

UNIVERSIDAD POLITÉCNICA DE VALENCIA
Departamento de Ingeniería Mecánica y de Materiales
Máster en Ingeniería Mecánica y Materiales



TRABAJO DE INVESTIGACIÓN
TESIS DE MÁSTER

**ESTIMACIÓN DE ERROR Y MEJORA DE LA
SOLUCIÓN DE DESPLAZAMIENTOS DE
ELEMENTOS FINITOS Y DEL
RENDIMIENTO DE SOLVERS ITERATIVOS
MEDIANTE TÉCNICAS RECOVERY.**

Presentada por: D. Juan Enrique Arenas Palero.

Dirigida por: Dr. D. Juan José Ródenas García.

Valencia, Septiembre de 2011



Resumen

En el presente Trabajo Fin de Máster, se ha desarrollado un software para obtener una solución en desplazamientos mejorada a partir de la proporcionada por el Método de los Elementos Finitos (M.E.F.), en el análisis de problemas en elasticidad 2D, concretamente implementando la técnica Superconvergent Patch Recovery (S.P.R.).

En primer lugar, se ha partido de una malla conforme, que modeliza la geometría del componente, utilizándose para el análisis por el Método de los Elementos Finitos elementos triangulares o cuadriláteros, bien sean lineales o cuadráticos.

En segundo lugar, la estimación del error de discretización que se comete en la resolución, está basada en el estimador de error de ZIENKIEWICZ Y ZHU (estimados ZZ). Aunque la mayoría de estudios utilizan la solución reconstruida del campo de tensiones (σ^), obtenida a partir de la solución proporcionada por el MEF (σ_{ef}), en el presente Trabajo Fin de Máster se enfoca el estudio hacia la utilización del campo reconstruido de desplazamientos (\mathbf{u}^*) como base para la estimación del error de discretización obtenido con la técnica S.P.R. (Superconvergent Patch Recovery).*

Los resultados muestran que la implementación de la estimación de error en norma energética basada en la técnica S.P.R. (Superconvergent Patch Recovery) basada en desplazamientos, proporciona estimaciones de error y velocidades de convergencia similares a los obtenidos mediante la técnica S.P.R. basada en tensiones.

Por último, se ha llevado a cabo un estudio inicial de la aplicación de la solución en desplazamientos propuesta anteriormente, en el uso de algoritmos iterativos de resolución de sistemas de ecuaciones, proyectando la solución en desplazamientos propuesta, obtenida en una malla anterior, sobre una malla posterior para su uso como vector inicial en la aplicación de Métodos Iterativos. Los resultados de este estudio inicial, muestran que se produce una reducción del número de iteraciones necesarias para converger a la solución aplicando lo expuesto.



UNIVERSIDAD POLITÉCNICA DE VALENCIA

Departamento de Ingeniería Mecánica y de Materiales

Máster en Ingeniería Mecánica y Materiales



Palabras clave: MEF, ZZ, SPR, desplazamientos, estimación de error, métodos iterativos.



Abstract

In this Final Master Work, we have developed a methodology to obtain an enhanced displacement solution from FE's Solution for 2D elasticity problem analysis, specifically implementing the Superconvergent Patch Recovery Technique (S.P.R.).

Firstly, the analysis starts from a conforming mesh which models in the component geometry. The Finite Element Code can use triangular and quadrilateral elements, with linear or quadratic configuration.

Secondly, the estimation of the discretization error estimation of the FE solution is based in the ZIENKIEWICZ Y ZHU's Error Estimator (ZZ Estimator). Although, a lot of studies use the enhanced stress field solution (σ^), obtained from the Finite Element Method (FEM) (σ_{ef}), this Final Master Work studies the use of the enhanced displacement field solution (\mathbf{u}^*) to obtain the discretization error estimation through the Superconvergent Patch Recovery Technique (S.P.R.).*

The solutions show that the implementation of the error estimation in energy norm based in S.P.R. displacement Technique provides similar error estimations and convergence rate than the S.P.R. Technique based on stresses.

Finally, we ran a initial study about the effect of the use of the recovered displacement field on the behaviour of the iterative solvers used by the FE code. The solution procedure consist on the projecting recovered displacement field, obtained for given mesh, into the following mesh of the h-adaptative process then this projection is used to evaluate a first trial solution for the iterative solvers. The results of this last study, show that the number of iterations required to obtain the convergence is considerably reduced using the projection technique.

Keywords: FEM, ZZ, SPR, displacements, error estimation, iterative methods.



UNIVERSIDAD POLITÉCNICA DE VALENCIA

Departamento de Ingeniería Mecánica y de Materiales

Máster en Ingeniería Mecánica y Materiales





Resum

En el present Treball Final de Màster, s'ha desenvolupat un software per a obtenir una solució millorada en desplaçaments a partir de la donada pel Mètode dels Elements Finites (M.E.F.) en el anàlisi de problemes d'elasticitat 2D, concretament implementant la Tècnica Superconvergent Patch Recovery (S.P.R.).

Primerament, es partirà d'una malla conforme, que modelitza segons la geometria del component, utilitzant-ne per al anàlisi pel Mètode dels Elements Finites elements triangular o quadrilàters, be lineals o quadràtics.

En segon terme, l'estimació de l'error de discretització que es produeix en la resolució està basada en el estimador d'error de ZIENKIEWICZ Y ZHU (estimador ZZ). Encara que la majoria d'estudis utilitzen la solució reconstruïda del camp de tensions (σ^), obtinguda a partir de la solució proporcionada pel M.E.F. (σ_{ef}), en el present Treball Final de Màster el focus d'estudi es dirigeix a l'utilització del camp reconstruït de desplaçaments (\mathbf{u}^*) com a base per a l'estimació de l'error de discretització.*

Els resultats mostren que l'implementació de l'estimació de l'error en norma energètica basada en la Tècnica S.P.R. en desplaçaments proporciona estimacions d'error y velocitats de convergència similars a la Tècnica S.P.R. basada e tensions.

Per últim, es fa un estudi inicial de l'aplicació de la solució en desplaçaments proposada, en l'utilització d'algoritmes iteratius de resolució de sistemes d'equacions, projectant la solució en desplaçaments proposada, obtinguda en una malla anterior, per a la seua projecció en una malla posterior i el seu us com a vector inicial en l'aplicació de Mètodes Iteratius. El resultats d'aquest estudi inicial, sense ser objecte d'aquest Treball Final de Màster profunditzar en ell, mostren que se produeix una reducció del nombre d'iteracions necessàries per a convergir a la solució aplicant lo exposat anteriorment.

Paraules claus: MEF, ZZ, SPR, desplaçaments, estimació d'error, mètodes iteratius.



UNIVERSIDAD POLITÉCNICA DE VALENCIA

Departamento de Ingeniería Mecánica y de Materiales

Máster en Ingeniería Mecánica y Materiales





UNIVERSIDAD POLITÉCNICA DE VALENCIA

Departamento de Ingeniería Mecánica y de Materiales
Máster en Ingeniería Mecánica y Materiales



Agradecimientos

Agradecerle a Juanjo, mi director de este Trabajo Fin de Máster, su ayuda, los conocimientos transmitidos y su inmensa paciencia.

Agradecer a los buenos amigos de la carrera, máster y departamento, su ayuda y apoyo.

A todos los profesores que han participado y colaborado tanto en mi formación, como en mi desarrollo personal.

A los amigos de siempre por estar ahí.

Y en especial, a mi padre, mi madre y mi hermana, por apoyarme, quererme siempre y haberme enseñado las cosas más importantes.

Muchas gracias a todos.



UNIVERSIDAD POLITÉCNICA DE VALENCIA

Departamento de Ingeniería Mecánica y de Materiales

Máster en Ingeniería Mecánica y Materiales





ÍNDICE

<i>Resumen</i>	<i>i</i>
<i>Abstract</i>	<i>iii</i>
<i>Resum</i>	<i>v</i>
<i>Agradecimientos</i>	<i>vii</i>
1 <i>Introducción y objetivos</i>	1
2 <i>Antecedentes</i>	3
2.1 Clasificación de errores en el MEF	3
2.1.1 Velocidad de convergencia del error de discretización.....	5
2.1.2 Superconvergencia	7
2.1.3 Cuantificación del error de discretización.....	9
2.1.4 El estimador ZZ basado en reconstrucción de tensiones.....	13
2.1.5 Reconstrucción mediante promediado directo en nodos.....	15
2.1.6 La técnica Superconvergent Patch Recovery (SPR).....	18
3 <i>Estimador ZZ basado en desplazamientos</i>	35
3.1 Desarrollo del nuevo estimador de error	36
3.2 Técnica SPR para alisado de desplazamientos	43
3.2.1 Esquema general	43
3.2.2 La técnica SPR en desplazamientos.....	46
3.2.3 Detalles de implementación de la técnica SPR en desplazamientos propuesto.....	51



4	<i>Verificación y validación del programa.....</i>	57
4.1	Verificación de la técnica desarrollada mediante ejemplos con solución analítica.....	58
4.1.1	Cilindro sometido a presión interna	58
4.1.2	Placa cuadrada de lado unitario.....	89
4.2	Conclusiones del estudio de problemas con solución analítica.....	116
4.3	Aplicación a la resolución de problemas sin solución analítica.....	117
4.3.1	Presa con cargas superficiales y gravitatorias	117
4.4	Conclusiones del estudio de problemas sin solución analítica.....	122
5	<i>Uso de la solución en desplazamientos evaluada en solvers Iterativos.</i>	123
5.1	Método Iterativo del Gradiente Biconjugado Estabilizado (BICGSTAB).	125
5.1.1	Cilindro sometido a presión interna.	125
5.1.2	Placa cuadrada de lado unitario.....	127
5.2	Método Iterativo del Gradiente Conjugado Cuadrado (CGS).	128
5.2.1	Cilindro sometido a presión interna.	128
5.2.2	Placa cuadrada de lado unitario.....	130
5.3	Método Iterativo del Mínimo Residuo Generalizada (GMRES).	131
5.3.1	Aplicación a Métodos Iterativos.	131
5.3.2	Placa cuadrada de lado unitario.....	134
6	<i>Conclusiones.....</i>	135
7	<i>Futuras líneas de investigación y desarrollo.....</i>	137



UNIVERSIDAD POLITÉCNICA DE VALENCIA

Departamento de Ingeniería Mecánica y de Materiales
Máster en Ingeniería Mecánica y Materiales



8	<i>Referencias y Bibliografía</i>	139
9	<i>ANEJOS</i>	143
9.1	Manual del programador	143
9.1.1	Inicialización de la estructura de datos.....	143
9.1.2	Estructuras de datos más importantes	144



UNIVERSIDAD POLITÉCNICA DE VALENCIA

Departamento de Ingeniería Mecánica y de Materiales

Máster en Ingeniería Mecánica y Materiales





1 Introducción y objetivos.

En la actualidad el Método de los Elementos Finitos es una de las técnicas más utilizadas para la resolución de una gran variedad de problemas ingenieriles, ya que aunque los resultados que se obtienen no son exactos, proporciona una estimación próxima a la solución exacta. El avance en este campo ha permitido la mejora en la estimación del error de discretización que se comete en la resolución, permitiendo una aproximación cada vez mayor a la solución exacta en los problemas analizados. Usualmente el estimador de error más utilizado es el desarrollado por Zienkiewicz y Zhu, el cual utiliza la solución reconstruida del campo de tensiones (σ^*) obtenida a partir de la solución proporcionada por el MEF (σ_{ef}). Aunque la mayoría de estudios están enfocados en esta dirección, resultaría interesante evaluar el campo reconstruido de desplazamientos (u^*), como base para la estimación del error de discretización, ya que además puede ser utilizado para:

- Obtener el campo de tensiones reconstruido. Es fácil obtener el campo reconstruido de tensiones (σ^*) derivando el campo reconstruido de desplazamientos.
- Permitiría tener estimación de soluciones de mallas más refinadas, que serían utilizadas como solución inicial para resolver el sistema de ecuaciones mediante métodos iterativos.
- Evita la necesidad de cálculo de las tensiones en los pasos intermedios de los procesos de refinamiento adaptativo.

El objeto del presente trabajo fin de Máster consiste en llevar a cabo el desarrollo de un software, mediante MATLAB, que permita mejorar la calidad y precisión de la solución en desplazamientos obtenida mediante el Método de los



Elementos Finitos (M.E.F.), en el análisis de problemas en elasticidad 2D. Para ello se implementa la técnica Superconvergent Patch Recovery (S.P.R.), con el fin de llevar a cabo una reconstrucción del campo de desplazamientos obtenido mediante el Método de los Elementos Finitos.

Adicionalmente se implementarán unas rutinas de MATLAB con el fin de llevar a cabo un primer estudio de la aplicación de la solución en desplazamientos propuesta, en el uso de algoritmos iterativos de resolución de sistemas de ecuaciones. Se pretende utilizar la solución en desplazamientos propuesta, obtenida en una malla anterior, para su proyección sobre una malla posterior y su uso como vector inicial en la aplicación de Métodos Iterativos para la resolución de sistemas de ecuaciones. Se pretende comprobar si disminuye el número de iteraciones necesarias para la convergencia a la solución, al usar esta solución inicial, y si puede darse pie a estudios futuros más profundos.

La solución del campo de desplazamientos se obtendrá mediante el M.E.F., combinado con la técnica S.P.R. El entorno gráfico para el lanzamiento de cálculos y postprocesado de éstos, es el propio Command Window de MATLAB, proporcionándose en éste los resultados numéricos y gráficos objeto del análisis de los problemas a analizar.

Se partirá de una malla conforme que modelizará la geometría del componente a analizar. Se utilizarán tanto elementos triangulares como cuadriláteros, bien sean lineales o cuadráticos.

Así mismo, también tiene por objeto la realización y superación con éxito del trabajo fin de Máster, necesario para obtener el título del 'Máster en Ingeniería Mecánica y Materiales'.



2 Antecedentes

A continuación se introducen algunos conceptos de Elementos Finitos necesarios para el desarrollo de este trabajo fin de Máster, extraídos de las referencias [6] y [12] con autorización de los autores de los mismos.

2.1 *Clasificación de errores en el MEF*

El método de los elementos finitos es un método numérico aproximado de análisis, con lo que los resultados obtenidos no serán exactos.

El error entre la solución exacta del problema y la obtenida mediante el MEF está influenciado por un conjunto de errores, que se pueden clasificar como:

- **Errores de modelado**, que aparecen debido a la diferencia que existe entre el sistema físico y su modelo matemático. En general se realizan hipótesis simplificadoras para abordar el problema, las cuales introducen diferencias entre ambos sistemas en lo que respecta a los valores de las propiedades físicas, a la definición de las cargas y a la geometría (normalmente las fronteras curvas no pueden ser representadas exactamente). Se deben incluir en este apartado los errores introducidos por el propio analista a la hora de generar el modelo, sobre todo en lo que respecta a definición de las condiciones de contorno. Con relativa frecuencia se generan modelos donde, por ejemplo, los apoyos del componente están mal definidos o la representación de las cargas aplicadas no es realista.



- **Errores de redondeo**, causados por la utilización de un número finito de dígitos en la representación de números reales.

- **Errores de manipulación**, que son los errores de redondeo introducidos por un algoritmo. Por ejemplo, en la resolución del sistema de ecuaciones se realizan operaciones tales como $K_{22} - (K_{21}/K_{11})K_{12}$, siendo \mathbf{K} la matriz de coeficientes. Las divisiones y multiplicaciones tienen asociados sus errores de redondeo y la resta puede reducir significativamente su precisión si K_{22} y $(K_{21}/K_{11})K_{12}$ son similares.

- **Errores de integración**, provocados por el método numérico aproximado seleccionado para realizar las integraciones requeridas por el MEF

- **Errores de discretización**, causado por la representación de los infinitos *g.d.l.* de un continuo, mediante un número finito (discreto) de *g.d.l.*

En los programas comerciales de elementos finitos la utilización de la doble precisión y de algoritmos de cálculo apropiados hace que la importancia de los errores de redondeo y manipulación sobre el resultado final suela ser despreciable.

Una adecuada integración numérica hará que se mantenga la velocidad de convergencia del error con el refinamiento de la malla.

Normalmente, a medida que se refina la malla el efecto de los errores de modelado (salvo, claro está, los debidos a una incorrecta definición del modelo) se



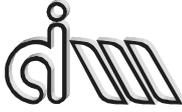
reduce tanto que la fuente más importante de error en los resultados del análisis de elementos finitos corresponde al error de discretización. En este sentido, consideraremos únicamente el estudio del error de discretización de la solución.

Los errores de discretización se pueden clasificar a su vez en 2 categorías diferentes: *errores de discretización con efecto local* y *errores de polución*. Los aquí llamados errores de discretización con efecto local son los errores de discretización que aparecen en un elemento debido al tamaño finito de ese mismo elemento.

Por otro lado los errores de polución, son los errores que aparecen en los elementos debidos a una deficiente discretización de otras partes de la malla. Por ejemplo, si en el componente analizado existe una singularidad (p.e. una grieta) y en sus inmediaciones no se refina la malla adecuadamente, los errores generados en los alrededores de la singularidad contaminarán los resultados obtenidos en el resto de elementos. Se ha comprobado sin embargo que este tipo de errores desaparece si se sigue un procedimiento adaptativo para analizar el problema.

2.1.1 Velocidad de convergencia del error de discretización

Para una discretización dada, se puede considerar que la solución real del problema, dentro de un elemento, se puede desarrollar en serie de Taylor. Así, por ejemplo, la solución exacta en un punto de coordenadas (x,y) de un elemento bidimensional se podrá escribir como



$$u = u_i + \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_i (x - x_i) + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_i (y - y_i) + \dots \quad (1)$$

Si dentro de un elemento de tamaño h , se utiliza una expansión polinómica local de grado p , como $(x - x_i)$ e $(y - y_i)$ son del orden de magnitud de h , el error será del orden¹ $O(h^{p+1})$. De esta forma, en el caso de elasticidad, si se utilizan elementos lineales el error en desplazamientos será del orden $O(h^2)$, reduciendo por lo tanto el error a una cuarta parte si el tamaño del elemento se reduce a la mitad.

Mediante argumentos similares, las derivadas m -ésimas de las funciones en las que se formula el problema, tendrán convergencia con un error de orden $O(h^{p+1-m})$. Por ejemplo, en elasticidad, las tensiones (y también las deformaciones), son derivadas primeras de los desplazamientos, por lo que $m = 1$. Así pues, si utilizamos elementos lineales el error en estas magnitudes será del orden $O(h)$.

La tabla siguiente resume los órdenes de error de las principales magnitudes en el problema elástico.

¹ Que la solución tenga un error de orden $O(h^{p+1})$ indica que el error, e , evoluciona según una expresión del tipo $e = C \cdot h^{p+1}$, donde C es un parámetro constante desconocido para cada problema.



Tabla 1.- Orden del error de diferentes magnitudes en el problema elástico

	Magnitud	Orden del error	$p=1$	$p=2$
Desplazamientos	\mathbf{u}_{ef}	$O(h^{p+1})$	$O(h^2)$	$O(h^3)$
Deformaciones y Tensiones	$\boldsymbol{\varepsilon}_{ef}$ $\boldsymbol{\sigma}_{ef}$	$O(h^p)$	$O(h)$	$O(h^2)$
Energía de deformación	Π_{ef}	$O(h^{2p})$	$O(h^2)$	$O(h^4)$
Norma energética	$\ \mathbf{u}_{ef}\ $	$O(h^p)$	$O(h)$	$O(h^2)$

Estos razonamientos, que no constituyen un análisis riguroso del error de discretización, son válidos siempre y cuando no existan singularidades en el problema considerado. Por singularidades se entiende en el caso de la elasticidad, puntos en los que el resultado en tensiones tiende a infinito, invalidando los argumentos basados en desarrollo en series de Taylor de la solución. Un ejemplo típico de esta situación es el caso de grietas, en cuyos extremos, teóricamente, las tensiones que aparecen son infinitas (planteamiento elástico lineal).

2.1.2 Superconvergencia

Las velocidades de convergencia teóricas analizadas anteriormente están basadas únicamente en la teoría de aproximación mediante polinomios. Se puede comprobar que los resultados expuestos son los que se obtendrían en la mayoría de puntos en un elemento. Sin embargo existen ciertos puntos dentro de los elementos donde la velocidad de convergencia del error supera estos resultados. Estos puntos son los llamados *puntos de superconvergencia*.

Se puede demostrar que:

a) los *puntos de superconvergencia de los desplazamientos* son los propios nodos del elemento, para cualquier grado polinómico de la interpolación.

b) los *puntos de superconvergencia de las tensiones* (y por tanto de las deformaciones) corresponden, o están próximos, a los puntos de cuadratura de Gauss asociados al grado polinómico utilizado en la interpolación de desplazamientos.

En estos puntos la velocidad de convergencia de estas funciones es un orden superior a la que se había predicho inicialmente.

El ejemplo de la figura siguiente muestra los valores de tensión que se obtienen en un modelo formado por un único elemento unidimensional para distintas aproximaciones polinómicas y la localización de los puntos de superconvergencia (puntos de la regla de cuadratura de Gauss).

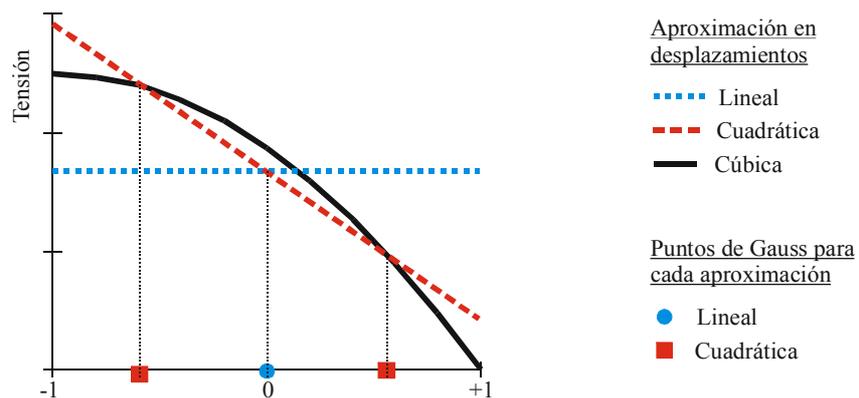


Figura 1.- Puntos de superconvergencia de tensiones para distintas aproximaciones polinómicas en un elemento unidimensional



En la Figura 1 se observa con claridad la razón por la que en los puntos de superconvergencia de tensiones la velocidad de convergencia corresponde a la que se obtendría con una aproximación polinómica en desplazamientos de un orden superior. En este caso, en el que no hay influencias de otros elementos por ser el único elemento del modelo, se puede observar que el valor de tensión que se obtiene en los puntos de Gauss corresponde exactamente al valor de tensión que se obtendría si se utilizase una aproximación polinómica en desplazamientos de un grado superior.

2.1.3 Cuantificación del error de discretización

Para cuantificar el error de discretización se ha de usar una magnitud que resulte útil, en lo que respecta a la definición de procedimientos, que permitan la reducción de dicho error. En general se busca cuantificar dicho error mediante una norma, que permita definirlo en base a un escalar. Una magnitud habitualmente utilizada es la *norma energética*. La norma energética de las soluciones exactas y de elementos finitos se definen como:

$$\begin{aligned}\|\mathbf{u}_{ex}\| &= \sqrt{\int \boldsymbol{\sigma}_{ex}^T \boldsymbol{\varepsilon}_{ex} dV} = \sqrt{\int \boldsymbol{\sigma}_{ex}^T \mathbf{D}^{-1} \boldsymbol{\sigma}_{ex} dV} = \sqrt{2\Pi_{ex}} \\ \|\mathbf{u}_{ef}\| &= \sqrt{\int \boldsymbol{\sigma}_{ef}^T \boldsymbol{\varepsilon}_{ef} dV} = \sqrt{\int \boldsymbol{\sigma}_{ef}^T \mathbf{D}^{-1} \boldsymbol{\sigma}_{ef} dV} = \sqrt{2\Pi_{ef}}\end{aligned}\quad (2)$$

Donde los subíndices *ex* y *ef* indican soluciones exacta y de elementos finitos respectivamente. Obsérvese que la norma energética de la solución físicamente se corresponde con la raíz cuadrada del doble de la energía de deformación, Π . Para cuantificar el error de discretización se considera habitualmente la norma energética del error, definida como:



$$\|\mathbf{e}_{ex}\| = \|\mathbf{u}_{ex} - \mathbf{u}_{ef}\| = \sqrt{\int (\boldsymbol{\sigma}_{ex} - \boldsymbol{\sigma}_{ef})^T \mathbf{D}^{-1} (\boldsymbol{\sigma}_{ex} - \boldsymbol{\sigma}_{ef}) dV} \quad (3)$$

que es la raíz cuadrada del doble de la energía de deformación del error. Se puede demostrar que esta magnitud está relacionada con la norma energética de la solución exacta y la de elementos finitos mediante la expresión:

$$\|\mathbf{e}_{ex}\| \approx \sqrt{\|\mathbf{u}_{ex}\|^2 - \|\mathbf{u}_{ef}\|^2} \quad (4)$$

Si se conoce la solución exacta del problema el uso de la ecuación (4) permite la evaluación del error de discretización tanto a nivel global, considerando como dominio de integración el volumen total del componente analizado, como a nivel de elemento, considerando como dominio de integración el de cada uno de los elementos. La relación entre el valor global, $\|\mathbf{e}_{ex}^{global}\|$, y el valor en cada uno de los N_e elementos, $\|\mathbf{e}_{ex}^e\|$, vendrá dada por:

$$\|\mathbf{e}_{ex}^{global}\|^2 = \sum_{e=1}^{N_e} \|\mathbf{e}_{ex}^e\|^2 \quad (5)$$

A partir de la definición del error de discretización absoluto, se puede definir el error relativo en términos porcentuales como:



$$\eta_{ex} = \frac{\|\mathbf{e}_{ex}\|}{\|\mathbf{u}_{ex}\|} \cdot 100 \quad (6)$$

Considerando que no existen singularidades, y considerando el problema elástico, tal y como se vio en el apartado anterior, el error de discretización en norma energética será una función del tamaño de elemento, h , elevado al grado polinómico completo de la interpolación de desplazamientos, p . Por lo tanto, en el rango asintótico de la solución, es decir, para modelos suficientemente refinados, se podrá escribir:

$$\|\mathbf{e}_{ex}\| \approx C_0 h^p \quad (7)$$

donde C_0 es un parámetro constante positivo que depende del problema estudiado (y no del tamaño de los elementos). Esta ecuación, que relaciona el error con el tamaño de elementos y orden del polinomio completo incluido en las funciones de forma, será de gran utilidad para relacionar, en términos de error, discretizaciones diferentes de un mismo problema.

En el caso en el que el problema presente una singularidad, se puede demostrar que la expresión anterior se transforma en la siguiente:

$$\|\mathbf{e}_{ex}\| \approx C_0 h^c \quad c = \min(p, \lambda) \quad (8)$$

Donde λ es un parámetro que caracteriza la intensidad de la singularidad. En la figura siguiente se muestran los valores de este parámetro para el Modo I en diferentes geometrías con singularidad:

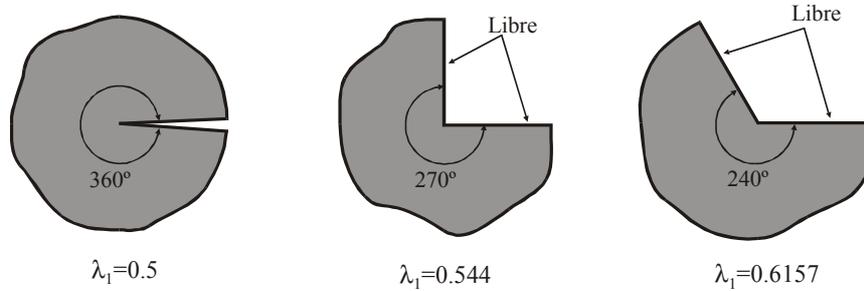


Figura 2.- Valores de λ para el modo I en diferentes geometrías singulares.

Puesto que, en el caso general, no todos los elementos de la malla serán del mismo tamaño, resulta interesante disponer de una expresión que relacione el error en norma energética, $\|\mathbf{e}_{ex}\|$ con el número de grados de libertad, N , de la discretización. Se puede considerar que en problemas 1-D el valor de N aumenta linealmente conforme disminuye el tamaño de los elementos, de manera cuadrática en el caso 2-D y de manera cúbica en el caso 3-D. Por lo tanto, para refinamientos uniformes, el error de discretización exacto en norma energética, $\|\mathbf{e}_{ex}\|$ se podrá expresar como:

$$\|\mathbf{e}_{ex}\| \approx CN^{\frac{-1}{d}c} \quad c = \min(p, \lambda) \quad (9)$$

Donde, d representa el número de dimensiones del problema y C , al igual que C_0 , es un parámetro constante positivo que depende del problema estudiado (y no del tamaño de los elementos).

En el caso de refinamientos adaptativos, el propio proceso adaptativo neutraliza el efecto de la singularidad, y la expresión anterior se podrá reescribir como:



$$\|e_{ex}\| \approx CN^{\frac{-1}{d}p} \quad (10)$$

Estas relaciones podrán establecerse siempre y cuando la constante C no varíe de una discretización a la otra. Esta condición se cumple básicamente cuando se realizan:

refinamientos uniformes, en los que los elementos de la malla refinada mantienen una proporción constante con los de la anterior malla, o,

refinamientos adaptativos, en los que la malla se refina en función del error evaluado en cada elemento, mediante la definición de mallados uniformes dentro de cada uno de los elementos de la malla (*refinamiento localmente uniforme*).

2.1.4 El estimador ZZ basado en reconstrucción de tensiones

Como se comentó en una sección anterior, los estimadores de error son una herramienta básica para poder realizar refinamientos adaptativos. Zienkiewicz y Zhu [14] propusieron una técnica para obtener dicha estimación que es una de las más utilizadas en la práctica, denominada habitualmente *estimador de error de Zienkiewicz y Zhu* o *estimador ZZ*.

La expresión que proporciona el valor exacto del error es la siguiente:



$$\|\mathbf{e}_{ex}\| = \|\mathbf{u}_{ex} - \mathbf{u}_{ef}\| = \sqrt{\int (\boldsymbol{\sigma}_{ex} - \boldsymbol{\sigma}_{ef})^T \mathbf{D}^{-1} (\boldsymbol{\sigma}_{ex} - \boldsymbol{\sigma}_{ef}) dV} \quad (11)$$

El método propuesto por estos autores consiste en, partiendo de la solución de E.F., $\boldsymbol{\sigma}_{ef}$, determinar una solución $\boldsymbol{\sigma}^*$ que sea una mejor aproximación a la solución exacta que la de E.F., y calcular la diferencia entre ellas como estimación del error exacto en tensiones.

La expresión propuesta por estos autores para obtener la estimación del error en norma energética se muestra a continuación:

$$\|\mathbf{e}_{es}\| = \sqrt{\int (\boldsymbol{\sigma}^* - \boldsymbol{\sigma}_{ef})^T \mathbf{D}^{-1} (\boldsymbol{\sigma}^* - \boldsymbol{\sigma}_{ef}) dV} \quad (12)$$

Una vez evaluada la estimación del error absoluto en norma energética mediante la expresión anterior, se podrá también obtener una estimación del error relativo en norma energética en términos porcentuales utilizando la siguiente expresión:

$$\eta_{es} = \frac{\|\mathbf{e}_{es}\|}{\sqrt{\|\mathbf{u}_{ef}\|^2 + \|\mathbf{e}_{es}\|^2}} \cdot 100 \quad (13)$$

En la ecuación (12) el campo $\boldsymbol{\sigma}^*$ es el llamado *campo de tensiones reconstruido* (del término inglés *recovered*) aunque suele ser llamado con más frecuencia *campo de tensiones alisadas*. Existen varias técnicas para obtener el campo alisado de tensiones, $\boldsymbol{\sigma}^*$. Se expondrá a continuación la técnica de alisado



directo en nodos y las ideas básicas del alisado mediante técnicas SPR, que serán desarrolladas en detalle en el apartado siguiente.

La calidad del procedimiento de estimación del error de discretización se puede cuantificar mediante la llamada *efectividad* (θ) del estimador de error, definida según la expresión:

$$\theta = \frac{\|e_{es}\|}{\|e_{ex}\|} \quad (14)$$

Evidentemente para la validar un estimador de error mediante este parámetro es necesario disponer de problemas con solución exacta con los que comprobar que el estimador proporciona los resultados adecuados. Un estimador de error es fiable si proporciona valores de efectividad cercanos a la unidad (su valor ideal). En general se suele considerar que el estimador es fiable si se obtienen valores de efectividad entre 0.8 y 1.2. Un estimador de error es llamado *asintóticamente exacto* si proporciona valores de efectividad que tienden a la unidad conforme se refina la malla.

2.1.5 Reconstrucción mediante promediado directo en nodos

En la definición del campo σ^* dentro de cada uno de los elementos de la malla se suele utilizar la siguiente expresión:



$$\underline{\sigma}^* = \mathbf{N} \underline{\sigma}^* \quad (15)$$

Donde \mathbf{N} son las funciones de forma utilizadas en la interpolación de desplazamientos y $\underline{\sigma}^*$ son los valores del campo $\underline{\sigma}^*$ evaluados en los nodos del elemento. Así pues, la precisión del estimador de error de discretización en norma energética será función de la precisión con la que se calculen los valores nodales $\underline{\sigma}^*$.

Los códigos de elementos finitos disponen de subrutinas de alisado de la solución a través de las cuales se obtiene un *campo de tensiones continuo* o *alisado* (en vez del discontinuo obtenido del análisis de elementos finitos). Estos procedimientos de alisado permiten obtener representaciones del campo de tensiones más realistas que las de los resultados directamente obtenidos del análisis de Elementos Finitos.

La técnica más comúnmente utilizada para obtener los campos continuos de tensiones es la de *promediado directo en nodos*. La técnica consiste en asignar a cada nodo de la malla el valor promedio de las tensiones evaluadas en dicho nodo como correspondiente a cada uno de los elementos a los que está conectado. Se utiliza para ello la siguiente expresión:

$$\underline{\sigma}_j^* = \frac{\sum_{e=1}^{M_j} \underline{\sigma}_{ef(j)}^e}{M_j} \quad (16)$$

En la expresión anterior

$\underline{\sigma}_j^*$ es la tensión alisada en el nodo j .

M_j es el número de elementos que contienen al nodo j .

$\underline{\sigma}_{ef(j)}^e$ es la tensión evaluada mediante EF en el nodo j como perteneciente al elemento e .

A modo de ejemplo, en la siguiente figura se muestra el campo de tensiones obtenido al aplicar la técnica de promediado directo en nodos al campo de tensiones. Se muestra también en la figura un detalle de la evolución de las tensiones en el contorno inferior del componente donde se comparan las tensiones obtenidas mediante el MEF y las correspondientes tensiones alisadas.

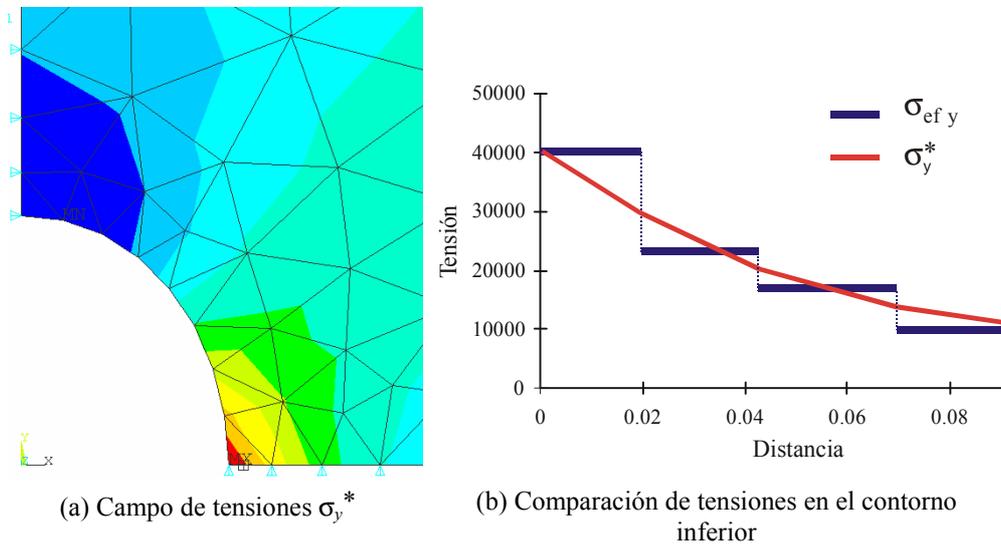


Figura 3.- Evolución de σ_y^* . Malla de elementos triangulares lineales.



La precisión de los resultados que se obtienen con esta técnica será superior en el interior del dominio ya que es ahí donde existe un mayor número de elementos rodeando a cada uno de los nodos, con lo que existe más información por nodo para evaluar la tensión alisada que en el contorno. Como casos extremos obsérvese en la Figura 3(b) que, en los nodos situados en los extremos del contorno inferior, la tensión alisada toma el mismo valor que la obtenida mediante el MEF. Esto es debido a que estos nodos están asociados a un único elemento (véase Figura 3(a)) por lo que en ellos el alisado mediante promediado directo en nodos no proporciona ningún tipo de mejora.

La utilización de este método con elementos lineales proporciona un estimador asintóticamente exacto (el valor de efectividad, θ , tiende a la unidad con el refinamiento de la malla), no ocurriendo lo mismo cuando se utiliza con elementos de mayor grado.

2.1.6 La técnica Superconvergent Patch Recovery (SPR).

La precisión del estimador de error de ZIENKIEWICZ-ZHU depende de la “calidad” del campo σ^* que se obtenga. Inicialmente estos autores recomendaron la utilización de la técnica de proyección global L_2 y la de promediado directo en nodos para la obtención del campo de tensiones reconstruido. Sin embargo, la utilización de estos métodos no resultaba adecuada en el caso de elementos cuadráticos puesto que la efectividad del estimador de error no tendía a la unidad, siendo pues necesaria la utilización de factores correctores empíricos.



Tal y como demuestran ZIENKIEWICZ Y ZHU [12] el estimador de error ZZ será asintóticamente exacto, si la solución reconstruida utilizada en la estimación del error presenta una velocidad de convergencia superior a la de la solución de E.F.

ZIENKIEWICZ Y ZHU [12] proponen un método denominado superconvergente de reconstrucción del campo de tensiones que tiene esta característica. Las tensiones reconstruidas en un determinado nodo se obtienen mediante la expansión polinómica definida en un conjunto de elementos contiguos denominado patch, formado por todos los elementos que contienen a dicho nodo. Para determinar los términos de dicha expansión polinómica, se utiliza la información de tensiones de elementos finitos en los llamados puntos de superconvergencia de tensiones, realizando un ajuste de mínimos cuadrados.

Por ser un proceso local el coste computacional es pequeño presentando los resultados obtenidos una considerable mejora frente a los obtenidos con técnicas anteriores.

A continuación se expone en detalle la técnica *Superconvergent Patch Recovery* desarrollada por ZIENKIEWICZ Y ZHU[12][16][17].

Como se comentó con anterioridad, el objetivo tanto de ésta como de las demás técnicas de alisado, es el de encontrar los valores de las tensiones reconstruidas en nodos $\underline{\sigma}_*$ de forma que el campo de tensiones alisadas $\underline{\sigma}^*$ pueda definirse como $\underline{\sigma}^* = \mathbf{N} \underline{\sigma}_*$, donde el campo $\underline{\sigma}^*$ será más preciso que el campo obtenido directamente mediante Elementos Finitos ($\underline{\sigma}_{ef}$).



ZIENKIEWICZ Y ZHU considerarán que, en cada nodo, cada una de las componentes de tensión $\underline{\sigma}^*$ se obtienen a partir de un polinomio σ_p^* de grado completo p , igual al de las funciones de forma N utilizadas en la interpolación de los desplazamientos, definido en un *patch* formado por los elementos que rodean al nodo considerado. Para cada una de las componentes de tensión ($\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$) este polinomio σ_p^* tiene la siguiente expresión

$$\sigma_p^* = \mathbf{p} \mathbf{a} \quad (17)$$

donde \mathbf{p} contiene los términos del polinomio. Por ejemplo, para el caso bi-dimensional lineal se tendrá que:

$$\mathbf{p} = \{1, x, y\} \quad (18)$$

y para el cuadrático:

$$\mathbf{p} = \{1, x, y, x^2, xy, y^2\} \quad (19)$$

Siendo \mathbf{a} el vector de parámetros desconocidos, por ejemplo, en el caso bi-dimensional cuadrático se tendrá:

$$\mathbf{a} = \{a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6\}^T \quad (20)$$

La figura siguiente muestra un ejemplo de *patch* formado por elementos lineales y otro formado por elementos cuadráticos:

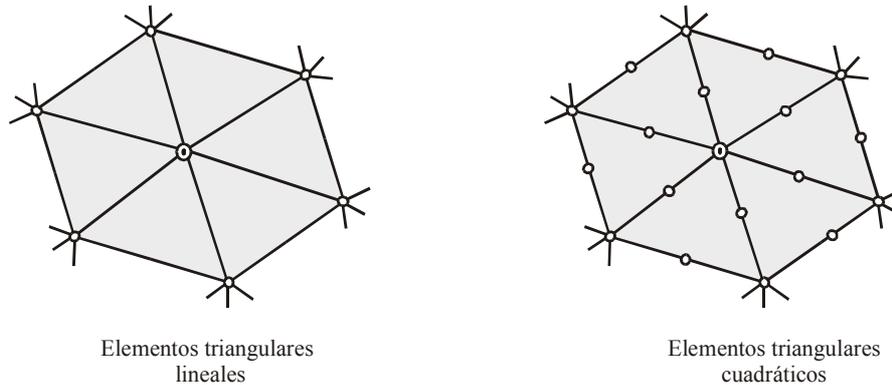


Figura 4.-Patches de elementos triangulares lineales y cuadráticos.
 ○ nodo de ensamblaje del patch. ● nodos que definen el patch

Como ya se comentó, para calcular los valores desconocidos \mathbf{a} se procede a aplicar la técnica de los mínimos cuadrados, utilizándose en el cálculo los puntos de superconvergencia, o al menos, los puntos en que las tensiones se puedan calcular con mayor precisión. Para hacer esto se procede a minimizar la siguiente ecuación:

$$R_G(\mathbf{a}) = \sum_{i=1}^G (\sigma_{ef}(\mathbf{x}_i) - \sigma_{*p}(\mathbf{x}_i))^2 = \sum_{i=1}^G (\sigma_{ef}(\mathbf{x}_i) - \mathbf{p}(\mathbf{x}_i)\mathbf{a})^2 \quad (21)$$

Donde

\mathbf{x}_i son las coordenadas (x_i, y_i) de cada uno de los puntos donde se han calculado tensiones, y

$G=mk$ es el número total de estos puntos, siendo k el número de estos en cada uno de los m elementos que forman el patch.



Donde,

$$\sum_{i=1}^G \mathbf{p}^T(x_i, y_i) \mathbf{p}(x_i, y_i) \mathbf{a} = \sum_{i=1}^G \mathbf{p}^T(x_i, y_i) \sigma_{ef}(x_i, y_i) \quad (22)$$

Esta ecuación habrá de ser planteada para cada una de las componentes de tensión.

Esta ecuación se puede resolver como:

$$\mathbf{a} = \mathbf{A}^{-1} \mathbf{b} \quad (23)$$

La condición de minimización de $R_G(\mathbf{a})$ supone que \mathbf{a} satisfaga esto.

Donde,

$$\mathbf{A} = \sum_{i=1}^n \mathbf{p}^T(x_i, y_i) \mathbf{p}(x_i, y_i) \quad \text{y} \quad \mathbf{b} = \sum_{i=1}^n \mathbf{p}^T(x_i, y_i) \sigma_{ef}(x_i, y_i) \quad (24)$$

Para el caso bi-dimensional cuadrático, desarrollando las expresiones anteriores, se obtiene:



$$\mathbf{A} = \sum_{i=1}^n \begin{bmatrix} 1 & x_i & y_i & x_i^2 & x_i y_i & y_i^2 \\ x_i & x_i^2 & x_i y_i & x_i^3 & x_i^2 y_i & x_i y_i^2 \\ y_i & x_i y_i & y_i^2 & x_i^2 y_i & x_i y_i^2 & y_i^3 \\ x_i^2 & x_i^3 & x_i^2 y_i & x_i^4 & x_i^3 y_i & x_i^2 y_i^2 \\ x_i y_i & x_i^2 y_i & x_i y_i^2 & x_i^3 y_i & x_i^2 y_i^2 & x_i y_i^3 \\ y_i^2 & x_i y_i^2 & y_i^3 & x_i^2 y_i^2 & x_i y_i^3 & y_i^4 \end{bmatrix}$$
$$\mathbf{b} = \sum_{i=1}^n [\sigma_{ef}(x_i, y_i), x_i \sigma_{ef}(x_i, y_i), y_i \sigma_{ef}(x_i, y_i), x_i^2 \sigma_{ef}(x_i, y_i), x_i y_i \sigma_{ef}(x_i, y_i), y_i^2 \sigma_{ef}(x_i, y_i)]^T \quad (25)$$

Como puede verse, el número de ecuaciones a resolver en cada patch es pequeño (en este caso, un sistema 6x6 por cada componente de tensión), además la matriz \mathbf{A} es la misma para todas las componentes de tensión del patch y ha de ser evaluada una sola vez. El hecho de que para cada uno de los *patches* el número de ecuaciones sea pequeño hace que el procedimiento sea computacionalmente poco costoso.

Una vez que los parámetros \mathbf{a} han sido calculados, el valor de la tensión en el nodo de interés $\underline{\sigma}^*$, es calculado sustituyendo las coordenadas de éste en la expresión del polinomio σ_p^* .

En principio los puntos elegidos para calcular las tensiones han de ser puntos de superconvergencia de las derivadas de los valores nodales. Dicha superconvergencia ocurre en los puntos de Gauss si se trata de elementos lineales y cuadráticos, en elementos uni-dimensionales y también para cuadriláteros. Sin embargo, la localización exacta de los puntos de superconvergencia en triángulos todavía no ha sido mostrada matemáticamente.

Los puntos de evaluación de tensiones utilizados por ZIENKIEWICZ Y ZHU en triángulos son:

- Triángulos lineales: Centroide del elemento.
- Triángulos cuadráticos: Puntos centrales de cada uno de los lados del triángulo.

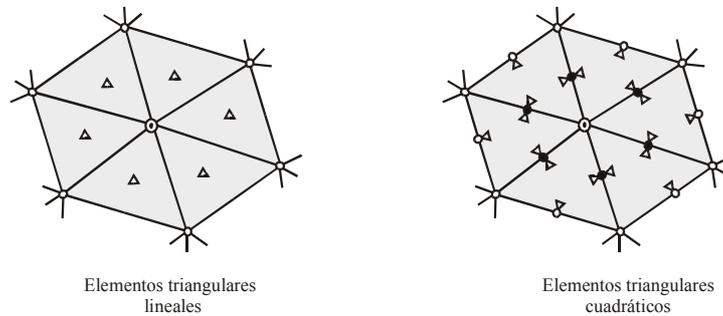


Figura 5.-Cálculo de valores nodales superconvergentes para elementos lineales y cuadráticos:

- △ Puntos de evaluación de tensiones, ● nodos que definen el patch,
- Nodos donde se evaluarán tensiones a partir del procedimiento de alisado,
- ⊙ nodo de ensamblaje del patch.

Los autores exponen que se ha observado convergencia $O(h^4)$ para cuadriláteros y triángulos de grado 2 (es decir, dos órdenes superior a la normal). Este tipo de convergencia es llamado *ultraconvergencia*.

2.1.6.1 Esquema resumen de la técnica SPR para alisado de tensiones

El procedimiento del alisado del campo de tensiones mediante la técnica SPR se ejecuta siguiendo los pasos que se detallan a continuación:



- Se parte de la solución discontinua de Elementos Finitos.
- Para cada nodo vértice se toma un patch de elementos, formado por todos los elementos que contienen a dicho nodo
- Se identifican los puntos de superconvergencia de los elementos del patch.
- Se seleccionan los valores de tensión calculada en puntos de superconvergencia.
- Se realiza un ajuste por mínimos cuadrados de una superficie polinómica, del mismo grado que la interpolación de desplazamientos, a los valores de tensión en puntos de Gauss
- Se particulariza la superficie polinómica en el nodo de ensamblado del patch.
- Se genera el campo de tensiones continuo en toda la malla a partir de los valores de tensión reconstruida calculados en cada uno de los nodos de la malla utilizando las funciones de interpolación y los de valores nodales:

$$\sigma_j^*(x, y) = \sum_i N_i(x, y) \cdot \sigma_i^*(x_{pi}, y_{pi}); \quad j = xx, yy, xy \quad (26)$$

Donde la función $\sigma_j^*(x, y)$ representaría las distintas componentes del campo de tensiones alisadas (σ^*) (los subíndices i representan las tensiones nodales que proporciona el ajuste por mínimos cuadrados).

Este procedimiento queda reflejado gráficamente en la siguiente figura, dónde se ha aplicado la técnica de alisado de tensiones mediante el método SPR a una malla de elementos triangulares lineales.

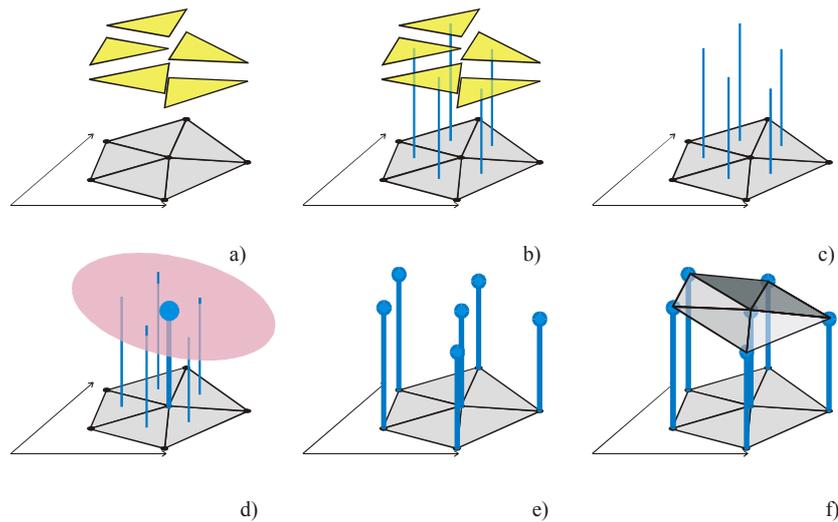


Figura 6.- Procedimiento de alisado mediante la Técnica SPR en mallas de elementos triangulares lineales. a) Solución discontinua de elementos finitos. b) Identificación de puntos de superconvergencia. c) Selección de valores de tensión en puntos de superconvergencia. d) Ajuste de una superficie polinómica a los valores de tensión en puntos de Gauss por mínimos cuadrados y particularización en nodo de ensamblado. e) Obtención de tensiones mediante técnica SPR para el resto de nodos. f) Generación del campo de tensiones continuo a partir de los valores nodales.

2.1.6.2 *Detalles de implementación de la técnica SPR.*

A continuación se resumen algunos detalles importantes relacionados con la implementación de esta técnica.



Nodos de medio lado

Utilizando el procedimiento anterior para el cálculo de σ_p , se observa fácilmente que a la hora de formar los *patches*, unos de ellos se solaparán con otros, con lo que los valores de los nodos de medio lado que aparecen en elementos de grado 2 ó superior, serán calculados desde 2 *patches* distintos. Puesto que ambos valores son superconvergentes, ZIENKIEWICZ Y ZHU proponen el promediado de dichos valores.

Nodos en la frontera

Para evaluar las tensiones σ^* en nodos situados en la frontera del componente se pueden plantear 2 tipos de *patches* distintos:

- **Patch de nodo frontera.** El *patch* se forma con los elementos que rodean al nodo frontera. Las tensiones σ^* se evalúan de igual manera que en nodos interiores. La implementación de esta alternativa resulta sencilla ya que el tratamiento de nodos frontera es exactamente el mismo que el de nodos interiores. Hay que tener en cuenta que los *patches* frontera están formados por un número reducido de elementos, de forma que se podría dar la situación de que no existiese un número suficiente de puntos de superconvergencia en el *patch* para resolver el sistema de ecuaciones.

- **Patch interior.** Las tensiones en los nodos frontera se evalúan a partir de *patches* de nodos interiores que contengan al nodo frontera. Puesto que el tratamiento de nodos frontera es distinto al de los nodos situados en el interior del dominio, la implementación es menos sencilla que en el caso anterior. Sin

embargo, puesto que los patches de nodos interiores están formados por gran número de elementos, el sistema de ecuaciones planteado será, por lo general, resoluble.

La figura siguiente muestra un patch frontera y un patch interior que pueden ser utilizados en la evaluación de las tensiones σ en nodos del contorno.

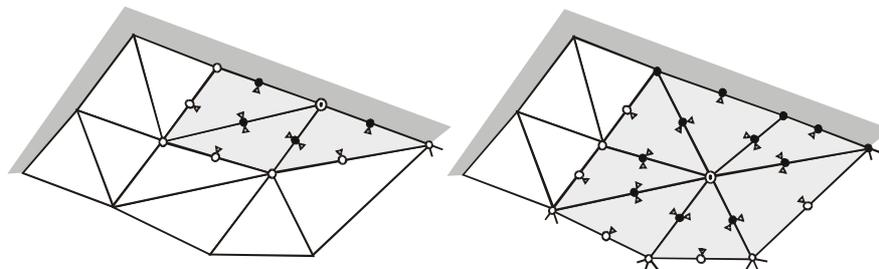


Figura 7.- Patches utilizados en la evaluación de tensiones en nodos de contorno
Izquierda patch frontera. Derecha patch interior.

Según ZIENKIEWICZ Y ZHU los resultados obtenidos utilizando patches de nodos frontera o patches de nodos interiores para evaluar la tensión σ en los nodos del contorno son de la misma precisión, recomendando la utilización de patches interiores a fin de evitar problemas asociados a un número insuficiente de puntos de muestreo superconvergentes en el patch.

Sin embargo la recomendación de estos autores no siempre puede ser utilizada. Supóngase un nodo situado en una esquina y conectado solamente a 1 ó 2 elementos, tal y como se muestra en la figura siguiente.

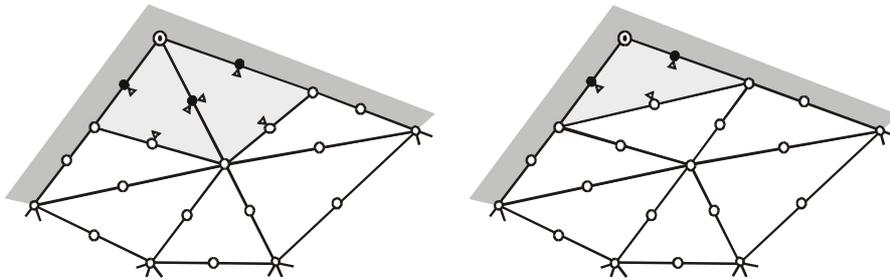


Figura 8.- Patches frontera de 2 y 1 elementos: ● nodo de ensamblaje del patch

La malla del ejemplo que ZIENKIEWICZ Y ZHU utilizan para ilustrar su planteamiento está formada por cuadriláteros. Sin embargo cuando se utilizan elementos triangulares la solución propuesta por estos autores no puede ser utilizada, ya que, por ejemplo, en la figura anterior, en el caso del patch formado por un solo elemento, no existe ningún patch interno a partir del cual poder calcular el valor en el nodo que nos interesa. Por esta razón, en principio, solamente sería posible calcular el valor de la tensión en el nodo esquina a partir de un patch situado en el contorno de la pieza, como por ejemplo el mostrado en la figura siguiente:

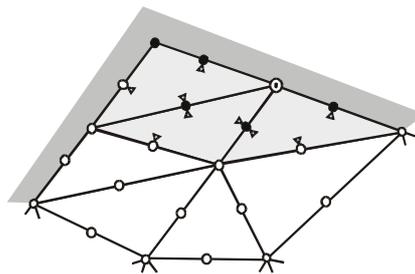


Figura 9.- Cálculo del valor nodal de un nodo esquina a partir de un patch frontera cuando en la esquina solo hay un elemento.

En el caso en que el nodo confluyan 2 elementos, el valor de la tensión en este sí que podría calcularse a partir de un patch interior:

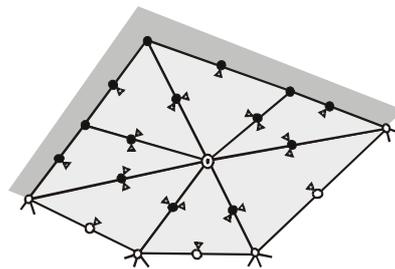


Figura 10.- Cálculo de un nodo en la frontera a partir de un patch interior

ZIENKIEWICZ Y ZHU exponen que los valores de tensiones reconstruidas obtenidos para los nodos frontera serán superconvergentes, aunque no se obtendrá ultraconvergencia, $O(h^4)$, para elementos cuadráticos.

Cuando se plantea la utilización de la técnica SPR sobre mallas con elementos triangulares cuadráticos se debe tener en cuenta que hay que utilizar los llamados puntos óptimos como puntos de muestreo de tensiones. En triángulos lineales existe uno solo de estos puntos y 3 en el caso de cuadráticos tal y como se ha mostrado en la representación de las figuras anteriores.

Por lo tanto para que se pueda resolver el sistema de ecuaciones planteado en el patch, se necesitará un mínimo de 3 elementos cuando se utilizan elementos lineales y de 2 cuando se utilizan elementos cuadráticos.



Tan solo es posible tener menos de 3 elementos en el patch si este es planteado en el contorno. En las figuras anteriores se podían observar situaciones en las que aparecen 1 ó 2 elementos a la hora de formar un patch en el contorno y también situaciones en las que es imposible utilizar patches interiores a la hora de evaluar tensiones en nodos sobre el contorno.

Situaciones como las descritas se pueden encontrar con gran frecuencia durante los procesos adaptativos de refinado de mallas, siendo todavía más frecuente en las mallas iniciales de dichos procesos

A fin de que el método sea suficientemente robusto, resulta de gran interés la utilización de patches de contorno, aunque con frecuencia se encontrarían patches formados por 1 ó 2 elementos que, tal y como se explico anteriormente, no podrían ser resueltos utilizando los puntos de muestreo de tensiones propuestos por ZIENKIEWICZ Y ZHU. LABBE Y GARON [15] plantean el uso de los puntos de integración de Gauss como puntos de muestreo de tensiones. Dentro de cada elemento proponen la utilización de al menos tantos puntos de Gauss como términos tenga el polinomio con que se desean evaluar tensiones, asegurando así que el sistema planteado sea siempre resoluble.

Problemas de mal condicionamiento

La técnica originalmente propuesta por ZIENKIEWICZ Y ZHU [16] [17] puede presentar problemas de *mal condicionamiento* si en la resolución del sistema de ecuaciones planteado se utilizan coordenadas globales, especialmente si se utilizan elementos de alto grado polinómico y/o tamaños de elemento muy pequeños. Por este hecho, ZIENKIEWICZ [16] expresó la importancia de usar



coordenadas locales normalizadas con el fin de evitar los problemas de *mal condicionamiento* en las matrices utilizadas. Se recomienda la utilización de coordenadas normalizadas (\underline{x} , \underline{y}) según las expresiones:

$$\underline{x} = -1 + 2 \frac{x - x_{\min}}{x_{\max} - x_{\min}} \quad \underline{y} = -1 + 2 \frac{y - y_{\min}}{y_{\max} - y_{\min}} \quad (27)$$

Donde x_{\min} , x_{\max} y y_{\min} , y_{\max} representan los valores mínimo y máximo de las coordenada x e y en el patch. De esta forma los valores normalizados de las variables x e y tomarán valores entre -1 y 1.

LABBÉ Y GARON [15] plantean utilizar la técnica de descomposición LU con pivotamiento parcial para resolver el sistema de ecuaciones planteado y minimizar de esta forma el problema de mal condicionamiento de las matrices.

2.1.6.3 Características de la técnica SPR.

Las características más sobresalientes de la técnica SPR se resumen a continuación.

Coste computacional:

- Se trata de un método local de reconstrucción del campo de tensiones, con lo que el coste computacional es reducido si se compara con el asociado a los métodos globales.



Ultraconvergencia:

- La convergencia en tensiones de Elementos Finitos es siempre $O(h^p)$ mientras que la de las tensiones obtenidas mediante SPR es $O(h^{p+1})$ para valores impares de p y $O(h^{p+2})$ para valores pares, llamada *ultraconvergencia* por ZIENKIEWICZ Y ZHU. Mediante las técnicas de reconstrucción anteriormente existentes, y utilizando mallados uniformes, se obtenía superconvergencia para valores de p impares pero no para pares

- Los autores de la técnica advierten que dicha *ultraconvergencia* solamente se obtiene cuando se utiliza un mallado uniforme.

- La *ultraconvergencia* no se obtiene en la frontera, en ésta solamente se obtiene superconvergencia $O(h^{p+1})$. Debido a esta razón la norma energética total resulta superconvergente.

Precisión de la solución reconstruida.

- En los trabajos de ZIENKIEWICZ Y ZHU [16] se exponen ejemplos en los que se muestra el reducido valor del error de la solución reconstruida mediante la técnica SPR.

- Si bien el objetivo de esta técnica era el de realizar la estimación de error de la solución de Elementos Finitos, sirve también para obtener unos mejores resultados que los obtenidos directamente mediante Elementos Finitos. Por supuesto, la estimación de error sigue siendo la del error de los resultados



originales de Elementos Finitos, aunque la solución reconstruida es de precisión superior.

Refinamiento adaptativo e índice de efectividad.

- Los autores que desarrollaron la técnica muestran mediante la utilización de ejemplos, que el uso de este procedimiento en el refinamiento adaptativo de problemas en los que existen grandes gradientes de tensiones proporciona una gran efectividad a nivel de elemento en la estimación del error.

- El uso de la técnica SPR en el estimador de error ZZ hace que éste tienda asintóticamente a la unidad conforme se refina la malla. La justificación de este comportamiento del estimador de error está justificada por el teorema desarrollado por ZIENKIEWICZ Y ZHU[14][16], según el cual, si la técnica de alisado es superconvergente, el índice de efectividad del estimador de error tenderá asintóticamente a la unidad.



3 Estimador ZZ basado en desplazamientos

En el Departamento de Ingeniería Mecánica (DIMM), se han desarrollado ampliamente métodos de reconstrucción de la solución del campo de tensiones de la solución que proporciona el método de los elementos finitos, basados en la técnica S.P.R.

El objetivo de este Trabajo Fin de Máster es sin embargo el de desarrollar un estimador de error que, a diferencia de lo expuesto anteriormente, esté basado en la reconstrucción de la solución del campo de desplazamientos.

La reconstrucción del campo de desplazamientos tiene varias aplicaciones, pudiendo ser utilizada fundamentalmente para:

- El cálculo de la estimación del *error en norma energética*.
- La obtención de la *solución mejorada en desplazamientos* que podrá posteriormente ser derivada para obtener una solución mejorada en tensiones.
- El cálculo de las *cotas del error*. El DIMM ha participado en el desarrollo de una técnica que permite obtener cotas superiores del error de discretización basada en el alisado de tensiones, pero que requiere una estimación del error en desplazamientos. Disponer de una técnica de reconstrucción del campo de desplazamientos permitiría eludir el alisado del campo de tensiones y calcular directamente la cota a partir de la solución alisada de los desplazamientos.
- Además, el campo de desplazamientos mejorado puede ser proyectado sobre mallas más refinadas, utilizándose como solución inicial para resolver mediante *métodos iterativos* el sistema de ecuaciones en estas mallas.



3.1 Desarrollo del nuevo estimador de error.

Anteriormente se expuso el estimador de error basado en la solución reconstruida del campo de tensiones. Se muestra a continuación las expresiones desarrolladas para estimar el error de discretización, basado en el campo reconstruido de desplazamientos \mathbf{u}^* .

Para que el estimador de error basado en \mathbf{u}^* sea asintóticamente exacto, el campo \mathbf{u}^* deberá ser de mayor grado que el campo \mathbf{u}_{ef} . Definiremos por tanto este campo como:

$$\mathbf{u}^* = \mathbf{N}^*(x, y) \cdot \underline{\mathbf{u}}^* \quad (28)$$

Si definimos \mathbf{N} como las funciones de forma de grado p correspondientes a la interpolación de desplazamientos en los elementos utilizados, en la expresión anterior \mathbf{N}^* representará las funciones de forma del mismo elemento (triangular o cuadrilátero) de grado $p+1$, mientras que $\underline{\mathbf{u}}^*$ representa el vector de desplazamientos reconstruidos en los nodos de dicho elemento de grado $p+1$. En la evaluación de \mathbf{u}^* se utilizará la técnica SPR para alisado de tensiones, adaptada a la reconstrucción del campo de desplazamientos. Esta técnica será expuesta en la sección siguiente.

La norma energética de las soluciones exactas y de elementos finitos se definen como:



$$\begin{aligned}\|\mathbf{u}_{ex}\| &= \sqrt{\int \boldsymbol{\sigma}_{ex}^T \boldsymbol{\varepsilon}_{ex} dV} = \sqrt{\int \boldsymbol{\sigma}_{ex}^T \mathbf{D}^{-1} \boldsymbol{\sigma}_{ex} dV} = \sqrt{2\Pi_{ex}} \\ \|\mathbf{u}_{ef}\| &= \sqrt{\int \boldsymbol{\sigma}_{ef}^T \boldsymbol{\varepsilon}_{ef} dV} = \sqrt{\int \boldsymbol{\sigma}_{ef}^T \mathbf{D}^{-1} \boldsymbol{\sigma}_{ef} dV} = \sqrt{2\Pi_{ef}}\end{aligned}\quad (29)$$

La norma energética correspondiente a la solución en desplazamientos mejorada se calculará como:

$$\|\mathbf{u}^*\| = \sqrt{\int \boldsymbol{\sigma}^{*T} \boldsymbol{\varepsilon}^* dV} = \sqrt{\int \boldsymbol{\sigma}^{*T} \mathbf{D}^{-1} \boldsymbol{\sigma}^* dV} = \sqrt{2\Pi^*}\quad (30)$$

Tengamos en cuenta las siguientes relaciones:

$$\mathbf{u}_{ef} = \mathbf{N}(x, y) \cdot \underline{\mathbf{u}}_{ef}\quad (31)$$

$$\boldsymbol{\sigma}_{ef} = \mathbf{D} \cdot \mathbf{B} \cdot \underline{\mathbf{u}}_{ef}\quad (32)$$

$$\boldsymbol{\sigma}^* = \mathbf{D} \cdot \mathbf{B}^* \cdot \underline{\mathbf{u}}^*\quad (33)$$

Donde $\mathbf{B}^* = \mathbf{L}\mathbf{N}^*$.

Utilizando estas relaciones y llevando a cabo la integración numérica de la matriz de rigidez, se obtiene la siguiente secuencia de relaciones.



$$\|\mathbf{u}^*\| = \sqrt{\int \boldsymbol{\sigma}^{*T} \boldsymbol{\varepsilon}^* dV} = \sqrt{\int \boldsymbol{\sigma}^{*T} \mathbf{D}^{-1} \boldsymbol{\sigma}^* dV} = \sqrt{2\Pi^*} \quad (34)$$

$$\|\mathbf{u}^*\|^2 = \int \boldsymbol{\sigma}^{*T} \cdot \mathbf{D}^{-1} \cdot \boldsymbol{\sigma}^* dV = \int \underline{\mathbf{u}}^{*T} \cdot \mathbf{B}^{*T} \cdot \mathbf{D}^T \cdot \mathbf{D}^{-1} \cdot \mathbf{D} \cdot \mathbf{B}^* \cdot \underline{\mathbf{u}}^* \cdot dV \approx \underline{\mathbf{u}}^{*T} \cdot \mathbf{k}^* \cdot \underline{\mathbf{u}}^* = 2 \cdot \Pi^* \quad (35)$$

Donde \mathbf{k}^* es la matriz de rigidez del elemento de grado $p+1$.

Finalmente se obtiene también la expresión correspondiente al cálculo de la energía de deformación mejorada en cada elemento a partir de los desplazamientos y la matriz de rigidez

$$\Pi_e^* = \frac{1}{2} \underline{\mathbf{u}}^{*T} \cdot \mathbf{k}^* \cdot \underline{\mathbf{u}}^* \quad (36)$$

Para cuantificar el error de discretización de la solución de elementos finitos se considera habitualmente la norma energética del error:

$$\|\mathbf{e}_{ex}\| = \|\mathbf{u}_{ex} - \mathbf{u}_{ef}\| = \sqrt{\int (\boldsymbol{\sigma}_{ex} - \boldsymbol{\sigma}_{ef})^T \mathbf{D}^{-1} (\boldsymbol{\sigma}_{ex} - \boldsymbol{\sigma}_{ef}) dV} \quad (37)$$

Que es la raíz del doble de la energía de deformación del error. Como se vio anteriormente esta magnitud está relacionada con la norma energética de la solución exacta y la de elementos finitos mediante:



$$\|\mathbf{e}_{ex}\| \approx \sqrt{\|\mathbf{u}_{ex}\|^2 - \|\mathbf{u}_{ef}\|^2} \quad (38)$$

La expresión anterior se convierte en igualdad en el rango asintótico de la solución. Evidentemente, la evaluación del error exacto únicamente se podrá llevar a cabo en el análisis de problemas en los que se disponga de solución exacta. Para evaluar una estimación del error exacto se utilizará por tanto la diferencia entre la solución del campo de desplazamientos mejorado y la solución en desplazamientos obtenida mediante el método de los elementos finitos. Este error se conoce como error estimado (\mathbf{e}_{es}).

$$\|\mathbf{e}_{es}\| \approx \sqrt{\|\mathbf{u}^*\|^2 - \|\mathbf{u}_{ef}\|^2} \quad (39)$$

Siguiendo la relación anterior se puede llegar a una estimación del error a partir de la solución en desplazamientos mejorada y la obtenida mediante el método de los elementos finitos. Se llevará a cabo una integración numérica de Gauss intermedia, de ahí que la segunda igualdad no sea una igualdad estricta, sino una aproximación mediante este tipo de integración, asumiendo pues el error adicional que ésta introduce:

$$\|\mathbf{e}_{es}\|^2 \approx \|\mathbf{u}^*\|^2 - \|\mathbf{u}_{ef}\|^2 \approx \underline{\mathbf{u}}^{*T} \cdot \mathbf{k}^* \cdot \underline{\mathbf{u}}^* - \underline{\mathbf{u}}_{ef}^T \cdot \mathbf{k} \cdot \underline{\mathbf{u}}_{ef} \quad (40)$$

Esta expresión permite la evaluación del error de discretización tanto a nivel global, considerando como dominio de integración el volumen total del componente analizado, como a nivel local (nivel de elemento), considerando como dominio de integración el de cada uno de los elementos.



La relación entre el error global exacto (y de manera similar el error estimado) y los errores a nivel local viene dada por la siguiente relación:

$$\|\mathbf{e}_{ex}^{global}\|^2 = \sum_{e=1}^{Ne} \|\mathbf{e}_{ex}^e\|^2 \quad (41)$$

Recordemos que la evaluación del estimador de error mediante la técnica propuesta requiere el alisado del campo de desplazamientos. Para ello se utilizará la técnica SPR para alisado de tensiones adaptada al alisado de desplazamientos que será expuesta en el apartado siguiente.

Para comprobar numéricamente el comportamiento del estimador de error propuesto en la ecuación (41) se utilizarán las expresiones que a continuación se exponen.

$$\|\mathbf{e}_{ex}\|^2 \approx (\underline{\mathbf{u}}_{ex} - \underline{\mathbf{u}}_{ef})^T \cdot \mathbf{k} \cdot (\underline{\mathbf{u}}_{ex} - \underline{\mathbf{u}}_{ef}) \quad (42)$$

$$\|\mathbf{e}_{es}\|^2 \approx (\underline{\mathbf{u}}^* - \underline{\mathbf{u}}_{ef}^*)^T \cdot \mathbf{k}^* \cdot (\underline{\mathbf{u}}^* - \underline{\mathbf{u}}_{ef}^*) \quad (43)$$

$$\|\mathbf{e}_{ex_H}\|^2 \approx (\underline{\mathbf{u}}_{ex^*} - \underline{\mathbf{u}}^*)^T \cdot \mathbf{k}^* \cdot (\underline{\mathbf{u}}_{ex^*} - \underline{\mathbf{u}}^*) \quad (44)$$

Donde \mathbf{e}_{ex} es el error exacto obtenido a través de la solución exacta en desplazamientos y la solución en elementos finitos. El error definido por \mathbf{e}_{es} , error estimado, resulta del producto que aparece en la ecuación (43), utilizando la diferencia entre los desplazamientos mejorados $\underline{\mathbf{u}}^*$ en nodos obtenidos con la técnica propuesta y los obtenidos mediante Elementos Finitos proyectados sobre los nodos del elemento de grado $p+1$ $\underline{\mathbf{u}}_{ef}^*$. Por último, para el cálculo del error \mathbf{e}_{ex_H} , error exacto de la solución mejorada, se utiliza la diferencia entre los



desplazamientos exactos en los nodos del elemento de grado $p+1$ \underline{u}_{ex^*} y los desplazamientos mejorados obtenidos mediante la técnica propuesta.

Precisión de la solución alisada

Como adelanto de los resultados que se mostrarán en la sección dedicada a los análisis numéricos, a continuación se muestra un ejemplo de la evolución de cada uno de los errores comentados anteriormente a medida que aumenta el número de grados de libertad que nos servirá para exponer la relación entre todos estos errores.

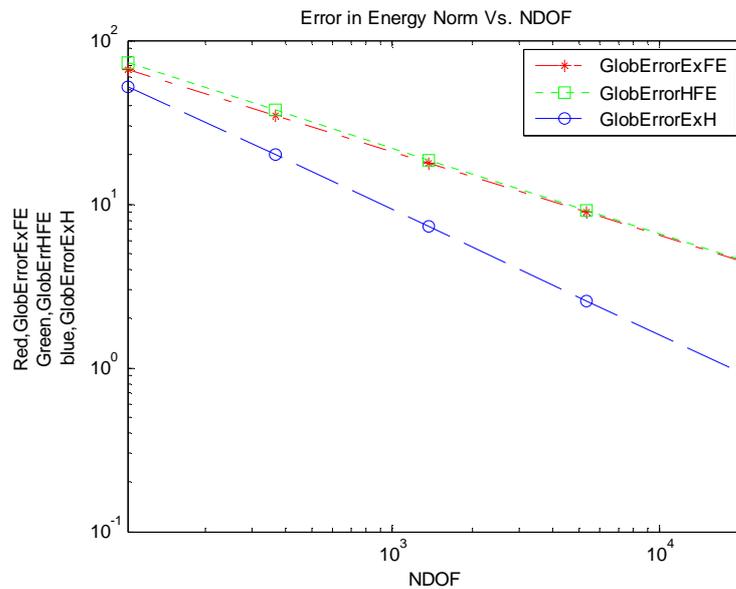


Figura 11.- Representación de la tendencia del error a medida que se refina la malla.



La técnica de estimación propuesta produce mejores resultados en la estimación del error en norma energética que la solución obtenida mediante la solución de Elementos Finitos. Como se comprobará a través de los análisis numéricos se cumple que

$$\|\mathbf{e}_{ex}\| \approx \|\mathbf{e}_{es}\| \geq \|\mathbf{e}_{ex_H}\| \quad (45)$$

Índice de efectividad.

El uso de la técnica SPR en desplazamientos propuesta para estimar el error en norma energética hace que el índice de efectividad del estimador del error tienda asintóticamente a la unidad conforme se refina la malla. A continuación se muestra un ejemplo de la evolución de la efectividad global del error en norma energética propuesto.

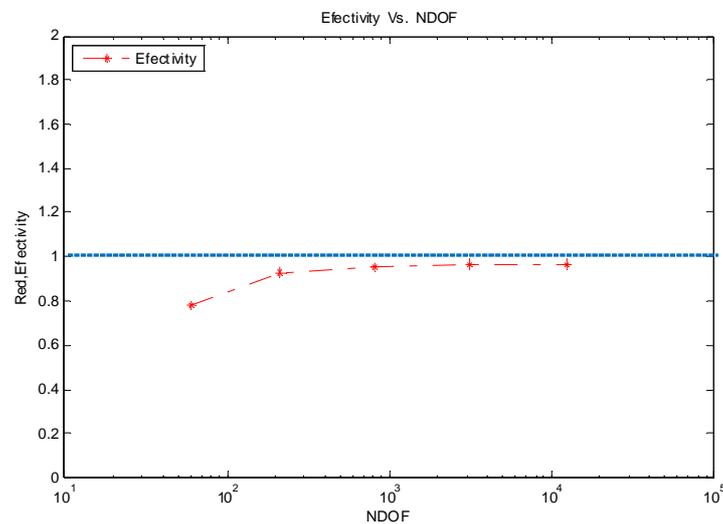


Figura 12.- Tendencia de la efectividad global a medida que aumenta el número de g.d.l. utilizando la técnica SPR en desplazamientos propuesta, para cuadriláteros lineales.



3.2 Técnica SPR para alisado de desplazamientos

3.2.1 Esquema general

En este apartado se expone el esquema de la adaptación a la reconstrucción del campo de desplazamientos de la técnica Superconvergent Patch Recovery, inicialmente desarrollada para la reconstrucción del campo de tensiones.

La diferencia fundamental entre ambas técnicas de alisado, radica en que los puntos considerados de mayor precisión, difieren entre ambas magnitudes:

- Puntos de superconvergencia en desplazamientos: nodos.
- Puntos de superconvergencia en tensiones: puntos de Gauss.

Los pasos fundamentales para el cálculo de este campo de desplazamientos mejorado, son los siguientes:

- Se parte de la solución de desplazamientos de Elementos Finitos.
- Para cada nodo de ensamblado (solamente nodos vértice) se define un patch formado por los elementos que contienen a dicho nodo vértice.
- Se seleccionan los valores de desplazamiento en los puntos de superconvergencia propios de esta magnitud (nodos) en el patch.
- Se realiza un ajuste polinómico por mínimos cuadrados mediante polinomios interpoladores de grado superior (grado de los elementos +1), en puntos de superconvergencia (nodos), para obtener el campo de desplazamientos en el de patch.



- Dado que en cada elemento se calcula el desplazamiento desde distintos patches, se obtiene en cada uno de ellos un campo de desplazamientos \mathbf{u}_i^* distinto. El campo de desplazamientos final (\mathbf{u}^*) dentro de cada elemento se evalúa a partir de la contribución del campo de desplazamientos de cada patch ponderado, utilizando el concepto de 'Partición de la Unidad', con el valor de las funciones de forma de nodos vértice, que son los únicos nodos utilizados como nodos de ensamblaje del patch.
- Se genera así el campo de desplazamientos continuo a partir del valor en cualquier punto (x, y) , y no sólo del valor en nodos como pasaba en la solución en tensiones.

Así pues, el campo de desplazamientos se calcula analíticamente de acuerdo con la siguiente fórmula:

$$\mathbf{u}^*(x, y) = \sum_i N_i^v(x, y) \cdot \mathbf{u}_i^*(x, y) \quad (46)$$

Donde la función $\mathbf{u}^*(x, y)$ representa el campo de desplazamientos mejorado (\mathbf{u}^*).

A continuación se expone de manera gráfica, para el caso 1D, lo expuesto con anterioridad.

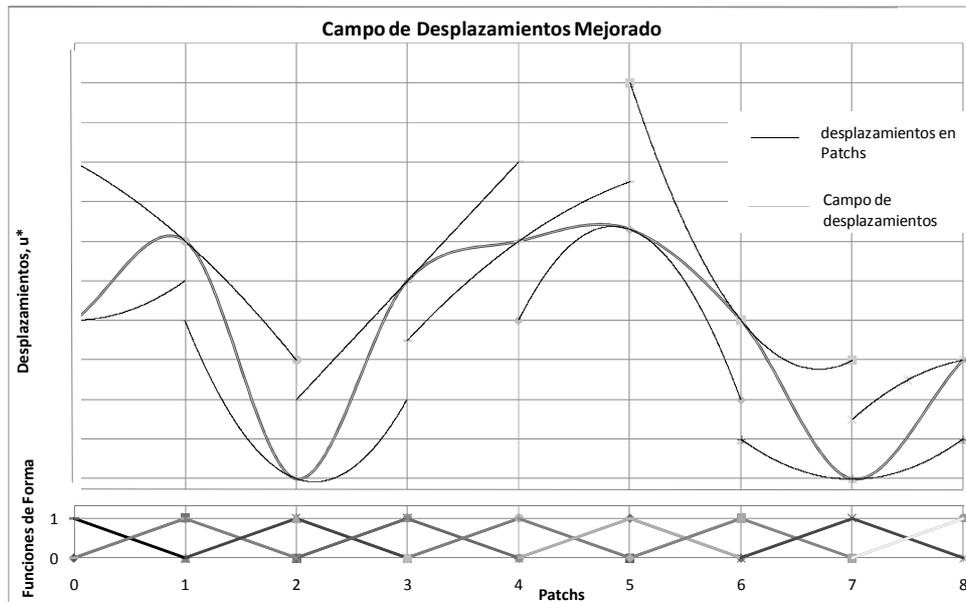


Figura 13.- Representación del campo de desplazamientos mejorado para elementos unidimensionales lineales.

Se puede observar que el campo de desplazamientos reconstruido asociado a cada patch (formado por los elementos anterior y posterior al nodo de ensamblado) no formaría un campo de desplazamientos continuo. La utilización de la ecuación (46) hace que en cada punto se tenga en cuenta el valor de desplazamiento evaluado desde los distintos patches. Por ejemplo, para un determinado punto (x) situado entre el nodo 1 y 2 de la figura anterior, basada en la construcción del campo de desplazamientos para elementos unidimensionales lineales, el valor del campo de desplazamientos mejorado será:



$$u^*(x) = N_1(x) \cdot u_1(x) + N_2(x) \cdot u_2(x) \quad (47)$$

3.2.2 La técnica SPR en desplazamientos.

En el método SPR en desplazamientos propuesto, se formará un patch con los elementos que rodean a cada nodo vértice i . El vector de desplazamientos, \mathbf{u}_i^* , en el patch del nodo i se obtiene a partir de un polinomio de grado completo $p+1$ (un grado superior al de las funciones de forma N utilizadas en la interpolación de los desplazamientos de elementos finitos). Para cada una de las componentes de desplazamiento ($u = (u_x, u_y)$) este polinomio tiene la siguiente expresión

$$\mathbf{u}_i^*(x, y) = \mathbf{p}(x, y) \mathbf{a} \quad (48)$$

donde \mathbf{p} contiene los términos del polinomio. Por ejemplo, para el caso bi-dimensional con elementos lineales, \mathbf{p} contendrá términos hasta grado 2:

$$\mathbf{p} = \{1, x, y, x^2, xy, y^2\} \quad (49)$$

y para el de elementos cuadráticos:

$$\mathbf{p} = \{1, x, y, x^2, xy, y^2, x^3, x^2y, xy^2, y^3\} \quad (50)$$

Siendo \mathbf{a} el vector de parámetros desconocidos (uno distinto para cada componente del vector de desplazamientos). Por ejemplo, en el caso bi-dimensional en el que se utilicen elementos cuadráticos se tendrá:



$$\mathbf{a} = \{a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, a_7, a_8, a_9, a_{10}\}^T \quad (51)$$

Como ya se comentó, para calcular los valores desconocidos \mathbf{a} de cada componente del vector de desplazamientos se procede a aplicar la técnica de los mínimos cuadrados, utilizándose en el cálculo los puntos de superconvergencia, o al menos, los puntos en que los desplazamientos se puedan calcular con mayor precisión. Para hacer esto se procede a minimizar la siguiente ecuación:

$$R_G(\mathbf{a}) = \sum_{i=1}^G (\mathbf{u}_{ef}(\mathbf{x}_i) - \mathbf{u}^*(\mathbf{x}_i))^2 = \sum_{i=1}^G (\mathbf{u}_{ef}(\mathbf{x}_i) - \mathbf{p}(\mathbf{x}_i)\mathbf{a})^2 \quad (52)$$

Donde

\mathbf{x}_i son las coordenadas (x_i, y_i) de cada uno de los puntos donde se han calculado desplazamientos,

G es el número total de estos puntos de muestreo de desplazamientos en el patch.

La condición de minimización de $R_G(\mathbf{a})$ supone que \mathbf{a} satisfaga

$$\sum_{i=1}^G \mathbf{p}^T(x_i, y_i) \mathbf{p}(x_i, y_i) \mathbf{a} = \sum_{i=1}^G \mathbf{p}^T(x_i, y_i) \cdot \mathbf{u}_{ef}(x_i, y_i) \quad (53)$$

ecuación que habrá de ser planteada para cada una de las componentes de desplazamiento. Esta ecuación se puede resolver como:

$$\mathbf{a} = \mathbf{A}^{-1} \mathbf{b} \quad (54)$$

Donde,



$$\mathbf{A} = \sum_{i=1}^G \mathbf{p}^T(x_i, y_i) \mathbf{p}(x_i, y_i) \quad y \quad \mathbf{b} = \sum_{i=1}^G \mathbf{p}^T(x_i, y_i) \mathbf{u}_{ef}(x_i, y_i) \quad (55)$$

Para el caso bi-dimensional con elementos cuadráticos, que implica la utilización de funciones cúbicas, desarrollando las expresiones anteriores, se obtiene:

$$\mathbf{A} = \sum_{i=1}^G \begin{bmatrix} 1 & x_i & y_i & x_i^2 & x_i y_i & y_i^2 & x_i^3 & x_i^2 y_i & x_i y_i^2 & y_i^3 \\ x_i & x_i^2 & x_i y_i & x_i^3 & x_i^2 y_i & x_i y_i^2 & x_i^4 & x_i^3 y_i & x_i^2 y_i^2 & x_i y_i^3 \\ y_i & y_i x_i & y_i^2 & y_i x_i^2 & x_i y_i^2 & y_i^3 & y_i x_i^3 & x_i^2 y_i^2 & x_i y_i^3 & y_i^4 \\ x_i^2 & x_i^4 & x_i^2 y_i & x_i^4 & x_i^3 y_i & x_i^2 y_i^2 & x_i^5 & x_i^4 y_i & x_i^3 y_i^2 & x_i^2 y_i^3 \\ x_i y_i & x_i^2 y_i & x_i y_i^2 & x_i^3 y_i & x_i^2 y_i^2 & x_i y_i^3 & x_i^4 y_i & x_i^3 y_i^2 & x_i^2 y_i^3 & x_i y_i^4 \\ y_i^2 & y_i^2 x_i & y_i^3 & y_i^2 x_i^2 & x_i y_i^2 & y_i^4 & y_i^2 x_i^3 & x_i^2 y_i^3 & x_i y_i^4 & y_i^5 \\ x_i^3 & x_i^4 & x_i^3 y_i & x_i^5 & x_i^4 y_i & x_i^3 y_i^2 & x_i^6 & x_i^5 y_i & x_i^4 y_i^2 & x_i^3 y_i^3 \\ x_i^2 y_i & x_i^3 y_i & x_i^2 y_i^2 & x_i^4 y_i & x_i^3 y_i^2 & x_i^2 y_i^3 & x_i^5 y_i & x_i^4 y_i^2 & x_i^3 y_i^3 & x_i^2 y_i^4 \\ x_i y_i^2 & x_i^2 y_i^2 & x_i y_i^3 & x_i^3 y_i^2 & x_i^2 y_i^3 & x_i y_i^4 & x_i^4 y_i^2 & x_i^3 y_i^3 & x_i^2 y_i^4 & x_i y_i^5 \\ y_i^3 & x_i y_i^3 & y_i^4 & x_i^2 y_i^3 & x_i y_i^4 & y_i^5 & x_i^3 y_i^3 & x_i^2 y_i^4 & x_i y_i^5 & y_i^6 \end{bmatrix} \quad (56)$$

$$\mathbf{b} = \sum_{i=1}^G \begin{bmatrix} u_h(x_i, y_i), \dots \\ x_i u_h(x_i, y_i), y_i u_h(x_i, y_i), \dots \\ x_i^2 u_h(x_i, y_i), x_i y_i u_h(x_i, y_i), y_i^2 u_h(x_i, y_i), \dots \\ x_i^3 u_h(x_i, y_i), x_i^2 y_i u_h(x_i, y_i), x_i y_i^2 u_h(x_i, y_i), y_i^3 u_h(x_i, y_i) \end{bmatrix}^T \quad (57)$$

Como puede verse, el número de ecuaciones a resolver en cada patch es pequeño (en este caso, un sistema 10x10 por cada componente de desplazamiento), además la matriz \mathbf{A} es la misma para todas las componentes de desplazamiento del patch y ha de ser evaluada una sola vez. El hecho de que para cada uno de los *patches* el número de ecuaciones sea pequeño hace que el procedimiento sea computacionalmente poco costoso.



Una vez que los parámetros \mathbf{a} han sido calculados para cada componente de desplazamientos, el valor de los desplazamientos \mathbf{u}_i^* en cada punto del patch del nodo i , es calculado sustituyendo las coordenadas de éste en la expresión dada por la ecuación (48).

Utilizando el procedimiento anterior para el cálculo de \mathbf{u}_i^* se observa fácilmente que a la hora de formar los *patches*, unos de ellos se solaparán con otros, con lo que los valores de desplazamientos en cada punto resultan evaluados desde múltiples patches (tantos como nodos vértice tenga cada elemento). Como se comentó anteriormente, al llevar a cabo la reconstrucción del campo de desplazamientos mejorado, en cada punto, el desplazamiento reconstruido $\mathbf{u}^*(x, y)$ se calculará teniendo en cuenta la contribución de cada uno de los patches, ponderada mediante el valor de la versión lineal de la función de forma de cada nodo vértice \mathbf{N}_i^V en el punto de interés, según la siguiente expresión:

$$\mathbf{u}^*(x, y) = \sum_{i=1}^{NV} \mathbf{N}_i^V(x, y) \mathbf{u}_i^*(x, y) \quad (58)$$

Sin embargo, la expresión anterior no resulta útil para calcular los desplazamientos en cualquier punto de la malla de una manera eficaz. Para ello se utilizará la ecuación anterior a fin de obtener los desplazamientos en los nodos de elementos virtuales de un grado superior a los utilizados para resolver el problema de EF. Una vez hecho esto, se utilizarán las funciones de forma de dicho elemento virtual para determinar los desplazamientos reconstruidos en el interior de cualquier elemento. Este procedimiento equivale a reconstruir una solución en desplazamientos que se habría obtenido al solucionar el problema con elementos de un grado superior al de los elementos utilizados en el análisis mediante el MEF.

Las figuras siguientes muestran la ganancia en número de nodos al utilizar el procedimiento propuesto para el caso de elementos triangulares:

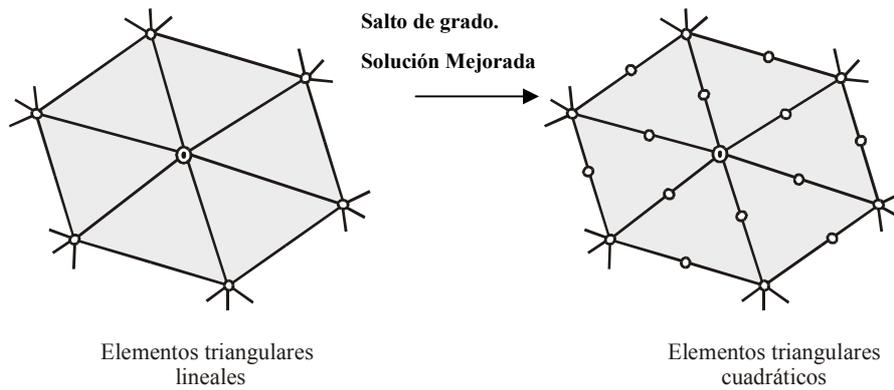


Figura 14.- Patches de elementos triangulares lineales (solución en EF) y cuadráticos (solución Mejorada).

● nodo de ensamblaje del patch. ○ nodos que definen el patch.

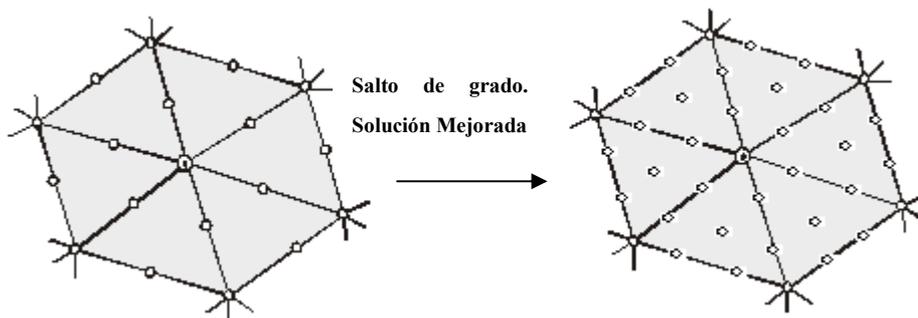


Figura 15.- Patches de elementos triangulares cuadráticos (solución en EF) y cúbicos (solución Mejorada).

● nodo de ensamblaje del patch. ○ nodos que definen el patch.



3.2.3 Detalles de implementación de la técnica SPR en desplazamientos propuesto.

A continuación se resumen algunos detalles importantes relacionados con la implementación de esta técnica.

Patches de nodos en la frontera

Cómo se expuso en el desarrollo de la técnica SPR en tensiones, sección 2.1.6, este tipo de patches suelen ser los problemáticos a la hora de llevar a cabo la interpolación. Esto se debe a que cuando un nodo situado en la frontera o contorno actúa como nodo de ensamblaje, forma patches con un número reducido de elementos. Esto puede producir que no haya suficientes puntos de muestreo si se utilizan únicamente los puntos de superconvergencia de desplazamientos en el patch (nodos) para resolver el sistema de ecuaciones.



Grado elemento	Tipo elemento	Nº elementos Patch	Esquema del Patch.	Nodos del patch
<p>1</p> <p>(Se requiere un mínimo de 6 puntos de interpolación para ajuste de grado superior)</p>	triangulares	1		3 (insuficientes)
		2		4 (insuficientes)
		3		4 (insuficientes)
				5 (insuficiente)
		4		5 (insuficientes)
				6 (Suficientes)
	5		6 (suficiente)	
	Cuadriláteros	1		4 (insuficientes)
		2		6 (suficiente)

Tabla 2.-Relación entre el número de puntos disponibles y el necesario para interpolar en grado superior. Elementos Lineales.



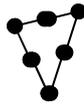
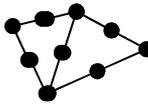
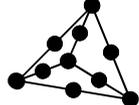
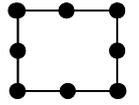
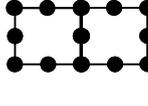
Grado elemento	Tipo elemento	Nº elementos Patch	Esquema del Patch.	Nodos del patch
2 (Se requiere un mínimo 10 puntos de interpolación para ajuste de grado superior)	Triangulares	1		6(insuficientes)
		2		9(insuficientes)
		3		10(suficientes)
	Cuadriláteros	1		8(insuficientes)
		2		13(suficientes)

Tabla 3.-Relación entre el número de puntos disponibles y el necesario para interpolar en grado superior. Elementos Cuadráticos.

Las posibles actuaciones para solventar la situación expuesta, y conseguir que el método propuesto sea más robusto en todas las situaciones posibles, pasarían por:

- **Reducir el grado de la solución en desplazamientos en esas zonas.** Evitándose así que se lleve a cabo el cálculo pasando a un elemento de grado superior. Al aplicar esta solución se pasaría a obtener una solución del mismo nivel de precisión que la de Elementos Finitos, con



lo que en estas zonas el método propuesto no aportaría ninguna mejora significativa respecto a una solución en desplazamientos mediante elementos finitos.

- Aumentar el tamaño del patch. Se lleva a cabo añadiendo elementos adyacentes a los del patch inicial. Esta solución incrementa la información al aumentar el número de puntos de muestreo, aunque puede ser contraproducente, ya que en zonas alejadas la información puede tener poco que ver con la del punto a calcular.
- **Aumentar el número de puntos de muestreo.** En caso de que la información en nodos no sea suficiente, se puede recurrir a aumentar el número de puntos de muestreo añadiendo la información de desplazamientos evaluada en puntos del interior del elemento, por ejemplo los puntos de Gauss. Aunque se ha comprobado que un cierto número de puntos de Gauss ayuda a mejorar los resultados en estas zonas del contorno, no es menos cierto que la mejora no es continua a medida que aumentamos el número de estos, sino que hay un valor límite a partir del cual no se obtiene mejora alguna.

Finalmente, y en base a los análisis numéricos que se presentarán posteriormente, se optará por esta última solución, ya que no influye en la interpolación de nivel superior y además aporta una mayor robustez al método en cualquier situación en la que el número de elementos no aporte suficientes nodos como para resolver el sistema de ecuaciones planteado en el proceso de interpolación.

En los análisis numéricos, en primer lugar se tomarán únicamente los nodos como puntos de muestreo. Los análisis posteriores añaden puntos adicionales en todos los patches, variando en cada análisis, el número de estos



puntos que se añaden. Se utilizarán puntos de Gauss como puntos de muestreo adicionales. Los resultados de estos análisis mostrarán cual es el número óptimo de puntos de muestreo a añadir a los nodos del patchs. Llegándose a un compromiso entre el coste computacional de añadir éstos puntos y la mejora obtenida en la solución reconstruida del campo de desplazamientos, se concluirá cual es la adición de puntos más adecuada dependiendo del tipo de elemento y grado de éste.

Un último análisis consistirá en limitar el número de patchs a los que se añaden estos puntos adicionales, a aquellos que no superen el número de nodos mínimo para resolver convenientemente el sistema de ecuaciones de grado superior, con el fin de evitar añadir puntos en patchs donde los nodos aportan suficiente información como para resolver la interpolación de grado superior. Finalmente tras analizar los ejemplos mostrados a continuación, el número de puntos mínimo que debe tener un patch se ha fijado según el tipo de elemento y su grado, llegándose a la siguiente conclusión:

- Triángulos Lineales: Si el número de nodos del patch es menor que 6, se añadirán 3 puntos de Gauss a cada elemento del patch.
- Triángulos Cuadráticos: Si el número de nodos del patch es menor que 12, se añadirán 6 puntos de Gauss a cada elemento del patch.
- Cuadriláteros Lineales: Si el número de nodos del patch es menor que 8, se añadirán 4 puntos de Gauss a cada elementos del patch.
- Cuadriláteros Cuadráticos: Si el número de nodos del patch es menor que 17, se añadirán 9 puntos de Gauss a cada elemento del patch.

Problemas de mal condicionamiento

La técnica SPR en desplazamientos propuesta puede presentar problemas de *mal condicionamiento* si en la resolución del sistema de ecuaciones planteado se



utilizan coordenadas globales, especialmente si se utilizan elementos de alto grado polinómico y/o tamaños de elemento muy pequeños. Por este hecho, ZIENKIEWICZ expuso la importancia de usar coordenadas locales normalizadas con el fin de evitar los problemas de *mal condicionamiento* en las matrices utilizadas. En el procedimiento desarrollado con objeto de este Trabajo Fin de Máster se ha implementado el siguiente método de normalización de coordenadas $(\underline{x}, \underline{y})$, según las expresiones:

$$\underline{x} = \frac{x - x_i}{x_{\max} - x_i} \quad \underline{y} = \frac{y - y_i}{y_{\max} - y_i} \quad (59)$$

Donde x_{\max}, y_{\max} representan los valores máximos de las coordenada x e y de entre todas las posiciones de los nodos vértice del patch, mientras x_i e y_i representan las coordenadas globales del nodo de ensamblaje del patch. De esta forma los valores normalizados de las variables x e y tomarán valores del orden de magnitud de la unidad



4 Verificación y validación del programa

En esta sección se mostrarán los análisis realizados a fin de comprobar el adecuado comportamiento del programa desarrollado y la precisión de los resultados obtenidos. Para ello se han analizado, en primer lugar, 2 ejemplos con solución analítica exacta conocida, que han permitido demostrar que la convergencia de la solución con el refinamiento de la malla es la teóricamente esperada. Posteriormente se ha analizado un problema sin solución conocida, pero con geometría más compleja, a fin de verificar el comportamiento del programa con problemas más exigentes. Los estudios realizados han permitido determinar la validez de la aplicación objeto del presente Trabajo Final de Máster.

Los análisis mostrados a continuación siguen las pautas expuestas en el apartado 3.2 durante la explicación del Método SPR en Desplazamientos Propuesto.

4.1 Verificación de la técnica desarrollada mediante ejemplos con solución analítica.

4.1.1 Cilindro sometido a presión interna

La Figura 16 muestra la geometría y las condiciones del problema.

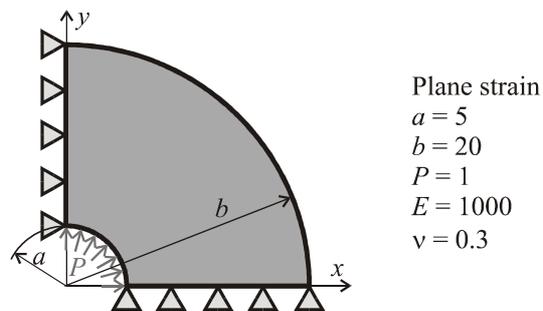


Figura 16.- Conductor sometido a presión interna.

En este problema, las tensiones exactas son conocidas y su valor puede ser obtenido a partir de las ecuaciones:



$$k = \frac{b}{a}$$
$$\sigma_r = \frac{P}{k^2 - 1} \left(1 - \frac{b^2}{r^2} \right)$$
$$\sigma_t = \frac{P}{k^2 - 1} \left(1 + \frac{b^2}{r^2} \right) \quad (60)$$

$$\sigma_{xx} = \sigma_r \cos^2(\phi) + \sigma_t \sin^2(\phi)$$
$$\sigma_{yy} = \sigma_r \sin^2(\phi) + \sigma_t \cos^2(\phi)$$
$$\tau_{xy} = (\sigma_r - \sigma_t) \sin(\phi) \cos(\phi) \quad (61)$$

El problema se analizará generando mallas uniformemente refinadas para elementos triangulares y cuadriláteros, tanto lineales como cuadráticos. Además cabe tener en cuenta como se expuso en la sección 3.2.3, que se llevan a cabo distintos tipos de análisis según el número de puntos de muestreo que se toman:

- Análisis tomando puntos de muestreo en nodos.
- Análisis tomando puntos de muestreo en nodos y puntos adicionales (puntos de Gauss) en todos los patches. Distintos análisis dependiendo el número de puntos de Gauss que se toma.
- Análisis tomando una solución híbrida entre las dos expuestas anteriormente, tomando puntos adicionales únicamente en los patches donde el número de nodos no sea suficiente como para realizar la interpolación de grado superior propia del método propuesto.

Por último se analizará el problema mediante la técnica clásica de SPR en Tensiones de ZIENKIEWICZ Y ZHU, con el fin de comparar los resultados obtenidos



mediante el método basado en desplazamientos propuesto en este Trabajo Fin de Máster con los de esta otra técnica mucho más extendida y desarrollada.

Elementos Triangulares Lineales

Tabla 4.- Técnica SPR en Desplazamientos Propuesta. Elementos Triangulares lineales. Puntos de Muestreo en Nodos.

Puntos de Muestreo: Nodos					
NDOF	$\ U\ $	$\ e_{ex}\ $	$\ e_{ex_H}\ $	$\ e_{es}\ $	θ
60	217.432607	90.5780908	72.4507284	81.8668955	0.903826685
216	230.6167545	49.9435254	30.2755141	51.8665401	1.038503784
816	234.7013916	26.3165308	11.1218147	27.2526261	1.035570619
3168	235.8464467	13.498894	4.05991218	13.8588522	1.026665758
12480	236.1496165	6.81937255	1.43246350	6.93696969	1.017244569

Tabla 5.- Técnica SPR en Desplazamientos Propuesta. Elementos Triangulares lineales. Puntos de Muestreo en Nodos y 3 Puntos de Gauss en todos los patches.

Puntos de Muestreo: Nodos + 3 Puntos de Gauss					
NDOF	$\ U\ $	$\ e_{ex}\ $	$\ e_{ex_H}\ $	$\ e_{es}\ $	θ
60	217.432607	90.5780908	69.2755312	75.2032609	0.830258843
216	230.6167545	49.9435254	28.2934503	48.5732802	0.972564107
816	234.7013916	26.3165308	10.9999638	26.3061278	0.999604695
3168	235.8464467	13.498894	4.16817468	13.5493287	1.003736211
12480	236.1496165	6.81937255	1.56332553	6.8323202	1.001898657



Tabla 6.- Técnica SPR en Desplazamientos Propuesta. Elementos Triangulares lineales.
Puntos de Muestreo en Nodos y 6 Puntos de Gauss en todos los patchs.

Puntos de Muestreo: Nodos + 6 Puntos de Gauss					
NDOF	$\ U\ $	$\ e_{ex}\ $	$\ e_{ex_H}\ $	$\ e_{es}\ $	θ
60	217.432607	90.5780908	68.7058789	73.9859183	0.816819141
216	230.6167545	49.9435254	27.616104	47.7902429	0.956885654
816	234.7013916	26.3165308	10.6893234	26.0763252	0.990872443
3168	235.8464467	13.498894	4.00589922	13.4980204	0.999935287
12480	236.1496165	6.81937255	1.47071522	6.8279168	1.001252937

Tabla 7.- Técnica SPR en Desplazamientos Propuesta. Elementos Triangulares lineales.
Puntos de Muestreo en Nodos y 6 Puntos de Gauss en patchs con puntos de muestreo
insuficientes.

Puntos de Muestreo: Nodos + 3 Puntos de Gauss, patchs con déficit de puntos.					
DOF	$\ U\ $	$\ e_e\ $	$\ e_{ex_H}\ $	$\ e_{es}\ $	θ
60	217.432607	90.5780908	69.7873795	78.7143658	0.86902213
216	230.616754	49.9435254	28.6639238	50.1946078	1.00502733
816	234.701392	26.3165308	10.4278291	26.6423264	1.01237988
3168	235.846447	13.498894	3.78136097	13.6645579	1.01227241
12480	236.149616	6.81937255	1.32381614	6.88110854	1.00905303



Tabla 8.- Técnica SPR en Tensiones. Elementos Triangulares lineales. Puntos de Muestreo en Puntos de Superconvergencia.

Puntos de Muestreo: Puntos de Superconvergencia.					
NDOF	$\ U\ $	$\ e_{ex}\ $	$\ e_{ex,H}\ $	$\ e_{es}\ $	θ
60	217.432607	88.5375309	57.2977882	76.854146	0.86804032
216	230.616754	49.6633288	26.5060522	46.939411	0.94515233
816	234.701392	26.2802610	11.3057835	25.550261	0.97222252
3168	235.846447	13.4943222	4.57696473	13.312900	0.98655566
12480	236.149616	6.81880064	1.74146025	6.7813173	0.99450294

Cómo se expuso en la sección 3.2.3, tras analizar los resultados obtenidos al tomar como puntos de muestreo únicamente nodos o añadir a éstos puntos de Gauss, como puntos de muestreo adicionales, en todos los patches de la malla (como se muestra en la Tabla 4, Tabla 5 y Tabla 6 respectivamente), se selecciona a una solución de compromiso entre los resultados obtenidos y el coste computacional extra de la adición de estos puntos de muestreo adicionales. En esta solución se optará por añadir 3 puntos de Gauss adicionales por elemento únicamente en los patches que sea necesario para poder resolver la interpolación de grado superior, obteniendo los resultados que se muestran en la Tabla 7.

La representación de las efectividades globales obtenidas mediante la técnica propuesta permite ver claramente la tendencia de esta a estabilizarse en torno a 1. Como se expuso a nivel teórico la efectividad debe estar entre 0.8 y 1.2 para considerarse aceptable. La tendencia del error en norma energética nos permitirá estudiar la convergencia del método propuesto, con el fin de averiguar la robustez de éste en el cálculo del error estimado en norma energética.

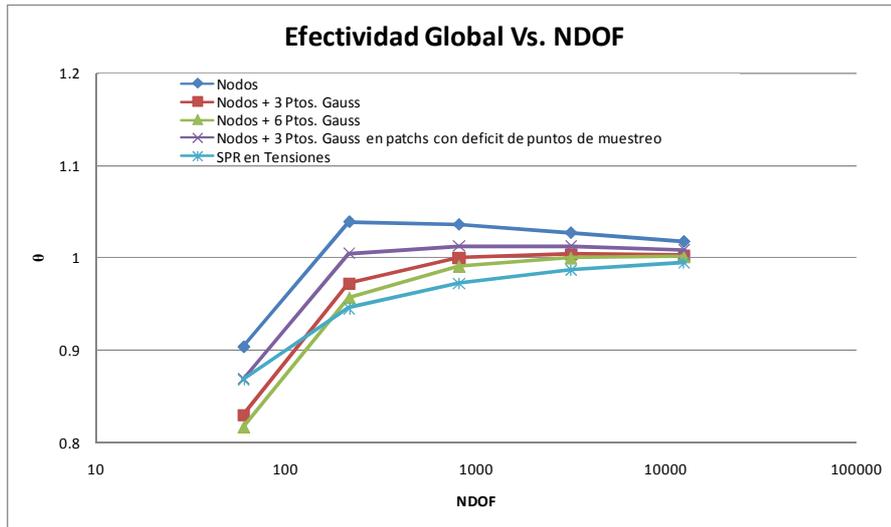


Figura 17.- Representación de la Efectividad Global para elementos triangulares lineales.

A continuación se muestra gráficamente la evolución del error en norma energética de los análisis anteriores:

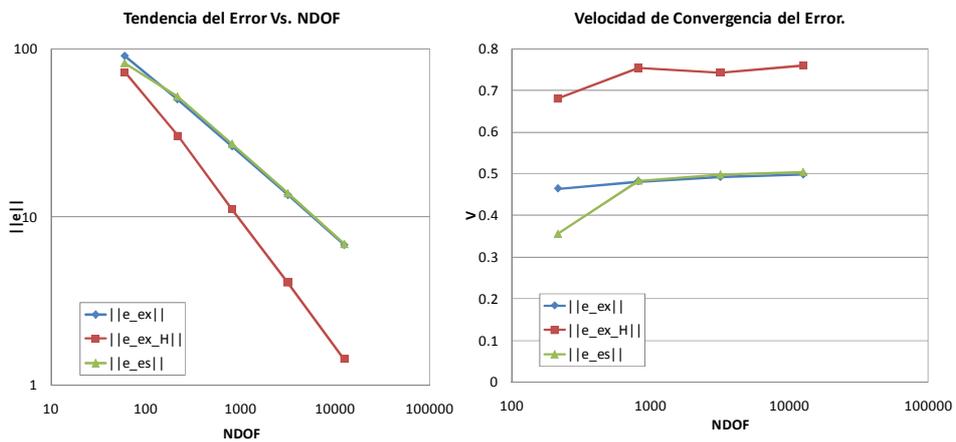


Figura 18.- SPR en Desplazamientos Propuesta. Utilizando Triángulos Lineales y puntos de muestreo en nodos.

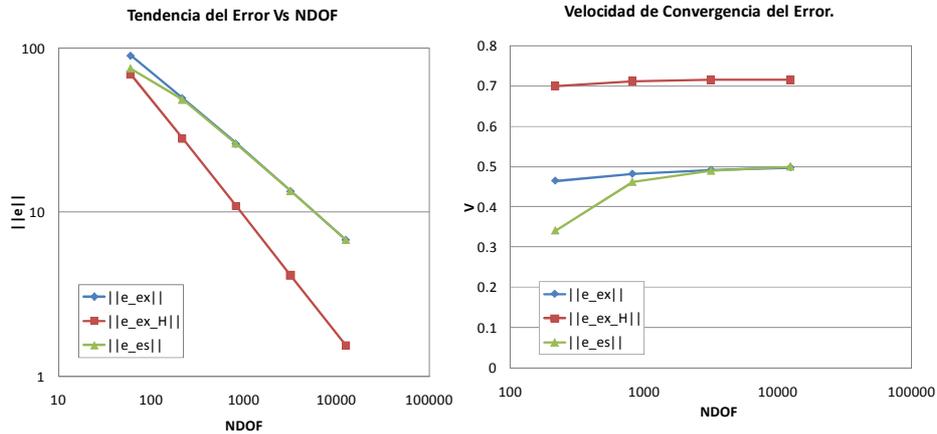


Figura 19.- SPR en Desplazamientos Propuesta. Utilizando Triángulos Lineales y puntos de muestreo en Nodos y 3 Puntos de Gauss en todos los patches

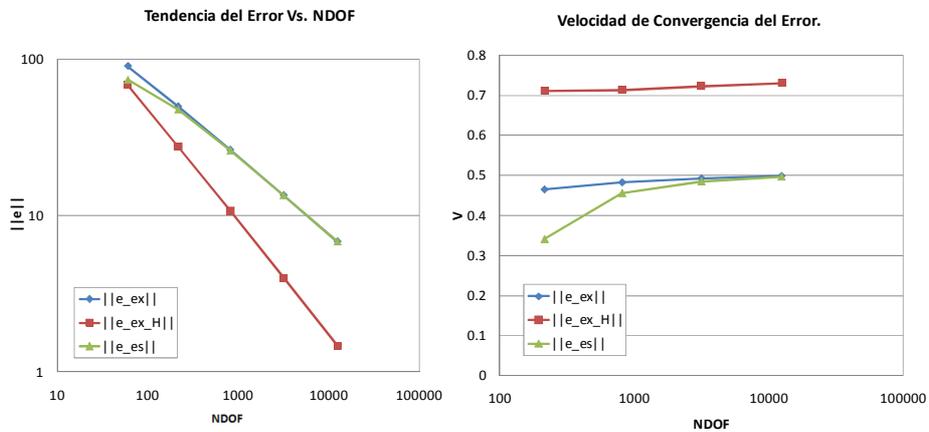


Figura 20.- SPR en Desplazamientos Propuesta. Utilizando Triángulos Lineales y puntos de muestreo en Nodos y 6 Puntos de Gauss en todos los patches.

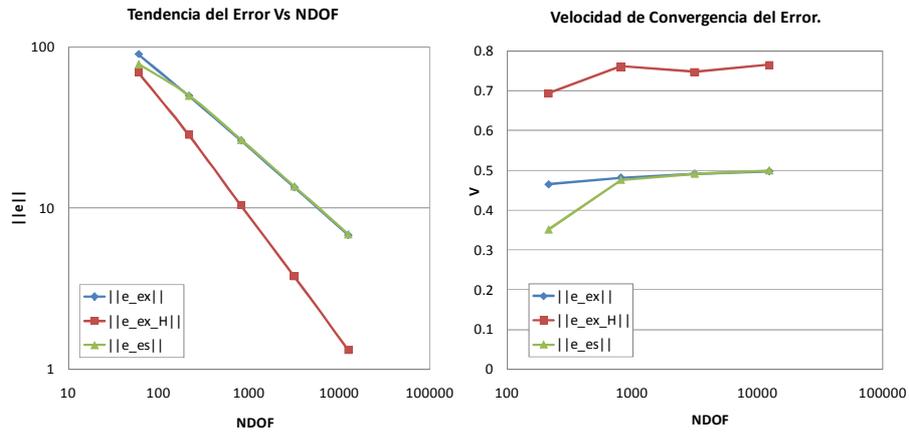


Figura 21.- SPR en Desplazamientos Propuesta. Utilizando Triángulos Lineales. Puntos de muestreo en nodos y 3 puntos de integración (en Patches con déficit de puntos de muestreo).

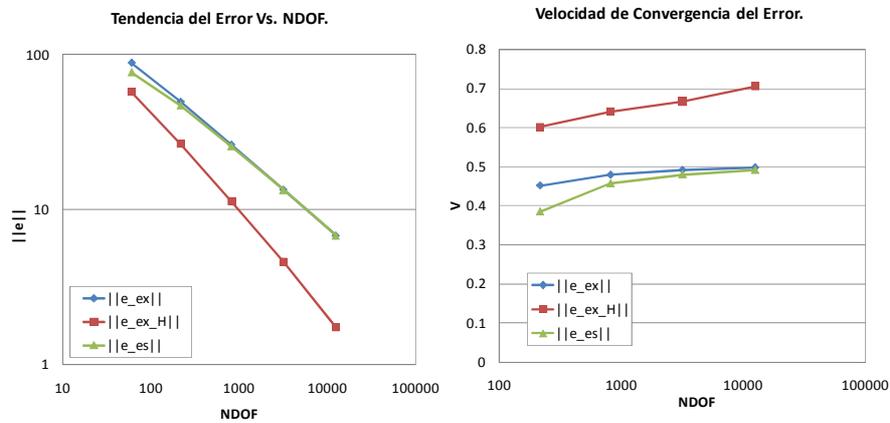


Figura 22.-SPR en Tensiones. Utilizando Triángulos Lineales. Puntos de muestreo en Puntos de Supercovergencia.



Tabla 9.- Efectividades Locales a nivel de elemento.

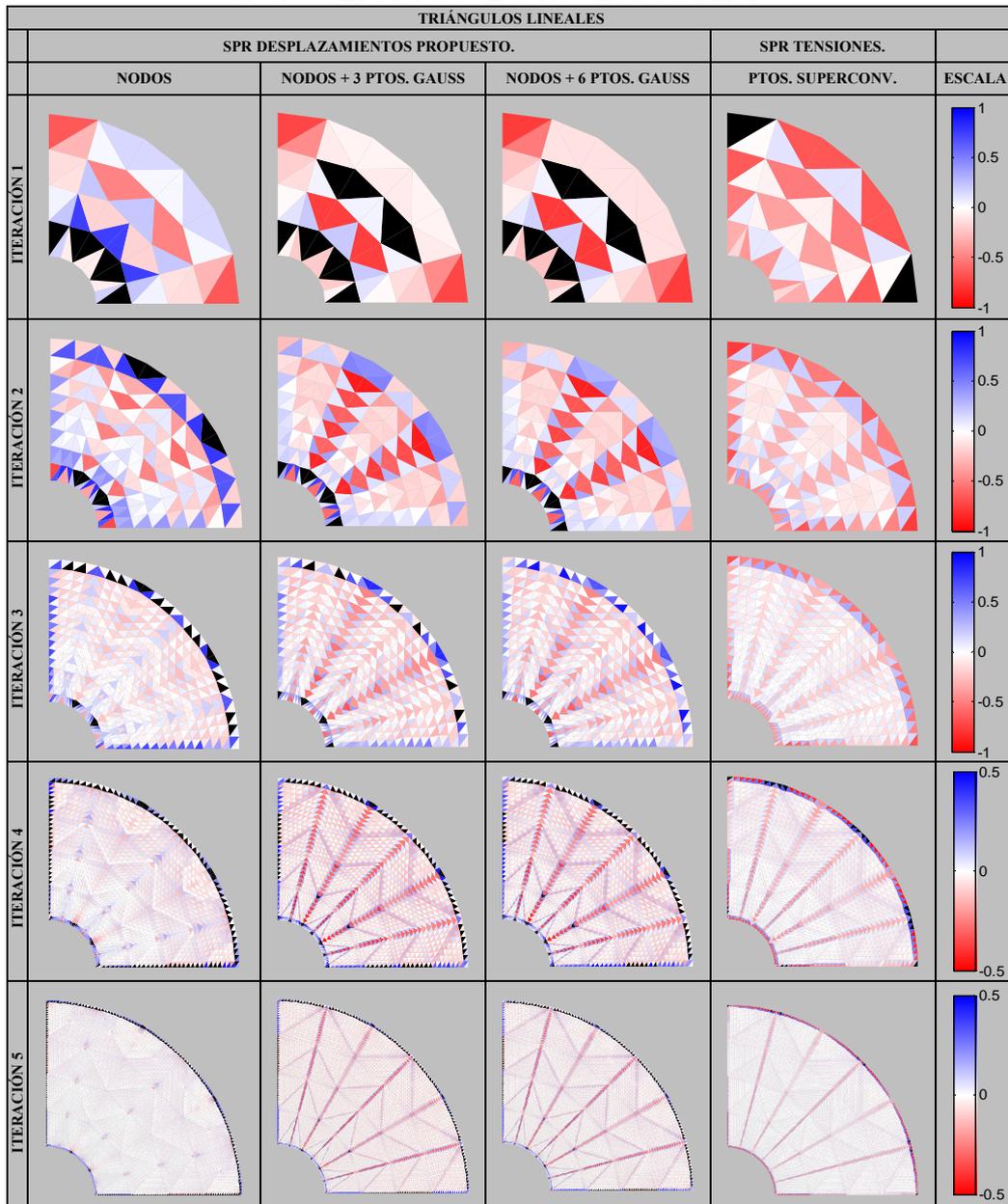
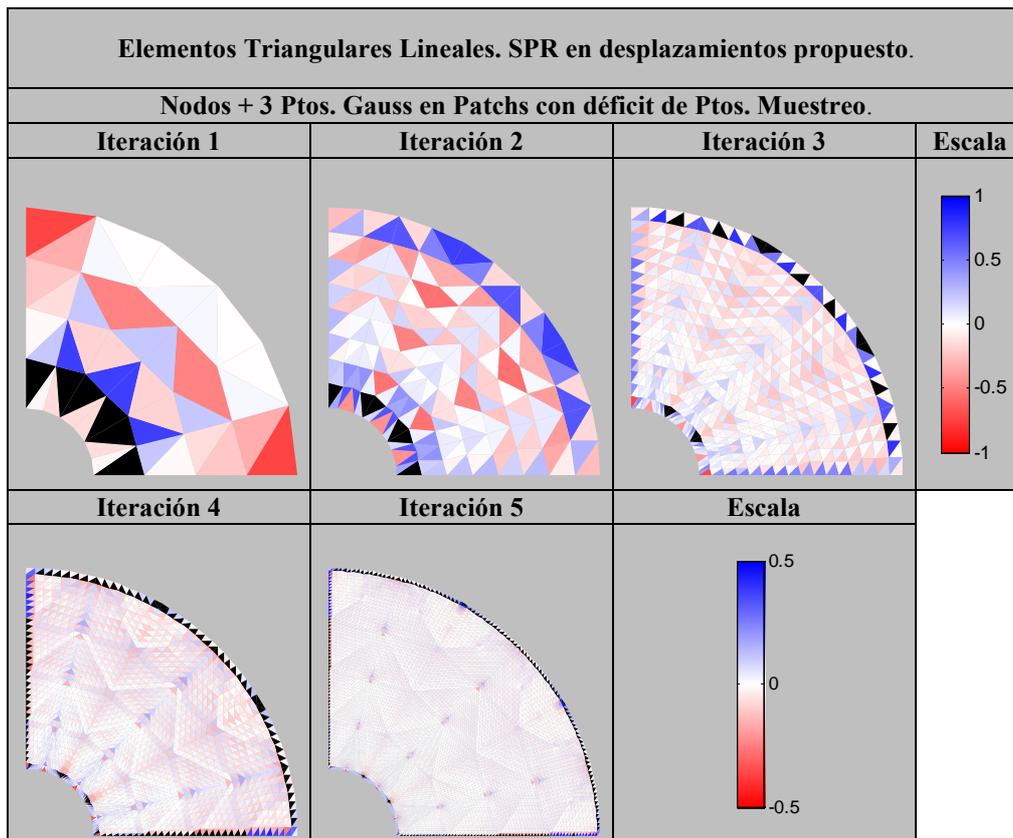


Tabla 10.- Efectividades Locales a nivel de elemento para el análisis añadiendo puntos de muestreo únicamente en patches donde exista déficit de éstos.





Elementos Triangulares Cuadráticos.

El análisis mediante la técnica SPR en desplazamientos propuesta teniendo en cuenta únicamente los nodos como puntos de muestreo no se plasma, pues los resultados obtenidos no son satisfactorios. Entre las causas cabe destacar el hecho de que para realizar la interpolación de grado superior propia de la técnica propuesta, se necesitan teóricamente 10 puntos de muestreo, como se expuso en la sección 3.2.3, por lo que los patches formados por 1 o 2 elementos no tienen suficientes puntos de muestreo para realizar dicha interpolación. Mayoritariamente este tipo de patches se forman en el contorno del componente.

Tabla 11.- Técnica SPR en Desplazamientos Propuesta. Elementos Triangulares cuadráticos. Puntos de Muestreo en Nodos y 6 Puntos de Gauss.

Puntos de Muestreo: Nodos + 6 Puntos de Gauss.					
NDOF	$\ U\ $	$\ e_{exl}\ $	$\ e_{ex_H}\ $	$\ e_{es}\ $	θ
216	235.758415	15.2208499	11.1941381	15.638043	1.0274093
816	236.209293	4.55400956	2.30976409	4.5120597	0.9907883
3168	236.250023	1.24633375	0.43286485	1.1783191	0.9454282
12480	236.253093	0.32459409	0.07750959	0.3015210	0.9289173
49536	236.253302	0.08264183	0.01428981	0.0767900	0.9291909



Tabla 12.- Técnica SPR en Desplazamientos Propuesta. Elementos Triangulares cuadráticos. Puntos de Muestreo en Nodos y 6 Puntos de Gauss (en patches con déficit de puntos de muestreo).

Puntos de Muestreo: Nodos + 6 P.G. (patches con déficit de puntos de muestreo)					
NDOF	$\ U\ $	$\ e_{ex}\ $	$\ e_{ex_H}\ $	$\ e_{es}\ $	θ
216	235.758415	15.2208499	12.7738178	17.0847027	1.12245392
816	236.209293	4.55400956	2.37942333	4.73451509	1.03963662
3168	236.250023	1.24633375	0.44727755	1.24559329	0.99940589
12480	236.253093	0.32459409	0.07756662	0.31925509	0.98355176
49536	236.253302	0.08264183	0.01296482	0.08142333	0.98525566

Tabla 13.- Técnica SPR en Tensiones. Elementos Triangulares cuadráticos. Puntos de Muestreo en Puntos de Superconvergencia.

Puntos de Muestreo: Puntos de Superconvergencia.					
NDOF	$\ U\ $	$\ e_{ex}\ $	$\ e_{ex_H}\ $	$\ e_{es}\ $	θ
216	235.758415	15.0491440	7.94084870	14.374852	0.95519400
816	236.209293	4.53873477	1.94165177	4.3581033	0.96020224
3168	236.250023	1.24538074	0.43776456	1.20632776	0.96864174
12480	236.253093	0.32454011	0.09204872	0.31796483	0.97973971
49536	236.253302	0.08263873	0.01819617	0.08162025	0.98767547

La representación de la efectividad del método desarrollado para el caso de triángulos cuadráticos muestra que se estabiliza entre 0.8 y 1.2, como se expuso teóricamente.

Efectividad Global Vs. NDOF

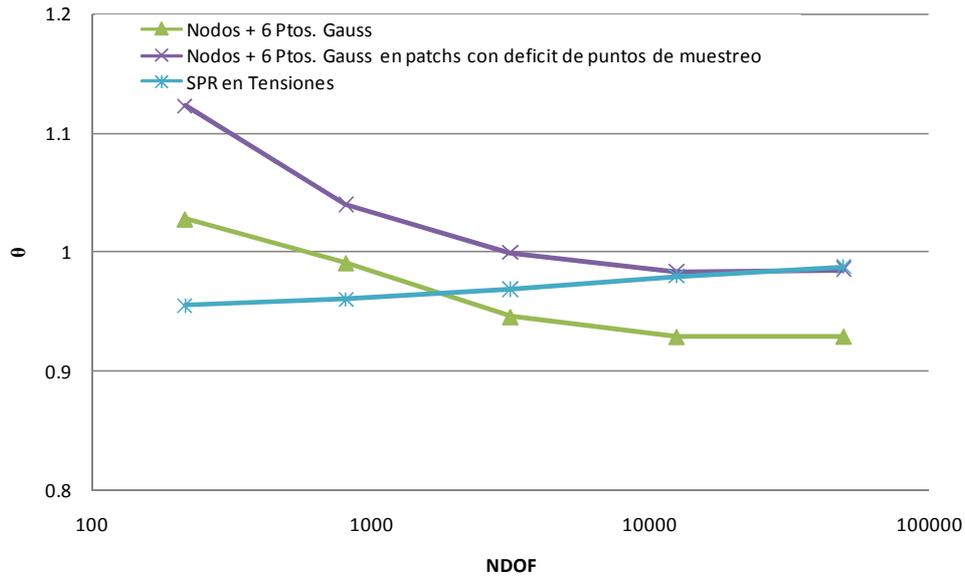


Figura 23.-Representación de la Efectividad Global para elementos triangulares cuadráticos.

A continuación se representa el error en norma energética con el fin de estudiar la convergencia del método propuesto para elementos triangulares cuadráticos, siguiendo el mismo procedimiento que se llevo a cabo en el estudio realizado para triángulos lineales.

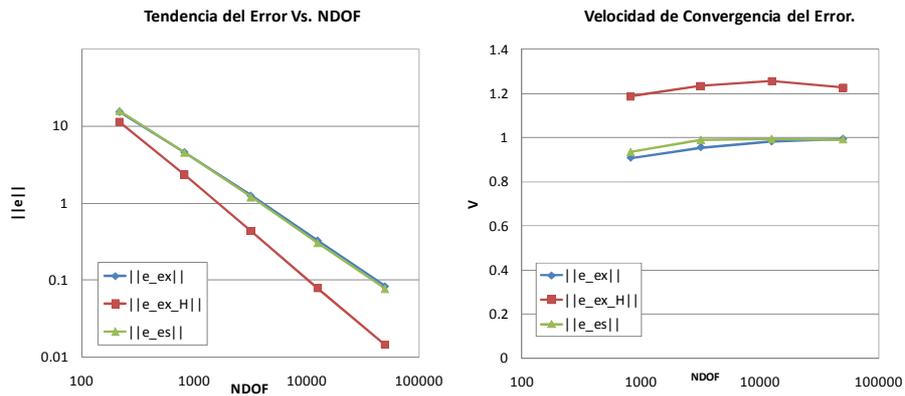


Figura 24.-SPR en Desplazamientos Propuesta. Utilizando Triángulos Cuadráticos. Puntos de muestreo en nodos y 6 puntos de integración.

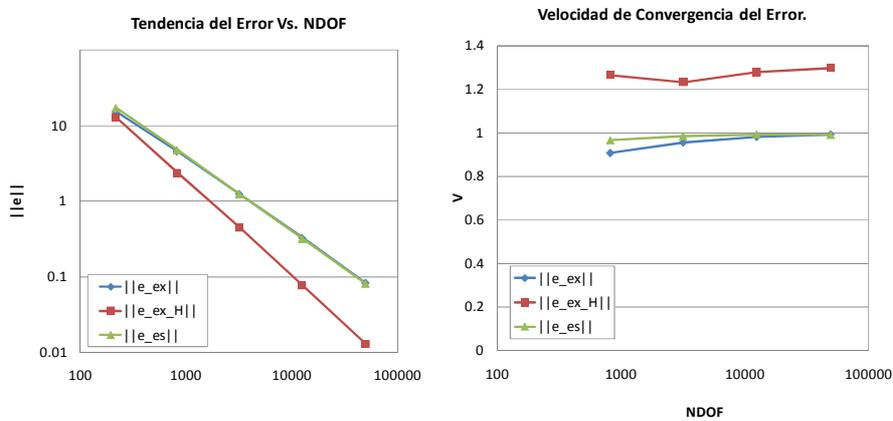


Figura 25.- SPR en Desplazamientos Propuesta. Utilizando Triángulos Cuadráticos. Puntos de muestreo en nodos y 6 puntos de integración (en los patches con déficit de puntos de muestreo).

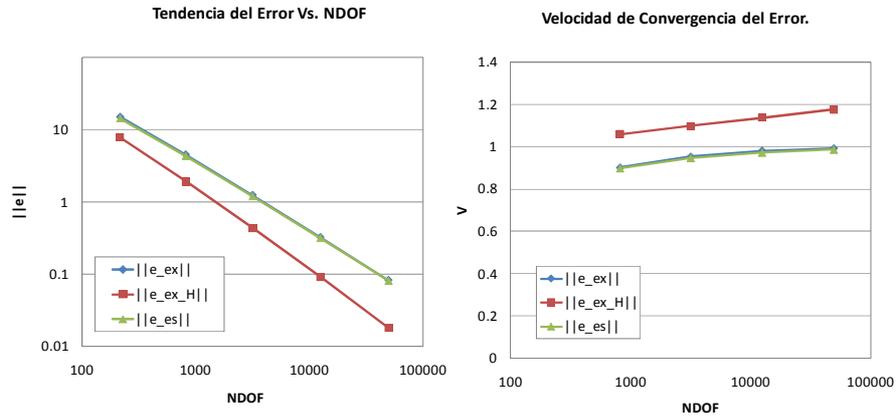
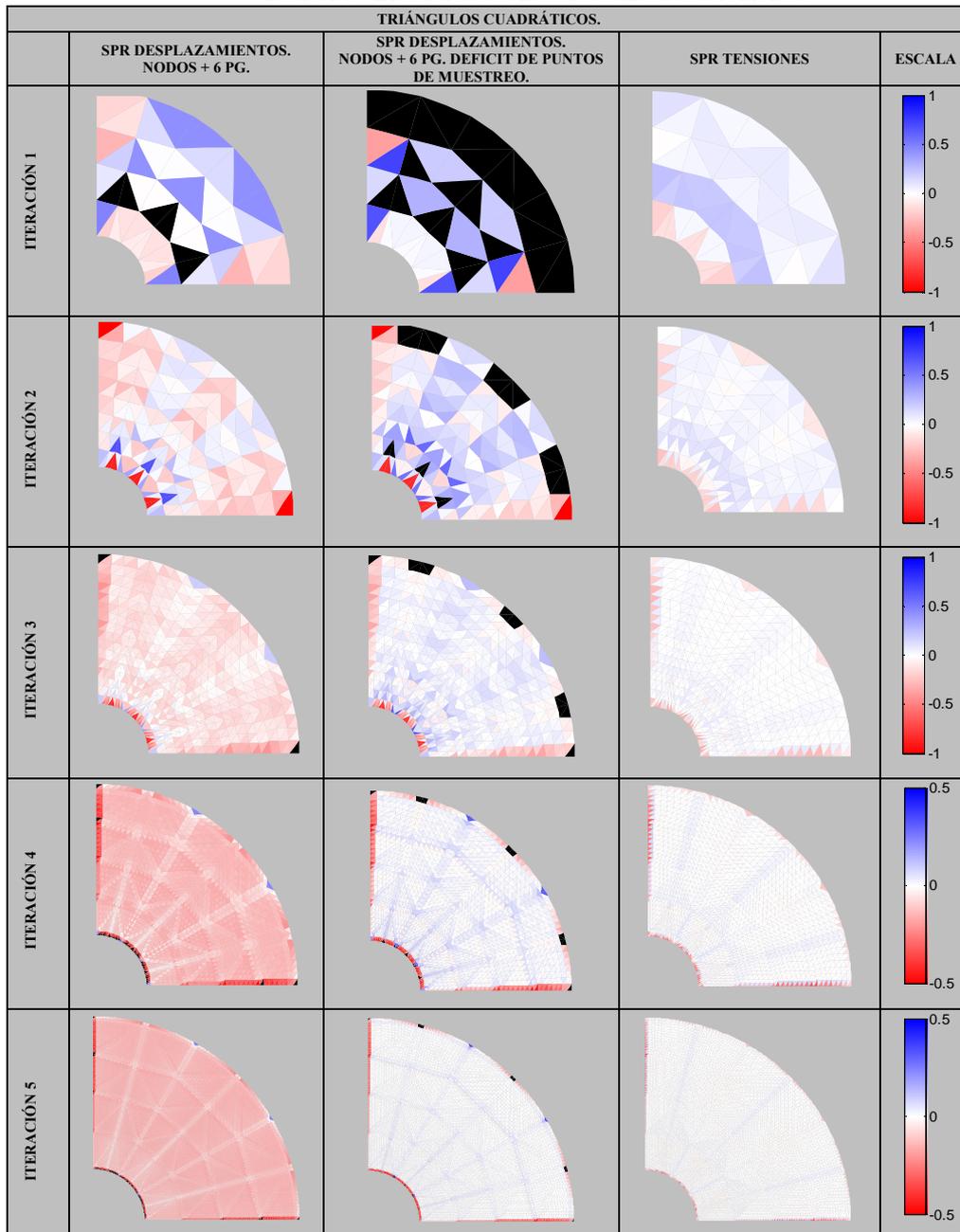


Figura 26.- SPR en Tensiones. Utilizando Triángulos Cuadráticos. Puntos de muestreo en Puntos de Superconvergencia.



Tabla 14.- Efectividades Locales a nivel de elemento.





Elementos Cuadriláteros Lineales

Tabla 15.- Técnica SPR en Desplazamientos Propuesto. Elementos Cuadriláteros Lineales.
Puntos de Muestreo en Nodos.

Puntos de Muestreo: Nodos					
NDOF	$\ U\ $	$\ e_{ex}\ $	$\ e_{ex_H}\ $	$\ e_{es}\ $	θ
60	226.955604	61.514888	55.2768426	58.3596863	0.9487083
216	233.608082	33.0540852	22.6401631	30.5139159	0.9231511
816	235.565352	16.8946044	8.65439836	15.7892107	0.9345712
3168	236.079559	8.49521005	3.20339021	8.13960038	0.9581399
12480	236.209771	4.25313586	1.16286548	4.15319911	0.9765021

Tabla 16.- Técnica SPR en Desplazamientos Propuesto. Elementos Cuadriláteros Lineales.
Puntos de Muestreo en Nodos y 4 Ptos. de Gauss.

Puntos de Muestreo: Nodos + 4 Ptos. Gauss					
NDOF	$\ U\ $	$\ e_{ex}\ $	$\ e_{ex_H}\ $	$\ e_{es}\ $	θ
60	226.955604	61.514888	51.5848996	55.235488	0.89792066
216	233.608082	33.0540852	21.3311023	30.037990	0.90875273
816	235.565352	16.8946044	8.24946957	15.959147	0.94462983
3168	236.079559	8.49521005	3.09089369	8.3358423	0.98124028
12480	236.209771	4.25313586	1.14583274	4.2808669	1.00652014



Tabla 17.- Técnica SPR en Desplazamientos Propuesto. Elementos Cuadriláteros Lineales.
Puntos de Muestreo en Nodos y 9 Ptos. de Gauss.

Puntos de Muestreo: Nodos + 9 Ptos. Gauss.					
NDOF	$\ U\ $	$\ e_{ex}\ $	$\ e_{ex_H}\ $	$\ e_{es}\ $	θ
60	226.706699	61.5274119	50.6657637	54.0054981	0.87774695
216	233.585667	33.0544754	21.0731747	29.9843902	0.90712044
816	235.563497	16.8945951	8.16439776	16.1044423	0.95323044
3168	236.07938	8.49520619	3.04972986	8.44700454	0.99432602
12480	236.209751	4.25313532	1.12377106	4.34493154	1.02158319

Tabla 18.- Técnica SPR en Desplazamientos Propuesto. Elementos Cuadriláteros Lineales.
Puntos de Muestreo en Nodos y 4 Ptos. de Gauss (en patchs con déficit de puntos de muestreo).

Nodos+NPI_4 en patchs con déficit de puntos de muestreo.					
NDOF	$\ U\ $	$\ e_{ex}\ $	$\ e_{ex_H}\ $	$\ e_{es}\ $	θ
60	226.955604	61.514888	55.0962039	58.1492037	0.94528667
216	233.608082	33.0540852	22.6150779	30.4889604	0.92239613
816	235.565352	16.8946044	8.65190250	15.787287	0.93445733
3168	236.079559	8.49521005	3.20318584	8.13948236	0.95812609
12480	236.209771	4.25313586	1.16285029	4.15319255	0.97650126



Tabla 19.- Técnica SPR en Tensiones. Elementos Cuadriláteros Lineales. Puntos de Muestreo en Puntos de Superconvergencia.

Puntos de Muestreo. Puntos de Superconvergencia.					
NDOF	$\ U\ $	$\ e_{ex}\ $	$\ e_{ex_H}\ $	$\ e_{es}\ $	θ
60	226.831109	60.9819104	62.1497213	57.1350639	0.93691824
216	233.596873	32.9813339	28.4044934	32.1800546	0.97570506
816	235.564424	16.8850676	11.6062905	16.7536949	0.99221959
3168	236.079469	8.49389118	4.43124416	8.47468045	0.99773829
12480	236.209761	4.25292129	1.63004985	4.25011517	0.99934019

La figura siguiente muestra la tendencia de la Efectividad Global de los análisis anteriores, calculados mediante el método propuesto. Se observará que se cumple lo expuesto teóricamente y la efectividad se mantiene entre 0.8 y 1.2.

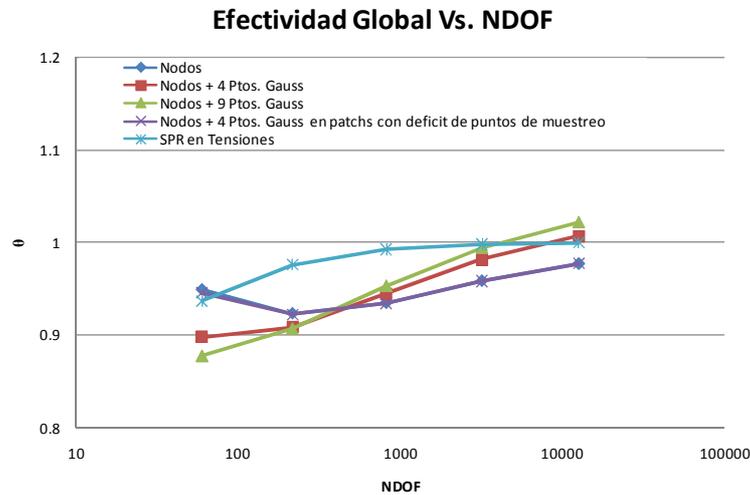


Figura 27.- Representación de la Efectividad Global para elementos cuadriláteros lineales.

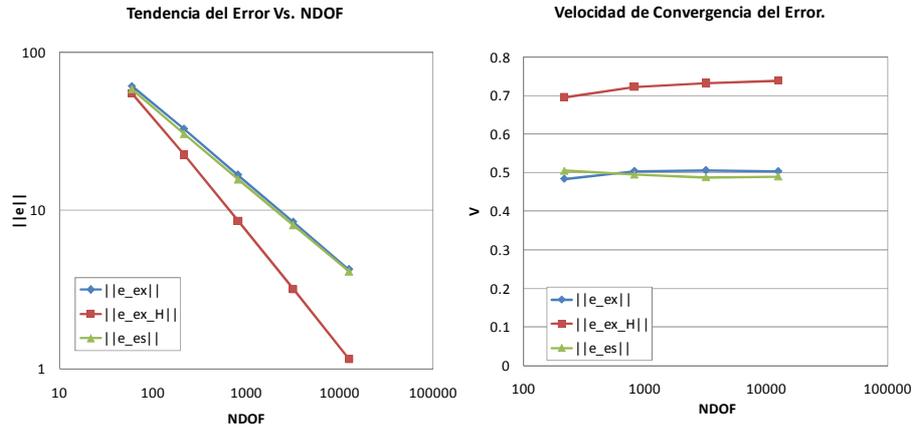


Figura 28.- SPR en Desplazamientos Propuesto. Utilizando Cuadriláteros Lineales. Puntos de muestreo en Nodos.

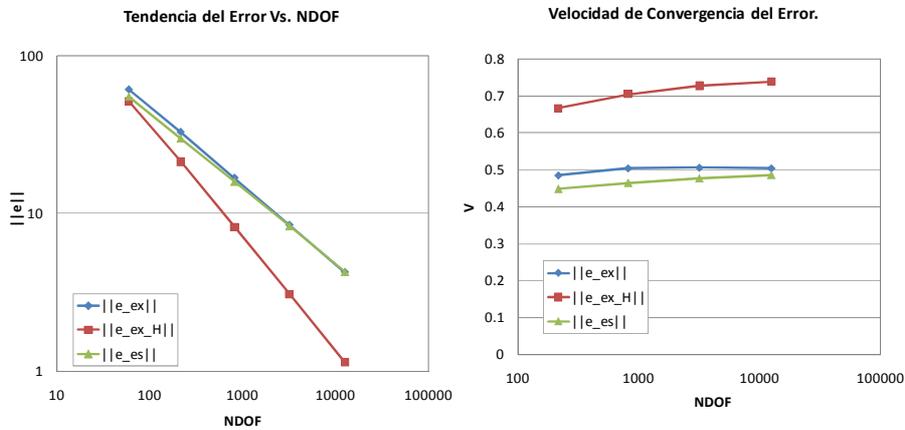


Figura 29.- SPR en Desplazamientos Propuesto. Utilizando Cuadriláteros Lineales. Puntos de muestreo en Nodos + 4 Puntos. Gauss.

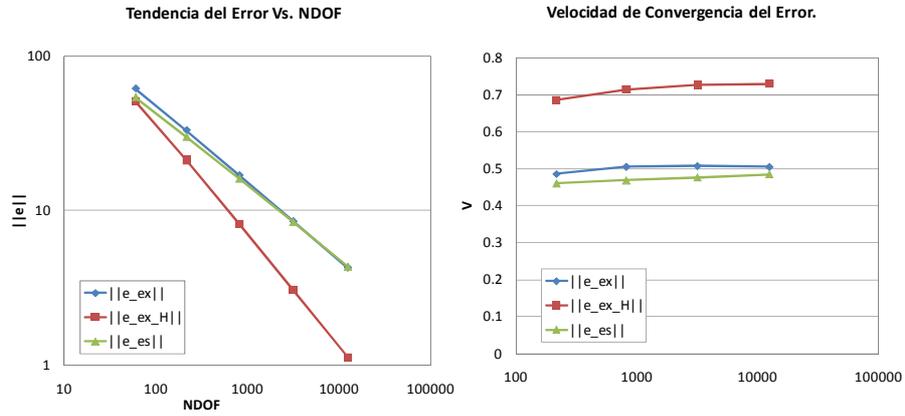


Figura 30.- SPR en Desplazamientos Propuesto. Utilizando Cuadriláteros Lineales. Puntos de muestreo en Nodos + 9 Puntos. Gauss.

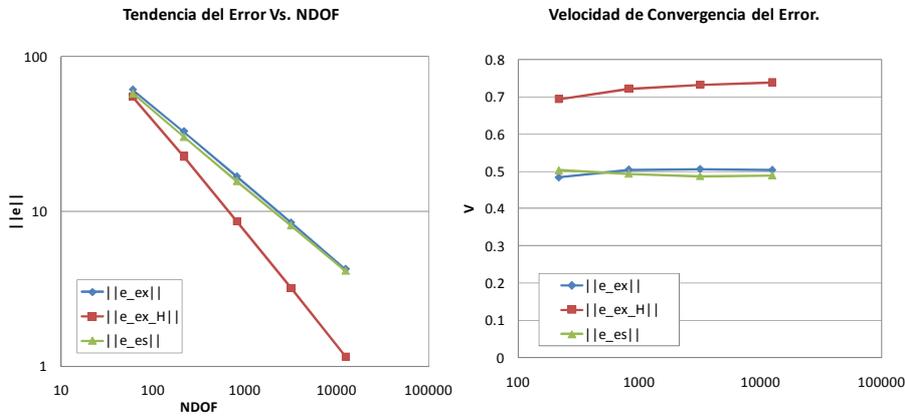


Figura 31.- SPR en Desplazamientos Propuesto. Utilizando Cuadriláteros Lineales. Puntos de muestreo en Nodos + 4 Puntos. Gauss en patches con déficit de puntos de muestreo.

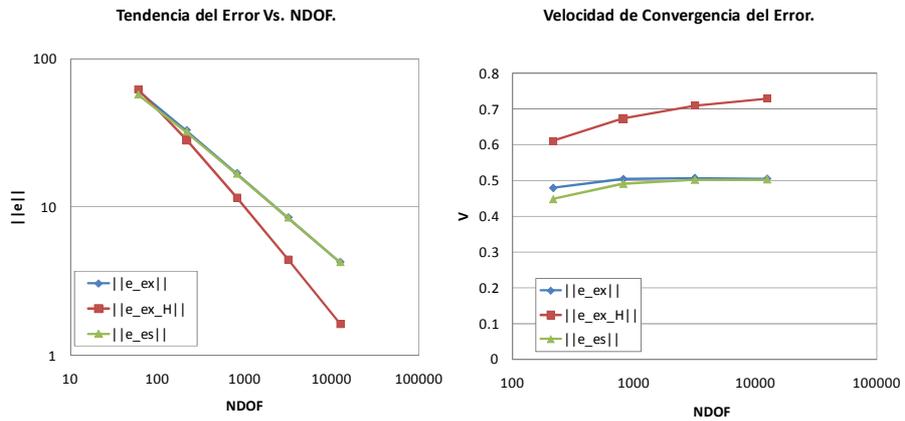


Figura 32.-SPR en Tensiones. Utilizando Cuadriláteros Lineales. Puntos de muestreo en Puntos de Superconvergencia.



Tabla 20.- Efectividades Locales a nivel de elemento.

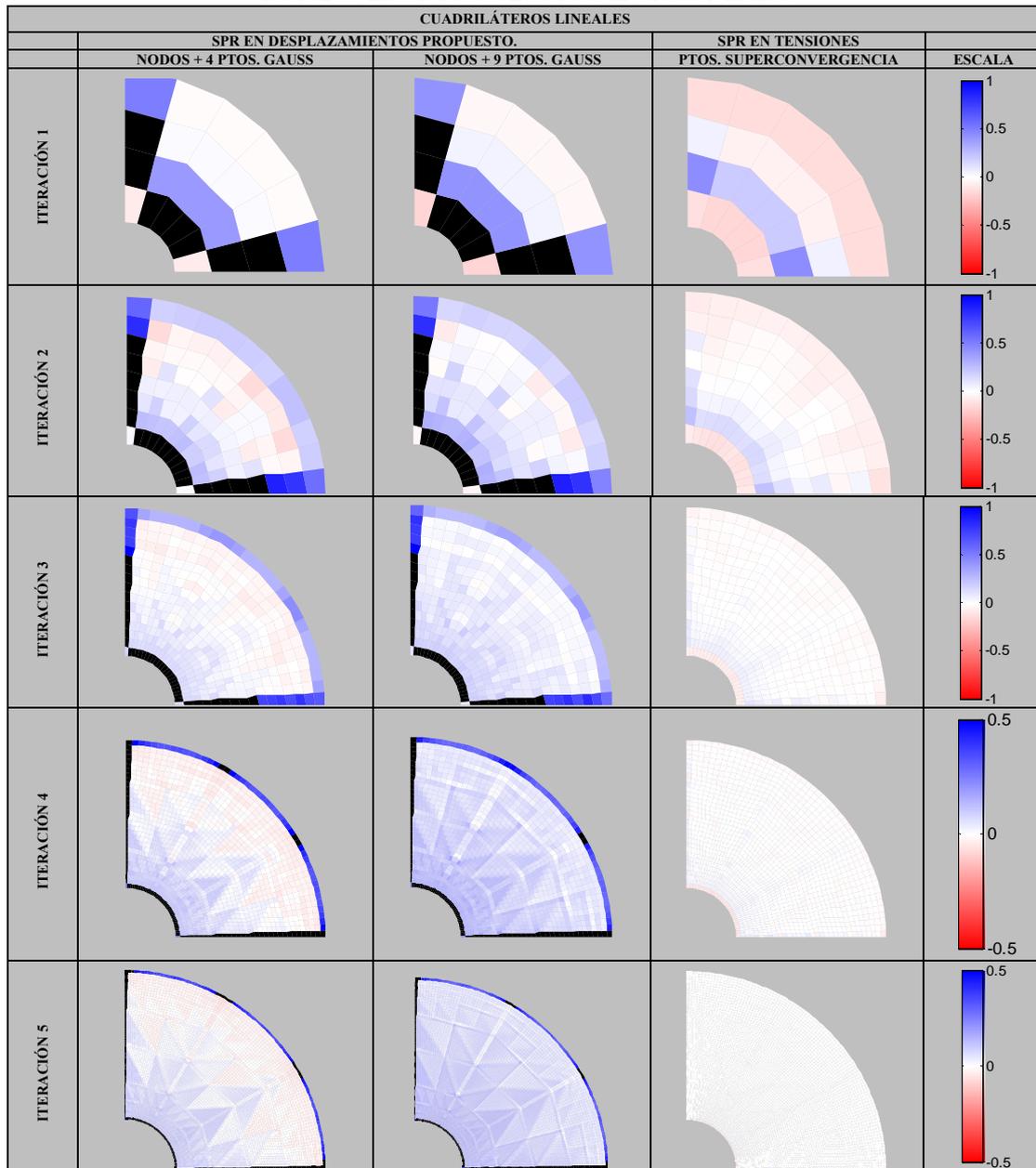
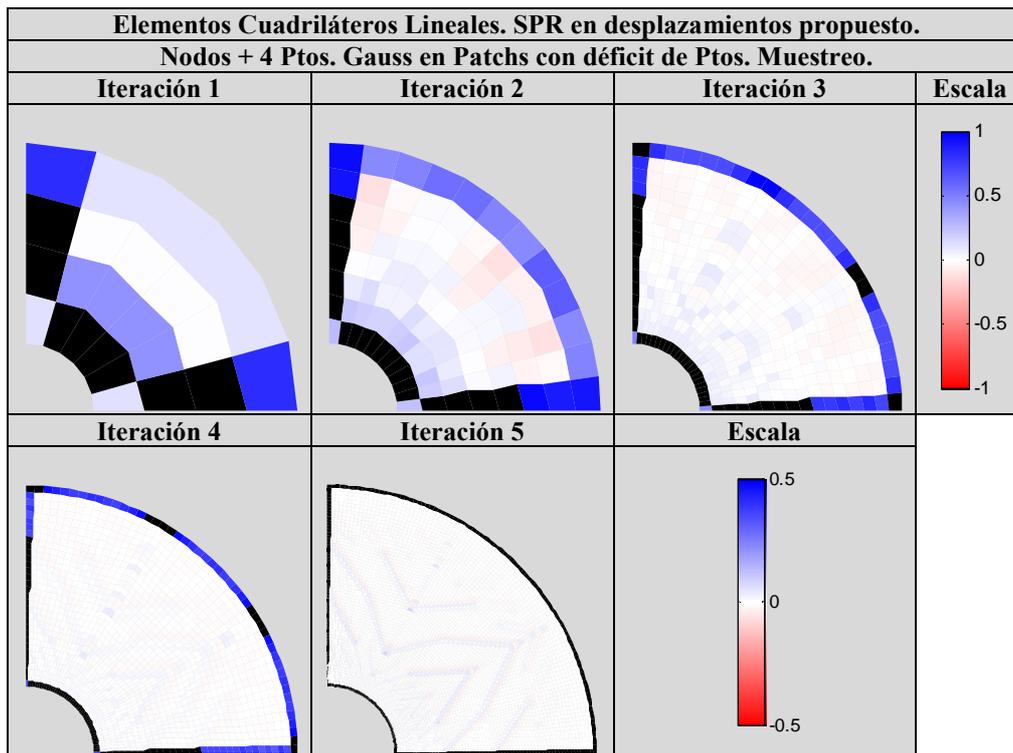




Tabla 21.- Efectividades Locales a nivel de elemento para el análisis añadiendo puntos de muestreo únicamente en patches donde exista déficit de éstos.





Elementos Cuadriláteros Cuadráticos

Al igual que ocurría en el análisis mediante triángulos cuadráticos, del análisis teniendo en cuenta únicamente los nodos como puntos de muestreo no se obtienen resultados satisfactorios. Esto se debe a la falta de puntos de muestreo para llegar a los 10 necesarios para llevar a cabo la interpolación de grado superior propia del método en patches con un número reducido de elementos. Debido a lo expuesto anteriormente este análisis no se refleja.

Tabla 22.- Técnica SPR en Desplazamientos Propuesto. Elementos Cuadriláteros Cuadráticos. Puntos de Muestreo en Nodos + 9 Puntos. De Gauss.

Puntos de Muestreo: Nodos + 9 Puntos de Gauss					
NDOF	$\ U\ $	$\ e_{ex}\ $	$\ e_{ex_H}\ $	$\ e_{es}\ $	θ
168	235.956748	12.1260505	13.8255341	10.7840435	0.88932860
624	236.227613	3.52393591	2.75202154	2.57931390	0.73194121
2400	236.251518	0.92543592	0.50465132	0.68881027	0.74430898
9408	236.2532	0.23457455	0.09074152	0.19048402	0.81204044
37248	236.253309	0.05891728	0.01624732	0.05127306	0.87025511

Tabla 23.- Técnica SPR en Desplazamientos Propuesto. Elementos Cuadriláteros Cuadráticos. Puntos de Muestreo en Nodos + 16 Puntos. De Gauss.

Puntos de Muestreo: Nodos + 16 Puntos de Gauss.					
NDOF	$\ U\ $	$\ e_{ex}\ $	$\ e_{ex_H}\ $	$\ e_{es}\ $	θ
168	235.946656	12.126422	13.171777	10.5494377	0.86995469
624	236.227344	3.52395889	2.67393732	2.55434467	0.72485087
2400	236.251513	0.92543630	0.49879180	0.68366053	0.73874401
9408	236.253200	0.23457456	0.09055468	0.18899724	0.80570220
37248	236.253309	0.05891729	0.01631607	0.05085873	0.86322251



Tabla 24.- Técnica SPR en Desplazamientos Propuesto. Elementos Cuadriláteros Cuadráticos. Puntos de Muestreo en Nodos + 9 Puntos. De Gauss (en patches con déficit de puntos de muestreo).

Puntos de Muestreo: Nodos + 9 PG en patches con deficit de puntos de muestreo.					
NDOF	$\ U\ $	$\ e_{ex}\ $	$\ e_{ex_H}\ $	$\ e_{es}\ $	θ
168	235.956748	12.1260505	14.7930359	12.3358875	1.01730465
624	236.227613	3.52393591	2.91356729	2.91325256	0.82670418
2400	236.251518	0.92543592	0.51076644	0.74228926	0.80209688
9408	236.253200	0.23457455	0.08837342	0.20180306	0.86029393
37248	236.253309	0.05891728	0.0154136	0.05411616	0.91851076

Tabla 25.- Técnica SPR en Tensiones. Elementos Cuadriláteros Cuadráticos. Puntos de Muestreo Puntos de Superconvergencia.

Puntos de Superconvergencia					
NDOF	$\ U\ $	$\ e_{ex}\ $	$\ e_{ex_H}\ $	$\ e_{es}\ $	θ
168	235.951702	11.8182251	11.9149075	11.007611	0.93140983
624	236.227479	3.48074696	2.81848581	3.05691144	0.87823432
2400	236.251515	0.92072669	0.60629895	0.84824151	0.92127395
9408	236.2532	0.2340536	0.12099973	0.22768954	0.97280939
37248	236.253309	0.05884047	0.02321205	0.05937512	1.00908641

A continuación representamos la tendencia de la efectividad global del método propuesto en los análisis del problema mostrados anteriormente.

Efectividad Global Vs. NDOF

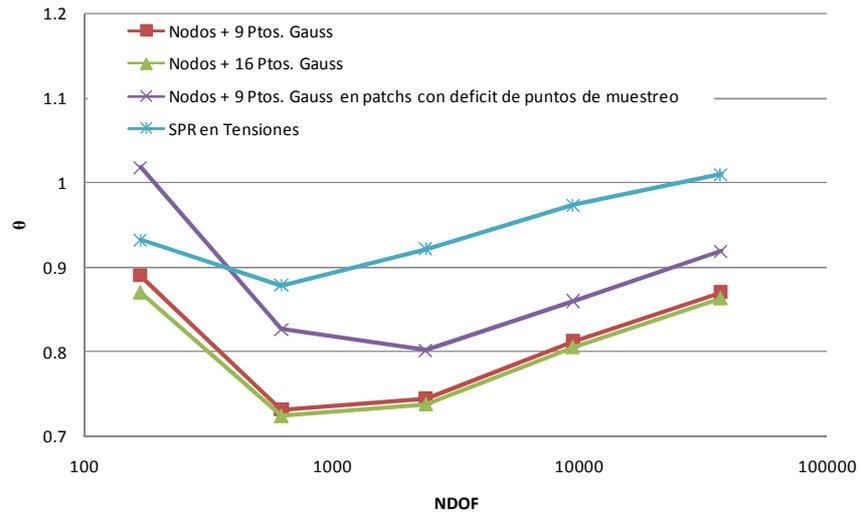


Figura 33.-Representación de la Efectividad Global para elementos cuadriláteros cuadráticos.

Para comprobar la robustez del programa al utilizar elementos cuadriláteros cuadráticos se estudió la convergencia del error en norma energética mediante la técnica SPR en desplazamientos propuesta.

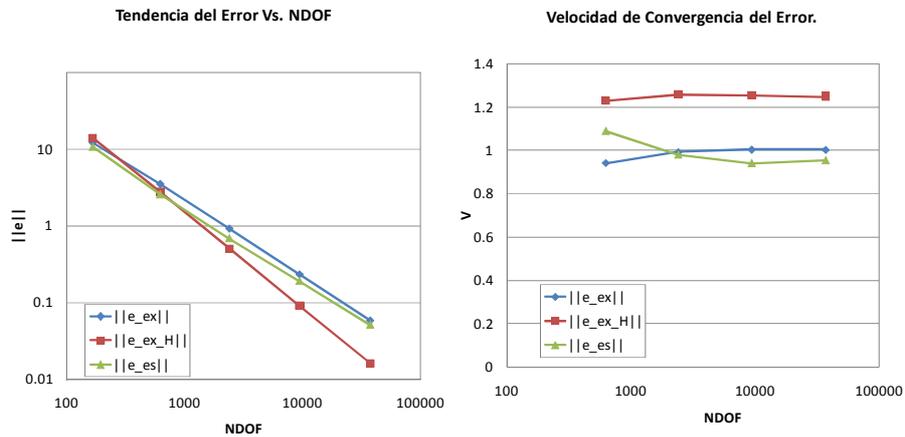


Figura 34.- SPR en Desplazamientos Propuesta. Utilizando Cuadriláteros Cuadráticos. Puntos de muestreo en Nodos y 9 Puntos de Gauss.

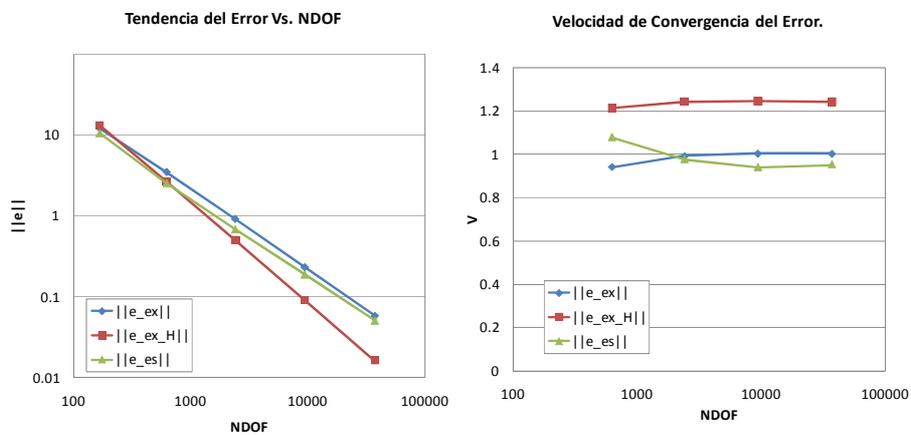


Figura 35.- SPR en Desplazamientos Propuesta. Utilizando Cuadriláteros Cuadráticos y puntos de muestreo en nodos y 16 puntos de Gauss.

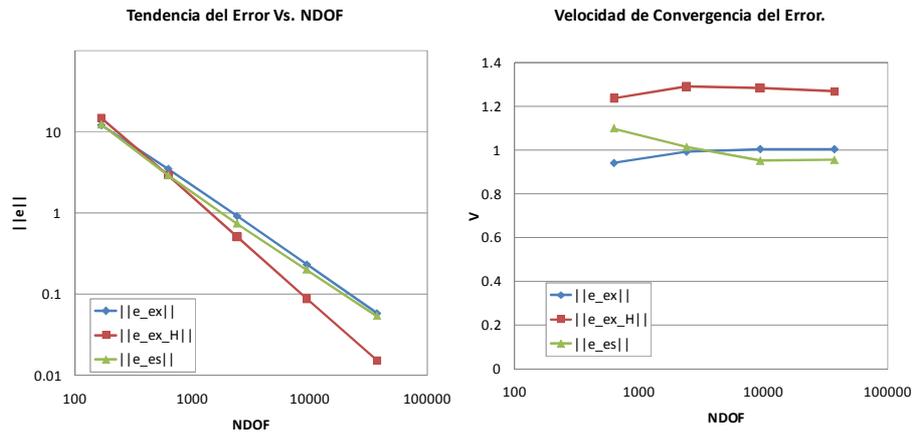


Figura 36.- SPR en Desplazamientos Propuesta. Utilizando Cuadriláteros Cuadráticos. Puntos de muestreo en Nodos y 9 Puntos de Gauss (en patches con déficit de puntos de muestreo).

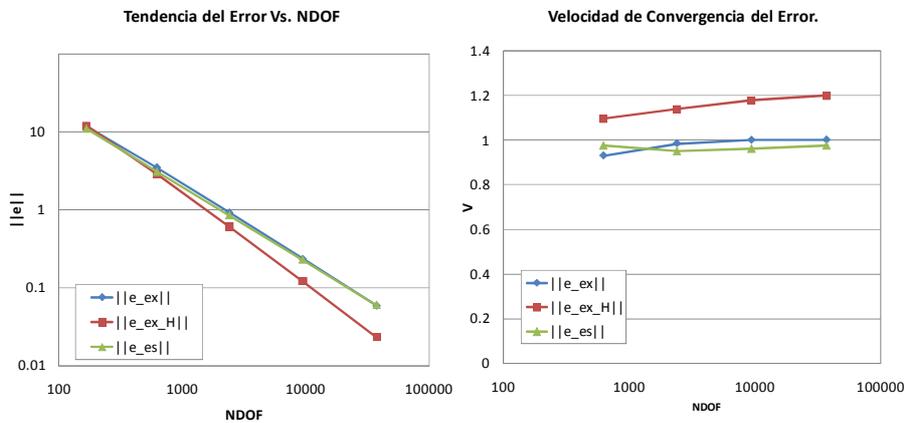


Figura 37.- SPR en Tensiones. Utilizando Cuadriláteros Cuadráticos. Puntos de muestreo en Puntos de Superconvergencia.

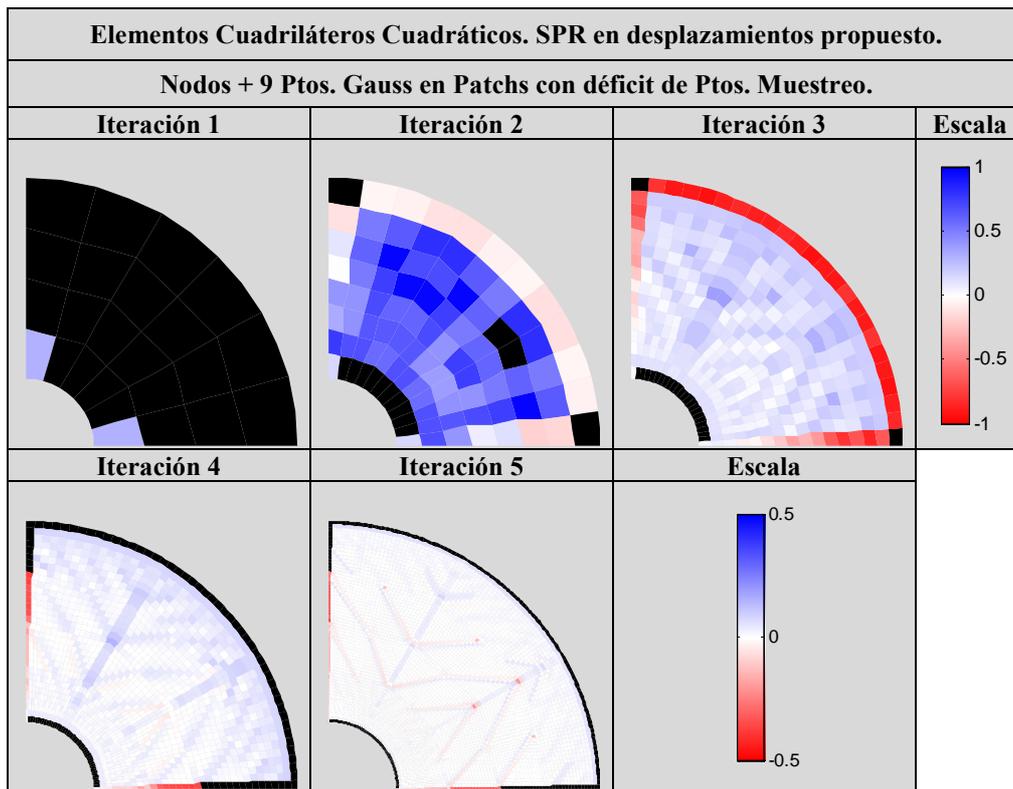


Tabla 26.- Efectividades Locales a nivel de elemento.

CUADRILÁTEROS CUADRÁTICOS.				
SPR DESPLAZAMIENTOS PROPUESTO		SPR TENSIONES		ESCALA
NODOS + 9 PTOS. GAUSS	NODOS + 16 PTOS. GAUSS	PTOS. SUPERCONVERGENCIA		
ITERACIÓN 1				
ITERACIÓN 2				
ITERACIÓN 3				
ITERACIÓN 4				
ITERACIÓN 5				



Tabla 27.- Efectividades Locales a nivel de elemento para el análisis añadiendo puntos de muestreo únicamente en patches donde exista déficit de éstos.



4.1.2 Placa cuadrada de lado unitario.

La Figura 38 muestra la geometría y las condiciones del problema.

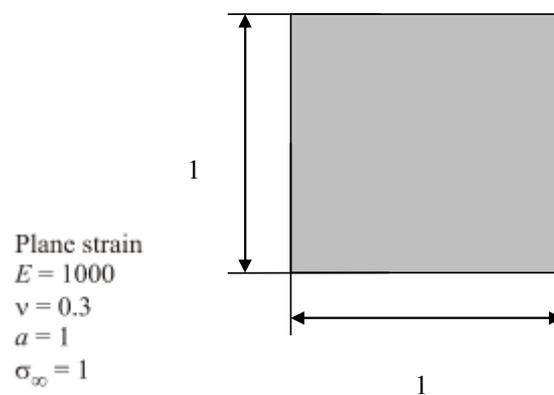


Figura 38.- Placa cuadrada de lado unitario.

En este problema, los desplazamientos exactos son conocidos por lo que son implementadas en el cálculo de forma similar al ejemplo anterior.

$$u(x, y) = x + x^2 - 2 \cdot x \cdot y + x^3 - 3 \cdot x \cdot y^2 + x^2 \cdot y \quad (62)$$

$$v(x, y) = -y - 2 \cdot x \cdot y + y^2 - 3 \cdot x^2 \cdot y + y^3 - x \cdot y^2 \quad (63)$$

El procedimiento seguido en el análisis de este problema es el mismo anteriormente seguido, variando la tipología de los elementos y el grado de estos, se llevan a cabo iteraciones consecutivas de refinamiento de malla.



Con el análisis de este problema intentaremos corroborar las conclusiones más importantes que se han extraído del problema analizado en el apartado anterior, sobre la mejora en la velocidad de convergencia del error que proporciona el método SPR en desplazamientos propuesto:

- La velocidad de convergencia del error en norma energética de la solución en desplazamientos, para el caso de mallados con elementos lineales se aproxima a la unidad (aproximadamente 0.75), resultados similares a los obtenidos mediante la técnica SPR en tensiones de Zienkiewicz y Zhu.
- La velocidad de convergencia del error en norma energética de la solución en desplazamientos, para el caso de mallados con elementos cuadráticos se obtienen resultados alrededor de 1.35, similares a los obtenidos mediante la técnica SPR en tensiones de Zienkiewicz y Zhu.

Elementos Triangulares Lineales:

Tabla 28.- Técnica SPR en Desplazamientos Propuesta. Elementos Triangulares lineales. Puntos de Muestreo en Nodos.

NDOF	Puntos de Muestreo en Nodos				
	$\ U\ $	$\ e_{ex}\ $	$\ e_{ex,H}\ $	$\ e_{es}\ $	θ
102	244.815208	65.9975339	58.9162456	78.2035469	1.18494650
366	250.941389	34.5480458	23.0090098	39.4283321	1.14126085
1374	252.65166	17.618376	8.39454694	19.1615321	1.08758788
5310	253.099859	8.87746408	2.98500577	9.31796257	1.04961986
20862	253.214022	4.45066163	1.05239471	4.56948178	1.02669719



Tabla 29.- Técnica SPR en Desplazamientos Propuesta. Elementos Triangulares lineales.
Puntos de Muestreo en Nodos + 3 Puntos de Gauss.

Puntos de Muestreo en Nodos + 3 Puntos de Gauss					
NDOF	$\ U\ $	$\ e_{ex}\ $	$\ e_{ex_H}\ $	$\ e_{es}\ $	θ
102	244.815208	65.9975339	51.1022188	71.5582310	1.08425613
366	250.941389	34.5480458	19.5717589	36.9825164	1.07046623
1374	252.65166	17.618376	7.08781317	18.3654625	1.04240383
5310	253.099859	8.87746408	2.5177644	9.06041892	1.02060891
20862	253.214022	4.45066163	0.89557245	4.48138877	1.00690395

Tabla 30.- Técnica SPR en Desplazamientos Propuesta. Elementos Triangulares lineales.
Puntos de Muestreo en Nodos + 6 Puntos de Gauss.

Puntos de Muestreo en Nodos + 6 Puntos de Gauss					
NDOF	$\ U\ $	$\ e_{ex}\ $	$\ e_{ex_H}\ $	$\ e_{es}\ $	θ
102	244.815208	65.9975339	48.1286967	69.8309666	1.05808448
366	250.941389	34.5480458	18.3164666	36.5110484	1.05681950
1374	252.65166	17.618376	6.60669414	18.2724692	1.03712562
5310	253.099859	8.87746408	2.33632344	9.05590452	1.02010038
20862	253.214022	4.45066163	0.82561423	4.49053696	1.00895942



Tabla 31.- Técnica SPR en Desplazamientos Propuesta. Elementos Triangulares lineales. Puntos de Muestreo en Nodos + 3 Puntos de Gauss en patches con déficit de puntos de muestreo.

Nodos + 3 Ptos. Gauss en patches con déficit de puntos de muestreo.					
NDOF	$\ U\ $	$\ e_{ex}\ $	$\ e_{ex,H}\ $	$\ e_{es}\ $	θ
102	244.815208	65.9975339	52.0624817	72.8234387	1.10342666
366	250.941389	34.5480458	20.1689003	37.6453491	1.08965206
1374	252.651660	17.6183760	7.30181671	18.6373406	1.05783533
5310	253.099859	8.87746408	2.58202030	9.17483268	1.03349702
20862	253.214022	4.45066163	0.90645550	4.53194610	1.01826346

Tabla 32.- Técnica SPR en Tensiones. Elementos Triangulares lineales. Puntos de Muestreo en Puntos de Superconvergencia.

Puntos de Muestreo en Puntos de Superconvergencia.					
NDOF	$\ U\ $	$\ e_{ex}\ $	$\ e_{ex,H}\ $	$\ e_{es}\ $	θ
102	244.815208	65.9663223	49.1249400	64.0879807	0.97152575
366	250.941389	34.5443200	18.0009774	33.9456479	0.98266945
1374	252.65166	17.6179194	6.46560910	17.4847012	0.99243848
5310	253.099859	8.87740744	2.28188547	8.85191473	0.99712836
20862	253.214022	4.45065457	0.80051722	4.44633884	0.99903032

La representación de las efectividades globales de cada uno de los análisis realizados con el método SPR en desplazamientos propuesto en este Trabajo Fin de Máster, permite observar la tendencia de éstas dependiendo del parámetro que se ha variado en cada análisis. Esto se muestra en la Figura 39.

Efectividad Global para Triángulos Lineales

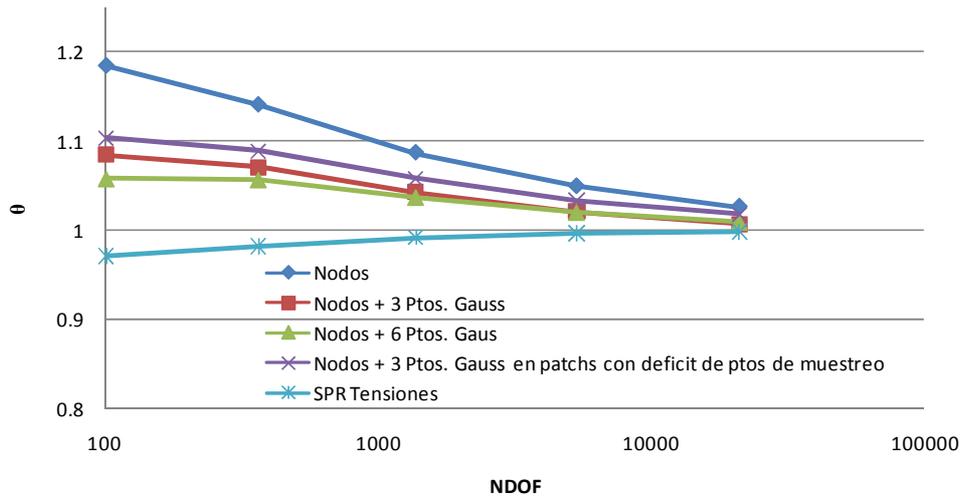


Figura 39.- Representación de la Efectividad Global para elementos Triángulos Lineales.

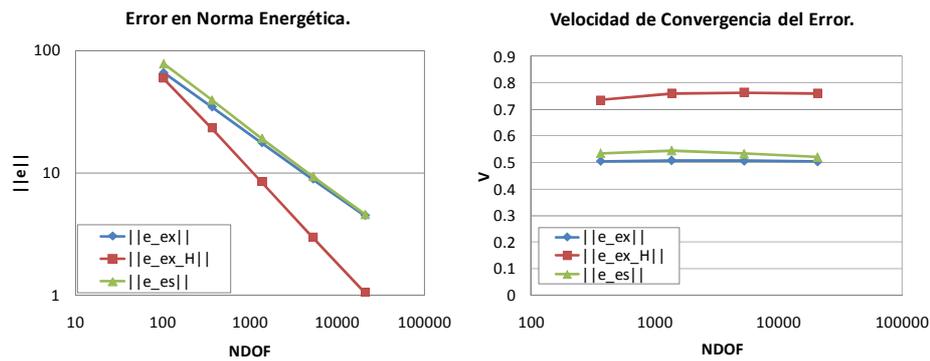


Figura 40.- SPR en Desplazamientos Propuesta. Utilizando Triángulos Lineales. Puntos de muestreo en Nodos.

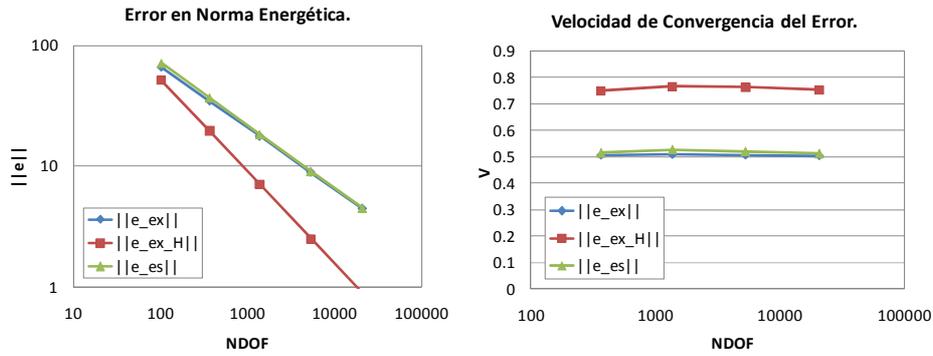


Figura 41.- SPR en Desplazamientos Propuesta. Utilizando Triángulos Lineales. Puntos de muestreo en Nodos + 3 Puntos de Gauss.

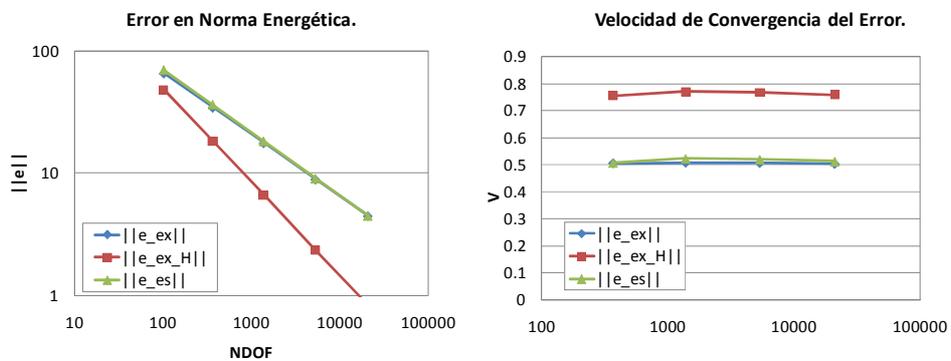


Figura 42.- SPR en Desplazamientos Propuesta. Utilizando Triángulos Lineales. Puntos de muestreo en Nodos + 6 Puntos de Gauss.

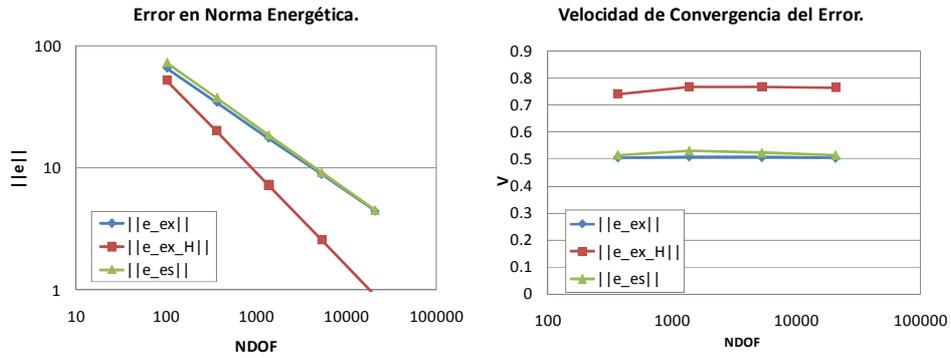


Figura 43.- SPR en Desplazamientos Propuesta. Utilizando Triángulos Lineales. Puntos de muestreo en Nodos + 3 Puntos de Gauss (en patches con déficit de puntos de muestreo).

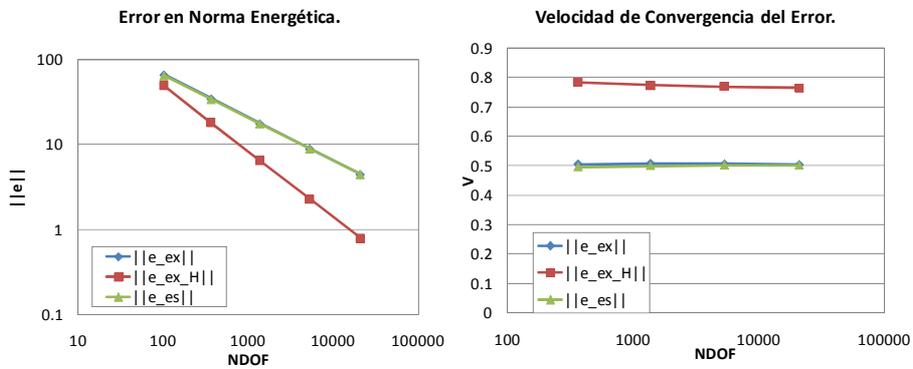


Figura 44.- SPR en Tensiones. Utilizando Triángulos Lineales. Puntos de muestreo en Puntos de Superconvergencia.



Tabla 33.- Efectividades Locales a nivel de elemento. Triángulos lineales.

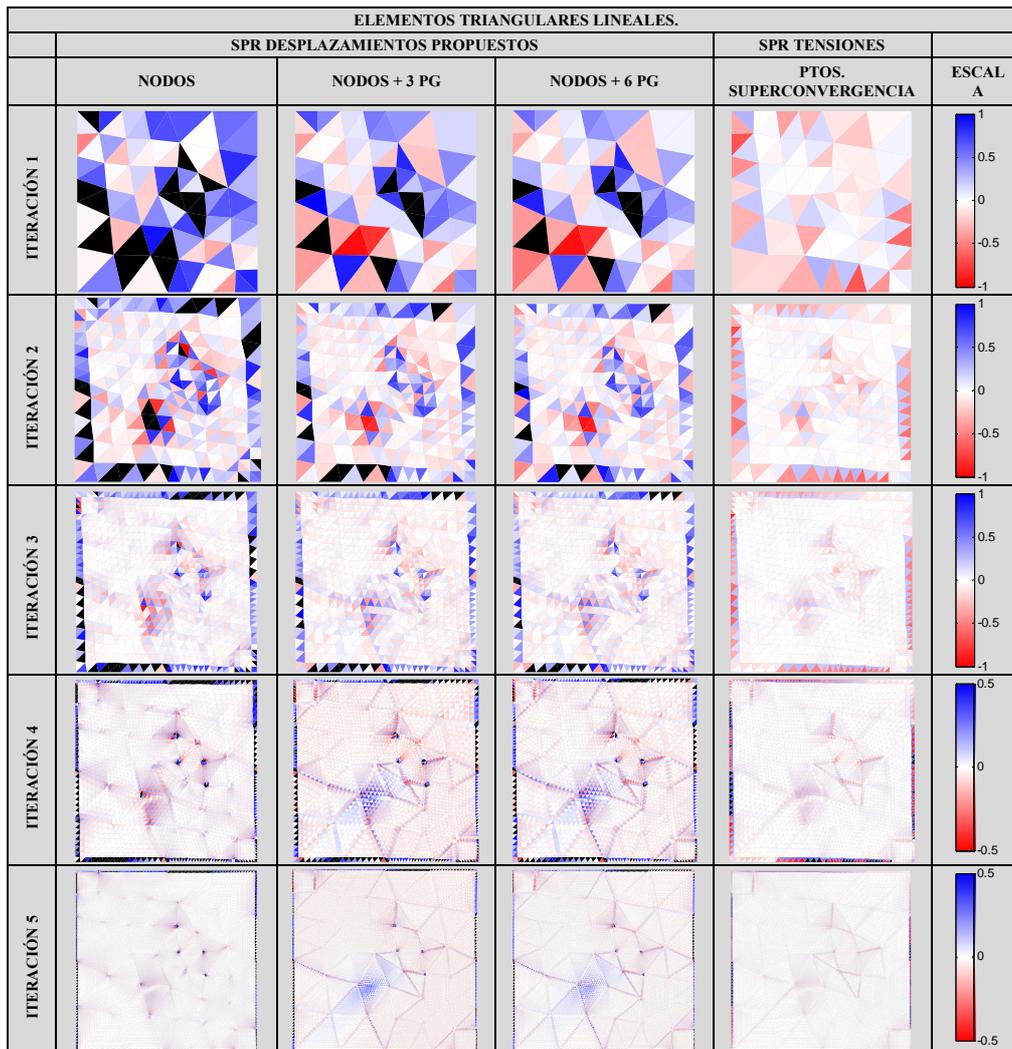
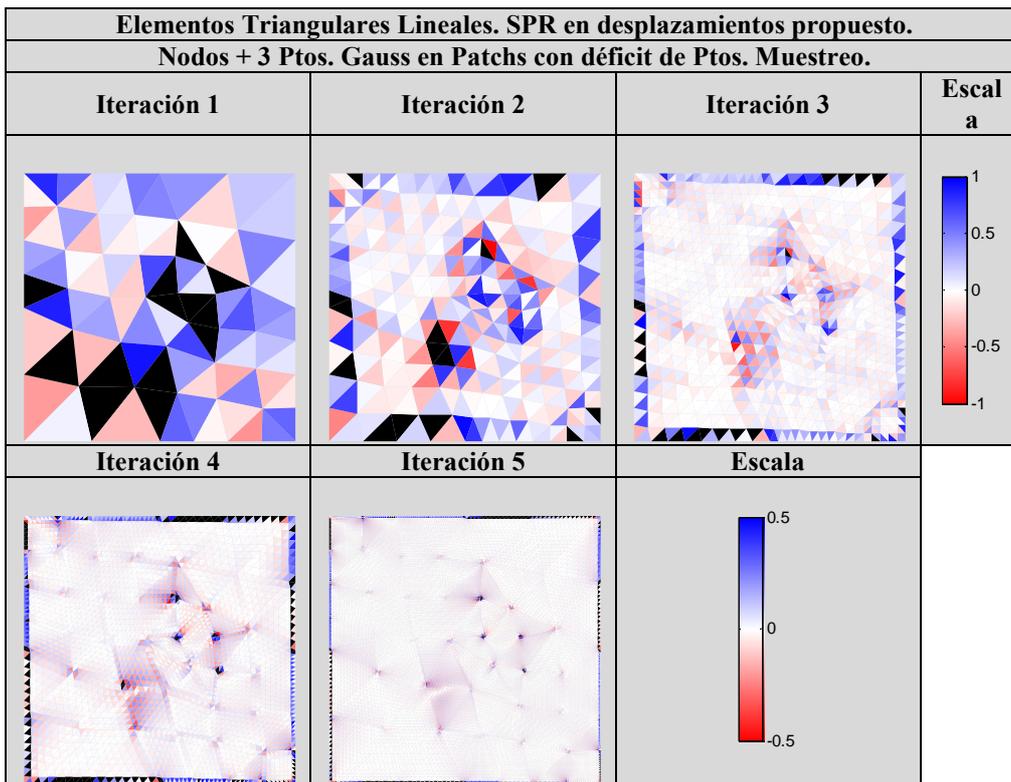




Tabla 34.- Efectividades Locales a nivel de elemento para el análisis añadiendo puntos de muestreo únicamente en patches donde exista déficit de éstos.





Triángulos Cuadráticos:

Al igual que sucedía en el problema analizado en la sección 4.1.1, los resultados obtenidos teniendo en cuenta únicamente los nodos como puntos de muestreo no son satisfactorios y por tanto no se reflejan en este Trabajo Fin de Máster. La causa fundamental es la falta de puntos de muestreo para realizar la interpolación de grado superior propia del método propuesto, ya que se necesitan mínimo 10 puntos para realizar la interpolación con polinomios cúbicos.

Tabla 35.-Técnica SPR en Desplazamientos Propuesta. Elementos Triangulares Cuadráticos. Puntos de Muestreo en Nodos + 6 Puntos de Gauss.

Puntos de Muestreo en Nodos + 6 Puntos de Gauss.					
NDOF	$\ U\ $	$\ e_{ex}\ $	$\ e_{ex,H}\ $	$\ e_{esl}\ $	θ
366	253.217539	4.19879356	1.86241407	4.10982425	0.97881074
1374	253.249998	1.09112226	0.27506722	1.02699443	0.94122764
5310	253.252195	0.27916004	0.04554724	0.26049468	0.93313742
20862	253.252339	0.07063277	0.00871573	0.06584253	0.93218111
82686	253.252348	0.01776602	0.00187289	0.01656623	0.93246701

Tabla 36.-Técnica SPR en Desplazamientos Propuesta. Elementos Triangulares Cuadráticos. Puntos de Muestreo en Nodos + 6 Puntos de Gauss en patches con déficit de puntos de muestreo.

Nodos+6 Ptos. de Gauss en patches con déficit de puntos de muestreo.					
NDOF	$\ U\ $	$\ e_{ex}\ $	$\ e_{ex,H}\ $	$\ e_{esl}\ $	θ
366	253.217539	4.19879356	1.85715265	4.27989335	1.01931502
1374	253.249998	1.09112226	0.26465594	1.08400569	0.99347775
5310	253.252195	0.27916004	0.03915409	0.27695583	0.99210413
20862	253.252339	0.07063277	0.00616269	0.07027560	0.99494336
82686	253.252348	0.01776602	0.00101561	0.01771639	0.99720646



Tabla 37.-Técnica SPR en Tensiones. Elementos Triangulares Cuadráticos. Puntos de Muestreo en Puntos de Superconvergencia.

Puntos de Muestreo en Puntos de Superconvergencia.					
NDOF	$\ U\ $	$\ e_{ex}\ $	$\ e_{ex,H}\ $	$\ e_{es}\ $	θ
366	253.217539	4.19879356	1.63293212	4.02451409	0.95849296
1374	253.249998	1.09112226	0.30049149	1.06912449	0.97983932
5310	253.252195	0.27916004	0.05572093	0.27592279	0.98840358
20862	253.252339	0.07063277	0.01038864	0.07004678	0.99170371
82686	253.252348	0.01776602	0.00198560	0.01764426	0.99314651

Efectividad Global para Triángulos Cuadráticos

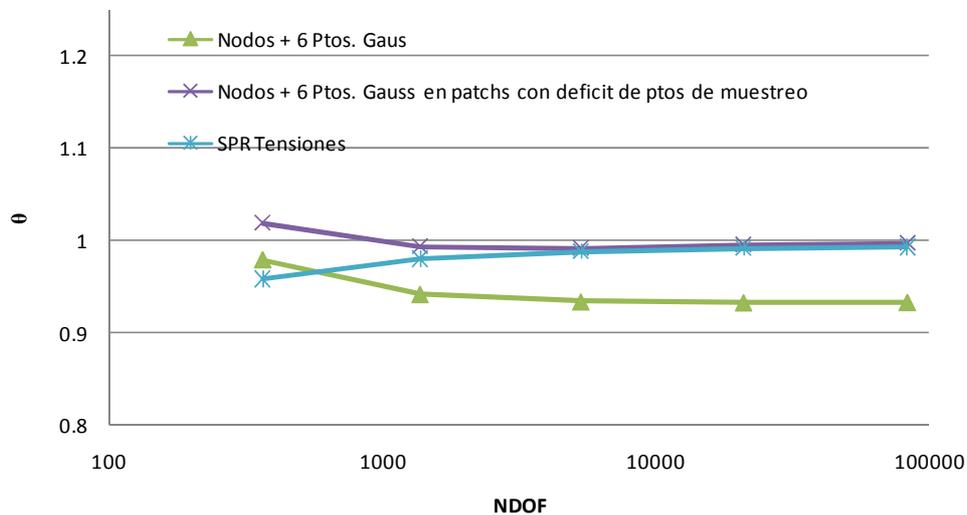


Figura 45.- Representación de la Efectividad Global para elementos Triángulos Cuadriláteros.

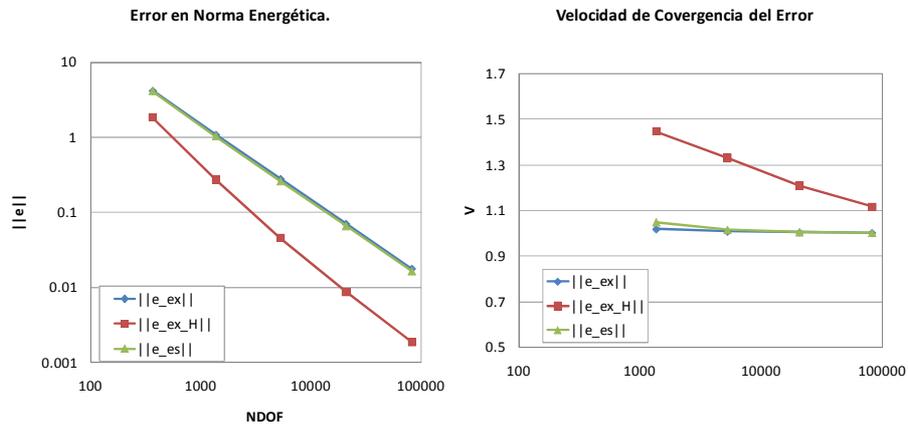


Figura 46.- SPR en Desplazamientos Propuesta. Utilizando Triángulos Cuadráticos. Puntos de muestreo en Nodos + 6 Puntos de Gauss.

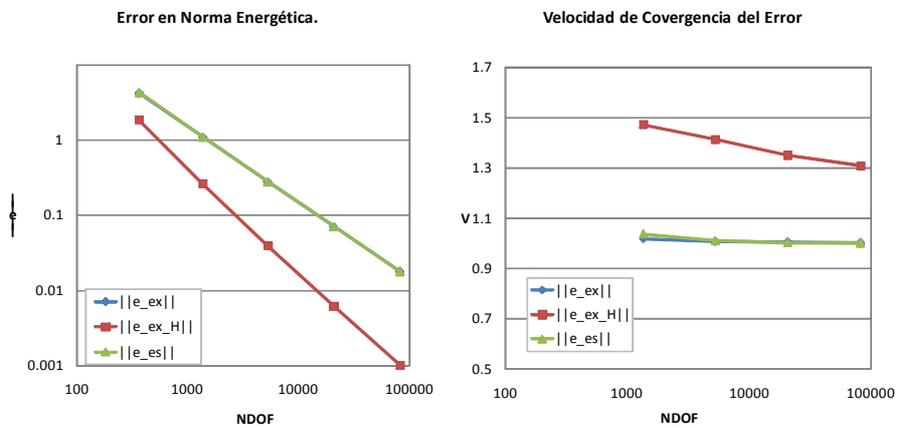


Figura 47.- SPR en Desplazamientos Propuesta. Utilizando Triángulos Cuadráticos. Puntos de muestreo en Nodos + 6 Puntos de Gauss (en patches con déficit de puntos de muestreo).

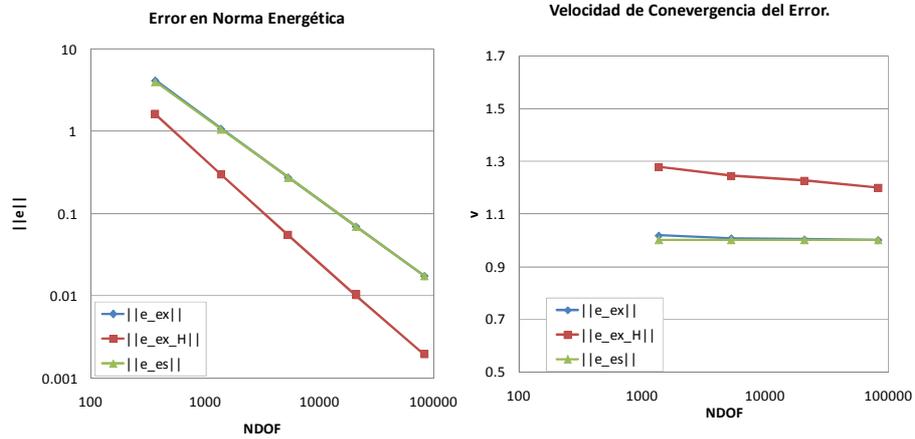


Figura 48.- SPR en Tensiones. Utilizando Triángulos Cuadráticos. Puntos de muestreo en Puntos de Superconvergencia.



Tabla 38.-Efectividades Locales a nivel de elemento. Triángulos cuadráticos.

TRIÁNGULOS CUADRÁTICOS				
	SPR DESPLAZAMIENTOS PROPUESTO		SPR TENSIONES	
	NODOS + 6 P.G.	NODOS + 6 P.G. PATCHS CON DEFICIT DE PTOS. DE MUESTREO.	PUNTOS DE SUPERCONVERGENCIA.	ESCALA
ITERACIÓN 1				
ITERACIÓN 2				
ITERACIÓN 3				
ITERACIÓN 4				
ITERACIÓN 5				

**Cuadriláteros Lineales:**Tabla 39.-Técnica SPR en Desplazamientos Propuesta. Elementos Cuadriláteros lineales.
Puntos de Muestreo en Nodos.

Puntos de Muestreo en Nodos					
NDOF	$\ U\ $	$\ e_{ex}\ $	$\ e_{ex_H}\ $	$\ e_{es}\ $	θ
102	247.901909	52.9012732	57.9970919	63.9854234	1.20952521
366	251.881757	26.8267875	20.7339662	30.7002241	1.14438690
1374	252.904999	13.5045011	7.42333332	14.7489723	1.09215232
5310	253.165028	6.76983065	2.64479201	7.12927310	1.05309475
20862	253.230469	3.38832545	0.93902941	3.48535615	1.02863677

Tabla 40.-Técnica SPR en Desplazamientos Propuesta. Elementos Cuadriláteros lineales.
Puntos de Muestreo en Nodos + 4 Puntos de Gauss.

Puntos de Muestreo en Nodos y 4 Puntos de Gauss.					
NDOF	$\ U\ $	$\ e_{ex}\ $	$\ e_{ex_H}\ $	$\ e_{es}\ $	θ
102	247.901909	52.9012732	51.4912001	59.4392171	1.123587646
366	251.881757	26.8267875	18.2222231	29.5170082	1.100281135
1374	252.904999	13.5045011	6.4176474	14.5398002	1.07666326
5310	253.165028	6.76983065	2.28295226	7.17282550	1.059528054
20862	253.230469	3.38832545	0.82244663	3.55288264	1.048565934



Tabla 41.-Técnica SPR en Desplazamientos Propuesta. Elementos Cuadriláteros lineales. Puntos de Muestreo en Nodos + 9 Puntos de Gauss.

Puntos de Muestreo en Nodos y 9 Puntos de Gauss.					
NDOF	$\ U\ $	$\ e_{ex}\ $	$\ e_{ex_H}\ $	$\ e_{es}\ $	θ
102	247.876115	52.900408	48.8407788	58.0699646	1.097722434
366	251.878481	26.8267987	17.3731216	29.3520419	1.094131365
1374	252.904580	13.5045059	6.14524697	14.6063523	1.081591022
5310	253.164974	6.76983118	2.19123387	7.24757290	1.070569221
20862	253.230463	3.38832544	0.78972342	3.60145121	1.062900029

Tabla 42.-Técnica SPR en Desplazamientos Propuesta. Elementos Cuadriláteros lineales. Puntos de Muestreo en Nodos + 4 Puntos de Gauss en patchs con déficit de puntos de muestreo.

Nodos+ 4 PG en patch con déficit de puntos de muestreo.					
NDOF	$\ U\ $	$\ e_{ex}\ $	$\ e_{ex_H}\ $	$\ e_{es}\ $	θ
102	247.901909	52.9012732	51.7227505	59.4855341	1.12446318
366	251.881757	26.8267875	18.3867618	29.3628062	1.09453308
1374	252.904999	13.5045011	6.55287703	14.3598388	1.06333723
5310	253.165028	6.76983065	2.33004397	7.02261791	1.03734026
20862	253.230469	3.38832545	0.82657648	3.45728502	1.02035211



Tabla 43.-Técnica SPR en Tensiones. Elementos Cuadriláteros lineales. Puntos de Muestreo en Puntos de Superconvergencia.

Puntos de Muestreo en Puntos de Superconvergencia					
NDOF	$\ U\ $	$\ e_{ex}\ $	$\ e_{ex_H}\ $	$\ e_{es}\ $	θ
102	247.889008	53.0297139	49.334081	54.8120148	1.03360948
366	251.880118	26.8413166	17.4203449	27.1291218	1.01072247
1374	252.90479	13.5056504	6.1198566	13.5365164	1.00228542
5310	253.165001	6.76978488	2.14415164	6.77001894	1.00003457
20862	253.230466	3.38826916	0.75302301	3.38724500	0.99969773

Efectividad Global para Cuadriláteros Lineales

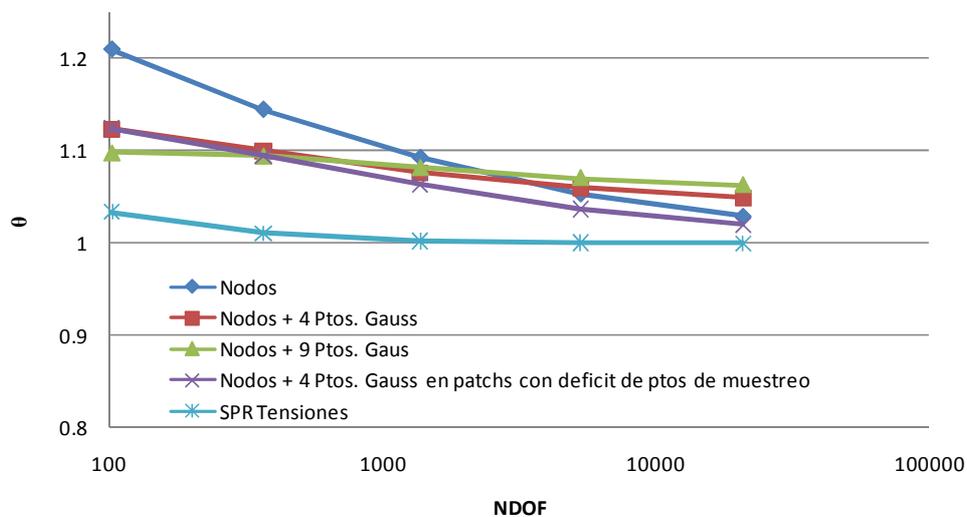


Figura 49.- Representación de la Efectividad Global para elementos Cuadriláteros Lineales.

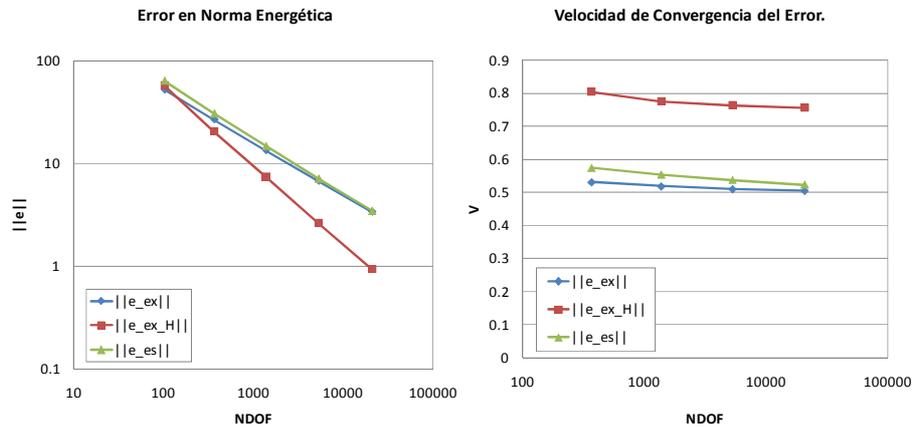


Figura 50.- SPR en Desplazamientos Propuesta. Utilizando Cuadriláteros Lineales. Puntos de muestreo en Nodos.

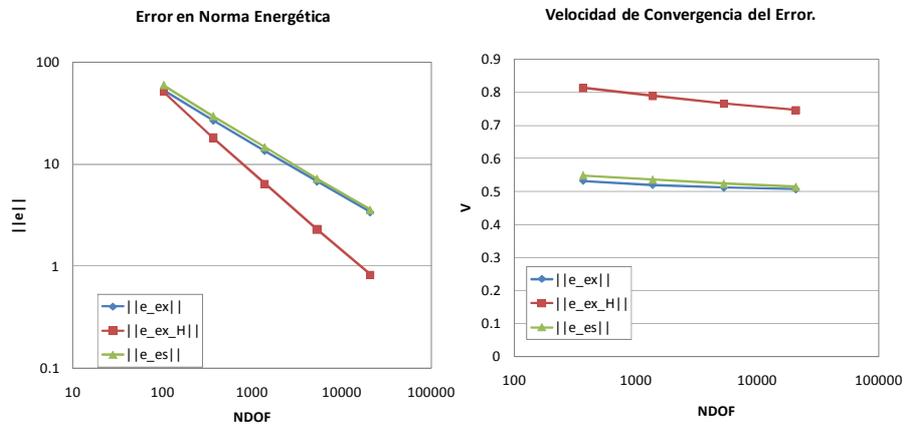


Figura 51.- SPR en Desplazamientos Propuesta. Utilizando Cuadriláteros Lineales. Puntos de muestreo en Nodos + 4 Puntos de Gauss.

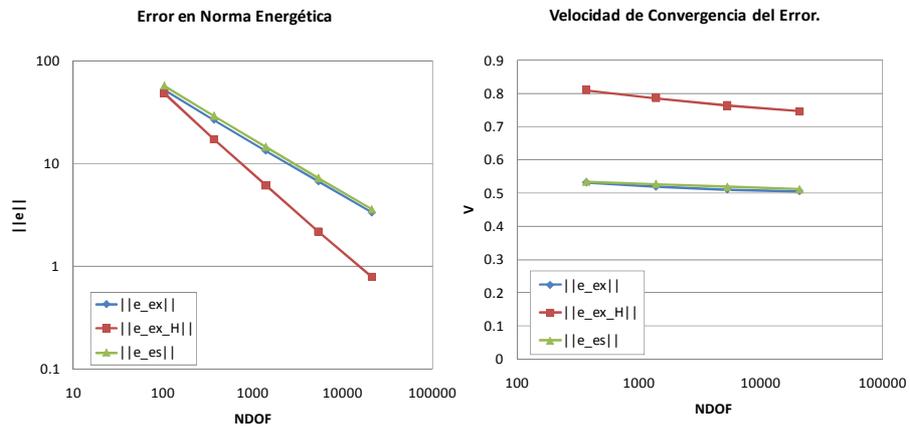


Figura 52.- SPR en Desplazamientos Propuesta. Utilizando Cuadriláteros Lineales. Puntos de muestreo en Nodos + 9 Puntos de Gauss.

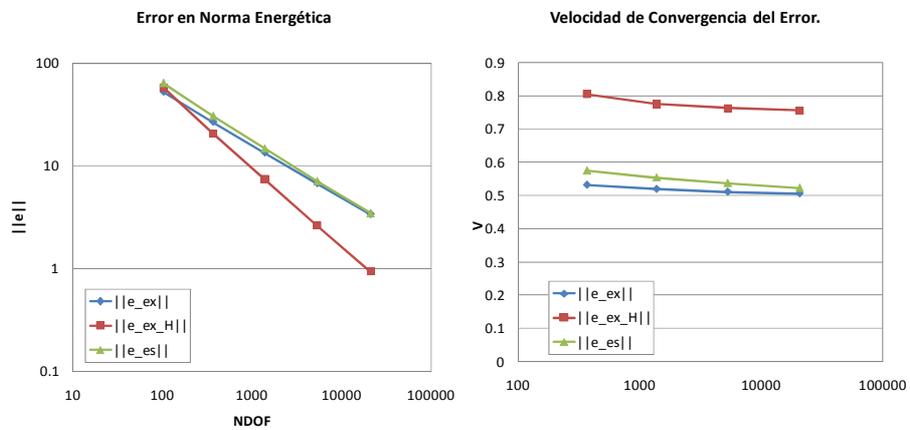


Figura 53.- SPR en Desplazamientos Propuesta. Utilizando Cuadriláteros Lineales. Puntos de muestreo en Nodos + 4 Puntos de Gauss en patches con déficit de puntos de muestreo.

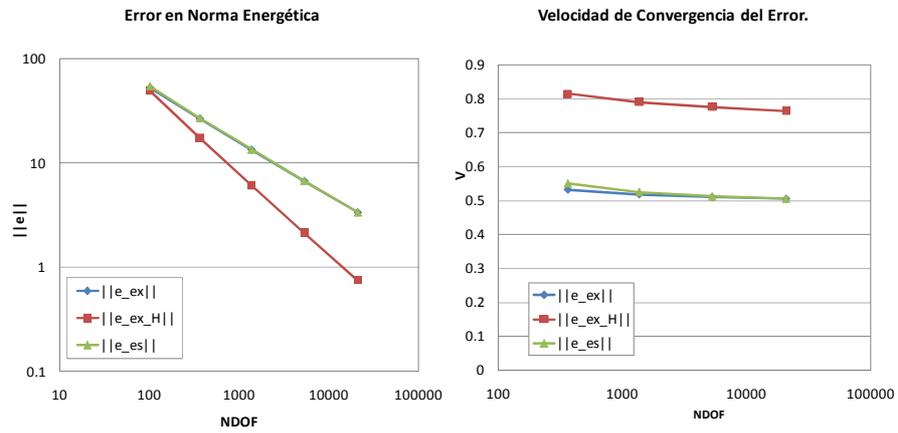


Figura 54.- SPR en Tensiones. Utilizando Cuadriláteros Lineales. Puntos de muestreo en Puntos de Superconvergencia.



Tabla 44.-Efectividades Locales a nivel de elemento.

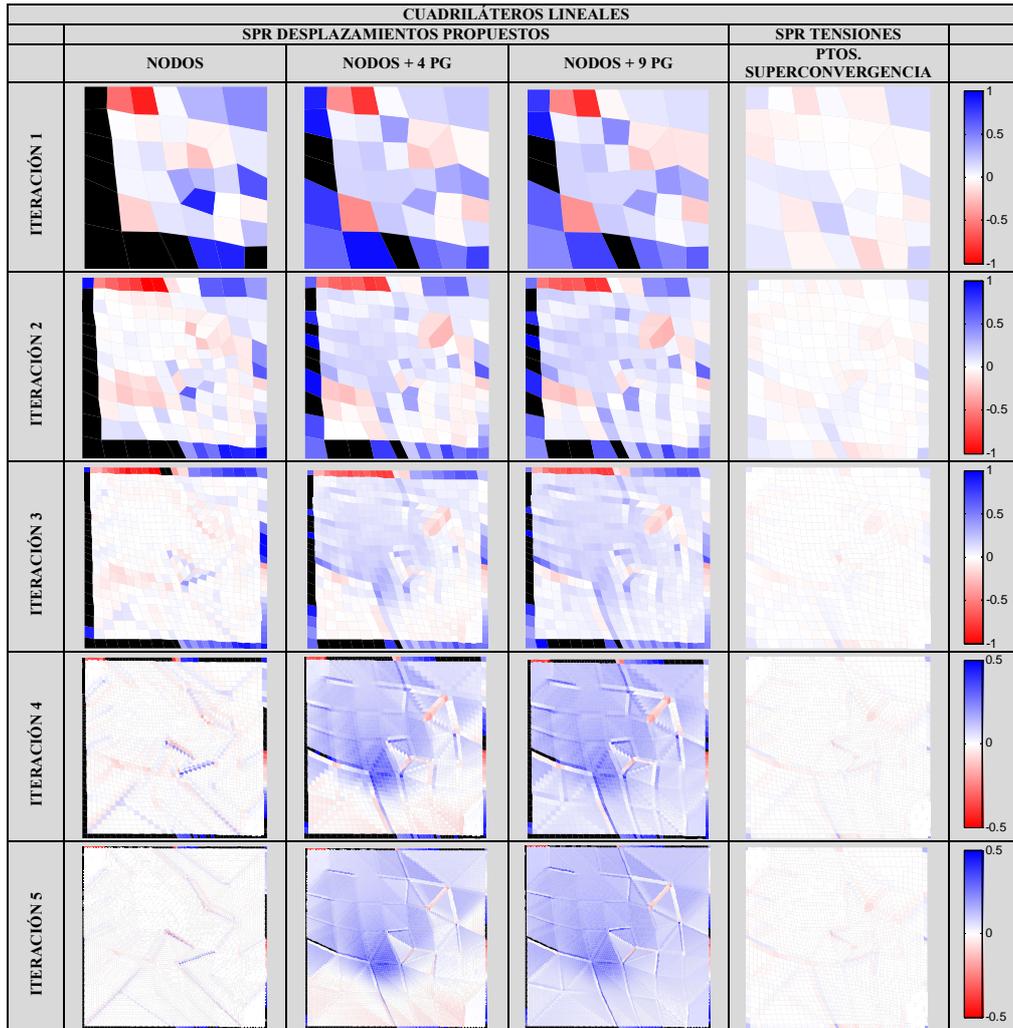
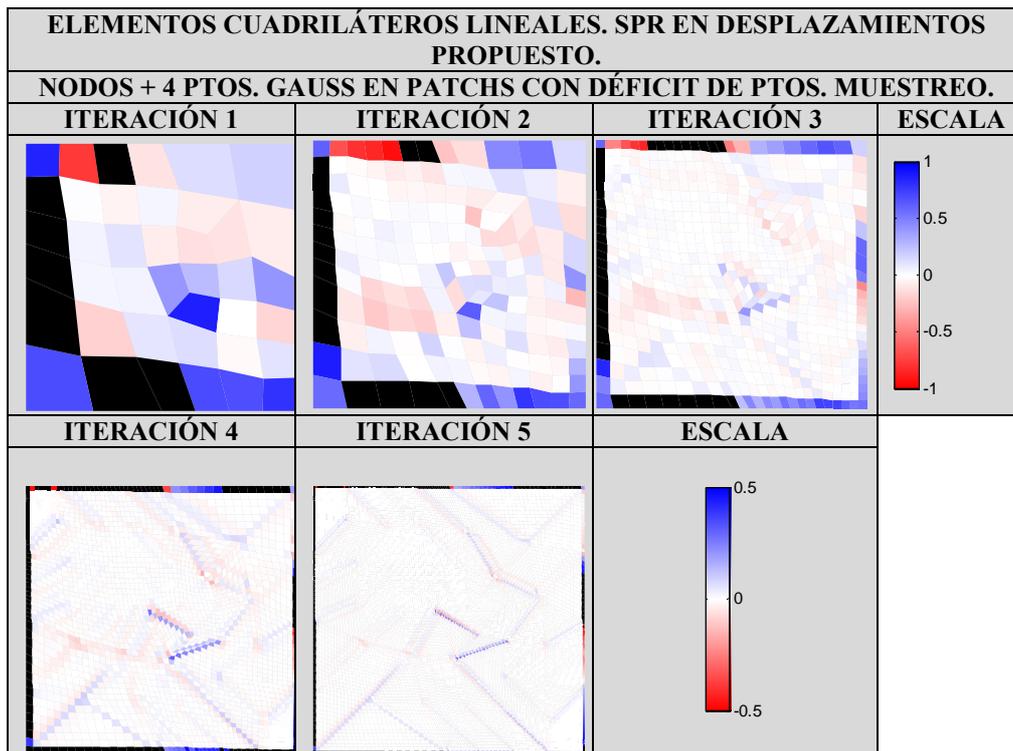




Tabla 45.-Efectividades Locales a nivel de elemento para el análisis añadiendo puntos de muestreo únicamente en patches donde exista déficit de éstos.





Cuadriláteros Cuadráticos:

Tabla 46.-Técnica SPR en Desplazamientos Propuesta. Elementos Cuadriláteros Cuadráticos. Puntos de Muestreo en Nodos + 9 Puntos de Gauss.

Puntos de Muestreo en Nodos + 9 Puntos de Gauss					
NDOF	$\ U\ $	$\ e_{ex}\ $	$\ e_{ex_H}\ $	$\ e_{es}\ $	θ
286	253.229299	3.78656269	2.0434685	3.30723076	0.8734123
1054	253.250883	0.92395503	0.2983188	0.84652593	0.9161982
4030	253.252252	0.23580806	0.0476776	0.22158581	0.9396871
15742	253.252342	0.06294242	0.0088403	0.06041321	0.9598170
62206	253.252348	0.01773244	0.0019970	0.01731639	0.9765375

Tabla 47.-Técnica SPR en Desplazamientos Propuesta. Elementos Cuadriláteros Cuadráticos. Puntos de Muestreo en Nodos + 9 Puntos de Gauss en patchs con déficit de puntos de muestreo.

Nodos + 9 PG en patchs con déficit de puntos de muestreo					
NDOF	$\ U\ $	$\ e_{ex}\ $	$\ e_{ex_H}\ $	$\ e_{es}\ $	θ
286	253.229299	3.78656269	2.07668384	3.27215493	0.86414915
1054	253.250883	0.92395503	0.31443467	0.86362117	0.93470044
4030	253.252252	0.23580806	0.05293527	0.22843891	0.96874939
15742	253.252342	0.06294242	0.01097186	0.06244046	0.99202515
62206	253.252348	0.01773244	0.00287240	0.01786109	1.00725546



Tabla 48.-Técnica SPR en Tensiones. Elementos Cuadriláteros Cuadráticos. Puntos de Muestreo en Puntos de Superconvergencia.

Puntos de Muestreo en Puntos de Superconvergencia					
NDOF	$\ U\ $	$\ e_{ex}\ $	$\ e_{ex,H}\ $	$\ e_{es}\ $	θ
286	253.22925	3.4203744	1.5730311	3.26174499	0.9536220
1054	253.250881	0.8621144	0.2860497	0.86742344	1.0061580
4030	253.252252	0.2210953	0.0544146	0.22660795	1.0249333
15742	253.252342	0.0583910	0.0110344	0.06015555	1.0302185
62206	253.252348	0.0160962	0.0024464	0.01653494	1.0272559

Efectividad Global para Cuadriláteros Lineales

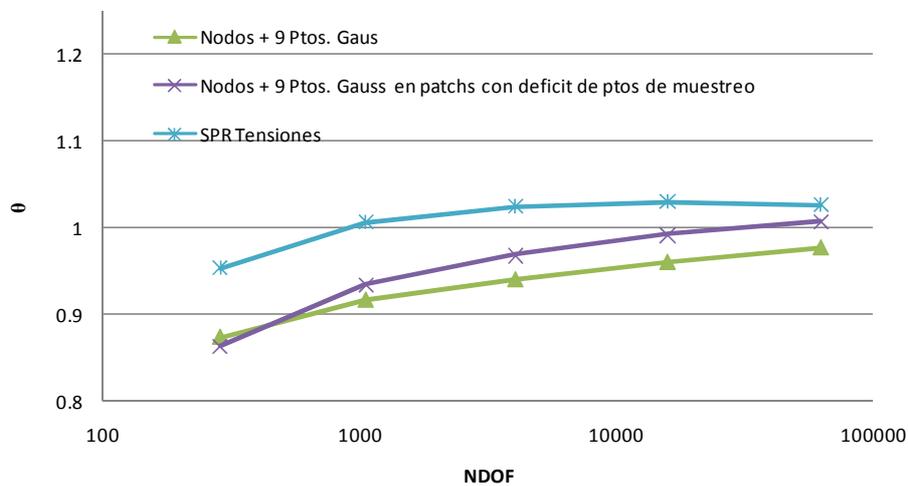


Figura 55.- Representación de la Efectividad Global para elementos Cuadriláteros Cuadráticos.

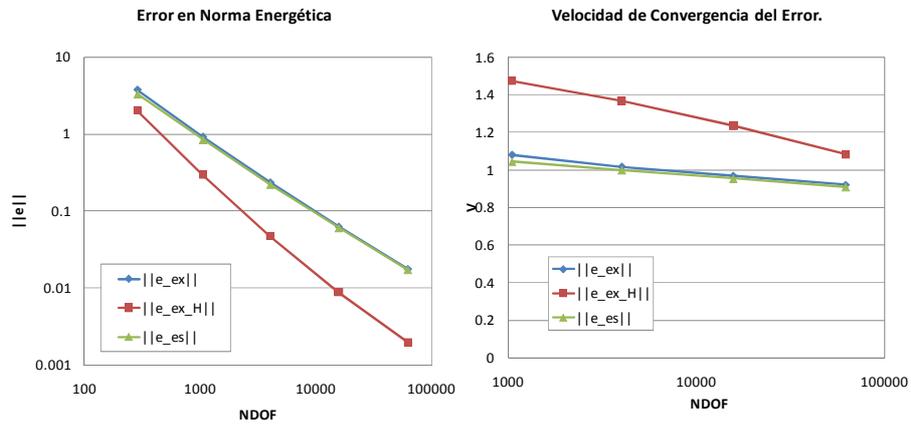


Figura 56.- SPR en Desplazamientos Propuesta. Utilizando Cuadriláteros Cuadráticos. Puntos de muestreo en Nodos + 9 Puntos de Gauss.

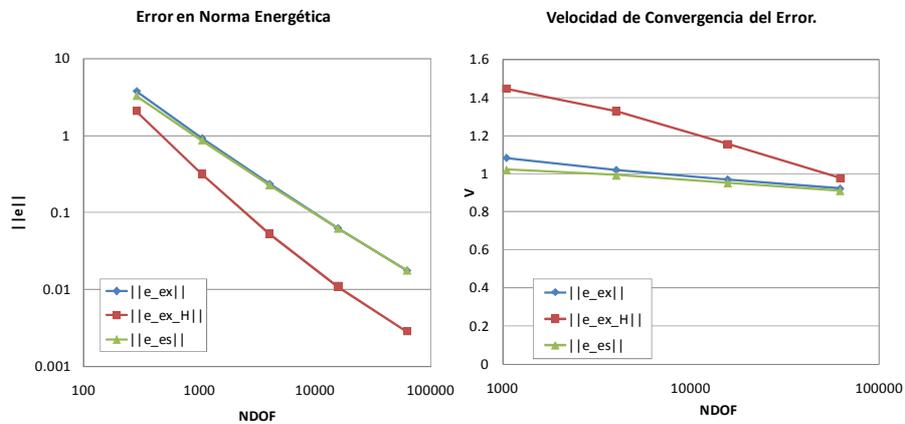


Figura 57.- SPR en Desplazamientos Propuesta. Utilizando Cuadriláteros Cuadráticos. Puntos de muestreo en Nodos + 9 Puntos de Gauss en patches con déficit de puntos de muestreo.

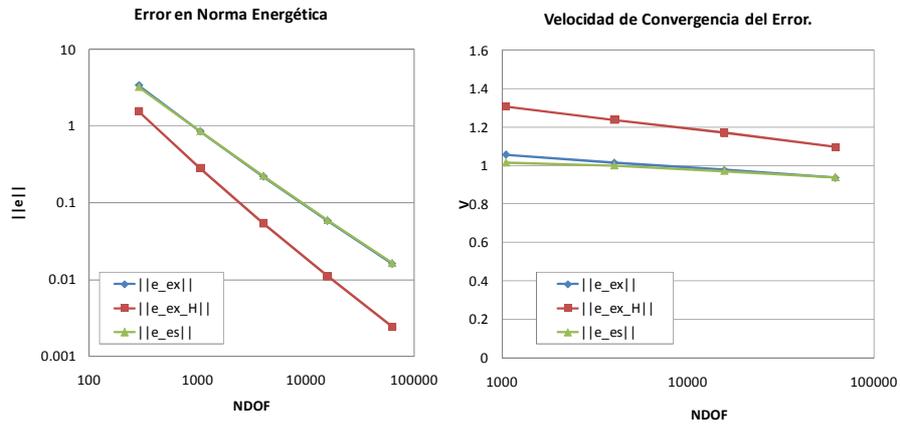
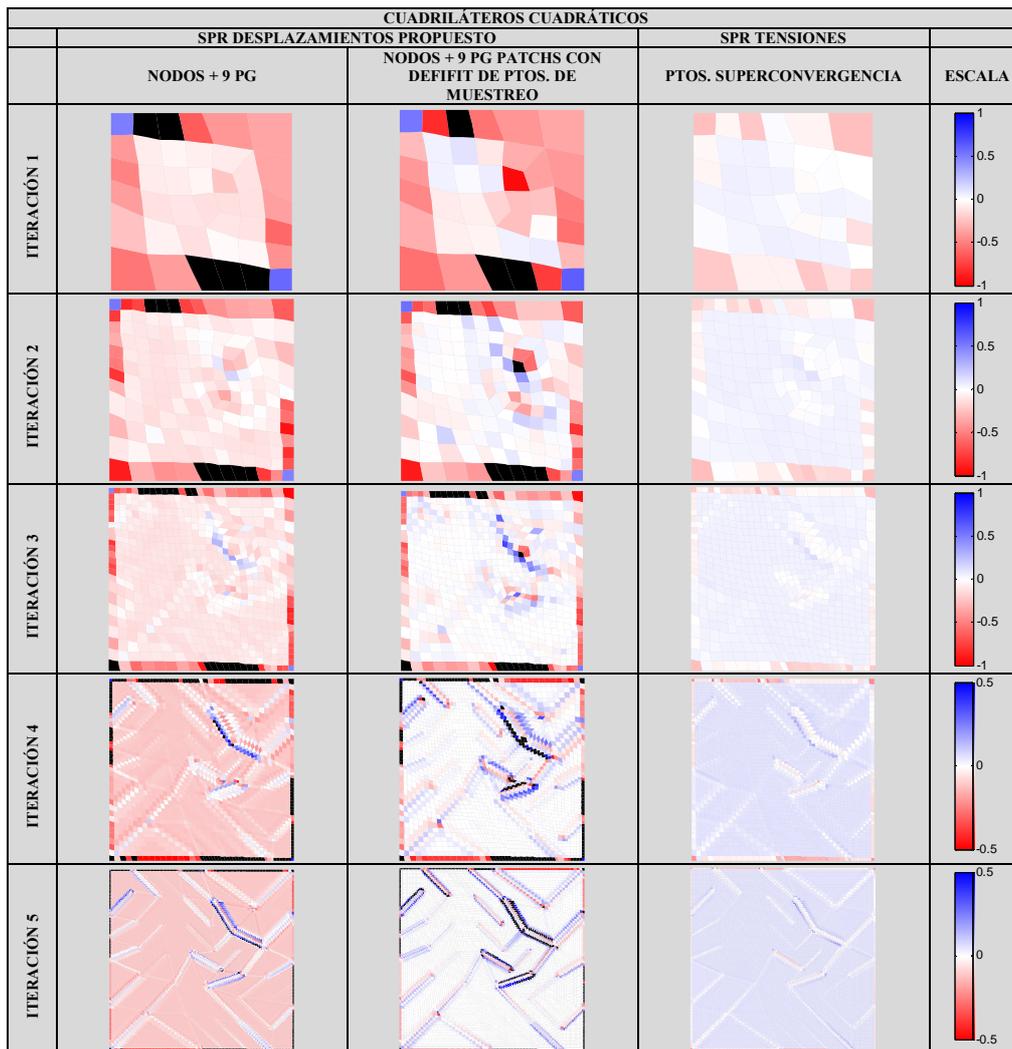


Figura 58.- SPR en Tensiones. Utilizando Cuadriláteros Cuadráticos. Puntos de muestreo en Puntos de Superconvergencia.



Tabla 49.-Efectividades Locales a Nivel de Elemento.





4.2 Conclusiones del estudio de problemas con solución analítica.

Después del estudio de los resultados obtenidos en el análisis de los problemas con solución analítica, se extraen conclusiones sobre el modo de abordar los problemas en los que no se dispone de esta solución. Así pues, llegando a una solución de compromiso entre los resultados de efectividad obtenidos y el coste computacional del cálculo de esta solución, dependiendo de los elementos utilizados para la obtención de la solución estimada y su grado, se utilizarán los siguientes puntos de interpolación:

- **Elementos Triangulares Lineales:** Puntos de Superconvergencia para desplazamientos añadiendo 3 puntos de Gauss adicionales, únicamente en los patches que sea necesario para resolver la interpolación de grado superior.
- **Elementos Triangulares Cuadráticos:** Puntos de Superconvergencia para desplazamientos añadiendo 6 puntos de Gauss adicionales, únicamente en los patches que sea necesario para resolver la interpolación de grado superior.
- **Elementos Cuadriláteros Lineales:** Puntos de Superconvergencia para desplazamientos añadiendo 4 puntos de Gauss adicionales, únicamente en los patches que sea necesario para resolver la interpolación de grado superior.
- **Elementos Cuadriláteros Cuadráticos:** Puntos de Superconvergencia para desplazamientos añadiendo 9 puntos de Gauss adicionales, únicamente en los patches que sea necesario para resolver la interpolación de grado superior.

4.3 Aplicación a la resolución de problemas sin solución analítica.

4.3.1 Presa con cargas superficiales y gravitatorias

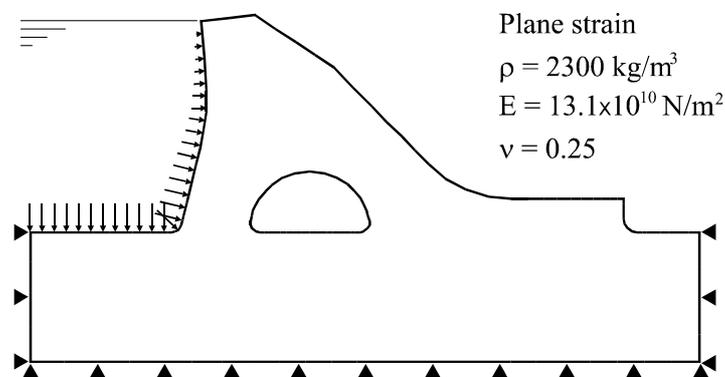


Figura 59.- Planteamiento del problema y representación de la presa.

Algunas consideraciones sobre el problema.

Se dispone de la solución de elementos finitos para elementos triangulares tanto lineales como cuadráticos. Se llevará a cabo el análisis utilizando las estrategias seleccionadas como solución de compromiso expuesta en el apartado 3.2.3, y confirmada durante la validación del método en los apartados 4.1.1 y 4.1.2. Cabe recordar que éstas añaden el número de puntos de muestreo necesario, para resolver la interpolación de grado superior propia del Método SPR en Desplazamientos Propuesto, únicamente en aquellos patches que es necesario, con lo que se ajusta el coste computacional sin perder calidad en la solución obtenida.

Triángulos Lineales:

Tabla 50.-Secuencia de refinamiento de malla para triángulos lineales.

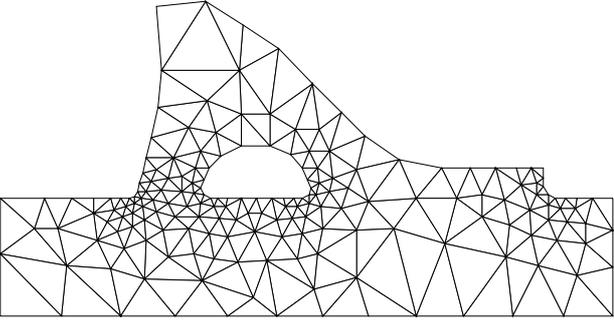
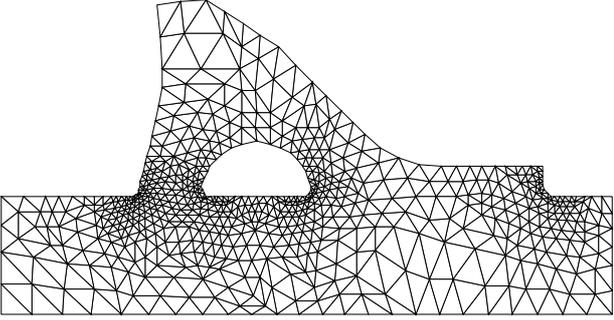
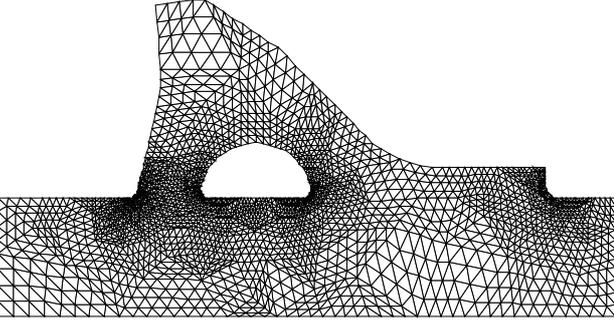
TRIÁNGULOS LINEALES	
ITERACIÓN	SECUENCIA DE REFINAMIENTO DE MALLA
ITERACIÓN 1	
ITERACIÓN 2	
ITERACIÓN 3	

Tabla 51.-Secuencia de refinamiento de malla para triángulos lineales.
Continuación

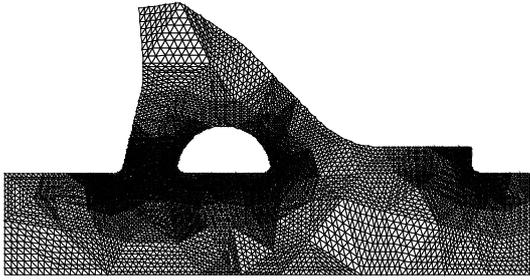
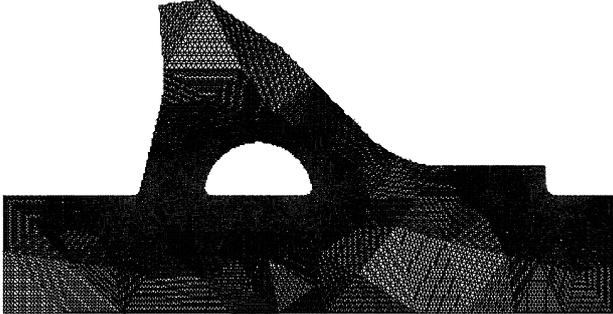
TRIÁNGULOS LINEALES	
ITERACIÓN N	SECUENCIA DE REFINAMIENTO DE MALLA
ITERACIÓN 4	
ITERACIÓN 5	

Tabla 52.-Error Estimado utilizando Triángulos Lineales.

Triángulos Lineales. Añadiendo 3 Puntos de Muestreo.			
NDOF	SPR en desplazamientos Propuesto		SPR en tensiones
	$ U $	$ e_{es} $	$ e_{es} $
358	26.7950014	6.03370414	5.09264066
1327	27.3006325	3.59446394	3.2273357
5089	27.4847082	1.92390461	1.81101404
19909	27.5385697	0.97944736	0.94779895
78733	27.5528106	0.49005592	0.48169967

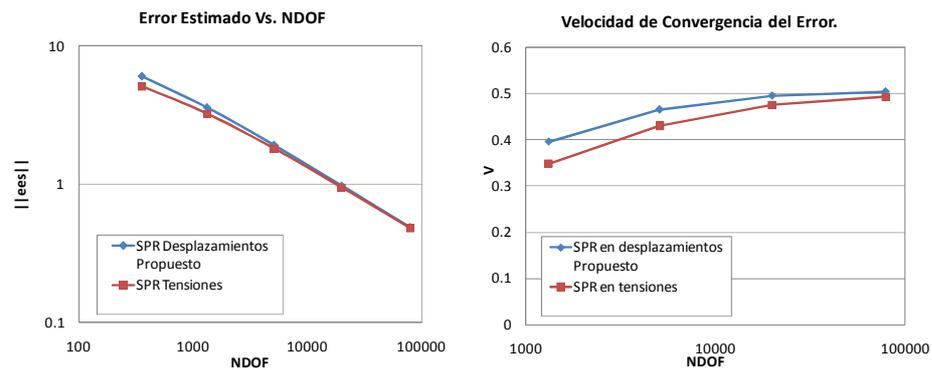


Figura 60.- Comparativa entre SPR en desplazamientos propuesto y tensiones. Tendencia del Error en Norma Energética y velocidad de convergencia, utilizando Triángulos Lineales.



Triángulos Cuadráticos:

Las imágenes de la secuencia de refinamiento de malla tienen el mismo aspecto que en el caso lineal, estudiado anteriormente.

Tabla 53.-Error Estimado utilizando Triángulos Cuadráticos.

Triángulos Cuadráticos. Añadiendo 6 Puntos de Muestreo.			
NDOF	SPR en desplazamientos Propuesto		SPR en tensiones
	$ U $	$ e_{es} $	$ e_{es} $
1327	27.5214017	1.6188461	1.45701418
5089	27.5539185	0.484431	0.44435611
19909	27.5573437	0.13276333	0.12637694
78733	27.5576296	0.03530101	0.03457834

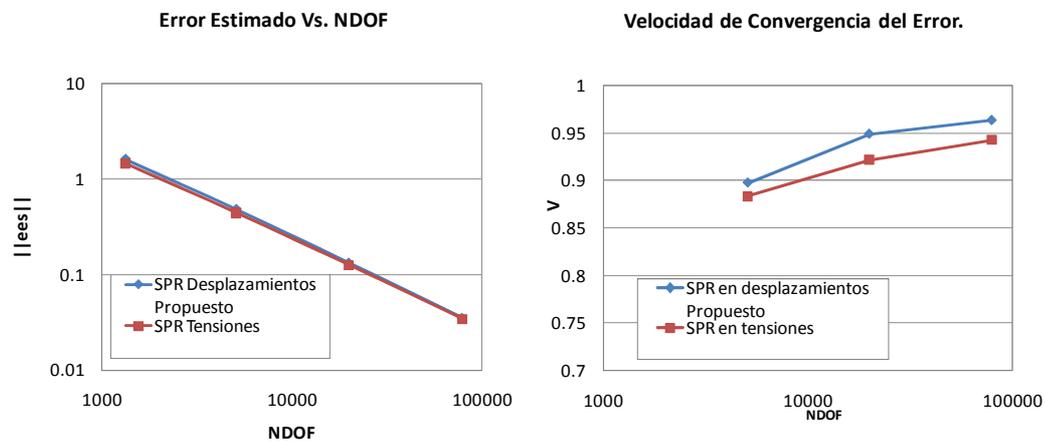


Figura 61.- Comparativa entre SPR en desplazamientos propuesto y tensiones. Tendencia del Error en Norma Energética y velocidad de convergencia, utilizando Triángulos Cuadráticos.



4.4 Conclusiones del estudio de problemas sin solución analítica.

Al igual que sucedía para triángulos lineales, la evolución de los errores estimados es similar con la aplicación de las dos técnicas SPR estudiadas, aunque la velocidad de convergencia del error es mayor en el caso de la SPR en desplazamientos propuesta.



5 Uso de la solución en desplazamientos evaluada en *solvers* Iterativos.

Se propone una técnica que permite utilizar la solución mejorada en desplazamientos, obtenida mediante la técnica propuesta en este Trabajo Fin de Máster, en los procedimientos iterativos de resolución de sistemas de ecuaciones. La idea fundamental es tomar la solución en desplazamientos obtenida en la malla i , mediante la técnica SPR en desplazamientos propuesta, para proyectarla sobre la malla $i+1$ y que sirva como solución inicial cuando se utiliza un método iterativo para resolver el sistema de ecuaciones de la malla, con el fin de que éste converja de forma más rápidamente a la solución.

Se pretende llevar a cabo un estudio básico de lo comentado anteriormente, con el fin de ver si los resultados son satisfactorios, dejando abierta la posibilidad de futuros desarrollos más profundos y aplicación de nuevos métodos iterativos que pudieran aportar mejores resultados.

A fin de comprobar el comportamiento de la técnica propuesta, se realizarán tres tipos de análisis dependiendo del vector de soluciones iniciales utilizado como vector inicial en los métodos iterativos empleados:

- Análisis con el vector de soluciones iniciales en el proceso iterativo igual al vector de desplazamientos nulos.
- Análisis con el vector de soluciones iniciales en el proceso iterativo igual al vector de desplazamientos obtenido mediante el Método de los Elementos Finitos en la malla i , proyectado sobre la malla $i+1$.



- Análisis con el vector de soluciones iniciales en el proceso iterativo igual al vector desplazamientos proporcionada por la técnica SPR en Desplazamientos propuesta en la malla i , proyectado sobre la malla $i+1$.

Así pues, la comparación de los resultados que aparecen en los siguientes apartados nos permite observar la más que posible ventaja en términos de número de iteraciones que puede aportar la aplicación de la solución en desplazamientos, obtenida por la técnica SPR en Desplazamientos propuesta, como vector inicial, obtenido de la malla anterior, para proyectarlo sobre la malla siguiente.

Estas comparativas se llevarán a cabo analizando los problemas ya estudiados anteriormente en el apartado 4.1, cilindro sometido a presión interna y la placa cuadrada de lado unitario.

Se aplica lo expuesto anteriormente utilizando distintos métodos iterativos, todos ellos basados en los subespacios de Krylov. Estos forman una base ortogonal de la secuencia de potencias de la matriz por el residuo inicial (la secuencia de Krylov). Las aproximaciones a la solución se forman minimizando el residuo en el subespacio formado. El método prototípico de esta clase de métodos iterativos es el Método del Gradiente Conjugado. Otros métodos son el Método del Residuo Mínimo Generalizado y el Método del Gradiente Biconjugado.



5.1 Método Iterativo del Gradiente Biconjugado Estabilizado (BICGSTAB).

Se utiliza el Método Iterativo del Gradiente Biconjugado Estabilizado, ya que éste evita la irregular convergencia del Método del Gradiente Conjugado Cuadrado y suele ser más rápido.

5.1.1 Cilindro sometido a presión interna.

Este problema se analizó como parte de la validación del Método SPR en Desplazamientos Propuesto en la sección 4.1.1 de este Trabajo Fin de Máster. A continuación se estudiara mediante la aplicación de un Método Iterativo de Refinamiento de Malla en los diferentes supuestos citados en la sección 5.3.1.

Se realiza el análisis con elementos cuadriláteros tanto lineales como cuadráticos.

Cuadriláteros Lineales.

Tabla 54.-Validación mediante métodos iterativos.

Elementos Cuadriláteros Lineales. Métodos Iterativos.						
Número de Iteraciones Necesarias.						
NDOF		216	816	3168	12480	49536
U ₀ de partida	Sin u ₀	9	15	23.5	42.5	83.5
	Con u ₀ ^{ef}	7	11.5	15	25	38
	Con u ₀ [*]	8	11.5	13	18.5	19.5



En la Tabla 54 se muestra la ventaja que aporta el hecho de aportar al método iterativo un vector inicial de soluciones de desplazamientos obtenido mediante el MEF (\mathbf{u}_0^{ef}), o mediante la técnica SPR en Desplazamientos Propuesta (\mathbf{u}_0^*), respecto al hecho de dar como vector inicial el vector de desplazamientos nulo. En este último caso aumenta mucho el número de iteraciones necesarias para converger a la solución.

La utilización de la solución \mathbf{u}_0^* obtenida de la malla i mediante la Técnica SPR en Desplazamientos Propuesta, proyectada sobre la malla $i+1$, como solución inicial del método iterativo disminuye el número de iteraciones necesarias para converger a la solución, respecto al uso de \mathbf{u}_0^{ef} obtenido mediante el MEF. Cuando el número de iteraciones viene representado por un entero + 0.5, significa que la convergencia se ha dado a medio camino entre dos iteraciones según las referencias, Essential MATLAB For Engineers and Scientists [10] y Matlab 7.5.0. (R2007b) [18].

Cuadriláteros Cuadráticos.

Tabla 55.-Validación mediante métodos iterativos.

Elementos Cuadriláteros Cuadráticos. Métodos Iterativos.					
Número de Iteraciones Necesarias.					
NDOF		624	2400	9408	37248
U ₀ de partida	Sin u_0	15.5	23	40	72
	Con u_0^{ef}	13	12	10.5	4
	Con u_0^*	10	8	7.5	3

Al igual que ocurría en el caso anterior donde los elementos cuadriláteros eran lineales, tomar como punto de partida la solución obtenida mediante el método SPR en desplazamientos propuesto reduce el número de iteraciones necesarias para la convergencia a la solución del método iterativo.



5.1.2 Placa cuadrada de lado unitario.

El problema a analizar es el mismo que aparecía en la sección 4.1.2 de este Trabajo Fin de Máster. A continuación se procura a la aplicación a éste del método iterativo de refinamiento de malla tal y como se hizo en la sección 5.1.2.

Cuadriláteros Lineales.

Tabla 56.-Validación mediante métodos iterativos.

Elementos Cuadriláteros Lineales. Métodos Iterativos.						
Número de Iteraciones Necesarias.						
NDOF		366	1374	5310	20862	82686
U ₀ de partida	Sin u ₀	9	15.5	23	38.5	94.5
	Con u ₀ ^{ef}	8	10	15	21.5	18.5
	Con u ₀ [*]	6	7	8	9.5	7.5

Cuadriláteros Cuadráticos.

Tabla 57.-Validación mediante métodos iterativos.

Elementos Cuadriláteros Cuadráticos. Métodos Iterativos.					
Número de Iteraciones Necesarias.					
NDOF		1054	4030	15742	62206
U ₀ de partida	Sin u ₀	13.5	22.5	36.5	65.5
	Con u ₀ ^{ef}	5.5	3	2	1.5
	Con u ₀ [*]	4.5	4	2.5	2.5



5.2 Método Iterativo del Gradiente Conjugado Cuadrado (CGS).

Se utiliza el Método Iterativo del Gradiente Conjugado Cuadrado (CGS), ya que, aunque presenta una menor regularidad de en su velocidad de convergencia que el Método del Gradiente Biconjugado Estabilizado, implica un coste computacional menor.

5.2.1 Cilindro sometido a presión interna.

Este problema se analizó como parte de la validación del Método SPR en Desplazamientos Propuesto en la sección 4.1.1 de este Trabajo Fin de Máster. A continuación se estudiara mediante la aplicación de un Método Iterativo de Refinamiento de Malla en los diferentes supuestos citados en la sección 5.3.1.

Se realiza el análisis con elementos cuadriláteros tanto lineales como cuadráticos.

Cuadriláteros Lineales.

Tabla 58.-Validación mediante métodos iterativos.

Elementos Cuadriláteros Lineales. Métodos Iterativos.						
Número de Iteraciones Necesarias.						
	NDOF	216	816	3168	12480	49536
U ₀ de partida	Sin u ₀	11	16	32	63	135
	Con u ₀ ^{ef}	9	13	19	34	58
	Con u ₀ [*]	9	14	13	24	35



Se observa en la Tabla 58 que al utilizar la solución en desplazamientos obtenida en la malla i , mediante la técnica SPR en Desplazamientos Propuesta, proyectada sobre la malla $i+1$, como vector inicial del método iterativo, el número de iteraciones necesario para converger a la solución es menor que cuando se utiliza la solución obtenida mediante el MEF como vector inicial. A medida que aumenta en número de grados de libertad, la diferencia entre el número de iteraciones necesarias es mayor.

Cuadriláteros Cuadráticos.

Tabla 59.-Validación mediante métodos iterativos.

Elementos Cuadriláteros Cuadráticos. Métodos Iterativos.					
Número de Iteraciones Necesarias.					
NDOF		624	2400	9408	37248
U ₀ de partida	Sin u ₀	18	24	47	110
	Con u ₀ ^{ef}	15	19	14	11
	Con u ₀ [*]	11	8	10	5

Al igual que ocurría en el caso anterior, donde los elementos cuadriláteros eran lineales, tomar como punto de partida la solución obtenida mediante el método SPR en desplazamientos propuesto proyectada sobre la malla siguiente como vector inicial, reduce el número de iteraciones necesarias para la convergencia del método iterativo.



5.2.2 Placa cuadrada de lado unitario.

El problema a analizar es el mismo que aparecía en la sección 4.1.2 de este Trabajo Fin de Máster. A continuación se procura a la aplicación a éste del método iterativo de refinamiento de malla tal y como se hizo en la sección 5.1.2.

Cuadriláteros Lineales.

Tabla 60.-Validación mediante métodos iterativos.

Elementos Cuadriláteros Lineales. Métodos Iterativos.						
Número de Iteraciones Necesarias.						
NDOF		366	1374	5310	20862	82686
U ₀ de partida	Sin u ₀	12	21	25	60	133
	Con u ₀ ^{ef}	10	12	24	45	104
	Con u ₀ [*]	9	8	10	16	20

Cuadriláteros Cuadráticos.

Tabla 61.-Validación mediante métodos iterativos.

Elementos Cuadriláteros Cuadráticos. Métodos Iterativos.					
Número de Iteraciones Necesarias.					
NDOF		1054	4030	15742	62206
U ₀ de partida	Sin u ₀	15	24	57	123
	Con u ₀ ^{ef}	7	8	7	1
	Con u ₀ [*]	5	6	4	3



Se observa que al igual que se concluyó en el análisis del problema anterior (sección 5.2.1), el hecho de utilizar la solución en desplazamientos obtenida mediante el Método SPR en Desplazamientos Propuesto disminuye el número de iteraciones necesarias para que el método iterativo converja a la solución, salvo en la última malla estudiada donde pese a que el número de iteraciones es bajo en ambos casos, para converger a la solución parece que la estimación inicial del MEF es ligeramente mejor, que la proyección de la solución obtenida en la malla i sobre la $i+1$ mediante la técnica SPR en Desplazamientos Propuesta.

5.3 Método Iterativo del Mínimo Residuo Generalizada (GMRES).

Se utiliza el Método Iterativo del Mínimo Residuo Generalizado (GMRES), como alternativa a los métodos gradiente expuestos anteriormente, con el fin de ampliar el estudio de validación de los desplazamientos obtenidos mediante la Técnica SPR en Desplazamientos Propuesta como valores iniciales en la ejecución de Métodos Iterativos.

5.3.1 Aplicación a Métodos Iterativos.

Cilindro sometido a presión interna.

Este problema se analizó como parte de la validación del Método SPR en Desplazamientos Propuesto en la sección 4.1.1 de este Trabajo Fin de Máster. A continuación se estudiará mediante la aplicación de un Método Iterativo de Refinamiento de Malla en los diferentes supuestos citados en la sección 5.3.1.



Se realiza el análisis con elementos cuadriláteros tanto lineales como cuadráticos.

Cuadriláteros Lineales.

Tabla 62.-Validación mediante métodos iterativos.

Elementos Cuadriláteros Lineales. Métodos Iterativos.						
Número de Iteraciones Necesarias.						
NDOF		216	816	3168	12480	49536
U ₀ de partida	Sin u ₀	13	20	32	56	120
	Con u ₀ ^{ef}	9	10	14	21	28
	Con u ₀ [*]	10	12	18	18	6

Se observa que el método iterativo utilizado converge a la solución con menor número de iteraciones utilizando con vector inicial los desplazamientos obtenidos con el MEF, en las primeras mallas. A medida que aumenta el número de grados de libertad el hecho de utilizar la solución u₀^{*} (obtenida mediante la técnica SPR en Desplazamientos Propuesta) de la malla *i* proyectada sobre la malla *i*+1 como vector inicial del método iterativo pasa a ser mejor, hasta disminuir considerablemente el número de iteraciones necesarias para converger a la solución, respecto de los otros análisis realizados en la Tabla 62.



Cuadriláteros Cuadráticos.

Tabla 63.-Validación mediante métodos iterativos.

Elementos Cuadriláteros Cuadráticos. Métodos Iterativos.					
Número de Iteraciones Necesarias.					
NDOF		624	2400	9408	37248
U ₀ de partida	Sin u ₀	19	30	54	112
	Con u ₀ ^{ef}	8	7	19	11
	Con u ₀ [*]	8	11	17	6

El análisis de los resultados lleva a las mismas conclusiones que para cuadriláteros lineales.



5.3.2 Placa cuadrada de lado unitario.

El problema a analizar es el mismo que aparecía en la sección 4.1.2 de este Trabajo Fin de Máster. A continuación se procederá a la aplicación a éste del método iterativo de refinamiento de malla tal y como se hizo en la sección 5.1.2.

Cuadriláteros Lineales.

Tabla 64.-Validación mediante métodos iterativos.

Elementos Cuadriláteros Lineales. Métodos Iterativos.						
Número de Iteraciones Necesarias.						
NDOF		366	1374	5310	20862	82686
U ₀ de partida	Sin u ₀	12	18	29	55	121
	Con u ₀ ^{ef}	8	8	11	16	25
	Con u ₀ [*]	7	9	6	6	6

Cuadriláteros Cuadráticos.

Tabla 65.-Validación mediante métodos iterativos.

Elementos Cuadriláteros Cuadráticos. Métodos Iterativos.					
Número de Iteraciones Necesarias.					
NDOF		1054	4030	15742	62206
U ₀ de partida	Sin u ₀	20	31	50	96
	Con u ₀ ^{ef}	5	6	4	1
	Con u ₀ [*]	3	7	1	1



6 Conclusiones.

La implementación de la estimación del error en norma energética basada en la técnica SPR en desplazamientos propuesta con objeto de este Trabajo Fin de Máster siguiendo la metodología expuesta en el apartado 3.2, y su posterior comprobación práctica mediante la resolución de problemas de los que se disponía de solución real, permite extraer una serie de conclusiones generales a propósito de la aplicación de dicha técnica:

- La técnica de reconstrucción proporciona una solución más precisa que la de la solución directamente proporcionada por el MEF, cumpliéndose:

$$\|e_{ex}\| \geq \|e_{ex-H}\| \quad (64)$$

- La velocidad de convergencia del error de la solución reconstruida mediante la técnica S.P.R. en desplazamientos, es mayor que la solución del M.E.F. y es del orden de la obtenida mediante la técnica SPR en Tensiones propuesta por Zienkiewicz y Zhu. Como se puede apreciar en la siguiente tabla de valores medios de la velocidad de convergencia del error en norma energética.



Tabla 66.- Velocidad de Convergencia del Error en Norma Energética. Valores medios.

Grado del Elemento	Velocidad de Convergencia del Error en Norma Energética.		
	M.E.F.	SPR en Tensiones	SPR en desplazamientos propuesto.
1	0.5	0.73	0.75
2	1	1.3	1.35

- Los resultados obtenidos muestran que las técnicas S.P.R. en desplazamientos y en tensiones tiene resultados similares a nivel global. A nivel local, en términos generales, la precisión a nivel local de ambas técnicas resulta del mismo orden de magnitud, aunque se puede apreciar que la técnica S.P.R. en tensiones presenta mejor comportamiento que la de desplazamientos.

La solución del campo de desplazamientos mejorado obtenida mediante la aplicación de la técnica SPR en desplazamientos propuesta, en la malla i , puede proyectarse sobre la malla $i+1$ para ser utilizada como vector inicial en la aplicación de Métodos Iterativos. Aunque no ha sido objeto de este Trabajo de Fin de Máster profundizar en este campo, de los resultados obtenidos en el apartado 5, se extrae que, en líneas generales, este procedimiento puede suponer una reducción importante del número de iteraciones necesario para converger a la solución en la aplicación de este tipo de métodos de resolución, respecto al uso de la solución en desplazamientos procedente del M.E.F.



7 Futuras líneas de investigación y desarrollo

El programa queda abierto al futuro desarrollo del mismo mediante el perfeccionamiento y optimización de los módulos actuales y la implementación de nuevas funcionalidades. Así pues se pueden mencionar las siguientes líneas como punto de partida:

- Imposición del cumplimiento de diversas ecuaciones que cumple la solución exacta a fin de que la solución reconstruida sea más precisa:
 - Condiciones de contorno de Dirichlet.
 - Ecuaciones de equilibrio interno.
 - Ecuaciones de compatibilidad.
- Implementación de funciones analíticas especiales en zonas de comportamiento conocido, de manera similar a la técnica de descomposición del campo de tensiones en partes suaves y singulares que se muestra en la referencia [12]. Esto permitiría aplicar el procedimiento a problemas con solución singular.
- Imposición de restricciones multipunto (M.P.C.'s). En mallados no conformes se utilizan restricciones MPC's para forzar la continuidad C^0 de la solución. El algoritmo desarrollado en este trabajo final de máster deberá ser modificado para trabajar con este tipo de mallados.
- Utilización del método para el Cálculo de Cotas del Error de discretización. Las técnicas desarrolladas en referencia [12] requiere de la evaluación del error en el campo de desplazamientos para poder



determinar una cota superior de la norma energética del error de discretización. En dicha referencia se procede a utilizar una técnica de extrapolación de Richardson para determinar este parámetro, lo que exige disponer de una secuencia de mallas de análisis, y proporciona resultados manifiestamente mejorables para la última malla de análisis. El procedimiento descrito en esta tesis podría servir para obtener directamente una estimación del error exacto en desplazamientos como $e \approx \mathbf{u}^* - \mathbf{u}_h$ para cada malla.

- Profundizar en la utilización de la técnica SPR en Desplazamientos Propuesta para obtener el vector inicial de desplazamientos utilizado en la resolución mediante Métodos Iterativos.



8 Referencias y Bibliografía

- [1] P. Díez, J. J. Ródenas and O. C. Zienkiewicz. *Equilibrated patch recovery estimates*. Int. J. Numer. Meth. Engng 2007; 69:2075-2098.
- [2] J.J. Ródenas, M. Tur, F.J. Fuenmayor and A. Vercher. *Improvement of the superconvergent patch recovery technique by the use of constraint equations: The SPR-C technique*. International Journal for Numerical Methods in Engineering. Number 70:705-727. 2007
- [3] S.S.Rao. *The Finite Element Method in engineering*. ISBN 0-08-033419-9. Pergamon Press plc 1989.
- [4] J.J. Ródenas, F.J. Fuenmayor, A. Roda and A. Pedrosa. *Modification of the SPR Technique to ensure the fulfillment of imposed tractions in boundary nodes*. International Conference on Adaptative Modeling and Simulation. ADMOS 2003.
- [5] C.A.M. Duarte, J.T. Oden, *hp clouds - An hp meshless method*, Numer. Meth. for Partial Diff. Eqns. 12 (1996) 673-705.
- [6] F.J. Fuenmayor, J.J. Rodenas, J.E. Tarancón, M. Tur, A. Vercher. *Introducción al Método de los Elementos Finitos*. Apuntes de la asignatura Técnicas Computacionales en Ingeniería Mecánica. ETSII. UPV. Valencia.



- [7] I. Babuška, J.M. Melenk, *The partition of unity method*, Int. J. Numer. Meth. Engrg. 40 (1997) 727-758.
- [8] T. Stroubolis, I. Babuška, K. Copps. *The design and analysis of the generalized finite element method*, Comput. Methods Appl. Mech. Eng. 181 (1) (2000) 43-69.
- [9] Murria R. Spiegel, Ph. D., Lorenzo Abellanas Rapun. *Fórmulas y tablas de matemática aplicada*. ISBN 84-7615-197-7. Mc Graw Hill 1999.
- [10] Brian D. Hahn, Daniel T. Valentine. *Essential MATLAB For Engineers and Scientists*. ISBN 9-78-0-75-068417-0. Butterworth-Heinemann 2007.
- [11] J.J. Ródenas, F.J. Fuenmayor, E. Giner and M. Tur. *Modificación de la técnica SPR para garantizar el cumplimiento exacto de las restricciones de tensión en los nodos del contorno*. V Congreso de Métodos Numéricos en la Ingeniería (Madrid). Métodos Numéricos en Ingeniería V. SEMNI-AMPTAC. Edt: J.M. Goicolea, C. Mota, Soares, M. Pastor y G. Bugeda 2002.
- [12] J.J. Ródenas: *Error de discretización en el cálculo de sensibilidades mediante el método de los elementos finitos*. Tesis Doctoral. Universidad Politécnica de Valencia, Valencia, 2001.
- [13] J.J. Ródenas, O.A. González-Estrada, J.E. Tarancón, F.J. Fuenmayor. *A recovery-type error estimator for the extended finite element method on*



singular+smooth stress field splitting. International Journal for Numerical Methods in Engineering. 76(4): 545-571. 2008.

[14] O.C. Zienkiewicz y J.Z. Zhu. *A simple Error Estimation and Adaptive Procedure for the Practical Engineering Analysis*. International Journal for Numerical Methods in Engineering. Vol. 24, 337-357. 1987.

[15] P. Labbé y A. Garon. *A robust implementation of Zienkiewicz and Zhu's local patch recovery method*. Communications in Numerical Methods in Engineering. Vol.11, pp 427-434. 1995.

[16] O.C. Zienkiewicz y J.Z. Zhu. *The Superconvergent Patch Recovery and a-Posteriori Error Estimates. Part I: The Recovery Technique*. International Journal for Numerical Methods in Engineering. Vol. 33, pp 1331-1364. 1992.

[17] O.C. Zienkiewicz y J.Z. Zhu. *The Superconvergent Patch Recovery and a-Posteriori Error Estimates. Part II: Error Estimation and Adaptivity*. International Journal for Numerical Methods in Engineering. Vol. 33, pp 1365-1382. 1992.

[18] Software: MATLAB. Version: 7.5.0.342 (R2007b).Date: August 15, 2007. Company: THE MATHWORKS Inc. 1984-2007.



9 ANEJOS

9.1 *Manual del programador*

El manual del programador tiene por objeto detallar la estructura y organización de la aplicación.

Para el desarrollo de la aplicación se ha utilizado la versión de MATLAB R2006b, la cual aporta mejores prestaciones que sus predecesoras.

La declaración de variables como globales permite la visualización de los valores que éstas van tomando durante la ejecución del programa.

A continuación se enumerarán las variables características del programa desarrollado, necesarias para llegar a la solución del error en norma energética calculada a través del Método SPR en Desplazamientos Propuesto.

9.1.1 **Inicialización de la estructura de datos**

La estructura es inicializada con la subrutina "*principal0.m*" y los valores adoptados son los reflejados en las tablas de los puntos siguientes.



9.1.2 Estructuras de datos más importantes

La mayor parte de la información procesada durante la ejecución del programa se almacena en las estructuras: Param, Iter, MatK, Elm y Nod. En principio se definen las estructuras anteriores es su primer nivel, con el fin de mostrar las variables que almacena cada una, destacando posteriormente aquellas variables que son importantes en el desarrollo de la técnica implementada a través de este Trabajo Fin de Máster.

La variable *Param* almacena todos los parámetros necesarios para definir el tipo de ejecución que vamos a realizar con el programa.



Tabla 67.- Estructura de principal de la variable global Param.

Param
DataFolder
Profile
CreateAllKs
DrawStress
DrawMesh
DrawErrEnergNorm
DrawSubN
DrawVectorF
DrawSpecialEls
PauseBtweenIter
VolLoads
LaplacianMesh1
UniformRefinement
Error
JCont
CalcEfect
DrawLocalEffectivity
SubDom
PatternSubEls
NSpE
EType
ResultsDir
Dim
PlaneStress
OnlyGauss
AndGauss
NIntP
NIntPH
NIntPCont
Thick
ActiveGrid
Solver
Mat_D
OriginalNEle
NSons



Dentro de esta estructura son especialmente importantes las siguientes variables para definir el tipo de análisis a llevar a cabo:

Tabla 68.-Parámetros más representativos de la estructura *Param*.

Parámetro	Descripción	Valores
Param.NSpE	Definimos el número de lados del elemento con el que se malla la geometría.	Triángulos = 3. Cuadriláteros=4.
Param. EType	Definimos el grado de los elementos.	Lineal =1. Cuadrático =2.
Param.Error.MaxIter	Se define el número máximo de iteraciones a realizar durante la ejecución de programa.	Entero > 0.
Param.Error.Recovery	Se define el tipo de método de reconstrucción del campo de tensiones o desplazamientos a utilizar.	SPR T=10. SPR D. =50.
Param.Solver.Type	Se define el tipo de método de cálculo a utilizar en la resolución del problema.	Mét. Iterativos = 1 Mét. Directos = 2
Param. OriginalNEle	Almacena el número original de elementos de la malla de elementos finitos.	Entero > 0.
Param-NSons	Almacena el número de elementos hijos que generará cada elemento padre al ejecutarse un método de resolución iterativo.	Entero > 0.
Param.Mat_D	Almacena las matrices D generadas durante el proceso y necesarias para la resolución del problema	Matriz de <i>reals</i> .
Param.DrawLocalEffectivity	Permite la representación gráfica en mapa de colores de las efectividades locales a nivel de elemento que se producen en cada iteración durante la ejecución de los métodos SPR implementados.	Activado = 1. Desactivado = 0.
Param.UniforRefinement	Permite elegir entre refinamiento de malla uniforme y no uniforme. El programa implementado trabaja con refinamiento uniforme	Uniforme = 1. No uniforme = 0.
Param.CalcEfect.Prob	Define los problema a resolver de los que se dispone de solución exacta y con ello todos los parámetros predeterminados que éste conlleva.	Cilindro = 1. Placa = 5.



La variable global ***Iter*** es un vector de estructuras que almacena en cada una de ellas los parámetros calculados en cada iteración del programa. La variable ***ThisMesh*** almacena el número de cada iteración y para referirse a cada estructura ***Iter(ThisMesh)***.

Tabla 69.-Vector de Estructuras de la variable global *Iter*.

<i>Iter(ThisMesh)</i>
NNod
NEle
NumActiveEle
K
F
UO
Dcfl
Dcfr
U
Err
DispH
UL2fe
SL2

Dentro del vector de estructuras reflejado en la figura anterior existen variables especialmente importantes durante la ejecución del programa desarrollado. Éstas se reflejan en la Tabla 70.



Tabla 70.-Parámetros más representativos del vector de estructuras Iter.

Parámetro	Descripción	Valores
Iter(ThisMesh).NNod	Almacena el número de nodos existente en la iteración ThisMesh.	Entero > 0.
Iter(ThisMesh).NEle	Almacena el número de elementos existente en la iteración ThisMesh	Entero > 0.
Iter(ThisMesh).NumActiveEle	Almacena el número de elementos activos, útil en la aplicación de métodos iterativos.	Entero > 0.
Iter(ThisMesh).K	Matriz cuadrada de rigidez global tipo sparse, que almacena las matrices de rigidez de cada elemento.	Matriz cuadrada tipo sparse de enteros.
Iter(ThisMesh).U0	Matriz tipo sparse donde se almacenan desplazamientos iniciales en x e y de cada nodo.	Matriz sparse de enteros. (2·NNod)*1
Iter(ThisMesh).U	Matriz tipo sparse donde se almacenan los desplazamientos calculados mediante Elementos Finitos.	Matriz sparse de enteros (2·NNod)*1
Iter(ThisMesh).UH	Matriz tipo sparse donde se almacenan los desplazamientos calculados mediante la técnica SPR elegida para resolver el problema.	Matriz sparse de enteros (2·NNod)*1
Iter(ThisMesh).Err.NDOF	Almacena el número de grados de libertad del problema en cada iteración.	Entero > 0.
Iter(ThisMesh).Err.GlobNorm	Norma Energética Global.	Real
Iter(ThisMesh).Err.GlobErr	Almacena la estimación de error calculada mediante el método de estimación de error seleccionado.	Real
Iter(ThisMesh).Err.GlobErrExH	Almacena el Error Exacto Global entre la solución exacta y la obtenida con el método SPR propuesto (únicamente en problemas con solución exacta), para cada iteración.	Real
Iter(ThisMesh).GlobErrHFE	Almacena el Error Estimado Global entre la solución estimada por el método SPR y la solución de elementos finitos, en cada iteración.	Real
Iter(ThisMesh).Err.Efectivity	Almacena la Efectividad Global calculada en cada iteración.	Real



La estructura global **MatK** almacena parámetros relacionados con las matrices de rigidez necesarias para la ejecución del programa desarrollado.

Tabla 71.-Vector de Estructuras de la variable global Iter.

MatK
TotalkNum
ke
BPtG
DetJ
SubDom
keH
OrigLevel

Cabe destacar las siguientes variables dentro de la estructura **MatK** como importantes en el proceso de resolución desarrollado.

Tabla 72.-Parámetros más representativos de la estructuras MatK.

Parámetro	Descripción	Valores
MatK.Ke	Almacena en una matriz tridimensional las matrices de rigidez de elemento, para la solución de Elementos Finitos.	Matriz Tridimensional de reales. Almacena matrices cuadradas.
Mat.DetJ	Matriz que almacena los Jacobianos a nivel de elemento.	Matriz de reales
Mat.KeH	Matriz dinámica que almacena las matrices de rigidez de elemento de la solución mejorada obtenida mediante el Método SPR en desplazamientos Propuesto.	Matriz Tridimensional de reales. Almacena matrices cuadradas.



La variable global *Elm* es una estructura de datos que almacena los parámetros que caracterizan los elementos de la malla de Elementos Finitos.

Tabla 73.-Parámetros de la Estructura de la variable global Elm.

Elm
Top
GoalEls
Special
GoalWeight
NEle
Sides
NeighbElems
NeighbSides
Active
Sons
Parent
Level
KNum
ProvideHeritage
OverRef
SubDom

Al igual que ocurría en las estructuras analizadas anteriormente, en la estructura *Elm* existen variables destacables por su importancia durante la ejecución del programa desarrollado. Éstas quedan reflejadas en la siguiente tabla.



Tabla 74.-Parámetros más representativos de la estructura Elm.

Parámetro	Descripción	Valores
Elm.Top	Matriz que almacena los elementos en columnas y los nodos pertenecientes a cada elemento en las filas correspondientes.	Matriz de enteros > 0. (Nº Nodos)·(Nº Elementos)
Elm.NNod	Almacena el número de elementos de la malla.	Entero > 0.
Elm.Active	Matriz sparse que asigna un 1 a la posición del elemento que está activo.	Matriz sparse de unos. (Nº Elementos)·(Nº Iteraciones)
Elm.Sons	Matriz que almacena los nodos hijo generados al aplicar un método iterativo, en cada elemento.	Matriz de enteros > 0. (Nº Nodos)·(Nº Elementos)
Elm.KNum	Matriz que almacena el tipo de matriz de rigides que corresponde a cada elemento	Matriz de enteros > 0.

La variable global *Nod* es una estructura de datos que almacena los parámetros que caracterizan los nodos de la malla de Elementos Finitos.

Tabla 75.-Parámetros de la Estructura de la variable global Nod.

Nod
XYZ
NNod
NumParents
Parents
Weights
MPC
Num
Elms
Boundary
OverRefinement
SubDom
GeomPoint
NGeomPoint
SubDomAndBloc
SubDomForBloc



Tabla 76.-Parámetros más representativos de la estructura Nod

Parámetro	Descripción	Valores
Nod.XYZ	Almacena las coordenadas de los nodos. El análisis es 2D por lo que se almacena XY por filas.	Matriz de reales. $2 \cdot (\text{N}^\circ \text{ Nodos})$
Nod.NNod	Almacena el número de nodos que existen en una iteración determinada.	Entero > 0 .
Nod.NumParents	Almacena el número de nodos padre que tiene cada nodo hijo generado a partir de la segunda iteración.	Vector de reales. $(\text{N}^\circ \text{ Nodos}) \cdot 1$
Nod.Weights	Matriz sparse con los pesos de las funciones de forma en cada nodo.	Matriz de reales. $(\text{N}^\circ \text{ Nodos}) \cdot (\text{N}^\circ \text{ Elementos})$
Nod.Elem	Matriz que almacena el número de identificación de los elementos que rodean a cada nodo. Nodos por columnas y elementos por filas.	Matriz de enteros > 0 . $(\text{Max. N}^\circ \text{ Elementos rodean un nodo}) \cdot (\text{N}^\circ \text{ Nodos})$.