

UNIVERSIDAD POLITÉCNICA DE VALENCIA
Departamento de Ingeniería Mecánica y de Materiales



TESIS DE MÁSTER

**MODELADO DE LA INTERACCIÓN
DINÁMICA PANTÓGRAFO-CATENARIA.**

Presentada por: D. Héctor Mora Martínez

Dirigida por: Dr. D. F. Javier Fuenmayor Fernández

Dr. D. Manuel Tur Valiente

Valencia, Septiembre de 2011



Resumen.

En la presente Tesis de Máster se ha desarrollado una herramienta para la simulación de la interacción dinámica entre pantógrafo y catenaria en líneas de alta velocidad mediante el método de los elementos finitos empleando una formulación en coordenadas absolutas.

La obtención de los modelos dinámicos de pantógrafo y catenaria se ha llevado a cabo considerando el modelo de elementos finitos y la estructura de datos existentes en la metodología para el cálculo de la configuración inicial de la catenaria desarrollada en el Departamento de Ingeniería Mecánica de la Universidad Politécnica de Valencia. El trabajo desarrollado en esta Tesis complementa pues al anteriormente citado para así obtener un programa general que permita en primer lugar el diseño de catenarias con tipologías variadas y geometrías tridimensionales y su posterior análisis del comportamiento dinámico en servicio.

En el código desarrollado se han incluido las principales no-linealidades presentes en la estructura de cables pretensados que constituye la catenaria. Se ha modelado también el contacto unilateral existente entre pantógrafo y catenaria mediante el método de penalti. Teniendo en cuenta todas las peculiaridades presentes en este sistema, se han propuesto algoritmos numéricos para llevar a cabo la integración directa de las ecuaciones del movimiento resultantes, estudiando la influencia de la variación de los parámetros de cada método así como su adecuación al problema a resolver. La validación de los procedimientos de integración se ha llevado a cabo a través de ejemplos numéricos con solución conocida.

Los resultados obtenidos muestran como está formulación de elementos finitos junto con los algoritmos de integración propuestos constituyen una metodología válida para el estudio del problema de interacción dinámica.

Palabras clave: Interacción pantógrafo-catenaria; Integración dinámica; Contacto; FEM; Coordenadas Absolutas; EN 50318.



UNIVERSIDAD POLITÉCNICA DE VALENCIA

Departamento de Ingeniería Mecánica y de Materiales

Máster en Ingeniería Mecánica y Materiales





Abstract.

In this Master's Thesis a tool for simulating the dynamical interaction between pantograph and catenary in high speed lines has been developed by means of the finite element method using an absolute coordinates formulation.

Obtaining the dynamical models of pantograph and catenary is carried out considering the existing finite element model and data structure used in a methodology for calculating the initial configuration of the catenary developed in the Department of Mechanical Engineering and Materials at Universidad Politécnica de Valencia. The work in this Thesis complements the aforementioned in order to obtain a comprehensive program which allows first designing catenaries with varied typologies in three dimensions and later analyzing their dynamic performance in service.

In the developed code the main no-linearity sources present in the structure of prestressed wires which is the catenary are included. The unilateral contact between catenary and pantograph has been modeled by the penalty method. Considering all the features present in the resulting system, numerical algorithms have been proposed to perform the direct integration of the equations of motion, studying the influence of the variation of the parameters of each method as well as the suitability with the problem to solve. The validation of the integration procedures is carried out through numerical test cases where the solution is known in advance.

The results show how this finite element formulation constitutes with the proposed integration algorithms a valid methodology to study the problem of dynamic interaction.

Key words: Pantograph-catenary interaction; Dynamic integration; Contact; FEM; Absolute Coordinates; EN 50318.



UNIVERSIDAD POLITÉCNICA DE VALENCIA

Departamento de Ingeniería Mecánica y de Materiales

Máster en Ingeniería Mecánica y Materiales





Resum.

En la present Tesi de Màster s'ha desenvolupat una ferramenta per a la simulació de la interacció dinàmica entre pantògraf i catenària en línies d'alta velocitat mitjançant el mètode dels elements finits utilitzant una formulació en coordenades absolutes.

L'obtenció dels models dinàmics de pantògraf i catenària s'ha dut a terme considerant el model d'elements finits i l'estructura de dades existents en la metodologia per al càlcul de la configuració inicial de la catenària desenvolupada en el Departament d'Enginyeria Mecànica de la Universitat Politècnica de València. El treball desenvolupat en aquesta Tesi complementa doncs al anteriorment esmentat per a obtindre així un programa general

En la present Tesi de Màster s'ha desenvolupat una eina per a la simulació de la interacció dinàmica entre pantògraf i catenària en línies d'alta velocitat mitjançant el mètode dels elements finits emprant una formulació en coordenades nodals absolutes. L'obtenció dels models dinàmics de pantògraf i catenària s'ha dut a terme considerant el model d'elements finits i l'estructura de dades existents en la metodologia per al càlcul de la configuració inicial de la catenària desenvolupada al Departament d'Enginyeria Mecànica de la Universitat Politècnica de València. El treball desenvolupat en aquesta Tesi complementa doncs l'anteriorment esmentat per així obtenir un programa general que permeta en primer lloc el disseny de catenàries amb tipologies variades i geometries tridimensionals i la seua posterior anàlisi del comportament dinàmic en servei.

En el codi desenvolupat s'han inclòs les principals no-linealitats presents en l'estructura de cables pretensats que constitueix la catenària. S'ha modelat també el contacte unilateral existent entre pantògraf i catenària mitjançant el mètode de penalti. Tenint en compte les peculiaritats presents en aquest sistema, s'han proposat algorismes numèrics per dur a terme la integració directa de les equacions del moviment resultants, estudiant la influència de la variació dels paràmetres de cada mètode i la seua adequació al problema a resoldre. La validació dels procediments d'integració s'ha dut ha terme a través d'exemples numèrics amb solució coneguda.



UNIVERSIDAD POLITÉCNICA DE VALENCIA

Departamento de Ingeniería Mecánica y de Materiales

Máster en Ingeniería Mecánica y Materiales



Els resultats obtinguts mostren com està formulació d'elements finits juntament amb els algorismes d'integració proposats constitueixen una metodologia vàlida per a l'estudi del problema d'interacció dinàmica.

Paraules clau: Interacció pantògraf-catenària; Integració dinàmica; Contacte, FEM; Coordenades Absolutes, EN 50318.



Agradecimientos.

En primer lugar y de manera especial me gustaría dar las gracias a mis dos tutores a lo largo de este trabajo, Javier y Manolo, por invitarme a participar en este proyecto tan interesante y del que he aprendido mucho. Durante todos estos meses siempre mostraron un gran compromiso con este proyecto, siendo en todo momento pacientes, resolutivos y comprensivos. Han sido muchas las horas dedicadas a este proyecto, y sin su tutela y ayuda, difícilmente hubiera sido posible haber realizado un buen trabajo. A los dos muchas gracias.

Me gustaría extender estos agradecimientos a Virginia, compañera de trabajo y amiga que me ha acompañado durante muchos momentos complicados a lo largo de este proyecto y con quien he compartido numerosos quebraderos de cabeza. Muchas gracias.

Por otro lado, merecen un especial agradecimiento todos los profesores del área de Ingeniería Mecánica por la gran labor docente e investigadora que llevan a cabo y por contribuir a crear un clima de estudio y trabajo tan agradable. Muchas gracias a todos.

Quiero agradecer también de manera muy especial todo el apoyo recibido por los compañeros de la sala de becarios. Juntos habéis creado un gran entorno para el trabajo y me habéis hecho disfrutar y reír en numerosos descansos para tomar café.

También quiero agradecer a Fede, pieza clave en el día a día del departamento, su buena disposición y ayuda en todo momento, y también los ratos divertidos que hemos pasado juntos.

Por último y no por ello menos importante, querría agradecer a mis amigos y familia todo el apoyo que me han prestado durante la realización de este Máster y durante toda mi formación previa. Muchas gracias a todos.

A todos vosotros, muchas gracias por todo.

Valencia, Septiembre de 2011



UNIVERSIDAD POLITÉCNICA DE VALENCIA

Departamento de Ingeniería Mecánica y de Materiales

Máster en Ingeniería Mecánica y Materiales





ÍNDICE

<i>Resumen</i>	<i>i</i>
<i>Abstract</i>	<i>iii</i>
<i>Resum</i>	<i>v</i>
1 INTRODUCCIÓN	1
1.1 Antecedentes	1
1.1.1 Contexto tecnológico.	1
1.1.2 Contexto científico.	3
1.2 Motivación	5
1.3 Objetivos	5
2 MODELO DE ELEMENTOS FINITOS	7
2.1 Introducción	7
2.2 Descripción del modelo	8
2.2.1 Elemento tipo cable.....	9
2.2.2 Elemento tipo barra.....	14
2.2.3 Ensamblado de las matrices de elemento. Matrices globales.	15
2.3 Modelado de la masa	17
2.4 Modelos de pantógrafos	18
2.5 Modelado del brazo de registro	21
2.6 Modelo de amortiguamiento	28
2.6.1 Amortiguamiento de Rayleigh.	29
3 INTERACCIÓN. MODELO DE CONTACTO	31
3.1 Contacto unilateral	31
3.2 Modelo de interacción. Método de Penalti	33



4	<i>INTEGRACIÓN DINÁMICA</i>	37
4.1	Obtención de las ecuaciones del equilibrio dinámico mediante el MEF	37
4.2	Modelos dinámicos de la catenaria.	40
4.3	Integración directa de las ecuaciones del movimiento.	42
4.3.1	Métodos explícitos. Runge-Kutta de cuarto orden.....	44
4.3.2	Métodos implícitos. Método de Newmark.....	47
4.3.3	Métodos implícitos. El método α	50
5	<i>GESTIÓN DE NO-LINEALIDADES</i>	53
5.1	Modelo lineal de la catenaria	53
5.2	Unilateralidad del contacto	56
5.3	Unilateralidad de péndolas	58
5.4	No-linealidades del pantógrafo	61
6	<i>VALIDACIÓN DE LOS PROCEDIMIENTOS DE INTEGRACIÓN</i>	63
6.1	Descripción del problema a resolver	63
6.2	Influencia del tamaño de malla	65
6.3	Introducción de amortiguamiento numérico	68
6.4	Influencia de la rigidez de contacto	70
6.5	Conclusiones	73
7	<i>EJEMPLOS DE APLICACIÓN</i>	75
7.1	Validación del procedimiento de integración mediante la norma EN 50318	75
7.1.1	Datos del pantógrafo.....	78
7.1.2	Datos de la línea aérea de contacto.....	80
7.1.3	Resultados de la simulación. Estudio de los parámetros de integración.....	83



7.2	Simulación de una catenaria tipo Ave.	94
7.2.1	Trazado recto.....	94
7.2.2	Trazado curvo.	100
7.2.3	Simulación del comportamiento con defectos en la catenaria.	104
8	CONCLUSIONES Y TRABAJOS FUTUROS.....	107
9	BIBLIOGRAFÍA.....	109



UNIVERSIDAD POLITÉCNICA DE VALENCIA

Departamento de Ingeniería Mecánica y de Materiales

Máster en Ingeniería Mecánica y Materiales





1 INTRODUCCIÓN.

1.1 Antecedentes.

1.1.1 Contexto tecnológico.

En los últimos años los sistemas ferroviarios de alta velocidad han experimentado un gran avance, pudiendo identificarse los sistemas más desarrollados en Japón y Europa. Particularmente en Europa, y por entendido en España, algunos retos como el incremento en el número de viajeros y conexiones, la competitividad en el transporte de viajeros a destinos de media distancia con el transporte por carretera o aéreo así como la capacidad de interconexión rápida entre sistemas de diferentes países o incluso dentro de un mismo país, son los que motivan la inversión en investigación con el objetivo de maximizar la eficiencia de infraestructuras y vehículos, así como sus equipos auxiliares desde los puntos de vista del diseño así como del mantenimiento.

En los sistemas ferroviarios de tracción eléctrica existen dos interfaces vehículo-infraestructura. El primero de ellos es el contacto rueda-carril, objeto de mucho esfuerzo investigador desde hace mucho tiempo y siéndolo aun hoy en temas como la seguridad, el confort y el modelado teórico y experimental. La segunda interfaz es la formada por el contacto pantógrafo-catenaria, la que no ha sido investigada tan exhaustivamente. Sin embargo, la interfaz pantógrafo-catenaria es de crucial importancia por su estrecha relación con la interoperabilidad. Además, supone una limitación al incremento de la velocidad de operación de ferrocarriles por el efecto de la propagación de ondas en la catenaria flexible. El interés a este respecto queda de manifiesto a través de la existencia de proyectos europeos como EUROPAC (European Optimised Pantograph-Catenay Interface), o la existencia de normas europeas para la validación de los procedimientos de simulación de esta interfaz (UNE-EN 50318, [1]).



El conocimiento y simulación de los complejos fenómenos que tienen lugar entre catenaria y pantógrafo es pues clave para poder continuar con el desarrollo y avance de los sistemas ferroviarios presentes y futuros.

Para la esencial función de la distribución de energía, se ha adoptado de manera universal en los sistemas ferroviarios de altas prestaciones el sistema de línea de contacto aérea o catenaria, capaz de adaptarse a las exigencias de alta velocidad y voltajes elevados.

La unión entre catenaria y vehículo se realiza a través del pantógrafo (cf. Figura 1-1). El pantógrafo debe asegurar, sin interrupción, la alimentación de los motores mediante un contacto deslizante con el hilo de la catenaria a velocidades elevadas. Para asegurar una buena captación de corriente, el pantógrafo debe estar en permanente unión con el hilo de contacto, y ejercer un empuje mínimo sobre este segundo.

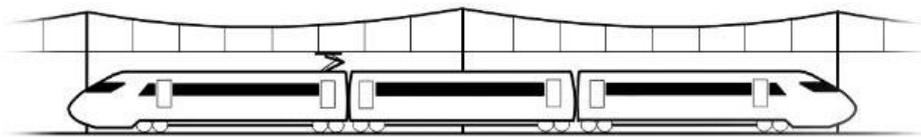


Figura 1-1: Ferrocarril con sistema pantógrafo-catenaria.

Bajo las acciones dinámicas producidas por el pantógrafo, la catenaria se deforma y oscila. Debido a su inercia, el pantógrafo no puede seguir de manera instantánea el movimiento de la catenaria y así, realizar un contacto permanente. La pérdida de contacto entre ambos genera arcos eléctricos, que provocan el desgaste prematuro de ambos sistemas, así como alimentación discontinua de los motores de tracción eléctrica.

De esta manera, la carrera hacia velocidades comerciales superiores, la garantía de interoperabilidad entre sistemas, el empleo de los sistemas ya construidos a mayores velocidades y el diseño económico y eficiente de infraestructuras está íntimamente ligado al conocimiento de este problema.



1.1.2 Contexto científico.

Desde un punto de vista mecánico, la simulación de la interacción pantógrafo-catenaria no es para nada trivial. Se trata de un problema de contacto entre una carga móvil y una estructura flexible formada por cables de pequeña sección pretensados. El acoplamiento entre estas dos estructuras genera ondas que se propagan por la estructura del cable, reflejándose e interfiriendo unas con otras para dar un campo de desplazamientos complejo, influenciado además por la presencia de fuertes no-linealidades en el comportamiento del sistema.

En la literatura se pueden encontrar numerosos artículos tratando el tema de la interacción pantógrafo catenaria. De entre ellos los artículos de Poetsch et al. [2] y Collina y Bruni [3] son de referencia para el estudio numérico y experimental del problema en la actualidad. En el primero se puede encontrar una completa revisión de las diferentes estrategias de modelado, integración, particularidades del sistema catenaria-pantógrafo, tales como la unilateralidad de péndolas y contacto, la influencia de la flecha estática de la catenaria con relación a la excitación del pantógrafo o la importancia de la rigidez a flexión de los cables, y la verificación experimental para finalmente plantear el problema del control activo de pantógrafos. En [3] se tratan en detalle muchas de las principales complicaciones en el modelado de la interacción a la vez que se estudian los rangos de aplicabilidad, en términos de rango de frecuencias de interés, según la complejidad de los modelos, para tratar de extender la fiabilidad de las simulaciones a un rango de frecuencia superior. En el artículo se presenta también un modelo de comportamiento no-lineal para las péndolas con el fin de modelar mejor su comportamiento en compresión.

Otro trabajo de frecuente referencia a la hora de llevar a cabo este trabajo de Tesis de Máster es la Tesis Doctoral de J. P. Massat [4, 5], en la que se presentan dos procedimientos completos de simulación, uno semi-analítico y otro basado en el método de los elementos finitos. En este trabajo se discuten las ventajas e inconvenientes de cada una de estas estrategias. Finalmente, y empleando un modelo basado en el método de los elementos finitos por su mayor adaptabilidad a geometrías complejas se presenta una metodología para la detección de defectos en líneas aéreas de contacto.



Otras contribuciones para el mayor entendimiento de los fenómenos asociados al modelado del sistema pantógrafo-catenaria se deben a Nordstrom [6], T. Dahlberg [7], quienes muestran la importancia de la contribución de la rigidez a flexión del cable de contacto para altas velocidades así como los efectos de la propagación de ondas de flexión en el cable ofreciendo este último autor una solución semi-analítica al problema de fuerza móvil sobre un cable pretensado.

El problema de contacto ha sido tratado generalmente a través del método de penalti como en [3, 4] o a través de ecuaciones de restricción como en [8, 9]. En este trabajo se modelará el contacto a través del método de penalti. En [3] y [4] se pueden encontrar resultados que muestran que el método de penalti es capaz de proporcionar buenos resultados.

Los modelos más sencillos de pantógrafos que se pueden encontrar en la literatura corresponden a los de masas y resortes concentrados como en [3, 4, 10, 11] por citar algunos, o a modelos más avanzados de sistemas multicuerpo [8, 12]. La elección de uno u otro depende de los objetivos de la simulación, así como del grado de precisión buscado. En este trabajo de Tesis de Máster se optará por la primera opción por su mayor facilidad de implementación.

En [13], L. Drugge presenta las características que un programa para la simulación de la interacción dinámica debería tener para garantizar su generalidad y aplicabilidad.

El programa de simulación desarrollado en esta Tesis de Máster ha empleado el modelo de elementos finitos de la catenaria basado en coordenadas modales absolutas elaborado por V. Vidal, M. Tur y F. J. Fuenmayor [14, 15] en el Departamento de Ingeniería Mecánica y Materiales de la Universidad Politécnica de Valencia. En [15] se presentan dos metodologías para resolver el problema de la configuración inicial de la catenaria bajo su propio peso sujeta a una serie de restricciones de diseño formulando para este problema dos tipos de elementos, cable y barra, en coordenadas absolutas y considerando grandes desplazamientos.



1.2 Motivación.

El desarrollo de esta Tesis de Máster está motivado por diversos motivos, tanto de carácter académico como personal, siendo los más importantes los siguientes:

- La obtención del título de Máster en Ingeniería Mecánica y Materiales tras la finalización de los estudios de posgrado.
- El refuerzo y ampliación de los conocimientos adquiridos durante mi formación en campos diversos de la Ingeniería Mecánica (dinámica ferroviaria, dinámica de sólidos elásticos, vibraciones y propagación de ondas, programación del método de los elementos finitos, técnicas computacionales, problemas no-lineales, etc.).
- El desarrollo e implementación de un código de simulación con el fin de estudiar y resolver un problema con interés académico e industrial.

1.3 Objetivos.

El objetivo general de esta Tesis de Máster es el de desarrollar e implementar un código de simulación de la interacción dinámica entre pantógrafo y catenaria para líneas de alta velocidad basado en el método de los elementos finitos con una formulación en coordenadas nodales absolutas. El código de simulación será implementado por completo en MATLAB.

Para la consecución del objetivo general, los siguientes objetivos parciales fueron planteados:

- Formulación de las matrices de masa de los elementos finitos que modelan los diferentes cables del sistema así como elementos auxiliares. Todas las estructuras de datos generadas se realizarán de manera que sean compatibles con el modelo de elementos finitos para el análisis estático de catenarias desarrollado en el Departamento de Ingeniería Mecánica y Materiales de la Universidad Politécnica de Valencia.



- Definición de modelos dinámicos de pantógrafo y catenaria. Se consideraran modelos en grandes y pequeños desplazamientos de la catenaria evaluando la calidad de los mismos. Inicialmente se considerará un modelo de pantógrafo de parámetros concentrados.
- Integración numérica del sistema de ecuaciones resultante. Se abordará este problema mediante la integración directa de las ecuaciones implementando métodos explícitos e implícitos para buscar el mejor planteamiento para el problema propuesto.
- Desarrollo de una metodología para la interacción. El problema de contacto se modelará a través del método de penalti.
- Modelado de las no-linealidades presentes en el problema tales como la unilateralidad de las péndolas y contacto.
- Análisis de los resultados numéricos en función de la variación de parámetros. Validación de los procedimientos de integración.



2 MODELO DE ELEMENTOS FINITOS.

En el presente capítulo se presentará el modelo de elementos finitos empleado para representar la estructura de la catenaria. Se mostrarán las matrices y vectores de fuerzas que después serán ensamblados e introducidos en las ecuaciones del movimiento.

Se mostrarán también los modelos de parámetros concentrados empleados para el modelado del pantógrafo, comentando las posibles alternativas a esta representación.

A lo largo del capítulo se incidirá en los aspectos más relevantes de los modelos de elementos finitos de cara a la simulación de la interacción dinámica.

2.1 *Introducción.*

A primera vista podría parecer que el modelado de una catenaria es sencillo pues esta está compuesta por elementos simples (cables, barras, masas concentradas, etc.) cuyos fenómenos de vibración son conocidos. No obstante, la catenaria representa una estructura compleja y no lineal, que emplea la tensión de los cables así como la longitud de los diferentes elementos para lograr una geometría concreta tridimensional.

El sistema catenaria consiste generalmente en un cable de contacto que es soportado por otro llamado sustentador (o catenaria). Las uniones verticales entre cable de contacto y sustentador se conocen como péndolas, siendo sus longitudes ajustadas con el fin de que el cable de contacto tenga una altura predeterminada, en general horizontal. Sin embargo, debido a la separación entre péndolas (desde 5 a 10 metros), el cable de contacto se deforma entre las mismas. Junto a los postes que soportan la estructura, los cables reciben un descentrado respecto al eje de la



vía con el fin de evitar la abrasión concentrada de las bandas de contacto para la captación de corriente por parte del pantógrafo.

El estudio y desarrollo de una metodología eficiente para obtener la configuración inicial y en equilibrio de una determinada tipología de catenaria representa un trabajo de investigación en sí debido a su complejidad [15]. En lo sucesivo, se asumirá que se dispone de una malla de elementos finitos que satisface todas las restricciones geométricas y de tensión en determinados elementos. Estas mallas serán las empleadas para llevar a cabo los estudios de interacción dinámica entre pantógrafo y catenaria.

2.2 Descripción del modelo.

El modelo de elementos finitos incorpora todos aquellos elementos constructivos que son representativos a la hora de estudiar el comportamiento dinámico de la catenaria: el cable de contacto, el cable sustentador, cables Y, las péndolas y el brazo de registro (cf. Figura 2-1). El modelo puede incorporar también masas puntuales para representar determinados elementos como grifas u otras uniones.

Además, se ha hecho la suposición de que los postes y ménsulas son muy rígidos, y no intervienen de manera significativa en la interacción con el pantógrafo. Por ello y por no complicar innecesariamente el modelo, estos no son tenidos en cuenta en la dinámica del sistema [4].

La malla de elementos finitos de la catenaria se modela mediante dos tipos de elementos: cable y barra 3D.

Los elementos tipo cable admiten deformaciones longitudinales y de flexión, y se emplean para modelar el cable sustentador y el de contacto, donde debido a la alta tensión mecánica la propagación de ondas de flexión puede ser importante. Los elementos tipo barra tan solo admiten deformaciones longitudinales, y se emplean para modelar péndolas, brazos tirantes y cables Y.

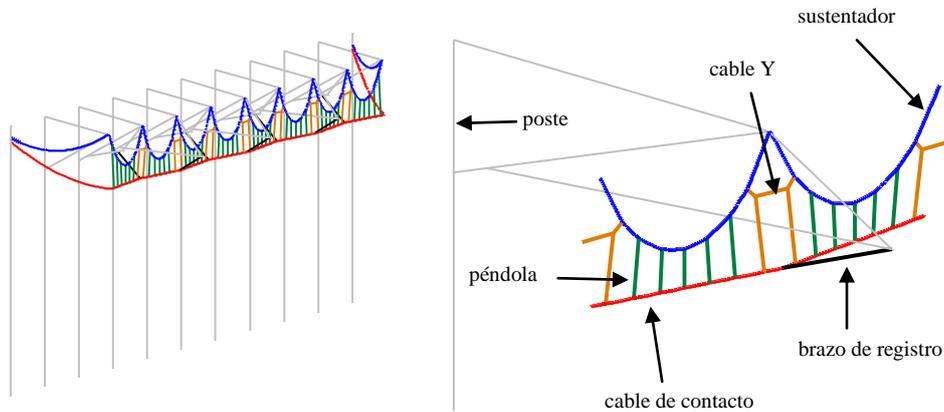


Figura 2-1: Mallado 3D del modelo de Elementos Finitos.

Si bien los elementos que componen la catenaria son simples y se pueden modelar mediante elementos finitos 1D, la geometría de la catenaria es enteramente tridimensional. Aunque los desplazamientos verticales son la contribución más importante en la dinámica del sistema, es necesario realizar un modelado tridimensional para estudiar el acoplamiento entre desplazamientos laterales y verticales o la influencia de fuerzas en dirección transversal.

El acoplamiento entre pantógrafo y catenaria se realiza por el método de penalti a través de una rigidez elevada. Este es un contacto unilateral en el que se permite el desacoplamiento entre el hilo de contacto y la cabeza de captación del pantógrafo (cf. §3.2).

2.2.1 Elemento tipo cable.

Los elementos cable se han modelado empleando coordenadas absolutas, siendo en este caso los grados de libertad (g.d.l.) las posiciones absolutas de los nodos y sus derivadas (cf. Figura 2-2). Esta formulación permite considerar correctamente el problema de grandes desplazamientos que presenta la catenaria.

Cada elemento finito quedará definido por las coordenadas absolutas de sus nodos (extremos del elemento) y las derivadas correspondientes, por lo que cada nodo tendrá 6 g.d.l. en el caso tridimensional, teniéndose un total de 12 g.d.l. por elemento.

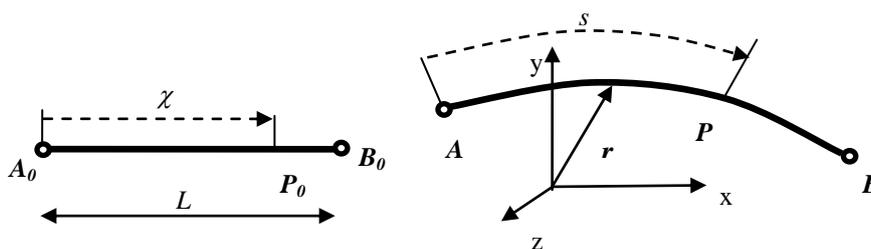


Figura 2-2: Elemento cable no deformado (izq.) y elemento deformado (der.).

El vector que define los grados de libertad nodales del elemento es:

$$\mathbf{q} = [q_{i1} \quad q_{i2} \quad q_{i3} \quad q_{i4} \quad q_{i5} \quad q_{i6} \quad q_{j1} \quad q_{j2} \quad q_{j3} \quad q_{j4} \quad q_{j5} \quad q_{j6}]^T \quad (2.1)$$

$$\mathbf{q} = \left[x_i \quad y_i \quad z_i \quad \frac{dx_i}{d\chi} \quad \frac{dy_i}{d\chi} \quad \frac{dz_i}{d\chi} \quad x_j \quad y_j \quad z_j \quad \frac{dx_j}{d\chi} \quad \frac{dy_j}{d\chi} \quad \frac{dz_j}{d\chi} \right]^T \quad (2.2)$$

Denominando \mathbf{r} al vector de posición del punto \mathbf{P} , \mathbf{q} el vector de g.d.l. y \mathbf{S} la matriz de funciones de forma del elemento. La interpolación del elemento está definida por

$$\mathbf{r} = \begin{Bmatrix} r_x \\ r_y \\ r_z \end{Bmatrix} = \mathbf{S}\mathbf{q} \quad (2.3)$$

siendo la matriz de funciones de forma:

$$\mathbf{S} = \begin{bmatrix} S_1 & 0 & 0 & S_2 & 0 & 0 & S_3 & 0 & 0 & S_4 & 0 & 0 \\ 0 & S_1 & 0 & 0 & S_2 & 0 & 0 & S_3 & 0 & 0 & S_4 & 0 \\ 0 & 0 & S_1 & 0 & 0 & S_2 & 0 & 0 & S_3 & 0 & 0 & S_4 \end{bmatrix} \quad (2.4)$$

Considerando las condiciones necesarias de continuidad en la interpolación, las funciones de forma son:



$$\begin{aligned}
 S_1(\xi) &= 1 - 3\xi^2 + 2\xi^3 \\
 S_2(\xi) &= L(\xi - 2\xi^2 + \xi^3) \\
 S_3(\xi) &= 3\xi^2 - 2\xi^3 \\
 S_4(\xi) &= L(\xi^3 - \xi^2)
 \end{aligned}
 \tag{2.5}$$

En estas ecuaciones se ha empleado la coordenada local normalizada $\xi = \frac{x}{L} \in [0,1]$, siendo L la longitud no deformada del elemento.

La obtención de las matrices de rigidez de este elemento se basa en el cálculo de las energías de deformación asociadas a las deformaciones longitudinales y de flexión. El desarrollo completo puede encontrarse en [15].

La matriz de rigidez asociada a las deformaciones longitudinales es:

$$\mathbf{k}_L^e = EA \begin{bmatrix} \mathcal{A} & 0 & 0 & \mathcal{B} & 0 & 0 & -\mathcal{A} & 0 & 0 & \mathcal{C} & 0 & 0 \\ & \mathcal{A} & 0 & 0 & \mathcal{B} & 0 & 0 & -\mathcal{A} & 0 & 0 & \mathcal{C} & 0 \\ & & \mathcal{A} & 0 & 0 & \mathcal{B} & 0 & 0 & -\mathcal{A} & 0 & 0 & \mathcal{C} \\ & & & \mathcal{D} & 0 & 0 & -\mathcal{B} & 0 & 0 & \mathcal{E} & 0 & 0 \\ & & & & \mathcal{D} & 0 & 0 & -\mathcal{B} & 0 & 0 & \mathcal{E} & 0 \\ & & & & & \mathcal{D} & 0 & 0 & -\mathcal{B} & 0 & 0 & \mathcal{E} \\ & & & & & & \mathcal{A} & 0 & 0 & -\mathcal{C} & 0 & 0 \\ & & & & & & & \mathcal{A} & 0 & 0 & -\mathcal{C} & 0 \\ & & & & & & & & \mathcal{A} & 0 & 0 & -\mathcal{C} \\ & & & & & & & & & \mathcal{A} & 0 & -\mathcal{C} \\ & & & & & & & & & & \mathcal{F} & 0 \\ & & & & & & & & & & & \mathcal{F} \\ & & & & & & & & & & & & \mathcal{F} \end{bmatrix}
 \tag{2.6}$$

En la que los valores de las constantes $\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{C}, \mathcal{D}, \mathcal{E}$ y \mathcal{F} son función de las coordenadas nodales (no lineal) y de la longitud inicial del elemento.

La matriz de rigidez asociada a las deformaciones de flexión, en este caso constante (independiente de las coordenadas nodales) es:



$$\mathbf{k}_F^e = \frac{EI}{L^2} \begin{bmatrix} 12 & 0 & 0 & 6L & 0 & 0 & -12 & 0 & 0 & 6L & 0 & 0 \\ & 12 & 0 & 0 & 6L & 0 & 0 & -12 & 0 & 0 & 6L & 0 \\ & & 12 & 0 & 0 & 6L & 0 & 0 & -12 & 0 & 0 & 6L \\ & & & 4L^2 & 0 & 0 & -6L & 0 & 0 & 2L^2 & 0 & 0 \\ & & & & 4L^2 & 0 & 0 & -6L & 0 & 0 & 2L^2 & 0 \\ & & & & & 4L^2 & 0 & 0 & -6L & 0 & 0 & 2L^2 \\ & & & & & & 12 & 0 & 0 & -6L & 0 & 0 \\ & & & & & & & 12 & 0 & 0 & -6L & 0 \\ & & & & & & & & 12 & 0 & 0 & -6L \\ & & & & & & & & & 12 & 0 & 0 \\ & & & & & & & & & & 4L^2 & 0 \\ & & & & & & & & & & & 4L^2 \\ & & & & & & & & & & & & 4L^2 \end{bmatrix} \quad (2.7)$$

La matriz de rigidez total del elemento es sencillamente la suma de las dos anteriores:

$$\mathbf{k}^e = \mathbf{k}_L^e + \mathbf{k}_F^e \quad (2.8)$$

Así, el vector de fuerzas elementales del elemento tipo cable se puede calcular como:

$$\mathbf{f}^e = \mathbf{k}^e \mathbf{q} \quad (2.9)$$

Para derivar la matriz de masa consistente del elemento cable se considera en primer lugar la energía cinética asociada definida como:

$$E_c = \frac{1}{2} \int_V \rho \dot{\mathbf{r}}^T \dot{\mathbf{r}} dV = \frac{1}{2} \dot{\mathbf{q}}^T \left(\int_V \rho \mathbf{S}^T \mathbf{S} dV \right) \dot{\mathbf{q}} \quad (2.10)$$

De esta forma, la matriz de masa es:

$$\mathbf{m}^e = \int_V \rho \mathbf{S}^T \mathbf{S} dV = \rho AL \int_0^1 \mathbf{S}^T \mathbf{S} d\chi \quad (2.11)$$

siendo ρ la densidad, A el área de la sección transversal (supuestas constantes) y L la longitud no deformada. Realizando la integral, se obtiene:



$$\mathbf{m}^e = \rho AL \begin{bmatrix} \frac{13}{35} & 0 & 0 & \frac{11L}{210} & 0 & 0 & \frac{9}{70} & 0 & 0 & \frac{-13L}{420} & 0 & 0 \\ \frac{13}{35} & \frac{13}{35} & 0 & 0 & \frac{11L}{210} & 0 & 0 & \frac{9}{70} & 0 & 0 & \frac{-13L}{420} & 0 \\ \frac{13}{35} & 0 & 0 & 0 & \frac{11L}{210} & 0 & 0 & \frac{9}{70} & 0 & 0 & 0 & \frac{-13L}{420} \\ \frac{L^2}{105} & 0 & 0 & 0 & \frac{13L}{420} & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{-L^2}{140} & 0 & 0 \\ \frac{L^2}{105} & 0 & 0 & 0 & \frac{13L}{420} & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{-L^2}{140} & 0 & 0 \\ \frac{L^2}{105} & 0 & 0 & 0 & \frac{13L}{420} & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{-L^2}{140} & 0 & 0 \\ \frac{13}{35} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{-11L}{210} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{13}{35} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{-11L}{210} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{13}{35} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{-11L}{210} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{L^2}{105} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{L^2}{105} & 0 & 0 \\ \frac{L^2}{105} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{L^2}{105} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{L^2}{105} \end{bmatrix} \quad (2.12)$$

La matriz de masa de este tipo de elementos es constante, es decir, no depende de la deformación del mismo.



2.2.2 Elemento tipo barra.

Este es el tipo de elemento empleado para modelar aquellos elementos de la catenaria cuya rigidez a flexión puede ser despreciada, como es el caso de péndolas, componentes del cable Y o el brazo de tirante.

Las coordenadas nodales de este tipo de elemento corresponden únicamente a la posición de los correspondientes nodos:

$$\mathbf{q} = [q_{i1} \quad q_{i2} \quad q_{i3} \quad q_{j1} \quad q_{j2} \quad q_{j3}]^T \quad (2.13)$$

$$\mathbf{q} = [x_i \quad y_i \quad z_i \quad x_j \quad y_j \quad z_j] \quad (2.14)$$

En este caso, la deformación es únicamente longitudinal y se supone una interpolación lineal en el elemento, de forma que el vector de posición de un punto \mathbf{P} , arbitrario está definida por:

$$\mathbf{r} = \begin{Bmatrix} r_x \\ r_y \\ r_z \end{Bmatrix} = \mathbf{S}\mathbf{q} \quad (2.15)$$

siendo la matriz de funciones de forma en este caso:

$$\mathbf{S} = \begin{bmatrix} S_1 & 0 & 0 & S_2 & 0 & 0 \\ 0 & S_1 & 0 & 0 & S_2 & 0 \\ 0 & 0 & S_1 & 0 & 0 & S_2 \end{bmatrix} \quad (2.16)$$

con:

$$\begin{aligned} S_1(\xi) &= 1 - \xi \\ S_2(\xi) &= \xi \end{aligned} \quad (2.17)$$

En estas ecuaciones se ha empleado la coordenada local normalizada $\xi = \frac{x}{L} \in [0,1]$, siendo L la longitud no deformada del elemento.

La matriz de rigidez resulta en este caso:



$$\mathbf{k}_L^e = \mathcal{A} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.18)$$

siendo:

$$\mathcal{A} = \frac{EA}{L^3} (L_{def}^2 - L^2) \quad (2.19)$$
$$L_{def} = \sqrt{(q_1 - q_4)^2 - (q_2 - q_5)^2 - (q_3 - q_6)^2}$$

Como en el caso del elemento cable, el vector de fuerzas se calcula como:

$$\mathbf{f}^e = \mathbf{k}^e \mathbf{q} \quad (2.20)$$

Análogamente al caso del elemento cable, la matriz de masa del elemento barra puede calcularse como:

$$\mathbf{m}^e = \int_V \rho \mathbf{S}^T \mathbf{S} dV = \rho AL \int_0^1 \mathbf{S}^T \mathbf{S} d\chi \quad (2.21)$$

Siendo ρ la densidad, A el área de la sección transversal (supuestas constantes) y L la longitud no deformada. Realizando la integral, se obtiene:

$$\mathbf{m}^e = \frac{1}{6} \rho AL \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \quad (2.22)$$

2.2.3 Ensamblado de las matrices de elemento. Matrices globales.

En los apartados anteriores se ha descrito el proceso para obtener las matrices de rigidez y masa a nivel de elemento, \mathbf{k}^e y \mathbf{m}^e respectivamente así como los vectores de fuerzas elementales \mathbf{f}^e . A continuación se va a describir la manera



de ensamblar estas matrices de elemento para obtener las matrices globales de rigidez y masa \mathbf{K}_{cat} y \mathbf{M}_{cat} y el vector de fuerzas internas global \mathbf{F}_{int} del sistema catenaria.

Para definir el procedimiento de ensamblado es útil considerar la expansión a nivel conceptual de cada una de las matrices y vectores de elemento al tamaño global del problema. De esta forma, las matrices de elemento expandidas \mathbf{K}_{cat}^e y \mathbf{M}_{cat}^e se obtienen a partir de los elementos de \mathbf{k}^e y \mathbf{m}^e posicionando sus componentes según la numeración global de g.d.l. del sistema. Para el caso de fuerzas internas globales se realiza la misma expansión.

$$\begin{aligned} \mathbf{m}^e &\xrightarrow{\text{expande}} \mathbf{M}_{cat}^e \\ \mathbf{k}^e &\xrightarrow{\text{expande}} \mathbf{K}_{cat}^e \\ \mathbf{f}^e &\xrightarrow{\text{expande}} \mathbf{F}_{int}^e \end{aligned} \quad (2.23)$$

Una vez se dispone de todas las matrices de elemento expandidas, las matrices y vectores globales son sencillamente la suma de las mismas:

$$\begin{aligned} \mathbf{M}_{cat} &= \sum_{n_e} \mathbf{M}_{cat}^e \\ \mathbf{K}_{cat} &= \sum_{n_e} \mathbf{K}_{cat}^e \\ \mathbf{F}_{int} &= \sum_{n_e} \mathbf{F}_{int}^e \end{aligned} \quad (2.24)$$

donde n_e es el número total de elementos del sistema.

En un apartado posterior se comentará cómo obtener la matriz de amortiguamiento global del sistema catenaria \mathbf{C}_{cat} , siendo en este caso el procedimiento un tanto diferente.



2.3 Modelado de la masa.

En los apartados correspondientes a los elementos tipo cable y tipo barra se han derivado las expresiones de las matrices de masa consistentes de dicho elementos. En muchos problemas dinámicos es posible concentrar la masa de los elementos en los nodos de la malla de elementos finitos. Este procedimiento proporciona matrices de masa diagonal, lo que es una ventaja desde el punto de vista computacional y para algunas aplicaciones proporciona mejores resultados que las matrices de masa consistentes.

Esta operación permite en algunos algoritmos explícitos de integración temporal que requieren la inversión de la matriz de masa en cada paso una considerable disminución de los tiempos de cálculo. Con la formulación de elementos finitos propuesta en esta Tesis, basada en coordenadas nodales absolutas, este hecho no representa un verdadero problema, pues las matrices de masa obtenidas son constantes, y en cualquier caso la operación de inversión tan solo se debería llevar a cabo una vez. No obstante, se mostrarán a continuación resultados empleando matrices de masa concentradas para mostrar los problemas que estas inducen.

La Figura 2-3 muestra la fuerza de contacto obtenida para el caso de un hilo discretizado sobre el que se desliza una carga móvil. En ella se pueden apreciar las perturbaciones generadas por el paso sobre cada elemento.

Como se puede ver, la formulación de las matrices de masa como concentradas estima la fuerza de contacto con mucha menor exactitud que en el caso de la formulación consistente, donde las oscilaciones debidas al paso por elemento son mucho menores.

En el resto de este trabajo no se han vuelto a considerar matrices de masa concentradas.

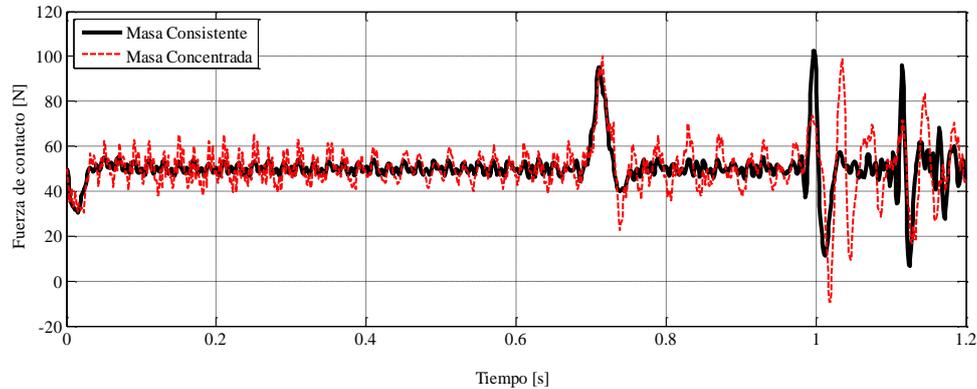


Figura 2-3: Comparación de los efectos del modelado de la masa concentrada o consistente en un cable horizontal recorrido por una carga móvil.

2.4 Modelos de pantógrafos.

El modelo más simple de pantógrafo considerado (cf. Figura 2-4) consiste en un sistema de parámetros concentrados formado por masas y resortes de dos etapas. Este modelo de pantógrafo es el empleado en la verificación de la norma EN 50318, y es el que se ha adoptado para llevar a cabo la mayor parte de los estudios de integración con el objetivo desarrollar el código y ajustar parámetros.

La masa m_1 representa la mesilla del pantógrafo y la masa m_2 modela el mecanismo de elevación. k_H es una rigidez elevada que se utiliza para poder aplicar un método de penalti en el modelado de la interacción pantógrafo-catenaria. En el esquema mostrado q_c , q_1 y q_2 son las coordenadas absolutas del punto de contacto pantógrafo-catenaria y de las masas concentradas del modelo de pantógrafo.

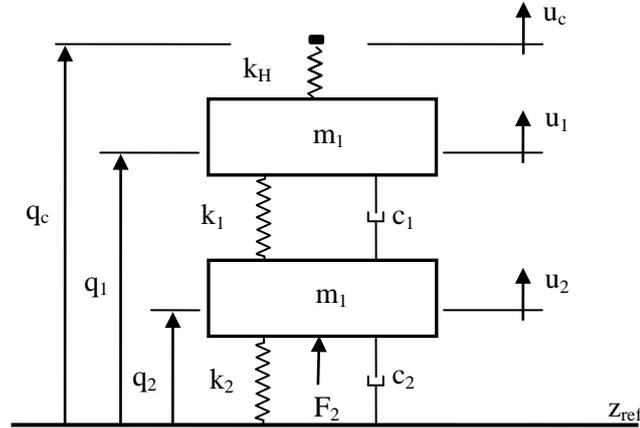


Figura 2-4: Modelo de pantógrafo tipo EN 50318.

Considerando que para una altura del punto de contacto definida por z_{ref} la fuerza en el contacto es nula para una fuerza aplicada F_2 también nula, las ecuaciones de comportamiento dinámico son:

$$\mathbf{M}_{pan}\ddot{\mathbf{q}}_{pan} + \mathbf{C}_{pan}\dot{\mathbf{q}}_{pan} + \mathbf{K}_{pan}\mathbf{q}_{pan} = \mathbf{F}_{pan} \quad (2.25)$$

con:

$$\mathbf{M}_{pan} = \begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix} \quad ; \quad \mathbf{C}_{pan} = \begin{bmatrix} c_1 & -c_1 \\ -c_1 & c_1 + c_2 \end{bmatrix} \quad (2.26)$$

$$\mathbf{K}_{pan} = \begin{bmatrix} k_1 & -k_1 \\ -k_1 & k_1 + k_2 \end{bmatrix} \quad ; \quad \mathbf{F}_{pan} = \begin{Bmatrix} k_H(q_c - q_1) \\ F_2 + k_2 z_{ref} \end{Bmatrix}$$

El resorte de contacto k_H no se va a considerar como parte integrante del modelo de pantógrafo. Para modelarlo se definirá un elemento de contacto que relacionará los grados de libertad asociados a la catenaria en el punto de contacto con la coordenada q_1 del pantógrafo (cf. §3.2).

El otro modelo de pantógrafo que se ha empleado para obtener los resultados presentados en esta tesis corresponde a un sistema de masas y resortes

de tres etapas (cf. Figura 2-5). Pese a su sencillez, este modelo es ampliamente utilizado por otros autores y códigos de elementos finitos para estudiar la interacción dinámica pantógrafo-catenaria. Además, los modelos facilitados por fabricantes de pantógrafos emplean esta representación en numerosos casos.

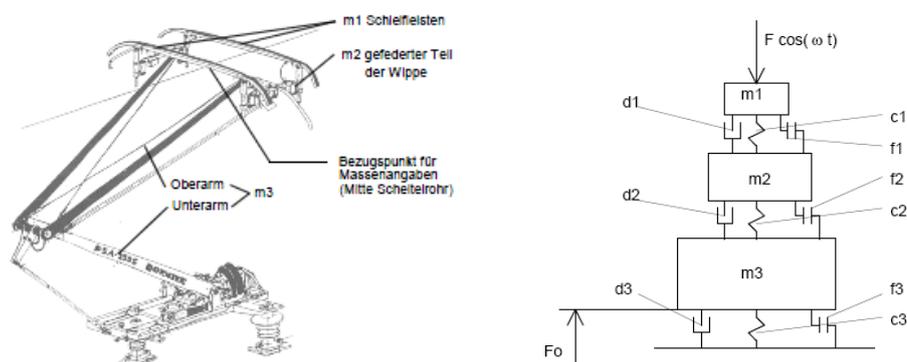


Figura 2-5: Pantógrafo de 3 etapas masas-resortes. Modelo DSA 380 EU (STEMMANN-TECHNIK GMBH).

La topología de las matrices de masa, amortiguamiento y rigidez correspondientes al modelo de tres etapas son similares a las del modelo 2 etapas presentadas anteriormente por lo que no se repetirán aquí.

Para obtener una respuesta más realista, la complejidad de estos modelos de pantógrafos puede incrementarse incluyendo ciertas no linealidades como son los resortes de fricción o los amortiguadores bidireccionales así como la presencia de fuerzas aerodinámicas [16].

La modelización más realista que se puede hacer del pantógrafo es mediante un sistema multicuerpo flexible. El pantógrafo multicuerpo no ha sido empleado esta Tesis.

Los modelos antes descritos tan solo consideran los desplazamientos verticales de las masas, ya que estos gobiernan la respuesta del pantógrafo. No obstante, diferentes autores que han estudiado el problema de la interacción



dinámica han incorporado otros grados de libertad para mejorar la representación de este sistema.

Algunas de las mejoras posibles a la hora de modelar el pantógrafo son por ejemplo, la inclusión de la rotación de las bandas de colección [2, 3, 4, 11], rotación de la cabeza de captación [2, 3, 17], deformaciones locales del colector [18].

La inclusión de un mayor número de grados de libertad para modelar el pantógrafo permite una mejor representación de este sistema. No obstante, la identificación de los parámetros del modelo, generalmente obtenidos por análisis modal experimental o por Elementos Finitos, se complica, siendo la información relativa a los mismos escasa o no divulgada.

2.5 Modelado del brazo de registro.

Con el objetivo de distribuir el desgaste de las bandas de contacto de los pantógrafos, debido a la fricción entre hilo de contacto y bandas, la catenaria adopta una configuración en zig-zag en torno al eje central de la vía.

La representación tridimensional de la catenaria es especialmente útil para estudiar los acoplamientos existentes entre los desplazamientos laterales y verticales del hilo de contacto. Este efecto es incrementado por la presencia del brazo de registro o de tirante, que por el efecto de su inclinación y la tensión del hilo de contacto genera fuerzas verticales y transversales sobre el hilo de contacto.

La presencia del brazo de registro en la catenaria también causa un pequeño incremento en la rigidez del cable de contacto en torno a los postes, así como a un incremento localizado de la masa en el punto de unión [6]. Para mostrar la influencia del mismo, se llevará a cabo un análisis de sus efectos sobre la rigidez local.

En la Figura 2-6 se muestra la configuración escalonada del cable de contacto y un detalle del brazo de registro. En ella T_R es la fuerza horizontal de reacción entre el cable de contacto y el brazo, T_C es la tensión aplicada al cable de

contacto, T_{REG} es la fuerza axial sobre el brazo, l la longitud del mismo, ϕ el ángulo que forma respecto de la horizontal, s el valor del escalonamiento y L la longitud entre postes. Se mostrarán a continuación las expresiones que permiten calcular a partir de estos datos el incremento de la rigidez en el punto de unión con el cable de contacto.

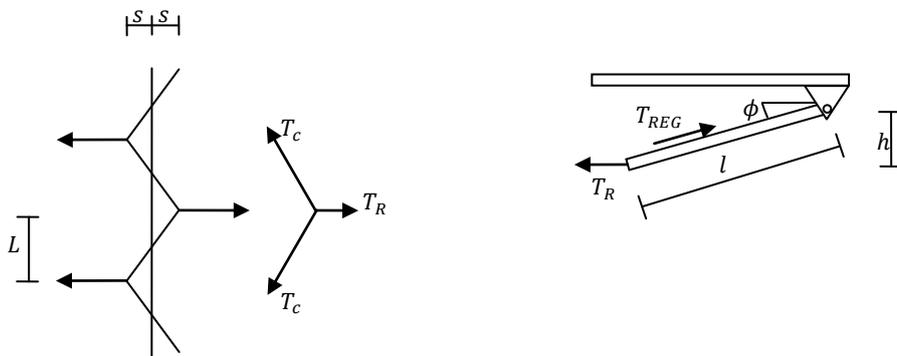


Figura 2-6: Configuración en zig-zag del cable de contacto. Detalle del brazo de registro.

Para que el brazo de registro esté en equilibrio, T_R debe estar compensado por $T_{REG} \cos \phi$. La componente vertical de la fuerza en el brazo de registro es pues $T_{REG} \sin \phi$. En el equilibrio, esta fuerza vertical es compensada por un desplazamiento local del cable de contacto.

Considerando que el movimiento lateral es despreciable (desplazamientos según el eje de la vía) el valor de T_R es:

$$T_R = 2 \frac{2s}{\sqrt{s^2 + L^2}} T_c \approx \frac{4sT_c}{L} \quad (2.27)$$

con

$$\sin \phi = \frac{h}{l}; \quad \cos \phi = \sqrt{1 - \sin^2 \phi} = \sqrt{1 - \left(\frac{h}{l}\right)^2} \quad (2.28)$$

la fuerza axial en el brazo de registro es:



$$T_{REG} = \frac{T_R}{\cos\phi} = \frac{4sT_c}{L\sqrt{1 - \left(\frac{h}{l}\right)^2}} \quad (2.29)$$

y la componente vertical es:

$$T_{REG}\sin\phi = \frac{4sT_ch}{lL\sqrt{1 - \left(\frac{h}{l}\right)^2}} \quad (2.30)$$

A través de la fuerza vertical sobre el brazo de registro es posible calcular la rigidez aparente k_a como:

$$k_a = \frac{d(T_{REG}\sin\phi)}{dh} = \frac{4sT_c}{lL\left(1 - \left(\frac{h}{l}\right)^2\right)^{3/2}} \quad (2.31)$$

Sustituyendo en las expresiones anteriores valores característicos de una línea de alta velocidad como la española, con una tensión en cables de $T_c = 20kN$, $l = 1m$, $L = 65m$, $h = 0.15m$ y $s = \pm 0.2m$, se puede estimar que la fuerza vertical está entorno a $T_{REG}\sin\phi \approx 37.35N$ y que la rigidez aparente es aproximadamente $k_a \approx 254.70N/m$. Aunque este valor de rigidez es pequeño comparado con la rigidez de la catenaria (cf. Figura 7-2, Figura 7-18), afecta a la estimación de los desplazamientos del brazo de registro, cálculo de la fuerza de contacto, y tensión en las péndolas cercanas [4].

Algunos autores [6] han optado por no realizar un modelo tridimensional de la catenaria, intentando concentrar los efectos que el brazo de registro produce a través de fuerzas correctoras y resortes que intentar aproximar la rigidez aparente resultado del equilibrio. Esta es una de las principales limitaciones de los enfoque analíticos al problema de interacción dinámica en catenarias reales tridimensionales pues ignora los acoplamientos.

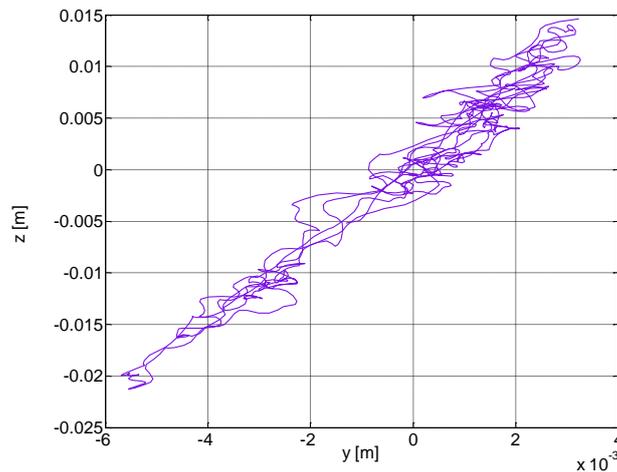


Figura 2-7: Trayectoria de un punto del cable de contacto sobre el plano perpendicular al eje de la vía.

La Figura 2-7 muestra la trayectoria de un punto del cable de contacto. En ella puede observarse como los desplazamientos transversales, si bien son menores que los verticales, no pueden ser despreciados. Cabe señalar también que en la simulación realizada, el modelo de pantógrafo empleado tan sólo permite la presencia de fuerzas verticales. Modelos de pantógrafos con grados de libertad de rotación que introduzcan fuerzas transversales harían que las diferencias en el orden de magnitud de estos desplazamientos fueran más pequeñas.

Si bien este procedimiento facilita la representación de la catenaria, tiene por inconvenientes la simplificación del problema, despreciando la presencia de desplazamientos transversales en primer término y más allá, limitando la posibilidad de incorporar modelos más realistas del brazo de tirante.

Sobre el nivel de representación necesario para el brazo de registro, autores como en [3] han estudiado la calidad de la representación necesaria en función del rango de frecuencias de interés de los resultados de la simulación. En [3] se concluye que los modelos bidimensionales de la catenaria tan solo son apropiados para rangos de bajas frecuencias (0 – 20 Hz).



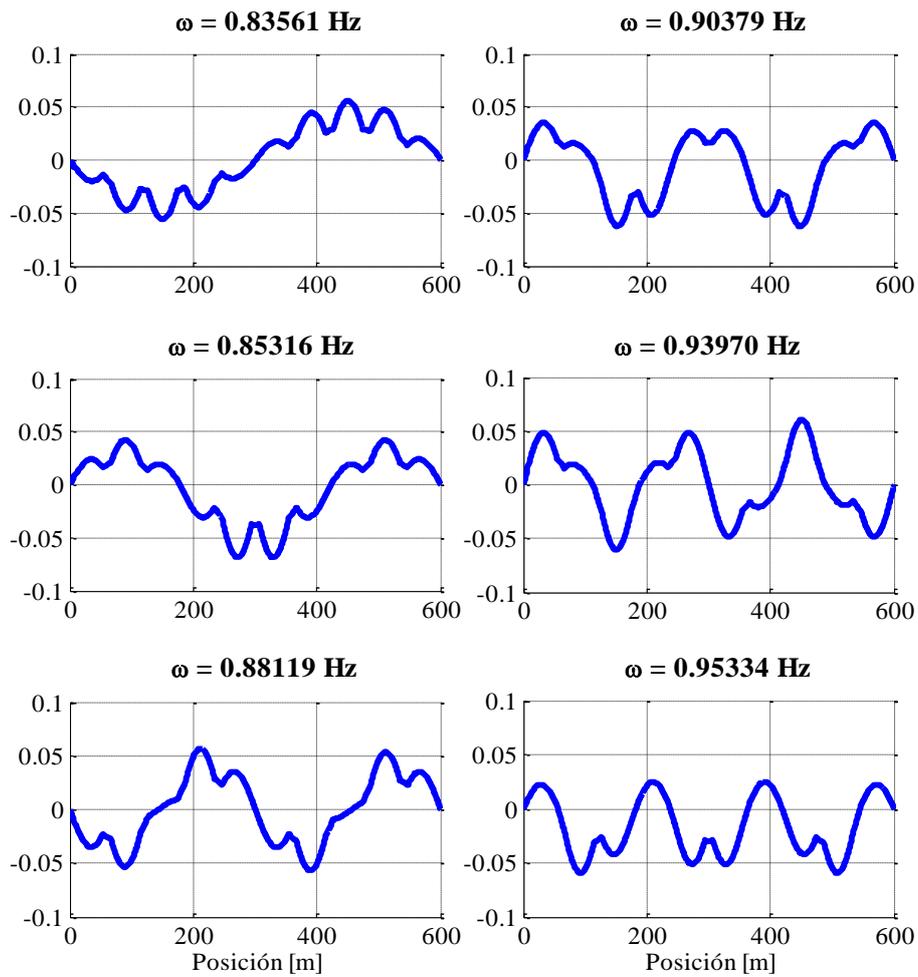
En el modelo de simulación desarrollado en la presente tesis se ha optado por representar el brazo de registro mediante un elemento barra unido por un nodo al cable de contacto y articulado en el otro extremo. Se considera que esta representación es suficiente para obtener buenos resultados en primera aproximación al problema, y deja abierta la posibilidad de complementar fácilmente el modelo del brazo de registro (desde el punto de vista de la implementación) con modelos de EF más precisos.

Otro modo de mostrar la influencia que tiene sobre los resultados el modelado tridimensional de la catenaria es calcular los modos y frecuencias naturales de esta a partir de las matrices de masa y rigidez globales. Para ello se compararán los modos de vibración obtenidos cuando la catenaria se modela en un solo plano y los modos de la catenaria con su geometría tridimensional real incluyendo el brazo de tirante.

La Figura 2-8 muestra los seis primeros modos de vibración vertical de la catenaria modelada en el plano donde se puede observar como evolucionan desde dos semiondas hasta siete semiondas. La representación muestra únicamente el cable de contacto. A continuación se muestra en la Figura 2-9 los cuatro primeros modos en el plano transversal.

En este caso no existe acoplamiento entre el movimiento vertical y transversal del cable de contacto de la catenaria.

En la Figura 2-10 y Figura 2-11 se muestran los 6 primeros modos de vibración de la catenaria cuando el modelo es tridimensional e incluye el brazo de registro. En la figura se representa tanto la componente en el plano como la componente transversal, donde se puede observar el acoplamiento entre los movimientos verticales y transversales del cable.



**Figura 2-8: Seis primeros modos de vibración en el plano vertical.
Catenaria modelada en dos dimensiones.**

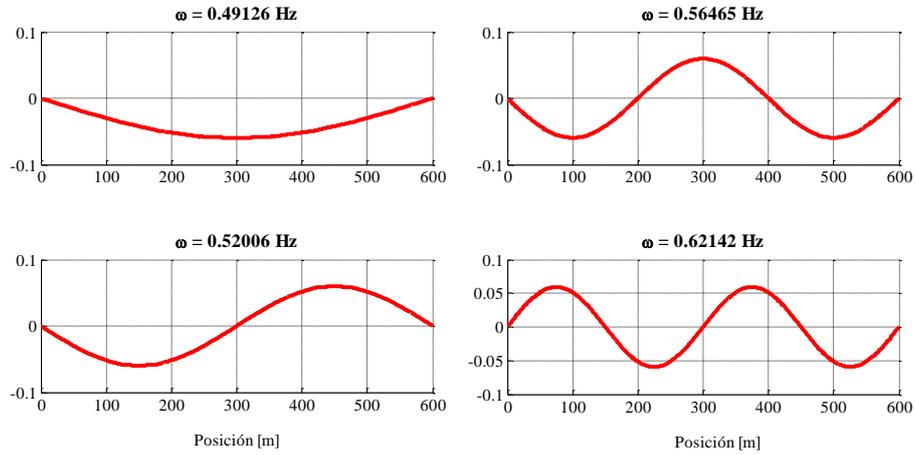


Figura 2-9: Cuatro primeros modos de vibración transversales. Catenaria modelada en dos dimensiones.

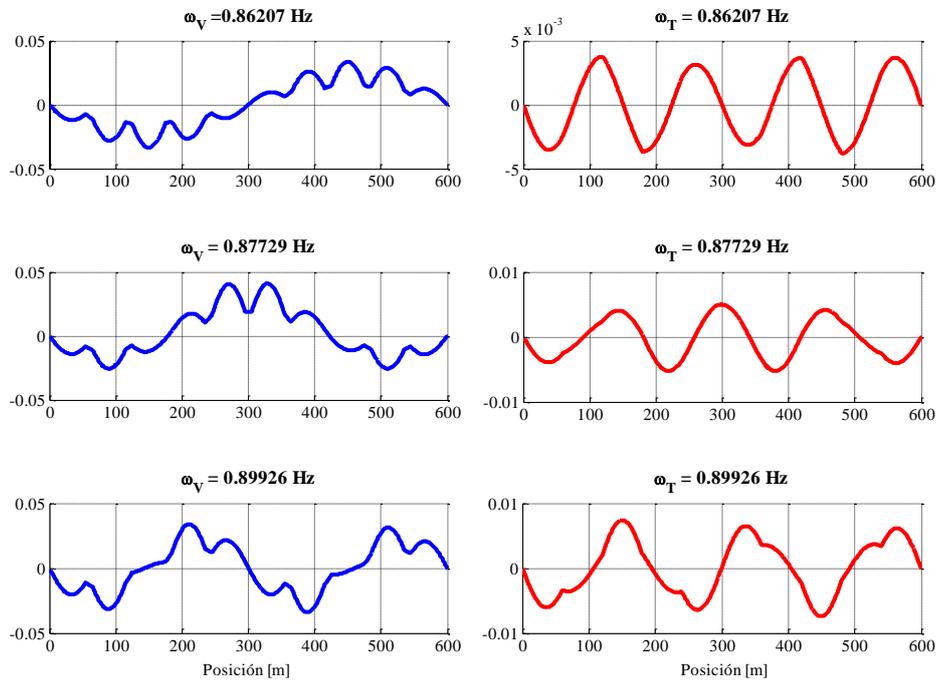


Figura 2-10: Tres primeros modos de la catenaria en 3D.

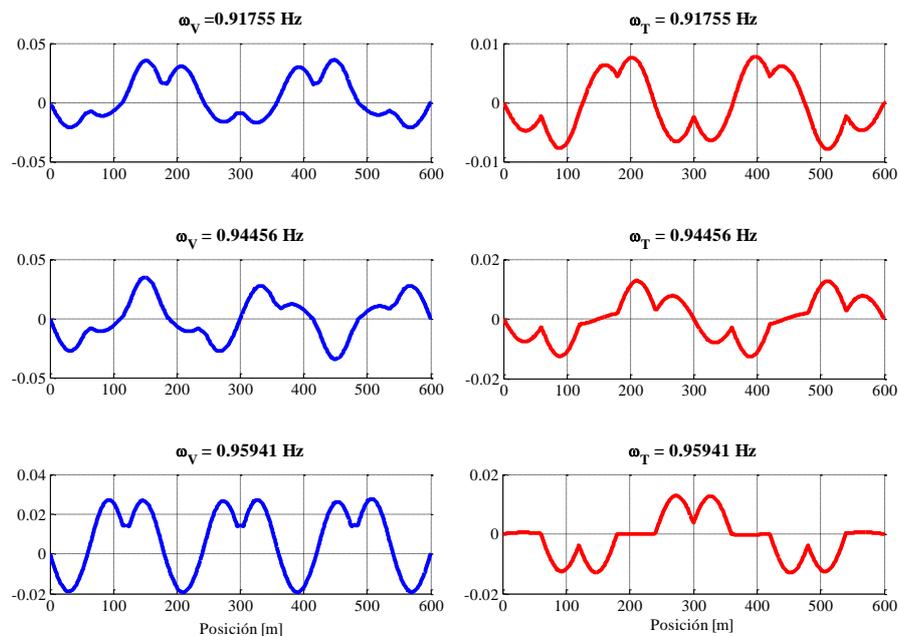


Figura 2-11: Modos cuarto, quinto y sexto de la catenaria en 3D. A la izquierda se representa el desplazamiento en el plano vertical y a la izquierda el desplazamiento en el plano transversal.

2.6 Modelo de amortiguamiento.

La inclusión del amortiguamiento en el modelo de la catenaria provoca una disipación de energía, que provoca que la amplitud de oscilación libre del sistema decaiga con el tiempo.

El tipo de amortiguamiento presente en la estructura de cables de la catenaria es de tipo histerético. Este amortiguamiento es inherente al material y es producido por plasticidad a una escala muy pequeña y otros fenómenos. La energía disipada por ciclo es independiente de la frecuencia de oscilación.



El modelo de amortiguamiento propuesto para la catenaria es de tipo viscoso, por ser el más sencillo de introducir en las ecuaciones dinámicas del modelo. En general en los problemas estructurales y en concreto en el caso de la catenaria, el amortiguamiento sea del tipo que sea es lo suficientemente pequeño para que independientemente de la fuente del mismo, la respuesta se pueda modelar suficientemente bien considerándolo como viscoso.

2.6.1 Amortiguamiento de Rayleigh.

Con esta técnica, conocida como amortiguamiento proporcional o de Rayleigh, se define una matriz \mathbf{C} de amortiguamiento global del sistema como una combinación lineal de las matrices de rigidez y masa del sistema.

$$\mathbf{C} = \alpha\mathbf{M} + \beta\mathbf{K} \quad (2.32)$$

Esta técnica hace que el amortiguamiento del sistema sea dependiente de la frecuencia.

En el modelo de elementos finitos se propone la definición de una matriz de amortiguamiento diferente para cada uno de los distintos componentes de la catenaria. Cada una de estas matrices se construye empleando la técnica de Rayleigh con coeficientes diferentes para cada elemento (cable de contacto, cable sustentador, péndolas, brazo de registro):

$$\mathbf{C} = \sum_i \alpha_i \mathbf{M}_i + \beta_i \mathbf{K}_i \quad (2.33)$$

donde cada i corresponde a cada uno de los componentes de la catenaria.

Para construir la matriz de amortiguamiento \mathbf{C} , las matrices de masa \mathbf{M} y de rigidez \mathbf{K} de cada grupo son construidas independientemente y ponderadas por unos coeficientes de amortiguamiento α_i y β_i respectivamente.

Finalmente, estas matrices son ensambladas para formar la matriz de amortiguamiento global del sistema. Este método presenta la ventaja de diferenciar el comportamiento de cada elemento y así obtener un amortiguamiento numérico más preciso.



Sin embargo, determinar los valores de los coeficientes no es en general sencillo. La Tabla 2-1 recoge los valores propuestos por [2] para una catenaria con características similares a las de las líneas de alta velocidad presentes en España.

Tabla 2-1: Coeficientes de Rayleigh empleados en el modelo de elementos finitos [4].

	α	β
Cable de contacto	0	1.0091e-4
Cable sustentador	0	8.1600e-4
Péndolas	0	1.3156e-6
Brazo de registro	0	0



3 INTERACCIÓN. MODELO DE CONTACTO.

En el presente capítulo se revisará de manera breve la problemática asociada al contacto unilateral entre dos sólidos elásticos, comentando las diferentes técnicas numéricas disponibles comentando algunas de sus ventajas e inconvenientes de cara a resolver el problema de interacción dinámica entre pantógrafo y catenaria.

Posteriormente se mostrarán los detalles de la solución adoptada y los principios seguidos para su implementación en el código de elementos finitos desarrollado.

3.1 *Contacto unilateral.*

Los fenómenos físicos involucrados en los problemas de contacto son fuertemente no lineales y requieren de una modelización compleja. Unido al problema de contacto están casi siempre los de rozamiento y desgaste, los que no han sido abordados aquí.

De manera general, modelar el contacto entre dos sólidos consiste en determinar las fronteras de contacto. Un contacto entre dos sólidos se caracteriza por una superficie, una línea o un punto en el caso 3D, una línea o un punto en el caso 2D y por un punto en el caso 1D como el que se presenta en esta tesis. En cada caso es necesario obtener una representación de la geometría de contacto, en este caso número y localización de los puntos de contacto, para calcular las fuerzas de contacto que se dirigen según la normal a la frontera de contacto en el caso sin rozamiento.

Las condiciones matemáticas de contacto unilateral que formalizan la no interpenetración entre los cuerpos elásticos se pueden resumir como:

$$\begin{aligned} dz &\geq 0 && \text{impenetrabilidad} \\ F_n &\leq 0 && \text{compresión} \\ dz \cdot F_n &= 0 \end{aligned}$$

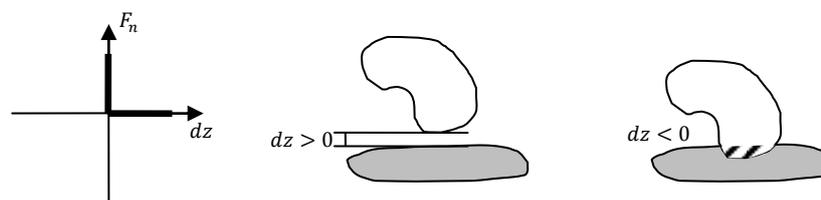


Figura 3-1: Condiciones de impenetrabilidad.

La Figura 3-1, en la que dz es el gap entre los dos cuerpos, que la fuerza de contacto es nula cuando no existe contacto entre los cuerpos y que la interpenetración $dz < 0$ es imposible.

Existen diferentes técnicas para estudiar el contacto entre dos sólidos: los métodos de penalti, método de los multiplicadores de Lagrange, los métodos híbridos, etc.

Desde el punto de vista intuitivo, los **métodos de penalti** consisten en colocar un resorte artificial entre los dos sólidos en contacto. La fuerza de contacto puede ser fácilmente evaluada en este caso como la reacción en el resorte:

$$F_n = -k_H dz \quad (3.1)$$

donde F_n es la reacción normal, k_H es la rigidez de contacto (o coeficiente de penalización) que ejerce una fuerza repulsiva entre las dos superficies.

El empleo de este método no respeta las condiciones anteriormente descritas para el contacto unilateral, pero proporciona resultados satisfactorios siempre que se sea capaz de determinar un valor apropiado para la rigidez de contacto, lo que no siempre es fácil a priori. No obstante, tiene la ventaja de ser muy sencillo de implementar e incluir dentro de los esquemas de integración

temporal, motivo por el que se ha elegido para modelar el contacto entre pantógrafo y catenaria en el programa desarrollado.

Por otra parte, el **método de los multiplicadores de Lagrange**, permite satisfacer las condiciones de impenetrabilidad de manera rigurosa a través de la introducción de variables suplementarias (multiplicadores de Lagrange). Este método es más complejo de implementar, y todavía más difícil de incluir de manera sencilla en los esquemas de integración tradicionales, requiriendo de técnicas especiales para llevar a cabo la integración temporal.

Algunos autores como Collina en [3], han probado que el empleo del método de penalti para estudiar la interacción entre pantógrafo y catenaria no introduce errores significativos si se selecciona adecuadamente la rigidez de contacto, aportando valores apropiados para este parámetro.

3.2 Modelo de interacción. Método de Penalti.

En instante t , la interacción pantógrafo-catenaria corresponderá a un elemento finito del hilo de contacto definido por sus nodos i y j . Para modelar el contacto, se define un elemento que relacionará los grados de libertad asociados a la catenaria con el que define la posición vertical de la mesilla del pantógrafo (cf. Figura 3-2).

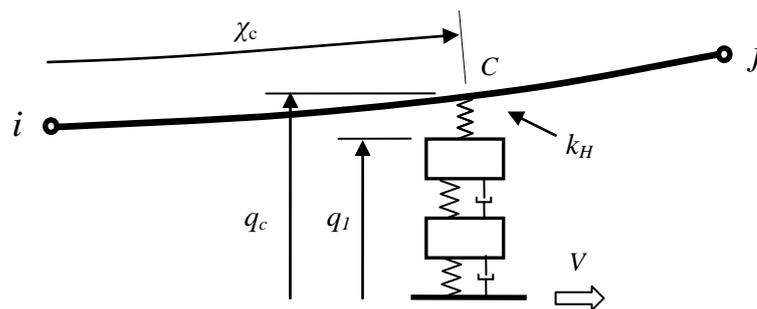


Figura 3-2: Interacción pantógrafo-catenaria.



Suponiendo velocidad constante del vehículo, la posición del pantógrafo y en consecuencia la del punto de contacto a lo largo de la catenaria estará definida por:

$$x_c = x_{c0} + Vt \quad (3.2)$$

Para definir el punto de contacto dentro del elemento finito, es necesario obtener la correspondiente coordenada local χ_c . Considerando la interpolación del elemento cable, se plantea la ecuación:

$$x_c = S_1(\chi_c)q_{i,1} + S_2(\chi_c)q_{i,4} + S_3(\chi_c)q_{j,1} + S_4(\chi_c)q_{j,4} \quad (3.3)$$

Esta expresión corresponde a una ecuación cúbica y su resolución permite evaluar el valor de χ_c . La dinámica asociada a la interacción pantógrafo-catenaria no produce variaciones sustanciales de la posición horizontal de la catenaria. Por este motivo, supondremos que el valor de χ_c calculado no se modifica con la dinámica del sistema.

La posición vertical del punto de contacto en la catenaria es:

$$q_c = S_1(\chi_c)q_{i,3} + S_2(\chi_c)q_{i,6} + S_3(\chi_c)q_{j,3} + S_4(\chi_c)q_{j,6} \quad (3.4)$$

La energía de deformación asociada al resorte k_H es:

$$U = \frac{1}{2} k_H (q_c - q_1)^2 \quad (3.5)$$

Para compactar el desarrollo, definimos el vector de grados de libertad del elemento de contacto, que incluye los asociados al elemento cable correspondiente de la catenaria y la coordenada asociada a la mesilla del pantógrafo:

$$\mathbf{q}_c = (q_{i,3} \quad q_{i,6} \quad q_{j,3} \quad q_{j,6} \quad q_1)^T \quad (3.6)$$

También definimos la matriz de funciones de forma:

$$\mathbf{S}_c = (S_1 \quad S_2 \quad S_3 \quad S_4 \quad -1)^T \quad (3.7)$$

De esta forma, la energía de deformación del resorte de contacto se puede expresar como:



$$U = \frac{1}{2} k_H (\mathbf{S}_c \mathbf{q}_c)^2 \quad (3.8)$$

La derivada de la energía de deformación con respecto a las coordenadas nodales define el vector de fuerzas elásticas equivalente, resultando:

$$\mathbf{F}_{el} = k_H \mathbf{S}_c^T \mathbf{S}_c \mathbf{q}_c \quad (3.9)$$

Como puede observarse a partir de la ecuación anterior, con las hipótesis realizadas, el elemento de contacto es lineal. El vector de fuerzas elásticas debidas a la interacción pantógrafo-catenaria puede calcularse mediante:

$$\mathbf{F}_{el} = \mathbf{K}_c \mathbf{q}_c \quad (3.10)$$

La matriz de rigidez asociada al contacto se define en función de la interpolación como:

$$\mathbf{K}_c(t) = k_H \mathbf{S}_c^T \mathbf{S}_c \quad (3.11)$$

En esta expresión se ha remarcado que la matriz de rigidez depende del tiempo, ya que es necesario evaluarlo para la posición del contacto entre pantógrafo y catenaria.

En la evolución dinámica del contacto, es posible que en ciertos intervalos de tiempos se produzca una separación entre la cabeza de captación del pantógrafo y la catenaria. Este caso es fácilmente detectable evaluando la fuerza de contacto entre ambos.

Cabe también comentar que el procedimiento aquí explicado para localizar la coordenada local del punto de contacto sobre el elemento supone que el trazado de la vía discurre según la dirección del eje global X , siendo este el caso más sencillo. El código de elementos finitos desarrollado para estudiar el problema de la interacción dinámica es más general y permite que el trazado de la línea de ferrocarril sea cualquier curva contenida en un plano de coordenada Z constante, por lo que este dispone de una rutina similar que en lugar de resolver una ecuación cúbica con una incógnita (ec 3.3), plantea un sistema de dos ecuaciones y dos incógnitas no lineal.



UNIVERSIDAD POLITÉCNICA DE VALENCIA

Departamento de Ingeniería Mecánica y de Materiales

Máster en Ingeniería Mecánica y Materiales





4 INTEGRACIÓN DINÁMICA.

En el presente capítulo se deducirán de manera general las ecuaciones del equilibrio dinámico a través del método de los elementos finitos aplicando el Principio de los Trabajos Virtuales.

A continuación se presentaran los modelos dinámicos del sistema catenaria por un lado, y el modelo dinámico resultante para estudiar la interacción dinámica entre pantógrafo y catenaria. Se introducirán a su vez el conjunto de ecuaciones del equilibrio dinámico para estudiar el problema suponiendo pequeños desplazamientos de la catenaria en torno a la posición de equilibrio dada por su configuración inicial cuando la única acción externa presente es la fuerza de la gravedad.

Finalmente se abordará el problema de la integración dinámica de las ecuaciones resultantes de la semi-discretización de elementos finitos mediante integración directa (métodos explícitos, métodos implícitos).

4.1 Obtención de las ecuaciones del equilibrio dinámico mediante el MEF.

En este apartado se presentará la formulación matemática que permite obtener el conjunto de ecuaciones que rigen el comportamiento dinámico de un sólido mediante el planteamiento del método de los elementos finitos (MEF).

En este caso las ecuaciones se derivarán de manera general para un sólido 3D, sin tener en cuenta las características de la estructura de catenaria y pantógrafo. No obstante, este método nos conducirá a un sistema de ecuaciones con la misma forma que el que se pretende resolver, en el que únicamente habrá que sustituir las matrices de elemento desarrolladas anteriormente para catenaria y pantógrafo.



Las ecuaciones del movimiento se han derivado imponiendo que el trabajo realizado por las fuerzas externas sea igual a la suma del trabajo absorbido por el sistema debido a las fuerzas de inercia, disipativas e internas para cualquier desplazamiento virtual (cualquier pequeño desplazamiento imaginario que satisface las relaciones de compatibilidad y las condiciones de contorno de Dirichlet). Para un único elemento de volumen V y superficie S , el balance del trabajo es:

$$\begin{aligned} \int_{V^e} \delta \mathbf{q}^T \mathbf{b} dV + \int_{S^e} \delta \mathbf{q}^T \mathbf{t} dS + \delta \mathbf{q}^{eT} \mathbf{p}^e &= \\ = \int_{V^e} (\delta \boldsymbol{\varepsilon}^T \boldsymbol{\sigma} + \delta \mathbf{q}^T \rho \ddot{\mathbf{q}} + \delta \mathbf{q}^T \kappa_D \dot{\mathbf{q}}) dV & \end{aligned} \quad (4.1)$$

donde:

$\delta \mathbf{q}$: desplazamiento virtuales	\mathbf{b}	: fuerzas volumétricas
$\delta \boldsymbol{\varepsilon}$: deformaciones correspondientes	\mathbf{t}	: fuerzas superficiales
$\delta \mathbf{q}^e$: desplazamientos nodales virtuales	\mathbf{p}^e	: fuerzas puntuales
$\dot{\mathbf{q}}$: velocidades	ρ	: densidad
$\ddot{\mathbf{q}}$: aceleraciones	κ_D	: definición del amortiguamiento viscoso
$\boldsymbol{\sigma}$: tensiones		

Mediante la discretización de elementos finitos podemos expresar las incógnitas y sus derivadas en función de los valores nodales (aproximación nodal) como:

$$\begin{aligned} \mathbf{q} &= \mathbf{S} \mathbf{q}^e & \dot{\mathbf{q}} &= \mathbf{S} \dot{\mathbf{q}}^e & \ddot{\mathbf{q}} &= \mathbf{S} \ddot{\mathbf{q}}^e \\ \delta \mathbf{q} &= \mathbf{S} \delta \mathbf{q}^e & \delta \boldsymbol{\varepsilon} &= \mathbf{B} \delta \mathbf{q}^e & \boldsymbol{\sigma} &= \mathbf{D} \mathbf{B} \mathbf{q}^e \end{aligned} \quad (4.2)$$

Sustituyendo las aproximaciones (4.2) en (4.1) y manipulando algunos términos se obtiene:

$$\delta \mathbf{q}^{eT} [\mathbf{k}^e \mathbf{q}^e + \mathbf{m}^e \ddot{\mathbf{q}}^e + \mathbf{c}^e \dot{\mathbf{q}}^e - \mathbf{f}^e] = \mathbf{0} \quad (4.3)$$

con:



$$\begin{aligned} \mathbf{k}^e &= \int_{V^e} \mathbf{B}^T \mathbf{D} \mathbf{B} dV & \mathbf{m}^e &= \int_{V^e} \rho \mathbf{S}^T \mathbf{S} dV \\ \mathbf{c}^e &= \int_{V^e} \kappa_D \mathbf{S}^T \mathbf{S} dV & \mathbf{f}^e &= \int_{V^e} \mathbf{S}^T \mathbf{b} dV + \int_{S^e} \mathbf{S}^T \mathbf{t} dV + \mathbf{p}^e \end{aligned} \quad (4.4)$$

donde \mathbf{S} es la matriz de funciones de forma del elemento y \mathbf{B} la matriz de derivadas de las funciones de forma. La matriz \mathbf{D} es una matriz simétrica de rigideces del material.

Como la expresión anterior (4.3) debe ser cierta para cualquier desplazamiento virtual arbitrario, se obtiene finalmente:

$$\begin{aligned} \delta \mathbf{q}^{eT} [\mathbf{k}^e \mathbf{q}^e + \mathbf{m}^e \ddot{\mathbf{q}}^e + \mathbf{c}^e \dot{\mathbf{q}}^e - \mathbf{f}^e] &= \mathbf{0} \rightarrow \\ \mathbf{k}^e \mathbf{q}^e + \mathbf{m}^e \ddot{\mathbf{q}}^e + \mathbf{c}^e \dot{\mathbf{q}}^e &= \mathbf{f}^e \end{aligned} \quad (4.5)$$

Una vez se ha desarrollado la ecuación del equilibrio dinámico para un elemento aislado, se puede proceder al ensamblado de las correspondientes ecuaciones de todos los elementos para formar las matrices globales del problema, de dimensión igual a los grados de libertad del sistema una vez tenidas en cuenta las condiciones de contorno esenciales para dar:

$$\begin{aligned} \mathbf{M} \ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{C} \dot{\mathbf{q}} + \mathbf{F}_{int} &= \mathbf{F}_{ext} \\ \mathbf{M} \ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{C} \dot{\mathbf{q}} + \mathbf{K} \mathbf{q} &= \mathbf{F}_{ext} \end{aligned} \quad (4.6)$$

donde

\mathbf{M} : matriz de masa global \mathbf{F}_{ext} : vector de fuerzas externas
 \mathbf{C} : matriz de amortiguamiento global \mathbf{F}_{int} : vector de fuerzas internas
 \mathbf{K} : matriz de rigidez global

Ambas ecuaciones establecen que las fuerzas externas son compensadas, o equilibradas dinámicamente por una combinación de fuerzas de inercia, fuerzas disipativas y fuerzas internas. La primera forma de las ecuaciones es más apropiada para la resolución de problemas no lineales.

Estas ecuaciones representan la semi-discretización de elementos finitos (discretización espacial únicamente). En posteriores apartados (cf. §4.3) se tratará la discretización temporal y los procedimientos necesarios para llevar a cabo la integración temporal.



4.2 Modelos dinámicos de la catenaria.

En este apartado se mostrarán las ecuaciones del equilibrio dinámico particularizadas para los sistemas catenaria y pantógrafo. En concreto se mostrará la naturaleza de los términos que figuran en ellas (no linealidad y/o dependencia del tiempo) así como las posibles simplificaciones que se pueden llevar a cabo durante la integración dinámica.

El modelo dinámico de la catenaria corresponde al equilibrio de fuerzas, añadiendo a las planteadas para el caso estático los efectos inerciales y las características disipativas. En el caso considerado pueden expresarse como:

$$\mathbf{M}_{cat}\ddot{\mathbf{q}}_{cat} + \mathbf{C}_{cat}\dot{\mathbf{q}}_{cat} + \mathbf{F}_{elcat}(t, \mathbf{q}_{cat}) = \mathbf{F}_{extcat}(t, \mathbf{q}_{cat}) + \mathbf{F}_{gcat} \quad (4.7)$$

Los términos inerciales son lineales con la aceleración ya que se han obtenido matrices de masa constantes para los diferentes elementos que constituyen el sistema (ec. 2.12, 2.22). Debido a que los efectos disipativos (amortiguamiento) no es posible modelarlos con precisión, se considerarán lineales y definidos a través de la matriz de amortiguamiento viscoso \mathbf{C}_{cat} . (cf. §2.6.1) Las fuerzas exteriores corresponden a las gravitatorias (constantes) y a las de interacción con el pantógrafo (al no considerarlo conjuntamente con la catenaria). En el modelo estático, las fuerzas elásticas son no-lineales con los desplazamientos nodales y están representadas por el vector \mathbf{F}_{elcat} . Estas no-linealidades provienen del propio modelo desarrollado para los elementos que componen la catenaria (elementos cable y barra) y adicionalmente del posible destensado de péndolas. Se supone unilateralidad en las péndolas, de forma que no se considerarán aquellas que para un instante de tiempo presenten fuerzas de compresión. La importancia de este efecto será demostrada más adelante (cf. §5.3).

En el caso del análisis de configuración inicial de catenaria es completamente necesaria la consideración de las no-linealidades del sistema. Este planteamiento ha conducido a la definición precisa de la posición inicial de equilibrio del sistema, necesaria para abordar el problema dinámico. Sin embargo, los desplazamientos originados por la interacción dinámica con el pantógrafo son pequeños, por lo que como se verá posteriormente (cf. §5.1), es posible linealizar el problema sin que exista una pérdida de precisión importante, mejorando los



tiempos de cálculo asociados. De esta forma, el modelo linealizado de la catenaria alrededor de la posición de equilibrio estático se puede describir mediante una ecuación del tipo:

$$\mathbf{M}_{cat}\ddot{\mathbf{q}}_{cat} + \mathbf{C}_{cat}\dot{\mathbf{q}}_{cat} + \mathbf{K}_{cat}\mathbf{q}_{cat} = \mathbf{F}_{extcat}(\mathbf{q}_{cat}) \quad (4.8)$$

La matriz de rigidez \mathbf{K}_{cat} corresponde a la matriz tangente, que se definió en la formulación del problema estático (cf. §2.2, [15]). Como se linealiza alrededor de la posición de equilibrio estático, el vector de fuerzas externas no debe incluir las fuerzas gravitatorias. Indicar que se mantiene en estas ecuaciones las no-linealidades asociadas a la unilateralidad de las péndolas y de la fuerza de contacto.

Teniendo en cuenta el modelo de pantógrafo, definido en §2.4 y el modelo de contacto en §3.2, el modelo completo del sistema que considera las no-linealidades de la catenaria corresponde a una ecuación del tipo:

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{C}\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{F}_{el}(t, \mathbf{q}) = \mathbf{F}_{ext}(t) + \mathbf{F}_g \quad (4.9)$$

El vector \mathbf{q} representa el conjunto de g.d.l. asociados a la catenaria y el pantógrafo y los diferentes vectores y matrices provienen del ensamblado de ambos subsistemas y del elemento de contacto. Las fuerzas elásticas dependen del tiempo debido al elemento de contacto.

En el caso que consideremos el modelo linealizado de catenaria, tendremos planteado el problema como:

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{C}\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{K}(t, \mathbf{q})\mathbf{q} = \mathbf{F}_{ext}(t) \quad (4.10)$$

La matriz $\mathbf{K}(\mathbf{q}, t)$ del sistema proviene del ensamblado las matrices de rigidez de los modelos de catenaria (matriz tangente), pantógrafo y contacto. Se ha remarcado que depende de la posición del sistema, ya que por una parte debe considerar la no-linealidad asociada a unilateralidad de péndolas y contacto y por otra que depende del tiempo debido al elemento de contacto.

Separando los vectores de grados de libertad nodales según se traten de grados de libertad asociados a la catenaria o al pantógrafo, y a través del elemento de contacto se puede mostrar de manera explícita el acoplamiento entre ambos sistemas. De este modo y a través de las ecuaciones (2.26) y (4.10) se obtiene para el caso de catenaria lineal (pequeños desplazamientos):



$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} M_{cat} & 0 \\ 0 & M_{pan} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{\mathbf{q}}_{cat} \\ \ddot{\mathbf{q}}_{pan} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} C_{cat} & 0 \\ 0 & C_{pan} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{\mathbf{q}}_{cat} \\ \dot{\mathbf{q}}_{pan} \end{Bmatrix} \\ + \begin{bmatrix} K_{cat} & K_c(t) \\ K_c(t) & K_{pan} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{q}_{cat} \\ \mathbf{q}_{pan} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{F}_{cat}(\mathbf{q}_{cat}, t) \\ \mathbf{F}_{pan} \end{Bmatrix} \end{aligned} \quad (4.11)$$

En esta ecuación se han considerado las no-linealidades debidas a la unilateralidad de las péndolas en el sistema catenaria como fuerzas externas $\mathbf{F}_{cat}(\mathbf{q}_{cat}, t)$, pues resulta computacionalmente más eficiente y sencillo de implementar. De este modo, la matriz de rigidez del sistema catenaria K_{cat} es constante e independiente del tiempo.

4.3 Integración directa de las ecuaciones del movimiento.

En este apartado se presentarán las técnicas numéricas empleadas para obtener la respuesta temporal del sistema, indicando sus ventajas e inconvenientes a la hora de abordar el problema de la interacción dinámica entre pantógrafo y catenaria.

Cuando el problema a estudiar consiste en buscar la evolución de la respuesta del sistema a lo largo del tiempo bajo la acción de un conjunto de fuerzas excitadoras, existen dos planteamientos básicos de análisis de la respuesta en dinámica estructural: el método de superposición modal y los métodos de integración directa de las ecuaciones de movimiento. En el caso de sistemas no lineales, como el formado por pantógrafo y catenaria, es necesario emplear algoritmos de integración directa paso a paso.

Los métodos numéricos empleados en dinámica estructural presuponen la disponibilidad de las matrices de rigidez, masa y amortiguamiento, en este caso obtenidas mediante el método de los elementos finitos. Es problema a resolver es el dado por las ecuaciones (4.6) es:



$$\begin{aligned} \mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{C}\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{F}_{int} &= \mathbf{F}_{ext} \\ \mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{C}\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{K}\mathbf{q} &= \mathbf{F}_{ext} \end{aligned} \quad (4.12)$$

Estos métodos se basan en hacer cumplir las ecuaciones de comportamiento dinámico del sistema en tiempos discretos y una serie de hipótesis relativas a la evolución del sistema entre instantes de tiempo.

Conocida la configuración del sistema en un instante t (y en algunos casos de instantes anteriores), los métodos de integración numérica paso a paso permiten calcularla en el instante $t + \Delta t$.

$$\begin{aligned} &\text{instante } t \\ \mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}}^t + \mathbf{C}\dot{\mathbf{q}}^t + \mathbf{K}\mathbf{q}^t &= \mathbf{F}_{ext}^t \end{aligned} \quad (4.13)$$

$$\begin{aligned} &\text{instante } t + \Delta t \\ \mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}}^{t+\Delta t} + \mathbf{C}\dot{\mathbf{q}}^{t+\Delta t} + \mathbf{K}\mathbf{q}^{t+\Delta t} &= \mathbf{F}_{ext}^{t+\Delta t} \end{aligned}$$

En dinámica estructural el valor de Δt suele mantenerse constante a lo largo de la integración para simplificar el algoritmo. La precisión en la integración numérica es mayor a medida que Δt es más pequeño, a costa de incrementar el tiempo de cálculo. El problema de interacción dinámica pantógrafo-catenaria tiene una característica adicional que puede influir en la selección del método. La existencia de unilateralidades en péndolas y en contacto se producirá entre instantes de tiempo de cálculo, con lo que se deberá seleccionar un incremento de tiempo capaz de captar la evolución de estos fenómenos.

Estos algoritmos de integración numérica se pueden clasificar en explícitos e implícitos. En el caso de los algoritmos explícitos, la posición del sistema es explícitamente una función de magnitudes de pasos de integración anteriores.

$$\mathbf{q}^{t+\Delta t} = f(\mathbf{q}^t, \dot{\mathbf{q}}^t, \ddot{\mathbf{q}}^t, \mathbf{q}^{t-\Delta t}, \dots) \quad (4.14)$$

En los algoritmos implícitos, la posición del sistema depende de magnitudes en el propio instante de cálculo.

$$\mathbf{q}^{t+\Delta t} = f(\dot{\mathbf{q}}^{t+\Delta t}, \ddot{\mathbf{q}}^{t+\Delta t}, \mathbf{q}^t, \dots) \quad (4.15)$$

Desde el punto de vista de aplicación práctica, las diferencias entre ambos tipos de métodos están relacionadas con la estabilidad y el tiempo de cálculo. Los métodos explícitos son condicionalmente estables, lo que significa que existe un



tamaño de paso crítico Δt_{cr} de forma que si se utiliza un tamaño de paso $\Delta t > \Delta t_{cr}$ el método se hace inestable. Esto implica que, en general, se debe utilizar un Δt pequeño (en ocasiones más por razones de estabilidad que de precisión). Los métodos implícitos normalmente utilizados son incondicionalmente estables, debiéndose seleccionar el paso de integración únicamente por motivos de precisión. A su vez, estos métodos permiten la incorporación de amortiguamiento numérico dentro del esquema de integración.

En general en los métodos explícitos será necesario utilizar un Δt más pequeño que en los implícitos, es decir que para calcular la evolución del sistema en un tiempo total dado será necesario realizar más pasos mediante un algoritmo explícito. Sin embargo, en los algoritmos explícitos el problema a resolver en cada paso de la integración es más simple que en el caso de los implícitos, es decir el tiempo de cálculo de cada paso de integración es menor. De esta forma, en muchas ocasiones no es posible predecir qué tipo de algoritmo es más conveniente.

En base a estas consideraciones, se ha planteado la resolución del problema mediante un método explícito (Runge-Kutta de cuarto orden) y otros implícitos (Newmark, HHT), todos ellos comúnmente utilizados en problemas dinámicos.

En los siguientes apartados se presentarán los esquemas de integración anteriormente comentados en mayor detalle.

4.3.1 Métodos explícitos. Runge-Kutta de cuarto orden.

El algoritmo de Runge-Kutta de cuarto orden es un método explícito de integración numérica. Sea un sistema de primer orden, definido por:

$$\dot{V} = G(t, V(t)) \quad (4.16)$$

Se supone que son conocidas las correspondientes condiciones iniciales $V(0)$ y $\dot{V}(0)$.

Conocido el estado del sistema V^t en el instante t , el método se basa en calcular:



$$\begin{aligned} \mathbf{k}_1 &= \Delta t \mathbf{G}(t, \mathbf{V}^t) \\ \mathbf{k}_2 &= \Delta t \mathbf{G}(t + \Delta t/2, \mathbf{V}^t) \\ \mathbf{k}_3 &= \Delta t \mathbf{G}(t + \Delta t/2, \mathbf{V}^t + \mathbf{k}_1/2) \\ \mathbf{k}_4 &= \Delta t \mathbf{G}(t + \Delta t, \mathbf{V}^t + \mathbf{k}_2/2) \end{aligned} \quad (4.17)$$

de forma, que se obtiene la configuración del sistema en el instante $t + \Delta t$ como:

$$\mathbf{V}^{t+\Delta t} = \mathbf{V}^t + \frac{1}{6}(\mathbf{k}_1 + 2\mathbf{k}_2 + 2\mathbf{k}_3 + \mathbf{k}_4) \quad (4.18)$$

Las ecuaciones del equilibrio dinámico de un sistema mecánico en general, y las correspondientes ecuaciones del problema de interacción pantógrafo-catenaria en particular, son un sistema de segundo orden, por lo que para aplicar el método Runge-Kutta es necesario llevar a cabo la reducción del orden del sistema.

El sistema planteado, en su forma más general, se puede expresar como:

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{C}\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{F}_{int}(t, \mathbf{q}) = \mathbf{F}_{ext}(t, \mathbf{q}) \quad (4.19)$$

Se define:

$$\mathbf{V} = \begin{Bmatrix} \mathbf{V}_1 \\ \mathbf{V}_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{q} \\ \dot{\mathbf{q}} \end{Bmatrix} \quad (4.20)$$

De esta forma, las ecuaciones diferenciales del problema de segundo orden pueden expresarse como un sistema de primer orden al que es posible aplicar directamente el método de Runge-Kutta. Formalmente, el problema así planteado puede expresarse como:

$$\dot{\mathbf{V}} = \mathbf{G}(t, \mathbf{V}(t)) = \begin{Bmatrix} \dot{\mathbf{V}}_1 \\ \dot{\mathbf{V}}_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{V}_2 \\ \mathbf{M}^{-1}(\mathbf{F}_{ext})(t, \mathbf{V}_1) - \mathbf{F}_{int}(t, \mathbf{V}_1) - \mathbf{C}\mathbf{V}_2 \end{Bmatrix} \quad (4.21)$$

En la expresión (4.21) se ha de tener en cuenta que la matriz de masa es constante en el problema planteado (cf. §2.2.1, 2.2.2), por lo que solo es necesario factorizarla u obtener su inversa al inicio de la integración numérica, siendo válida para los sucesivos incrementos de tiempo de cálculo. En el caso en que se considere un modelo linealizado de catenaria, el esquema del algoritmo no varía apreciablemente, ya que solo es necesario evaluar las fuerzas elásticas mediante el modelo linealizado.

$$\dot{\mathbf{V}} = \mathbf{G}(t, \mathbf{V}(t)) = \begin{Bmatrix} \dot{\mathbf{V}}_1 \\ \dot{\mathbf{V}}_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{V}_2 \\ M^{-1}(\mathbf{F}_{ext})(t, \mathbf{V}_1) - \mathbf{K}\mathbf{V}_1 - \mathbf{C}\mathbf{V}_2 \end{Bmatrix} \quad (4.22)$$

La introducción de no-linealidades como la unilateralidad de péndolas o del contacto en el método explícito es simple.

La Figura 4-1 muestra la estructura del esquema de integración Runge-Kutta de cuarto orden.

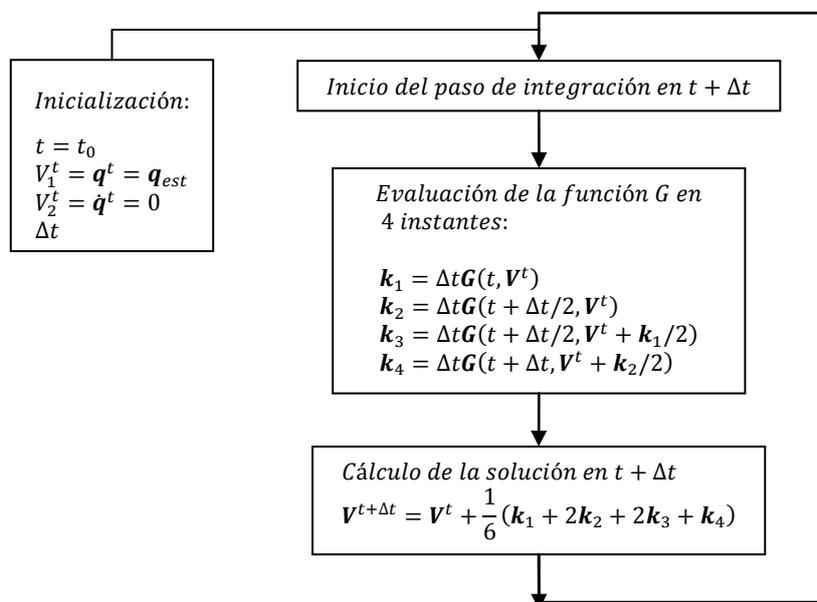


Figura 4-1: Esquema de integración explícito de Runge-Kutta de cuarto orden.

Como se ha introducido con anterioridad, el inconveniente de los métodos de integración explícitos se halla en su estabilidad condicional. En el caso lineal y no amortiguado, la zona de estabilidad está limitada por un paso de tiempo máximo inversamente proporcional a la más alta frecuencia propia del sistema, $\Delta t < \Delta t_{cr}$. Este paso de tiempo crítico puede estimarse a partir del tiempo de propagación de las ondas de deformación en la estructura.



4.3.2 Métodos implícitos. Método de Newmark.

Los métodos de la familia de Newmark son unos de los más empleados tradicionalmente en los problemas de dinámica estructural. La versión implementada en el código desarrollado en el presente trabajo de tesis de máster está formulada como un esquema con una fase de predicción y una fase iterativa de corrección [4, 20] con el fin de tratar mejor las no-linealidades del sistema.

En el caso de la resolución de un problema lineal, en la integración temporal se efectúa una predicción y una corrección. En el caso de un sistema no-lineal, puede ser necesaria la obtención de la corrección a través de un procedimiento iterativo. La ecuación de equilibrio dinámico puede ser escrita de la siguiente forma:

$$\mathbf{r}(\mathbf{q}) = \mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{C}\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{K}\mathbf{q} - \mathbf{F}_{ext} \quad (4.23)$$

donde \mathbf{r} es el vector de residuos. El problema se trata pues de resolver el sistema no lineal

$$\mathbf{r}(\mathbf{q}^{t+\Delta t}) = 0 \quad (4.24)$$

utilizando las siguientes predicciones para los desplazamientos, velocidades y aceleraciones:

$$\begin{aligned} \mathbf{q}_p^{t+\Delta t} &= \mathbf{q}^t + \Delta t \dot{\mathbf{q}}^t + \frac{1}{2} \Delta t^2 (1 - 2\beta) \ddot{\mathbf{q}}^t \\ \dot{\mathbf{q}}_p^{t+\Delta t} &= \dot{\mathbf{q}}^t + \Delta t (1 - \gamma) \ddot{\mathbf{q}}^t \\ \ddot{\mathbf{q}}_p^{t+\Delta t} &= 0 \end{aligned} \quad (4.25)$$

así, las correcciones a los desplazamientos se obtienen de manera iterativa para k resolviendo el siguiente sistema lineal:

$$\mathbf{K}_I \Delta \mathbf{q}_k = -\mathbf{r}(\Delta \mathbf{q}_k^{t+\Delta t}) \quad (4.26)$$

donde \mathbf{K}_I es la matriz de iteración del método, la cual se escribe como:

$$\mathbf{K}_I(\mathbf{q}) = \mathbf{K}^T + \frac{\gamma}{\beta \Delta t} \mathbf{C}^T + \frac{1}{\beta \Delta t^2} \mathbf{M}^T \quad (4.27)$$

En cada paso de tiempo y para cada k , la corrección $\Delta \mathbf{q}_k$ se calcula como:



$$\begin{aligned} \mathbf{q}_{c,k}^{t+\Delta t} &= \mathbf{q}_{c,k-1}^{t+\Delta t} + \Delta \mathbf{q}_k \\ \dot{\mathbf{q}}_{c,k}^{t+\Delta t} &= \dot{\mathbf{q}}_{c,k-1}^{t+\Delta t} + \frac{\gamma}{\beta \Delta t} \Delta \mathbf{q}_k \\ \ddot{\mathbf{q}}_{c,k}^{t+\Delta t} &= \ddot{\mathbf{q}}_{c,k-1}^{t+\Delta t} + \frac{1}{\beta \Delta t^2} \Delta \mathbf{q}_k \end{aligned} \quad (4.28)$$

La iteración dentro de la fase de corrección se realiza hasta que el nuevo residuo es menor que una cierta tolerancia prefijada. La Figura 4-2 ilustra el flujo en el esquema de integración.

Puede demostrarse [20] que los métodos de la familia de Newmark son incondicionalmente estables (en el caso lineal) cuando:

$$2\beta \geq \gamma \geq \frac{1}{2} \quad (4.29)$$

y estabilidad condicional cuando:

$$\gamma \geq \frac{1}{2} \quad \beta < \frac{1}{2}\gamma \quad \Delta t \leq \frac{\Omega_{cr}}{\omega_{max}} = \frac{\Omega_{cr} T_{min}}{2\pi} \quad (4.30)$$

donde ω_{max} y su periodo T_{min} corresponden a la frecuencia natural más alta del sistema y Ω_{cr} se define como:

$$\Omega_{cr} = \frac{\xi \left(\gamma - \frac{1}{2} \right) + \sqrt{\gamma/2 - \beta + \xi^3 \left(\gamma - \frac{1}{2} \right)^2}}{\gamma/2 - \beta} \quad (4.31)$$

donde ξ es la tasa de amortiguamiento del modo de más alta frecuencia.

Se puede observar que la inclusión del amortiguamiento no tiene efecto en la estabilidad cuando $\gamma = 1/2$, y que para $\gamma > 1/2$ el incremento de tiempo admisible aumenta.

Lo dicho sobre la estabilidad del método de Newmark es cierto para sistemas lineales, pero en general se acepta su validez para el caso de problemas no lineales en la mayoría de los casos.

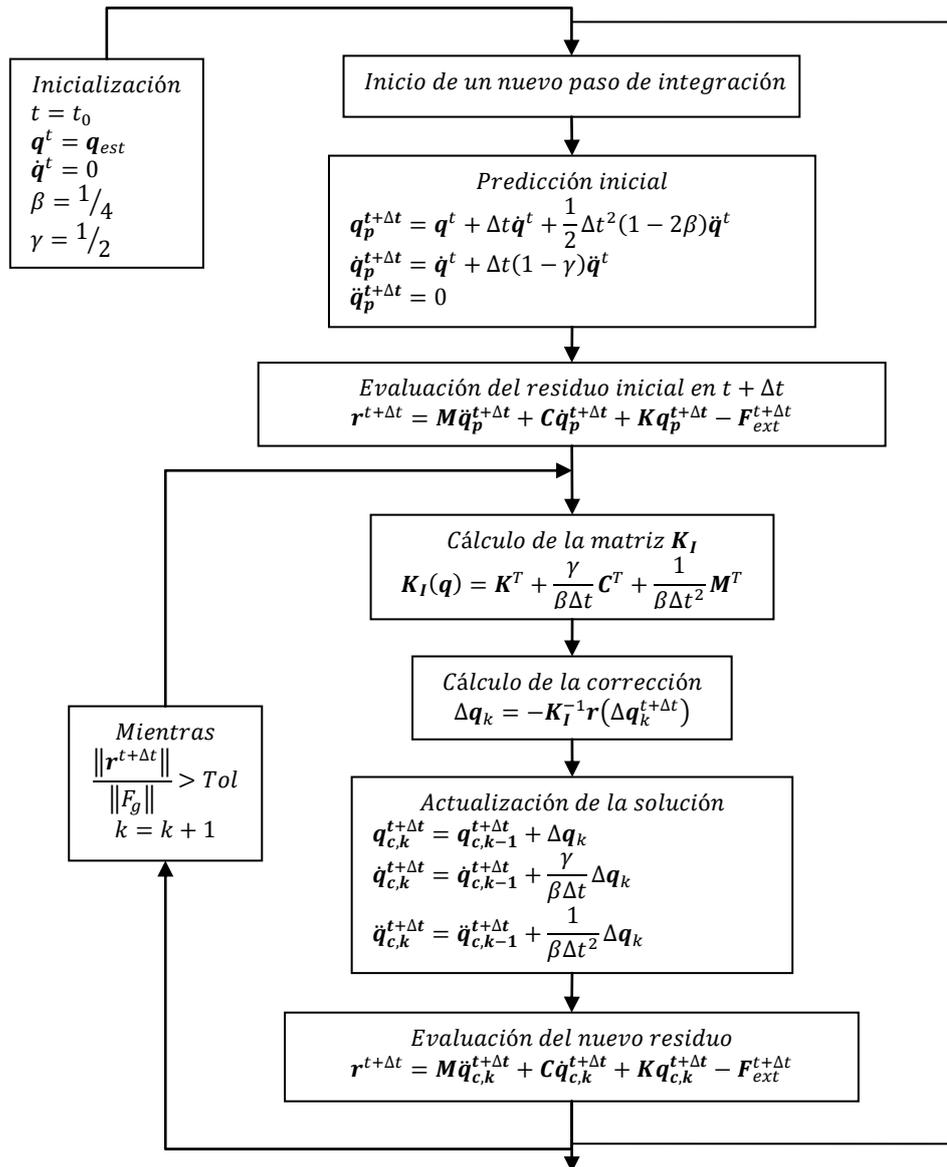


Figura 4-2: Esquema de integración implícito de Newmark con fase de predicción y fase de corrección.



Con el fin de amortiguar los modos de alta frecuencia, los cuales pueden no ser interesantes en la solución, o proceder de oscilaciones de naturaleza no física asociadas a la discretización de elementos finitos, podría ser natural introducir una cantidad arbitraria de amortiguamiento incrementando el valor de ξ . En [20] se muestra como esta estrategia puede afectar tan solo a los modos de frecuencias intermedias dejando inalterados los modos de alta y baja frecuencia. Por estas razones, es mejor el empleo de amortiguamiento numérico.

Cuando $\gamma > 1/2$, los métodos de tipo Newmark introducen amortiguamiento numérico, a cambio de reducir la precisión de segundo a primer orden. Para obtener la mayor disipación numérica posible, al mismo tiempo que se mantiene la estabilidad incondicional, el parámetro β se debe seleccionar como:

$$\text{para } \gamma \geq \frac{1}{2}, \quad \text{seleccionar } \beta = \frac{1}{4} \left(\gamma + \frac{1}{2} \right)^2 \quad (4.32)$$

4.3.3 Métodos implícitos. El método α .

El método α propuesto por Hilbert, Hughes y Taylor [19, 20] (conocido también como HHT) puede ser considerado como una generalización de los métodos de la familia de Newmark con el objetivo de poder introducir amortiguamiento numérico sin degradar el orden de convergencia de cuadrático a lineal. Este método emplea las aproximaciones de Newmark y la siguiente ecuación discretizada en el tiempo del movimiento:

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}}^{t+\Delta t} + (1 + \alpha)\mathbf{C}\dot{\mathbf{q}}^{t+\Delta t} - \alpha\mathbf{C}\dot{\mathbf{q}}^t + (1 + \alpha)\mathbf{K}\mathbf{q}^{t+\Delta t} - \alpha\mathbf{K}\mathbf{q}^t = \mathbf{F}_{ext}^{t+(1+\alpha)\Delta t} \quad (4.33)$$

Evidentemente, si $\alpha = 0$ se obtiene de nuevo el método de Newmark. Si los parámetros del método son seleccionados de tal modo que

$$\alpha \in \left[-\frac{1}{3}, 0 \right] \quad \gamma = \frac{1 - 2\alpha}{2} \quad \beta = \frac{(1 - \alpha^2)}{4} \quad (4.34)$$

el método es incondicionalmente estable y de segundo orden. El amortiguamiento numérico introducido se controla a través del parámetro α de modo que para $\alpha = 0$

se tiene la regla del trapecio (sin amortiguamiento numérico). Disminuyendo el valor de α se aumenta la cantidad de disipación introducida.

La Figura 4-3 tomada de [20] muestran la disipación numérica (tasa de amortiguamiento relativo, ξ) y el error en el periodo (\bar{T}) introducidos por diferentes esquemas de integración en función de la relación entre el incremento de tiempo de integración Δt y el periodo correspondiente a la onda que se está integrando T .

En ellas se puede observar que todos los métodos de integración introducen errores en el periodo, incluida la regla del trapecio (Figura 4-3, derecha). En la gráfica de la izquierda se puede ver la disipación introducida por la regla del trapecio (nula, Newmark con $\gamma = 1/2$, $\beta = 1/4$), el método de Newmark con amortiguamiento ($\gamma = 0.60$, $\beta = 0.3025$), y dos casos del método α con mayor ($\alpha = -0.3$) o menor ($\alpha = -0.1$) disipación numérica.

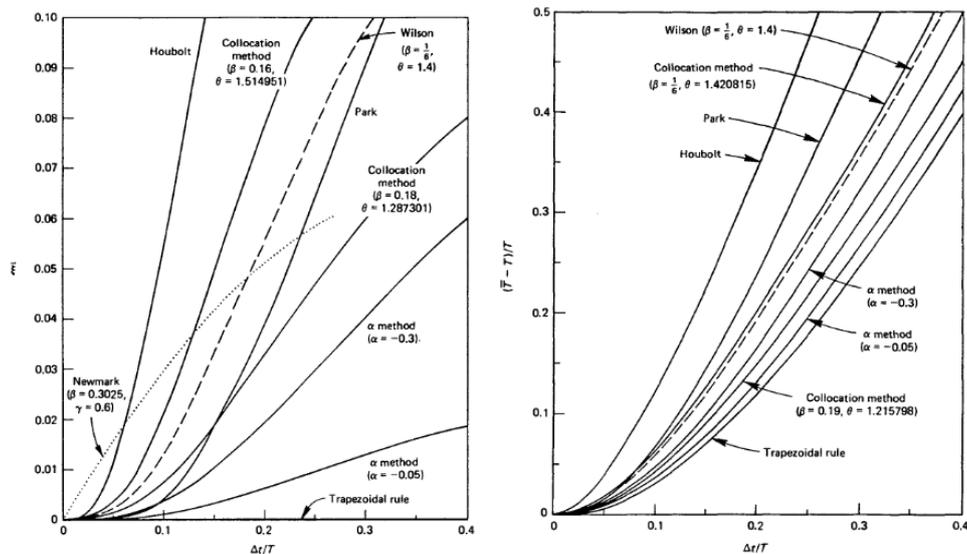


Figura 4-3: Tasa de amortiguamiento relativo a distintas frecuencias para diferentes esquemas de integración (izq.). Errores relativos en el periodo para diferentes esquemas (der.).

Como se verá más adelante (cf. §6.3) para el problema estudiado es conveniente introducir cierto amortiguamiento numérico a altas frecuencias. Es por



ello por lo que se ha planteado la resolución del problema de integración numérica mediante el método α , que presenta mejores características que el esquema de Newmark a este respecto. Estas ventajas son, junto con la conservación del segundo orden en la precisión, la menor tasa de disipación a bajas frecuencias que presenta. Como se puede observar el Figura 4-3, a bajas frecuencias ($\Delta t/T \rightarrow 0$) la pendiente de la curva de la tasa de amortiguamiento parte de cero y es casi plana en este método, comparada con la curva del método de Newmark amortiguado que introduce una disipación considerable en todo el espectro de frecuencias.



5 GESTIÓN DE NO-LINEALIDADES.

La catenaria es una estructura elástica que se deforma al paso del pantógrafo. En el sistema formado por ambos están presentes diversos tipos de no-linealidades, a saber: grandes desplazamientos de la catenaria, unilateralidad del contacto, unilateralidad de las péndolas y no-linealidades en los elementos del pantógrafo.

En el presente capítulo se mostrará la manera en la que se han modelado estas no-linealidades así como las posibles simplificaciones que pueden hacerse sin afectar a la calidad de los resultados obtenidos en la simulación.

5.1 Modelo lineal de la catenaria.

Como ya se introdujo en el capítulo relativo a la integración dinámica, el problema de la interacción dinámica entre pantógrafo y catenaria, una vez se ha determinado la configuración inicial de la catenaria, puede ser resuelto en términos de pequeños desplazamientos en torno a dicha configuración de equilibrio inicial. La veracidad de esta afirmación quedará confirmada al comparar los resultados obtenidos empleando el modelo original considerando grandes desplazamientos y el modelo linealizado del mismo. Antes de presentar estos resultados se mostrará en qué consiste dicha linealización del sistema.

El cálculo del equilibrio estático de la catenaria considerando grandes desplazamientos cuando la catenaria se encuentra sometida a un conjunto de fuerzas externas \mathbf{F}_{ext} y a unas fuerzas internas o elásticas \mathbf{F}_{int} , se determina resolviendo el siguiente sistema de ecuaciones no-lineales:

$$\mathbf{F}(\mathbf{q}) = \mathbf{F}_{int} - \mathbf{F}_{ext} = 0 \quad (5.1)$$

Denominamos \mathbf{q}_{est} a la configuración en equilibrio de la catenaria cuando la única fuerza externa presente es la de la gravedad. La linealización del



comportamiento de la catenaria se llevará a cabo en torno a esta posición de equilibrio:

$$\mathbf{q} = \mathbf{q}_{est} + \Delta\mathbf{q} \quad (5.2)$$

Desarrollando en serie el vector de fuerzas totales en torno a esta posición de equilibrio se obtiene:

$$\mathbf{F}(\mathbf{q}) = \mathbf{F}(\mathbf{q}_{est}) + \left. \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \mathbf{q}} \right|_{\mathbf{q}_{est}} \Delta\mathbf{q} + \mathcal{O}(h^2) \quad (5.3)$$

La derivada de las fuerzas elásticas con respecto a las coordenadas nodales se denomina matriz de rigidez tangente \mathbf{K}_T :

$$\mathbf{K}_T = \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \mathbf{q}} \quad (5.4)$$

La matriz de rigidez del sistema catenaria linealizado se obtiene evaluando la matriz de rigidez tangente en las coordenadas de equilibrio estático \mathbf{q}_{est} .

$$\mathbf{K}_{cat} = \left. \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \mathbf{q}} \right|_{\mathbf{q}_{est}} \quad (5.5)$$

El problema lineal resultante es pues:

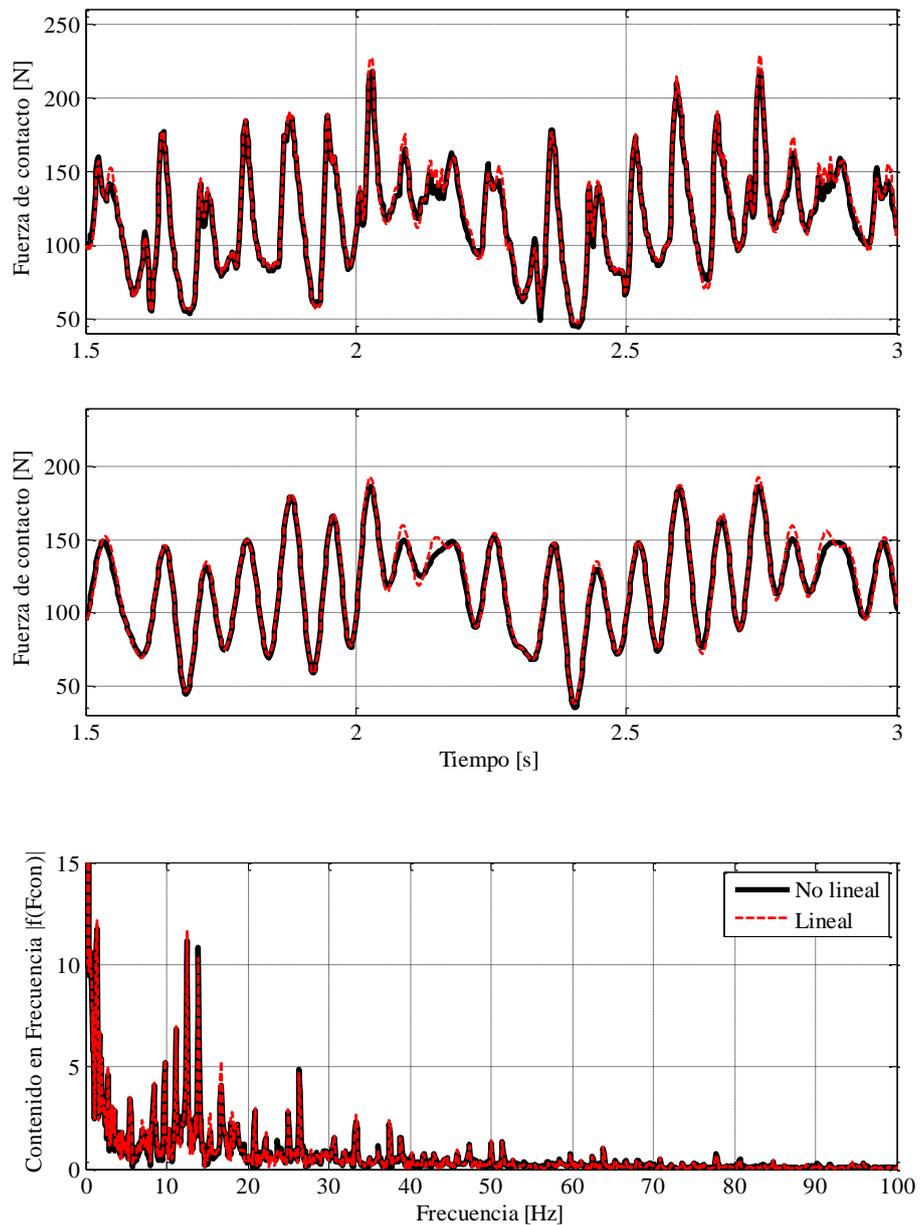
$$\mathbf{K}_{cat} \Delta\mathbf{q} = \Delta\mathbf{F} \quad (5.6)$$

Con el objetivo de compactar la notación, en aquellos apartados de la presente tesis en los que se emplea el modelo linealizado de la catenaria, la ecuación anterior se ha escrito como:

$$\mathbf{K}_{cat} \mathbf{q} = \mathbf{F}_{ext} \quad (5.7)$$

En la que se supone implícitamente que el vector de grados de libertad \mathbf{q} representa en este caso los desplazamientos en torno a la posición de equilibrio estático \mathbf{q}_{est} , y el vector de fuerzas externas \mathbf{F}_{ext} incluye todas las fuerzas externas aplicadas excepto la de la gravedad.

A continuación se mostrarán los resultados de dos simulaciones empleando en cada uno de ellas uno de los modelos de catenaria en la Figura 5-1.



**Figura 5-1: Fuerza de contacto (superior). Fuerza filtrada a 20 Hz (medio).
Contenido en frecuencia (inferior).**



Para esta comprobación se ha usado el modelo de referencia de la norma EN 50318 a una velocidad de 300 km/m. En la figura se muestran los resultados en el intervalo de tiempo 1.5 a 3 segundos para una mejor visualización.

Las pequeñas diferencias encontradas entre la simulación considerando grandes desplazamientos y la de pequeños desplazamientos hacen que se pueda concluir que esta segunda es válida sin pérdida de precisión considerable. En los resultados se ha incluido la representación de la fuerza de contacto filtrada a 20 Hz ya que las comprobaciones con el modelo de referencia se harán en este rango de frecuencias.

5.2 *Unilateralidad del contacto.*

En el apartado 3.2 se presentaron las ecuaciones que permiten obtener las fuerzas producidas por el contacto entre pantógrafo y catenaria (§3.9), así como la matriz de rigidez asociada al elemento de contacto (§3.11). No obstante, la existencia de un contacto unilateral entre estos dos sistemas no permite su implementación directa y ensamblado como en el resto de elementos, pues este modelo no tiene en cuenta el signo de la fuerza de contacto.

En su lugar es necesario evaluar primero la fuerza de contacto y su signo, decidir si existe pérdida y en con esta información corregir la fuerza de contacto calculada si fuera necesario.

Para el cálculo de la fuerza de contacto entre catenaria y pantógrafo durante la integración temporal, se debe calcular en cada pasa de tiempo t :

1. Cálculo de la posición del punto de contacto x_c sobre el cable de contacto en función de la velocidad del tren (§3.2).
2. Determinar el elemento de contacto y la coordenada local del elemento χ_c en el punto de contacto (§3.3).
3. Cálculo de la distancia de interpenetración dz entre los dos sistemas.



$$dz = (q_c - q_1) \quad (5.8)$$

donde q_c es la coordenada del punto de contacto sobre la catenaria y q_1 la coordenada de la masa superior del pantógrafo. (cf. Figura 3-2).

4. Cálculo de la fuerza de contacto por el método de penalti.

$$F_c = \begin{cases} -k_H dz & \text{si } dz < 0 \\ 0 & \text{si } dz > 0 \end{cases} \quad (5.9)$$

donde k_H es el valor de la rigidez de contacto.

5. Cálculo de la fuerza equivalente en nodos del elemento de contacto sobre la catenaria.

$$F_{el} = S_c F_c \quad (5.10)$$

Donde S_c es la matriz de funciones de forma del elemento de contacto incluyendo sólo los términos correspondientes a la catenaria.

6. Ensamblado de la fuerza de contacto sobre la catenaria en el vector de fuerzas internas global.

En el caso de que no existiera pérdida de contacto, las ecuaciones descritas en (§3.10) podrían emplearse directamente.

Existen algunas diferencias entre los algoritmos implementados en la manera de tratar el contacto durante la integración de las ecuaciones del movimiento según se traten estos de métodos explícitos o métodos implícitos. En el método de Runge-Kutta, la evaluación de la fuerza de contacto en el instante $t + \Delta t$ se basa únicamente en las coordenadas de pantógrafo y catenaria en el instante t .

Por el contrario, en los métodos implícitos, la posible pérdida de contacto en $t + \Delta t$ se basa en las predicciones y correcciones de las coordenadas en el propio instante de tiempo $t + \Delta t$ (cf. Figura 4-2).



5.3 Unilateralidad de péndolas.

Durante la mayor parte del tiempo las péndolas trabajan a tracción, transmitiendo al cable sustentador el peso del cable de contacto con el objetivo de reducir la flecha de este y mantenerlo en una posición horizontal. Durante el paso del pantógrafo, éstas se comprimen por el efecto de la elevación local del cable de contacto.

La pequeña sección de los hilos de las péndolas hace que se deformen fácilmente sin que sean capaces de transmitir esfuerzos de compresión. Esta unilateralidad en su comportamiento debe ser tenida en cuenta para obtener resultados satisfactorios.

La inclusión de este efecto no lineal se realiza de distinta manera según se esté considerando el modelo de grandes desplazamientos de la catenaria o el modelo lineal del mismo.

En el primero, la inclusión de la unilateralidad de las péndolas es bastante sencilla ya que en este caso las fuerzas elásticas se calculan elemento a elemento y después se ensamblan para dar el vector de fuerzas internas global. Durante el cálculo de las fuerzas correspondientes a las péndolas a nivel de elemento se puede detectar su estado de tracción o compresión en función de su longitud deformada L_{def} (ec. 2.19) y la longitud original del elemento L , siendo en este caso la fuerza en el elemento f_{pen}^e :

$$f_{pen}^e = \begin{cases} k_L^e q_{pen} & \text{si } (L_{def} - L) > 0 \\ \mathbf{0} & \text{si } (L_{def} - L) < 0 \end{cases} \quad (5.11)$$

donde k_L^e es la matriz de rigidez del elemento péndola y q_{pen} son las coordenadas nodales de sus grados de libertad (cf. §2.2.2).

En el caso del modelo considerando pequeños desplazamientos, las fuerzas internas globales F_{int} se calcular como:

$$F_{int} = K_{cat} q \quad (5.12)$$

donde no es posible eliminar la contribución de las péndolas a compresión a priori.



La inclusión de la unilateralidad de las péndolas se realiza en este caso a través de fuerzas de compensación que se añaden a las fuerzas externas actuantes y son iguales a las fuerzas internas introducidas por las péndolas en compresión. De este modo se elimina la fuerza resultante neta introducida por las péndolas en compresión. El procedimiento es el siguiente:

1. Determinación de las péndolas que se encuentran a compresión en el instante t . De igual modo que para el caso no lineal, esto se evalúa comparando la longitud deformada frente a la inicial.

$$\begin{cases} \text{si } (L_{\text{def}} - L) > 0 \rightarrow \text{péndola a tracción} \\ \text{si } (L_{\text{def}} - L) < 0 \rightarrow \text{péndola a compresión} \end{cases} \quad (5.13)$$

2. Para aquellas péndolas en las que el esfuerzo es de compresión, se calculan sus fuerzas internas a nivel de elemento.

$$\mathbf{f}_{\text{pen}}^e = \mathbf{k}_L^e \mathbf{q}_{\text{pen}} \quad (5.14)$$

3. Se ensambla en el vector de fuerzas de corrección \mathbf{F}_{pen} la contribución de cada una de las péndolas a compresión.
4. La fuerza \mathbf{F}_{pen} se añade al resto de fuerzas externas presentes \mathbf{F}_{ext} .
- 5.

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{C}\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{K}\mathbf{q} = \mathbf{F}_{\text{ext}} + \mathbf{F}_{\text{pen}} \quad (5.15)$$

En el modelo propuesto para compensar la unilateralidad de las péndolas no se ha considerado la corrección de las fuerzas disipativas o de inercia. Este modelo también considera que la pérdida de rigidez en la transición de esfuerzos de tracción a compresión es inmediata, lo que no es del todo cierto en la realidad. Algunos autores [3, 10] han estudiado este efecto con el fin de introducir modelos en los que este cambio sea más progresivo. La Figura 5-2 muestra el modelo presentado por Collina en [2].

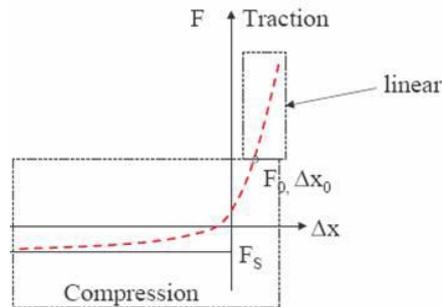


Figura 5-2: Comportamiento de péndolas mejorado.

Cabe señalar también que otros autores [9] gestionan la unilateralidad de las péndolas en base a multiplicadores de Lagrange, siendo las restricciones activas sólo en el caso de que las péndolas se encuentren soportando esfuerzos de tracción.

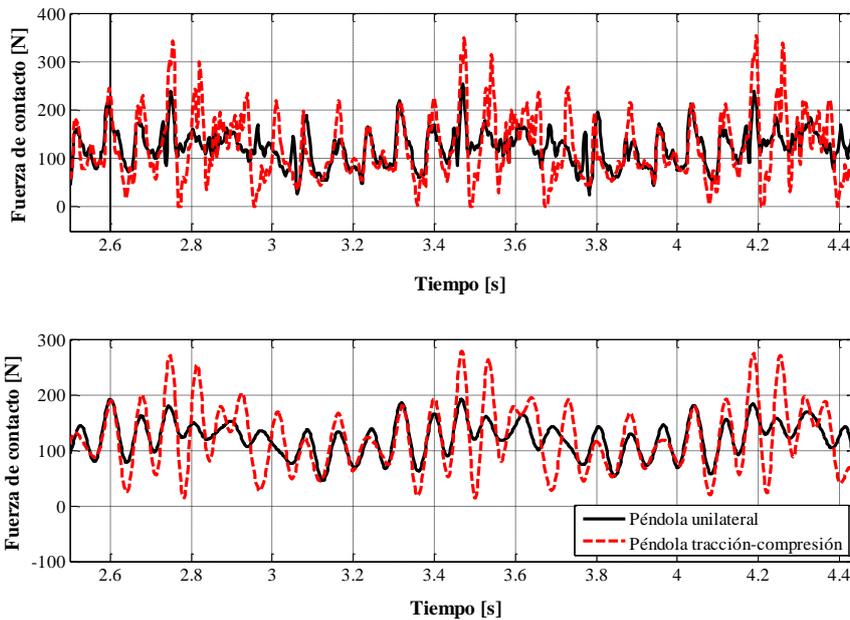


Figura 5-3: Importancia del modelado de la unilateralidad de las péndolas. La figura superior muestra la fuerza de contacto obtenida. La figura inferior muestra la fuerza de contacto en el rango de frecuencias de 0 a 20 Hz.



Con el fin de resaltar la importancia de la inclusión de este efecto durante la integración de las ecuaciones del movimiento, se muestra en la Figura 5-3 los resultados de dos simulaciones, representados mediante la fuerza de contacto, en las que se ha considerado o no el efecto de la unilateralidad de las péndolas.

Ambas simulaciones se han realizado empleando el modelo de referencia de la norma EN50318, con un mismo mallado e incremento de tiempo a la velocidad de 300 km/h.

Se puede apreciar en la figura como la simulación sin incluir la unilateralidad de las péndolas sobreestima la variación de la fuerza de contacto, llegando esta a ser en determinados instantes casi el doble de la predicha por el modelo que incluye la unilateralidad de péndolas.

Se puede concluir pues que este comportamiento no-lineal de los elementos que constituyen la catenaria debe incluirse siempre en la integración dinámica ya que sus efectos no son para nada despreciables.

5.4 No-linealidades del pantógrafo.

Algunos modelos de pantógrafos están modelados con elementos cuyo comportamiento es no-lineal. Los comportamientos no-lineales más frecuentes son los debidos a resortes de fricción que pueden producir la detención del movimiento vertical del pantógrafo o los amortiguadores con diferentes valores de la constante de amortiguamiento para valores ascendentes y valores descendentes. Estas no-linealidades deben ser incluidas en el modelo de pantógrafo.



UNIVERSIDAD POLITÉCNICA DE VALENCIA

Departamento de Ingeniería Mecánica y de Materiales

Máster en Ingeniería Mecánica y Materiales





6 VALIDACIÓN DE LOS PROCEDIMIENTOS DE INTEGRACIÓN.

En este capítulo se compararán las soluciones obtenidas mediante los algoritmos de integración presentados con anterioridad con la solución semi-analítica de un problema que servirá de test.

En concreto se mostrará la influencia que la discretización de elementos finitos tiene sobre la solución, la mejora de la solución al introducir amortiguamiento numérico, la selección del incremento de tiempo necesario y, por último, la influencia de la rigidez de contacto en la bondad de los resultados.

Finalmente se presentarán las conclusiones obtenidas tras estudiar este problema, las cuales servirán de punto de partida para realizar el ajuste de los parámetros de integración a la hora de resolver el problema de interacción dinámica en estructuras reales.

6.1 Descripción del problema a resolver.

El problema a resolver se muestra en la Figura 6-1. Consiste en una viga pretensada articulada en ambos extremos que es recorrida por una masa puntual que avanza a velocidad constante a lo largo de esta primera. Entre los dos sistemas se establece una restricción de contacto bilateral.

Las propiedades de la viga, tensión en el cable de contacto, velocidad y valor de la masa han sido seleccionadas para que sean similares a las que se pueden encontrar en una línea de alta velocidad. Es por ello que a pesar de la sencillez del ejemplo, este permite obtener información provechosa de cara a la simulación del sistema pantógrafo-catenaria real. La Tabla 6-1 recoge los valores adoptados para la simulación.

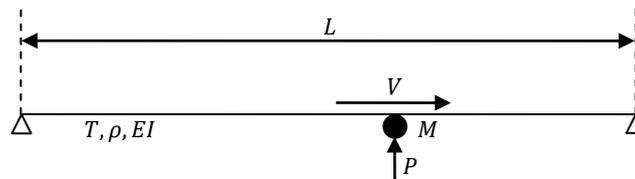


Figura 6-1: Descripción del problema de validación.

Tabla 6-1: Valores adoptados para la simulación.

Longitud del vano	L	60 m	Masa móvil	M	3 kg
Tensión	T	20000 N	Carga	P	50 N
Masa lineal	ρ	1.35 kg/m	Velocidad de avance	V	60 m/s
Rigidez a flexión	EI	136 Nm ²			

El uso de este problema como ejemplo de validación y ajuste de parámetros ha sido empleado con anterioridad por otros autores como [3, 10], siendo la solución aportada por este primero la que se ha tomado como exacta para las comparaciones hechas en este trabajo. Esta solución semi-analítica representada en la Figura 6-2 ha sido obtenida por superposición modal. Algunos detalles acerca de cómo obtenerla pueden encontrarse en [7, 21].

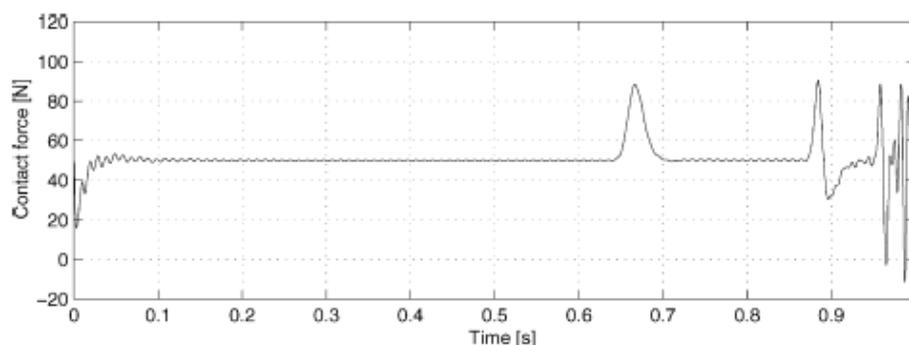


Figura 6-2: Solución de referencia para el ejemplo de validación proporcionada por [3].

En la solución se muestra superpuesta a la carga constante de 50 N una serie de perturbaciones dinámicas en la fuerza de contacto que se producen cuando



la masa que se desliza encuentra alguna onda reflejada en los extremos fijos de la viga. El efecto dinámico más importante que se observa es la variación de la fuerza de contacto en torno a $t = 0.65$ s, causada por la masa móvil al encontrarse con la onda generada en la entrada al vano y reflejada por el extremo fijo contrario. Cuando la masa se acerca al extremo final de la viga, la perturbación se hace teóricamente infinita.

6.2 Influencia del tamaño de malla.

En primer lugar se ha resuelto el problema con los diferentes algoritmos de integración implementados (Newmark, HHT, Runge-Kutta) empleando mallas de elementos finitos cada vez más finas con el objetivo de determinar el tamaño de elemento apropiado. El valor de la rigidez de contacto, necesaria en el método de penalti se ha tomado como 50000 N/m, coincidiendo con el valor propuesto por la norma EN 50318 para la validación de la simulación.

En las simulaciones siguientes se han empleado mallas de 60 (1 m), 120 (0.5 m) y 240 (0.25 m) elementos. En el método Runge-Kutta el incremento de tiempo seleccionado ha sido de $1e-5$ s. En el caso de los métodos implícitos (HHT y Newmark) el incremento de tiempo fijado ha sido de $\Delta t = 2 \cdot 10^{-3}$ s, y los parámetros del método se han elegido de tal modo que la disipación numérica es nula.

En primer lugar se muestra en la Figura 6-3 la solución obtenida para la malla más vasta (60 elementos) integrando con Runge-Kutta.

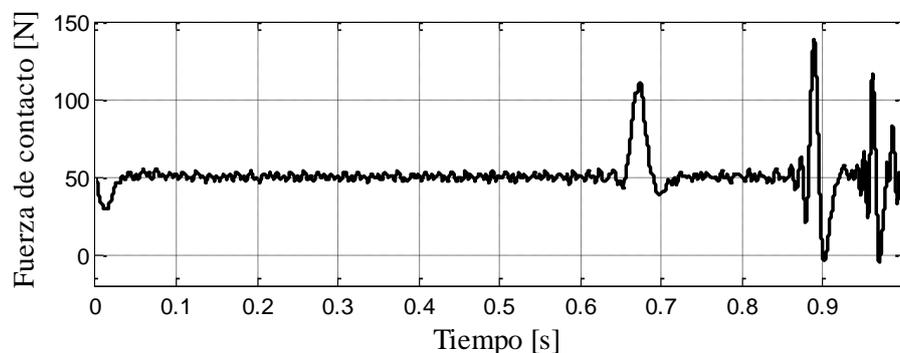


Figura 6-3: Evolución temporal de la fuerza de contacto empleando el algoritmo de integración de Runge-Kutta y una malla de 60 elementos.



En esta primera simulación se puede apreciar una importante perturbación de alta frecuencia que no existe en la solución de referencia. Este contenido de alta frecuencia está asociado con la frecuencia de paso de la masa por los nodos de los elementos que modelan la viga. Para este caso concreto, se puede apreciar un importante contenido en frecuencia en torno a los 60 Hz y sus múltiplos, ya que la velocidad es 60 m/s y la longitud del elemento 1 m.

Estas perturbaciones de alta frecuencia son el resultado de la discretización de elementos finitos y por tanto no son debidas a ningún fenómeno físico. A medida que la malla de elementos finitos se hace más fina, la frecuencia de estas perturbaciones se hace más alta y es cada vez más difícil apreciar sus efectos a simple vista. No obstante, la estrategia de refinar excesivamente la malla de elementos finitos no es la más óptima y otras estrategias deberán ser buscadas.

A continuación, en la Figura 6-4 se muestra cómo evoluciona la solución a medida que se dispone de mallas más finas. En la Figura 6-4 se muestra la solución en términos de la fuerza de contacto para el método de Runge-Kutta (superior) y el método de Newmark (inferior). En ellas sólo se muestra la simulación hasta los 0.8 segundos por motivos de escala y para apreciar las diferencias. Se puede observar que para ambos procedimientos de integración las diferencias entre las dos últimas mallas, la de 120 y la de 240 elementos, son suficientemente pequeñas como para que se pueda considerar que este es un tamaño apropiado.

A pesar de haber seleccionado un tamaño de elemento oportuno, las soluciones obtenidas distan mucho de la de referencia, por lo que otros parámetros como el incremento de tiempo, amortiguamiento numérico y rigidez de contacto se deberán determinar.

En base a los resultados obtenidos se puede establecer que los diferentes algoritmos implementados dan resultados muy similares, siendo a priori todos ellos válidos. No obstante, los de tipo implícito presentan ventajas desde el punto de vista de la eficiencia computacional, ya que la posibilidad de seleccionar incrementos de tiempo mayores hace que sea posible resolver los problemas con suficiente precisión en tiempos de cálculo hasta 100 veces menores.

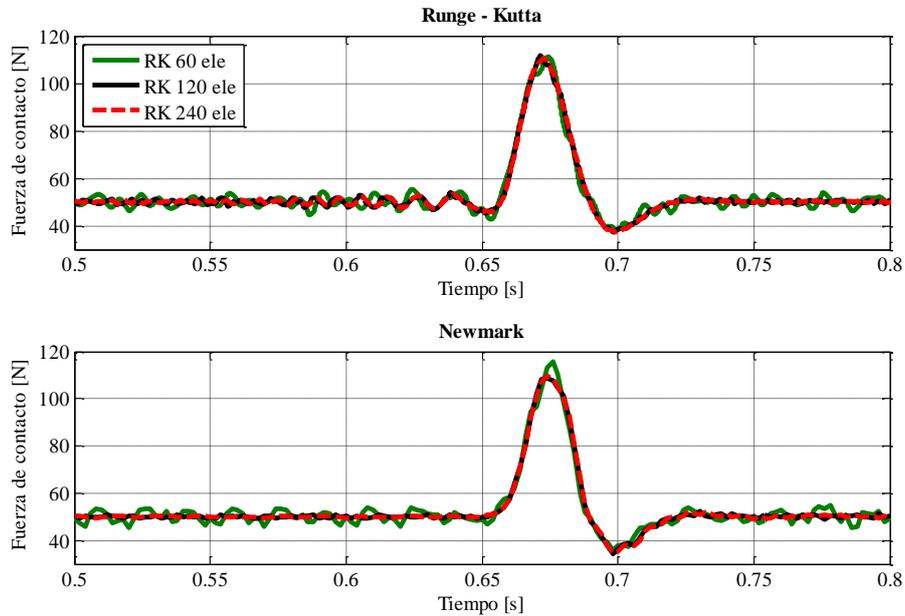


Figura 6-4: Evolución temporal de la fuerza de contacto para distintas mallas de elementos finitos (60, 120, 240 elementos). Método de Runge-Kutta (superior) y Newmark (inferior).

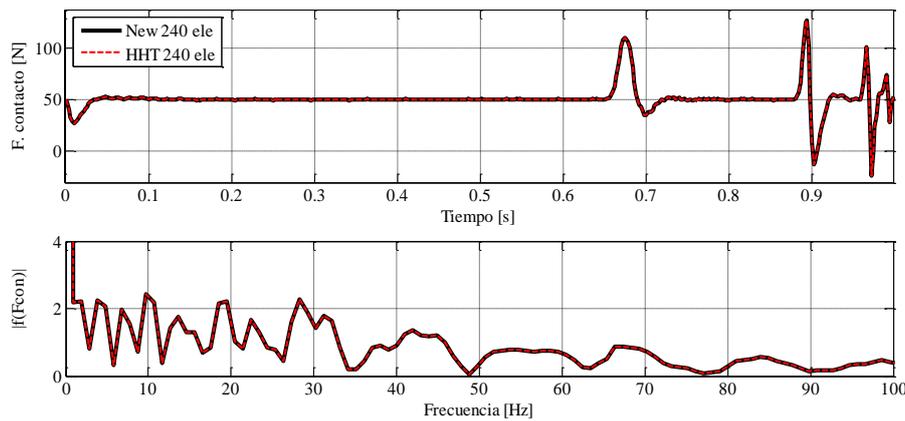


Figura 6-5: Comparación Newmark y HHT. Evolución temporal de la fuerza de contacto (superior). Contenido en frecuencia (inferior).



En la Figura 6-5 se muestran superpuestas las soluciones obtenidas para la malla de 240 elementos con los procedimientos de Newmark y HHT. Se puede comprobar en ella como ambos métodos proporcionan los mismos resultados en ausencia de amortiguamiento numérico.

6.3 Introducción de amortiguamiento numérico.

A partir de los resultados de los análisis presentados en el apartado anterior ha sido posible establecer un tamaño de malla apropiado.

Si bien el tamaño de malla parece ser el apropiado, la solución obtenida muestra importantes desviaciones respecto de la solución semi-analítica de referencia. Estas discrepancias son en gran medida debidas a la acumulación, propagación e interacción de perturbaciones asociadas a la discretización de elementos finitos (ondas de alta frecuencia).

Un método de eliminar estos efectos es la incorporación de amortiguamiento numérico dentro del algoritmo de integración.

La necesidad de introducir cierta disipación numérica, lo que no es posible en el método de Runge-Kutta que aquí se ha implementado, junto con el menor tiempo de cálculo de los métodos implícitos, hace que a partir de ahora sólo se vayan a considerar los segundos.

Cómo ya se comentó en el apartado relativo a integración numérica (cf. §4.3.2, 4.3.3), tanto el método de Newmark a través de la selección de los parámetros β y γ , como el esquema HHT mediante el valor de α , permiten introducir y controlar la cantidad de disipación numérica que se introduce.

En ambos métodos, el rango de frecuencias que son amortiguadas y sus respectivas tasas de amortiguamiento relativo están directamente relacionados con el tamaño del incremento de tiempo Δt elegido en la integración (cf. Figura 4-3). Por ello, con el objetivo de eliminar aquellas perturbaciones cuyas frecuencias sean cercanas a la frecuencia de paso por elemento (o sus múltiplos), se debe seleccionar un Δt que introduzca una cantidad de amortiguamiento suficiente. Este hecho hace

que la elección de un incremento de tiempo muy pequeño no esté necesariamente relacionada con una mayor precisión en los cálculos (para el tamaño de malla dado, con el objetivo de mantener el coste computacional en niveles razonables) ya que incrementos de tiempo más pequeños amortiguan frecuencias cada vez mayores, dejando las frecuencias asociadas al paso por elemento prácticamente inalteradas.

La Figura 6-6 muestra como la solución obtenida varía en función del incremento de tiempo empleado en la integración. Se puede observar como la cantidad de disipación introducida es mayor cuanto mayor es el incremento de tiempo. También se puede observar como incrementos de tiempo demasiado grandes dan resultados poco precisos, pero incrementos más pequeños casi no amortiguan las perturbaciones de alta frecuencia.

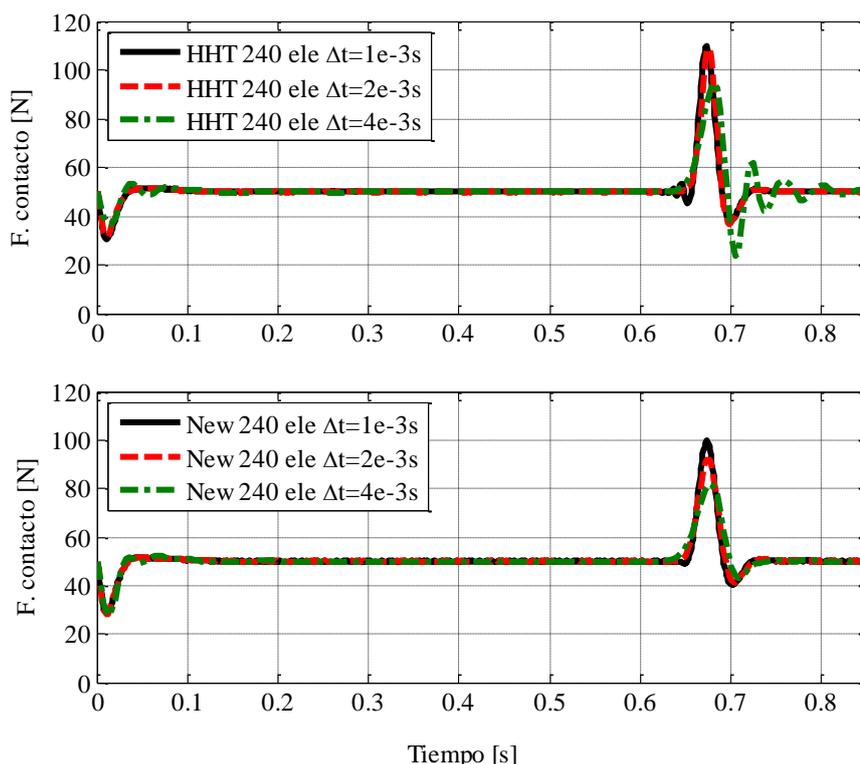


Figura 6-6: Evolución de la fuerza de contacto en función del incremento de tiempo. Método HHT con $\alpha = -0.3$ (superior). Método de Newmark con $\beta = 0.3025$ y $\gamma = 0.6$ (inferior).

Se puede concluir que la introducción de amortiguamiento numérico ha sido capaz de eliminar el problema que se planteaba al principio reduciendo las perturbaciones de alta frecuencia. No obstante, queda por determinar un incremento de tiempo suficientemente pequeño para resolver con precisión y a la vez suficientemente grande para introducir la cantidad de amortiguamiento deseada. Estas cuestiones se resolverán en el siguiente apartado a la vez que se determina una rigidez de contacto apropiada para este problema.

6.4 Influencia de la rigidez de contacto.

Aun con todos los ajustes realizados hasta ahora, la solución sigue presentando diferencias respecto de la de referencia, fundamentalmente visibles en el inicio más suave de la simulación, los valores de pico de la fuerza de contacto y las oscilaciones anteriores al encuentro de la masa con una onda reflejada.

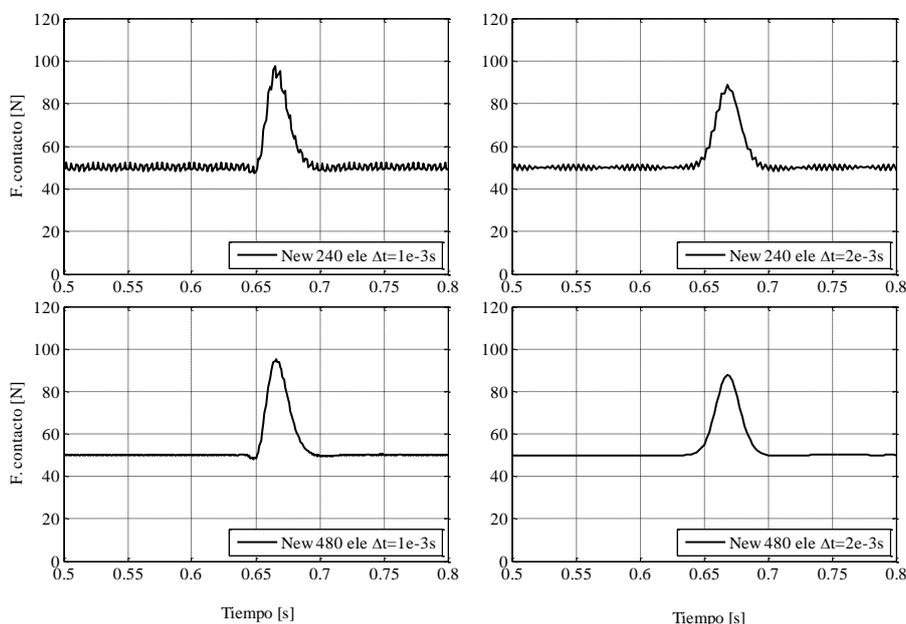


Figura 6-7: Detalle de la fuerza de contacto. Método de Newmark con $kh=5e5$ N/m.

En las anteriores simulaciones el valor de la rigidez de contacto se ha mantenido constante con un valor de 50000 N/m. Con el objetivo de incrementar la dinámica del sistema masa-resorte se resolverá el problema empleando rigideces de contacto más altas, para determinar un valor apropiado de la misma comparando los resultados con la solución de referencia.

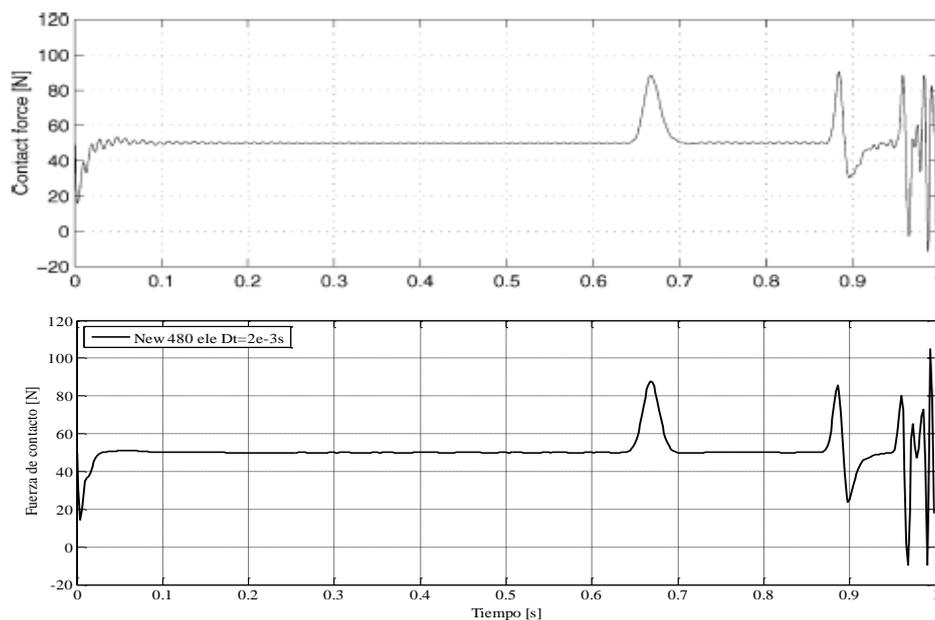


Figura 6-8: Comparación de la solución obtenida mediante el método de Newmark (inferior) y la solución de referencia (superior). Parámetros: 480 elementos; $\Delta t=2e-3s$; $\gamma=0.60$, $\beta=0.3025$.

En la Figura 6-7 se muestra un detalle de la fuerza de contacto centrada en el primer encuentro de la masa con una onda reflejada. En estas simulaciones la rigidez de contacto se ha incrementado diez veces, siendo 500000 N/m y se han empleado mallas de 240 y 480 elementos, e incrementos de tiempo de $\Delta t = 1 \cdot 10^{-3} s$ y $\Delta t = 2 \cdot 10^{-3} s$.

En los cuatro casos se observa que la dinámica se aproxima más a la presentada por la solución de referencia, especialmente para el incremento de

tiempo de $\Delta t = 2 \cdot 10^{-3}$ s, por el mayor amortiguamiento introducido. También se puede apreciar como las mallas de 240 elementos presentan oscilaciones de alta frecuencia que han aparecido al incrementar el valor de la rigidez de contacto.

En la Figura 6-8 se muestra la mejor solución obtenida por el método de Newmark junto a la solución de referencia. En ella se puede observar como una vez elegidos todos los parámetros los resultados de la simulación están en muy buena concordancia.

Una vez se ha llevado a cabo el ajuste de parámetros empleando el esquema de integración de Newmark, se muestran en la Figura 6-9 los resultados obtenidos con el método HHT con la malla de 480 elementos variando los incrementos de tiempo, el parámetro α que controla el amortiguamiento y empleando una rigidez en el contacto de 500000 N/m.

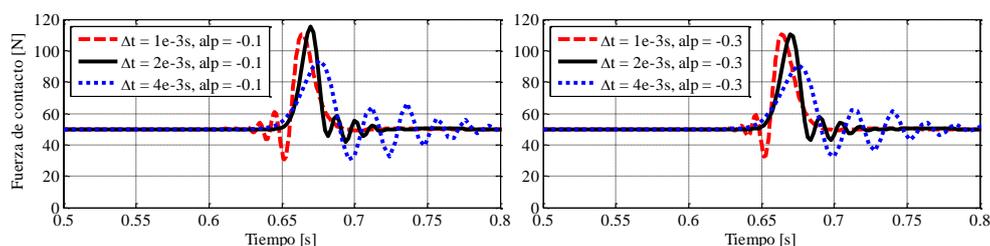


Figura 6-9: Detalle de la fuerza de contacto empleando el método HHT para $\Delta t = 1e-3$, $2e-3$, $4e-3$ s. Parámetro $\alpha = -0.1$ (izq.), $\alpha = -0.3$ (der.).

En este caso se puede observar que a pesar de las mejores características del método HHT, en este caso no se logra obtener una solución tan parecida a la exacta. La cantidad de disipación que introduce el método parece no ser suficiente para el rango de frecuencias que están causando las perturbaciones.



6.5 Conclusiones.

Como se advirtió al comienzo de este capítulo, el objetivo de llevar a cabo el estudio de la integración numérica del problema de la masa móvil sobre una viga pretensada fue obtener conclusiones que permitan estimar de manera cuantitativa y cualitativa los parámetros apropiados de los esquemas de integración implementados, así como discernir cuál o cuáles son los más apropiados. La experiencia ganada se puede resumir en los siguientes puntos:

- La necesidad de emplear incrementos de tiempo muy pequeños en los métodos explícitos ($\Delta t \sim 10^{-5}, 10^{-6}$) hace que los tiempos de cálculo sean prohibitivos, por lo que se adoptarán los esquemas implícitos (HHT o Newmark) para abordar la resolución del problema de interacción pantógrafo-catenaria con $\Delta t \sim 10^{-3}$.
- Se ha puesto de manifiesto la importancia del problema de propagación de ondas y su interacción con el pantógrafo (masa puntual en este caso).
- Se ha observado la necesidad de incorporar amortiguamiento numérico en los esquemas de integración con el fin de eliminar las perturbaciones de alta frecuencia generadas por el paso de la carga móvil sobre el cable de contacto discretizado mediante el método de elementos finitos.
- Se ha comprobado que tamaños de malla de entorno a los 0.25 m son adecuados para este tipo de problemas. Si bien los mejores resultados fueron obtenidos con la malla de 0.125 m por elemento, las diferencias son muy pequeñas y se puede optar sin perjudicar demasiado los resultados por mallas algo más vastas con el fin de reducir el coste computacional.
- Se ha puesto de manifiesto la importancia de una correcta elección del valor de la rigidez de contacto, siendo esta una de las principales desventajas del método de penalti. En este ejemplo, este valor resultó ser unas 10 veces superior al empleado por la mayoría de autores que han abordado la resolución del problema de interacción recientemente [3]. De hecho, como se verá más adelante, este valor (el adoptado inicialmente) es apropiado para el problema de interacción dinámica. Esto puede ser debido a que el ejemplo, por su sencillez, es muy sensible a pequeños cambios.



UNIVERSIDAD POLITÉCNICA DE VALENCIA

Departamento de Ingeniería Mecánica y de Materiales

Máster en Ingeniería Mecánica y Materiales



- El método de Newmark ha resultado ser el más acertado en este caso, pero estas diferencias no permiten afirmar que el esquema HHT se deba abandonar, pues en el problema real este puede ser más deseable.



7 EJEMPLOS DE APLICACIÓN.

En el presente capítulo se resolverán diferentes problemas para probar las capacidades del código de simulación desarrollado.

En primer lugar se hará un estudio de los parámetros de integración necesarios para obtener buenos resultados sobre el modelo de referencia de la norma EN 50318. Una vez ajustados los parámetros del modelo se compararán los resultados con los rangos dados por dicha norma para la aceptación del procedimiento de simulación.

Finalmente se resolverá una serie de ejemplos de aplicación empleando catenarias de tipología similar a las de las líneas españolas Ave, tanto en trazados rectos como en curvas de radio constante.

7.1 Validación del procedimiento de integración mediante la norma EN 50318.

El objetivo y campo de aplicación de la norma europea EN 50318 [1] es el de especificar los requisitos funcionales para la validación de los métodos de simulación para asegurar la aceptación mutua de:

- Parámetros de entrada y salida.
- Un subconjunto normalizado de resultados de ensayo para la evaluación de métodos de simulación.
- La comparación de mediciones.
- La comparación entre los métodos de simulación.



En este apartado se tratará únicamente el último punto con el fin de validar el procedimiento de integración desarrollado durante el trabajo de Tesis al no disponer de medidas experimentales. Esta validación se organiza en dos etapas, siendo la primera la comparación de los resultados con otros procedimientos de simulación contrastados, y la segunda, la validación de los resultados de la simulación con valores experimentales medidos en la línea. La Figura 7-1 muestra los pasos a seguir que establece la norma.

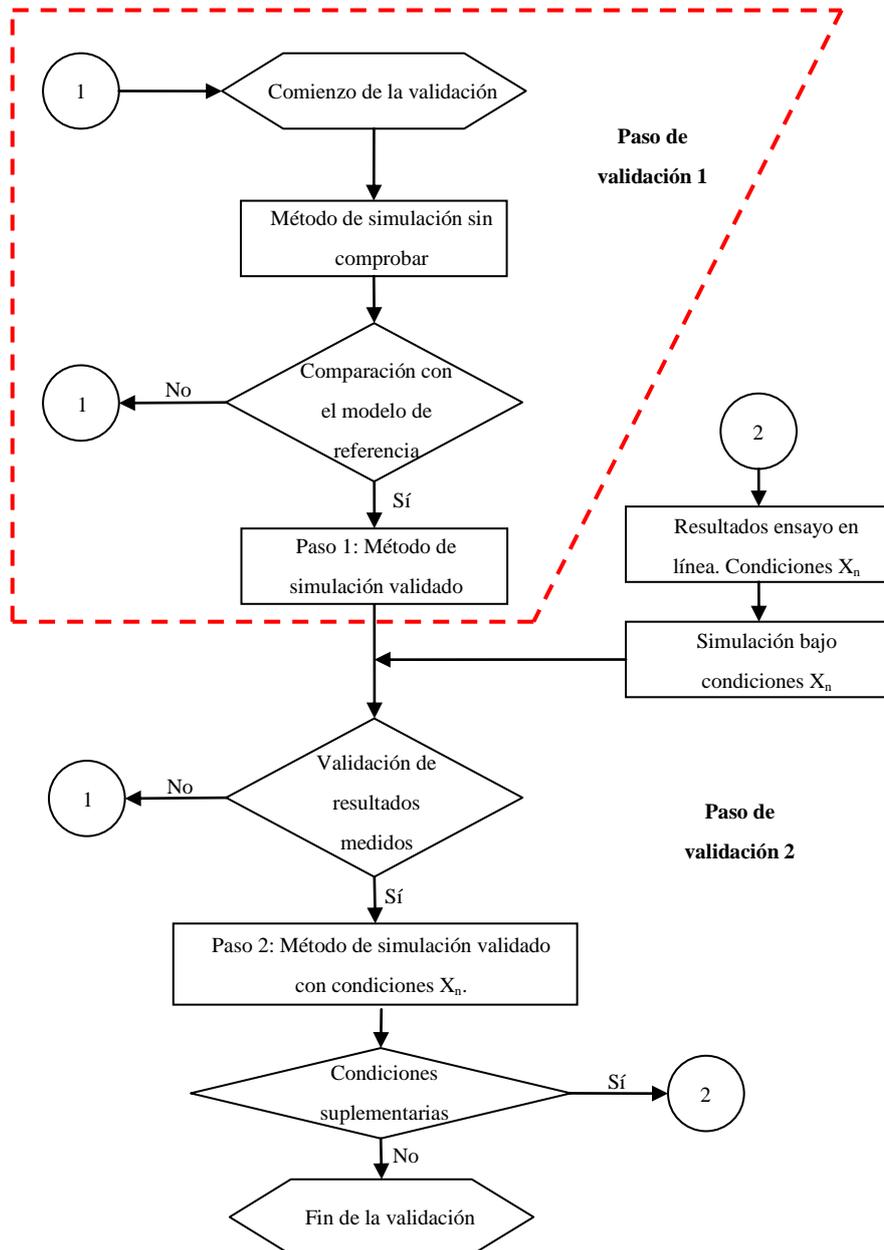


Figura 7-1: Pasos para la validación. En el recuadro se muestran las etapas de validación del procedimiento de integración.

7.1.1 Datos del pantógrafo.

El pantógrafo se define como un sistema de masa-resorte-amortiguador de dos etapas, como el ya presentado en la Figura 2-4, y que se repite aquí por completitud:

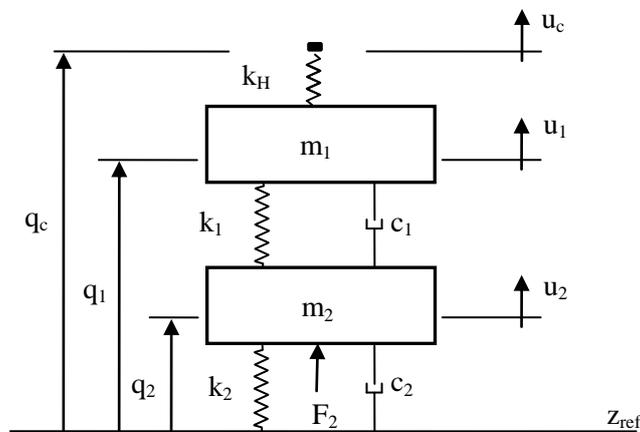


Figura 2-4: Modelo de pantógrafo tipo EN 50318.

La Tabla 7-1 muestra los valores de los diferentes parámetros.

Tabla 7-1: Datos del pantógrafo.

	Resorte de contacto	Cabeza de captación	Bastidor de articulación
Masa	-	$m_1 = 7.2 \text{ kg}$	$m_2 = 15 \text{ kg}$
Rigidez	$k_H = 50000 \text{ N/m}$	$k_1 = 4200 \text{ N/m}$	$k_2 = 50 \text{ N/m}$
Amortiguación	-	$c_1 = 10 \text{ Ns/m}$	$c_2 = 90 \text{ Ns/m}$

Además de estos valores, la norma establece que:

1. Para el paso de validación se empleará un modelo unidimensional de pantógrafo con un modelo multidimensional de línea aérea de contacto.
2. El resorte de contacto no es parte integrante del pantógrafo, pero puede ser necesario para la obtención de resultados correctos (método de penalti).

3. Se entiende que las fuerzas aerodinámicas son iguales a 0 N.
4. Se ejerce una fuerza constante F_2 sobre la masa m_2 de modo que la fuerza estática sea igual a 120 N.

En relación al cuarto punto, la norma define esa fuerza estática como la fuerza media vertical ejercida hacia arriba por la cabeza de captación sobre la línea aérea de contacto, causada por el dispositivo de elevación del pantógrafo, mientras el pantógrafo se encuentra elevado y el vehículo está parado. Así pues, hay que hallar el valor de la fuerza a aplicar para que la fuerza de contacto resultante sea de 120 N teniendo en cuenta que parte de la fuerza aplicada sobre m_2 es absorbida por el resorte k_2 y que la rigidez de la catenaria varía en función de la posición. Para ello se empleará la rigidez media de la catenaria en el cantón. En la Figura 7-2 se muestra la variación de la rigidez del cable de contacto en un vano.

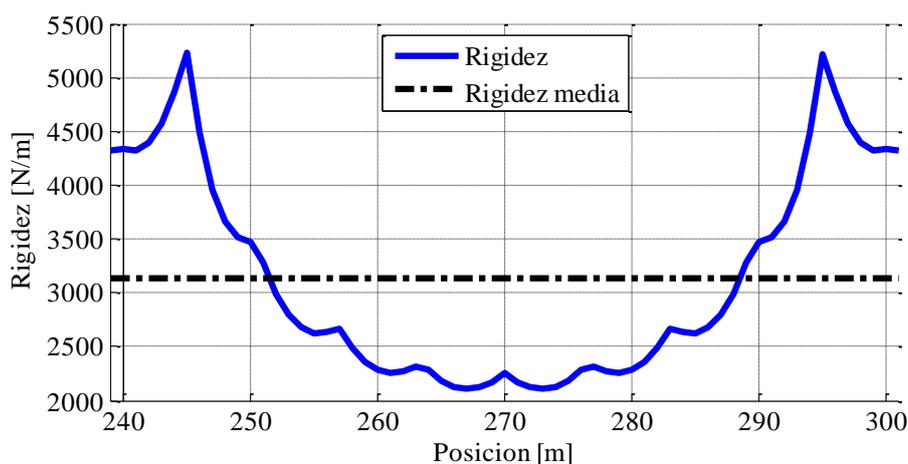


Figura 7-2: Rigidez media en el cable de contacto a lo largo de un vano.

Este valor de la rigidez media se ha calculado como $k_{cat} \approx 3100 \text{ N/m}$. Teniendo en cuenta este valor, el siguiente conjunto de ecuaciones permiten calcular la fuerza a aplicar necesaria:

$$\begin{aligned}
 u_c &= \frac{120}{k_{cat}} \\
 u_1 &= u_c + \frac{120}{k_H} = 120 \frac{k_H + k_{cat}}{k_H k_{cat}} \\
 u_2 &= u_1 + \frac{120}{k_1} = 120 \frac{k_1(k_H + k_{cat}) + k_H k_{cat}}{k_H k_{cat} k_1} \\
 F_2 &= 120 + k_2 u_2 = 120 \left(1 + \frac{k_2}{k_H k_{cat} k_1} (k_1(k_H + k_{cat}) + k_H k_{cat}) \right)
 \end{aligned}
 \tag{7.1}$$

Bajo esta suposición, se obtiene un valor de la fuerza a aplicar de $F_2 = 123.4841 \text{ N}$.

7.1.2 Datos de la línea aérea de contacto.

La línea aérea de contacto se define como un sistema de catenaria simple con un solo hilo de contacto. El modelo consta de diez vanos idénticos con las dimensiones que muestra la Figura 7-3 (en metros).

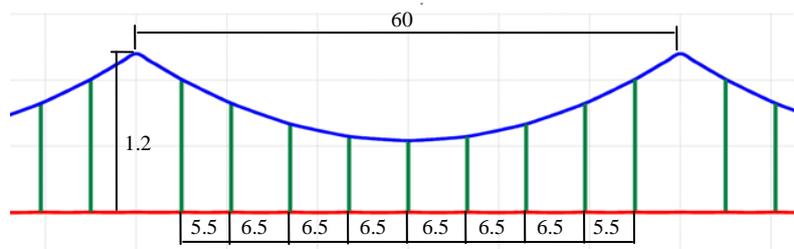


Figura 7-3: Dimensiones de la catenaria.

Esta catenaria posee un escalonado de $\pm 0.2 \text{ m}$ en torno al eje de la vía. El soporte del cable de contacto es un brazo de tirante de 1 m de longitud y de una masa por unidad de longitud de 1 kg/m . El soporte del hilo de catenaria y el extremo del brazo tirante son puntos fijos.

Además, la línea tiene las siguientes características:

1. La rigidez de las péndolas se define como $1e5$ N/m para la tensión mecánica y 0 N/m para la compresión.
2. Las masas de las péndolas (incluidos clips y bridas) y de las demás bridas de la catenaria se han de tomar como 0 .
3. Las alturas son iguales para todos los nodos entre el hilo de contacto y las péndolas y entre el hilo de contacto y los brazos de tirante.
4. La amortiguación de la línea aérea de contacto es cero.
5. La tensión mecánica y la masa por unidad de longitud de los hilos sustentador y de contacto es:

Tabla 7-2: Valores mecánicos de los hilos.

	Tensión [N]	Masa/unidad longitud [kg/m]
Hilo sustentador	16000	1.07
Hilo de contacto	20000	1.35

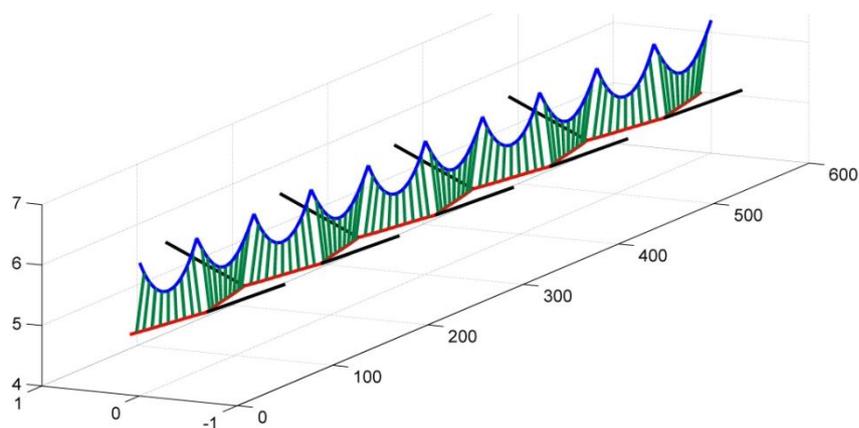


Figura 7-4: Perspectiva de la línea aérea de contacto.



La norma establece que la simulación se debe hacer para unas velocidades de 250 km/h y 300 km/h, con un único pantógrafo. Los resultados deben ser presentados en la gama de frecuencias de interés, siendo esta de 0 Hz a 20 Hz, y calculados en la sección de análisis, la cual incluye los vanos quinto y sexto.

Los resultados del modelo de referencia deben estar dentro de la gama de valores que recoge la Tabla 7-3:

Tabla 7-3: Gamas de resultados a partir del modelo de referencia.

Velocidad [km/h]	Gama de resultados	
	250	300
F_M [N]	110 a 120	110 a 120
σ [N]	26 a 31	32 a 40
Máximo estadístico de la fuerza de contacto [N]	190 a 210	210 a 230
Mínimo estadístico de la fuerza de contacto [N]	20 a 40	-5 a 20
Máximo real de la fuerza de contacto [N]	175 a 210	190 a 225
Mínimo real de la fuerza de contacto [N]	50 a 75	30 a 55
Elevación máxima en el soporte [mm]	48 a 55	55 a 65
Porcentaje de pérdida de contacto [%]	0	0

donde los parámetros se definen como:

- **Valor medio de la fuerza de contacto, F_M :** Media aritmética de la fuerza de contacto.
- **Desviación típica de la fuerza de contacto, σ :** Raíz cuadrada de la suma de los errores dividida por el número de valores de salida menos uno.
- **Mínimo (máximo) estadístico de la fuerza de contacto:** Valor de la fuerza de contacto representado por $F_M - 3\sigma$ ($F_M + 3\sigma$).
- **Mínimo (máximo) real de la fuerza de contacto:** Mínimo (máximo) de la fuerza de contacto cuando el pantógrafo pasa por la sección de análisis.
- **Elevación máxima en el soporte:** Valor máximo, mientras el pantógrafo pasa, de la elevación vertical en cada soporte en la sección de análisis.
- **Porcentaje de pérdida de contacto:** Porcentaje del tiempo de simulación en el que la fuerza de contacto es cero.



7.1.3 Resultados de la simulación. Estudio de los parámetros de integración.

En este apartado se estudiará la influencia de parámetros tales como tamaño de elemento, incremento de tiempo y amortiguamiento numérico en la solución. Como punto de partida para el estudio se han considerado los resultados obtenidos en el capítulo dedicado al ajuste de parámetros de integración (cf. §6), comprobando si estos son válidos para el problema real.

7.1.3.1 Selección del tamaño de elementos.

En primer lugar se resolverá el problema empleando mallas de elementos finitos cada vez más finas. Anteriormente (cf. §6.2) se había hallado que un tamaño de 0.25 m para los cables es apropiado. Ahora, se considerarán los siguientes mallados (Tabla 7-4) para estudiar la convergencia en tamaño de malla:

Tabla 7-4: Tamaños de las mallas de elementos finitos. El número de elementos corresponde al número de elementos entre péndolas del cable de contacto.

Tamaño [m]	≈ 1	≈ 0.5	≈ 0.25
Número de elementos	5	10	20

Los resultados se evaluarán a través de la fuerza de contacto en todo el espectro, filtrada a 20 Hz y en función del contenido en frecuencia. Los resultados siguientes se han obtenido a través del método HHT a la velocidad de 300 km/h con un incremento de tiempo de $\Delta t = 2 \cdot 10^{-3} s$ y un valor de $\alpha = 0.0$ (sin disipación numérica). En la Figura 7-5 se puede observar como los resultados son prácticamente idénticos para las dos mallas más finas, por lo que se establece que un tamaño de 0.5 m por cable es apropiado para este problema. El valor de 0.25 m, la mitad del actual, hallado en el estudio del cable se debe a que en la catenaria real, las perturbaciones introducidas por la discretización no dominan la respuesta calculada.

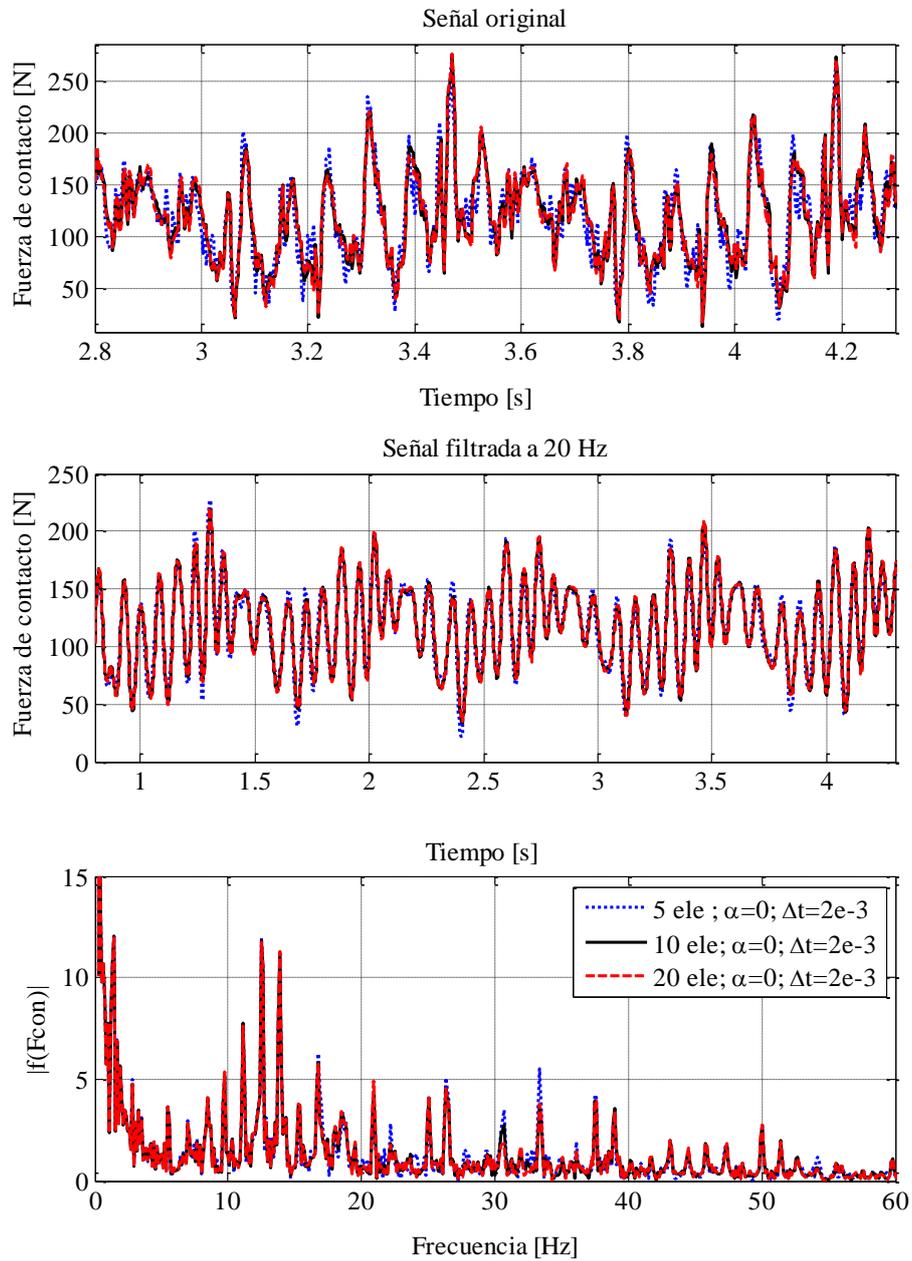


Figura 7-5: Fuerza de contacto para diferentes tamaños de malla.

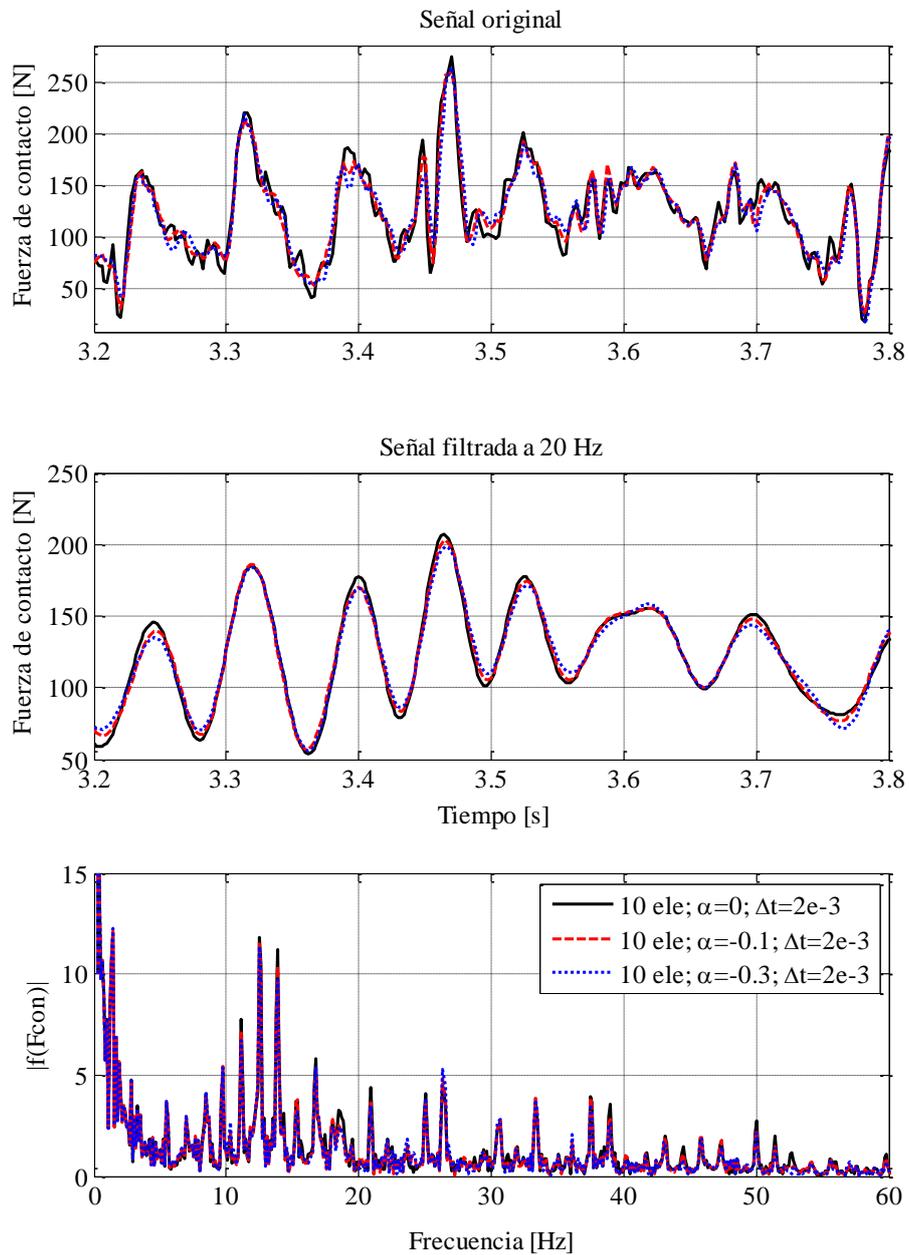


Figura 7-6: Fuerza de contacto para la malla de tamaño 0.5 m para diferentes valores de amortiguamiento numérico.



En la Figura se muestra la evolución temporal de la fuerza de contacto para la malla de elementos de tamaño 0.5 m para diferentes valores de amortiguamiento ($\alpha = 0.0$, el amortiguamiento es nulo, $\alpha = -0.3$ el amortiguamiento es máximo). Se puede apreciar cómo en este caso la introducción de disipación numérica no es tan crítica, pudiéndose realizar las simulaciones sin introducir amortiguamiento numérico.

7.1.3.2 Selección del incremento de tiempo.

A continuación se determinará el incremento de tiempo necesario para que la solución converja. El algoritmo de integración empleado es el HHT, el cual es implícito e incondicionalmente estable (con los parámetros que se han seleccionado), por lo que el criterio seguido para seleccionar el incremento de tiempo atiende sólo a razones de precisión.

Para esta comprobación se ha resuelto el problema de referencia a la velocidad de 250 km/h empleando la malla de 10 elementos entre péndolas (≈ 0.5 m por elemento) con incrementos de tiempo cada vez más pequeños partiendo de $\Delta t = 1 \cdot 10^{-3}$ s hasta que la solución no varía entre dos análisis consecutivos.

La Figura 7-7 muestra la evolución temporal de la fuerza de contacto obtenida para los diferentes incrementos de tiempo considerados. Se puede observar como las diferencias entre las simulaciones correspondientes a $\Delta t = 1 \cdot 10^{-4}$ s y $\Delta t = 5 \cdot 10^{-5}$ s son suficientemente pequeñas por lo que se ha fijado el mayor de estos dos incrementos como el apropiado para obtener resultados de precisión.

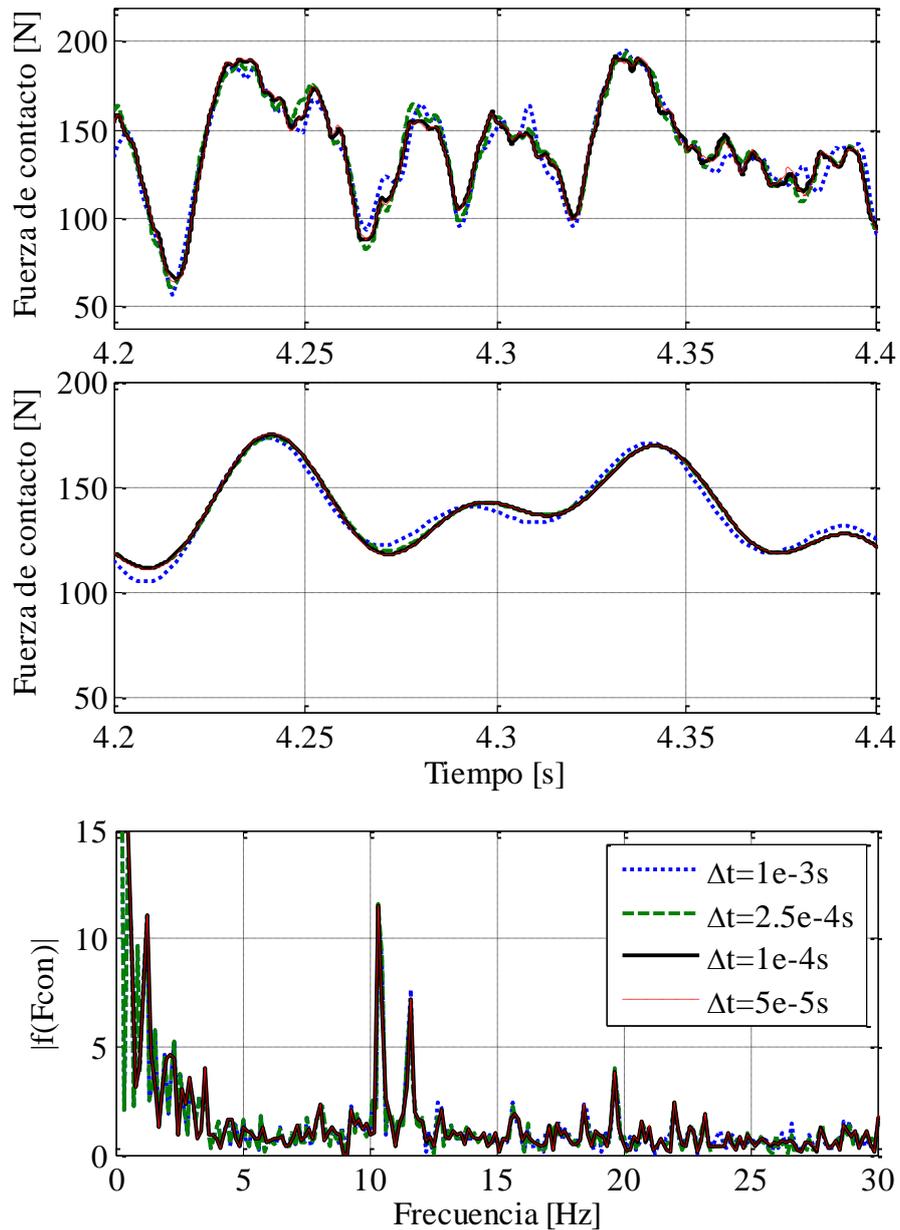


Figura 7-7: Evolución temporal de la fuerza de contacto (superior). Fuerza de contacto filtrada a 20 Hz (medio) y contenido en frecuencia (inferior).

7.1.3.3 Comparación de los métodos de integración.

Los anteriores estudios sobre la influencia de los parámetros del modelo e integración (tamaño de elemento e incremento de tiempo) se han llevado a cabo mediante empleando el esquema de integración HHT. Como no se ha introducido disipación numérica, los resultados deben ser iguales a aquellos obtenidos mediante el método de Newmark (cf. §4.3.3). Con el fin de comprobar la congruencia de los resultados, la Figura 7-8 muestra la evolución temporal de la fuerza de contacto obtenida por estos dos métodos.

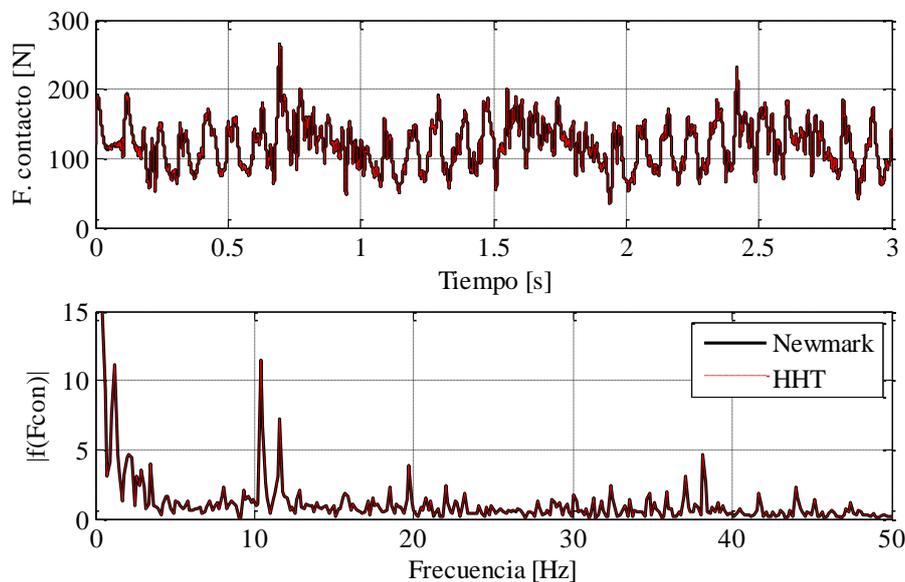


Figura 7-8: Evolución temporal de la fuerza de contacto obtenida mediante el esquema de integración HHT y por el esquema de Newmark. Parámetros: $v = 250\text{km/h}$; 10 elementos entre péndolas; $\Delta t = 1\text{e-}3\text{s}$.

La Figura 7-8 muestra como ambos procedimientos proporcionan los mismos resultados, sirviendo este ejemplo como validación de los procedimientos de integración. En el caso no amortiguado, los tiempos de cálculo son semejantes, pudiendo emplearse uno u otro indistintamente.



7.1.3.4 Resultados de la validación del procedimiento de integración.

Una vez se han seleccionado los parámetros de integración apropiados para el problema de referencia, se presentan a continuación los resultados obtenidos comparándolos con la gama de resultados de validación del procedimiento de simulación.

La Tabla 7-5 recoge los valores obtenidos tras las simulaciones a las velocidades de 250 km/h y 300 km/h. Los valores obtenidos se encuentran dentro de sus rangos de aceptación en cada caso.

Tabla 7-5: Resultados de las simulaciones. Comparación con gama de resultados del modelo de referencia de la norma EN 50318.

	250 km/h		300 km/h	
	Referencia	Simulación	Referencia	Simulación
F_M [N]	110 a 120	119.57	110 a 120	118.84
σ [N]	26 a 31	28.50	32 a 40	34.04
Máximo estadístico de la fuerza de contacto [N]	190 a 210	205.07	210 a 230	220.94
Mínimo estadístico de la fuerza de contacto [N]	20 a 40	34.07	-5 a 20	16.73
Máximo real de la fuerza de contacto [N]	175 a 210	178.32	190 a 225	208.62
Mínimo real de la fuerza de contacto [N]	50 a 75	56.36	30 a 55	48.98
Elevación máxima en el soporte [mm]	48 a 55	51.96	55 a 65	57.46
		48.97		63.00
		48.62		58.94
Porcentaje de pérdida de contacto [%]	0	0	0	0

La Figura 7-10 y la Figura 7-12 muestran un detalle de la evolución temporal de la fuerza de contacto calculada y posteriormente filtrada entre 0 Hz y 20 Hz (rango de frecuencias de estudio) para las velocidades de 250km/h y 300 km/h respectivamente.

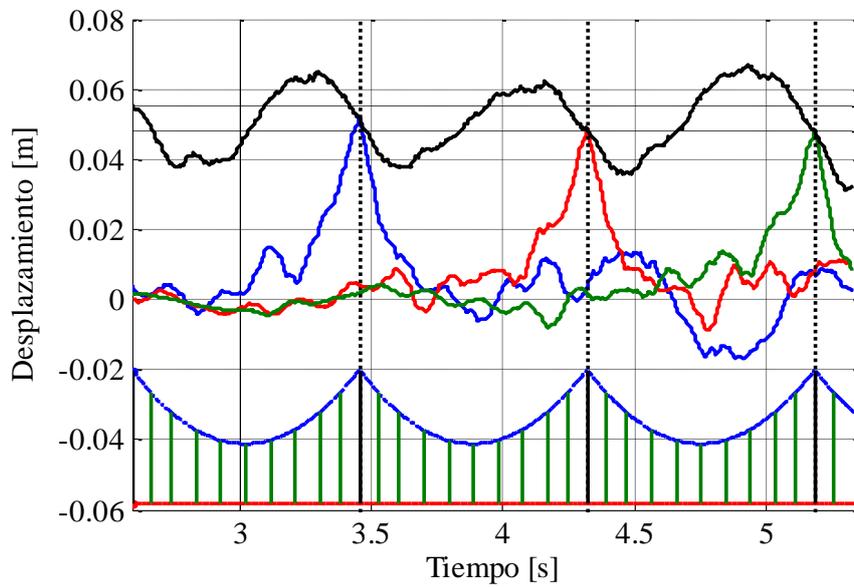


Figura 7-9: Elevación vertical de los puntos del soporte para $v = 250$ km/h y desplazamiento del punto de contacto a lo largo del tiempo.

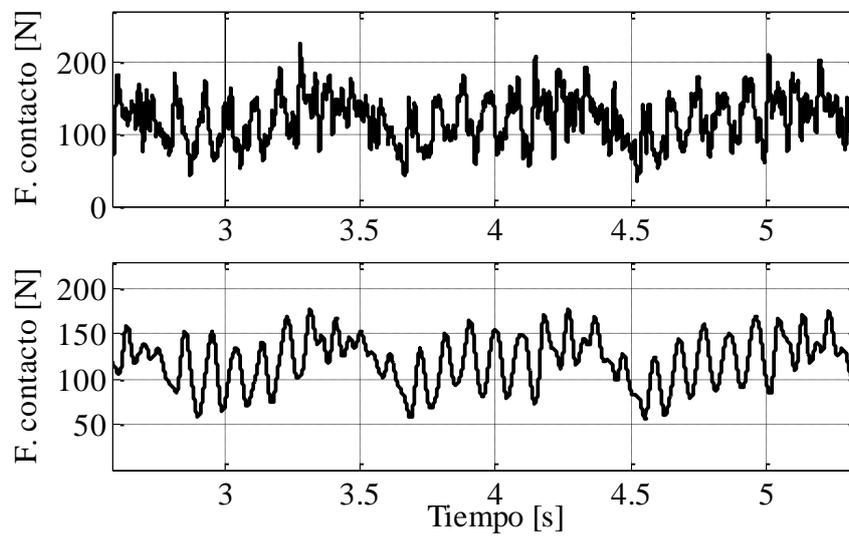


Figura 7-10: Detalle de la fuerza de contacto a 250 km/h calculada (superior) y filtrada a 20 Hz (inferior).

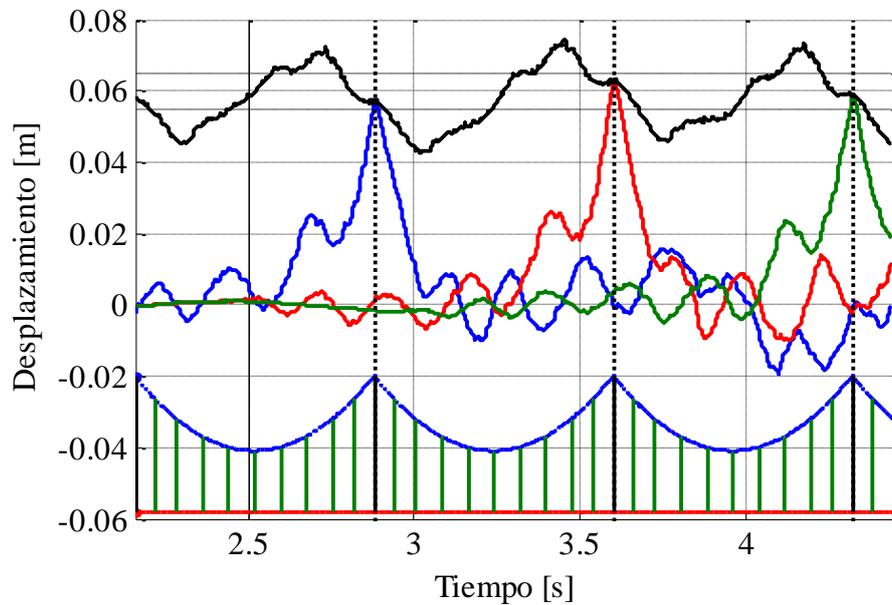


Figura 7-11: Elevación vertical de los puntos del soporte para $v = 300$ km/h y desplazamiento del punto de contacto a lo largo del tiempo.

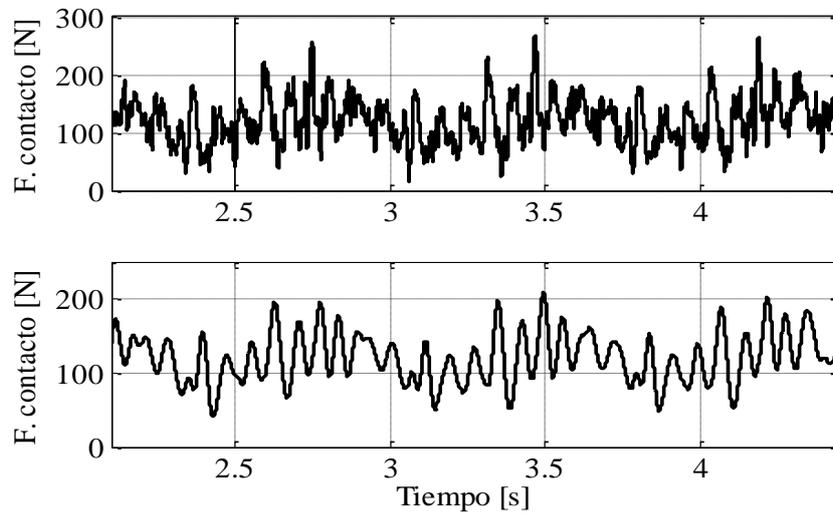


Figura 7-12: Detalle de la fuerza de contacto a 300 km/h calculada (superior) y filtrada a 20 Hz (inferior).



La Figura 7-9 y la Figura 7-11 muestran la evolución temporal de la elevación vertical de los tres soportes situados en la sección de análisis (vanos quinto y sexto) así como el desplazamiento del punto de contacto en el tiempo a las velocidades de 250km/h y 300 km/h respectivamente. Las líneas discontinuas horizontales marcan la zona de aceptación de los resultados. Las líneas de puntos verticales marcan el instante de contacto del punto de soporte con el pantógrafo.

7.1.3.5 Influencia del filtrado en los resultados.

En la norma EN 50318 se especifica que los resultados deben ser comparados en la gama de frecuencias de interés (de 0 Hz a 20 Hz), sin concretar de qué modo se filtra la señal original. En los resultados presentados anteriormente se ha empleado un filtro paso bajo de tipo Butterworth implementado en un Toolbox de MATLAB [23]. En la literatura se pueden encontrar autores que han realizado un planteamiento similar, como en [10].

Para estudiar la influencia que los diferentes tipos de filtrado puedan tener sobre la señal original, se comparará la señal filtrada con el filtro de Butterworth con la señal reconstruida a partir del contenido en frecuencia hasta 20 Hz obtenido mediante la Transformada Rápida de Fourier (FFT) despreciando las contribuciones de las frecuencias superiores.

En la Figura 7-13 se muestra un detalle de la evolución de la fuerza de contacto calculada (parte superior, señal original), así como la misma evolución una vez se han aplicado los filtros paso bajo descritos (medio). Se puede observar como la señal filtrada con el filtro tipo Butterworth presenta un pequeño desfase con la señal original, y que existe contenido en frecuencia superior a 20 Hz debido a la existencia de una banda de frecuencias de ancho finito cuya amplitud se atenúa pero no se extingue por completo.

En la Tabla 7-6 se comparan los resultados estadísticos de la fuerza de contacto para la validación del procedimiento de simulación empleando el filtro de Butterworth o truncando el contenido en frecuencia (FFT). En **rojo** se muestran los valores fuera del rango de aceptación.

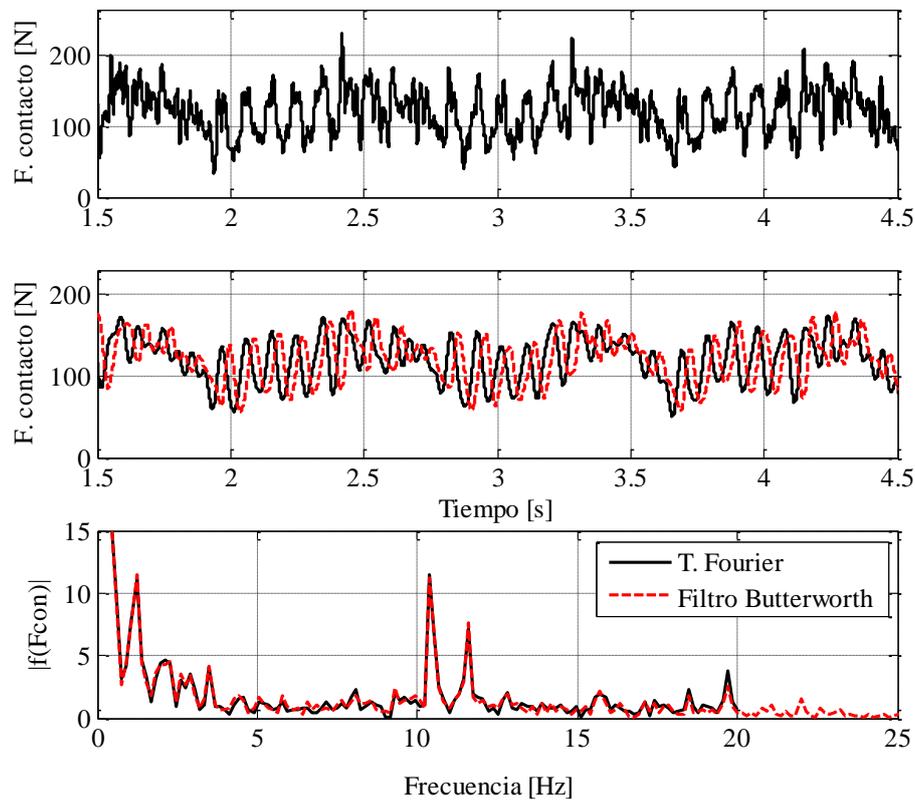


Figura 7-13: Influencia del filtrado. Fuerza de contacto calculada (superior). Fuerza de contacto entre 0 Hz y 20 Hz (medio). Contenido en frecuencia de las señales filtradas (inferior).

Tabla 7-6: Comparación de la gama de resultados según el tipo de filtrado. Velocidad $v = 250$ km/h.

	Butterworth	FFT
F_M [N]	119.57	119.47
σ [N]	28.50	28.69
Máximo estadístico de la fuerza de contacto [N]	205.07	205.53
Mínimo estadístico de la fuerza de contacto [N]	34.07	33.40
Máximo real de la fuerza de contacto [N]	178.32	174.83
Mínimo real de la fuerza de contacto [N]	56.36	48.85



Se puede ver como la elección del tipo de filtrado es muy significativa de cara a la aceptación del procedimiento de integración, por lo que se deberá obtener más información acerca del método de filtrado a emplear, o revisar alguno de los parámetros del modelo de simulación para determinar si este es la causa por la cual uno de los métodos de filtrado proporciona valores fuera del rango de validación del procedimiento de integración.

7.2 Simulación de una catenaria tipo Ave.

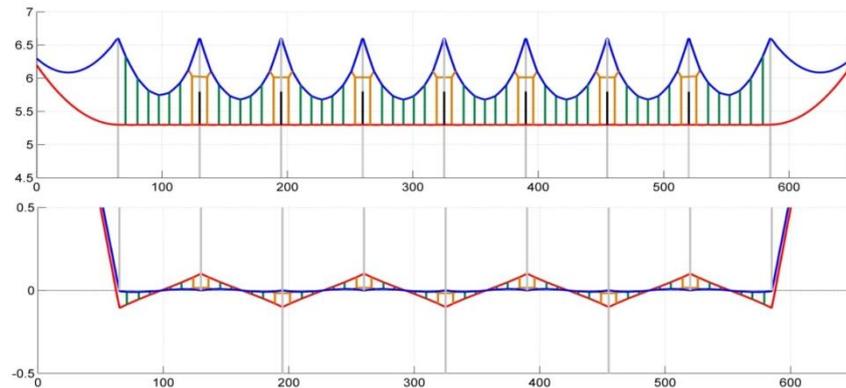
En este apartado se mostrarán los resultados de la simulación de la interacción dinámica entre pantógrafo y catenaria empleando catenarias con la tipología típica de las líneas de Alta Velocidad Española y un modelo de pantógrafo de tres etapas masa-resortes. En primer lugar se resolverá el problema cuando la línea de ferrocarril discurre por un tramo recto, después sobre un tramo curvo y finalmente, se compararán ambos resultados para comparar la influencia de la geometría del trazado.

7.2.1 Trazado recto.

En primer lugar se describirán las principales características de la línea aérea de contacto y del pantógrafo utilizado para después presentar los resultados obtenidos.

7.2.1.1 Datos de la línea aérea de contacto.

La catenaria elegida para ejemplificar el funcionamiento del programa corresponde a la topología utilizada en la línea AVE Madrid – Valencia. En las siguientes figuras (Figura 7-14, Figura 7-15 y Figura 7-16) se muestra la configuración y dimensiones del modelo empleado.



**Figura 7-14: Esquema de la catenaria (las escalas son diferentes para cada eje).
Vista frontal (imagen superior). Vista en planta (inferior).**

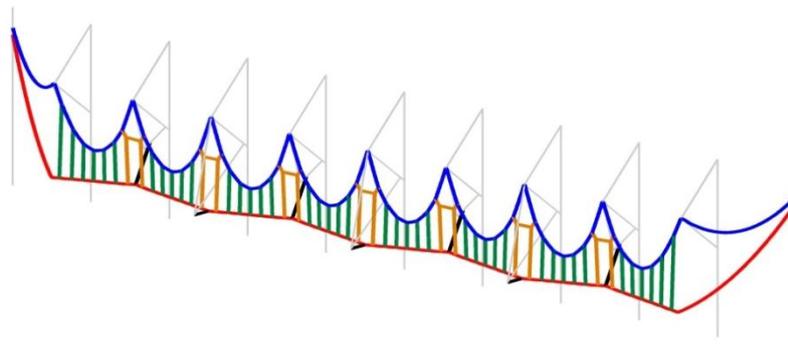


Figura 7-15: Vista en perspectiva del modelo de catenaria.

La catenaria del ejemplo está formada por un cantón con 11 postes, separados 65 m entre sí. La altura del punto de unión del cable sustentador con los postes es de 6.6 m y la altura deseada para el cable de contacto es de 5.3 m. El escalonamiento deseado para el cable de contacto es de 0.2 m en total y las longitudes de los brazos de registro se han fijado a 1 m.

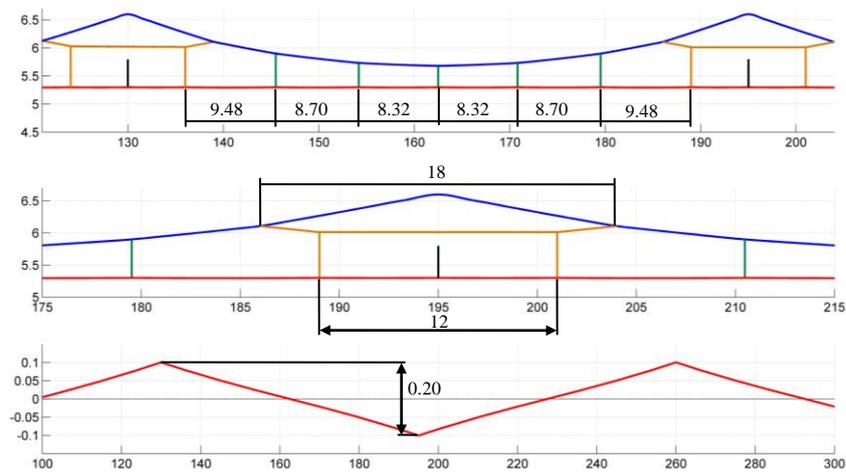


Figura 7-16: Distancias entre péndolas y dimensiones del escalonamiento (en metros).

Las propiedades mecánicas de los distintos elementos son las mostradas en la Tabla 7-7:

Tabla 7-7: Parámetros de las catenarias de AVE.

Parámetro	Valor	Parámetro	Valor
Tensión cable de contacto	31500 N	Tensión hilo sustentador	15750 N
Densidad cable de contacto	1.35 kg/m	Densidad hilo sustentador	1.07 kg/m
Rigidez a flexión del hilo de contacto, EI_c	136 N m ²	Rigidez a flexión del hilo sustentador, EI_s	15 Nm ²
Tensión de los cables Y	3500 N	Densidad de las péndolas	
Masa en el brazo de registro	0.5 kg		0.1 kg/m
Masa en el brazo de registro	0.5 kg		

7.2.1.2 Datos del pantógrafo.

El modelo de pantógrafo empleado para las simulaciones sobre la catenaria tipo AVE corresponde a un sistema de parámetros concentrados de masas-resortes de 3 etapas como el ya presentado en el apartado 2.4 en la Figura 2-5, que se repite aquí para mayor claridad.

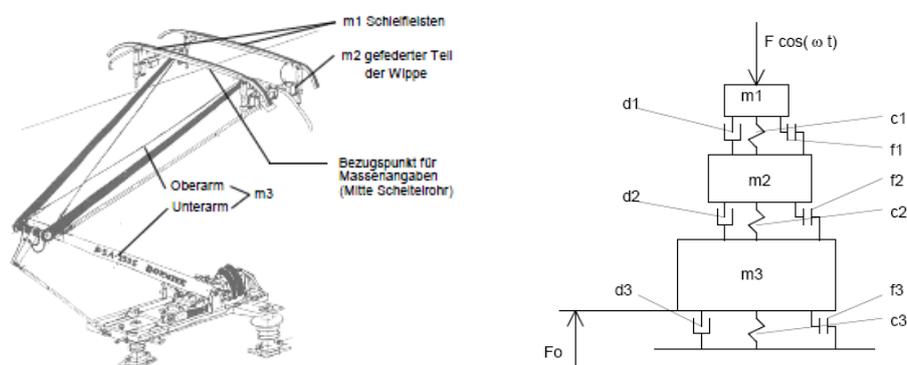


Figura 2-5: Pantógrafo de 3 etapas masas-resortes. Modelo DSA 380 EU (STEMMANN-TECHNIK GMBH).

Los datos de los parámetros del modelo son los recogidos en la siguiente tabla:

Tabla 7-8: Datos del pantógrafo DSA 380.

	Etapa 1	Etapa 2	Etapa 3
Masa	6.6 kg	5.8 kg	5.8 kg
Rigidez	7000 N/m	14100 N/m	80 N/m
Amortiguación	0.0 Ns/m	0.0 Ns/m	70 Ns/m
Rozamiento	0.5 N	3.5 N	3.5 N
F. aplicada	0.0 N	0.0 N	120 N

En las simulaciones llevadas a cabo se ha tomado un valor para la rigidez de contacto de 50000 N/m. No se ha incluido el efecto de la fricción en el modelo de pantógrafo para simplificar la implementación.

7.2.1.3 Resultados de la simulación sobre trazado recto.

En este apartado se presentarán los resultados obtenidos en la simulación sobre el trazado recto. En estos cálculos se ha empleado el método de integración implícito HHT modelando la catenaria con 10 elementos tipo cable entre péndolas contiguas, un incremento de tiempo $\Delta t = 10^{-4} s$ y sin introducir disipación numérica ($\alpha = 0$).

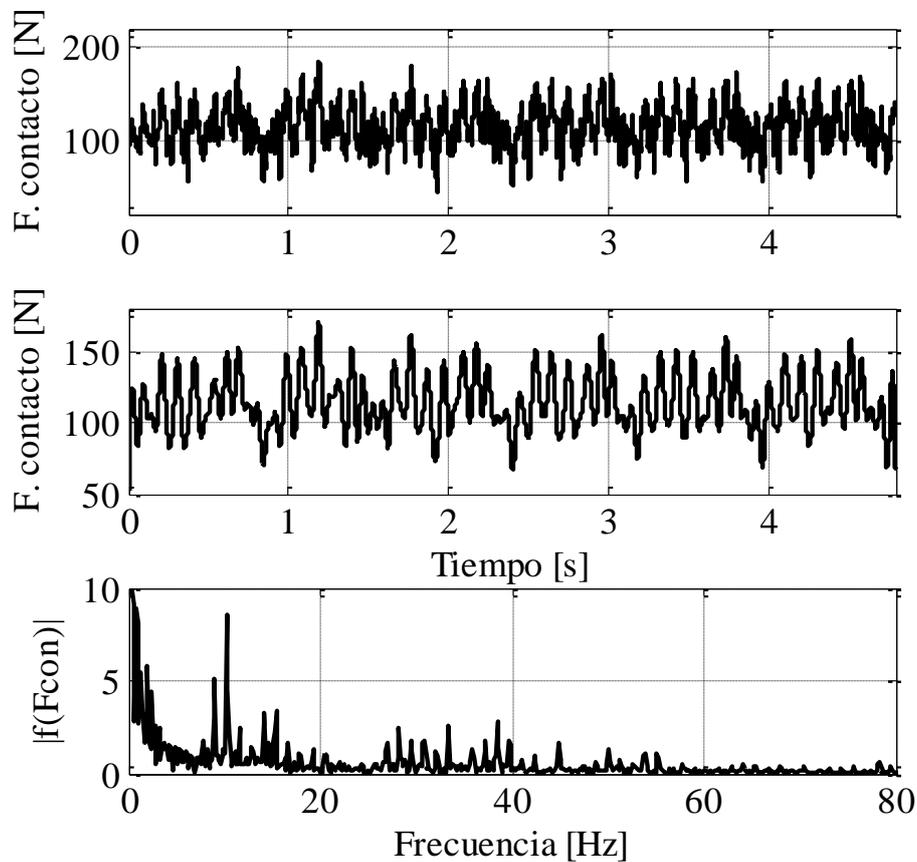


Figura 7-17: Evolución temporal de la fuerza de contacto. Catenaria tipo Ave en trazado recto con $v = 300$ km/h.

La Figura 7-17 muestra la evolución temporal de la fuerza de contacto calculada (parte superior), la fuerza de contacto en el rango de 0 Hz a 20 Hz (medio) y el contenido en frecuencia de la fuerza de contacto (parte inferior).

La Tabla 7-9 recoge los principales valores estadísticos obtenidos en esta simulación junto con los ya presentados anteriormente (cf. Tabla 7-5). Se puede apreciar como el rango de variación de la fuerza de contacto (desviación típica, valor mínimo y máximo) es mucho menor en catenaria del Ave. Estas diferencias se deben a la mayor calidad de esta disposición la cual consigue a través de la existencia de los cables Y reducir las variaciones de rigidez existentes entre la mitad del vano y las proximidades a los soportes. Esta menor variación de la rigidez se traduce en un comportamiento dinámico mejorado.

Tabla 7-9: Comparación de los valores estadísticos de la fuerza de contacto para diferentes configuraciones de catenarias ($v = 300$ km/h; $F = 120$ N).

	300 km/h	
	Catenaria Ave	Catenaria Norma
F_M [N]	114.21	118.84
σ [N]	19.90	34.04
Máximo estadístico de la fuerza de contacto [N]	173.91	220.94
Mínimo estadístico de la fuerza de contacto [N]	54.51	16.73
Máximo real de la fuerza de contacto [N]	160.83	208.62
Mínimo real de la fuerza de contacto [N]	67.51	48.98
Porcentaje de pérdida de contacto [%]	0	0

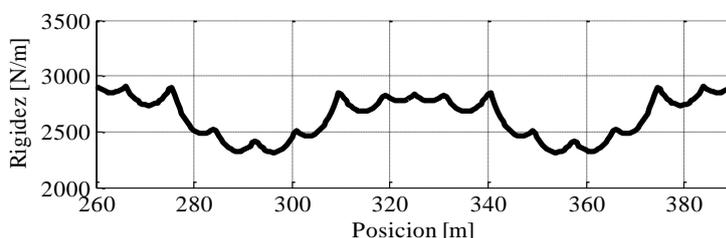


Figura 7-18: Variación de la rigidez del punto de contacto en catenaria tipo Ave.

La Figura 7-17 muestra cómo varía la rigidez de la catenaria con la tipología del Ave a lo largo de dos vanos consecutivos. Si se compara esta con la correspondiente curva de rigidez de la catenaria de la norma (ver Figura 7-2), se puede apreciar como las variaciones son mucho menores.

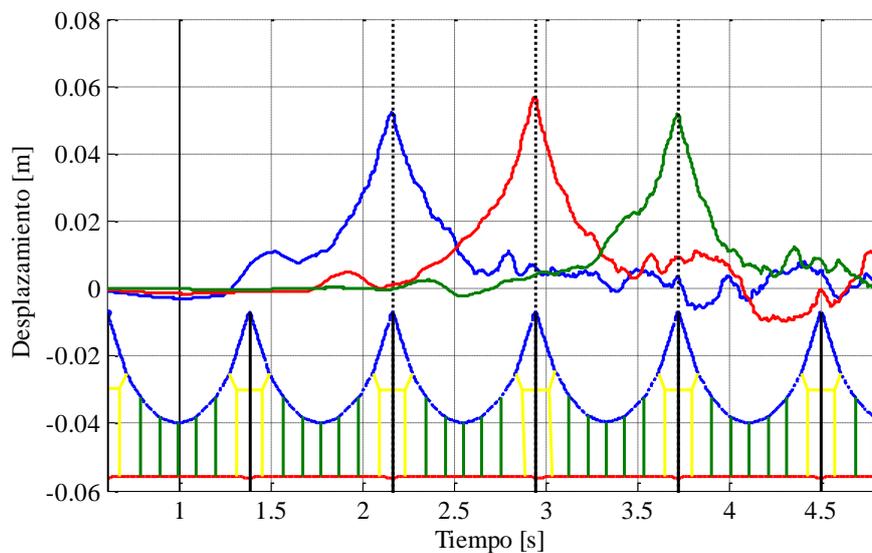


Figura 7-19: Desplazamiento vertical de los puntos de soporte en tres postes consecutivos.

Finalmente, la Figura 7-19 muestra la evolución temporal del desplazamiento vertical de los puntos de unión del cable de contacto con el brazo de registro en tres postes intermedios consecutivos.

7.2.2 Trazado curvo.

En este apartado se analizará la una catenaria con una topología y propiedades mecánicas idénticas a las explicadas en el punto anterior (cf. §7.2.1.1)

pero generando un trazado que discurre sobre una curva de radio constante $R = 1000$ m (ver Figura 7-20: Catenaria tipo Ave sobre trazado curvo.).

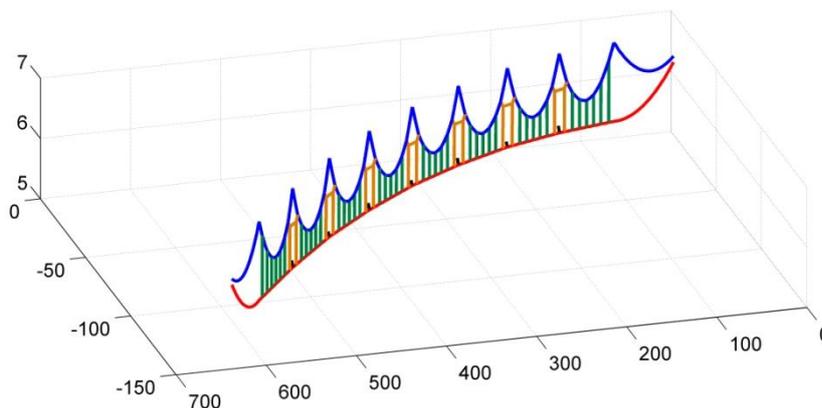
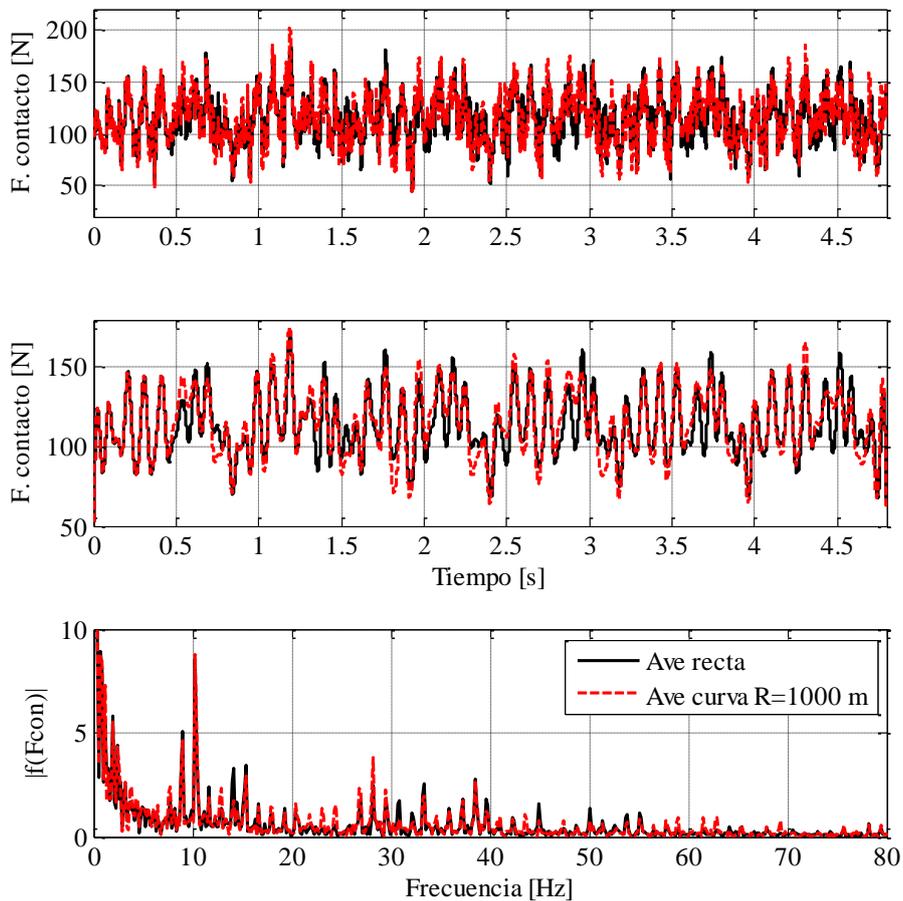


Figura 7-20: Catenaria tipo Ave sobre trazado curvo.

7.2.2.1 Resultados de la simulación sobre trazado curvo.

A continuación se mostrarán los resultados obtenidos en la simulación de la catenaria tipo Ave sobre un trazado curvo con radio de curvatura $R = 1000$ m. En las gráficas que muestran la fuerza de contacto o la evolución temporal de algunos puntos de interés se han superpuesto los resultados de la simulación sobre trazado recto para poder observar las diferencias existentes. De igual modo que en el caso de trazado recto, el modelo cuenta con 10 elementos entre péndolas, $\Delta t = 10^{-4}$ s y $\alpha = 0$. La velocidad de simulación es 300 km/h.

La Figura 7-21 muestra la evolución temporal de la fuerza de contacto. Se puede observar como ambas soluciones presentan tendencias muy similares, estando las diferencias localizadas en determinados máximos y mínimos locales de la fuerza de contacto. El gran radio de curvatura necesario para adecuarse a la alta velocidad del vehículo hace que las diferencias sean pequeñas pero no despreciables.



**Figura 7-21: Evolución temporal de la fuerza de contacto (parte superior).
Fuerza de contacto en la gama de frecuencias de 0 Hz a 20 Hz (medio).
Contenido en frecuencia (inferior).**

La Figura 7-22 muestra el desplazamiento de tres puntos de unión del brazo de registro con el cable de contacto en postes consecutivos. Se puede observar como las diferencias en los desplazamientos de estos puntos es significativa. Es importante la correcta estimación de estos desplazamientos pues generalmente se suele instalar sobre estos puntos equipos de medida para realizar inspecciones y ensayos del comportamiento de la línea. Estos puntos también son

de importancia pues sus desplazamientos deben estar limitados para evitar que elevaciones demasiado grandes puedan dañar otras partes de la infraestructura.

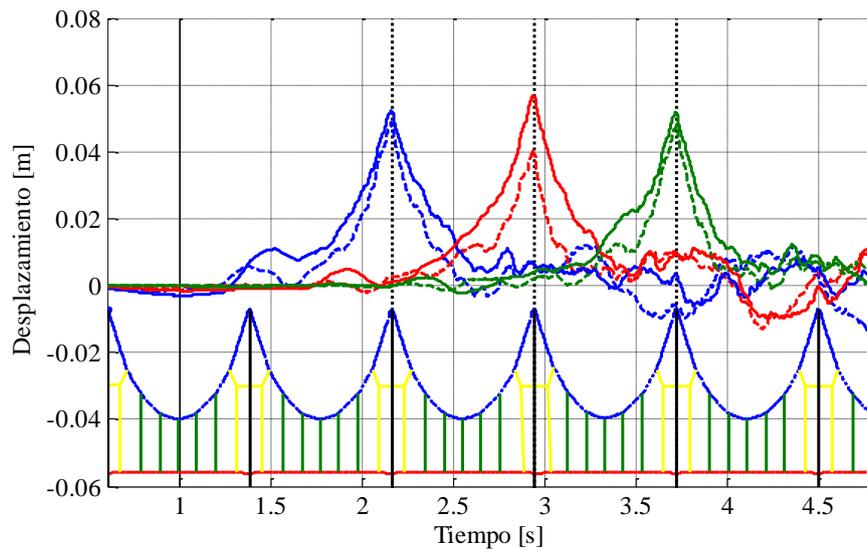


Figura 7-22: Desplazamiento vertical de los puntos de soporte en tres postes consecutivos. En línea continua se muestran los resultados sobre trazado recto y en discontinua los correspondientes a trazado en curva.

Tabla 7-10: Comparación de los valores estadísticos de la fuerza de contacto para catenaria recta y en trazado curvo ($v = 300$ km/h; $F = 120$ N).

	Cat. recta	Cat. curva
F_M [N]	114.21	115.71
σ [N]	19.90	21.78
Máximo estadístico de la fuerza de contacto [N]	173.91	181.05
Mínimo estadístico de la fuerza de contacto [N]	54.51	50.3762
Máximo real de la fuerza de contacto [N]	160.83	158.19
Mínimo real de la fuerza de contacto [N]	67.51	64.42
Porcentaje de pérdida de contacto [%]	0	0

La Tabla 7-10 muestra los valores estadísticos de la fuerza de contacto según el trazado sea recto (columna Cat. recta) o curvo (Cat. Curva).

7.2.3 Simulación del comportamiento con defectos en la catenaria.

Una de las posibles aplicaciones de un código de simulación dinámica de la interacción pantógrafo-catenaria como el presentado en este trabajo de Tesis de Máster es la evaluación del comportamiento en presencia de defectos. La Figura 7-23 muestra un detalle de la evolución temporal de la fuerza de contacto de una catenaria sin defectos y otra en la que dos péndolos se han roto o su montaje no es correcto.

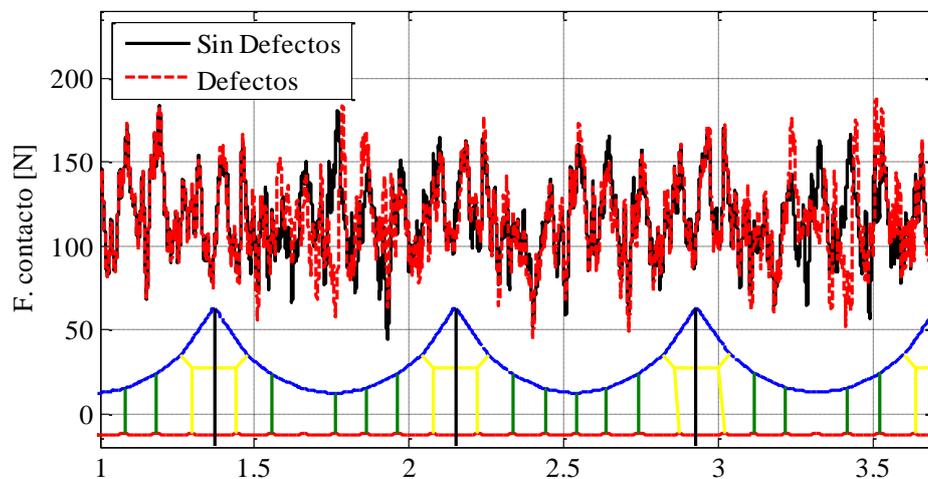


Figura 7-23: Simulación de la interacción dinámica en una catenaria con defectos. Falta de péndolos en torno a los 1.7s y 3.4 s.

La aplicación de los códigos de simulación puede ayudar a predecir la severidad de este y otro tipo de defectos (destensado de cables, altura del cable de contacto desigual, defectos de montaje de componentes, etc.). Otro posible enfoque



es el de la detección de los defectos de la línea a partir de los datos experimentales recogidos por un tren con instrumentado a través de una comparación con los resultados de simulaciones numéricas de los mismos como se muestra en [4].

En la Figura 7-23 se muestra como la dinámica de la fuerza de contacto se ve localmente alterada por la presencia de estos defectos, siendo este comportamiento el fenómeno estudiado para la detección de defectos.



UNIVERSIDAD POLITÉCNICA DE VALENCIA

Departamento de Ingeniería Mecánica y de Materiales

Máster en Ingeniería Mecánica y Materiales





8 CONCLUSIONES Y TRABAJOS FUTUROS.

Una vez realizada la exposición a nivel tanto teórico como práctico de los principales algoritmos y procesos implementados junto con los resultados obtenidos, se presenta en este capítulo una breve recopilación de cuáles han sido los hechos más relevantes que se han encontrado a lo largo del desarrollo de esta Tesis de Máster y cuáles son las conclusiones obtenidas. Es interesante también incluir en este punto cuáles son las posibles mejoras o materias que necesiten ser estudiadas con mayor profundidad en futuros trabajos.

- El código implementado permite el estudio del problema de interacción dinámica entre pantógrafo y catenaria en líneas de alta velocidad.
- El código desarrollado permite trabajar con un modelo tridimensional de la catenaria siendo capaz de estudiar los acoplamientos entre movimientos verticales y transversales generados por el paso del pantógrafo.
- Se ha elegido el método de los elementos finitos para el modelado de la línea aérea de contacto. La formulación presentada en [15] ha sido extendida para estudiar el problema dinámico.
- Se ha formulado una metodología para el estudio de la interacción entre cable de contacto y pantógrafo basada en el método de penalti.
- Se ha demostrado en base a resultados numéricos que es aceptable para el problema dinámico representar el sistema catenaria mediante un modelo de pequeños desplazamientos alrededor de la posición de equilibrio estático a diferencia de lo ocurrido en el problema de obtención de la configuración inicial (grandes desplazamientos).
- Se han modelado las principales fuentes de no linealidad presentes en el problema de interacción tales como unilateralidad de péndolas y contacto unilateral.
- Se han implementado distintos tipos de algoritmos para la integración directa de las ecuaciones del movimiento tanto explícitos (Runge-Kutta) como implícitos (HHT, Newmark) estudiando su adecuación al problema a



resolver así como la influencia de los parámetros de integración en los mismos. El método seleccionado como favorito y por ello empleado en la mayor parte de ejemplos es el HHT.

- Se ha validado la implementación de los algoritmos de integración a través del estudio del problema de masa móvil sobre un cable pretensado cuya solución es conocida.
- Se ha determinado el tamaño de elemento y de incremento de tiempo apropiado para el estudio del problema de interacción usando para ello el modelo de referencia de la norma EN 50318.
- Se ha llevado a cabo el primer paso de la validación del procedimiento de simulación de la interacción dinámica pantógrafo-catenaria descrito en la norma EN 50318. Los resultados, aunque positivos, no son del todo concluyentes.
- Se ha analizado el comportamiento dinámico de una catenaria con la tipología de las líneas Ave tanto en trazado recto como curvo para mostrar la capacidad de análisis del software desarrollado.
- Futuros desarrollos:
 - Mejora del modelado de las condiciones de contorno para la imposición de tensiones en cables.
 - Implementación del método de los multiplicadores de Lagrange para la gestión del contacto. Estudio de la influencia del procedimiento usado.
 - Implementación de modelos de pantógrafos más sofisticados.
 - Finalización de la primera etapa de validación del procedimiento de integración. Investigación del problema de filtrado.
 - Validación del procedimiento de integración a través de resultados experimentales medidos sobre una línea real.
 - Desarrollo de estrategias de control activo de pantógrafos.



9 BIBLIOGRAFÍA.

- [1] European Committee for Electrotechnical Standardization EN 50318:2002: *Aplicaciones ferroviarias – Sistemas de captación de corriente – Validación de la simulación de la interacción dinámica entre el pantógrafo y las líneas aéreas de contacto*, 2002.
- [2] Poetsch, G., Evans, J., Meisinger, R., Kortüm, W. and Krabacher, W.: Pantograph/Catenary Dynamics and Control. *Vehicle System Dynamics* 28 (2-3) (1997), pp. 159-195.
- [3] Collina, A., Bruni, S.: Numerical Simulation of Pantograph – Overhead Equipment Interaction. *Vehicle System Dynamics* 38 (2002), pp. 261-291.
- [4] Massat, J. P.: *Modélisation du comportement dynamique du couple pantographe-caténaire. Application à la détection de défauts dans la caténaire*. Tesis Doctoral, Laboratorio de Tribología y Dinámica de Sistemas, École Centrale de Lyon, 2007.
- [5] Massat, J. P., Laine, J. P., Bobillot, A.: Pantograph-catenary dynamics simulation. *Vehicle Systems Dynamics* 44 Supplement (2006), pp. 551-559.
- [6] Nordstrom, C. J.: *Nonlinear systems with discrete and continuous elements*. Tesis Doctoral, Technical University of Denmark, 1997.
- [7] Dahlberg, T.: Moving Force on an Axially Loaded Beam – with Applications to a RailWay Overhead Contact Wire. *Vehicle System Dynamics* 44 (2006), pp. 631-644.
- [8] Labergri, F.: *Modélisation du comportement dynamique du système pantographe-caténaire*. Tesis Doctoral, École Centrale de Lyon.
- [9] Arnold, M., Simeon, B.: Pantograph and catenary dynamics: A benchmark problem and its numerical solution. *Applied Numerical Mathematics* 34 (2000), pp. 345-362.
- [10] Cho, Y. H.: Numerical simulation of the dynamic responses of railway overhead contact lines to a moving pantograph, considering a nonlinear dropper. *Journal of Sound and Vibration* 315 (2008), pp. 433-454.
- [11] Benet, J.: An efficient method for the mechanical study of pantograph-catenary interaction. *Proceedings of the Tenth International Conference on Computational Structures Technology* Paper 3, Civil-Comp Press, Stirlingshire Scotland, 2010.



- [12] Pombo, J., Ambrósio, J., Pereira, M.: Influence of pantograph components on the contact quality of the overhead system for high speed trains. *Proceedings of the Tenth International Conference on Computational Structures Technology* Paper 1, Civil-Comp Press, Stirlingshire Scotland, 2010.
- [13] Drugge, L., Larsson, T., Stensson, A.: Modeling and simulation of catenary-pantograph interaction. *Vehicle System Dynamics* 33 Supplement (1999), pp. 490-501.
- [14] Vidal, V.: *Simulación mediante elementos finitos de una catenaria de ferrocarril*. Proyecto Final de Carrera, Departamento de Ingeniería Mecánica y Materiales, Universidad Politécnica de Valencia, 2010.
- [15] Vidal, V.: *Modelado mediante elementos finitos de configuración inicial de catenarias de ferrocarril*. Tesis de Máster, Departamento de Ingeniería Mecánica y Materiales, Universidad Politécnica de Valencia, 2011.
- [16] M., Boccione et al.: Pantograph aerodynamic effects on the pantograph-catenary interaction. *Vehicle System Dynamics* 44 Supplement (2006), pp. 560-570.
- [17] Zhang, W., Liu, Y., Mei, G.: Evaluation of the coupled dynamical response of a pantograph-catenary system: contact force and stresses. *Vehicle System Dynamics* 44 (2006), pp. 645-658.
- [18] Collina, A., Lo Conte, A., Carnevale, M.: Effect of deformable modes in pantograph-catenary dynamic interaction. *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part F: Journal of Rail and Rapid Transit*, 2009.
- [19] Cook, R. D., Malkus, D.S., Plesha, M.E.: *Concepts and Applications of Finite Element Analysis*, fourth ed., Wiley, New York, 2002.
- [20] Hughes, J. R.: *The Finite Element Method*. Prentice Hall, New Jersey, 1987.
- [21] Adetunde, I. A.: Dynamical analysis of prestressed Euler-Bernoulli Beam. *Research Journal of Physics* 1(2) (2007), pp. 64-72.
- [22] Hahn, B. D., Valentine, D. T.: *Essential MATLAB for Engineers and Scientists*, Mc Graw Hill, 1999.
- [23] *MATLAB User's guide for Signal Processing Toolbox R2010b*, Mathworks, 2010.