



UNIVERSITAT
POLITÈCNICA
DE VALÈNCIA



UNIVERSITAT POLITÈCNICA DE VALÈNCIA
ESCOLA TÈCNICA SUPERIOR D'ENGINYERIA DEL DISSENY

Trabajo Final de Grado

**Análisis por elementos finitos de piezoeléctricos para la
recolección de energía undimotriz**

Soriano Pascual, Fernando
27 de noviembre de 2020

Profesor:
Jose Luís Perez Aparicio

Índice general

	VI
1. Introducción	1
1.1. Captación de energía	1
1.1.1. Energía oceánica de las olas	3
1.1.2. Tipos de olas	4
1.2. Materiales Activos	5
1.2.1. Historia de los piezoeléctricos	7
1.2.2. Efecto Piezoeléctrico	7
1.2.3. Tipos de piezoeléctricos	8
1.2.4. Aplicaciones de la Piezoelectricidad	9
1.3. Objetivos	10
2. Formulación	11
2.1. Teoría de placas planas	11
2.1.1. Ecuación diferencial	12
2.1.2. Energía de deformación	13
2.1.3. Método de Galerkin	13
2.1.4. Placas de materiales ortotrópicos	16
2.1.5. Placas laminadas	17
2.1.6. Salto de espesor	18
2.2. Piezoelectricidad	20
2.2.1. Criterio de signos y notación	23
2.2.2. Placas piezoeléctricas	23
2.2.3. Salto de espesor placas piezoeléctricas	25
2.2.4. Cálculos energéticos	26
3. Validaciones	27
3.1. Efecto piezoeléctrico	27
3.1.1. Inverso	27
3.1.2. Directo	28
3.2. Rectángulo piezoeléctrico	29
3.3. Placa empotrada material no acoplado	30
3.3.1. Problema estático	30
3.3.2. Problema dinámico	32
3.4. Placa piezoeléctrica de PZT	35
3.4.1. Problema estático	36
3.4.2. Problema dinámico	38
3.5. Laminado de aluminio y PZT	40
3.5.1. Problema estático:	42
3.5.2. Problema dinámico	44
3.6. Placa material no acoplado con salto de espesor	46
3.6.1. Problema estático	46
3.6.2. Problema dinámico	48

4. Estudio Placa Piezoeléctrica	50
4.1. Placa en voladizo	50
4.1.1. Estático:	50
4.1.2. Vibraciones naturales:	51
4.1.3. Vibraciones forzadas:	52
4.2. Laminado piezoeléctrico en voladizo	54
4.2.1. Estático:	54
4.2.2. Vibraciones naturales:	56
4.2.3. Vibraciones forzadas:	57
4.3. Placa en voladizo con piezoeléctrico en el extremo	57
4.3.1. Estático:	58
4.3.2. Vibraciones naturales:	59
4.3.3. Vibraciones forzadas:	59
5. Estudio paramétrico	60
5.1. Longitud de la placa	60
5.2. Anchura de la placa	61
5.3. Espesor	62
5.4. Material	64
5.5. Longitud del piezoeléctrico	65
5.6. Cambio de posición del piezoeléctrico	66
5.7. Configuración óptima	67
6. Modelización de las olas	68
6.1. Olas tipo a)	71
6.2. Olas tipo b)	71
6.3. Posible aplicación del dispositivo	72
7. Conclusiones	73
7.1. Presupuesto	73
7.2. Proyectos futuros	74
7.3. Conclusiones	75
A. Integrales salto de espesor	76
B. Condensación Estática	78
C. Materiales	80
D. Funciones de prueba placa empotrada	81
E. Método de Warburton	83
E.1. Materiales ortotrópicos y laminados	84

Índice de figuras

1.1. Estación repetidora de onda corta (izquierda) [1] y de radio (derecha) [2].	1
1.2. Satélite orbitando alrededor de la Tierra [3].	2
1.3. Esquema de placa en voladiza parcialmente bimorfa que se estudia en este trabajo.	4
1.4. Diagrama de la captación de energía de las olas oceánicas [4].	5
1.5. Tipos de olas a) superior y b) inferior y sus parámetros: H_w altura, L_w longitud de onda, A_w amplitud y h_w profundidad [4].	6
1.6. Efectos piezoeléctricos Directo (arriba) e Indirecto (abajo) [4].	8
1.7. Sensores piezoeléctricos de varios tamaños con sus conductores eléctricos [5].	9
2.1. Placa plana rectangular con el origen de coordenadas situado en el plano medio [6].	11
2.2. Esquema de un laminado rectangular [9].	18
2.3. Esquema de una placa con un salto de espesor en la dirección x	19
3.1. Esquema del problema inverso (izquierda) y directo (derecha).	27
3.2. Mallado del cilindro 3D a base de paralelepípedos.	27
3.3. Esquema de rectángulo con voltaje aplicado en la cara superior.	29
3.4. Distribución del potencial $V(y, z)$ de la solución analítica.	29
3.5. Valores de la polarización P_z a lo largo de una línea $z = l_3/2$	30
3.6. Esquema de una placa empotrada cuadrada.	30
3.7. Malla de COMSOL para placa empotrada a resolver por MEF.	31
3.8. Flecha $w(x, y)$ debida a carga uniforme de placa empotrada.	31
3.9. Comparación de la flecha $w(x, 0)$ de placa empotrada analítica y con MEF.	32
3.10. Modos y frecuencias naturales de la placa empotrada.	34
3.11. Comparación de flecha máxima $w(0, 0, t)$ de placa empotrada.	35
3.12. Placa de material piezoeléctrico con dos articulaciones y correderas.	35
3.13. Mallas de FEAP (izquierda) y COMSOL (derecha) para placa piezoeléctrica.	36
3.14. Flecha debida a carga uniforme de placa con articulaciones y correderas.	37
3.15. Comparación de flecha $w(x, b)$ de placa piezoeléctrica analítica y con MEF.	37
3.16. Comparación de campo eléctrico E_z analítico (izquierda) con COMSOL (centro) y FEAP (derecha) en placa piezoeléctrica con articulaciones y correderas.	38
3.17. Voltaje $V(a, b, z)$ de placa piezoeléctrica analítico y con MEF.	38
3.18. Modos y frecuencias naturales de la placa con articulaciones y correderas.	39
3.19. Comparación de flecha $w(a, b, t)$ (izquierda) y voltaje $V(a, b, h_p/2, t)$ (derecha) en placa piezoeléctrica con articulaciones y correderas.	40
3.20. Laminado articulado de aluminio-PZT-aluminio.	40
3.21. Mallas de FEAP y COMSOL para el laminado piezoeléctrico.	41
3.22. Flecha $w(x, y)$ debida a carga uniforme de laminado articulado.	42
3.23. Comparación de flecha $w(x, a/2)$ de laminado analíticamente y con MEF.	43
3.24. Comparación del campo eléctrico E_z analítico (izquierda) con COMSOL (centro) y FEAP (derecha) en laminado piezoeléctrico articulado.	43
3.25. Comparación de voltaje $V(a/2, a/2, z)$ de laminado piezoeléctrico con MEF	44
3.26. Modos y frecuencias naturales del laminado articulado.	45
3.27. Comparación de la flecha $w(a/2, a/2, t)$ (izquierda) y el voltaje $V(a/2, a/2, h_P/2, t)$ (derecha) de laminado piezoeléctrico articulado.	45
3.28. Placa empotrada en x , articulada en y con un salto de espesor.	46

3.29. Flecha de placa empotrada y articulada con salto de espesor.	47
3.30. Comparación de $w(x, b/2)$ de placa con salto de espesor analíticamente y con MEF.	47
3.31. Comparación de las tensiones T_x analítico (izquierda) con COMSOL (centro) y FEAP (derecha) de una placa articulada y empotrada con un salto de espesor	48
3.32. Modos y frecuencias naturales de la placa con salto de espesor.	49
3.33. Comparación de la flecha $w(0,14, b/2, t)$ de placa con salto de espesor.	49
4.1. Flecha de placa en voladizo bajo carga uniforme y ejes adimensionales.	51
4.2. Flecha de placa en voladizo en $y = b/2$ bajo carga uniforme.	51
4.3. Primeros dos modos de una placa en voladizo.	52
4.4. Modos y frecuencias naturales de la placa en voladizo.	53
4.5. Flecha máxima $w(a, b/2, t)$ de placa en voladizo.	53
4.6. Flecha de laminado empotrado en $y = b/2$ bajo carga uniforme.	54
4.7. Campo eléctrico E_z analítico de un laminado piezoeléctrico empotrado utilizando funciones simples (superior-izquierda) y funciones trigonométricas (superior-derecha) con COMSOL (inferior-izquierda) y FEAP (inferior-derecha).	55
4.8. Voltaje $V(a/40, b/2, z)$ de laminado empotrado analítico y con MEF.	56
4.9. Comparación de flecha $w(a, b/2, t)$ (izquierda) y voltaje $V(a/40, b/2, h_P, t)$ (derecha) de laminado empotrado.	57
4.10. Flecha $w(x, b/2)$ de placa empotrada con piezoeléctrico en el extremo.	58
4.11. Comparación del voltaje V analítico (izquierda) con COMSOL (medio) y FEAP (derecha) de placa empotrada con piezoeléctrico en el extremo.	58
4.12. Flecha $w(a, b/2, t)$ (izquierda) e Intensidad $I(t)$ (derecha) del piezoeléctrico de placa empotrada.	59
5.1. Flecha máxima $w(a, b/2)$ (izquierda) e intensidad I_m (derecha) para diferentes a	60
5.2. Potencia P_o (izquierda) y rendimiento P_o/Vol (derecha) para diferentes a	61
5.3. Flecha máxima $w(a, b/2)$ (izquierda) e intensidad I_m (derecha) para diferentes b	61
5.4. Potencia P_o (izquierda) y rendimiento P_o/Vol (derecha) para diferentes b	62
5.5. Flecha máxima $w(a, b/2)$ (izquierda) e intensidad I_m (derecha) con varios h_A, h_P	62
5.6. Movimiento del plano medio y tensiones para diferentes espesores de PZT h_P	63
5.7. Potencia P_o (izquierda) y rendimiento P_o/Vol (derecha) con diferentes h_A, h_P	63
5.8. Flecha máxima $w(a, b/2)$ (izquierda) e intensidad I_m (derecha) para varios PZT.	64
5.9. Potencia P_o (izquierda) y rendimiento P_o/Vol (derecha) para diferentes PZT.	64
5.10. Flecha máxima $w(a, b/2)$ (izquierda) e intensidad I_m (derecha) para diferentes a_x	65
5.11. Potencia P_o (izquierda) y rendimiento P_o/Vol (derecha) para diferentes a_x	65
5.12. Flecha (izquierda) e intensidad (derecha) para diferentes a_x en el empotramiento.	66
5.13. Potencia (izquierda) y rendimiento (derecha) con diferentes a_x en el empotramiento.	66
5.14. Esquema de la placa optimizada con sus parámetros constructivos.	67
6.1. Configuración de la caja flotante.	68
6.2. Movimiento de la caja flotante (izquierda) y carga aplicada a la placa (derecha).	70
6.3. Flecha $w(a, b/2, t)$ (izquierda) e intensidad $I(t)$ (derecha) con olas a).	71
6.4. Flecha $w(a, b/2, t)$ (izquierda) e intensidad $I(t)$ (derecha) con olas b).	71
6.5. Diferentes boyas marítimas utilizando la caja flotante.	72
D.1. Momentos M_x (izquierda) y M_y (derecha) de placa empotrada.	81
D.2. Segunda derivada de la función $X(x)$	82

Nomenclatura

Letras latinas:

A	Área [m ²]	H_w	Altura de la ola [m]
a	Longitud placa eje x [m]	h_w	Profundidad hasta el lecho marino [m]
A_g	Matriz de coeficientes [N/m]	h_x	Salto de espesor [m]
a_m	Punto medio del salto de espesor [m]	I	Intensidad de corriente [A]
A_w	Amplitud de la ola [m]	I_m	Intensidad media [A]
a_x	Ancho del salto de espesor [m]	l_c	Longitud caja flotante [m]
B	Fuerza de flotación [N]	L_w	Longitud de onda de la ola [s]
b	Longitud placa eje y [m]	M	Momento [Nm/m]
B_g	Vector de datos [N]	m	Masa del conjunto [kg]
C	Grados de libertad [-]	m_a	Masa de agua desplazada [kg]
c	Coefficiente Rigidez [N/m ²]	M_g	Matriz de masas [kg]
D	Desplazamiento eléctrico [C/m ²]	P	Polarización [C/m ²]
d	Coefficiente piezoeléctrico [C/N]	P_o	Potencia del piezoeléctrico [W]
D_0	Rigidez placa de referencia [Nm]	Q	Cortante [N/m]
D_f	Rigidez a flexión [Nm]	q	Carga transversal [N/m ²]
D_p	Rigidez a flexión piezoeléctrica [Nm]	R	Resistividad del piezoeléctrico [Ω]
D_t	Rigidez media a flexión [Nm]	r	Distancia entre planos medios [m]
E	Campo eléctrico [N/C]	R_p	Matriz de rigidez piezoeléctrica [N/m ²]
e	Coefficiente piezoeléctrico [C/m ²]	S	Deformación [-]
F	Fuerza [N]	s	Coefficiente flexibilidad [m ² /N]
f	Frecuencia de vibración [Hz]	T	Tensión mecánica [N/m ²]
F_g	Coefficientes temporales Galerkin [m]	u	Desplazamiento en el eje x [m]
G	Módulo de cizalladura [N/m ²]	U_b	Energía de deformación [J]
g	Coefficiente piezoeléctrico [Vm/N]	V	Voltaje [V]
h	Coefficiente piezoeléctrico [V/m]	v	Desplazamiento en el eje y [m]
h_0	Espesor de la placa de referencia [m]	V_f	Energía fuerzas externas [J]
h_c	Altura caja flotante [m]	Vol	Volumen [m ³]
h_p	Espesor de placa [m]	W	Modo de vibración [-]
h_s	Altura sumergida caja flotante [m]	w	Desplazamiento en el eje z [m]

w_c	Anchura caja flotante [m]	ξ	Coordenada adimensional eje x [-]
w_r	Coeeficientes Galerkin [m]	ζ	Función Heaviside ampliada [-]
Y	Módulo de Young [N/m ²]		Superíndices:
	Letras griegas:	$(.)^\top$	Transpuesta de la matriz
α_x	Relación de espesores [-]	$(.)^n$	Variable n constante
β	Impermitividad [m/F]	$(.)^{-1}$	Inversa de la matriz
χ	Función salto de espesor [-]	$(\dot{\cdot})$	Derivada temporal
δ	Función delta de Dirac [-]		Subíndices:
ϵ	Permitividad [F/m]	$(.)_0$	Condición inicial
η	Coordenada adimensional eje y [-]	$(.)_1$	Dirección x
ι	Resistividad del material [Ωm]	$(.)_2$	Dirección y
κ	Curvatura [m ⁻¹]	$(.)_3$	Dirección z
λ	Parámetro Warburton [-]	$(.)_x$	Dirección x
∇^2	Operador laplaciano	$(.)_y$	Dirección y
ν	Ratio de Poisson [-]	$(.)_z$	Dirección z
ω	Frecuencia circular [rad/s]	$(.)_{,n}$	Derivada con respecto a n
Ω_f	Frecuencia de la carga [rad/s]	$(.)_{xy}$	Dirección xy
Ψ	Matriz de vectores propios [-]	$(.)_{xz}$	Dirección xz
ρ	Densidad [kg/m ³]	$(.)_{yz}$	Dirección yz
θ	Funciones de prueba [-]		

1.1. Captación de energía

La creciente demanda de energía, la escasez de fuentes de energía fósiles convencionales y el presente interés medioambiental están consiguiendo que la humanidad se centre en fuentes de energía renovables. Las fuentes de petróleo, carbón y gas se están acabando rápidamente o no tienen reservas suficientes para satisfacer la futura demanda además de no ser buenas para el medioambiente por sus emisiones de gases de efecto invernadero y otros contaminantes. La energía nuclear tiene un elevado coste de establecimiento y aunque es relativamente segura, los fallos son catastróficos. Por otra parte, las fuentes de energía renovables no consiguen producir la misma cantidad de energía que las mencionadas anteriormente. La demanda de energía siempre va a crecer con el avance de la tecnología mientras que las fuentes convencionales se acabarán en algún punto no muy lejano por lo que la humanidad tiene un problema que ha de resolver cuanto antes o al menos entrar en el camino de la solución.

Aparte de seguir desarrollando las fuentes de energía renovables, hay muchos más lugares de los que se puede sacar energía limpia a pequeña escala y cada poco cuenta en un tema tan crucial como la supervivencia de la Tierra.

La captación de energía es la transformación de energía ambiente en energía eléctrica para alimentar dispositivos o circuitos autónomos. Los captadores producen muy poca cantidad de energía comparados con generadores de escala industrial que utilizan carbón, petróleo u otras fuentes. La diferencia es que la fuente de energía de los captadores son residuales, es decir, gradientes de temperatura de motor de combustión, energía electromagnética en centros urbanos por las radios, teléfonos y televisiones o movimiento de las olas del mar.



Figura 1.1: Estación repetidora de onda corta (izquierda) [1] y de radio (derecha) [2].

Los dispositivos que recolectan esta energía han atraído mucho interés tanto en el ámbito militar como el comercial, ya sea para localizar fauna marina o submarinos traspasando fronteras, balizas submarinas sin acceso a una fuente convencional de energía hacen falta. Como este ejemplo hay muchos otros, pero todos tienen en común que deben ser suficientemente robustos para aguantar una exposición a largo plazo en ambientes hostiles.

Un ejemplo de este tipo de instalaciones remotas serían los repetidores de señales mostrados en la Figura 1.1. Su localización apartada de la red eléctrica hace necesaria una fuente de energía alternativa y aunque estos métodos no producen mucha energía se podrían utilizar para alargar la vida de las baterías u otros medios que se empleen para abastecerlas.

También en todos los satélites espaciales, como el de la Figura 1.2, se produce un gradiente de temperaturas ya que una parte está expuesta al sol y la otra al vacío del espacio. Utilizando dispositivos de captación de energía se puede aprovechar este gradiente para conseguir energía adicional que puede ayudar al suministro de los paneles solares. Se aumenta así su autonomía y se reduce el tiempo en el que no pueden operar por los eclipses al orbitar el satélite alrededor de la Tierra.

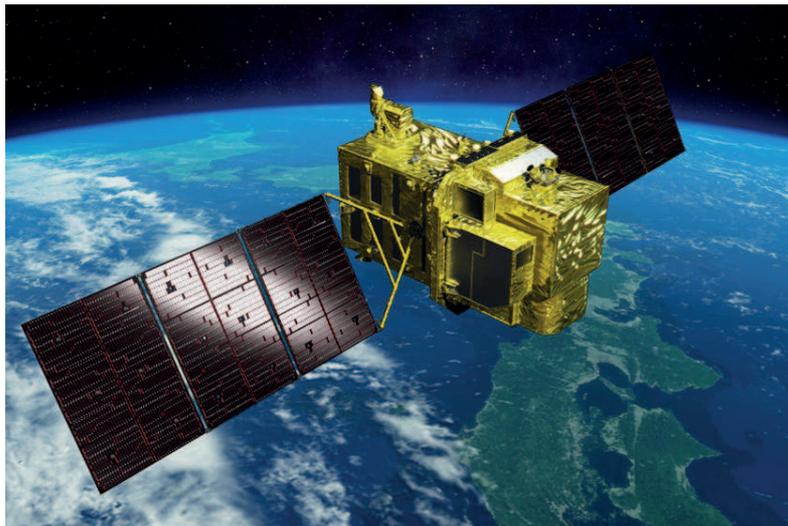


Figura 1.2: Satélite orbitando alrededor de la Tierra [3].

La escala de la energía recolectada varía de unidades a cientos de $[\mu\text{W}/\text{cm}^2]$, dependiendo del tipo de dispositivo. Hay muchas variedades de captación de energía, entre las cuales destacan:

- **Fuentes de radiación ambiente:** Energía proveniente de transmisores de radio ubicuos. En los centros urbanos se concentran muchos de estos dispositivos, pero su problema es la poca potencia de los transmisores.
- **Corriente de un fluido:** Los aerogeneradores no son los únicos dispositivos que pueden obtener energía del aire: otros tipos de generadores *Windbeam* consisten en una viga suspendida mediante muelles a una estructura externa que oscila lentamente con el aire. Un alternador puede convertir este movimiento en electricidad.
- **Piezoeléctricos:** Cualquier movimiento que pueda producir una deformación puede ser

una potencial fuente de energía para los piezoeléctricos aunque a una escala de mW . Por eso se está investigando utilizarlos en dispositivos a microescala y utilizar fuentes como la presión hidráulica de un fluido o el movimiento de un ser humano para alimentar el sensor de una tubería o un reloj de pulsera.

- **Piroeléctricos:** Se basan en el mismo concepto que los piezoeléctricos pero mediante calor. Una forma directa de generar energía es ejecutando un ciclo de Olsen; se basa en cargar un condensador enfriándolo bajo un campo eléctrico de baja intensidad y descargándolo al calentarlo bajo un campo de alta intensidad. Una ventaja de estos materiales es que son estables hasta $1200\text{ }^{\circ}\text{C}$, por lo que fuentes de alta temperatura se pueden aprovechar.
- **Termoeléctricos:** Materiales en los que un gradiente de temperatura provoca una corriente eléctrica. Su problema es que requieren de alta conductividad eléctrica pero baja conducción de calor para mantener el gradiente de temperatura. Actualmente, el rendimiento de la conversión de energía térmica a eléctrica es de 10% en pequeña escala ya que altas temperaturas dañan el material.
- **Inducción magnética:** Imanes ondulando en una viga en voladizo generan micro corrientes al moverse con respecto a conductores por la ley de inducción de Faraday que pueden alimentar pequeñas sensores u otros dispositivos.
- **Azúcar sanguíneo:** La oxidación de los azúcares de la sangre produce energía que puede ser convertida por bio baterías. Esta energía se suministra a marcapasos, bio sensores para diabéticos o a cualquier instrumento dentro del cuerpo humano.
- **Energía oceánica:** Las grandes masas oceánicas contienen mucha energía aprovechable en forma de mareas, olas, corrientes marinas u otras.

El propósito de este trabajo es estudiar la utilización del movimiento de las olas para deformar un material piezoeléctrico y producir energía. La cantidad de energía por unidad captada es muy pequeña, pero si se consigue combinar un buen número de dispositivos es posible conseguir energía razonable con solo la inversión inicial. Esta captación a largo plazo sería rentable además de ser una alternativa respetuosa con el medio ambiente.

Un esquema de la idea se puede observar en la Figura 1.3, cuyo estudio es el objetivo principal de este trabajo.

1.1.1. Energía oceánica de las olas

Las diferentes temperaturas alrededor del globo resultan en vientos que generan olas oceánicas. En consecuencia, las partículas de agua adoptan movimientos circulares que contienen energía cinética; su cantidad está relacionada con la velocidad y duración del viento, la profundidad y el área del cuerpo de agua afectada por el viento y las condiciones del lecho marino. Las olas se forman solo en el volumen de agua más cercano a la superficie, mientras que en las mareas todo el cuerpo de agua se mueve, desde la superficie hasta el fondo. La potencia total de las olas rompiendo contra las costas del mundo se estima en unos 2-3 millones de MW .

Los sistemas de energía undimotriz u olamotriz convierten en energía eléctrica la energía potencial y cinética contenida en las oscilaciones naturales de las olas. Hay mucha variedad de

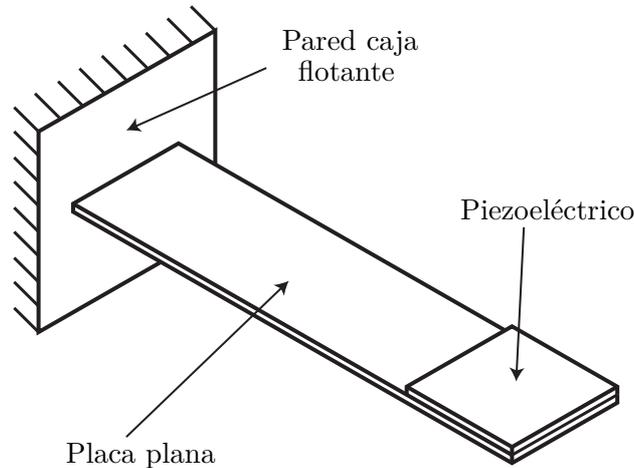


Figura 1.3: Esquema de placa en voladiza parcialmente bimorfa que se estudia en este trabajo.

mecanismos para el uso de esta fuente de energía. Uno consiste en concentrar las olas en un canal estrecho para aumentar su tamaño y potencia y luego utilizarlas para mover turbinas, otra en almacenarlas en una cuenca de captura donde mediante dispositivos de columna de agua oscilante se pueden convertir en electricidad. La conversión de energía de las olas es uno de los métodos más factibles, aunque al ser muy novedoso los costes de construcción son muy altos. Estos sistemas no están totalmente desarrollados comercialmente por sus complejidades y por la dificultad de la interconexión y transmisión de energía a través de cuerpos de agua turbulentos. Además, requieren mayor mantenimiento en comparación con sus homólogos en tierra por su localización en el mar.

Un sistema habitual consiste en un acumulador de energía unidimotriz, una turbina, un generador que puede ser convencional o rotacional y un sistema de transmisión de energía. El acumulador recoge la energía cinética de las olas que es redirigida a las turbinas, o directamente es el acumulador el que mueve el generador. El voltaje producido es de corriente alterna y se rectifica a corriente continua para aprovechar la capacidad de transmisión del agua salada de este tipo de corriente: en vez de utilizar tres cables para las tres fases de la corriente alterna, el de la polaridad negativa se puede omitir, reduciendo así la complejidad del sistema. La longitud de estos cables depende de si el sistema está colocado cerca de la costa o alejado de ella, aunque el principio es el mismo para las dos situaciones.

Hay muchos esquemas del proceso, aunque de forma general se puede simplificar en:

1.1.2. Tipos de olas

Atendiendo a su forma, existen dos tipos principales de olas:

- **Tipo a):** Olas periódicas y progresivas que se asemejan a una onda sinusoidal simétrica sobre el nivel de equilibrio del agua, ver Figura 1.5 superior.
- **Tipo b):** Olas de mayor período que las de tipo a) que ya no son sinusoidales ni simétricas. Sus crestas forman picos superiores y sus bases son redondeadas, ver Figura 1.5 inferior.

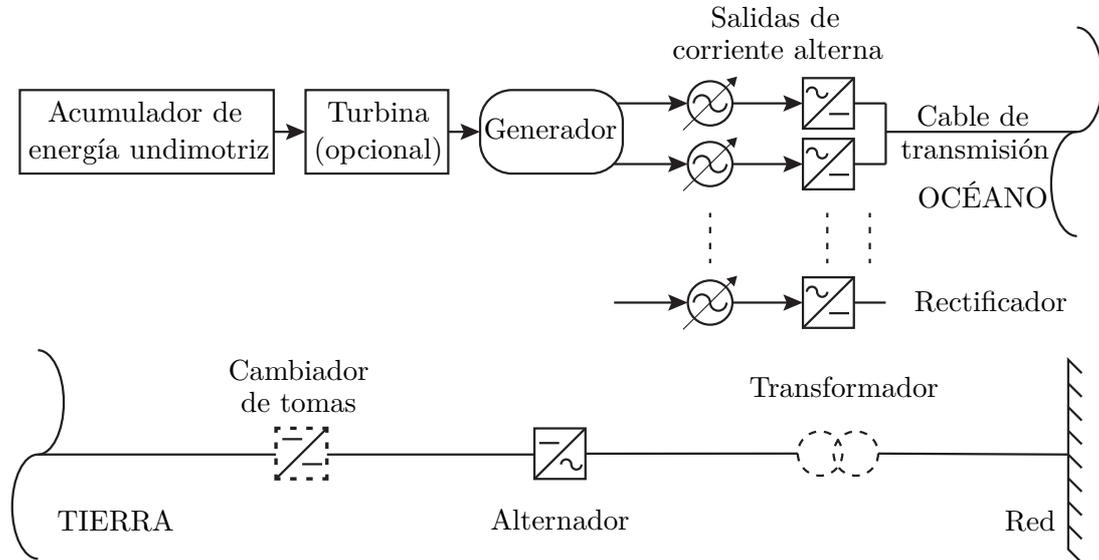


Figura 1.4: Diagrama de la captación de energía de las olas oceánicas [4].

Algunos de los sistemas más usados para captar energía undimotriz son el *Salter's duck*, un dispositivo en forma de pera que dispone de giroscopios que rotan por el movimiento de las olas; un generador convierte esta rotación en energía eléctrica. Otro sistema es un convertidor neumático de olas desarrollado por Yoshio Masuda, que utiliza una boya que asciende y desciende por el movimiento de las olas para incrementar y disminuir la presión de un compartimento; se produce entonces un movimiento de aire que mueve una turbina con la que se genera energía eléctrica.

1.2. Materiales Activos

Los materiales activos tienen la habilidad de relacionar diversos campos de la física, principalmente el térmico, mecánico, eléctrico y magnético. También conocidos como inteligentes o multifuncionales, pueden variar sus propiedades ante estímulos externos, físicos o químicos. Estas interacciones reversibles pueden ser controladas y hacen a estos materiales óptimos para funcionar como sensores y actuadores. Además, pueden combinarse para crear estructuras inteligentes con capacidad de auto diagnosticarse y adaptarse a sus condiciones de funcionamiento.

Existe una gran variedad de materiales que se pueden clasificar por el tipo de estímulo al que son susceptibles:

- **Electroactivos y magnetoactivos:** Reaccionan ante electricidad o magnetismo y son utilizados en la fabricación de sensores e incluso músculos y mecanismos orgánicos artificiales.
- **Electroreológicos y magnetoreológicos:** Formados por partículas magnetizables diluidas en fluidos. Sus propiedades reológicas¹ son alteradas por variaciones de campos

¹La reología es la parte de la mecánica de medios continuos que estudia la relación entre esfuerzo y deformación

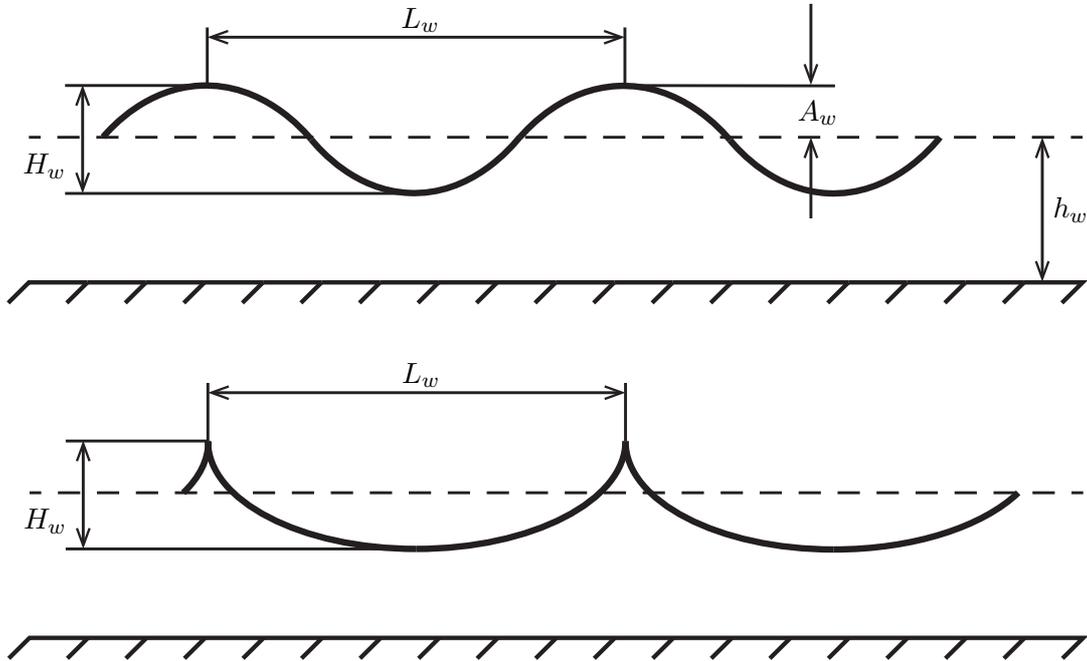


Figura 1.5: Tipos de olas **a)** superior y **b)** inferior y sus parámetros: H_w altura, L_w longitud de onda, A_w amplitud y h_w profundidad [4].

eléctricos o magnéticos cambiando su viscosidad.

- **Fotoactivos:** Pueden ser electroluminiscentes que emiten luz por impulsos eléctricos, fluorescentes que devuelven luz con mayor intensidad que la que reciben, o fosforescentes que almacenan energía y la devuelven cuando la emisión cesa.
- **Cromoactivos:** Cambian de color a consecuencia de algún fenómeno externo como corriente eléctrica, radiación ultravioleta, rayos X, temperatura o presión. Su utilidad varía desde etiquetas de control de temperatura a cromos que al frotar muestran una imagen.
- **Memoria de forma:** Pueden volver a su forma inicial después de ser deformados mediante un cambio térmico o magnético. Un ejemplo es el Nitinol, una aleación de níquel y titanio que al deformarse se calienta y luego se enfría.
- **Piroeléctricos, Piezoeléctricos:** Descritos en la Sección 1.1.

Este trabajo final de grado (TFG) está centrado en el último tipo de materiales y en utilizar la energía de las olas del mar para deformarlos y así conseguir energía eléctrica.

Desde su inicio la piezoelectricidad ha captado mucha atención, desde el punto de vista práctico hasta el principio físico de su comportamiento como se puede observar en la ingente cantidad de libros publicados. Comercialmente se producen en estructura monocristalina o también cerámica, y en sus aplicaciones se usan junto con materiales dieléctricos y semiconductores.

en materiales que pueden fluir.

El fenómeno de la piezoelectricidad requiere de conocimientos en diversos campos como la cristalografía, análisis de tensiones, mecánica del medio continuo, termodinámica, fenómenos no lineales y además precisa de experiencia con equipamientos eléctricos y mecánicos. Este campo es muy extenso con lo que en este TFG se intentará dar unas nociones básicas sobre el tema y su posible aplicación a un caso práctico. A pesar de los más de 100 años de investigación y uso, nuevos horizontes se siguen abriendo para los especialistas en la materia.

1.2.1. Historia de los piezoeléctricos

El fenómeno de la piezoelectricidad fue descubierto por los hermanos Curie, Pierre² (1859-1906) y Jacques³ (1855-1941). En 1880 observaron que algunos cristales mostraban ciertas cargas negativas y positivas en partes de su superficie cuando se comprimen en ciertas direcciones. Estas cargas eran proporcionales a la presión aplicada y desaparecían cuando cesaba.

El descubrimiento no fue casual: el trabajo de unos años antes sobre piroelectricidad y simetría de cristales de Pierre, influenció mucho sus hipótesis y experimentos. Encontró que para estos materiales la polaridad eléctrica se producía solo a lo largo de ciertas direcciones dependiendo de la simetría de clases cristalográficas particulares y su polarización con la temperatura. Los dos efectos están íntimamente relacionados, todos los materiales piroeléctricos son intrínsecamente piezoeléctricos. Los prefijos *piezo* y *pyro* significan respectivamente *a presión* y *fuego* en griego.

El efecto piroeléctrico se conocía desde la Edad Antigua gracias a la turmalina, un mineral que al ponerse en ascuas primero las atraía y al enfriarse las repelía. Estos cristales tienen un único eje polar que no necesariamente depende de las direcciones de la simetría del cristal. Este efecto dirigió a los dos hermanos a teorizar la electrificación por presión además de ayudarles a predecir en qué dirección se originaría.

Después de publicar los hermanos Curie su artículo en 1881, Gabriel Lippmann⁴ predijo el efecto inverso: un cristal piezoeléctrico se deforma al ser sometido a un campo eléctrico. Los hermanos Curie sugirieron entonces un experimento muy simple para demostrar este acoplamiento que consiste en someter un cristal a una corriente eléctrica y acoplarlo mecánicamente a otro; si en el segundo se generaba corriente el primero se había deformado.

En años posteriores se fueron descubriendo otros cristales como el cuarzo con las mismas características y se empezó la formulación y cuantificación del efecto.

1.2.2. Efecto Piezoeléctrico

Como se ha comentado, la piezoelectricidad es la interacción entre campos eléctricos y mecánicos en cristales no céntricos o con estructuras similares. El efecto directo se define como el cambio de la polarización eléctrica proporcional al esfuerzo y depende fuertemente de la simetría del cristal: si es central el cristal no puede ser piezoeléctrico.

²Pierre Curie: Físico francés Premio Nobel de Física en 1903 con su mujer Marie Curie, descubridor de la piezoelectricidad y pionero en el campo de la radioactividad.

³Jacques Curie: Físico francés, descubridor de la piezoelectricidad y su efecto inverso.

⁴Gabriel Lippman: Físico luxemburgués Premio Nobel de Física en 1908, descubridor de la posibilidad de reconstruir las longitudes de onda reflejadas por los objetos.

El efecto inverso ocurre cuando un material piezoeléctrico se tensiona bajo un campo eléctrico externo. Los dos efectos piezoeléctricos son una manifestación de la misma propiedad, aunque por razones históricas el directo se define como el primero ya que fue el que se descubrió antes como se ha explicado en la Sección 1.2.1.

Se considera una placa de cuarzo tipo mano izquierda⁵ con espesor pequeño comparado con sus otras dimensiones que se somete a una presión con la misma dirección que el espesor. Bajo fuerza de compresión F , la polarización P en el espesor es proporcional a la tensión mecánica $T = F/A$.

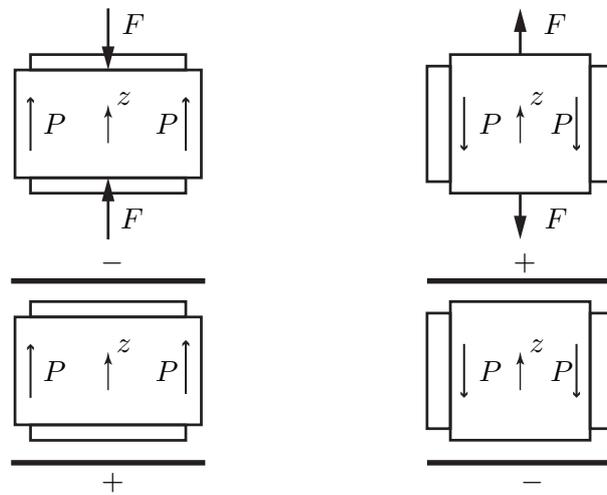


Figura 1.6: Efectos piezoeléctricos Directo (arriba) e Indirecto (abajo) [4].

Definiendo d como el coeficiente piezoeléctrico del material, las fórmulas relacionadas con los dos efectos son: $P = d \cdot T$; $S = d \cdot E$

1.2.3. Tipos de piezoeléctricos

Los materiales piezoeléctricos pueden ser sintéticos o naturales como el cuarzo o sal de La Rochelle. Fue descubierta en 1672 por el farmacéutico Pierre Seignette y utilizada posteriormente por los Curie para demostrar la piezoelectricidad. Actualmente, los sintéticos tienen muchas más aplicaciones debido a sus mejores propiedades y variación de ellas.

Los piezoeléctricos sintéticos se pueden clasificar en tres grupos dependiendo de su estructura interna:

- **Monocristales:** están polarizados ya en su fabricación por lo que no necesitan tratamientos de post-polarización y son muy cómodos de fabricar.
- **Polímeros:** necesitan post-tratamiento de polarización. Primero se tracciona el material para romper su estructura interna y posteriormente se polariza para obligar a los dipolos a alinearse.

⁵Para cuarzo tipo mano derecha el signo de la polarización P sería opuesto.

- **Cerámicas:** son los más utilizadas y están compuestas de varios cristales ferroeléctricos dispuestos aleatoriamente, pero formando una estructura con polarización nula. Al polarizarlas se crea su momento dipolar permanente.

El proceso de polarización se realiza aplicando un campo eléctrico elevado y manteniendo la temperatura ligeramente inferior a la de Curie, a la cual el material ferromagnético pierde sus propiedades piezoeléctricas. También existe un proceso antagónico de despolarización que sucede al aplicar un campo de sentido contrario al de polarización, con presiones excesivas o excediendo la temperatura de Curie.

1.2.4. Aplicaciones de la Piezoelectricidad

Las aplicaciones prácticas de estos materiales han ido surgiendo a períodos dispares. Al principio tenían poco uso aparte de medir algunos parámetros en ciertos experimentos. Conforme se fue descubriendo que podían transformar señales eléctricas a acústicas y viceversa o que podían generar energía a partir de vibraciones, sus usos se fueron extendiendo. Algunas aplicaciones que impulsaron su desarrollo fueron la localización de submarinos por ondas ultrasónicas o la radiodifusión.

Otras aplicaciones de los materiales piezoeléctricos son, entre otras, resonadores, relojes, filtros cerámicos y cristalinos, filtros SAW⁶, transductores ultrasónicos y transformadores piezoeléctricos para altos o bajos voltajes. Actualmente el mercado dominante es el de las dos primeras aplicaciones, aunque se está expandiendo a otros nichos como posicionadores de precisión y motores ultrasónicos⁷.



Figura 1.7: Sensores piezoeléctricos de varios tamaños con sus conductores eléctricos [5].

El cuarzo fue el material más utilizado en los piezoeléctricos pero hoy en día los piezoeléctricos más utilizados son las cerámicas PZT, titanato de circonato de plomo, que reciben este nombre por su formulación química $PbZrTiO_3$.

La Tabla 1.1 muestra una comparativa entre diferentes tipos de PZT para su uso en condensadores. Se compara la cerámica PZT con otras variedades dopadas mediante otros materiales como el lantano PLZT, manganeso PMZT y niobio PNZT que alteran sus propiedades dieléctricas.

⁶Onda acústica superficial, siglas SAW en inglés.

⁷Tipo de motor eléctrico alimentado por una vibración ultrasónica

Propiedad	PZT	PMZT	PLZT	PNZT
Permitividad	++	+	++	++
Factor de calidad	+	++	-	+
Sintonización	+	++	-	-
Corriente de fuga	-	+	+	++
Rigidez dieléctrica	-	++	+	++

Tabla 1.1: Comparativa cualitativa entre diferentes PZT.

Las propiedades de la tabla son:

- **Permitividad:** capacidad de polarizarse bajo un campo eléctrico.
- **Factor de calidad:** inversa del factor de pérdidas. Cuando pasa corriente por un material dieléctrico se disipa energía eléctrica en forma de calor originando dichas pérdidas.
- **Sintonización:** capacidad de manipular la señal de salida de un dispositivo, en este caso condensadores que emplean estos materiales dieléctricos.
- **Corriente de fuga:** corriente que descarga un condensador lentamente debido a que el material del que esta hecho no es un aislante perfecto y tiene una conductividad no nula.
- **Rigidez dieléctrica:** valor límite de la intensidad de un campo eléctrico que convierte un aislante en un conductor eléctrico.

En la tabla los símbolos + indican valores altos de esa propiedad y los símbolos - bajos. El lantano aumenta las pérdidas en forma de calor, el manganeso permite un mayor control del dispositivo y el PZT base es el más aislante por lo que su corriente de fuga es la más baja.

1.3. Objetivos

En este TFG primero se expondrá la formulación necesaria para resolver analíticamente los problemas planteados de los que se pueda obtener una. Luego se harán una serie de casos simples con solución analítica clara para compararlos con dos programas de elementos finitos (MEF). El primero es el FEAP, un programa de elementos finitos de investigación creado por el profesor R.Taylor de la universidad de California, Berkeley. El código de este programa ha sido compilando con Intel Fortran y Microsoft Visual Studio.

El otro programa es el COMSOL, un programa de elementos finitos comercial para la simulación de todo tipo de problemas de ingeniería, manufacturación o investigación científica. Una vez validados estos programas se pasará a estudiar la placa en voladizo bajo una carga arbitraria. Este estudio se dividirá en tres partes: primero la placa hecha solo de aluminio, luego con dos capas una de aluminio y otra de PZT y ya por último como la que se ve en la Figura 1.3.

A continuación un capítulo con estudios paramétricos y diferentes materiales para determinar la configuración óptimas seguido de una modelización de las olas del mar para conseguir una carga más certera a la que experimentaría la placa en la realidad, repitiendo la última parte del estudio de la placa en voladizo. Finalmente las conclusiones del TFG.

2

Formulación

2.1. Teoría de placas planas

En esta sección se expondrá de forma breve la teoría de flexión de placas planas. Para ello se hará uso de las hipótesis de Kirckoff con las que se simplificarán las ecuaciones de la elasticidad que se consideran conocidas:

- Los movimientos de la placa en el eje z , ver Figura 2.1, son mucho más pequeños que el espesor (placa rígida).
- El plano medio solo se mueve en la dirección z : $u_0, v_0 \approx 0$
- Las deformaciones fuera del plano $x - y$ se pueden despreciar: $S_{xz}, S_{yz}, S_z \approx 0$
- Las tensiones fuera del plano T_z, T_{xz}, T_{yz} se consideran muy pequeñas y sus efectos son despreciables.

Los desplazamientos de la placa en las direcciones de los ejes coordenados se denominan por u, v, w y una coma antes del subíndice correspondiente a un eje coordenado indica derivación con respecto a él. El objetivo del desarrollo consiste en estudiar la variable principal $w(x, y)$ también conocida como la “flecha”.

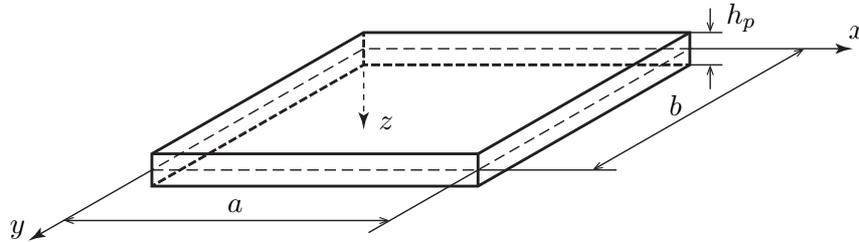


Figura 2.1: Placa plana rectangular con el origen de coordenadas situado en el plano medio [6].

Se empieza planteando el tensor deformación simétrico:

$$\mathbf{S} = \begin{pmatrix} S_x & S_{xy} & S_{xz} \\ S_{xy} & S_y & S_{yz} \\ S_{xz} & S_{yz} & S_z \end{pmatrix} \quad \text{hipótesis c)} \quad \rightarrow \quad \mathbf{S} = \begin{pmatrix} S_x & S_{xy} & \cancel{S_{xz}} \\ S_{xy} & S_y & \cancel{S_{yz}} \\ \cancel{S_{xz}} & \cancel{S_{yz}} & \cancel{S_z} \end{pmatrix} \quad (2.1)$$

y con esta simplificación se puede reordenar el tensor como:

$$\mathbf{S} = \begin{pmatrix} S_x \\ S_y \\ S_{xy} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_{,x} \\ v_{,y} \\ u_{,y} + v_{,x} \end{pmatrix} \quad (2.2)$$

Definiendo κ como la curvatura:

$$\boldsymbol{\kappa} = \begin{Bmatrix} \kappa_x \\ \kappa_y \\ 2\kappa_{xy} \end{Bmatrix} = - \begin{Bmatrix} w_{,xx} \\ w_{,yy} \\ 2w_{,xy} \end{Bmatrix} \quad (2.3)$$

y con la hipótesis b) se puede integrar el tensor resultando en la expresión: $\boldsymbol{S} = \boldsymbol{\kappa} z$. En este tensor se engloban las ecuaciones cinemáticas de la placa, por lo que aún faltan las constitutivas. Se puede calcular este tensor de tensión con la ley de Hooke y la hipótesis d) permite trabajar en un solo plano:

$$\boldsymbol{T} = \begin{Bmatrix} T_x \\ T_y \\ T_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{Y}{1-\nu^2} (S_x + \nu S_y) \\ \frac{Y}{1-\nu^2} (S_y + \nu S_x) \\ G S_{xy} \end{Bmatrix} = - \begin{Bmatrix} \frac{1}{1-\nu^2} (w_{,xx} + \nu w_{,yy}) \\ \frac{1}{1-\nu^2} (w_{,yy} + \nu w_{,xx}) \\ \frac{1}{1+\nu} w_{,xy} \end{Bmatrix} Y z \quad (2.4)$$

Estos dos tensores no son los únicos parámetros útiles para estudiar la flexión. También se definen “solicitaciones” constantes en z y que son equivalentes a las tensiones. Esta equivalencia se expresa como:

$$\boldsymbol{M} = \begin{Bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{Bmatrix} = \int_{-h_p/2}^{h_p/2} \begin{Bmatrix} T_x \\ T_y \\ T_{xy} \end{Bmatrix} z dz = - \underbrace{\frac{Y h_p^3}{12(1-\nu^2)}}_{D_f} \begin{Bmatrix} w_{,xx} + \nu w_{,yy} \\ w_{,yy} + \nu w_{,xx} \\ (1-\nu) w_{,xy} \end{Bmatrix} \quad (2.5)$$

Esta ecuación es la llamada momento-curvatura y se supone que el material es isótropo para poder utilizarla. Si no lo fuera la integral debería dividirse por capas y el término D_f , llamado rigidez a flexión, se convierte en una matriz.

Por último se definen las “solicitaciones” cortantes:

$$\begin{Bmatrix} Q_x \\ Q_y \end{Bmatrix} = \int_{-h_p/2}^{h_p/2} \begin{Bmatrix} T_{xz} \\ T_{yz} \end{Bmatrix} dz = -D_f \begin{Bmatrix} w_{,xxx} + w_{,xyy} \\ w_{,xxy} + w_{,yyy} \end{Bmatrix} \quad (2.6)$$

La hipótesis d) considera T_{xz} y T_{yz} pequeñas pero aun así Q_x y Q_y pueden ser de la misma magnitud que los momentos.

2.1.1. Ecuación diferencial

Siguiendo el desarrollo de la Sección 2.2.3 de [6], se puede obtener una ecuación diferencial tomando un elemento diferencial de la placa y considerando los momentos y cortantes sobre dicho elemento. Aplicando equilibrio sobre el paralelepípedo se llega a la expresión:

$$\frac{\partial^2 M_x}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 M_{xy}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 M_y}{\partial y^2} = -q(x, y) \quad (2.7)$$

Por último teniendo en cuenta las expresiones de los momentos dadas en la Ec. (2.5):

$$w_{,xxxx} + 2w_{,xxyy} + w_{,yyyy} = \frac{q}{D_f} \quad \rightarrow \quad \nabla^4 w = \frac{q}{D_f} \quad (2.8)$$

donde el operador ∇^4 se llama “de Lagrange”. Esta ecuación es de 4° orden y su única incógnita es la flecha $w(x, y)$ a partir de la cual se pueden obtener todas las solicitaciones, deformaciones y tensiones que se han enunciado. A parte de esta ecuación también existen otras formulaciones no diferenciales como la integral del Método de la Energía.

2.1.2. Energía de deformación

La energía potencial de deformación en general para cualquier cuerpo elástico es:

$$U_b = \iiint_{Vol} \mathbf{T}^T \mathbf{S} \, dVol \quad (2.9)$$

Para una placa plana, siguiendo el desarrollo de la Sección 2.7 de [6] la ecuación se convierte en:

$$U_b = \iint_A \kappa^t M \, dA = \frac{D_f}{2} \iint_A [(w_{,xx} + w_{,yy})^2 - 2(1 - \nu)(w_{,xx}w_{,yy} - w_{,xy}^2)] \, dA \quad (2.10)$$

La energía de las fuerzas externas siguiendo la definición de trabajo = fuerza \times distancia, sigue la siguiente ecuación para carga repartida:

$$V_f = \iint_A q(x, y) w(x, y) \, dA \quad (2.11)$$

2.1.3. Método de Galerkin

En esta sección se desarrollará el método de Galerkin para resolver problemas de flexión estática y dinámica.

Problema estático

Galerkin es un método numérico que pretende resolver la Ec. (2.8) mediante un desarrollo en serie para la solución y utilizando la formulación integral para satisfacer dicha ecuación. El desarrollo en series propuesto para aproximar la solución sigue la forma:

$$w(x, y) = \sum_{r=1}^N w_r \theta_r(x, y) \quad (2.12)$$

donde $\theta_r(x, y)$ son funciones de prueba que satisfacen las condiciones de contorno y w_r son los coeficientes a calcular. Si se substituye esta expresión en la Ec. (2.8) se llega a:

$$D_f \nabla^2 \nabla^2 \left[\sum_{r=1}^N w_r \theta_r(x, y) \right] - q(x, y) = 0 \quad (2.13)$$

La ecuación anterior no se puede cumplir, pero si que se puede conseguir que la diferencia sea mínima. Esto ocurre cuando la parte izquierda es mutuamente ortogonal con cada una de las funciones de prueba en el dominio de la placa para $k = 1, 2, \dots, N$:

$$\iint_A \left\{ D_f \nabla^2 \nabla^2 \left[\sum_{r=1}^N w_r \theta_r(x, y) \right] - q(x, y) \right\} \theta_k(x, y) dA = 0 \quad (2.14)$$

Esta ecuación se puede escribir de forma matricial:

$$\iint_A \left[D_f \nabla^2 \nabla^2 (\mathbf{w}_r^\top \boldsymbol{\theta}) - q(x, y) \right] \boldsymbol{\theta} dA = 0 \quad (2.15)$$

y de forma más compacta:

$$\boxed{\mathbf{A}_g \mathbf{w}_r = \mathbf{B}_g} \quad , \quad \mathbf{A}_g = D_f \iint_A (\nabla^2 \nabla^2 \boldsymbol{\theta}) \boldsymbol{\theta}^\top dA; \quad \mathbf{B}_g = \iint_A q(x, y) \boldsymbol{\theta} dA; \quad (2.16)$$

Problema dinámico

Si se tiene en cuenta las fuerzas másicas o fuerzas de inercia debidas a la densidad ρ de la placa, la Ec. (2.8) adquiere un nuevo término:

$$D_f \nabla^2 \nabla^2 w(x, y, t) = q(x, y, t) - \rho h_p \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}(x, y, t) \quad (2.17)$$

Siguiendo el desarrollo realizado en [7] para aplicar el método de Galerkin a las ecuaciones de la dinámica, es necesario en primer lugar resolver la Ec. homogénea (2.17). Se asume que esta ecuación tiene una solución armónica:

$$w(x, y, t) = (A_1 \cos \omega t + A_2 \sin \omega t) W(x, y) \quad (2.18)$$

El método de Galerkin propone una solución con la forma:

$$W(x, y) = \sum_{r=1}^N C_r \theta_r(x, y) \quad (2.19)$$

siendo \mathbf{C} los grados de libertad del problema. Esta ecuación tiene que cumplir la Ec. (2.17) libre de carga transversal:

$$D_f \sum_{r=1}^N C_r \nabla^2 \nabla^2 \theta_r(x, y) - \rho h_p \omega^2 \sum_{r=1}^N C_r \theta_r(x, y) = 0 \quad (2.20)$$

De la misma forma que en el problema estático, el término de la izquierda debería ser nulo y por tanto cumplir las propiedades de ortogonalidad por lo que:

$$\iint_A \left[D_f \sum_{r=1}^N C_r \nabla^2 \nabla^2 \theta_r(x, y) - \rho h_p \omega^2 \sum_{r=1}^N C_r \theta_r(x, y) \right] \theta_k(x, y) dA = 0 \quad (2.21)$$

Este conjunto de ecuaciones forma un sistema de ecuaciones del que se busca una solución no trivial mediante un problema de autovalores. Matricialmente el sistema es:

$$\boxed{(\mathbf{A}_g - \omega^2 \mathbf{M}_g) \mathbf{C} = 0} \quad , \quad \mathbf{M}_g = \iint_A \rho h_p \boldsymbol{\theta} \boldsymbol{\theta}^\top dA; \quad (2.22)$$

Resolviendo el problema valores propios se obtienen los autovalores ω , frecuencias de vibración y los autovectores $\boldsymbol{\Psi}$ que indican los modos de vibración:

$$W(x, y) = \boldsymbol{\Psi} \boldsymbol{\theta} \quad (2.23)$$

Con estos modos de vibración se pueden diagonalizar las ecuaciones diferenciales. Ahora se propone una solución en series con unos coeficientes \mathbf{F}_g que dependen del tiempo y son la incognita a resolver:

$$w(x, y, t) = \sum_{i=1}^N F_{gi}(t) W_i(x, y) \quad (2.24)$$

Esta solución debe cumplir la ecuación (2.17) :

$$D_f \sum_{r=1}^N F_{gr}(t) \nabla^2 \nabla^2 W_r(x, y) + \rho h_p \sum_{r=1}^N \ddot{F}_{gr}(t) W_r(x, y) - q(x, y, t) = 0 \quad (2.25)$$

y como con las vibraciones libres, el término de la izquierda cumple ortogonalidad:

$$\iint_A \left[D_f \sum_{r=1}^N F_{gr}(t) \nabla^2 \nabla^2 W_r(x, y) + \rho h_p \sum_{r=1}^N \ddot{F}_{gr}(t) W_r(x, y) - q(x, y, t) \right] W_k(x, y) dA = 0; \quad (2.26)$$

Substituyendo la expresión de los modos de vibración:

$$\Psi^T \iint_A D_f \nabla^2 \nabla^2 \boldsymbol{\theta} \boldsymbol{\theta}^T dA \Psi \mathbf{F}_g + \Psi^T \rho h_p \iint_A \boldsymbol{\theta} \boldsymbol{\theta}^T dA \Psi \ddot{\mathbf{F}}_g = \Psi^T \iint_A q \boldsymbol{\theta} dA \quad (2.27)$$

y de forma matricial este sistema de ecuaciones diferenciales desacopladas tiene la forma:

$$\boxed{(\Psi^T \mathbf{A}_g \Psi) \mathbf{F}_g + (\Psi^T \mathbf{M}_g \Psi) \ddot{\mathbf{F}}_g = \Psi^T \mathbf{B}_g} \quad (2.28)$$

Resolviendo estas ecuaciones diferenciales de segundo orden se llega a la solución suma de homogénea y particular:

$$F_{gi}(t) = A_{1i} \cos \omega_i t + A_{2i} \sin \omega_i t + F_{gi}^p(t) \quad (2.29)$$

que da la solución final del movimiento:

$$w(x, y, t) = \sum_{i=1}^N \left(A_{1i} \cos \omega_i t + A_{2i} \sin \omega_i t + F_{gi}^p(t) \right) W_i(x, y) \quad (2.30)$$

donde A_1 y A_2 dependen de las condiciones iniciales $w_0(x, y)$ y $\dot{w}_0(x, y)$.

2.1.4. Placas de materiales ortotrópicos

Un material es ortotrópico cuando sus propiedades mecánicas son diferentes en las tres direcciones perpendiculares entre sí, normalmente los ejes x , y , z en un sistema tridimensional. Hay muchos ejemplos de este tipo de materiales como la madera, muchos cristales y polímeros reforzados con fibras de vidrio o carbono, pero la verdadera razón para hacer hincapié en estos materiales es porque el PZT, la cerámica piezoeléctrica más utilizada, es uno de ellos.

En realidad el PZT es transversalmente isótropo, tiene las mismas propiedades en el plano $x-y$ pero diferentes en el plano perpendicular. La única diferencia entre ambos tipos de material es que el ortotrópico necesita de nueve constantes elásticas para definirse y el transversalmente isótropo solo de cinco, ya que las otras cuatro se repiten. La teoría expuesta en [8], que es la que este TFG utiliza, vale para ambos tipos de materiales.

Las ecuaciones constitutivas para este tipo de materiales son:

$$\mathbf{S} = \begin{Bmatrix} S_x \\ S_y \\ S_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{T_x}{Y_x} - \nu_y \frac{T_y}{Y_y} \\ \frac{T_y}{Y_y} - \nu_x \frac{T_x}{Y_x} \\ \frac{T_{xy}}{G_{xy}} \end{Bmatrix} \quad (2.31)$$

y resolviendo de la Ec. (2.31) las componentes de las tensiones, se consigue:

$$\mathbf{T} = \begin{Bmatrix} T_x \\ T_y \\ T_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{Y_x}{1 - \nu_x \nu_y} (S_x + \nu_y S_y) \\ \frac{Y_y}{1 - \nu_x \nu_y} (S_y + \nu_x S_x) \\ G_{xy} S_{xy} \end{Bmatrix} = - \begin{Bmatrix} \frac{Y_x}{1 - \nu_x \nu_y} (w_{,xx} + \nu_y w_{,yy}) \\ \frac{Y_y}{1 - \nu_x \nu_y} (w_{,yy} + \nu_x w_{,xx}) \\ 2 G_{xy} w_{,xy} \end{Bmatrix} z \quad (2.32)$$

Con la Ec (2.32) en mente ya se puede plantear la ecuación momento-curvatura para este tipo de placas:

$$\mathbf{M} = \begin{Bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{Bmatrix} = - \begin{Bmatrix} D_{fx} w_{,xx} + D_{fxy} w_{,yy} \\ D_{fy} w_{,yy} + D_{fxy} w_{,xx} \\ 2D_{fs} w_{,xy} \end{Bmatrix} \quad (2.33)$$

que es la Ec. (2.5) pero con rigideces a flexión en las diferentes direcciones de las placas. Estos términos son:

$$D_{fx} = \frac{Y_x}{1 - \nu_x \nu_y} \frac{h_p^3}{12}; \quad D_{fy} = \frac{Y_y}{1 - \nu_x \nu_y} \frac{h_p^3}{12}; \quad D_{fxy} = \frac{\nu_y Y_x}{1 - \nu_x \nu_y} \frac{h_p^3}{12}; \quad D_{fs} = \frac{G_{xy} h_p^3}{12} \quad (2.34)$$

Definiendo $H_f := D_{fxy} + 2D_{fs}$, se escribe la ecuación diferencial de la placa que tiene la misma forma que la Ec. (2.8) pero en vez de estar la rigidez a flexión factorizada en todas las derivadas, estas se conservan en sus respectivas direcciones:

$$D_{fx} w_{,xxxx} + 2H_f w_{,xxyy} + D_{fy} w_{,yyyy} = q(x, y) \quad (2.35)$$

2.1.5. Placas laminadas

En esta parte se plantea cómo resolver laminados de placas de la misma forma que en [9]. Este tipo de placas, como la que se ve en la Figura 2.2, están hechas de diferentes capas unidas de materiales isotrópicos o anisotrópicos¹ con diferentes propiedades.

La idea para resolver este tipo de placas es muy simple, consiste en crear una rigidez media de todas las capas para luego resolver el problema como si fuera una placa normal con dicha rigidez, que sigue la fórmula:

$$D_t = \frac{AC - B^2}{A} \quad (2.36)$$

siendo esas constantes A , B y C considerándose materiales isotrópicos:

¹Materiales con diferentes propiedades dependiendo de diferentes direcciones, si estas son perpendiculares se consideran ortotrópicos

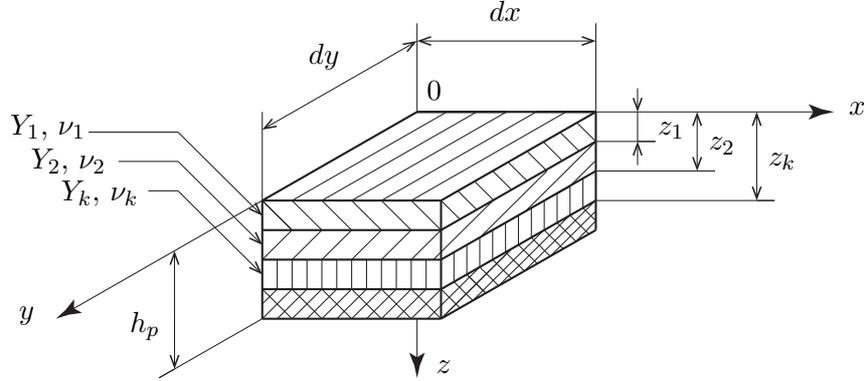


Figura 2.2: Esquema de un laminado rectangular [9].

$$\begin{aligned}
 A &= \sum_k \frac{Y_k}{1 - \nu_k^2} (z_k - z_{k-1}); & B &= \sum_k \frac{Y_k}{1 - \nu_k^2} \left(\frac{z_k^2 - z_{k-1}^2}{2} \right) \\
 C &= \sum_k \frac{Y_k}{1 - \nu_k^2} \left(\frac{z_k^3 - z_{k-1}^3}{3} \right)
 \end{aligned} \tag{2.37}$$

Con esta rigidez media se puede plantear la ecuación diferencial:

$$w_{,xxxx} + 2w_{,xxyy} + w_{,yyyy} = \frac{q}{D_t} \quad \rightarrow \quad \nabla^4 w = \frac{q}{D_t} \tag{2.38}$$

y ya se puede resolver el problema con diferentes métodos como el de Galerkin explicado en la Sección 2.1.3. Hay que recalcar que en la Figura 2.2 el origen del eje z está en la cara superior del primer material para hacer los cálculos de las constantes A , B y C ; pero posteriormente cuando ya se tenga la rigidez media y se resuelva la Ec (2.38) el origen de z estará en el plano medio de la placa como se había enunciado en la Figura 2.1.

2.1.6. Salto de espesor

En [10], se enuncia la formulación para resolver placas con cualquier número de saltos de espesor en las direcciones x , y . Este desarrollo resulta en fórmulas muy extensas que se simplifican mucho para el objetivo de este TFG, un solo salto de espesor en la dirección x como el de la Figura 1.3, por lo que en esta sección se expondrán las fórmulas necesarias para resolver dicho caso.

La posición del plano medio de la placa cambia debido a la variación del espesor, para simplificar esta se asume que está siempre en una superficie que bisecta el espesor en cada punto y que varía discontinuamente entre la placa de referencia y el salto del espesor como se puede observar en la Figura 2.3 donde la línea discontinua representa el plano medio de la placa. La veracidad de esta hipótesis se comprobará comparando numéricamente los resultados analíticos y los obtenidos por MEF en la Sección 3.6.

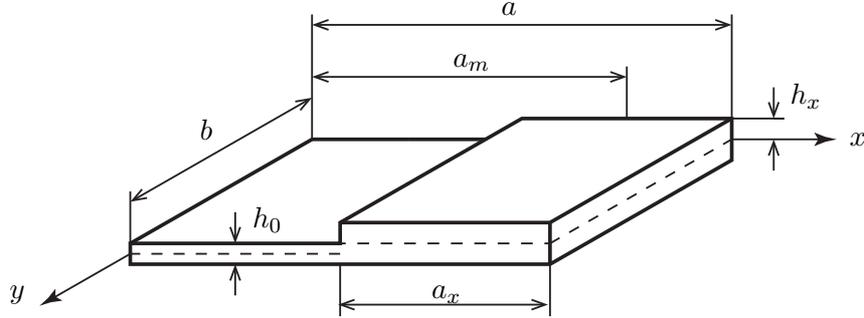


Figura 2.3: Esquema de una placa con un salto de espesor en la dirección x .

La principal idea de este desarrollo es utilizar la función delta de Dirac para cambiar la rigidez de la placa en la zona donde se sitúa el salto de espesor. La ecuación momento-curvatura para este tipo de placas se convierte en:

$$\mathbf{M} = \begin{Bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{Bmatrix} = -\chi(x) \underbrace{\frac{Y h_0^3}{12(1-\nu^2)}}_{D_0} \begin{Bmatrix} w_{,xx} + \nu w_{,yy} \\ w_{,yy} + \nu w_{,xx} \\ (1-\nu) w_{,xy} \end{Bmatrix} \quad (2.39)$$

La función $\chi(x)$ es la que aumenta la rigidez de la placa una vez se llega a la zona del salto de espesor y sigue la fórmula:

$$\chi(x) = 1 + \alpha_x \zeta(x - a_m); \quad \alpha_x = 3 \frac{h_x}{h_0} + 3 \left(\frac{h_x}{h_0} \right)^2 + \left(\frac{h_x}{h_0} \right)^3 \quad (2.40)$$

donde α_x es la relación entre espesores, a_m es el punto medio del salto del espesor y $\zeta(x - a_m)$ es la función Heaviside extendida. Esta se define como una función donde la delta de Dirac δ existe de forma continua en la dirección x a lo largo del salto de espesor:

$$\begin{aligned} \zeta(x - a_m) &= 1 && \text{para } a_m - a_x/2 \leq x \leq a_m + a_x/2 \\ \zeta(x - a_m) &= 0 && \text{para cualquier otro valor de } x \end{aligned}$$

Con los momentos de la Ec. (2.39) ya se puede plantear el equilibrio de fuerzas para conseguir la ecuación diferencial que gobierna la placa y que se puede resolver por diferentes métodos.

Problema estático

Se plantea resolver el problema mediante el método de Galerkin como en la Sección 2.1.3 pero cambiando el cálculo de la matriz \mathbf{A}_g . Esta sigue la fórmula:

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_g = D_0 & \left\{ \mathbf{\Lambda}_x(4, 0; 0) \mathbf{\Lambda}_y(0, 0; 0) + 2 \mathbf{\Lambda}_x(2, 0; 0) \mathbf{\Lambda}_y(2, 0; 0) + \mathbf{\Lambda}_x(0, 0; 0) \mathbf{\Lambda}_y(4, 0; 0) \right. \\ & + \alpha_x \left[\mathbf{\Lambda}_x(0, 0; 1) \mathbf{\Lambda}_y(4, 0; 0) + \mathbf{\Lambda}_x(2, 2; 1) \mathbf{\Lambda}_y(0, 0; 0) - 2(1 - \nu) \mathbf{\Lambda}_x(1, 1; 1) \mathbf{\Lambda}_y(2, 0; 0) \right. \\ & \left. \left. + \nu \mathbf{\Lambda}_x(2, 0; 1) \mathbf{\Lambda}_y(0, 0; 0) + \nu \mathbf{\Lambda}_x(0, 2; 1) \mathbf{\Lambda}_y(0, 0; 0) \right] \right\} \end{aligned} \quad (2.41)$$

donde $\mathbf{\Lambda}_x$, $\mathbf{\Lambda}_y$ son las integrales de las funciones de prueba cuyos cálculos se especifican en el Apéndice A.

La matriz \mathbf{B}_g se calcula de la misma forma enunciada en la Ec. (2.16) y con estas dos matrices ya se pueden conseguir los coeficientes \mathbf{w}_r con los que se obtiene la flecha de la placa.

Problema dinámico

Para calcular las frecuencias naturales y los modos de vibración se tiene que resolver el mismo problema de autovalores $|\mathbf{A}_g - \omega^2 \mathbf{M}_g|$ con la única diferencia de que al igual que el cálculo de la matriz \mathbf{A}_g ha cambiado, \mathbf{M}_g también lo hace:

$$\mathbf{M}_g = \rho h_0 \left[\mathbf{\Lambda}_x(0, 0; 0) \mathbf{\Lambda}_y(0, 0; 0) + \frac{h_x}{h_0} \mathbf{\Lambda}_x(0, 0; 1) \mathbf{\Lambda}_y(0, 0; 0) \right] \quad (2.42)$$

Una vez conseguidos los modos de vibración ya se puede diagonalizar las ecuaciones diferenciales y calcular la flecha en función del tiempo siguiendo el mismo procedimiento de la Sección 2.1.3 para el problema dinámico.

2.2. Piezoelectricidad

En esta sección se enunciará la formulación matemática del problema piezoeléctrico de forma resumida. Las relaciones de equilibrio y compatibilidad, tanto elásticas como dieléctricas, se mantienen pero las constitutivas cambian ya que aparecen unas nuevas propiedades de acoplamiento (conocidas como propiedades piezoeléctricas) entre los dos comportamientos. Estas propiedades son, como indica su nombre, las que unen los comportamientos elásticos y dieléctricos.

Hay cuatro formas de expresar estas relaciones constitutivas dependiendo de qué variables se elijan como dependientes. En este TFG, de la misma forma que en [11], se seguirá la nomenclatura dada en [12]. Las expresiones se recogen en la Tabla 2.1, para simplificar los cálculos se considerará $\mathbf{c}^E = \mathbf{c}^D$, $\mathbf{s}^E = \mathbf{s}^D$.

El desplazamiento eléctrico (D. eléct) tiene una interpretación física difícil de intuir ya que está vinculado a los movimientos que sufren las cargas de las partículas que forman el dieléctrico.

Nomenclatura	Variables dependientes	Ecuaciones Constitutivas
Deformación-D. eléct	\mathbf{S}, \mathbf{D}	$\mathbf{S} = \mathbf{s}^E \mathbf{T} + \mathbf{d}^\top \mathbf{E}$ (2.43)
		$\mathbf{D} = \mathbf{d} \mathbf{T} + \boldsymbol{\epsilon}^T \mathbf{E}$ (2.44)
Deformación-Voltaje	\mathbf{S}, \mathbf{E}	$\mathbf{S} = \mathbf{s}^D \mathbf{T} + \mathbf{g}^\top \mathbf{D}$ (2.45)
		$\mathbf{E} = -\mathbf{g} \mathbf{T} + \boldsymbol{\beta}^T \mathbf{D}$ (2.46)
Tensión-D. eléct	\mathbf{T}, \mathbf{D}	$\mathbf{T} = \mathbf{c}^E \mathbf{S} - \mathbf{e}^\top \mathbf{E}$ (2.47)
		$\mathbf{D} = \mathbf{e} \mathbf{S} + \boldsymbol{\epsilon}^S \mathbf{E}$ (2.48)
Tensión-Voltaje	\mathbf{T}, \mathbf{E}	$\mathbf{T} = \mathbf{c}^D \mathbf{S} - \mathbf{h}^\top \mathbf{D}$ (2.49)
		$\mathbf{E} = -\mathbf{h} \mathbf{S} + \boldsymbol{\beta}^S \mathbf{D}$ (2.50)

Tabla 2.1: Ecuaciones constitutivas del efecto piezoeléctrico en sus cuatro formas.

Aun así siguiendo el desarrollo de la Sección 1.2.2 de [11] se llega a la expresión:

$$\mathbf{D} = \boldsymbol{\epsilon} \mathbf{E} \quad (2.51)$$

Coefficientes Elásticos

- Flexibilidad \mathbf{s} : Desplazamiento por unidad de tensión. Se puede medir a campo eléctrico o desplazamiento eléctrico constante.

$$s_{ij}^E = \left(\frac{\partial S_i}{\partial T_j} \right)_E \quad ; \quad s_{ij}^D = \left(\frac{\partial S_i}{\partial T_j} \right)_D \quad (2.52)$$

- Rigidez \mathbf{c} : Inversa de la flexibilidad.

$$c_{ij}^E = \left(\frac{\partial T_i}{\partial S_j} \right)_E \quad ; \quad c_{ij}^D = \left(\frac{\partial T_i}{\partial S_j} \right)_D \quad (2.53)$$

Coefficientes Dieléctricos

- Permitividad ϵ : Desplazamiento eléctrico por unidad de campo eléctrico. Se puede medir a deformación o tensión constante.

$$\epsilon_{ij}^S = \left(\frac{\partial D_i}{\partial E_j} \right)_S ; \quad \epsilon_{ij}^T = \left(\frac{\partial D_i}{\partial E_j} \right)_T \quad (2.54)$$

- Impermitividad β : Inversa de la permitividad.

$$\beta_{ij}^S = \left(\frac{\partial E_i}{\partial D_j} \right)_S ; \quad \beta_{ij}^T = \left(\frac{\partial E_i}{\partial D_j} \right)_T \quad (2.55)$$

Coefficientes Piezoeléctricos

- Coeficiente d :

$$d_{ij} = \left(\frac{\partial S_j}{\partial E_i} \right)_T = \left(\frac{\partial D_i}{\partial T_j} \right)_E \quad (2.56)$$

- Coeficiente g :

$$g_{ij} = \left(\frac{\partial S_j}{\partial D_i} \right)_T = - \left(\frac{\partial E_i}{\partial T_j} \right)_D \quad (2.57)$$

- Coeficiente h :

$$h_{ij} = - \left(\frac{\partial E_i}{\partial S_j} \right)_D = - \left(\frac{\partial T_j}{\partial D_i} \right)_S \quad (2.58)$$

- Coeficiente e :

$$e_{ij} = \left(\frac{\partial D_i}{\partial S_j} \right)_E = - \left(\frac{\partial T_j}{\partial E_i} \right)_S \quad (2.59)$$

Por último las relaciones más usadas para transformar estos coeficientes están listadas en la Tabla 2.2.

$S - D \rightarrow T - D$	$S - D \rightarrow S - E$	$T - D \rightarrow T - E$	$S - E \rightarrow T - E$
$\mathbf{c}^E = (\mathbf{s}^E)^{-1}$	$\mathbf{s}^D = \mathbf{s}^E - \mathbf{d}^\top \boldsymbol{\beta}^T \mathbf{d}$	$\mathbf{c}^D = \mathbf{c}^E + \mathbf{e}^\top \boldsymbol{\beta}^S \mathbf{e}$	$\mathbf{c}^D = (\mathbf{s}^D)^{-1}$
$\mathbf{e} = \mathbf{d} \mathbf{c}^E$	$\mathbf{g} = \boldsymbol{\beta}^T \mathbf{d}$	$\mathbf{h} = \boldsymbol{\beta}^S \mathbf{e}$	$\mathbf{h} = \mathbf{g} \mathbf{c}^D$
$\boldsymbol{\epsilon}^S = \boldsymbol{\epsilon}^T - \mathbf{d} \mathbf{c}^E \mathbf{d}^\top$			$\boldsymbol{\beta}^S = \boldsymbol{\beta}^T + \mathbf{g} \mathbf{c}^D \mathbf{g}^\top$

Tabla 2.2: Relaciones para transformar los coeficientes.

2.2.1. Criterio de signos y notación

- T : positivas a tracción y negativas a compresión.
- S : positivas al ser producidas por tracciones y negativas por compresiones.
- E, D : positivos si tienen el mismo sentido que la polarización de la cerámica.

Por último las ecuaciones constitutivas se pueden expresar de forma matricial. Para cerámicas transversalmente isótropas y polarizadas en la dirección positiva de z , el sistema es el que se muestra en la Ec. (2.60). Este tipo de cerámicas piezoeléctricas son las estudiadas en este TFG.

$$\begin{pmatrix} S_x \\ S_y \\ S_z \\ 2S_{yz} \\ 2S_{xz} \\ 2S_{xy} \\ D_x \\ D_y \\ D_z \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} s_{11}^E & s_{12}^E & s_{13}^E & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & d_{31} \\ s_{21}^E & s_{22}^E & s_{23}^E & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & d_{32} \\ s_{31}^E & s_{32}^E & s_{33}^E & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & d_{33} \\ 0 & 0 & 0 & s_{44}^E & 0 & 0 & 0 & d_{24} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & s_{55}^E & 0 & d_{15} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & s_{66}^E & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & d_{15} & 0 & \epsilon_{11}^T & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & d_{24} & 0 & 0 & 0 & \epsilon_{22}^T & 0 \\ d_{31} & d_{32} & d_{33} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \epsilon_{33}^T \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} T_x \\ T_y \\ T_z \\ T_{yz} \\ T_{xz} \\ T_{xy} \\ E_x \\ E_y \\ E_z \end{pmatrix} \quad (2.60)$$

2.2.2. Placas piezoeléctricas

En la Sección 2.1 se expone la teoría de placas para materiales elásticos y no acoplados cuya ecuación constitutiva sigue la forma: $\mathbf{T} = \mathbf{c}\mathbf{S}$. Para materiales piezoeléctricos esta constitutiva se convierte en la Ec. (2.47) o Ec. (2.49), según que variables se tomen como dependientes. Aparece un nuevo término debido al acoplamiento por lo que en la presente sección se desarrollará una teoría de placas con estas nuevas ecuaciones constitutivas.

Partiendo de las Ec. (2.47) y Ec. (2.48), se necesita una ecuación más de equilibrio aparte del de fuerzas planteado en la Sección 2.2.3 de [6]. Esta nueva ecuación de equilibrio o de balance eléctrico, desarrollada en la Sección 1.2.2 de [11], es:

$$\nabla \mathbf{D} = 0 \quad (2.61)$$

Aparte de las hipótesis de Kirchoff y de estado plano de tensión, también se considerará que los piezoeléctricos son transversalmente isótropos, por lo que sus matrices \mathbf{d} , \mathbf{e} , \mathbf{g} , \mathbf{h} son de dimensión 3×6 y se definen con cuatro términos. Por ejemplo la matriz \mathbf{e} es:

$$\mathbf{e} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & e_{15} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e_{24} & 0 & 0 \\ e_{31} & e_{31} & e_{33} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (2.62)$$

Aplicando todas las hipótesis mencionadas, las Ec. (2.47) y Ec. (2.48) se simplifican a:

$$\mathbf{T} = - \begin{bmatrix} \bar{c}_{11} & \bar{c}_{12} & 0 \\ \bar{c}_{21} & \bar{c}_{22} & 0 \\ 0 & 0 & c_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} w_{,xx} \\ w_{,yy} \\ 2w_{,xy} \end{Bmatrix} z + \begin{bmatrix} 0 & 0 & \bar{e}_{31} \\ 0 & 0 & \bar{e}_{31} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \end{Bmatrix} \quad (2.63)$$

$$\mathbf{D} = - \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ \bar{e}_{31} & \bar{e}_{31} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} w_{,xx} \\ w_{,yy} \end{Bmatrix} z + \begin{bmatrix} \epsilon_{11} & 0 & 0 \\ 0 & \epsilon_{22} & 0 \\ 0 & 0 & \epsilon_{33} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \end{Bmatrix}$$

donde los coeficientes \bar{c}_{ij} , \bar{e}_{ij} (siguen las fórmulas de la Ec. (B.2)) son los coeficientes elásticos y piezoeléctricos reducidos por la condensación elástica fruto de aplicar las hipótesis de Kirchoff.

Es importante recalcar que por la forma de la matriz \mathbf{e} , el único campo eléctrico que influye en las tensiones en el plano es E_z y que la flecha de la placa influye solo al desplazamiento eléctrico en z . Por lo tanto, el acoplamiento depende solo de E_z (ver Apéndice B). Planteando el balance de la tercera Ec. (2.61) y la segunda Ec. (2.63) se llega a la expresión:

$$E_{z,x} + E_{z,y} = \beta_{33} \bar{e}_{31} (w_{,xxx} + w_{,xyy} + w_{,xxy} + w_{,yyy}) z \quad \Rightarrow \quad E_z = \beta_{33} \bar{e}_{31} (w_{,xx} + w_{,yy}) z \quad (2.64)$$

por lo que la primera Ec. (2.63) se convierte en:

$$\mathbf{T} = - \begin{bmatrix} \bar{c}_{11} & \bar{c}_{12} & 0 \\ \bar{c}_{21} & \bar{c}_{22} & 0 \\ 0 & 0 & c_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} w_{,xx} \\ w_{,yy} \\ 2w_{,xy} \end{Bmatrix} z - \begin{bmatrix} 0 & 0 & \beta_{33} \bar{e}_{31}^2 \\ 0 & 0 & \beta_{33} \bar{e}_{31}^2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ w_{,xx} + w_{,yy} \end{Bmatrix} z \quad (2.65)$$

Con la Ec. (2.65) ya se pueden calcular los momentos flectores de la misma forma que en la Ec. (2.5) y con estos plantear el equilibrio de fuerzas que lleva a la ecuación diferencial que gobierna este tipo de placas:

$$D_{px} w_{,xxxx} + 2H_p w_{,xxyy} + D_{py} w_{,yyyy} = q(x, y) \quad (2.66)$$

siendo $H_p = D_{pxy} + 2D_{ps}$. La expresión anterior tiene la misma forma que la ecuación diferencial para materiales ortotrópicos pero las rigideces D_p dependen también de los coeficientes piezoeléctricos del material:

$$D_{px} = \left(\bar{c}_{11} + \frac{\bar{e}_{31}^2}{\epsilon_{33}} \right) \frac{h_p^3}{12}; \quad D_{py} = \left(\bar{c}_{22} + \frac{\bar{e}_{31}^2}{\epsilon_{33}} \right) \frac{h_p^3}{12}; \quad D_{pxy} = \left(\bar{c}_{12} + \frac{\bar{e}_{31}^2}{\epsilon_{33}} \right) \frac{h_p^3}{12}; \quad D_{ps} = c_{66} \frac{h_p^3}{12}$$

La Ec. (2.66) se puede resolver con diferentes métodos, en este TFG se empleará el de Galerkin ya explicado. Por último se menciona que debido a la isotropía transversal de las cerámicas PZT, se verá en la Sección 3.4 cómo $D_{px} = D_{py} = H_p$ por lo que en realidad esas rigideces se pueden factorizar y la ecuación pasa a tener la forma de la Ec. (2.8).

2.2.3. Salto de espesor placas piezoeléctricas

Para resolver este tipo de problemas solo se ha de adecuar la teoría de la Sección 2.1.6 para materiales piezoeléctricos. La ecuación momento-curvatura se convierte en:

$$\mathbf{M} = \begin{Bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{Bmatrix} = -\chi(x) \begin{Bmatrix} D_{px} w_{,xx} + D_{pxy} w_{,yy} \\ D_{py} w_{,yy} + D_{pxy} w_{,xx} \\ 2D_{ps} w_{,xy} \end{Bmatrix} \quad (2.67)$$

donde las rigideces D_p son las rigideces piezoeléctricas enunciadas en la Sección 2.2.2 y calculadas con el espesor de la placa de referencia h_0 .

Plantando otra vez el equilibrio se consigue una nueva ecuación diferencial con lo que la matriz \mathbf{A}_g pasa a ser:

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_g = & D_{px} \mathbf{\Lambda}_x(4, 0; 0) \mathbf{\Lambda}_y(0, 0; 0) + 2H_p \mathbf{\Lambda}_x(2, 0; 0) \mathbf{\Lambda}_y(2, 0; 0) + D_{py} \mathbf{\Lambda}_x(0, 0; 0) \mathbf{\Lambda}_y(4, 0; 0) \\ & + \alpha_x \left[D_{py} \mathbf{\Lambda}_x(0, 0; 1) \mathbf{\Lambda}_y(4, 0; 0) + D_{px} \mathbf{\Lambda}_x(2, 2; 1) \mathbf{\Lambda}_y(0, 0; 0) - 4D_{ps} \mathbf{\Lambda}_x(1, 1; 1) \mathbf{\Lambda}_y(2, 0; 0) \right. \\ & \left. + D_{pxy} \mathbf{\Lambda}_x(2, 0; 1) \mathbf{\Lambda}_y(0, 0; 0) + D_{pxy} \mathbf{\Lambda}_x(0, 2; 1) \mathbf{\Lambda}_y(0, 0; 0) \right] \end{aligned} \quad (2.68)$$

La matriz \mathbf{M}_g no cambia y una vez conseguidas estas dos matrices ya se puede calcular tanto el caso estático como el dinámico siguiendo el método de Galerkin explicado en la Sección 2.1.3.

Placa de aluminio con salto de espesor piezoeléctrico

Esta teoría sirve para resolver el caso objetivo del presente TFG, una placa como la que se muestra en la Figura 1.3. La matriz \mathbf{A}_g se calcula con:

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_g = & D_0 \left[\mathbf{\Lambda}_x(4, 0; 0) \mathbf{\Lambda}_y(0, 0; 0) + 2\mathbf{\Lambda}_x(2, 0; 0) \mathbf{\Lambda}_y(2, 0; 0) + \mathbf{\Lambda}_x(0, 0; 0) \mathbf{\Lambda}_y(4, 0; 0) \right] \\ & + \alpha_x \left[D_{py} \mathbf{\Lambda}_x(0, 0; 1) \mathbf{\Lambda}_y(4, 0; 0) + D_{px} \mathbf{\Lambda}_x(2, 2; 1) \mathbf{\Lambda}_y(0, 0; 0) - 4D_{ps} \mathbf{\Lambda}_x(1, 1; 1) \mathbf{\Lambda}_y(2, 0; 0) \right. \\ & \left. + D_{pxy} \mathbf{\Lambda}_x(2, 0; 1) \mathbf{\Lambda}_y(0, 0; 0) + D_{pxy} \mathbf{\Lambda}_x(0, 2; 1) \mathbf{\Lambda}_y(0, 0; 0) \right] \end{aligned} \quad (2.69)$$

donde D_0 es la rigidez del aluminio y D_p las piezoeléctricas. La rigidez del aluminio se calcula con el espesor de la placa de referencia h_0 y las piezoeléctricas con el del salto de espesor h_x .

Por último la matriz \mathbf{M}_g se convierte en:

$$\mathbf{M}_g = \rho_A h_0 \mathbf{\Lambda}_x(0, 0; 0) \mathbf{\Lambda}_y(0, 0; 0) + \rho_P \frac{h_x^2}{h_0} \mathbf{\Lambda}_x(0, 0; 1) \mathbf{\Lambda}_y(0, 0; 0) \quad (2.70)$$

donde ρ_A , ρ_P son las densidades del aluminio y del piezoeléctrico respectivamente.

2.2.4. Cálculos energéticos

En [13] se enuncia que la corriente eléctrica de una placa piezoeléctrica viene dada por la fórmula:

$$I(t) = -r \iint_A (e_{31} w_{,xxt} + e_{31} w_{,yyt} + 2 e_{36} w_{,xyt}) dA \quad (2.71)$$

siendo r la distancia entre el plano medio del piezoeléctrico y el de la placa, lo que quiere decir que si una placa está hecha toda de material piezoeléctrico o es un laminado en el que el piezoeléctrico está en el plano medio de la placa, no habrá corriente.

La razón de este fenómeno es que el campo eléctrico en la dirección z que se crea en el piezoeléctrico es antisimétrico con respecto al plano medio –un ejemplo se puede observar en la Figura 3.16–. Por tanto la distribución de voltaje es simétrica y las corrientes que circulan de cada superficie libre al plano medio, donde el voltaje es nulo al no haber tensiones, se contrarrestan.

La intensidad de la Ec. (2.71) varía en amplitud con la frecuencia de la carga temporal aplicada y con las frecuencias naturales aplicadas. Esta amplitud oscila de valor muy rápidamente por lo que se define una intensidad media I_m que varia solo con la frecuencia de la carga y tiene de amplitud la mitad del valor máximo de la intensidad como se puede observar en la Figura 4.12.

Además de la intensidad también se define la resistividad del piezoeléctrico que sigue la ecuación:

$$R = \iota \frac{h}{A} = \iota_P \frac{h_P}{ab} \quad (2.72)$$

donde h es el espesor y A el área del piezoeléctrico.

La resistividad de los materiales varía dependiendo de diversos factores como la temperatura. Para el PZT se puede ver en [14] que este parámetro cambia entre $\{2 \times 10^5 \quad 10^7\}$ $[\Omega\text{m}]$ por lo que en este TFG se fijará un valor de $\iota_P = 10^6$ $[\Omega\text{m}]$.

Por último la potencia del piezoeléctrico es:

$$P_o = I_m(0)^2 R \quad (2.73)$$

3

Validaciones

En este capítulo se plantearán una serie de problemas para resolver de forma analítica y con dos programas MEF: FEAP y COMSOL.

3.1. Efecto piezoeléctrico

Se considera un cilindro de radio $r = 10$ [mm] y espesor $h_p = 10$ [mm] como el de la Figura 3.1. Primero se aplicará un voltaje en la cara superior y se calculará la variación del espesor y luego se aplicará una carga sobre la cara superior para estudiar el voltaje que se genera. El material del cilindro es PZT-4 cuyas propiedades necesarias para la resolución del problema se encuentran en el Apéndice C.

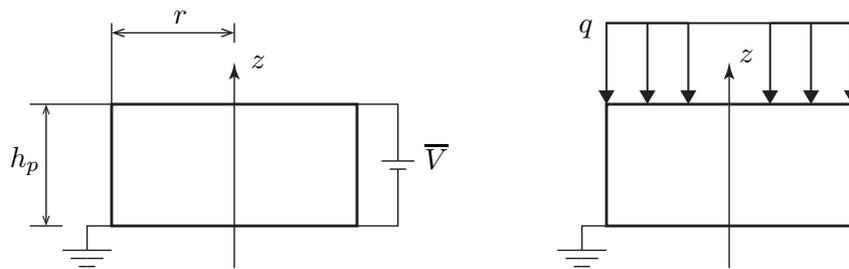


Figura 3.1: Esquema del problema inverso (izquierda) y directo (derecha).

Para resolver el problema por MEF se ha creado una malla 3D como la que se muestra en la Figura 3.2.

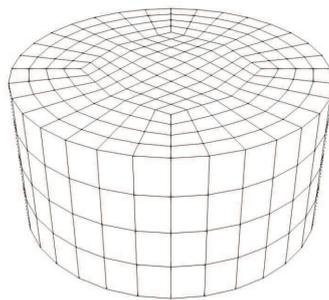


Figura 3.2: Mallado del cilindro 3D a base de paralelepípedos.

3.1.1. Inverso

Se prescribe un voltaje de $\bar{V} = 1$ [V] en la cara superior. Partiendo de la Ec. (2.43) se elimina el primer término ya que no hay tensiones aplicadas y se dejan solo las componentes en el eje z :

$$\mathbf{S} = \mathbf{s}^E \mathcal{T} + \mathbf{d}^T \mathbf{E} \quad \rightarrow \quad S_z = d_{33} E_z \quad (3.1)$$

Evaluando la expresión en la cara superior, que es donde más deformación habrá debido a que el campo eléctrico es máximo, y teniendo en cuenta que su dirección es contraria al eje z (polarización de la cerámica) aparece un signo negativo:

$$\frac{\Delta h_p}{h_p} = -d_{33} \frac{V}{h_p} \rightarrow \Delta h_p = -d_{33} V \quad (3.2)$$

Magnitud	Analítico	FEAP	COMSOL
Δh_p [m]	$-2,89 \cdot 10^{-10}$	$-2,8867 \cdot 10^{-10}$	$-2,89 \cdot 10^{-10}$
Error relativo (%)	[-]	0,11	0

Tabla 3.1: Resultados efecto inverso.

Como se puede ver en la Tabla 3.1, todos los métodos proporcionan el mismo resultado: una compresión ínfima ya que el voltaje aplicado es muy bajo.

3.1.2. Directo

Se prescribe una fuerza total $F = -10$ [N] en la cara superior. Partiendo de la Ec. (2.46) se elimina el término del desplazamiento eléctrico y se dejan solo las componentes en el eje z por lo que se convierte el problema a unidimensional:

$$\mathbf{E} = -\mathbf{g} \mathbf{T} + \beta^T \mathcal{D} \rightarrow E_z = -g_{33} q \quad (3.3)$$

y reescribiendo el coeficiente g con las relaciones de la Tabla 2.2 como $g_{33} = d_{33}/\epsilon_{33}$, la carga aplicada como $q = F/A$ y multiplicando por el espesor para calcular el voltaje máximo en la cara superior:

$$E_z = -\frac{d_{33} F}{\epsilon_{33} A} \rightarrow V = -\frac{d_{33} F t}{\epsilon_{33} A} \quad (3.4)$$

Magnitud	Analítico	FEAP	COMSOL
V [V]	7,992	7,9942	7,992
Error relativo (%)	[-]	0,03	0

Tabla 3.2: Resultados efecto directo.

Con los datos de la Tabla 3.2 se llega a la misma conclusión que en el caso indirecto: los tres métodos coinciden.

3.2. Rectángulo piezoeléctrico

Se estudia un rectángulo de PZT-4 de lados $l_3 = 1,14$ [mm] y $l_2 = 3l_3$, que está articulado en todos los lados menos el superior como se puede ver en la Figura 3.3. Los lados están conectados a toma de tierra, es decir, el voltaje en esos bordes es nulo. Se aplica un voltaje de 10 [V] en la cara superior y se pretende calcular la distribución del campo eléctrico y la polarización en la dirección z . Los datos del material se encuentran en el Apéndice C.

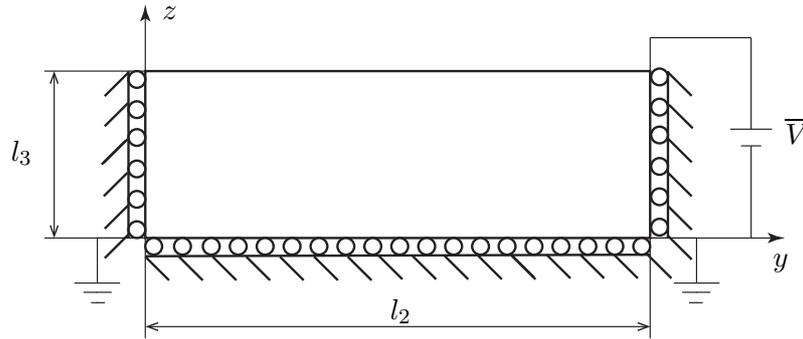


Figura 3.3: Esquema de rectángulo con voltaje aplicado en la cara superior.

Como se demuestra en [15], la distribución del potencial viene dada por la fórmula:

$$V(y, z) = \frac{4\bar{V}}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin(\Upsilon y) \sinh(\Upsilon z)}{(2k-1) \sinh(\Upsilon l_3)}; \quad \Upsilon = \frac{\pi(2k-1)}{l_2} \quad (3.5)$$

En la Figura 3.4 se dibuja el resultado de la fórmula anterior. Los dos resultados producidos por los MEF coinciden y la malla para este problema no se muestra ya que es simplemente un rectángulo con elementos cuadriláteros.

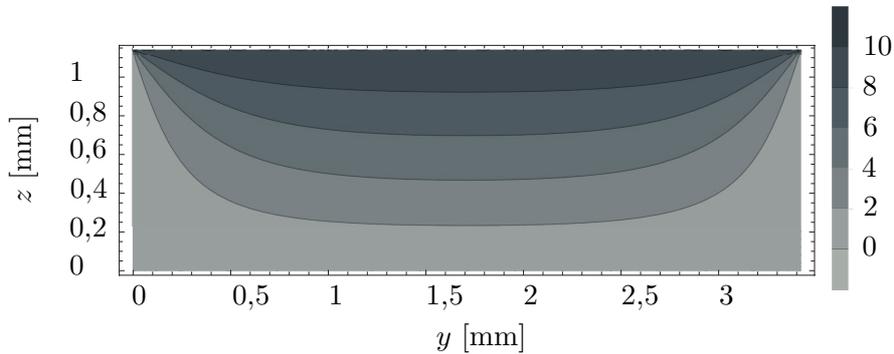


Figura 3.4: Distribución del potencial $V(y, z)$ de la solución analítica.

Por último se calcula la polarización en la dirección z que sigue la fórmula:

$$P_z = (\epsilon_{33} - \epsilon_0) E_z; \quad E_z = -\frac{\partial V(y, z)}{\partial z} \quad (3.6)$$

La solución a lo largo de una línea se representa en la Figura 3.5 como también las datos de los dos programas. Los valores de los tres métodos coinciden a la perfección por lo que el estudio se da por satisfactorio.

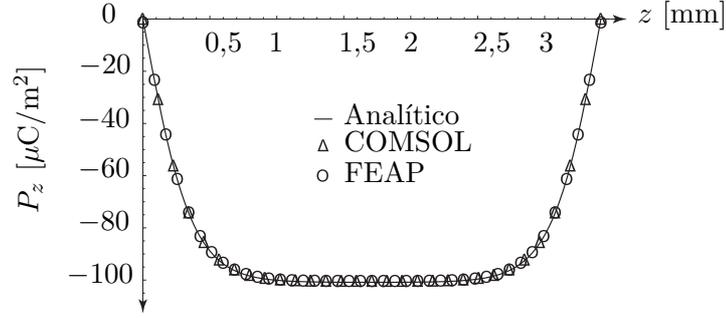


Figura 3.5: Valores de la polarización P_z a lo largo de una línea $z = l_3/2$.

3.3. Placa empotrada material no acoplado

Se considera una placa cuadrada empotrada como la que se dibuja en la Figura 3.6 de dimensiones $a = 0,1$ [m] y $h_p = 0,005$ [m] hecha de aluminio ($Y = 70$ [GPa], $\nu = 0,35$, $\rho = 2700$ [kg/m³])

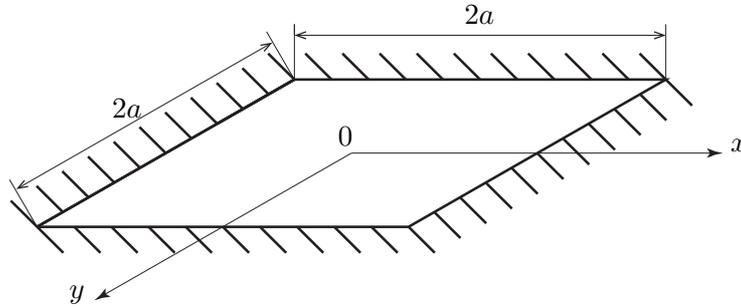


Figura 3.6: Esquema de una placa empotrada cuadrada.

Las C.C. son: $w|_{y=\pm a} = 0$; $w_{,x}|_{y=\pm a} = w_{,y}|_{y=\pm a} = 0$. La malla para resolver el problema con COMSOL se puede ver en la Figura 3.7 aunque con FEAP se ha usado un elemento 2D que tiene la misma malla que la anterior pero sin espesor. La razón de no hacer el estudio en 3D con FEAP es porque la opción 2D da resultados precisos con menor coste computacional.

3.3.1. Problema estático

La placa está sujeta a una carga uniforme $q(x, y) = q_0 = 10000$ [N/m²]. El primer paso es escoger las funciones de prueba θ que satisfazan las condiciones de contorno. Se probarán unas polinómicas y otras trigonométricas. Las polinómicas son:

$$\theta_1 = (x^2 - a^2)^2(y^2 - a^2)^2; \quad \theta_2 = (x^2 - a^2)^2(y^2 - a^2)^3 \quad (3.7)$$

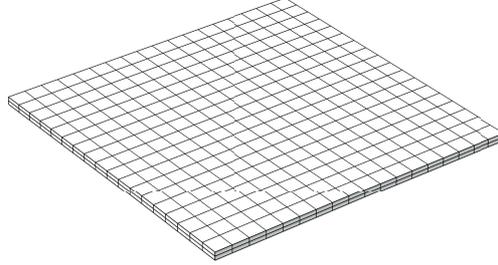


Figura 3.7: Malla de COMSOL para placa empotrada a resolver por MEF.

Siguiendo el procedimiento descrito en la Sección 2.1.3 se calculan las matrices \mathbf{A}_g y \mathbf{B}_g obteniendo como resultado $\mathbf{w}_r = \{3206 \quad 71189\}^\top$ con lo que se puede calcular la flecha con la Ec. (2.12).

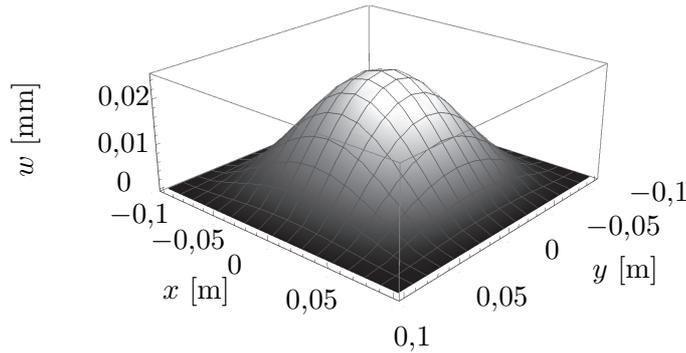


Figura 3.8: Flecha $w(x, y)$ debida a carga uniforme de placa empotrada.

Como se puede apreciar en la Figura 3.8, la flecha alcanza un máximo en el centro de la placa y se respetan las condiciones de contorno. Las funciones de prueba determinan la precisión de la solución por lo que ahora se procederá a utilizar funciones trigonométricas que tienen la forma de la curvatura vista en la Figura 3.8. Estas funciones son:

$$\theta_{mn}(x, y) = \left\{ 1 - \cos \left[\frac{m\pi(x+a)}{a} \right] \right\} \left\{ 1 - \cos \left[\frac{n\pi(y+a)}{a} \right] \right\}; \quad (3.8)$$

para $m, n = 1, 2$ y se agrupan en el vector $\boldsymbol{\theta} = \{\theta_{11} \quad \theta_{12} \quad \theta_{21} \quad \theta_{22}\}^\top$ con lo que se obtiene la siguiente solución de los coeficientes de Galerkin: $\mathbf{w}_r = \{588 \quad 58,8 \quad 58,8 \quad 9,19\}^\top \times 10^{-8}$.

Por último se obtiene la solución final de la misma forma que con la ecuación mencionada. En la Figura 3.9 se representa la flecha a lo largo de la una sección $y = 0$ para que se puedan comparar ambos tipos de funciones y los MEF. Los cuatro resultados son muy parecidos, la única discrepancia está en la flecha en el punto medio aunque no es nada grande. Ambas soluciones de los MEF están entre la solución polinómica y la trigonométrica por lo que los resultados se consideran válidas.

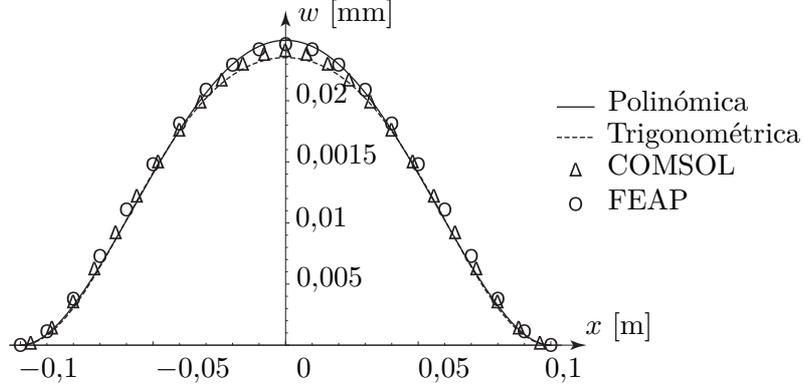


Figura 3.9: Comparación de la flecha $w(x, 0)$ de placa empotrada analítica y con MEF.

3.3.2. Problema dinámico

La placa está ahora sujeta a una carga uniforme que varía con el tiempo de forma armónica $q(x, y, t) = q_0 \sin \Omega_f t$ siendo $q_0 = 10000$ [N/m²] y la frecuencia $\Omega_f = 1$ [rad/s].

Al ser la carga simétrica no hace falta utilizar funciones asimétricas pero se utilizarán de todas formas para capturar también los modos de vibración asimétricos. Estos modos no influyen en el resultado pero completan la solución.

Para esta placa se trabajará de forma adimensional con las coordenadas $\xi = x/a$, $\eta = y/a$ por lo que las funciones de prueba son:

$$g_m(\xi) = \{1 - \cos [m\pi(\xi + 1)]\}; \quad h_m(\xi) = \sin(m\pi\xi) - \frac{1}{2} \sin(m\pi\xi); \quad (3.9)$$

$$\begin{aligned} \theta_1(\xi, \eta) &= g_1(\xi)g_1(\eta); & \theta_2(\xi, \eta) &= g_1(\xi)h_1(\eta); & \theta_3(\xi, \eta) &= h_1(\xi)g_1(\eta) \\ \theta_4(\xi, \eta) &= h_1(\xi)h_1(\eta); & \theta_5(\xi, \eta) &= g_2(\xi)g_1(\eta); & \theta_6(\xi, \eta) &= g_1(\xi)g_2(\eta) \\ \theta_7(\xi, \eta) &= g_2(\xi)h_1(\eta); & \theta_8(\xi, \eta) &= h_1(\xi)g_2(\eta); & \theta_9(\xi, \eta) &= g_2(\xi)g_2(\eta) \end{aligned} \quad (3.10)$$

Con estas funciones se plantea el problema de autovalores definido en la Ec. (2.15) y se consiguen las matrices correspondientes. Con estas dos matrices se resuelve el problema de autovalores $|\mathbf{A}_g - \omega^2 \mathbf{M}_g| = 0$ y se obtienen las frecuencias naturales que se muestran en la Tabla 3.3. En esta tabla también se comparan los resultados con los de FEAP y COMSOL.

Para pasar de la frecuencia circular obtenida ω a la frecuencia f solo hay que dividir por 2π . A continuación se obtendrán los modos para poder determinar la fuente de esa diferencia.

$$\mathbf{A}_g = \begin{bmatrix} 64,75 & 0 & 0 & 0 & 16,2 & 16,2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 12,14 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4,047 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 12,14 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4,047 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2,024 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 16,2 & 0 & 0 & 0 & 477,6 & 0 & 0 & 0 & 259,0 \\ 16,2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 477,6 & 0 & 0 & 259,0 \\ 0 & 4,047 & 0 & 0 & 0 & 0 & 54,64 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4,047 & 0 & 0 & 0 & 0 & 54,64 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 259,0 & 259,0 & 0 & 0 & 1036 \end{bmatrix} \times 10^6$$

$$\mathbf{M}_g = \begin{bmatrix} 1,215 & 0 & 0 & 0 & 0,810 & 0,810 & 0 & 0 & 0,540 \\ 0 & 0,101 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0,068 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0,101 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0,068 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0,008 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0,810 & 0 & 0 & 0 & 1,215 & 0,540 & 0 & 0 & 0,810 \\ 0,810 & 0 & 0 & 0 & 0,540 & 1,215 & 0 & 0 & 0,810 \\ 0 & 0,068 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0,101 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0,068 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0,101 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0,810 & 0,810 & 0 & 0 & 1,215 \end{bmatrix}$$

Hay que remarcar que la matriz \mathbf{A}_g no es la misma que para el problema estático ya que no se han utilizado las mismas funciones, tanto la matriz de rigidez como la de masas tienen su dimensión igual al número total de funciones de prueba; en este caso como hay nueve la dimensión es de 9×9 tal y como se muestran.

Para obtener los modos hay que determinar un vector que multiplicado por la matriz del problema de autovalores resulte en un vector nulo. Por ejemplo para el primer vector se resuelve $(\mathbf{A}_g - \omega_1^2 \mathbf{M}_g) \Psi_1 = \mathbf{0}$. Siguiendo la Ec. (2.23) se consiguen los modos representados en la Figura 3.10.

f [Hz]	Analítico	FEAP	COMSOL	f [Hz]	Analítico	FEAP	COMSOL
f_1	1133	1117	1130	f_6	4247	4075	4109
f_2	1718	2270	2294	f_7	4969	5053	5096
f_3	1718	2270	2294	f_8	4969	5053	5096
f_4	2465	3330	3363	f_9	7215	6456	6497
f_5	4233	4053	4088				

Tabla 3.3: Tabla comparativa de frecuencias naturales para placa empotrada.

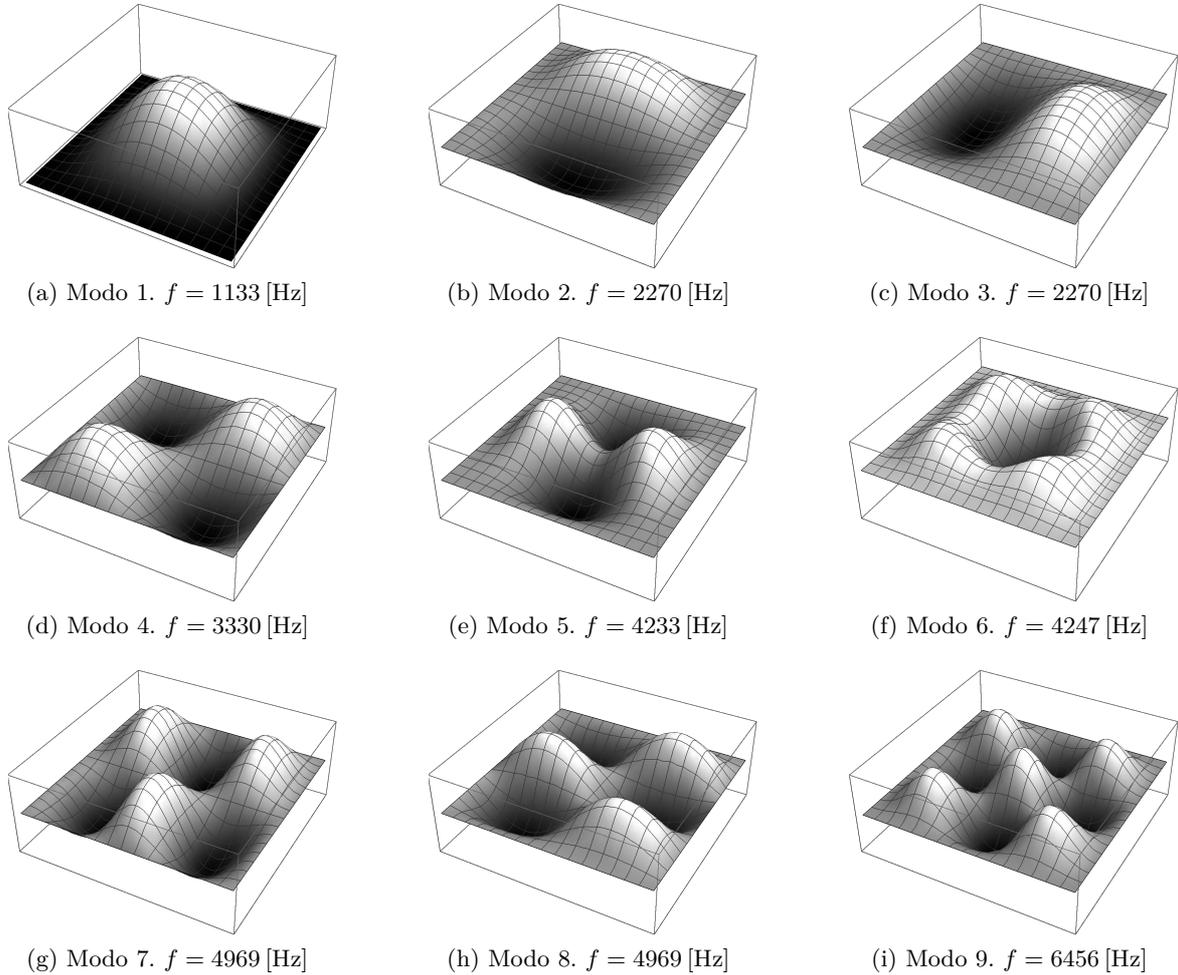


Figura 3.10: Modos y frecuencias naturales de la placa empotrada.

Los valores de las frecuencias obtenidos por MEF se asemejan mucho entre ellos y en cuanto a los analíticos, algunos presentan ciertas discrepancias considerables con los MEF. Los modos calculados con el método analítico coinciden con los de MEF, por lo que probablemente el error entre las frecuencias será a causa de las funciones de prueba ya que estos problemas son muy susceptibles a ellas. Por último se comparará la flecha en el punto medio en un rango de tiempo de diez segundos.

Con los vectores propios se pueden diagonalizar las matrices para plantear el sistema de ecuaciones diferenciales desacoplado del que se obtendrán las funciones de respuesta que dependen del tiempo. Estas tienen una parte homogénea que corresponde a la oscilación de los modos con las frecuencias naturales y otra particular que se corresponde con la carga aplicada; por ejemplo, operando:

$$F_{g1}(t) = (6,22 \sin \omega_1 t + 0,0009 \sin \Omega_f t) \times 10^{-6}$$

Con estas funciones ya se puede representar la flecha siguiendo la Ec. (2.24). En la Figura 3.11 se representa la flecha en el centro de la placa conjuntamente a la solución en ese punto de los MEF. Como se puede observar, la solución de los tres métodos es prácticamente la misma.

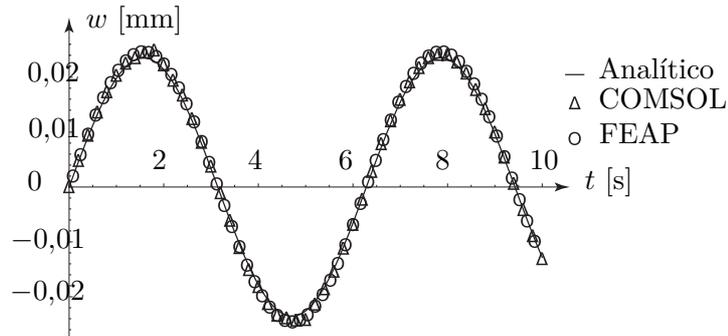


Figura 3.11: Comparación de flecha máxima $w(0,0,t)$ de placa empotrada.

3.4. Placa piezoeléctrica de PZT

Se considera una placa rectangular piezoeléctrica de PZT articulada en $x = y = 0$ y con correderas en $x = a, y = b$ como la que se observa en la Figura 3.12. Las dimensiones de la placa son $a = 0,6, b = 0,3, h_p = 0,01$ [m] y las propiedades del PZT-4 se encuentran en el Apéndice C.

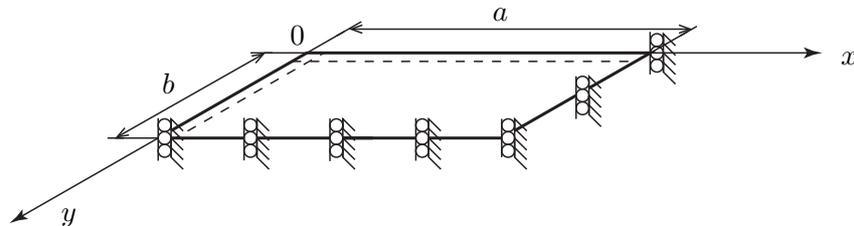


Figura 3.12: Placa de material piezoeléctrico con dos articulaciones y correderas.

Las C.C. de esta placa son: $w|_{x=0} = 0; w_{,xx}(0) = w_{,yy}(0) = 0$ para las articulaciones y $w_{,x}(a) = w_{,y}(b) = 0; w_{,xxx}(a) = w_{,yyy}(b) = 0$ para las correderas de forma simplificada. Las mallas de FEAP y COMSOL se encuentran en la Figura 3.13, que como se puede observar tienen más elementos en la dirección z que la malla de la Figura 3.7 para capturar bien el campo eléctrico que se genera.

La malla de FEAP tiene que ser muy refinada ya que el material piezoeléctrico que se emplea utiliza una formulación de sólido elástico básica que tiene un problema con los elementos con una relación de lados (altura-longitud) muy alta si el número de Poisson ν es muy alto: aproximadamente con paralelepípedos siete veces más largos que altos aparece un fenómeno llamado “Shear Locking” que en resumen hace más rígida la estructura y se obtienen valores de la flecha más bajos que los reales. Utilizando una formulación ampliada, como hace COMSOL, el problema se resuelve por lo que la malla no necesita estar tan refinada.

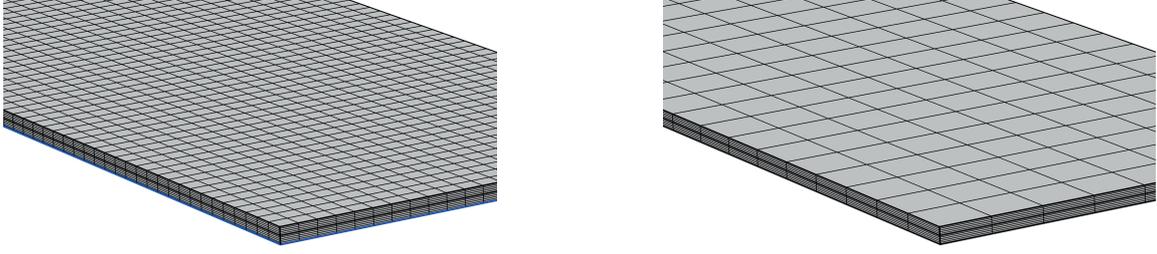


Figura 3.13: Mallas de FEAP (izquierda) y COMSOL (derecha) para placa piezoeléctrica.

Las funciones que cumplen las C.C. son:

$$\theta_{mn}(x, y) = \sin \left[\frac{(2m-1)\pi x}{2a} \right] \sin \left[\frac{(2n-1)\pi y}{2b} \right] \quad (3.11)$$

y se utilizarán para $m, n = 1, 2$ con lo que se obtendrán cuatro funciones para resolver con Galerkin. Por último siguiendo la teoría expuesta en la Sección 2.2.2 las rigideces en sus respectivas direcciones toman los siguientes valores: $D_{px} = D_{py} = H_p = 9960,8$ [Nm]. Todas tienen el mismo valor gracias a la isotropía transversal de las cerámicas PZT.

3.4.1. Problema estático

Se aplica una carga uniforme de $q(x, y) = 10000$ [N/m²]. Se sigue el mismo procedimiento empleado en la placa empotrada para calcular la matriz \mathbf{A}_g con la única diferencia de que ahora la integral que antes se hacía con la Ec. (2.16), donde la rigidez de la placa estaba factorizada para todas las derivadas, pasa a tener la siguiente forma:

$$\mathbf{A}_g = \iint_A \nabla_\theta \theta^\top dA; \quad \nabla_\theta = D_{px}\theta_{,xxxx} + 2H_p\theta_{,xxyy} + D_{py}\theta_{,yyyy} \quad (3.12)$$

con lo que se obtienen los siguientes valores numéricos de la matriz de rigidez, el vector de fuerzas y los coeficientes de Galerkin:

$$\mathbf{A}_g = \begin{bmatrix} 5,3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 35,6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 288,3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 426,4 \end{bmatrix} \times 10^5; \quad \mathbf{B}_g = \begin{Bmatrix} 729,5 \\ 243,2 \\ 243,2 \\ 81,1 \end{Bmatrix}; \quad \mathbf{w}_r = \begin{Bmatrix} 1385,8 \\ 68,3 \\ 8,4 \\ 1,9 \end{Bmatrix} \times 10^{-6}$$

Con estos datos se consigue la flecha que se muestra en la Figura 3.14. Esta cumple las C.C. geométricas impuestas en la placa: los bordes $x = 0, y = 0$ están articulados por lo que no se mueven pero sus opuestos si que lo pueden hacer gracias a las correderas. Como era de esperar, el punto donde la flecha es máxima está en el borde de la placa donde se juntan las correderas $x = a, y = b$.

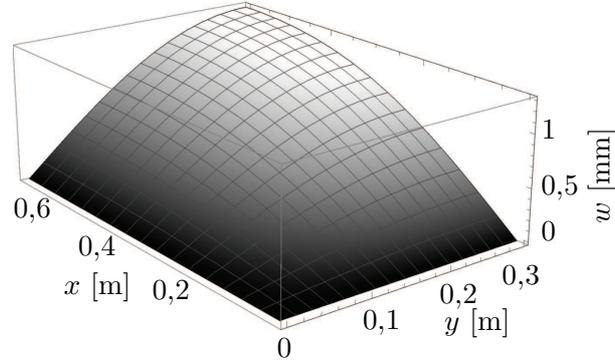


Figura 3.14: Flecha debida a carga uniforme de placa con articulaciones y correderas.

Para comparar la solución con los MEF se representa la flecha en una línea de $y = b$ constante en la Figura 3.15. Los tres métodos proporcionan prácticamente el mismo resultado, FEAP rigidiza un poco más la placa produciendo una flecha un tanto más pequeña ya que aunque la malla se ha refinado para paliar el problema del “Shear Locking” no se ha conseguido eliminarlo por completo.

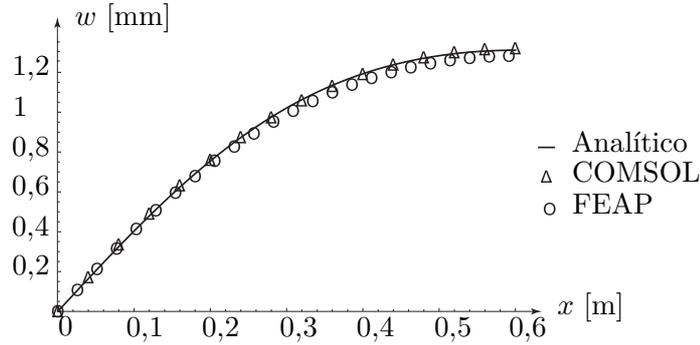


Figura 3.15: Comparación de flecha $w(x, b)$ de placa piezoeléctrica analítica y con MEF.

Para el cálculo del campo eléctrico primero se necesita calcular las tensiones. Estas siguen la fórmula:

$$\mathbf{T} = \begin{Bmatrix} T_x \\ T_y \\ T_{xy} \end{Bmatrix} = - \begin{Bmatrix} D_{mx} w_{,xx} + D_{mxy} w_{,xy} \\ D_{mxy} w_{,xy} + D_{my} w_{,yy} \\ 2 D_{ms} w_{,xy} \end{Bmatrix} z$$

donde D_m son las rigideces D_p pero multiplicadas por $12/h_p^3$ y luego con la Ec. (2.46), considerando desplazamiento eléctrico nulo, se puede calcular el campo eléctrico. Los resultados analíticos y de MEF se pueden observar en la Figura 3.16 donde se representa el campo eléctrico en la dirección z para una sección de $y = b$ constante a lo largo del espesor.

Los tres métodos dan campos similares, siendo nulo en el plano medio de la placa ya que ahí las tensiones son nulas. Por último para conseguir el voltaje se tiene que integrar la expresión de E_z y como tiene que ser 0 en $z = 0$ la constante de integración es nula.

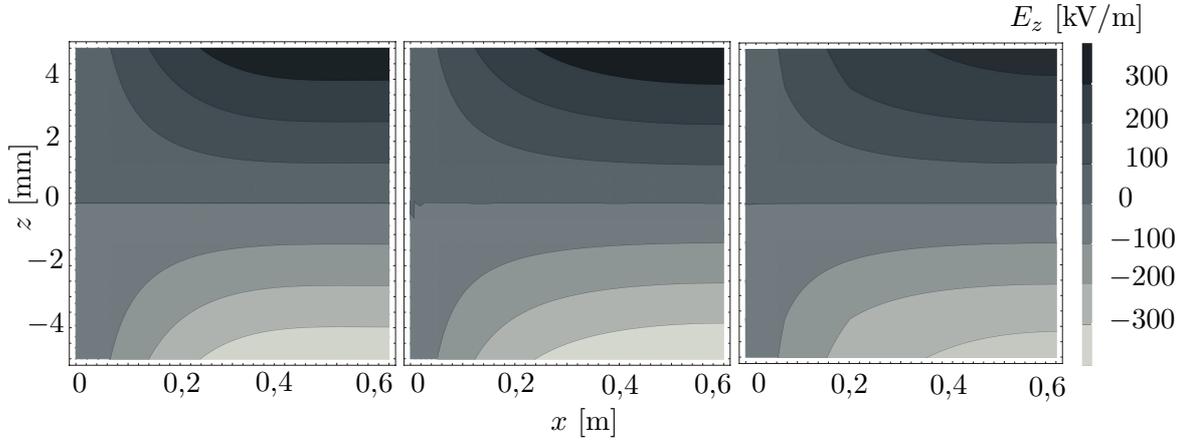


Figura 3.16: Comparación de campo eléctrico E_z analítico (izquierda) con COMSOL (centro) y FEAP (derecha) en placa piezoeléctrica con articulaciones y correderas.

En la Figura 3.17 se compara el voltaje obtenido analíticamente y por MEF en una línea vertical (a lo largo del espesor) localizada en $x = a, y = b$ donde la flecha es máxima y por tanto el voltaje también será máximo.

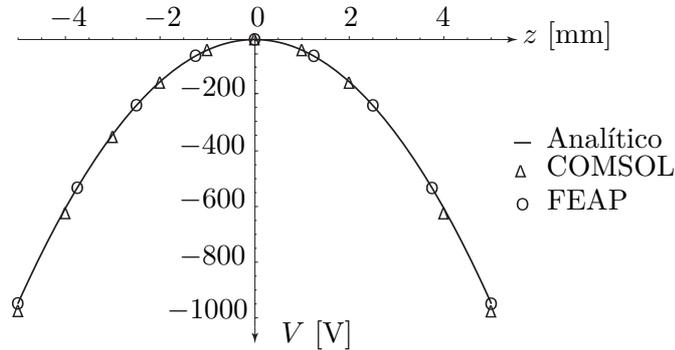


Figura 3.17: Voltaje $V(a, b, z)$ de placa piezoeléctrica analítico y con MEF.

Como se ha visto a lo largo de esta sección, todos los resultados son similares con los tres métodos por lo que la teoría desarrollada en la Sección 2.2.2 se valida para problemas estáticos.

3.4.2. Problema dinámico

La carga pasará a variar armónicamente con la forma $q(x, y) = 10000 \sin(\Omega_f t)$ [N/m²] y una frecuencia $\Omega_f = 4$ [rad/s]. Se utilizan las mismas funciones que para el problema estático y lo único que falta para resolver el problema de autovalores de las vibraciones naturales es la matriz de masas:

$$M_g = \begin{bmatrix} 3,375 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3,375 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3,375 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3,375 \end{bmatrix}$$

Como se han utilizado cuatro funciones, se obtienen cuatro frecuencias naturales que se comparan con las conseguidas por MEF en la Tabla 3.4. Los modos de vibración se muestran en la Figura 3.18.

f [Hz]	Analítico	FEAP	COMSOL	f [Hz]	Analítico	FEAP	COMSOL
f_1	62,86	63,69	62,81	f_3	465,13	470,8	461,93
f_2	163,42	165	163,01	f_4	565,7	568,8	560,82

Tabla 3.4: Tabla comparativa de frecuencias naturales para placa con articulaciones y correderas.

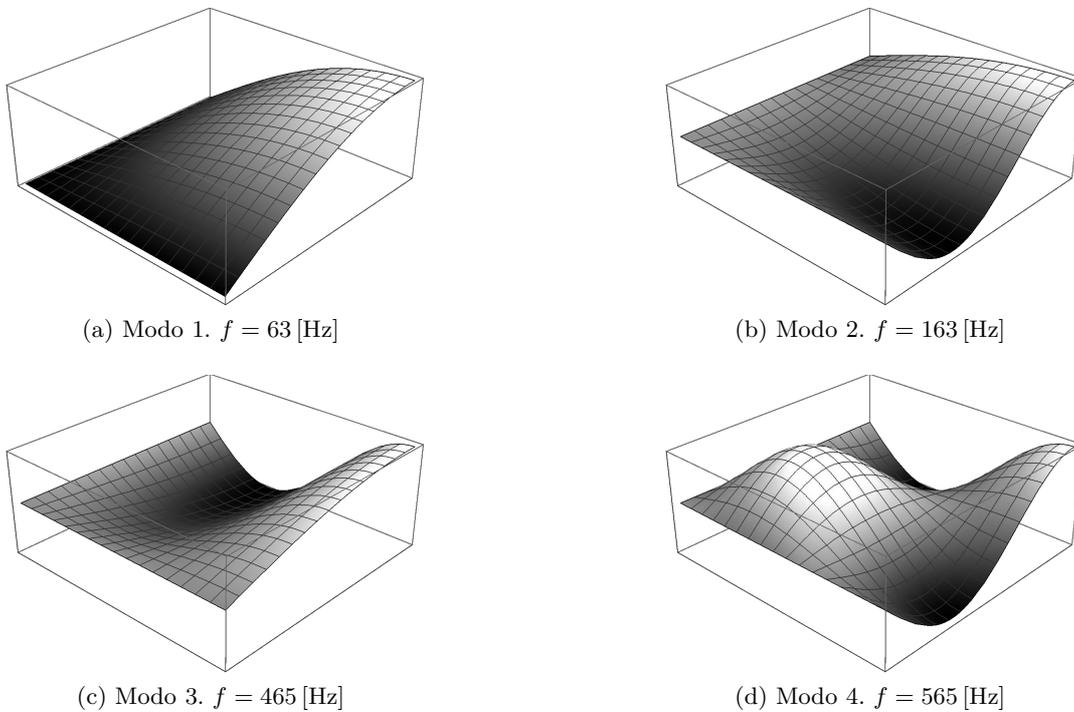


Figura 3.18: Modos y frecuencias naturales de la placa con articulaciones y correderas.

Los autovectores de los modos de la Figura 3.18 se recogen en la matriz;

$$\Psi = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

con los que se puede diagonalizar el sistema de ecuaciones diferenciales y conseguir la flecha en función del tiempo. El proceso es el mismo que el que se sigue en el anterior problema y el cálculo de las tensiones, campo eléctrico y voltaje es el mismo que en el problema estático solo que ahora la flecha varía con el tiempo y por tanto estas variables también lo harán.

Para comparar resultados se representará la flecha en el punto $x = a$, $y = b$ y el voltaje en esas mismas coordenadas y en el máximo de espesor $z = h_p/2$ en la Figura 3.19.

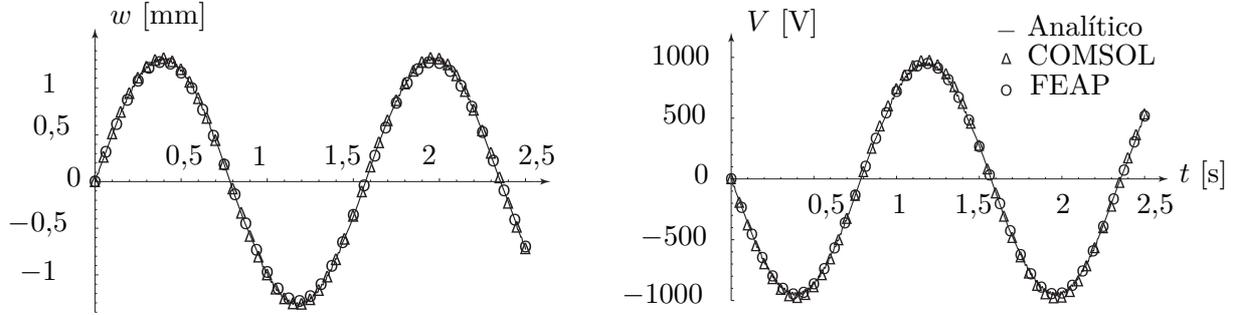


Figura 3.19: Comparación de flecha $w(a, b, t)$ (izquierda) y voltaje $V(a, b, h_p/2, t)$ (derecha) en placa piezoeléctrica con articulaciones y correderas.

Los resultados de los tres métodos coinciden a la perfección tanto en el voltaje como en la flecha con lo que se da el estudio por satisfactorio.

3.5. Laminado de aluminio y PZT

Se estudia un laminado de 3 capas compuestas por aluminio-PZT-aluminio articulado como el que se muestra en la Figura 3.20. Las propiedades del aluminio son las mismas que en la Sección 3.3 y la cerámica piezoeléctrica es el PZT-4 cuyas propiedades están en el Apéndice C. La placa en cuestión es cuadrada de dimensiones $a = 0,4$ [m] y los espesores de las capas de aluminio y PZT son respectivamente $h_A = 0,004$, $h_P = 0,002$ [m] por lo que el espesor total de la placa es $h_p = 0,01$ [m].

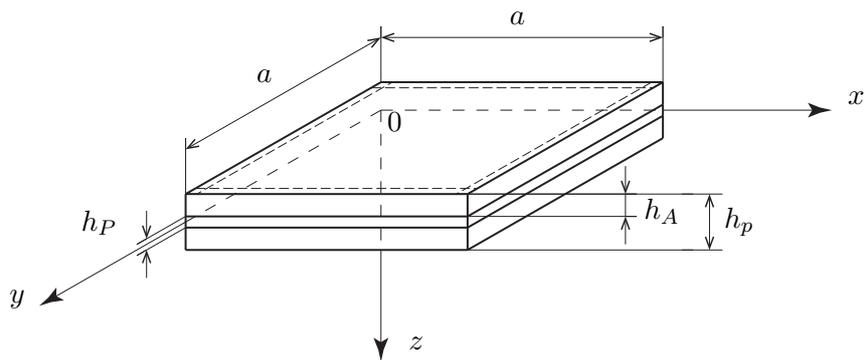


Figura 3.20: Laminado articulado de aluminio-PZT-aluminio.

Las mallas para los dos MEF se encuentran en la Figura 3.21 que como se puede observar tiene muchos más elementos en la parte del PZT para que se capture el campo eléctrico con precisión. Para este problema la malla de FEAP no se refina tanto porque se ha utilizado un elemento piezoeléctrico para FEAP que si que tiene la opción de emplear la formulación ampliada con lo que el efecto del “Shear Locking” mencionado en la Sección 3.4 no aparece y se consiguen resultados certeros.

También se ha de recalcar que gracias a la doble simetría de la placa, la malla representa solo una cuarta parte de esta y se han aplicado condiciones de simetría en $x = a/2$, $y = b/2$ –desplazamientos normales en esas superficies nulos– para reducir el coste computacional de forma considerable.

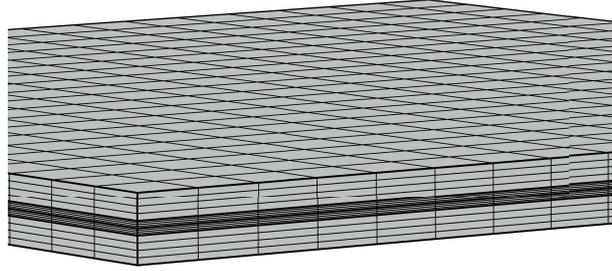


Figura 3.21: Mallas de FEAP y COMSOL para el laminado piezoeléctrico.

Para resolver este problema se tiene que juntar la teoría de la Sección 2.1.4, 2.1.5 y 2.2.2. Los valores de los coeficientes \bar{c}_{ij} , \bar{e}_{31} y ϵ_{33} son para el PZT y se calculan con la Ec. (B.2).

A continuación se procede a calcular las rigideces medias en las diferentes direcciones siguiendo el procedimiento de la Sección 2.1.5. Por ejemplo, en la dirección x se obtienen las constantes:

$$A_x = \frac{Y_A}{1 - \nu_A^2} h_A + \left(\bar{c}_{11} + \frac{\bar{e}_{31}^2}{\epsilon_{33}} \right) \left[(h_A + h_P) - h_A \right] + \frac{Y_A}{1 - \nu_A^2} \left[h_P - (h_A + h_P) \right]$$

$$B_x = \frac{Y_A}{1 - \nu_A^2} \left(\frac{h_A^2}{2} \right) + \left(\bar{c}_{11} + \frac{\bar{e}_{31}^2}{\epsilon_{33}} \right) \left[\frac{(h_A + h_P)^2 - h_A^2}{2} \right] + \frac{Y_A}{1 - \nu_A^2} \left[\frac{h_P^2 - (h_A + h_P)^2}{2} \right]$$

$$C_x = \frac{Y_A}{1 - \nu_A^2} \left(\frac{h_A^3}{3} \right) + \left(\bar{c}_{11} + \frac{\bar{e}_{31}^2}{\epsilon_{33}} \right) \left[\frac{(h_A + h_P)^3 - h_A^3}{3} \right] + \frac{Y_A}{1 - \nu_A^2} \left[\frac{h_P^3 - (h_A + h_P)^3}{3} \right]$$

y con estas ya se puede obtener la rigidez media en la dirección x con la Ec. (2.36). El proceso es el mismo para las otras direcciones con la diferencia que para D_{ty} se utiliza \bar{c}_{22} , en D_{txy} \bar{c}_{12} y en D_{st} c_{66} . Finalmente se consiguen los siguientes valores de las rigideces medias: $D_{tx} = 6674,18$, $D_{ty} = 6674,18$, $D_{txy} = 2346,98$, $D_{ts} = 2153,4$ y $H_t = 6674,18$ [Nm].

Analizando los valores ocurre lo mismo que con las rigideces del problema de la Sección 3.4. Esto ocurre gracias a que el aluminio es isótropo, el PZT es transversalmente isótropo y la placa tiene simetría con respecto al plano medio, es decir, hay la misma cantidad de aluminio y PZT en la parte superior y inferior. Si esta simetría no se cumple solo coinciden los valores de D_{tx} y D_{ty} como se verá en la Sección 4.2.

Por último una función de prueba que cumple las C.C. de la placa articulada ($w = 0 \mid_{y=0,a}^{x=0,a}$; $w_{,xx} = w_{,yy} = 0 \mid_{y=0,a}^{x=0,a}$) es:

$$\theta(x, y)_{mn} = \sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{n\pi y}{a}\right) \quad (3.13)$$

para $m, n = 1, 3, 5, \dots$ (m y n tienen que ser impares.)

3.5.1. Problema estático:

Se somete la placa a una carga uniforme de $q = 10000 \text{ [N/m}^2\text{]}$. Para resolver el problema con el método de Galerkin se escogen cuatro funciones:

$$\boldsymbol{\theta} = \{\theta_{11} \quad \theta_{13} \quad \theta_{31} \quad \theta_{33}\}^\top \quad (3.14)$$

y siguiendo el mismo procedimiento de la Sección 3.4 se consiguen los siguientes valores de los coeficientes de Galerkin con los que resolver el problema:

$$\mathbf{A}_g = \begin{bmatrix} 4,06 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 101,58 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 101,58 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 329,12 \end{bmatrix} \times 10^6; \quad \mathbf{B}_g = \begin{Bmatrix} 648,46 \\ 216,15 \\ 216,15 \\ 72,05 \end{Bmatrix}; \quad \mathbf{w}_r = \begin{Bmatrix} 1595,89 \\ 21,28 \\ 21,28 \\ 2,19 \end{Bmatrix} \times 10^{-7}$$

La flecha de la placa se representa en la Figura 3.22, se puede observar que cumple las C.C. y el punto medio $x = a/2, y = a/2$ es el que más se deflecta como era de esperar en este tipo de placas.

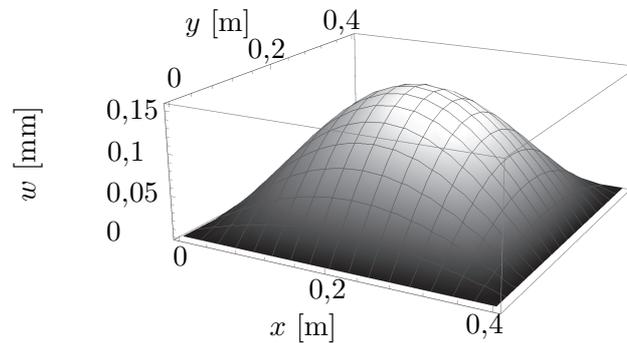
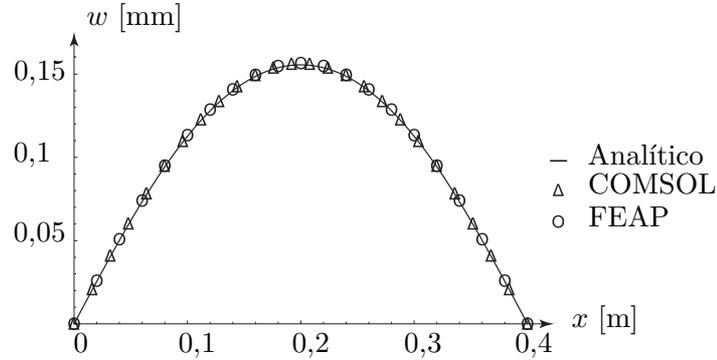


Figura 3.22: Flecha $w(x, y)$ debida a carga uniforme de laminado articulado.

Para comparar los resultados analíticos con MEF se representa la flecha a lo largo de una línea de $y = a/2$ en la Figura 3.23. Los tres métodos consiguen los mismos resultados y ahora FEAP y COMSOL coinciden a la perfección gracias a que los dos utilizan la formulación ampliada y el fenómeno del “Shear Locking” no se produce.


 Figura 3.23: Comparación de flecha $w(x, a/2)$ de laminado analíticamente y con MEF.

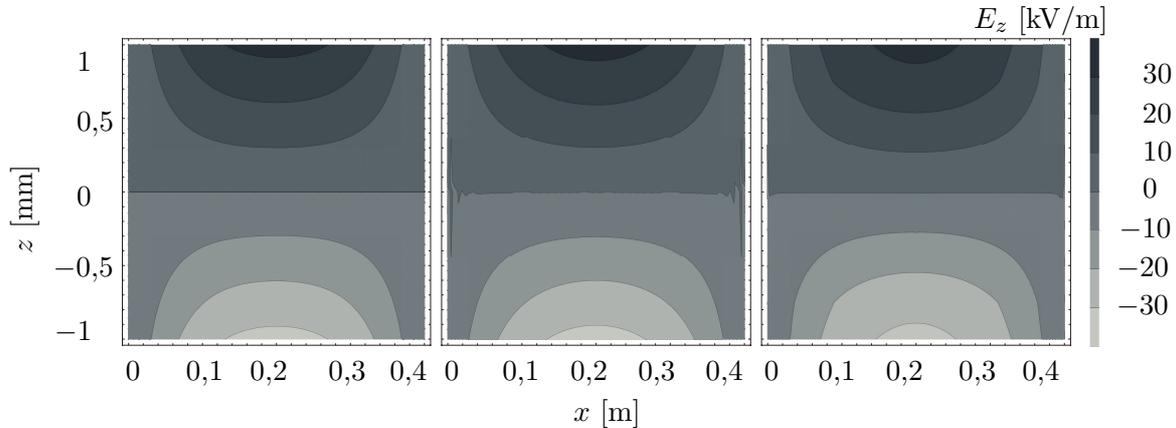
El campo eléctrico se origina solo en el PZT por lo que el siguiente paso es conseguir las tensiones en esa capa del material. Para ello, igual que en la Sección 3.4, se calculan con la siguiente expresión:

$$\mathbf{T}_P = \begin{Bmatrix} T_{Px} \\ T_{Py} \\ T_{Pxy} \end{Bmatrix} = - \begin{Bmatrix} D_{mPx} w_{,xx} + D_{mPxy} w_{,xy} \\ D_{mPxy} w_{,xy} + D_{mPy} w_{,yy} \\ 2 D_{mPs} w_{,xy} \end{Bmatrix} z$$

que están acotadas entre $z \in [-h_P/2 \quad h_P/2]$ y las rigideces D_{mP} son:

$$D_{mPx} = \bar{c}_{11} + \frac{\bar{e}_{31}^2}{\epsilon_{33}}; \quad D_{mPy} = \bar{c}_{22} + \frac{\bar{e}_{31}^2}{\epsilon_{33}}; \quad D_{mPxy} = \bar{c}_{12} + \frac{\bar{e}_{31}^2}{\epsilon_{33}}; \quad D_{mPs} = c_{66}$$

Una vez conseguidas las tensiones el campo eléctrico es $\mathbf{E} = -\mathbf{g} \mathbf{T}_P$. En la Figura 3.24 se comparan los resultados analíticos y de MEF en una sección de $y = a/2$ para el espesor de la capa de PZT. Se puede observar que los tres métodos coinciden.


 Figura 3.24: Comparación del campo eléctrico E_z analítico (izquierda) con COMSOL (centro) y FEAP (derecha) en laminado piezoeléctrico articulado.

Finalmente integrando la expresión del campo eléctrico se consigue el voltaje, en la Figura 3.25 se comparan los valores de los tres métodos a lo largo del espesor del PZT en el punto $x = a/2, y = a/2$. Como se puede observar, los resultados coinciden

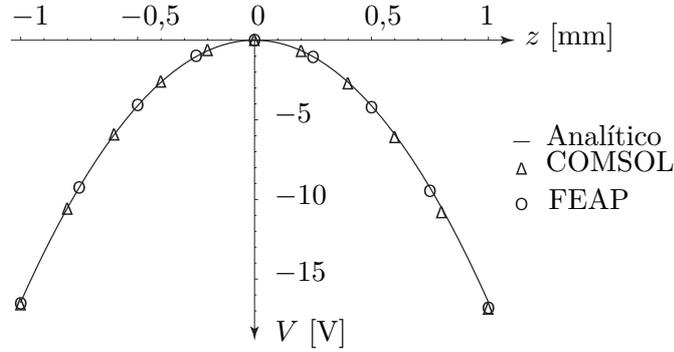


Figura 3.25: Comparación de voltaje $V(a/2, a/2, z)$ de laminado piezoeléctrico con MEF

3.5.2. Problema dinámico

La carga pasará a ser $q(x, y) = 10000 \sin(\Omega_f t)$ [N/m²] con una frecuencia $\Omega_f = 2$ [rad/s]. Se utilizan las mismas funciones con lo que la matriz de masas tiene los valores de:

$$M_g = \begin{bmatrix} 1,464 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1,464 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1,464 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1,464 \end{bmatrix}$$

y con ella y la matriz de rigidez se obtienen las frecuencias naturales mostradas en la Tabla 3.5 y los modos de vibración de la Figura 3.26.

f [Hz]	Analítico	FEAP	COMSOL	f [Hz]	Analítico	FEAP	COMSOL
f_1	265,15	264,44	264,55	f_3	1325,74	1312,46	1311,2
f_2	1325,74	1312,42	1311,2	f_4	2386,33	2311,48	2399,6

Tabla 3.5: Tabla comparativa de frecuencias naturales para laminado articulado.

Los autovectores de los modos de vibración se recogen en la matriz:

$$\Psi = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

y con estos ya se puede diagonalizar el sistema de ecuaciones y calcular la flecha en función del tiempo.

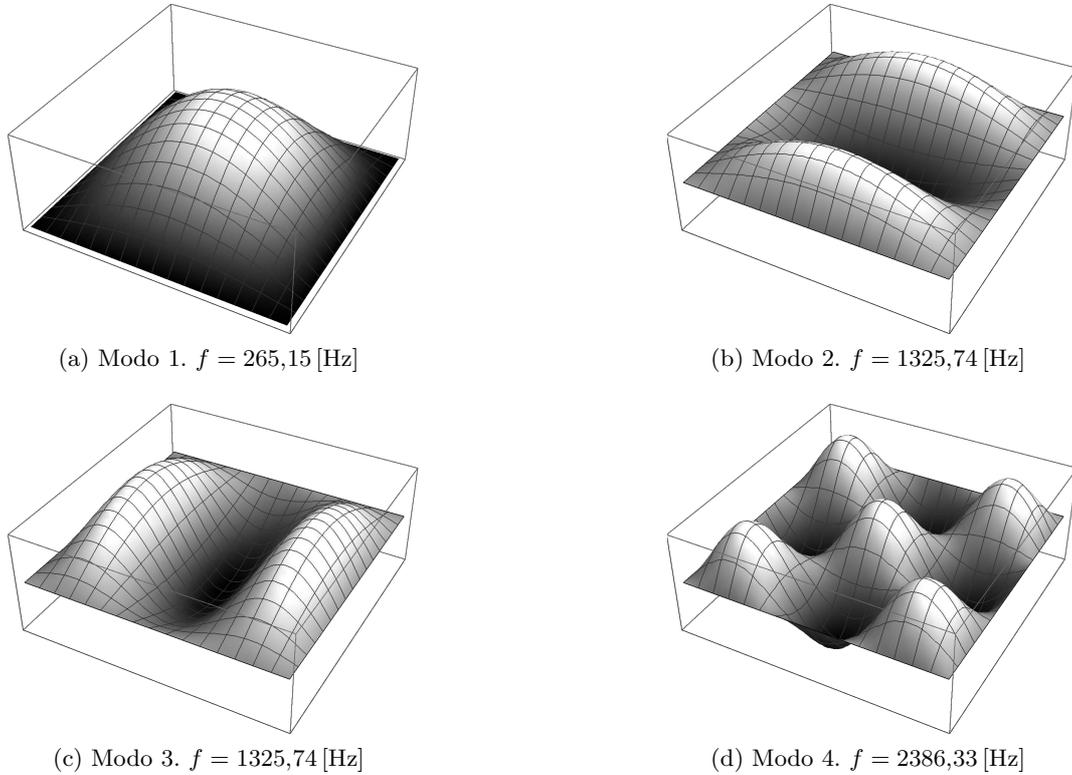


Figura 3.26: Modos y frecuencias naturales del laminado articulado.

Para comparar resultados se representa la flecha w en el punto medio de la placa y el voltaje en esas mismas coordenadas y en el máximo del espesor del PZT $z = h_P/2$ en la Figura 3.27.

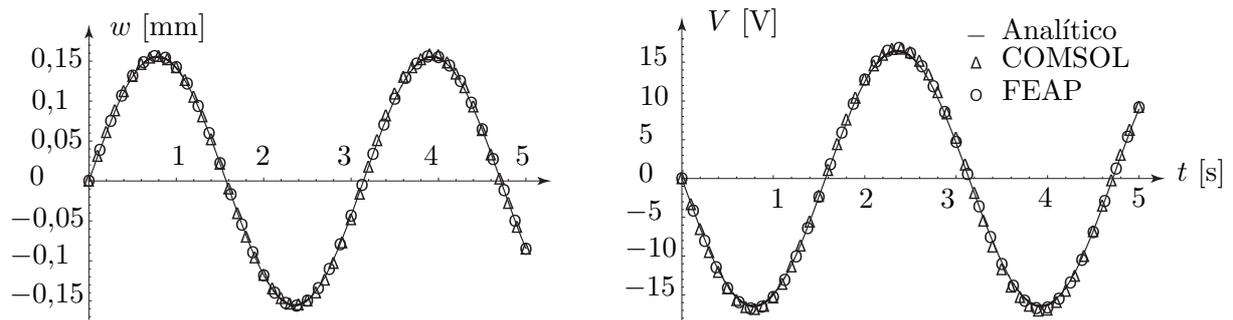


Figura 3.27: Comparación de la flecha $w(a/2, a/2, t)$ (izquierda) y el voltaje $V(a/2, a/2, h_P/2, t)$ (derecha) de laminado piezoeléctrico articulado.

Se puede apreciar que los tres métodos coinciden a la perfección al igual que en el caso estático, no solo los MEF coinciden entre ellos ya que se ha realizado el mismo estudio con los dos programas sino que teoría analítica proporciona los mismos resultados con lo que se validan los cálculos analíticos.

3.6. Placa material no acoplado con salto de espesor

Se estudia una placa empotrada en la dirección x , articulada en la dirección y y con un salto de espesor en la dirección x como la que se muestra en la Figura 3.28. Las dimensiones de la placa son: $a = 0,4$, $b = 0,2$, $h_0 = 0,0025$, $a_x = 0,2$, $a_m = 0,3$, $h_x = 0,0025$ [m] y el material es aluminio con las mismas propiedades que en la Sección 3.3.

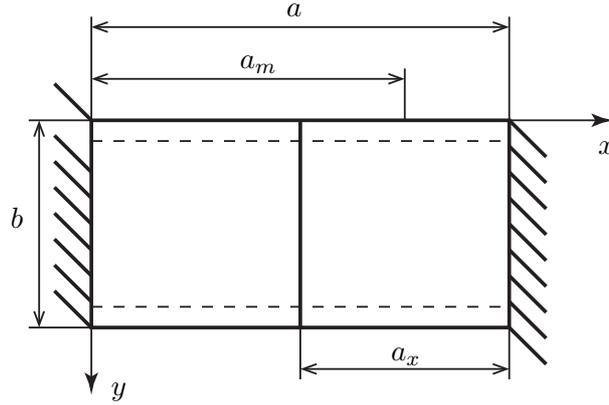


Figura 3.28: Placa empotrada en x , articulada en y con un salto de espesor.

Las mallas para MEF son como la de la Figura 3.7 pero contando también el salto de espesor y las funciones de prueba utilizadas son:

$$\theta_{x\lambda_m}(x) = \cosh\left(\frac{\lambda_m x}{a}\right) - \cos\left(\frac{\lambda_m x}{a}\right) - \frac{\cosh \lambda_m - \cos \lambda_m}{\sinh \lambda_m - \sin \lambda_m} \left[\sinh\left(\frac{\lambda_m x}{a}\right) - \sin\left(\frac{\lambda_m x}{a}\right) \right]$$

$$\theta_{ym}(y) = \sin\left(\frac{n \pi y}{b}\right)$$

donde λ_m son las raíces de la ecuación: $\cos \lambda_m \cosh \lambda_m = 1$.

3.6.1. Problema estático

Se somete la placa a una carga uniforme $q(x, y) = 10000$ [N/m²] y se escogen cinco funciones en cada dirección para asegurarse de tener suficientes funciones antisimétricas con las que se consiga una flecha acertada:

$$\boldsymbol{\theta}_x = \left\{ \theta_{x\lambda_1} \quad \theta_{x\lambda_2} \quad \theta_{x\lambda_3} \quad \theta_{x\lambda_4} \quad \theta_{x\lambda_5} \right\}^\top; \quad \boldsymbol{\theta}_y = \left\{ \theta_{y1} \quad \theta_{y2} \quad \theta_{y3} \quad \theta_{y4} \quad \theta_{y5} \right\}^\top \quad (3.15)$$

consiguiendo un total de 25 funciones al combinarlas. Debido a la gran dimensión de las matrices y vectores los resultados de estos se omitirán y se mostrarán solo resultados finales.

De la Ec. (2.41) se obtiene la matriz \mathbf{A}_g , de la Ec. (2.16) el vector \mathbf{B}_g y con estos dos ya se pueden conseguir los coeficientes de Galerkin \mathbf{w}_r . La flecha de la placa se representa en la

Figura 3.29 donde se puede observar, como era de esperar, que la zona que más se deflecta es la que no tiene el salto de espesor ya que tiene menos rigidez.

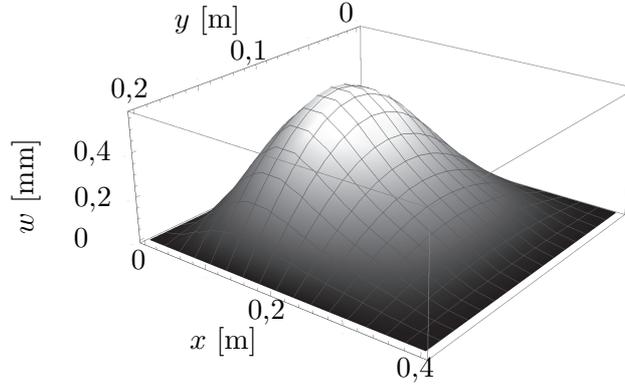


Figura 3.29: Flecha de placa empotrada y articulada con salto de espesor.

Para comparar con MEF se muestra en la Figura 3.30 la flecha a lo largo de una sección de $y = b/2$ comparada con los dos programas. El resultado analítico de asemeja a los resultados proporcionados por los MEF con un error del 3,5 % en el punto de máxima flecha.

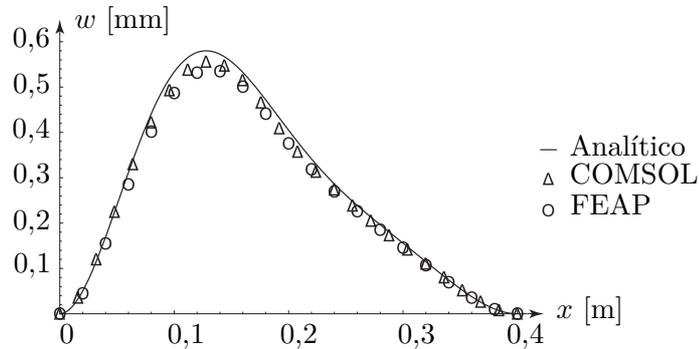


Figura 3.30: Comparación de $w(x, b/2)$ de placa con salto de espesor analíticamente y con MEF.

Las tensiones T se calculan con la fórmula:

$$\mathbf{T} = \begin{Bmatrix} T_x \\ T_y \\ T_{xy} \end{Bmatrix} = -\frac{Y}{1-\nu^2} \begin{Bmatrix} w_{,xx} + \nu w_{,yy} \\ w_{,yy} + \nu w_{,xx} \\ (1-\nu) w_{,xy} \end{Bmatrix} z \quad (3.16)$$

y en la Figura 3.31 se compara T_x en la zona del salto de espesor $[a/2 \quad a]$ a lo largo de z .

Como se puede observar, los resultados de los tres métodos coinciden tanto en forma como en magnitud por lo que la hipótesis de que el plano medio está siempre entre la superficie inferior y superior de la placa se acerca a la realidad.

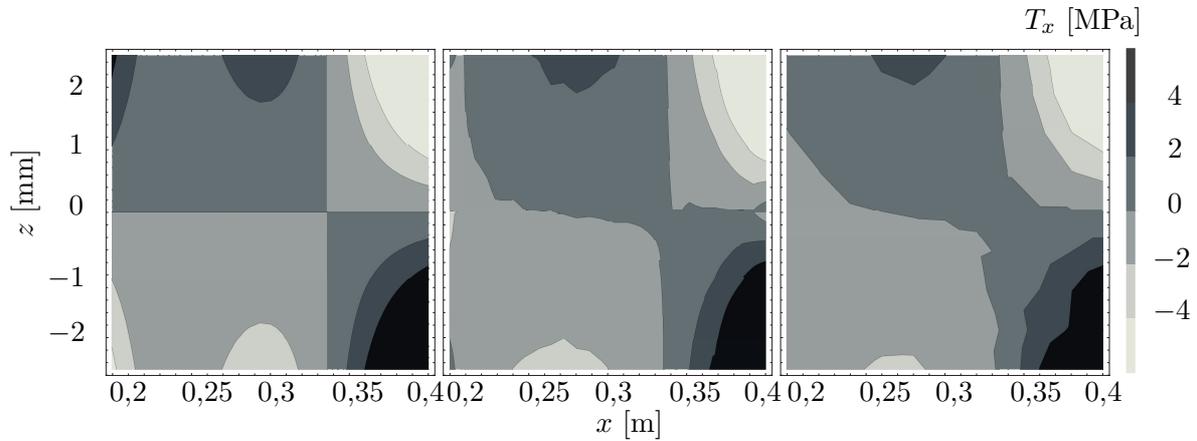


Figura 3.31: Comparación de las tensiones T_x analítico (izquierda) con COMSOL (centro) y FEAP (derecha) de una placa articulada y empotrada con un salto de espesor .

3.6.2. Problema dinámico

En esta sección la carga aplicada varía armónicamente siguiendo la expresión: $q(x, y) = 10000 \sin(\Omega_f t)$ [N/m²] con $\Omega_f = 1$ [rad/s].

Utilizando la Ec. (2.42) se calcula la matriz de masas y resolviendo el problema de autovalores se consiguen las frecuencias naturales recogidas en la Tabla 3.6 y los modos de vibración que se muestran en la Figura 3.32.

De los 25 valores obtenidos solo se muestran los primeros nueve porque los modos de vibración más importantes son los primeros y para no saturar de información innecesaria el documento.

f [Hz]	Analítico	FEAP	COMSOL	f [Hz]	Analítico	FEAP	COMSOL
f_1	309,52	321,957	316,56	f_6	1471,7	1353,38	1241,3
f_2	534,65	532,06	515,25	f_7	1574,5	1592,16	1502,4
f_3	812,13	837,319	809,58	f_8	1581,3	1648,62	1572,1
f_4	870,36	911,029	866,59	f_9	2128,1	2266,01	2073,6
f_5	1197,4	1250,84	1197,7				

Tabla 3.6: Tabla comparativa de frecuencias naturales para placa con salto de espesor.

Los valores de las frecuencias naturales coinciden a excepción de unas en las que el error es más grande del habitual aunque tampoco es muy grande. Otro aspecto a destacar es que los modos de vibración de la placa más importantes, de la misma forma que su flecha, se tienden a concentrar en la zona de menos rigidez donde no está el salto de espesor.

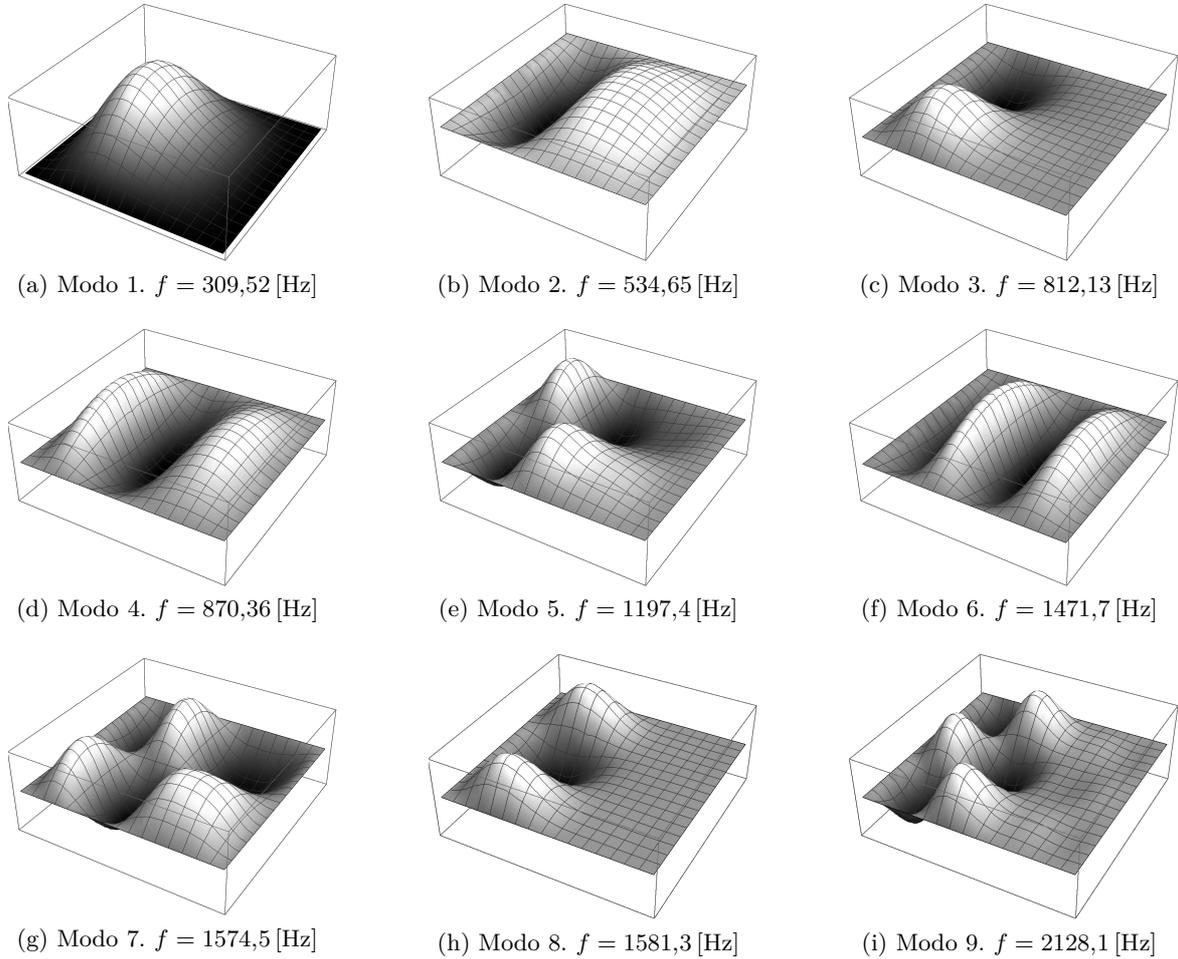


Figura 3.32: Modos y frecuencias naturales de la placa con salto de espesor.

Con estos modos ya se pueden diagonalizar las ecuaciones diferenciales, consiguiendo la flecha en función del tiempo. En la Figura 3.33 se compara la flecha en el punto que más se deflecta, $x = 0,14$ [m], y se puede observar que los resultados coinciden a la perfección.

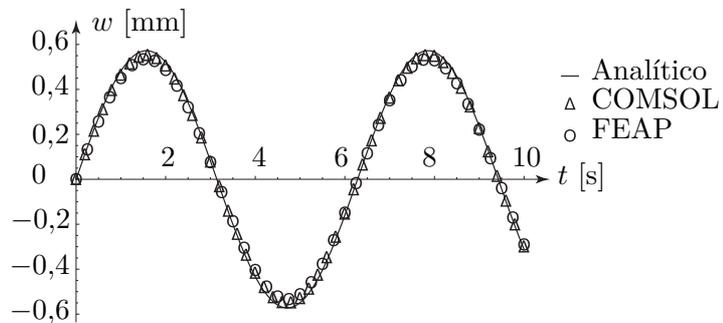


Figura 3.33: Comparación de la flecha $w(0,14, b/2, t)$ de placa con salto de espesor.

4

Estudio Placa Piezoeléctrica

Como se había comentado en el primer capítulo, la idea de este TFG es la de estudiar una placa en voladizo con un piezoeléctrico en la punta como la que se muestra en la Figura 1.3. Este tipo de placa es una de las más difíciles de analizar con precisión, ya que tiene tres bordes libres que son los que más C.C. imponen y además de derivadas de segundo y tercer orden. No obstante estas placas tienen gran importancia por su gran cantidad de aplicaciones, por lo que existe mucha literatura sobre ellas sobre a su análisis de vibraciones que ha sido de gran ayuda para este TFG.

Este estudio se dividirá en partes más simples para finalmente abordar el problema completo. Primero se estudiará un caso estático, a continuación las frecuencias naturales y modos de vibración de la placa en voladizo, luego la dinámica de esta bajo una carga oscilatoria y finalmente se repetirán ambos casos para las placas con el piezoeléctrico. La carga aplicada sobre la placa será arbitraria de $10000 \text{ [N/m}^2\text{]}$ oscilatoria.

4.1. Placa en voladizo

Las dimensiones de la placa en voladizo son $a = 0,055$, $b = 0,0072$, $h_p = 0,0005 \text{ [m]}$ y el material es aluminio con las características mencionadas en la Sección 3.3. Las funciones de prueba utilizadas se muestran en el Apéndice D.

4.1.1. Estático:

Para probar la precisión de estas funciones se planteará un caso estático y se comparará con los MEF. Se escogen 3 funciones:

$$\boldsymbol{\theta} = \{\theta_1 \quad \theta_2 \quad \theta_3\}^\top = \{X_{\lambda_1}(x)Y_0(y) \quad X_{\lambda_1}(x)Y_1(y) \quad X_{\lambda_1}(x)Y_{\lambda_1}(y)\}^\top \quad (4.1)$$

Con estas funciones y siguiendo el procedimiento explicado en la Sección 2.1.3, se obtienen los siguientes resultados:

$$\mathbf{A}_g = \begin{bmatrix} 0,044 & 0 & 0 \\ 0 & 0,015 & 0 \\ 6,696 & 0 & 6124 \end{bmatrix} \times 10^4; \quad \mathbf{B}_g = \begin{Bmatrix} 3,101 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}; \quad \mathbf{w}_r = \begin{Bmatrix} 6974 \\ 0 \\ -7,625 \end{Bmatrix} \times 10^{-6} \quad (4.2)$$

Con la Ec. (2.12) se consigue la flecha que se puede observar en la Figura 4.1. Esta cumple las únicas dos C.C. geométricas pero las seis de fuerza, como se demuestra en el Apéndice D, no se satisfacen a la perfección lo que produce un error que se verá posteriormente. Para comprobar la veracidad de esta flecha se comparará con la obtenida utilizando los dos programas MEF, FEAP y COMSOL.

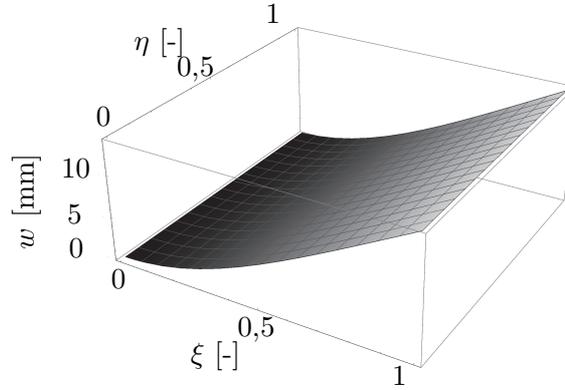


Figura 4.1: Flecha de placa en voladizo bajo carga uniforme y ejes adimensionales.

En la Figura 4.2 se comparan las tres soluciones a lo largo de una línea $\eta = 0,5$. Se puede apreciar que las dos soluciones de elementos finitos coinciden casi a la perfección y la analítica varía solo un poco con un error máximo del 6% en el borde libre $x = a$, por lo que los resultados del método analítico con las funciones de prueba elegidas se pueden dar por válidos.

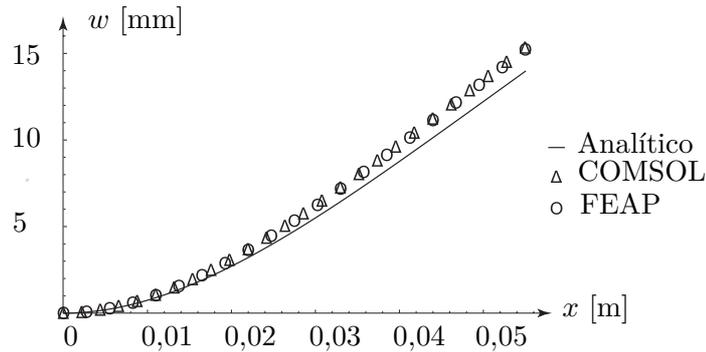


Figura 4.2: Flecha de placa en voladizo en $y = b/2$ bajo carga uniforme.

4.1.2. Vibraciones naturales:

Para esta parte se van a utilizar solo dos funciones ya que si se emplean las mismas que para el caso estático el primer modo de vibración –el más importante– no se captura:

$$\theta = \{\theta_1(x, y) = X_{\lambda_1}(x) Y_0(y) \quad \theta_2(x, y) = X_{\lambda_2}(x) Y_0(y)\}^T \quad (4.3)$$

con lo que se obtendrán solo dos frecuencias naturales y modos de vibración pero como se verá en la siguiente sección son los más importantes y las soluciones obtenidas son bastante acertadas. Las matrices con estas dos funciones son:

$$\mathbf{A}_g = \begin{bmatrix} 4,446 & 0 \\ 0 & 174,6 \end{bmatrix} \times 10^2; \quad \mathbf{M}_g = \begin{bmatrix} 5,346 & 0 \\ 0 & 5,346 \end{bmatrix} \times 10^{-4} \quad (4.4)$$

Las frecuencias naturales obtenidas de resolver el problema de autovalores $|\mathbf{A}_g - \omega^2 \mathbf{M}_g| = 0$ son $f = 145,134$, $f = 909,538$ [Hz] y sus modos de vibración se pueden observar en la Figura 4.3.

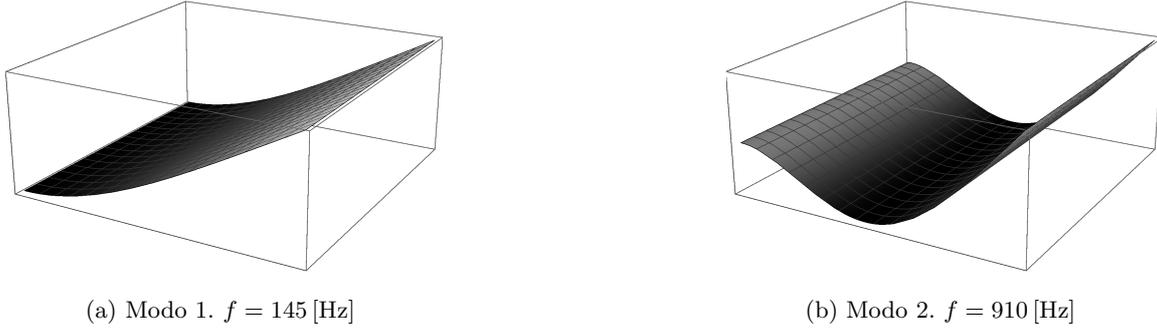


Figura 4.3: Primeros dos modos de una placa en voladizo.

Para disponer de más información se utilizará el método de *Warburton* descrito en el Apéndice E para calcular seis frecuencias naturales y sus modos de vibración. Las frecuencias obtenidas están en la Tabla 4.1, se puede observar que las dos primeras frecuencias coinciden a la perfección con las obtenidas mediante el método de Galerkin lo que indica que este método está empleado correctamente.

f [Hz]	Analítico	FEAP	COMSOL	f [Hz]	Analítico	FEAP	COMSOL
f_1	145	137	138	f_4	2689	2412	2414
f_2	909	861	861	f_5	4991	4738	4739
f_3	2546	1983	1979	f_6	7148	6005	5993

Tabla 4.1: Tabla comparativa de frecuencias naturales para placa en voladizo.

Las diferencias entre los dos programas de MEF son despreciables y con el método analítico pasa lo mismo que en la Sección 3.3, donde casi todos los valores eran cercanos pero hay algunos en los que la diferencia es más agravada fruto del error de las funciones de prueba utilizadas. Por último en la Figura 4.4 se pueden observar los modos de vibración asociados a estas frecuencias naturales.

4.1.3. Vibraciones forzadas:

En esta sección se aplicará la carga arbitraria $q(x, y, t) = 10000 \sin t$. Los modos obtenidos de utilizar las dos funciones de prueba del apartado anterior y el vector de fuerzas \mathbf{B}_g que ahora depende del tiempo son:

$$\mathbf{\Psi}^\top = \begin{bmatrix} 1 & 1,5 \times 10^{-14} \\ 3,7 \times 10^{-16} & -1 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{B}_g = \left\{ \begin{array}{l} 3,101 \\ 1,718 \end{array} \right\} \times \sin t \quad (4.5)$$

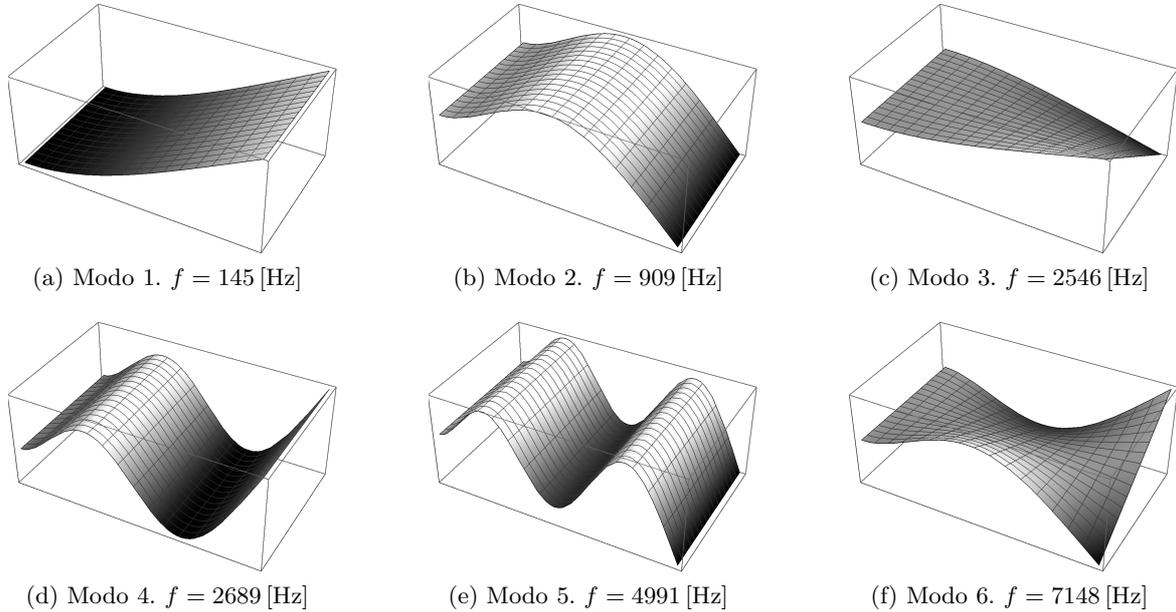


Figura 4.4: Modos y frecuencias naturales de la placa en voladizo.

Con la matriz de los modos de vibración de la Ec. (4.11) se puede diagonalizar la Ec. (2.28) con lo que se llega a un sistema de dos ecuaciones diferenciales de segundo orden a resolver:

$$\begin{aligned} F_{g1}(t) + 1,2 \times 10^{-6} \ddot{F}_{g1}(t) &= 0,007 \sin t \rightarrow F_{g1}(t) = 0,007 \sin t - 7,6 \times 10^{-6} \sin 912 t \\ 17459 F_{g2}(t) + 0,0005 \ddot{F}_{g2}(t) &= -1,72 \sin t \rightarrow F_{g2}(t) = -0,0001 \sin t + 2 \times 10^{-8} \sin 5715 t \end{aligned} \quad (4.6)$$

Con estas dos funciones ya se puede obtener la flecha de la placa. En la Figura 4.5 se dibuja la flecha en el punto $x = a, y = b/2$ a lo largo de diez segundos y se compara con las simulaciones hechas con los programas de elementos finitos.

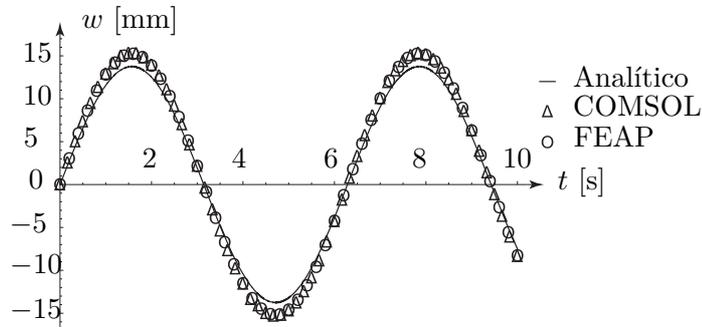


Figura 4.5: Flecha máxima $w(a, b/2, t)$ de placa en voladizo.

Todos los resultados coinciden bastante bien, hay un error del 10% para FEAP y del 7% para COMSOL en los picos donde la carga aplicada es máxima ($t = \pi/2, 3\pi/2, \dots$).

4.2. Laminado piezoeléctrico en voladizo

Las dimensiones de la placa se mantienen con la excepción de que se añade una capa de PZT con espesor $h_P = h_A = 0,0005$ [m]. Siguiendo el ejemplo del problema de la Sección 3.5 los valores de las rigideces en las diferentes direcciones son: $D_{tx} = 8,06$, $D_{ty} = 8,06$, $D_{txy} = 3,26$, $D_{ts} = 2,34$ y $H_t = 7,94$ [Nm].

Pese a que el aluminio es isótropo y el PZT transversalmente isótropo se puede observar como todas las rigideces no tienen el mismo valor; esto se debe a que la placa no tiene simetría con respecto a su plano medio, solo hay aluminio en la parte inferior y cerámica piezoeléctrica en la superior.

4.2.1. Estático:

En esta caso se escogerán solo dos funciones:

$$\boldsymbol{\theta} = \{\theta_1 \quad \theta_2\}^\top = \{X_{\lambda_1}(x) Y_0(y) \quad X_{\lambda_1}(x) Y_1(y)\}^\top \quad (4.7)$$

con las que se obtienen los siguientes valores de la matriz de rigidez, el vector de datos y los coeficientes de Galerkin:

$$\mathbf{A}_g = \begin{bmatrix} 4,31 & 0 \\ 0 & 4,31 \end{bmatrix} \times 10^3; \quad \mathbf{B}_g = \begin{Bmatrix} 3,101 \\ 0 \end{Bmatrix}; \quad \mathbf{w}_r = \begin{Bmatrix} 7,194 \\ 0 \end{Bmatrix} \times 10^{-4} \quad (4.8)$$

Si se utilizan las funciones de borde libre-libre que no sean las simples (las que contienen funciones trigonométricas), la precisión de la flecha aumenta pero la distribución de tensiones y por consecuencia el campo eléctrico generado, difiere en forma de los proporcionados por los MEF como se puede ver en la Figura 4.7.

La forma de la flecha es la misma que la de la Figura 4.2 y en la Figura 4.6 se compara la solución analítica con la proporcionada por los MEF en una línea de $y = b/2$ constante. Como se puede observar los dos MEF coinciden y el analítico difiere por el error de las funciones de prueba.

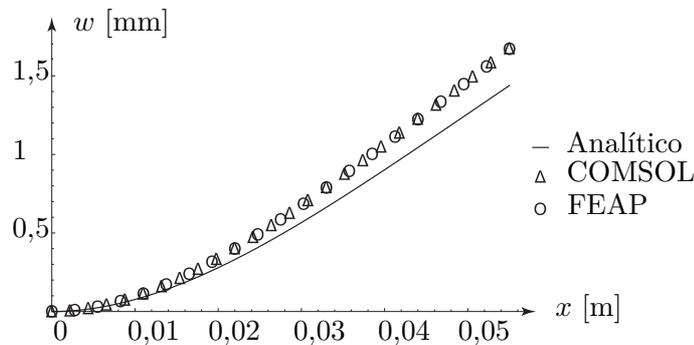


Figura 4.6: Flecha de laminado empotrado en $y = b/2$ bajo carga uniforme.

Siguiendo el ejemplo de la Sección 3.5 se calcula el campo eléctrico en la dirección z , en la Figura 4.7 se representa E_z en una sección de $y = b/2$ –empleando las funciones enunciadas al principio de esta sección y las trigonométricas para el borde libre-libre que proporcionan resultados erróneos– a lo largo del espesor del PZT y se compara con los resultados proporcionados por los MEF.

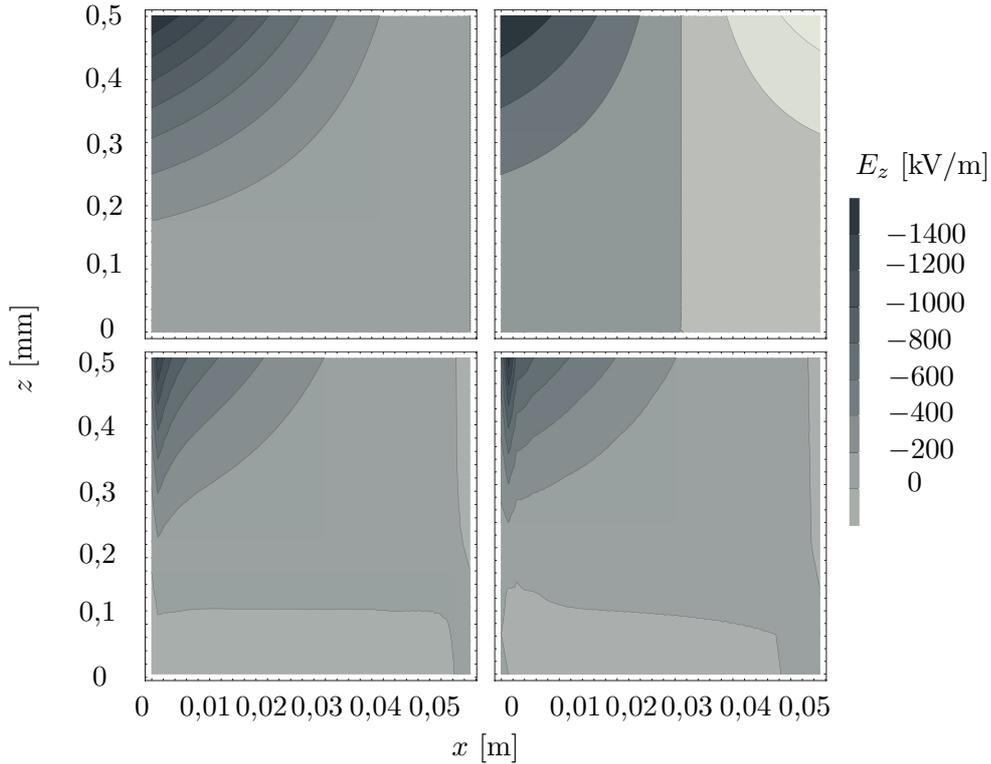
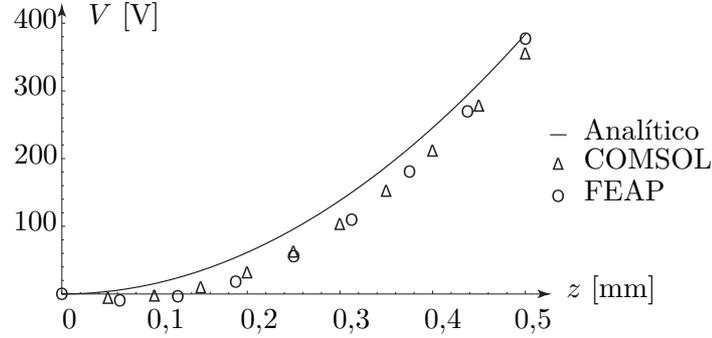


Figura 4.7: Campo eléctrico E_z analítico de un laminado piezoeléctrico empotrado utilizando funciones simples (superior-izquierda) y funciones trigonométricas (superior-derecha) con COMSOL (inferior-izquierda) y FEAP (inferior-derecha).

Como se había comentado anteriormente, si se utilizan las funciones trigonométricas para el borde libre-libre la forma del campo eléctrico varía en gran medida de las proporcionadas por los MEF.

Sin utilizar este tipo de funciones, la forma también cambia un poco pero esto es debido a que el proceso analítico no tiene en cuenta los efectos borde tridimensionales que los MEF sí consideran. Aunque la forma cambie un poco de la proporcionada por MEF, los valores del campo eléctrico sí que están entre el mismo rango para todos los métodos y son del mismo orden de magnitud.

Integrando el campo eléctrico en z se consigue el voltaje que se compara en la Figura 4.8 a lo largo del espesor del PZT en un punto $x = a/40$, $y = b/2$. Se escoge esa coordenada de x para que el punto coincida con los máximos del campo eléctrico mostrado por los MEF en la Figura 4.7.


 Figura 4.8: Voltaje $V(a/40, b/2, z)$ de laminado empotrado analítico y con MEF.

Como se puede observar, los valores analíticos con los MEF se parecen mucho por lo que la coordenada x elegida es un buen punto de comparación para este estudio y el estudio estático se valida para laminados piezoeléctricos.

4.2.2. Vibraciones naturales:

Para esta sección se utilizarán las funciones:

$$\boldsymbol{\theta} = \{\theta_1(x, y) = X_{\lambda_1}(x) Y_0(y) \quad \theta_2(x, y) = X_{\lambda_2}(x) Y_0(y) \quad \theta_3(x, y) = X_{\lambda_3}(x) Y_0(y)\}^T \quad (4.9)$$

con lo que se obtendrán tres frecuencias naturales y modos de vibración. Las matrices para resolver el problema de autovalores son:

$$\mathbf{A}_g = \begin{bmatrix} 4,31 & 0 & 0 \\ 0 & 169,275 & 0 \\ 0 & 0 & 1327,14 \end{bmatrix} \times 10^3; \quad \mathbf{A}'_g = \begin{bmatrix} 2,02 & 0 & 0 \\ 0 & 2,02 & 0 \\ 0 & 0 & 2,02 \end{bmatrix} \times 10^{-3} \quad (4.10)$$

Aparte de las tres obtenidas se utiliza el método de Warburton con materiales ortotrópicos para conseguir tres frecuencias y modos adicionales, en la Tabla 4.2 se comparan estos valores con los conseguidos con MEF y la forma de los modos es la misma que los de la Figura 4.4.

f [Hz]	Analítico	FEAP	COMSOL	f [Hz]	Analítico	FEAP	COMSOL
f_1	232,61	214,31	214,13	f_4	4079,87	3748,02	3744,7
f_2	1456,74	1339,84	1338,9	f_5	7994,96	7340,95	7331,1
f_3	3013,45	2875,79	2909,3	f_6	9112,04	8603,79	8595,2

Tabla 4.2: Tabla comparativa de frecuencias naturales para laminado en voladizo.

4.2.3. Vibraciones forzadas:

Los modos obtenidos de las tres funciones de prueba y el vector \mathbf{B}_g son:

$$\Psi^T = \begin{bmatrix} 1 & -6,9 \times 10^{-15} & -4,5 \times 10^{-13} \\ 1,4 \times 10^{-14} & -1 & 7,3 \times 10^{-12} \\ 4,5 \times 10^{-13} & 7,3 \times 10^{-12} & -1 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{B}_g = \begin{Bmatrix} 3,101 \\ 1,718 \\ 1,01 \end{Bmatrix} \times \sin t \quad (4.11)$$

con lo que ya se puede obtener la flecha y el campo eléctrico en función del tiempo. En la Figura 4.9 se compara la flecha y el voltaje en los mismos puntos de estudio que para el caso estático.

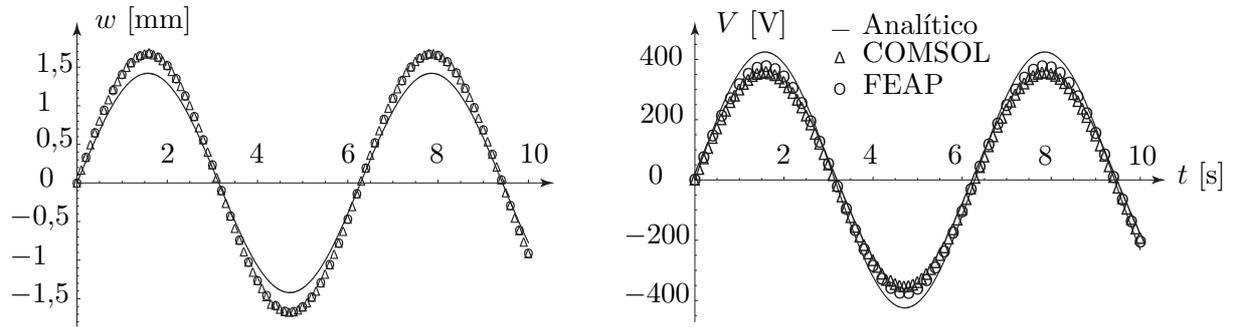


Figura 4.9: Comparación de flecha $w(a, b/2, t)$ (izquierda) y voltaje $V(a/40, b/2, h_P, t)$ (derecha) de laminado empotrado.

De la Ec. (2.71) se consigue la intensidad que fluye por el piezoeléctrico:

$$I(t) = (323 \cos t - 337 \cos 1461 t + 16,5 \cos 9155 t - 2,03 \cos 25635 t) \times 10^{-9} \quad (4.12)$$

y luego con la Ec. (2.73) la potencia del dispositivo que tiene el siguiente valor: $P_o = 0,07 \text{ } [\mu\text{W}]$ o $P_o = 0,24 \text{ } [\text{mWh}]$. Estos valores son muy pequeños pero es lo esperado en dispositivos de cosechamiento de energía, si se divide este valor por el volumen –en centímetros cúbicos– del piezoeléctrico se consigue un valor de $0,33 \text{ } [\mu\text{W}/\text{cm}^3]$ que está cerca del $[\mu\text{W}/\text{cm}^3]$ que se había enunciado en el Capítulo 1 que este tipo de dispositivos proporcionaban.

4.3. Placa en voladizo con piezoeléctrico en el extremo

Las dimensiones de la placa se mantienen pero ahora la capa de PZT tiene una longitud de $a_x = 0,00825 \text{ } [\text{m}]$ y está colocada en el extremo de la placa. Para resolver este caso se necesita la rigidez de la capa de aluminio, $D_0 = 0,831 \text{ } [\text{Nm}]$ y las de la capa de PZT en sus respectivas direcciones: $D_{px} = 1,245$, $D_{py} = 1,245$, $D_{pxy} = 0,608$ y $D_{ps} = 0,318 \text{ } [\text{Nm}]$.

Se utilizarán un total de 25 funciones, cinco para la dirección x y otras cinco más para y , con el fin de conseguir la solución más precisa posible ya que este es el caso objetivo del TFG:

$$\boldsymbol{\theta}_x = \{X_{\lambda_1} \quad X_{\lambda_2} \quad X_{\lambda_3} \quad X_{\lambda_4} \quad X_{\lambda_5}\}^T; \quad \boldsymbol{\theta}_y = \{Y_0 \quad Y_1 \quad Y_{\lambda_1} \quad Y_{\lambda_2} \quad Y_{\lambda_3}\}^T \quad (4.13)$$

y al utilizar tantas funciones el error de forma en el campo eléctrico originado por utilizar solo una función trigonométrica para el borde libre-libre –Figura 4.7– se corrige.

4.3.1. Estático:

Invocando la Ec. (2.69) se calcula la matriz de rigidez \mathbf{A}_g que al ser de dimensión 25×25 se omitirá la inclusión de sus valores en el documento. Con esta y matriz y el vector de fuerzas de la Ec. (2.16) se obtienen los coeficientes de Galerkin que proporcionan una flecha con la misma forma que la de la Figura 4.1.

Para comparar las soluciones con MEF, en la Figura 4.10 se representa w a lo largo de $y = b/2$, que como se puede apreciar, aparece el mismo error en la flecha debido a las funciones de prueba como en las partes anteriores de este estudio.

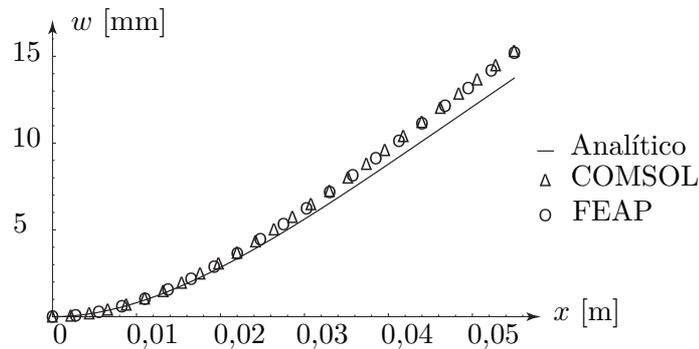


Figura 4.10: Flecha $w(x, b/2)$ de placa empotrada con piezoeléctrico en el extremo.

A continuación se obtiene el campo eléctrico siguiendo el mismo procedimiento ya empleado cuantiosas veces a lo largo de este TFG y en la Figura 4.11 se representa el voltaje a lo largo del piezoeléctrico en la misma sección que la flecha.

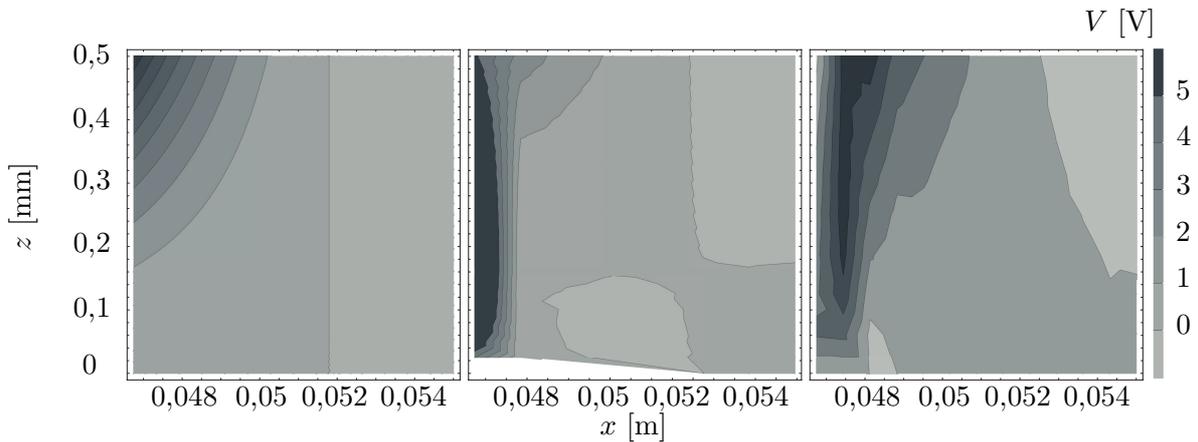


Figura 4.11: Comparación del voltaje V analítico (izquierda) con COMSOL (medio) y FEAP (derecha) de placa empotrada con piezoeléctrico en el extremo.

Analizando los resultados, la teoría analítica concentra el voltaje en la esquina superior izquierda al igual que en el laminado, COMSOL a lo largo de todo el borde izquierdo y FEAP un poco más desplazado a la derecha. No obstante, todos los valores son del mismo orden de magnitud y dado que la teoría analítica no captura efectos 3D los resultados se pueden considerar certeros.

4.3.2. Vibraciones naturales:

Con la Ec. (2.70) se consigue la matriz de masas y resolviendo el problema de autovalores $|\mathbf{A}_g - \omega^2 \mathbf{M}_g| = 0$ se consiguen las frecuencias naturales –solo se muestran cuatro en la Tabla 4.3– y los modos de vibración que tienen la misma forma que los de la Figura 4.4.

f [Hz]	Analítico	FEAP	COMSOL	f [Hz]	Analítico	FEAP	COMSOL
f_1	94,595	89,608	89,576	f_3	2452,2	2226,2	2226,2
f_2	793,31	744,569	744,35	f_4	5218	5402,79	5397,9

Tabla 4.3: Tabla comparativa de frecuencias naturales para placa en voladizo con extremo piezoeléctrico.

Los valores de los MEF coinciden perfectamente y los analíticos con muy poco error, cosa que ya se ha visto a lo largo de este TFG.

4.3.3. Vibraciones forzadas:

Con los modos de vibración se diagonalizan las ecuaciones diferenciales y se obtiene la flecha en función del tiempo que se muestra en la Figura 4.12 que como se puede observar coincide prácticamente sin error.

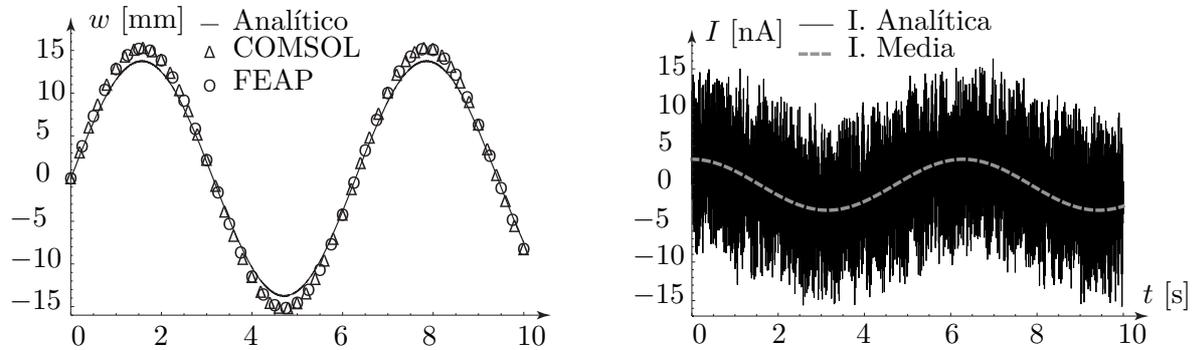


Figura 4.12: Flecha $w(a, b/2, t)$ (izquierda) e Intensidad $I(t)$ (derecha) del piezoeléctrico de placa empotrada.

En la Figura 4.12 también se representa la intensidad de la Ec. (2.71) y su valor medio I_m . Siguiendo el mismo procedimiento que para el laminado se consigue una potencia de $P_o = 45,8$ [pW] o $P_o = 0,165$ [μ Wh].

Estos valores son muy pequeños comparados con el laminado porque aunque aumenta la flecha ya que la placa es mucho menos rígida, lo que produce el voltaje en el piezoeléctrico son las tensiones y estas se concentran en el empotramiento. Dividiendo este valor por el volumen del piezoeléctrico se consigue $P_o = 0,0015$ [μ W/cm³], en el Capítulo 5 se llevará a cabo un estudio paramétrico de esta placa para determinar la configuración óptima y maximizar la producción de energía.

5

Estudio paramétrico

El objetivo de este capítulo es conseguir la configuración óptima del dispositivo que proporcione la máxima potencia. Para ello se repetirán los cálculos de la Sección 4.3 variando los parámetros relevantes de dicho estudio: la longitud de la placa, su anchura, los espesores de la placa y el piezoeléctrico y los materiales y longitud de este. Por último también se cambiará la posición del piezoeléctrico para comprobar si la configuración inicial de la Figura 1.3 era la óptima o existe una mejor.

5.1. Longitud de la placa

En esta sección se variará la longitud de la placa en el rango $[0,5a \quad 1,1a]$ siendo $a = 55$ [mm] como en el Capítulo 4. A partir de este último valor, la flecha máxima no tienen sentido físico ya que es más grande que la longitud de la placa o prácticamente del mismo valor por lo que se rompería. En la Figura 5.1 se representa la flecha máxima en función del tiempo para las diferentes longitudes elegidas y la intensidad producida piezoeléctrico, el intervalo de tiempo elegido es una semionda para w y media semionda para I_m .

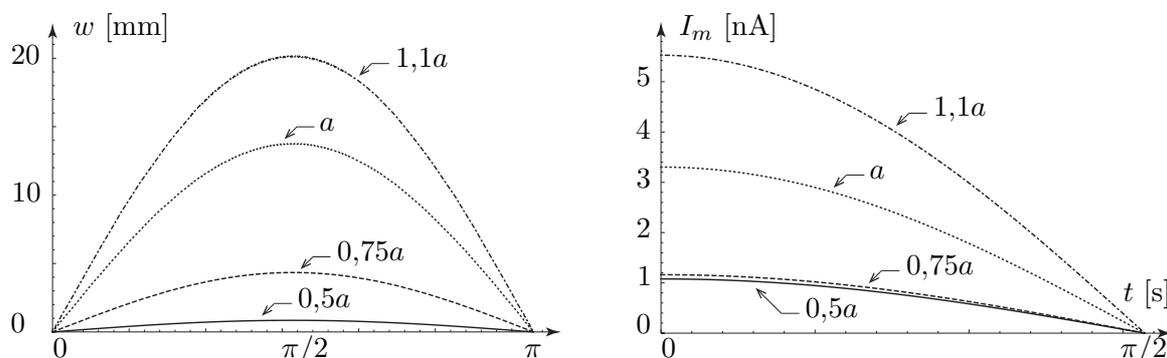


Figura 5.1: Flecha máxima $w(a, b/2)$ (izquierda) e intensidad I_m (derecha) para diferentes a .

Como era de esperar, aumentar la longitud acrecienta la flecha y reducirla disminuye su magnitud. Con la intensidad sucede lo mismo ya que las tensiones aumentan conforme la flecha crece. Para poder comparar mejor los diferentes resultados se representa la potencia y la potencia dividida por el volumen, a lo que se llamará rendimiento, en la Figura 5.2. En estos gráficos se han interpolado los datos para poder discernir la tendencia que tiene la variación del parámetro de estudio.

Como se puede observar, no hay diferencia en la forma de las dos gráficas ya que al aumentar solo la longitud de la placa, el volumen del piezoeléctrico se mantiene constante por lo que el rendimiento del piezoeléctrico varía de la misma forma que la potencia producida por este. Se puede ver la misma tendencia que en las gráficas de la Figura 5.1: al aumentar la longitud la potencia crece ya que la intensidad también lo hace pero además se puede ver que tiene una tendencia exponencial.

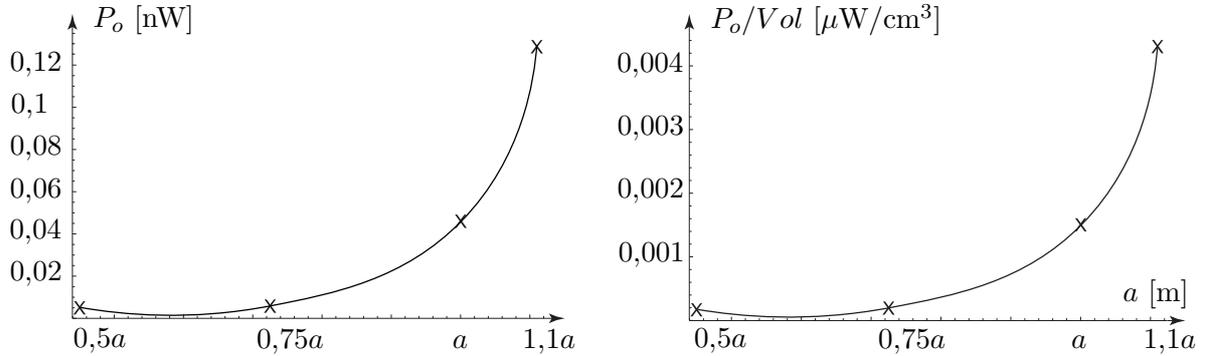


Figura 5.2: Potencia P_o (izquierda) y rendimiento P_o/Vol (derecha) para diferentes a .

Por tanto la tendencia óptima es aumentar la longitud de la placa sin llegar a la zona donde los resultados se vuelven erróneos, se escogerá $1,1a$ para aumentar la producción de energía con respecto a la configuración de la Sección 4.3. Como se verá en el Capítulo 6, la carga de las olas es menor que la carga arbitraria elegida por lo que está longitud se podría aumentar más aunque no se hará para tener un margen de seguridad.

5.2. Anchura de la placa

La anchura b de la placa se modificará en el intervalo $[0,5b \ 2b]$ y en este caso no ocurre lo mismo que con la longitud por lo que no hay ningún límite aparente para este valor. En la Figura 5.3 se encuentra representada la flecha de la placa y las intensidades que circulan por el piezoelectrico.

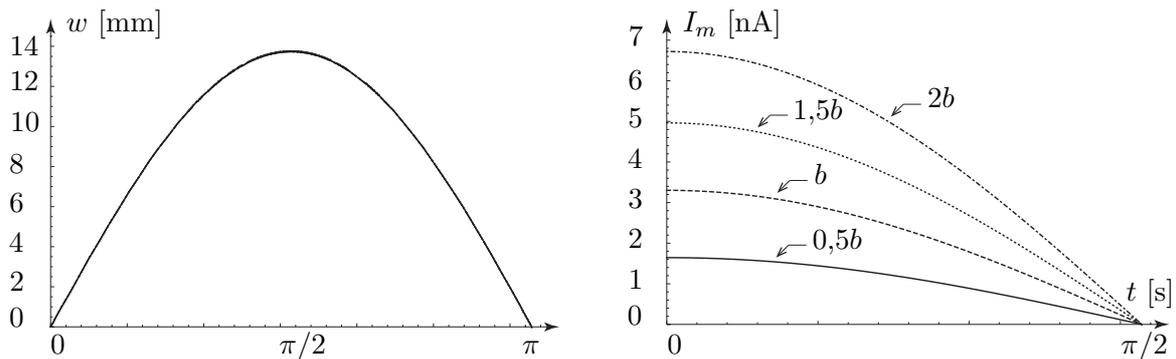


Figura 5.3: Flecha máxima $w(a, b/2)$ (izquierda) e intensidad I_m (derecha) para diferentes b .

Lo primero que llama la atención es que la flecha no varía con la anchura, lo que era de esperar ya que el empotramiento es perpendicular a la dirección x por lo que aumentar o disminuir la anchura no repercute en la deformación máxima de la placa. No obstante, la intensidad sí que aumenta ya que el piezoelectrico gana más volumen con lo que hay más material produciendo energía. Para entender mejor la tendencia en la producción de energía y comparar los resultados se representa como en la Figura 5.2 la potencia del dispositivo y su rendimiento en las Figura 5.4.

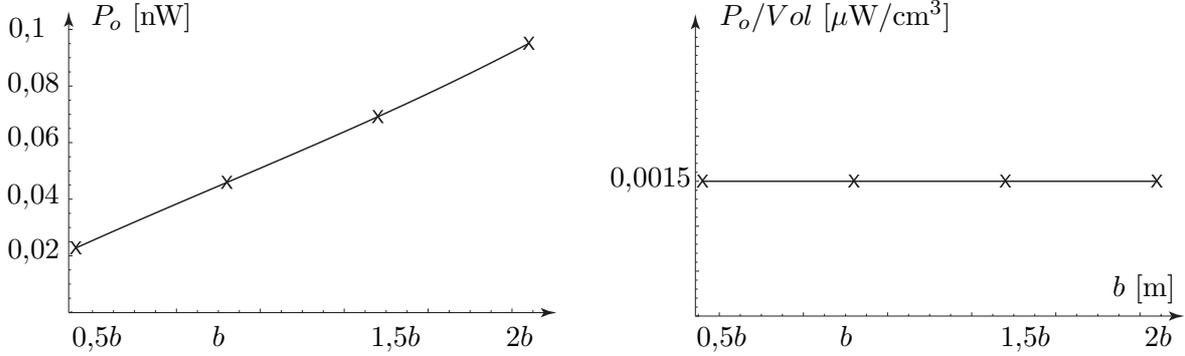


Figura 5.4: Potencia P_o (izquierda) y rendimiento P_o/Vol (derecha) para diferentes b .

La tendencia es claramente lineal, a doble de anchura doble de potencia pero el rendimiento se mantiene constante ya que se aumenta de la misma forma el volumen del piezoeléctrico por lo que no se encuentra ningún óptimo para el diseño del piezoeléctrico. Aun así, si hubiera un requerimiento mínimo de intensidad para la aplicación elegida aumentar este parámetro sería una buena opción para satisfacerlo.

5.3. Espesor

En este apartado se modificará el espesor del piezoeléctrico h_P en el rango $[0,5h_P \quad 2h_P]$ para dos espesores del aluminio: el original h_A y el doble $2h_A$. Si se reduce el espesor del aluminio por debajo del original se consiguen resultados erróneos, la flecha es mayor que la longitud de la placa por lo que se rompería al no ser lo suficiente rígida. En la Figura 5.5 se representan la flecha máxima y la intensidad para los diferentes espesores escogidos.

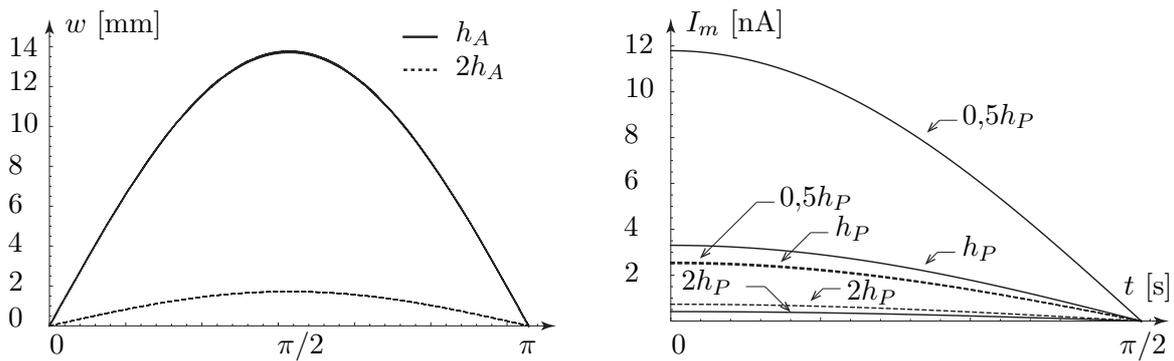


Figura 5.5: Flecha máxima $w(a, b/2)$ (izquierda) e intensidad I_m (derecha) con varios h_A, h_P .

Como se puede observar, variar el espesor del PZT no influye en la flecha de la placa ya que la longitud del piezoeléctrico es muy pequeña comparada con la de aluminio; pero al aumentar el espesor del aluminio la placa se rigidiza mucho y la flecha disminuye en gran medida. Con la intensidad sí que se aprecian cambios para los diferentes espesores del PZT, en especial aumenta enormemente al reducir el espesor del PZT a la mitad, lo que en principio no parece muy intuitivo pero tiene su explicación.

Primero es necesario recordar que el plano medio de la placa, donde las tensiones son nulas, se considera que está a la mitad del espesor total como se había mencionado en la Sección 2.1.6. También, que la intensidad depende de la distancia entre el plano medio del piezoeléctrico y el de la placa completa pero esta distancia se mantiene constante al variar el espesor del PZT para un mismo espesor de aluminio. No obstante, la posición del plano medio de la placa sí que cambia: si los dos espesores son iguales este está a la mitad, pero si hay mas PZT que aluminio el plano medio se sitúa en el PZT y al contrario en el aluminio como representa la línea discontinua de la Figura 5.6.

Las tensiones cambian de signo en el plano medio y son más grandes para líneas horizontales más lejanas de este. Para $h_A = h_P$ solo hay tensiones negativas en el piezoeléctrico y en consecuencia voltajes positivos, para $h_A < h_P$ se crean voltajes de los dos signos por lo que las corrientes se contrarrestan y se genera menos intensidad y por último para $h_A > h_P$ solo hay voltaje positivo y además de mayor magnitud ya que las tensiones son más grandes al estar el piezoeléctrico más separado del plano medio.

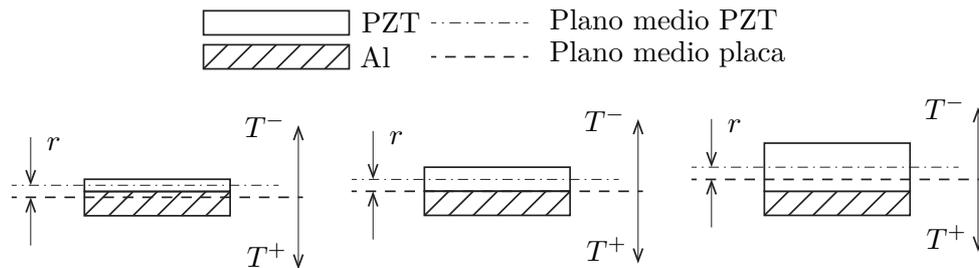


Figura 5.6: Movimiento del plano medio y tensiones para diferentes espesores de PZT h_P .

Por estos motivos se puede observar como la intensidad disminuye al aumentar el espesor del PZT para los dos de aluminio y es mejor no variar el del aluminio ya que disminuye mucho la flecha. Para apreciar mejor estas tendencias se representa la potencia y el rendimiento.

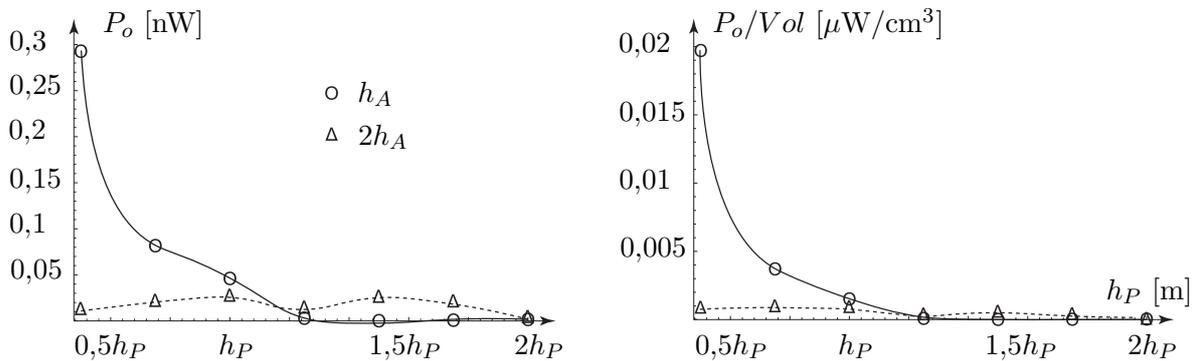


Figura 5.7: Potencia P_o (izquierda) y rendimiento P_o/Vol (derecha) con diferentes h_A, h_P .

En la Figura 5.7 se aprecia que para h_A hay una tendencia logarítmica negativa y para $2h_A$ se mantiene prácticamente constante. Esto sucede porque la resistencia del piezoeléctrico está ligada a su espesor: si el primero aumenta el segundo también y entonces la potencia también crece.

Por tanto hay una tendencia negativa que reduce la potencia al aumentar el espesor del PZT y esta nueva que tiende a aumentarla conforme h_P crece. Para el caso del espesor de aluminio original la primera tiene mucha más importancia para valores de h_P pequeños, equiparándose posteriormente y para el caso de doble espesor de aluminio las dos tienen el mismo peso por lo que la potencia y el rendimiento se mantienen constantes en todo el rango.

En conclusión, la situación óptima es mantener el espesor de aluminio previamente seleccionado y reducir a la mitad el del PZT.

5.4. Material

Aparte del PZT-4, se probarán otros tres tipos de esta cerámica: PZT-2, PZT-5H y PZT-8 cuyas propiedades se encuentran en el Apéndice C. En la Figura 5.8 se representa la flecha y la intensidad.

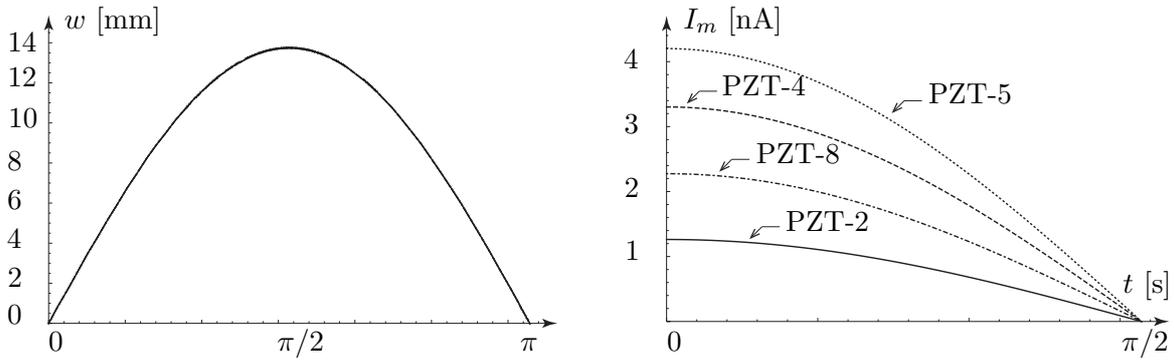


Figura 5.8: Flecha máxima $w(a, b/2)$ (izquierda) e intensidad I_m (derecha) para varios PZT.

En este caso ocurre lo mismo que al variar el espesor del PZT, al ser este una porción muy pequeña de la placa no influye significativamente en la flecha de la placa pero al cambiar las propiedades dieléctricas y de acoplamiento la intensidad si que varía: los PZT con mayores cualidades de este tipo producen intensidades más grandes. De la misma forma que en los otros apartados se representan la potencia y el rendimiento en la Figura 5.9 para poder comparar estos parámetros.

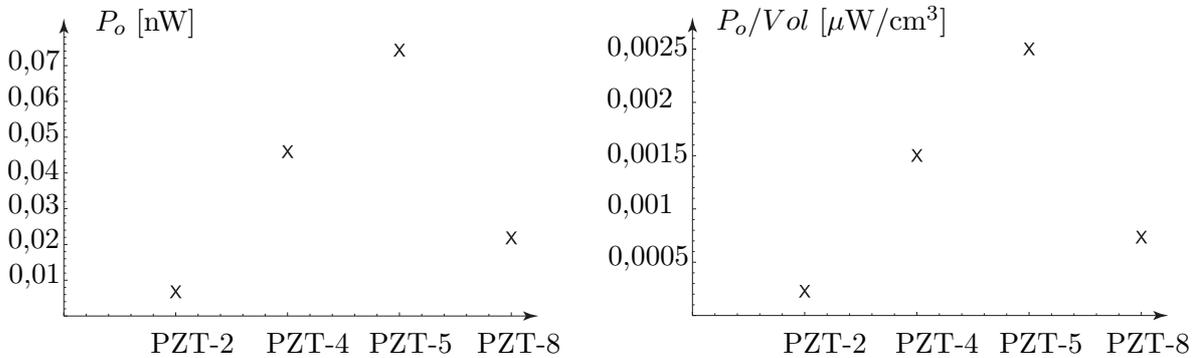


Figura 5.9: Potencia P_o (izquierda) y rendimiento P_o/Vol (derecha) para diferentes PZT.

Se ha de recalcar que no se han interpolado los datos ya que no se está variando un parámetro, solo se cambia el tipo de material. El volumen del piezoeléctrico no cambia por lo que las dos gráficas tienen la misma forma y de ellas se extrae la misma conclusión que con la intensidad, a mejores propiedades dieléctricas y de acoplamiento mayor producción de energía.

Por tanto se escogerá el PZT-5H ya que es el que tiene los coeficientes de acoplamiento y la permitividad mas elevada de los cuatro convirtiéndose en el que más energía produce.

5.5. Longitud del piezoeléctrico

La longitud a_x del piezoeléctrico variará dentro del rango $[0,15a \quad a]$ siendo estos dos extremos los resultados de la Sección 4.3 y 4.2 respectivamente. En la Figura 5.10 se representa la flecha máxima de la placa y la intensidad media.

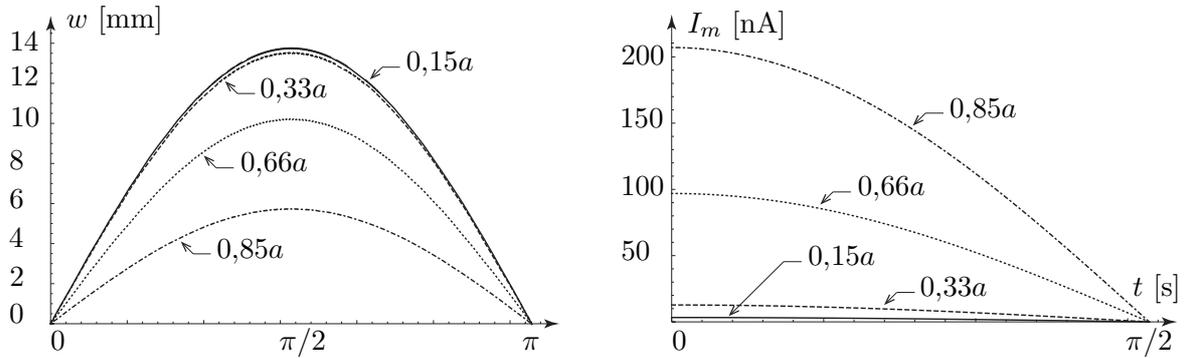


Figura 5.10: Flecha máxima $w(a, b/2)$ (izquierda) e intensidad I_m (derecha) para diferentes a_x .

Como era de esperar, conforme la longitud del piezoeléctrico aumenta la placa gana rigidez por lo que la flecha disminuye. La intensidad en cambio aumenta, no solo porque el piezoeléctrico crece en superficie sino también porque se va acercando al empotramiento donde se concentran las tensiones. Para visualizar la tendencia se representan a continuación la potencia y el rendimiento.

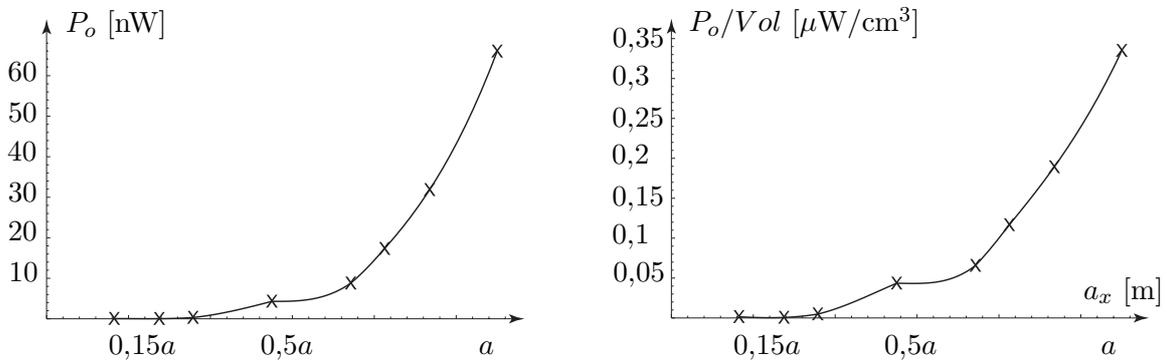


Figura 5.11: Potencia P_o (izquierda) y rendimiento P_o/Vol (derecha) para diferentes a_x .

Como se puede observar en la Figura 5.11, tanto potencia como rendimiento tiene una tendencia exponencial llegando al máximo en la capa completa de PZT.

Aun así esta solución requiere de crear un laminado completo y mirando en diferentes literaturas los colectores piezoeléctricos no se construyen de esta manera por lo que tiene que haber otra forma de conseguir la misma o más energía sin tener que utilizar un laminado piezoeléctrico.

En vez de quedarse en esta configuración se moverá el piezoeléctrico al empotramiento ya que es ahí donde las tensiones son más grandes y se analizará en la siguiente sección los efectos de variar la longitud del PZT en su nueva posición.

5.6. Cambio de posición del piezoeléctrico

Se repite el mismo estudio que en el apartado anterior pero colocando el piezoeléctrico en el empotramiento.

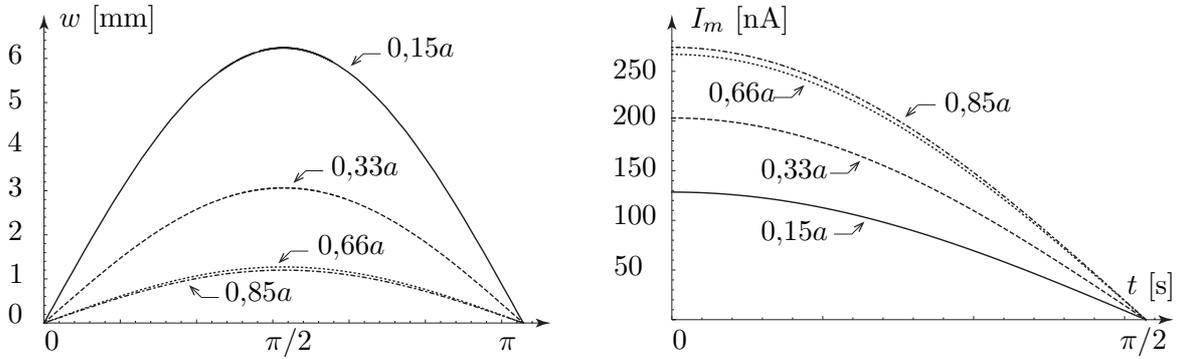


Figura 5.12: Flecha (izquierda) e intensidad (derecha) para diferentes a_x en el empotramiento.

Tanto la flecha como la intensidad de la Figura 5.12 se comportan igual que en el apartado anterior: aumentar la longitud del PZT disminuye la flecha y crece la intensidad por las mismas razones. No obstante la potencia y el rendimiento si que presentan grandes diferencias con respecto a la sección anterior.

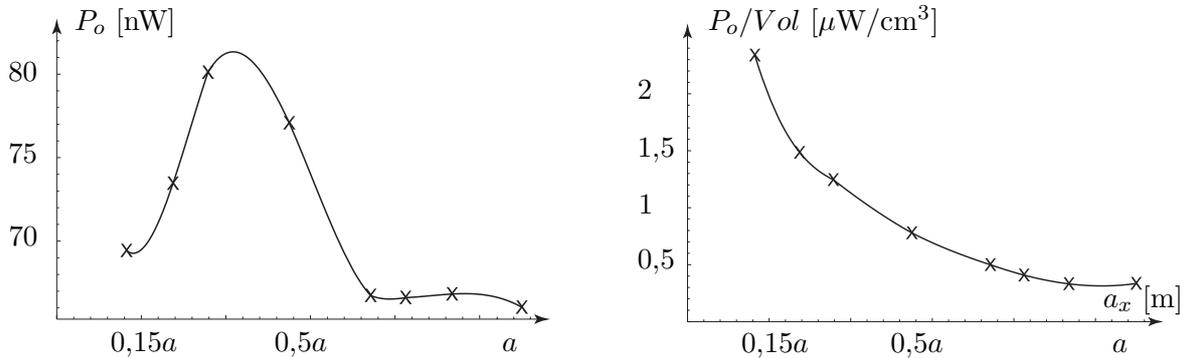


Figura 5.13: Potencia (izquierda) y rendimiento (derecha) con diferentes a_x en el empotramiento.

Como se puede observar en la Figura 5.13, la potencia alcanza un máximo en una longitud de PZT igual a un tercio de la longitud de la placa y a partir de ese punto empieza a disminuir hasta quedarse constante conforme se completa la capa piezoeléctrica.

Esto sucede porque aunque la intensidad siempre aumenta, la resistencia del piezoeléctrico decrece conforme su longitud aumenta por lo que al final la potencia crece al principio donde el aumento de intensidad supera a la disminución de resistencia y finalmente va en declive cuando sucede lo contrario.

Con el rendimiento no sucede lo mismo, este siempre decrece ya que el pico de potencia no compensa el constante aumento de volumen con lo que resulta en una tendencia negativa. El único aspecto negativo a tener en cuenta de esta solución es que los resultados analíticos se separan más de lo normal de los MEF, en el Capítulo 4 aparece un error del 10% entre analítico y MEF fruto de las funciones de prueba pero ahora aumenta hasta un 30%. Al poner el piezoeléctrico en el empotramiento, las tensiones de St. Venant y otros efectos 3D que la teoría analítica no tiene en cuenta cobran mucha importancia y por tanto el error aumenta.

Se escogerá $a_x = 0,33a$ y se colocará cerca del empotramiento para maximizar la energía.

5.7. Configuración óptima

Teniendo en cuenta todo lo establecido a lo largo de este estudio se procede a establecer la configuración óptima del dispositivo piezoeléctrico. En la Figura 5.14 se encuentra un esquema de este y en la Tabla 5.1 los valores numéricos de todos los parámetros constructivos.

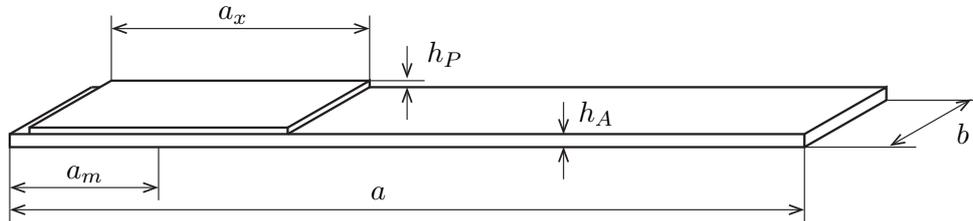


Figura 5.14: Esquema de la placa optimizada con sus parámetros constructivos.

Con esta configuración se consigue una potencia de $P_o = 6,13 [\mu W]$ y un rendimiento de $173,1 [\mu W/cm^3]$. Se ha incrementado la producción de energía en cinco órdenes de magnitud.

Descripción	Símbolo	Valor [mm]	Descripción	Símbolo	Valor [mm]
Longitud placa	a	60,5	Longitud PZT	a_x	19,6625
Anchura placa	b	7,2	Punto medio PZT	a_m	10,83125
Espesor placa	h_A	0,5	Espesor PZT	h_P	0,25

Tabla 5.1: Valores de los parámetros constructivos de la placa optimizada.

Para los cálculos del Capítulo 6, donde se modeliza la ola y se repite la Sección 4.3 con la nueva carga, se utilizará esta nueva configuración optimizada.

6

Modelización de las olas

En este capítulo se modelizarán las olas del mar a partir de ciertas hipótesis para conseguir una carga aplicada sobre la placa que se acerque lo más posible a la realidad. Lo primero a determinar es la configuración de la caja flotante y su respectiva masa, en la Figura 6.1 se observa un esquema de la caja flotante seccionada con sus diferentes componentes:

- **Placa de aluminio:** Soporte del piezoeléctrico.
- **Piezoeléctrico:** Encargado de producir la energía, esta hecho de PZT.
- **Baterías:** Batería ordinaria de Li-Mn –componente amarillo– con densidad energética de 150 [Wh/kg] para poder almacenar la energía.
- **Circuitería:** Cables y componentes eléctricos que recogen la energía del piezoeléctrico.
- **Caja flotante:** Paralelepípedo hueco de espuma de polietileno, un plástico aislante, que alberga los diferentes componentes y los protege del agua marina. En la Figura 6.1 se ha representado con un material transparente para visualizar mejor el interior.

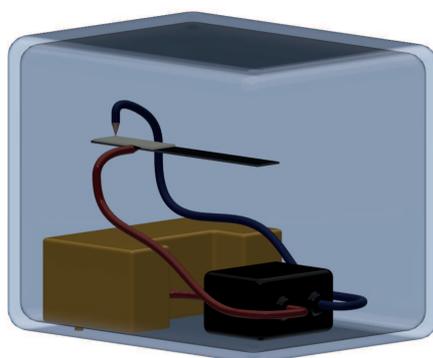


Figura 6.1: Configuración de la caja flotante.

En la Tabla 6.1 se recogen las dimensiones y masas aproximadas de los diferentes componentes que conforman el dispositivo.

Componente	Densidad [kg/m ³]	Volumen [m ³] × 10 ⁻⁸	Masa [kg]
Placa	2700	19,8	0,00053
Piezoeléctrico	7500	2,97	0,00055
Baterías	2000	251	0,05
Circuitería	35 [kg/km]	0,25 [m]	0,0088
Caja flotante	140	593	0,0083

Tabla 6.1: Tabla de masas para los diferentes componentes de la caja flotante.

Se tiene que considerar que la densidad de los cables se suele medir en [kg/km] en vez de con unidades de masa por volumen y que tanto las dimensiones y densidades de los componentes a excepción de la placa son aproximaciones que tienen sentido en la escala del conjunto pero que pueden variar en el caso de hacer un prototipo físico para el cual se necesitaría otro estudio más amplio y detallado que el realizado en este TFG.

Para comprobar que la caja flota en el agua se hará uso del principio de Arquímedes que enuncia que la fuerza de flotación es igual al peso del fluido desplazado por el cuerpo:

$$B = m_a g \quad (6.1)$$

Si esta ecuación se iguala al peso de la caja flotante y se reescribe la masa del agua como la densidad de esta por el producto de la superficie y la altura sumergida de la caja flotante se obtiene:

$$B = \rho_a l_c w_c h_s g = m g \rightarrow h_s = \frac{m}{\rho_a l_c w_c} \quad (6.2)$$

y substituyendo por los valores numéricos –tomando la densidad del agua como $\rho_a = 1000$ [kg/m³]–, se necesita una altura sumergida de $h_s = 12,66$ [mm], que es una quinta parte de la altura total de la caja flotante por lo que está puede flotar sin problemas.

Seguendo el esquema de la Figura 1.5 para olas de tipo **a**), se puede simplificar el movimiento de la caja flotante afectada por estas a:

$$z(t) = \frac{H_w}{2} \left[\sin \left(\frac{2\pi}{L_w} t \right) + 1 \right] \quad (6.3)$$

y derivando dos veces la Ec. (6.3) con respecto al tiempo se consigue la aceleración de la caja:

$$\ddot{z}(t) = -2 \frac{H_w \pi^2}{L_w^2} \sin \left(\frac{2\pi}{L_w} t \right) \quad (6.4)$$

Seguendo la 3ª Ley de Newton: $F = m \times \ddot{z}$, se puede calcular la fuerza que experimenta la caja flotante en función del tiempo. Considerando que la fuerza que recibe la caja se transmite sin pérdidas a la placa, ya se puede conseguir la carga temporal aplicada sobre la placa:

$$q(t) = \frac{-F}{a b} = 2 \frac{m}{a b} \frac{H_w \pi^2}{L_w^2} \sin \left(\frac{2\pi}{L_w} t \right) \quad (6.5)$$

que depende de las características de la placa y de las olas. Un último aspecto a comentar es que la fuerza real de la placa es la inercia al movimiento de la caja por lo que aparece un signo negativo; cuando la caja sube la ola, la placa experimenta una fuerza hacia abajo que se traduce en una carga positiva ya que el eje z positivo en placas va en esa dirección.

Para olas de tipo **b**), el movimiento de la caja flotante se puede describir como:

$$z(t) = H_w \left| \sin \left(\frac{\pi}{L_w} t \right) \right| \quad (6.6)$$

que presenta un problema matemático en sus derivadas debido al absoluto de la función seno. Este se resuelve rápidamente con la regla de la cadena de la siguiente forma:

$$\left| \sin \left(\frac{\pi}{L_w} t \right) \right| = \sqrt{\sin^2 \left(\frac{\pi}{L_w} t \right)}; \rightarrow \dot{z}(t) = \frac{\partial z}{\partial t} = H_w \frac{\partial}{\partial t} \sqrt{\sin^2 \left(\frac{\pi}{L_w} t \right)} = \frac{\partial \sqrt{u}}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial t} =$$

$$\dot{z}(t) = H_w \frac{\frac{2\pi}{L_w} \cos \left(\frac{\pi}{L_w} t \right) \sin \left(\frac{\pi}{L_w} t \right)}{2\sqrt{\sin^2 \left(\frac{\pi}{L_w} t \right)}} = \frac{H_w \pi \sin \left(\frac{2\pi}{L_w} t \right)}{2 L_w \left| \sin \left(\frac{\pi}{L_w} t \right) \right|} \quad (6.7)$$

Aplicando la regla de la cadena otra vez se consigue la aceleración y por tanto la carga es:

$$q(t) = - \frac{H_w \pi^2 m \left[\cos \left(\frac{4\pi}{L_w} t \right) + 8 \cos \left(\frac{2\pi}{L_w} t \right) \left| \sin \left(\frac{\pi}{L_w} t \right) \right|^2 - 1 \right]}{a b 8 L_w^2 \left| \sin \left(\frac{\pi}{L_w} t \right) \right|^3} \quad (6.8)$$

En [16], una página web para surfistas de Valencia, se encuentra que el viento en el litoral valenciano varia entre [3 9] [m/s] en días con condiciones atmosféricas normales, con lo que se deduce una altura y longitud de onda medias de $H_w = 0,5$ [m], $L_w = 3$ [s], que son los valores que se utilizarán en este TFG.

En la Figura 6.2 se representa el movimiento de la caja flotante y la carga que experimenta la placa para los dos tipos de olas. El desfase que se presencia está solo para poder diferenciarlos.

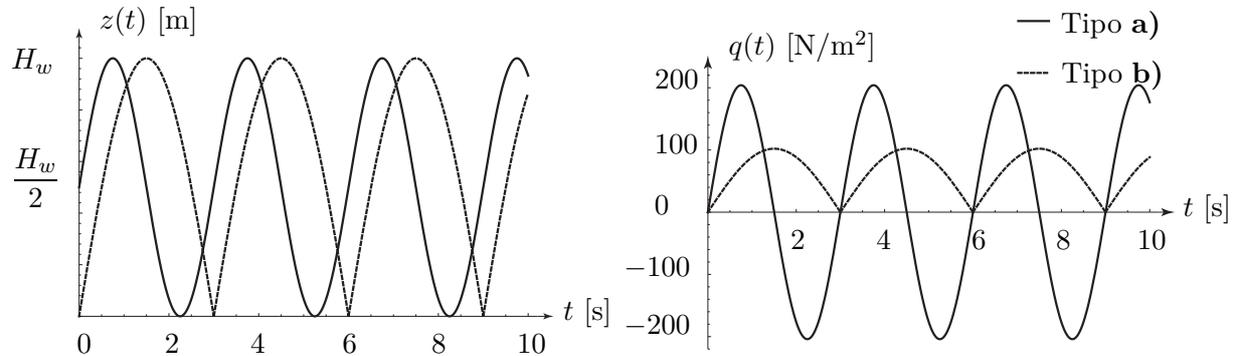


Figura 6.2: Movimiento de la caja flotante (izquierda) y carga aplicada a la placa (derecha).

6.1. Olas tipo a)

Repitiendo el estudio de la Sección 4.3 con la carga $q(t) = 188,5 \sin(2\pi t/3)$ se consigue la flecha y la intensidad en función del tiempo mostradas en la Figura 6.3.

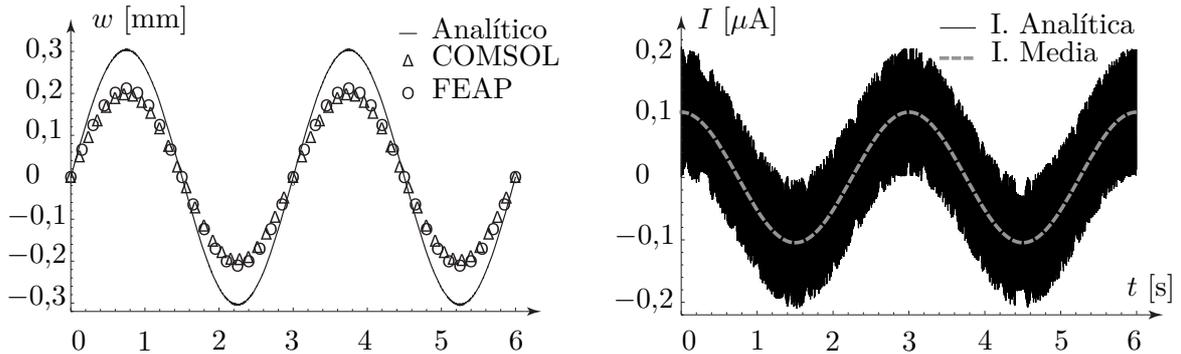


Figura 6.3: Flecha $w(a, b/2, t)$ (izquierda) e intensidad $I(t)$ (derecha) con olas **a)**.

Como era de esperar, la flecha e intensidad se reduce debido a que la carga aplicada es de menor magnitud que la arbitraria utilizada en el Capítulo 4 y aparece el error analítico comentado anteriormente, al no tener en cuenta los efectos 3D se sobrestima la flecha real. La potencia generada con este tipo de olas es de: $P_o = 9,63$ [nW] o $P_o = 34,7$ [μ Wh] y considerando el volumen del piezoeléctrico $P_o = 0,27$ [μ W/cm³].

6.2. Olas tipo b)

La carga de este tipo de olas se simplifica a $q(t) = 99,2 |\sin(\pi t/3)|$ y proporciona la flecha e intensidad mostradas en la Figura 6.4.

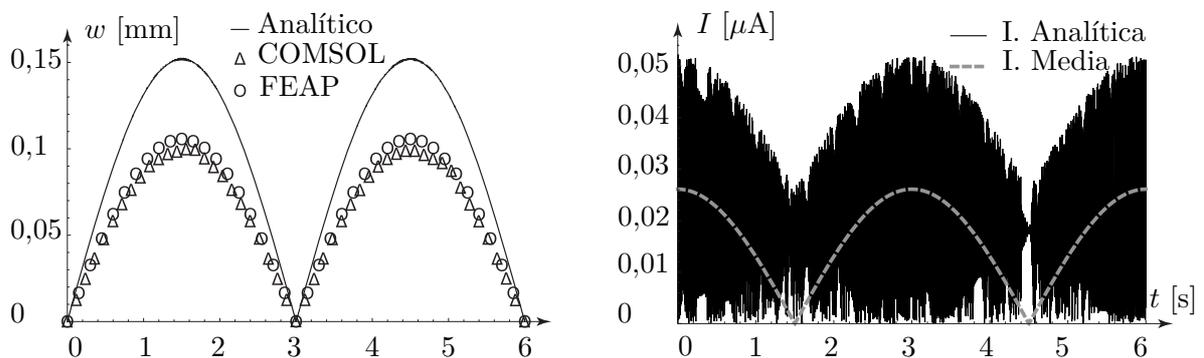


Figura 6.4: Flecha $w(a, b/2, t)$ (izquierda) e intensidad $I(t)$ (derecha) con olas **b)**.

Finalmente con este tipo de olas se consiguen unas potencias de: $P_o = 0,6$ [nW] o $P_o = 2,17$ [μ Wh] y considerando el volumen $P_o = 0,02$ [μ W/cm³]. Desde el punto de vista energético, interesan más olas de tipo **a)** ya que producen cargas mayores y por tanto potencias más grandes.

6.3. Posible aplicación del dispositivo

El dispositivo en cuestión está diseñado para producir energía con las olas del mar por lo que evidentemente se utilizará en aplicaciones marítimas. Además no genera grandes cantidades de energía ya que está dentro del ámbito de la captación de energía con lo que solo se podrá utilizar en pequeñas aplicaciones donde no se requiera una gran potencia.

Teniendo esto en mente, una aplicación perfecta sería la de alimentar sensores en boyas. Estas están colocadas lejos de cualquier suministro de energía convencional, por tanto si disponen de algún sensor de profundidad u otra índole necesitarán alguna fuente de energía. En la Figura 6.5 se pueden observar diferentes ejemplos de esta aplicación.



Figura 6.5: Diferentes boyas marítimas utilizando la caja flotante.

Este dispositivo presenta ciertas ventajas respecto a otras alternativas: tiene una autonomía igual a su vida útil que es mucho mayor que la de cualquier batería que se puede colocar en la boya, tamaño reducido e independencia de la boya; la caja no está integrada dentro de la boya sino flotando a su alrededor lo cual facilita su reemplazo en caso de ser necesario y el mal tiempo no perjudica a la caja, de hecho le es beneficioso ya que las olas se agitan más y se produce más energía –siempre y cuando estás no la rompan–.

Por último se comenta que esta aplicación es una particularización de la placa piezoeléctrica con las olas marítimas, se puede utilizar muchos otros tipos de vibraciones y movimientos oscilatorios para producir las deformaciones en el PZT que generan energía con lo que el estudio de este TFG no solo se limita a la energía undimotriz; con poco esfuerzo se puede adaptar el dispositivo a otros campos.

7.1. Presupuesto

En esta sección se muestra una estimación de los costes del TFG. En la Tabla 7.1 se muestra un desglose de todos los recursos económicos necesarios y sus respectivos precios para la realización de este estudio.

Cantidad	Concepto	Precio/ud.	Precio total
350	Número de horas totales de ingeniero	35,00 €	12250,00 €
40	Búsqueda y recopilación de información		
60	Formación en placas y piezoelectricidad		
80	Modelo analítico en Mathematica [®]		
55	Script de resolución analítica en Matlab [®]		
15	Geometría y mallado para MEF		
30	Cálculo computacional de los MEF		
20	Estudios paramétricos		
30	Depuración de errores		
20	Análisis de resultados		
1/4	Licencia de Mathematica [®] académica	1252,07	313,02 €
1/4	Licencia de Matlab [®] académica	413,22	103,31 €
1	Licencia de FEAP 8.6	1525,32	1525,32 €
1	Licencia de COMSOL Multiphysics [®]	1436,34	1436,34 €
1	Structural Mechanics Module	758,42	758,42 €
1	Licencia anual de Autocad [®] Fusion 360	503,00	503,00 €
1/4	Licencia Microsoft Office [®] académica	24,30	6,07 €
Coste total (sin IVA)			16895,48 €
IVA (21%)			3548,05 €
Total presupuestado			20443,53 €

Tabla 7.1: Presupuesto del TFG.

El presupuesto total del proyecto asciende a la cantidad de VEINTE MIL CUATROCIENTOS CUARENTA Y TRES CON CINCUENTA Y TRES EUROS.

7.2. Proyectos futuros

Este proyecto ha supuesto un esfuerzo en ampliar la teoría de placas estudiada en cuarto de grado en diferentes materias, siendo la más compleja los saltos de espesor, pero más aún ha sido un gran desafío unir toda esa teoría con la piezoelectricidad; no obstante este TFG ha conseguido establecer una buena base con la que abordar este tipo de problemas de forma analítica y ha sido verificada con la inclusión de dos programas MEF de diferente índole, investigación (FEAP) y comercial (COMSOL).

Además del aspecto analítico, FEAP ha requerido una curva de aprendizaje más pronunciada ya que al funcionar con la lectura de un script de comando en vez de utilizar una interfaz como la mayoría de programas comerciales, necesita de un estudio y familiarización previos de estos para poder manejar el programa con la soltura necesaria.

Esto no quiere decir que el proyecto haya llegado a un final establecido, se puede ampliar de diversas formas y también servir para nuevas ramificaciones relacionadas con placas piezoeléctricas. Las principales son:

- Se puede desarrollar la teoría para placas con diferente geometría como circular o trapezoidal y ampliar al caso donde no solo se aplica carga mecánica a la placa sino campo eléctrico o combinación de ambos.
- Realización de un análisis de tensiones para determinar tres aspectos importantes: criterio de rotura utilizando Von Mises, plasticidad y estudios de fatiga con los que saber el número máximo de ciclos que la placa soportará antes de romperse.
- Con el estudio de fatiga se puede establecer la vida útil del dispositivo con lo que determinar la viabilidad económica calculando la toda la energía que proporciona durante ese periodo de tiempo.
- Para establecer una modelización más precisa de las olas marítimas se puede emplear software como OPEN Foam y utilizar sus parámetros de altura y periodo en función del tiempo ya que estos cambian con las mareas conforme pasa el día.
- El estudio se puede escalar hasta salir del ámbito de cosechamiento de energía y entrar en el de energías renovables para servir de fuente de energía alternativa como la solar o eólica y no solo servir para aplicaciones de pequeños dispositivos que requieren micro amperios de intensidad.

7.3. Conclusiones

Este trabajo ha sido un gran avance personal en el dominio de la dinámica de placas y la piezoelectricidad además de conformar una buena base para el entendimiento de los diferentes MEF. Las ecuaciones y métodos desarrollados han sido un trabajo de investigación y aplicación de diversas teorías conocidas a un problema específico con el fin de conseguir una solución analítica que no se ha encontrado en otras fuentes.

Tras completar este proyecto se puede concluir:

- La resolución de placas planas requiere de la aplicación de las hipótesis de Kirchoff y su reducción a un problema de dos dimensiones ya que no existe solución exacta para el problema tridimensional. Además esta resolución analítica requiere del uso de funciones de prueba para discretizar la superficie de las placas ya que permiten transformar las ecuaciones diferenciales de derivadas parciales en un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias.
- Para el caso de vibraciones forzadas de baja frecuencia de excitación, la solución dinámica es muy parecida a la estática pero variando con la frecuencia de la carga aplicada.
- Los materiales piezoeléctricos presentan una rigidez mecánica y dieléctrica, no se pueden tratar como simples materiales ortotrópicos ya que se subestima la rigidez a flexión de estos resultando en resultados erróneos.
- La posición y dimensiones de los colectores piezoeléctricos se puede optimizar de forma analítica, aunque las soluciones no sean perfectamente exactas, para que produzcan la máxima cantidad de energía.
- Los resultados se han validado con dos MEF diferentes.
- Las aplicaciones de la placa estudiada se expanden más allá de su uso con olas marítimas, esta puede transformar cualquier vibración en energía por lo que otras localizaciones, como un puente ferroviario, también se pueden emplear para la producción de energía.

A

Integrales salto de espesor

Para resolver problemas de salto de espesor se definen dos vectores que contienen las funciones de prueba que satisfacen las C.C. de los bordes en la dirección x e y de forma independiente que contienen todas las funciones elegidas:

$$\boldsymbol{\theta}_x(x) = \{\theta_{x1}(x) \quad \theta_{x2}(x) \quad \dots \quad \theta_{xm}(x)\}^\top; \quad \boldsymbol{\theta}_y(y) = \{\theta_{y1}(y) \quad \theta_{y2}(y) \quad \dots \quad \theta_{yn}(y)\}^\top \quad (\text{A.1})$$

Con estos vectores, las integrales $\boldsymbol{\Lambda}_x$, $\boldsymbol{\Lambda}_y$ de la Ec. (2.41) se definen como integrales simples de la siguiente forma:

$$\boldsymbol{\Lambda}_x(k_1, k_2; 0) = \int_0^a \boldsymbol{\theta}_{x,k_1} \boldsymbol{\theta}_{x,k_2}^\top dx; \quad \boldsymbol{\Lambda}_y(k_1, k_2; 0) = \int_0^b \boldsymbol{\theta}_{y,k_1} \boldsymbol{\theta}_{y,k_2}^\top dy \quad (\text{A.2})$$

$$\boldsymbol{\Lambda}_x(k_1, k_2; 1) = \int_0^a \boldsymbol{\theta}_{x,k_1} \boldsymbol{\theta}_{x,k_2}^\top \zeta(x - a_m) dx$$

donde los subíndices $,k_1, ,k_2$ representan las derivadas de orden k_1, k_2 respectivamente.

El cálculo de las integrales incluyendo la función Heaviside extendida se puede expresar como:

$$\int_0^a \boldsymbol{\theta}_{x,k_1} \boldsymbol{\theta}_{x,k_2}^\top \zeta(x - a_m) dx = \int_{a_m - a_x/2}^{a_m + a_x/2} \boldsymbol{\theta}_{x,k_1} \boldsymbol{\theta}_{x,k_2}^\top dx$$

Por último faltan por definir las multiplicaciones entre $\boldsymbol{\Lambda}_x$, $\boldsymbol{\Lambda}_y$. Si se escogen m funciones en la dirección x y n en y , se consiguen un total de $m \cdot n$ funciones de prueba para la placa fruto de la combinación de las anteriores. Por tanto las matrices \boldsymbol{A}_g , \boldsymbol{M}_g tienen que ser de dimensión $m \cdot n \times m \cdot n$ y las dimensiones de $\boldsymbol{\Lambda}_x$, $\boldsymbol{\Lambda}_y$ son respectivamente $m \times m$, $n \times n$.

Para conseguir la dimensión de la matriz correcta $\boldsymbol{\Lambda}_x$, $\boldsymbol{\Lambda}_y$ se multiplican de la siguiente forma:

$$\left[\begin{array}{ccc} \Lambda_{x11} \begin{pmatrix} \Lambda_{y11} & \Lambda_{y12} & \cdots & \Lambda_{y1n} \\ \Lambda_{y21} & \Lambda_{y22} & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ \Lambda_{yn1} & \cdots & \cdots & \Lambda_{ynn} \end{pmatrix} & \Lambda_{x12} \begin{pmatrix} \Lambda_{y11} & \Lambda_{y12} & \cdots & \Lambda_{y1n} \\ \Lambda_{y21} & \Lambda_{y22} & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ \Lambda_{yn1} & \cdots & \cdots & \Lambda_{ynn} \end{pmatrix} & \cdots & \Lambda_{x1m} \begin{pmatrix} \Lambda_{y11} & \Lambda_{y12} & \cdots & \Lambda_{y1n} \\ \Lambda_{y21} & \Lambda_{y22} & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ \Lambda_{yn1} & \cdots & \cdots & \Lambda_{ynn} \end{pmatrix} \\ \Lambda_{x21} \begin{pmatrix} \Lambda_{y11} & \Lambda_{y12} & \cdots & \Lambda_{y1n} \\ \Lambda_{y21} & \Lambda_{y22} & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ \Lambda_{yn1} & \cdots & \cdots & \Lambda_{ynn} \end{pmatrix} & \Lambda_{x22} \begin{pmatrix} \Lambda_{y11} & \Lambda_{y12} & \cdots & \Lambda_{y1n} \\ \Lambda_{y21} & \Lambda_{y22} & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ \Lambda_{yn1} & \cdots & \cdots & \Lambda_{ynn} \end{pmatrix} & & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & & \\ \Lambda_{xm1} \begin{pmatrix} \Lambda_{y11} & \Lambda_{y12} & \cdots & \Lambda_{y1n} \\ \Lambda_{y21} & \Lambda_{y22} & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ \Lambda_{yn1} & \cdots & \cdots & \Lambda_{ynn} \end{pmatrix} & \cdots & & \Lambda_{xmm} \begin{pmatrix} \Lambda_{y11} & \Lambda_{y12} & \cdots & \Lambda_{y1n} \\ \Lambda_{y21} & \Lambda_{y22} & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ \Lambda_{yn1} & \cdots & \cdots & \Lambda_{ynn} \end{pmatrix} \end{array} \right]$$

Este método también se puede utilizar para calcular problemas sin salto de espesor, es fácil comprobar que:

$$\iint_A \nabla^2 \nabla^2 \boldsymbol{\theta} \boldsymbol{\theta}^\top dA = \Lambda_x(4, 0; 0) \Lambda_y(0, 0; 0) + 2\Lambda_x(2, 0; 0) \Lambda_y(2, 0; 0) + \Lambda_x(0, 0; 0) \Lambda_y(4, 0; 0)$$

con lo que la matriz \mathbf{A}_g también se puede obtener para problemas de espesor constante.

Para un valor de m funciones bajo no cambia mucho gastar un método o el otro pero si se quieren utilizar muchas funciones, separarlas en las direcciones x , y reduce en gran medida el coste computacional ya que no se realizan tantas integrales.

Por ejemplo, para $m = 5$ se consiguen un total de 25 funciones de prueba. Considerando un problema estático sin salto de espesor la multiplicación vectorial $\boldsymbol{\theta} \boldsymbol{\theta}^\top$ produce una matriz de dimensión 25×25 por lo que se deben realizar un total de 25^2 integrales. Con el presente método los productos $\boldsymbol{\theta}_x \boldsymbol{\theta}_x^\top$ proporcionan matrices de 5×5 por lo que en total se calculan $6 \cdot 5^2$ integrales.

Por tanto separando las funciones no hace falta calcular 475 integrales para conseguir la misma matriz \mathbf{A}_g , reduciendo así en gran medida el coste computacional como se había mencionado anteriormente.

B

Condensación Estática

La condensación estática es una técnica matemática para reducir los grados de libertad (g.d.l) de un sistema. En el caso de la teoría de placas se pasa de seis g.d.l a tres mediante las hipótesis de Kirchoff enunciadas en la Sección 2.1.

De la Ec. (2.64), el equilibrio eléctrico de una placa es: $\mathbf{E} = -\mathbf{h} \mathbf{S}$, por lo que la Ec (2.47) se puede expresar como:

$$\mathbf{T} = \underbrace{(\mathbf{c} + \mathbf{e}^\top \mathbf{h})}_{\mathbf{R}_p} \mathbf{S} \quad (\text{B.1})$$

donde \mathbf{R}_p es la matriz de rigidez piezoeléctrica que para cerámicas transversalmente isótropas y polarizadas en el eje z tiene la forma:

$$\mathbf{R}_p = \begin{bmatrix} c_{11} + \beta_{33} e_{31}^2 & c_{12} + \beta_{33} e_{31}^2 & c_{13} + \beta_{33} e_{31} e_{33} & 0 & 0 & 0 \\ c_{12} + \beta_{33} e_{31}^2 & c_{22} + \beta_{33} e_{31}^2 & c_{23} + \beta_{33} e_{31} e_{33} & 0 & 0 & 0 \\ c_{13} + \beta_{33} e_{31} e_{33} & c_{23} + \beta_{33} e_{31} e_{33} & c_{33} + \beta_{33} e_{33}^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c_{44} + \beta_{22} e_{24}^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & c_{55} + \beta_{11} e_{15}^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & c_{66} \end{bmatrix}$$

Las hipótesis de estado plano de tensión implica tres ecuaciones:

$$T_z = (c_{13} + \beta_{33} e_{31} e_{33}) S_x + (c_{23} + \beta_{33} e_{31} e_{33}) S_y + (c_{33} + \beta_{33} e_{33}^2) S_z = 0$$

$$T_{xz} = (c_{44} + \beta_{22} e_{24}^2) S_{xz} = 0; \quad T_{yz} = (c_{55} + \beta_{11} e_{15}^2) S_{yz} = 0$$

De las dos últimas ecuaciones no se puede conseguir ninguna relación nueva ya que confirman la hipótesis de Kirkoff $S_{xz} = S_{yz} = 0$. Pero de la primera se obtiene un valor no nulo de S_z :

$$S_z = -\frac{e_{31} e_{33} (S_x + S_y) + (c_{13} S_x + c_{23} S_y) \epsilon_{33}}{e_{33}^2 + c_{33} \epsilon_{33}}$$

Substituyendo este S_z en las tensiones T_x, T_y se consigue tras operar y simplificar:

$$T_x = \left(\bar{c}_{11} + \frac{\bar{e}_{31}}{\epsilon_{33}} \right) S_x + \left(\bar{c}_{12} + \frac{\bar{e}_{31}}{\epsilon_{33}} \right) S_y; \quad T_y = \left(\bar{c}_{21} + \frac{\bar{e}_{31}}{\epsilon_{33}} \right) S_x + \left(\bar{c}_{22} + \frac{\bar{e}_{31}}{\epsilon_{33}} \right) S_y$$

donde \bar{c}_{ij} y \bar{e}_{31} son los coeficientes reducidos que siguen las fórmulas:

$$\bar{c}_{ij} = \frac{c_{ij}(c_{33} + \beta_{33}e_{33}^2) - c_{i3}(c_{i3} + 2\beta_{33}e_{31}e_{33})}{c_{33} + \beta_{33}e_{33}^2}; \quad \bar{e}_{31} = \frac{c_{33}e_{31}^2}{c_{33} + \beta_{33}e_{33}^2} \quad (\text{B.2})$$

Con estos coeficientes ya se puede reescribir la Ec. (2.47) sin las tensiones fuera del plano que son las consideradas negligibles por las hipótesis de Kirchoff:

$$\begin{pmatrix} T_x \\ T_y \\ T_{xy} \end{pmatrix} = \bar{\mathbf{R}}_p \begin{pmatrix} S_x \\ S_y \\ S_{xy} \end{pmatrix} \quad (\text{B.3})$$

donde $\bar{\mathbf{R}}_p$ es la matriz de rigidez piezoeléctrica reducida que tiene dimensión 3×3 :

$$\bar{\mathbf{R}}_p = \begin{bmatrix} \bar{c}_{11} + \beta_{33}\bar{e}_{31}^2 & \bar{c}_{12} + \beta_{33}\bar{e}_{31}^2 & 0 \\ \bar{c}_{21} + \beta_{33}\bar{e}_{31}^2 & \bar{c}_{22} + \beta_{33}\bar{e}_{31}^2 & 0 \\ 0 & 0 & c_{66} \end{bmatrix}$$

Los términos de la matriz reducida anterior se pueden expresar con la fórmula:

$$\bar{R}_{pij} = R_{pij} - \frac{R_{pi3}}{R_{p33}} R_{pj3}$$

pero se debe tener en cuenta que para el último término de la diagonal:

$$\bar{R}_{p33} = R_{p66} - \frac{R_{p63}^2}{R_{p33}} = c_{66} - \frac{0^2}{c_{33} + \beta_{33}e_{33}^2}$$

En este apéndice se encuentran los valores de los coeficientes de los diferentes materiales utilizados en el TFG. El aluminio tiene las propiedades de la aleación 6061-T6, sus valores de los coeficientes piezoeléctricos son nulos ya que no es un material piezoeléctrico y su permitividad es tan baja que se puede considerar también nula.

Ctes.	PZT-2	PZT-4	PZT-5H	PZT-8	Aluminio	Unidades
s_{11}^D	11,6	12,3	16,5	11,5	14,3	$\times 10^{-12}$ [m ² /N]
s_{12}^D	-3,33	-4,05	-4,78	-3,7	-5	
s_{13}^D	-4,97	-5,31	-8,45	-4,8	-5	
s_{33}^D	14,8	15,5	20,7	13,5	14,3	
s_{44}^D	45	39	43,5	31,9	19,2	
s_{66}^D	29,9	32,8	42,6	30,4	19,2	
g_{31}	-15,06	-10,69	-9,1	-11	-	$\times 10^{-3}$ [Vm/N]
g_{33}	38,15	25,11	19,7	25,4	-	
g_{15}	50,19	37,98	26,7	28,9	-	
$\epsilon_{11}^T/\epsilon_0$	990	1475	3130	1290	-	[-]
$\epsilon_{33}^T/\epsilon_0$	450	1300	3400	1000	-	
$\epsilon_{11}^S/\epsilon_0$	504,1	762,5	1704,4	904,4	-	[-]
$\epsilon_{33}^S/\epsilon_0$	270	663,2	1433,6	561,6	-	
β_{11}^T	11,4	7,66	3,61	8,75	-	$\times 10^7$ [Nm ² /C ²]
β_{33}^T	25,1	8,69	3,32	11,3	-	
β_{11}^S	2,24	1,482	0,66	1,25	-	$\times 10^8$ [Nm ² /C ²]
β_{33}^S	4,18	1,703	0,79	2,01	-	
c_{11}^E	13,5	13,9	12,7	14,7	11,2	$\times 10^{10}$ [N/m ²]
c_{12}^E	6,78	7,78	8,02	8,11	6,05	
c_{13}^E	6,81	7,43	8,47	8,11	6,05	
c_{33}^E	11,3	11,54	11,7	13,2	11,2	
c_{44}^E	2,22	2,56	2,29	3,13	2,59	
c_{66}^E	3,44	3,05	2,35	3,29	2,59	
e_{31}	-1,82	-5,20	-6,62	-3,88	-	[N/V N]
e_{33}	9,05	15,08	23,2	13,9	-	
e_{15}	9,78	12,72	17,1	10,3	-	
d_{31}	-0,6	-1,23	-2,74	-0,97	-	$\times 10^{-10}$ [C/N]
d_{33}	1,52	2,89	5,93	2,25	-	
d_{15}	4,4	4,96	7,41	3,3	-	

Tabla C.1: Constantes piezoeléctricas de varios materiales.

D

Funciones de prueba placa empotrada

Las funciones de prueba se han obtenido de [17]. Estas funciones que contienen senos y cosenos hiperbólicos se tienen que emplear con cierto cuidado porque pueden alterar la solución de forma errónea. Las funciones están formuladas para una placa de lados a , b empotrada en $x = 0$.

Empotrado - Libre:

$$\mathbf{C.C:} X(0) = X_{,x}(0) = 0, X_{,xx}(a) = X_{,xxx}(a) = 0 \quad \mathbf{Raíces:} \cos \lambda_m \cosh \lambda_m = -1$$

$$X_{\lambda_m}(x) = \cosh\left(\frac{\lambda_m x}{a}\right) - \cos\left(\frac{\lambda_m x}{a}\right) - \frac{\cosh \lambda_m + \cos \lambda_m}{\sinh \lambda_m + \sin \lambda_m} \left[\sinh\left(\frac{\lambda_m x}{a}\right) - \sin\left(\frac{\lambda_m x}{a}\right) \right] \quad (\text{D.1})$$

Libre - Libre:

$$\mathbf{C.C:} Y_{,yy}(0) = Y_{,yyy}(0) = 0, Y_{,yy}(b) = Y_{,yyy}(b) = 0 \quad \mathbf{Raíces:} \cos \lambda_n \cosh \lambda_n = 1$$

$$Y_{\lambda_n}(y) = \cosh\left(\frac{\lambda_n y}{b}\right) + \cos\left(\frac{\lambda_n y}{b}\right) - \frac{\cosh \lambda_n - \cos \lambda_n}{\sinh \lambda_n - \sin \lambda_n} \left[\sinh\left(\frac{\lambda_n y}{b}\right) + \sin\left(\frac{\lambda_n y}{b}\right) \right] \quad (\text{D.2})$$

Estas funciones están pensadas para el cálculo de vibraciones de vigas pero se pueden aplicar para placas multiplicándose entre si: $\theta(x, y) = X(x)Y(y)$ y ya se tendría una función que cumple las condiciones geométricas de la placa. Las condiciones de fuerza no se cumplen totalmente por los términos de las derivadas cruzadas pero este requisito no es tan prescindible como el otro aunque alterará el resultado. En la Figura D.1 se dibujan los momentos de la placa, M_x debería ser nulo en $\xi = 1$ y aunque tiene ese valor en las esquinas de ese borde, aumenta un poco entre ellas. Un caso parecido pasa con M_y que debería ser cero en $\eta = 0, \eta = 1$ pero en realidad tiene una tendencia decreciente a lo largo de esos bordes. La línea negra discontinua representa el valor que deberían de tener en esos bordes.

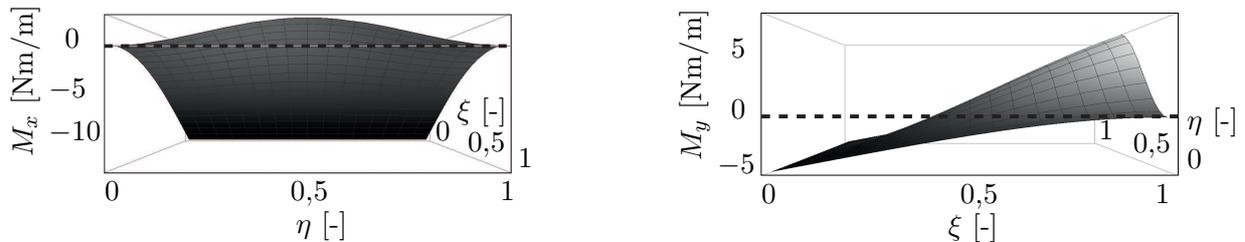


Figura D.1: Momentos M_x (izquierda) y M_y (derecha) de placa empotrada.

Con los cortantes y el momento torsor sucede lo mismo, aun así se compararán los resultados analíticos de estas funciones con los de MEF para comprobar si este error es aceptable o no.

Otro aspecto a tener en cuenta es que el uso de senos y cosenos hiperbólicos añade una peculiaridad. Como bien se sabe, estas funciones hiperbólicas no son como el seno y el coseno, su valor no está delimitado sino que a más grande es su argumento más valor tiene la función. Esto crea un problema en el cálculo de las raíces λ a partir de su respectiva ecuación: a mayor es la raíz calculada, más precisión necesita tener porque ligeras desviaciones en los decimales puede llevar a variaciones de resultados enormes.

Para entender esto mejor en la Figura D.2 se dibuja la segunda derivada de la función $X(x)$ para su decimotercera raíz.

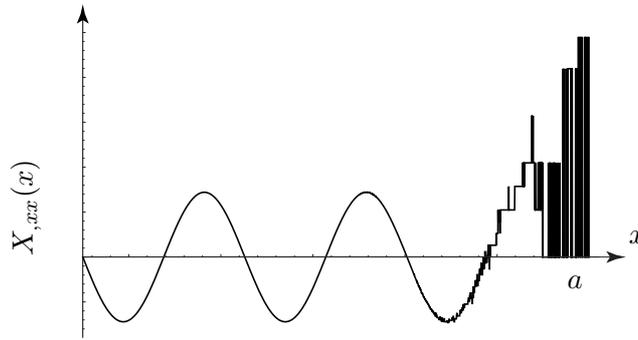


Figura D.2: Segunda derivada de la función $X(x)$.

La función se dispara y empieza a actuar de forma errática al acercarse al valor de $x = a$ donde debería de ser 0 por las condiciones de contorno. Con suficientes decimales este error se arreglaría pero la función de la Figura D.2 está evaluada con una precisión para λ_{13} de 1000 dígitos por lo que la capacidad computacional para conseguir más se dispararía al ser esa solo una de las primeras operaciones que luego hay que arrastrar durante todos los cálculos.

Por este motivo se ha observado a prueba y error que se consiguen mejores resultados eliminando los valores de λ_m altos que intentado utilizarlos con la precisión necesaria. Esta conclusión va en contra de lo normal en teoría de placas donde a más términos de las series mejores resultados se consiguen, en este caso añadir más puede llevar a resultados sin sentido por el comportamiento de las funciones de prueba.

Finalmente se plantean dos funciones más para el borde libre - libre que cumplen las condiciones de fuerza. Estas serían:

$$Y_0(y) = 1; \quad Y_1(y) = 1 - \frac{2y}{b} \quad (D.3)$$

y con ellas ya se consiguen resultados acertados para la flecha de la placa.

Hay que remarcar que sin estas dos funciones no se pueden conseguir resultados del caso estático y vibraciones forzadas porque las integrales del vector \mathbf{B}_g dan siempre 0 ya que las combinaciones de las dos funciones de las Ec. (D.1) y (D.2) son simétricas respecto al plano horizontal.

E

Método de Warburton

Este método, explicado más extensamente en [18], consiste en resolver la Ec. (2.17) sin carga aplicada utilizando el método de Rayleigh-Ritz para conseguir resultados aproximados –siempre un poco más grandes– de las frecuencias naturales. Siguiendo ese desarrollo se llega a la ecuación:

$$\lambda^2 = G_x^4 + G_y^4 \frac{a^4}{b^4} + \frac{2a^2}{b^2} (\nu H_x H_y + (1 - \nu) J_x J_y) \quad (\text{E.1})$$

donde G_x , G_y , H_x , H_y , J_x y J_y son coeficientes que dependen de las condiciones de contorno y del orden de las funciones que se utilizan para satisfacer dichas condiciones de contorno. En la Tabla E.1 se encuentran los valores de estos para la placa en voladizo con empotramiento en $x = 0$.

m	G_x	H_x	J_x
1	0,597	-0,087	0,471
2	1,494	1,347	3,284
3, 4, 5, ...	$m - \frac{1}{2}$	$\left(m - \frac{1}{2}\right)^2 \left[1 - \frac{2}{(m - 1/2)\pi}\right]$	$\left(m - \frac{1}{2}\right)^2 \left[1 + \frac{2}{(m - 1/2)\pi}\right]$

n	G_y	H_y	J_y
0	0	0	0
1	0	0	$12/\pi^2$
2	1,506	1,248	5,017
3, 4, 5, ...	$n - \frac{1}{2}$	$\left(n - \frac{1}{2}\right)^2 \left[1 - \frac{2}{(n - 1/2)\pi}\right]$	$\left(n - \frac{1}{2}\right)^2 \left[1 + \frac{6}{(n - 1/2)\pi}\right]$

Tabla E.1: Valores de los coeficientes de la Ec. (E.1) para placa en voladizo.

Una vez calculados los valores de λ^2 para tantos m , n que se quiera se consiguen las frecuencias naturales con la ecuación:

$$\lambda^2 = \frac{\rho a^4 (2\pi f)^2 12(1 - \nu^2)}{\pi^4 Y h_p^2} \quad (\text{E.2})$$

y los modos se consiguen con las funciones del Apéndice D con los respectivos órdenes de m y n que se utilizan para sacar una frecuencia natural.

E.1. Materiales ortotrópicos y laminados

El método de Warburton también se puede aplicar para placas de materiales ortotrópicos y laminados de diferentes materiales. Siguiendo el desarrollo de [19], la ecuación del parámetro λ^2 cambia a:

$$\lambda^2 = \frac{D_x}{H} G_x^4 \frac{b^2}{a^2} + \frac{D_y}{H} G_y^4 \frac{a^2}{b^2} + 2 \left[H_x H_y + 2 \frac{D_{xy}}{H} (J_x J_y - H_x H_y) \right] \quad (\text{E.3})$$

que ahora, como tiene sentido, depende de las rigideces en las diferentes direcciones de la placa.

La otra igualdad de λ^2 de donde se saca la frecuencia de vibración se convierte en:

$$\lambda^2 = \frac{\rho h_p (2\pi f)^2 a^2 b^2}{\pi^4 H} \quad (\text{E.4})$$

Para laminados se tienen que utilizar las mismas ecuaciones solo que utilizando las rigideces medias del laminado y en la Ec. (E.5) el término ρh_p se convierte en el sumatorio de las densidades de los diferentes materiales multiplicada por el espesor de sus respectivas capas.

Por ejemplo, para el caso del laminado piezoeléctrico de la Sección 4.2 la Ec. (E.5) se convierte en:

$$\lambda^2 = \frac{(\rho_A h_A + \rho_P h_P) (2\pi f)^2 a^2 b^2}{\pi^4 H_t} \quad (\text{E.5})$$

Este método presenta una forma muy simple de conseguir las frecuencias naturales y modos de vibración de cualquier placa con el único inconveniente de que proporciona resultados aproximados. No obstante, estos no se desvían mucho de los verdaderos por lo que es ideal para hacerse una idea de la magnitud de las frecuencias naturales y la forma de los modos.

Bibliografía

- [1] https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Sistema_HR_ALLISS.jpg.
- [2] <https://www.geograph.org.uk/photo/3151593>.
- [3] <https://global.jaxa.jp/projects/sat/alos3/>.
- [4] Jan Tichý, Jirí Erhart, Erwin Kittinger, and Jana Prívratká. *Fundamentals of Piezoelectric Sensorics: Mechanical, Dielectric and Thermodynamical Properties of Piezoelectric Materials*. 2010.
- [5] <https://www.hbm.com/es/6810/guia-de-seleccion-de-sensores-piezoelectricos/>.
- [6] J. L. Pérez Aparicio. *Teoría de Placas y Láminas en Ingeniería Aeroespacial*. 2019.
- [7] Jaime Gil Romero. Estudio Analítico y por Elementos Finitos de Impacto en Placas, 2016.
- [8] E. Ventsel, Theodor Krauthammer, and Erasmo Carrera. *ORTHOTROPIC AND STIFFENED PLATES*, volume 55, chapter 7, pages 197–199. Marcel Dekker, Inc, 01 2002.
- [9] E. Ventsel, Theodor Krauthammer, and Erasmo Carrera. *MULTILAYERED PLATES*, volume 55, chapter 7, pages 231–233. Marcel Dekker, Inc, 01 2002.
- [10] H. Takabatake, T. Imaizumi, and K. Okatomi. Simplified analysis of rectangular plates with stepped thickness. *Journal of Structural Engineering*, 121(1), 1995.
- [11] Roberto Palma Guerrero. Estudio Numérico de Cerámicas Piezoeléctricas con Defectos.
- [12] EFUNDA-EngineeringFundamentals [2006].
- [13] Zhi cheng Qiu, Xian min Zhang, Hong xin Wu, and Hong hua Zhang. Optimal placement and active vibration control for piezoelectric smart flexible cantilever plate. *Journal of Sound and Vibration*, 301(3):521 – 543, 2007.
- [14] P. Kumaravel R. Balusamy and N.G. Renganathan. Dielectric and electrical properties of lead zirconate titanate. *Der Pharma Chemica*, 2015.
- [15] José L. Pérez-Aparicio, Roberto Palma, and Robert L. Taylor. Multiphysics and thermodynamic formulations for equilibrium and non-equilibrium interactions: Non-linear finite elements applied to multi-coupled active materials. *Archives of Computational Methods in Engineering*, 23(3):535–583, Sep 2016.
- [16] <https://valenciasurf.com/tablas-de-oleaje>.
- [17] Rudolph Szilard. *Energy and Variational Methods for Solution of Lateral Deflections*, chapter 4, pages 181–236. John Wiley & Sons, Ltd, 2007.
- [18] G. B. Warburton. The vibration of rectangular plates. *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers*, 168(1):371–384, 1954.
- [19] S.M. Dickinson. The buckling and frequency of flexural vibration of rectangular isotropic and orthotropic plates using rayleigh’s method. *Journal of Sound and Vibration*, 61(1):1 – 8, 1978.