de otros elementos tales como el arco de apoyo o la cúpula del ábside influyen notablemente en el comportamiento de la cubierta. Se obtienen resultados que no se reflejan en la teoría. Por un lado observamos que la introducción del arco como elemento de apoyo crea en el resultado final una redistribución de esfuerzos que afecta a toda la lámina. Hemos visto que debido a la flexibilidad de éste aumentan las tracciones en el apoyo opuesto así como las compresiones en el centro de la lámina, y además aumentan los esfuerzos en los lóbulos laterales, lo cual puede desembocar en un resultado que no había sido previsto anteriormente. Esto se ve agravado por el aumento de tracciones en las zonas de apoyo tras el análisis no lineal geométrico, quedando patente un riesgo de fisuración en el apoyo de la bóveda. También respecto a los esfuerzos transversales se reducen en la zona del arco a la vez que aumentan en la zona de apoyos rígidos, debido precisamente a la redistribución de esfuerzos interna de la lámina y la colaboración del arco de apoyo en estos esfuerzos. Sin embargo en ambos apoyos aumentan las compresiones debidas a la influencia que ejerce la no linealidad geométrica en el efecto arco en los apoyos, de la misma manera

que lo hacen las tracciones en la zona de intersección entre lóbulos en la zona media de la lámina debido precisamente al aumento de desplazamientos en esa zona. De la misma manera influye la presencia del arco en los esfuerzos tangenciales, pues en esa zona éstos disminuyen, aumentando en el extremo rígido. Sin embargo en la zona media de la lámina estos esfuerzos también aumentan en los lóbulos laterales, pues debido a la asimetría de la lámina éstos absorben parte de los esfuerzos en su redistribución. Es destacable el hecho de que estos esfuerzos se concentren tanto en los nervios, lo cual era de esperar, como en la zona media de los lóbulos laterales, lo cual hace ver que estos lóbulos son fundamentales y beneficiosos en el trabajo en conjunto de la lámina. Por otra parte los esfuerzos tangenciales no se ven influidos significativamente por irregularidad geométrica, al igual que los esfuerzos flectores transversales.

En general la hipótesis que mayor influencia tiene sobre la bóveda es la de peso propio, sobrecarga de nieve y viento en presión. Pero como ya se ha dicho la hipótesis que incluye la succión vertical de viento produce esfuerzos tangenciales no previstos en la teoría y que pueden producir fisuración en la lámina y por tanto filtraciones indeseadas en la cubierta. Pero cada hipótesis ha de ser estudiada en este tipo de láminas puesto que cada una produce desplazamientos máximos en una zona determinada de la lámina. La hipótesis de nieve crea mayores descensos en el centro de la lámina, donde no hay que olvidar que se producen fuertes compresiones y las posibilidades de pandeo son elevadas. Pero es la hipótesis que considera peso propio, sobrecarga de nieve y viento en presión la que produce mayores descensos en la zona media de los lóbulos laterales, donde también se producen fuertes compresiones, aunque siempre menores que en el caso anterior. Por otra parte la hipótesis que considera succión vertical de viento produce un ascenso en el centro de la bóveda, lo que invierte los esfuerzos flectores de la lámina y crea riesgos de fisuración en esa zona que no estaban previstos en el armado.



## 8. Propuestas de investigación

Tras el estudio realizado en el presente documento, se ha conseguido avanzar un paso en el conocimiento de las láminas cilíndricas de hormigón armado en particular, y en el campo de las estructuras laminares en general. Pero todavía queda un largo camino por recorrer en la ciencia de los cascarones. Por ello aquí se establece una serie de parámetros a estudiar en el futuro.

Uno de los factores más desconocidos en este campo es el pandeo de láminas de hormigón armado. Existen varias recomendaciones dadas por grupos de investigación desde hace años. En este trabajo se utiliza una de ellas. Sin embargo esto no es suficiente. Es necesario evaluar todos elementos que entran en juego en este tipo de estructuras para tener un mayor control sobre este fenómeno, sobre todo si tenemos en cuenta la presencia de nuevos materiales, los cuales no existían cuando dichos estudios fueron realizados.

Esto nos lleva a otro factor, precisamente el de los nuevos materiales. En la actualidad se han desarrollado, o se están investigando materiales novedosos, que podrían integrarse en el campo de las estructuras laminares, como es el caso de los hormigones de ultra alta resistencia, los hormigones textiles, los hormigones ligeros, ó incluso los hormigones reforzados con fibras. Es de especial interés la labor llevada a cabo en la investigación de este último material para la realización de la cubierta del Oceanográfico, situado en la Ciudad de las Artes y las Ciencias de Valencia. Es necesario llevar a cabo esta labor de forma generalizada para difundir el conocimiento científico sobre estos materiales.

Por otro lado sería interesante desarrollar nuevas técnicas de construcción. Este tipo de estructuras quedó obsoleta, entre otros factores, debido a la dificultad de llevarlas a la práctica. A finales de los 60 y principio de los 70 del siglo XX, ya se intuía que el postesado era una práctica realmente aconsejable en este campo. En la actualidad la técnica de tesado está ampliamente desarrollada y existen varios sistemas en el mercado. Por lo tanto se hace necesario la investigación de métodos adecuados de postesado, puesto que conlleva un ahorro de material así como la realización de estructuras con mayores luces. Además se debe desarrollar la prefabricación de estos elementos, sobre todo en su conjunción con hormigones de mayores resistencias y técnicas de tesado. Esto conllevaría una reducción considerable en los tiempos de puesta en obra, lo que abarataría el coste de la estructura resultante.

Pero el presente estudio también arroja luz sobre aspectos que no se tenían del todo claro sobre las láminas cilíndricas. Se ha hablado de los nervios de rigidización, de los apoyos, así como de las hipótesis de viento consideradas. Como se ha visto, estos elementos tienen una influencia determinante en el éxito de este tipo de estructuras.

Por un lado tenemos los nervios de rigidización. En numerosos proyectos sobre láminas cilíndricas han sido utilizados. Aunque como hemos visto, en muchos de ellos se han empleado nervios de gran tamaño, que como ha quedado claro, son una manera errónea de proceder. En otros, se ha optado por el engrosamiento de la lámina. Y en muy pocos se ha omitido este elemento, como en el Frontón Recoletos. Pero lo cierto es que tienen un papel fundamental en estas láminas. En el futuro se debería estudiar sobre ellos, en especial sobre las dimensiones que deberían tener según cada caso, e incluso se debería observar la supresión de estos, sobre todo si la lámina está complementada mediante postesado.

Y como se ha visto, también los apoyos de la lámina se han convertido en un elemento controvertido en este estudio. Se ha observado que según las condiciones de contorno de estas estructuras, los esfuerzos resultantes pueden variar significativamente respecto de los planteados según la teoría de membrana. Por lo tanto en el futuro se ha de estudiar profundamente las formas de apoyo de las estructuras laminares cilíndricas, para determinar los mejores resultados.

Y por último se hace especial mención sobre las acciones de viento. Ya Torroja hablaba de la acción de las succiones de viento sobre sus láminas. E incluso a lo largo de los años se han desarrollado diferentes normativas que intentan establecer este tipo de acciones. Pero lo cierto es que desde hace ya mucho tiempo se intuían los problemas derivados de esta cuestión. Por lo tanto, sería interesante potenciar estudios donde profundizar sobre esta cuestión.



## 9. Referencias

### A. Bibliografía

1. Torroja, E. *“Las Estructuras de Eduardo Torroja”*. Centro de estudios históricos de Obras públicas y urbanismo CEHOPU (Ministerio de Fomento). Año 1999.
2. Torroja, E. *“Razón y Ser de los Tipos Estructurales”*. Colegio de ingenieros de caminos, Canales y Puertos de Madrid. Año 1976.
3. Torroja, E. *“La Cubierta Laminar del Frontón Recoletos”*. Oficina Técnica de Eduardo Torroja. Año 1936.
4. Torroja, E. “Teoría de la Bóveda de Membrana con momentos de Flexión: Cañón Circular”.
5. Antuña, J. *“Las Estructuras de Edificación de Eduardo Torroja Miret”*. Universidad Politécnica de Madrid. Escuela Técnica Superior de Arquitectura. Año 2002.
6. Antuña, J. *“La Obra de Eduardo Torroja: La Investigación en la Construcción”*. Geometría y Proporción de las Estructuras. Ensayos en Honor de Ricardo Aroca. PP. 89-105.
7. Antuña, J. *“The Evolution of the Work of Eduardo Torroja: Shell Roofs with and without Reinforcement Rings”*. Año 2006. PP. 179-194.
8. Lozano Galant. J. A. *“Cylindrical Thin Concrete Shells. Structural Analysis of the Frontón Recoletos Roof”*. KTH Architecture and the Built Environment. Año 2009.
9. Lozano Galant. J. A.; Payá-Zaforteza, I. *“Structural analysis of Eduardo Torroja’s Frontón de Recoletos’ roof”*. Engineering Structures 33. Año 2011. PP. 843–854.
10. Olvera López, A. *“Análisis, Cálculo y Diseño de las Bóvedas de Cáscara”*. Continental. Año 1979.
11. Engel, H. *“Sistemas de Estructuras”*. Gustavo Gili. Año 2001.
12. Faber, C. *“Las Estructuras de Candela”*. Compañía editorial Continental. Año 1981.
13. Billington, D. P. *“Thin Shell Concrete Structures”*. MacGraw-Hill. Año 1982.
14. Domingo, A. y Lázaro, C. *“Evolution and Trends in Design, Analysis and Construction of Shell and Spatial Structures”*. Universidad Politécnica de Valencia.
15. Maydana, A. *“Guía de Estudio 4: Láminas Cilíndricas”*. Universidad Nacional de La Plata. Facultad de Arquitectura y Urbanismo. Año 2009.
16. Requena Ruiz, I. *“Análisis de Tipologías Estructurales: Bóveda, Lámina, Cúpula y Paraboloide”*.
17. Moore, F. *“Comprensión de las Estructuras Arquitectónicas”*. MacGraw-Hill. Año 2000.
18. *“Requisitos de Reglamento para Concreto Estructural (ACI 318S-05) y Comentario (ACI 318SR-05)”*. American Concrete Institute. Año 2005.
19. *“Eurocódigo 1. Bases de proyecto y acciones en estructuras. Parte 2-4: Acciones en estructuras. Acciones de viento. UNE-ENV 1991-2-4”*. AENOR. Mayo de 1998.
20. Hosdorf, H. *“Modelos Reducidos. Métodos de Cálculo”*. Instituto Eduardo Torroja de la construcción y del cemento.

21. Otto, F. *“Estructuras. Estudios y Trabajos sobre la Construcción Ligera”*. Gustavo Gili. Año 1973.
22. Timoshenko, S. *“Teoría de Placas y Láminas”*. Urmo. Año 1975.
23. Bellés, P.; Ortega, N.; Rosales, M.; Andrés, O. *“Shell form-finding: Physical and numerical design tools”*. Engineering Structures 31. Año 2009. PP 2656-2666.
24. Cassinello, P. *“En Memoria de Heinz Hossdorf”*. Informes de la Construcción, Vol. 58. Año 2006. PP. 63-81.
25. *“Element Reference Manual”*. LUSAS version 14.
26. Ministerio de Fomento. *“EHE 08”*. Año 2008.
27. Empresa Carlos Fernández Casado S.L. *“Comprobación de la estructura del Hipódromo de la Zarzuela”*.
28. International Association for Shell and Spatial Structures (IASS). *“Recommendations for reinforced concrete shells and folded plates”*. Working group nº 5, Madrid. Año 1979.
29. Kollar, L., Dulácska, E. *“Buckling of Shells for Engineers”*. John Wiley & Sons. Año 1984.

## **B. Otras referencias**

30. [http://www.cehopu.cedex.es/es/biblioteca\\_dl.php?ID\\_col=8](http://www.cehopu.cedex.es/es/biblioteca_dl.php?ID_col=8)
31. <http://arquitecturamodelo.blogspot.com/2010/08/iglesia-catolica-de-la-transfiguracion.html>
32. <http://www.arteguias.com/museo/museo-historia-valencia.htm>
33. <http://www.artifexbalear.org/archivolta.htm>
34. [http://corralrubio.com/?page\\_id=101](http://corralrubio.com/?page_id=101)
35. <http://www.flickr.com/photos/9264035@N03/708073881/>
36. <http://cronicasdelpatrimonio.blogspot.com/2010/05/el-mercado-eduardo-torroja-de-algeciras.html>
37. <http://www.arqueologiaypatrimonioindustrial.com/2010/05/lacatedraldelasnuevastecnologiasnaveboe.html>
38. <http://imageshack.us/photo/my-images/149/to1ra9.jpg/>
39. <http://picasaweb.google.com/jesus.m.movilla/FrontonesDelMundo#>
40. <http://www.diariodenavarra.es/20100528/tierraestella/dos-modelos-regadio-tierra-estella.html?not=2010052801325965&idnot=2010052801325965&dia=20100528&seccion=tierraestella&seccion2=tierraestella&chnl=10>
41. <http://www.flickr.com/photos/pacoremolacha/1229725538/>
42. <http://www.flickr.com/photos/kassss/page8/>
43. <http://archtlas.com/projects/spain/donostia/cubierta-del-fronton-de-anorga>
44. <http://www.ciccp.es/revistait/textos/pdf/15-Jos%C3%A9%20Antonio%20Torroja.pdf>

45. <http://www.fotocommunity.es/pc/pc/display/17069992>
46. <http://www.flickrriver.com/places/Spain/Valencia/Grao+de+Gandia/>
47. <http://www.panoramio.com/photo/20904890>
48. <http://www.panoramio.com/photo/4238577>
49. <http://www.universidadlaboralsevilla.com/enlaces.html>
50. <http://www.tectonica.es/arquitectura/moderna/rehabilitacion/articulo.html>
51. <http://hipodromosycaballos.blogspot.com/2010/10/proyecto-del-hipodromo-de-la-zarzuela.html>
52. [http://ivanblancolonga.blogspot.com/2010\\_09\\_01\\_archive.html](http://ivanblancolonga.blogspot.com/2010_09_01_archive.html)
53. <http://es.paperblog.com/hipodromo-de-la-zarzuela-madrid-198567/>
54. [http://es.wikipedia.org/wiki/Villaverde\\_\(Madrid\)](http://es.wikipedia.org/wiki/Villaverde_(Madrid))
55. <http://tecnomadas.wordpress.com/2009/11/07/fronton-recoletos-la-creacion-del-espacio-continuo/>
56. <http://www.ietcc.csic.es/index.php?id=562>
57. [http://www.dicea.unifi.it/maurizio.orlando/Tesi/2006\\_marino/EMarino2006\\_Tesi\\_Web.htm](http://www.dicea.unifi.it/maurizio.orlando/Tesi/2006_marino/EMarino2006_Tesi_Web.htm)
58. <http://www.artehistoria.jcyl.es/ciudades/obras/18256.htm>
59. <http://peristilo.wordpress.com/2009/07/05/arquitectura-espana-3/a99-sacristia-de-la-cartuja-de-granada/>
60. <http://3web.dipusevilla.es/SanLuis/archivos/textocapilla.pdf>