Universitat Politècnica de València

Departamento de Matemática Aplicada

Matrices no negativas y aplicaciones a sistemas singulares de control

TESIS DOCTORAL

Presentada por:

Francisco J. Ramírez Contrera

Dirigida por:

Néstor Thome Coppo

Alicia Herrero Debón

Enero de 2012

Resumen

Los sistemas dinámicos de control tienen múltiples aplicaciones en diferentes áreas dentro de la ciencia y la técnica como, por ejemplo, en teoría de circuitos, economía, química, estudio de poblaciones, etc. Es por esto que esta memoria se centra en el estudio de los sistemas singulares de control en tiempo discreto, atendiendo particularmente a la propiedad de no negatividad de los mismos. Para ello, primero se presenta un estudio matricial sobre la no negatividad de diferentes matrices y productos de matrices que involucran inversas generalizadas. Estos resultados algebraicos se aplican posteriormente al estudio de los sistemas singulares de control.

Para alcanzar los objetivos propuestos en esta tesis se divide el estudio del problema general en dos situaciones. La primera de ellas aborda el caso inicial correspondiente a matrices de índice 1 ya que este caso tiene características especiales respecto al caso general. Una

vez analizado en su totalidad esta primera situación, se procede a realizar la extensión al caso general de índice mayor que 1 teniendo en cuenta también aquellas situaciones que difieren del primer caso estudiado. Análogamente, se realiza el estudio de la no negatividad de sistemas singulares de control de índice mayor que 1 a partir del de índice 1 aplicando en ambos casos los resultados matriciales obtenidos previamente.

Así pues se introducen en primer lugar los conjuntos de matrices que involucran la no negatividad de una matriz, la de su inversa de grupo, la de su proyector de grupo o las diferentes combinaciones entre ellas. El análisis de estos conjuntos permite establecer diferentes relaciones de inclusión entre ellos así como caracterizaciones de los mismos. Como caso especial se estudian también las matrices $\{l\}$-periódicas de grupo, las cuales se definen como una extensión de las matrices involutivas de grupo.

A continuación se analiza la no negatividad de los sistemas singulares de control del tipo (E, A, B, C). Inicialmente se presenta un resultado que utiliza las matrices coeficientes para establecer una caracterización de la no negatividad del sistema de control. Posteriormente, el uso de los resultados matriciales obtenidos anteriormente permite encontrar otra caracterización que involucra sólo bloques de dichas matrices coeficientes (adecuadamente modificados) en lugar de las matrices completas. Este hecho contribuirá a un ahorro de operaciones a la hora de analizar dicha no negatividad.

Este estudio finaliza con la construcción de un algoritmo que permite obtener realimentaciones de estados que transforman el sistema original en un sistema que satisface las condiciones de regularidad y de no negatividad.

Con el objetivo de extender los resultados obtenidos para el caso de índice 1, se definen los conjuntos correspondientes para matrices de índice mayor que 1. En dichos conjuntos se combinan las condiciones de no negatividad de una matriz, de su inversa de Drazin y de su proyector de Drazin. En este caso, la principal herramienta algebraica que se utiliza es la descomposición core-nilpotente de una matriz cuadrada. Así se obtienen caracterizaciones de los mismos y relaciones de inclusión entre ellos y con los conjuntos definidos para índice 1.

De nuevo, como extensión de las matrices $\{l\}$-periódicas de grupo, se introducen las matrices $\{l\}$-periódicas de Drazin y se obtiene su caracterización.

Finalmente, se aplican los resultados obtenidos para estudiar la caracterización de la no negatividad de un sistema singular de control cuya matriz E tenga índice superior a 1.

Esta memoria se organiza en 3 capítulos. El Capítulo 1 contiene una introducción donde se detallan algunos antecedentes del tema y se introducen las notaciones necesarias. El Capítulo 2 está dedicado al estudio de las matrices de índice 1; en él se obtienen las caracterizaciones de los diferentes conjuntos, se analizan las matrices $\{l\}$-periódicas de grupo y se aplican los resultados matriciales anteriores a los sistemas singulares de control. En el Capítulo 3 se analiza el caso de índice mayor que 1 obteniendo caracterizaciones para los conjuntos correspondientes así como las relaciones de inclusión entre ellos. En este último capítulo se presentan también las matrices $\{l\}$-periódicas de Drazin y las caracterizaciones de la no negatividad de los sistemas de control con índice superior a 1. La tesis finaliza con un anexo en el que se enumeran las conclusiones obtenidas y se esbozan las líneas futuras de trabajo.

Resum

Els sistemes dinámics de control tenen múltiples aplicacions en diferents àrees dins de la ciència i la tècnica com, per eixemple, a teoria de circuits, economia, química, estudi de poblacions, etc. És per açò que esta memòria es centra en l'estudi dels sistemes singulars de control en temps discret, atenent particularment a la propietat de no negativitat dels mateixos. Per a això, primer es presenta un estudi matricial sobre la no negativitat de diferents matrius i productes de matrius que involucren inverses generalitzades. Aquests resultats algebraics s'apliquen posteriorment a l'estudi dels sistemes singulars de control.

Per a assolir els objectius proposats a aquesta tesi es divideix l'estudi del problema general en dues situacions. La primera d'elles aborda el cas inicial corresponent a matrius díndex 1 ja que aquest cas té característiques especials respecte al cas general. Una vegada

analitzat en la seua totalitat aquesta primera situació, es procedeix a fer l'extensió al cas general d'índex major que 1 tenint en compte també aquelles situaciones que difereixen del primer cas estudiat. Análogament, es realitza l'estudi de la no negativitat de sistemes singulars de control d'índex major que 1 a partir del d'índex 1 aplicant en ambdós casos els resultats matricials obtinguts prèviament.

Així doncs s'introdueixen en primer lloc els conjunts de matrius que involucren la no negativitat d'una matriu, la de la seua inversa de grup, la dels seu projector de grup o les diferents combinacions entre elles. L'anàlisi d'aquests conjunts permet establir diferents relacions d'inclusió entre ells així com caracterizacions dels mateixos. Com a cas especial s'estudien també les matrius $\{l\}$-periòdiques de grup, les cuals es defineixen com una extensió de les matrius involutives de grup.

A continuació s'analitza la no negativitat dels sistemes singulars de control del tipus (E, A, B, C). Inicialment es presenta un resultat que utilitza les matrius coeficients per establir una caracterització de la no negativitat del sistema de control. Posteriorment, l'ús dels resultats matricials obtinguts anteriorment permet trobar una altra caracterització que involucra només blocs de les esmentades matrius coeficients (adequadament modificades) en lloc de les matrius completes. Aquest fet contribuirà a l'estalvi d'operacions a l'hora de analitzar l'anomenada no negativitat.

Aquest estudi finalitza amb la construcció d'un algoritme que permet obtenir realimentacions d'estats que transformen el sistema original en un sistema que satisfa les condicions de regularitat i de no negativitat.

Amb l'objectiu d'extendre els resultats obtinguts per al cas d'índex

1, es defineixen els conjunts corresponents per a matrius d'índex major que 1. En dits conjunts es combinen les condicions de no negativitat d'una matriu, de la seua inversa de Drazin i del seu projector de Drazin. En aquest cas, la principal ferramenta algebraica que s'utilitza és la descomposició core-nilpotent d'una matriu quadrada. Així s'obtenen caracteritzacions dels mateixos i relacions d'inclusió entre ells i amb els conjunts definits per a índex 1.

De nou, com a extensió de les matrius $\{l\}$-periòdiques de grup, s'introdueixen les matrius $\{l\}$-periòdiques de Drazin i s'obté la seua caracterització.

Finalment, s'apliquen els resultats obtinguts per estudiar la caracterització de la no negativitat d'un sistema singular de control per al que la matriu E té índex superior a 1.

Aquesta memòria s'organitza en 3 capítols. El Capítol 1 conté una introducció on es detallen alguns antecedents del tema i s'introdueixen les notacions necessàries. El Capítol 2 està dedicat a l'estudi de les matrius d'índex 1; en ell s'obtenen les caracteritzacions dels diferents conjunts, s'analitzen les matrius $\{l\}$-periòdiques de grup i s'apliquen els resultats matricials anteriors als sistemes singulars de control. Al Capítol 3 s'analitza el cas d'índex major que 1 obtenint caracteritzacions per als conjunts corresponents així com les relacions d'inclusió entre ells. A aquest últim capítol es presenten també les matrius $\{l\}$-periòdiques de Drazin i les caracteritzacions de la no negativitat dels sistemes de control amb índex superior a 1. La tesi finalitza amb un annexe on s'enumeren les conclusions obtingudes i s'esbossen les línies futures de treball.

Summary

Control dynamical systems have many applications in different areas of science and technology, for example, in circuit theory, economics, chemistry, population studies, etc. That is why this thesis focuses on the study of singular control systems in discrete time, with particular attention to their nonnegativity property. To do this, firstly a matrix study about the nonnegativity of different matrices and products of matrices involving generalized inverses is presented. After that, these algebraic results are applied to the study of singular control systems.

In order to achieve the objectives proposed in this thesis, the study of the general problem is divided in two situations. The first one deals with the initial case corresponding to matrices of index 1. This case has special characteristics with respect to the general one. Once fully analyzed this first situation, the extension to the general case of

index greater than 1 is considered, taking into account also those situations that differ from the first case studied. Similarly, the study of the nonnegativity of singular control systems of index greater than 1 is implemented from the index 1 case. In both cases the matrix results previously obtained has been used.

Then, firstly several sets of matrices involving the nonnegativity of a matrix, of its group inverse, of its group projector or different combinations between them are introduced. The analysis of these sets allows to establish different inclusion relations between them as well as characterizations of them. As a special case, group $\{l\}$-periodic matrices are also studied, which are defined as an extension of the group involutive matrices.

Next, the nonnegativity of singular control systems of the form (E, A, B, C) is analyzed. Initially, a result that uses the coefficient matrices to establish a characterization of the nonnegativity of a control system is presented. Later, the matrix results obtained above allow to derive another characterization involving only blocks of the aforementioned coefficient matrices (suitably modified) instead of the complete matrices. This fact will contribute to saving operations when analyzing the nonnegativity of a control system.

This study concludes with the construction of an algorithm to obtain state feedbacks that transform the original system into a system satisfying the conditions of regularity and nonnegativity.

As an extension of the results obtained for the case of index 1, the corresponding sets for matrices with index greater than 1 are defined. In these sets, the conditions of nonnegativity of a matrix, its Drazin inverse and its Drazin projector are combined. In this case, the main algebraic tool used is the core-nilpotent decomposition of a square matrix. So, characterizations of these sets and inclusion relationships between them and the sets defined for index 1 are obtained.

Again, the Drazin $\{l\}$-periodic matrices are introduced and characterized as an extension of the group $\{l\}$-periodic matrices.

Finally, the obtained results are applied to study the characterization of the nonnegativity of a singular control system whose matrix E has index greater than 1.

This thesis is organized in 3 chapters. Chapter 1 provides an introduction that details some background of the topic and introduces the necessary notations. Chapter 2 is devoted to the study of matrices of index 1; here, characterizations of the different sets are obtained, the group $\{l\}$-periodic matrices are analyzed and those matrix results are applied to singular control systems. Chapter 3 considers the case of index greater than 1 obtaining characterizations for the corresponding sets and the inclusion relations between them. In this last chapter, Drazin $\{l\}$-periodic matrices and characterizations of the nonnegativity of singular control systems with index greater than 1 are also presented. The thesis concludes with an appendix that lists the conclusions and outlines future lines of work.

D. Néstor Thome Coppo, profesor titular de universidad del Departamento de Matemática Aplicada de la Universitat Politècnica de València; y Dª. Alicia Herrero Debón, profesora titular de universidad del Departemento de Matemática Aplicada de la Universitat Politècnica de València,

CERTIFICAN:

que la presente memoria *"Matrices no negativas y aplicaciones a sistemas singulares de control"*, ha sido realizada bajo su dirección por D. Francisco J. Ramírez Contrera, y constituye su tesis para optar al grado de Doctor por la Universitat Politècnica de València.

Para que conste, en cumplimiento de la legislación vigente, se ratifican en la autorización de la presentación de la referida tesis doctoral ante la Comisión de Doctorado de la Universitat Politècnica de València, firmando el presente certificado.

Valencia, 30 de enero de 2012.

Néstor Thome Coppo | Alicia Herrero Debón

Índice general

CAPÍTULO 1

Introducción y antecedentes

La teoría de control es una línea de investigación de gran interés por su amplio campo de aplicación a diferentes procesos de naturaleza física, química, biológica, económica, etc. En ella se utiliza el concepto de sistema como un conjunto de elementos físicos relacionados entre sí, de manera que la variación en alguna magnitud de uno puede influir en los demás. Los diferentes tipos de relaciones existentes entre los elementos (variables) del sistema y la representación matemática o modelo que se generan dan lugar a diferentes tipos de sistemas. De ahí tenemos los sistemas dinámicos, cuando las variables dependen del tiempo, los sistemas lineales, cuando las relaciones que existen entre las variables son lineales, etc. [10, 15].

Este trabajo se centra en el estudio de los llamados sistemas lineales generalizados de control o sistemas singulares, los cuales involucran, en su formulación matemática, matrices singulares. Concretamente, la propiedad de no negatividad de estos sistemas resulta de especial utilidad en su aplicación a problemas reales como por ejemplo en sistemas eléctricos, mecánicos, procesos químicos, etc. [10, 39].

Las matrices no negativas (matrices con entradas no negativas) juegan un importante papel en teoría de control. En particular, la no negatividad de las matrices coeficientes caracterizan la no negatividad de los sistemas discretos estándar.

Como se ha comentado, la representación matemática de los sistemas singulares de control involucran matrices singulares, por lo que un estudio previo de estas matrices y sus propiedades es necesario para su aplicación a la teoría de control. Las matrices singulares son aquellas matrices que no son invertibles bien por no ser cuadradas o bien por no ser de rango completo. Las distintas generalizaciones del concepto de matriz inversa ayudan a la resolución de los problemas que la involucran como por ejemplo el cálculo de soluciones aproximadas de un sistema incompatible, cuestiones relacionadas con las cadenas de Markov y por supuesto la resolución de ecuaciones diferenciales matriciales, ecuaciones en diferencias matriciales, sistemas singulares de control, redes eléctricas, entre otros [1, 10, 8, 11, 14]. De las distintas inversas generalizadas conocidas en la literatura, en este trabajo se hará uso principalmente de las conocidas como inversa de grupo e inversa de Drazin de una matriz debido a su aplicación en la resolución de los sistemas singulares generalizados antes mencionados.

1.1. Inversa de grupo e inversa de Drazin

A continuación se introducen algunos conceptos matriciales y se indicarán las notaciones que serán necesarias a lo largo del trabajo. Se denotará por $A \geq 0$ a una matriz A con entradas no negativas y por $\sigma(A)$ el espectro de una matriz cuadrada A. También será de utilidad el conjunto

$$\sigma(E, A) = \{\lambda \in \mathbb{C} / \, det(A - \lambda E) = 0\}$$

para dos matrices cuadradas $E, A \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Se definirá por

$$\mathbb{B}(a, r) = \{z \in \mathbb{C} / \mid z - a \mid < r\}$$

a la bola abierta con centro en $a \in \mathbb{C}$ y radio $r > 0$.

Definición 1.1 *Sea $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Se define la inversa de Drazin de A como la matriz A^D tal que:*

(a) $A^D A A^D = A^D$

(b) $A A^D = A^D A$

(c) $A^{k+1} A^D = A^k$*, para algún entero* $k > 0$*.*

El menor entero no negativo k que verifica la condición (c) de la definición anterior se llama índice de A y se denota por $\text{ind}(A)$. La inversa de Drazin existe siempre y se puede probar que es única [1, 11].

Observación 1.1 *Es claro que k también es el menor entero no negativo tal que $rg(A^k) = rg(A^{k+1})$ puesto que*

$$rg(A^k) = rg(A^{k+1} A^D) \leq rg(A^{k+1}) \leq rg(A^k)$$

.

Definición 1.2 *Sea $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Se define la inversa de grupo de A como la matriz $A^{\#}$ tal que:*

(a) $AA^{\#}A = A$

(b) $A^{\#}AA^{\#} = A^{\#}$

(c) $AA^{\#} = A^{\#}A$.

La inversa de grupo de una matriz cuadrada existe si y sólo si A y A^2 tienen el mismo rango, o equivalentemente si y sólo si A tiene índice 1 [1, 11]. En caso de que exista, la inversa de grupo es única.

A continuación se indica un resultado conocido [1] sobre matrices con inversa de grupo.

Lema 1.1 *Toda matriz $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ de rango $r > 0$ e índice 1 se puede representar como*

$$A = P \begin{bmatrix} C & O \\ O & O \end{bmatrix} P^{-1}$$

siendo $P \in \mathbb{R}^{n\times n}$ y $C \in \mathbb{R}^{r\times r}$ dos matrices invertibles. En este caso, su inversa de grupo viene dada por

$$A^{\#} = P \begin{bmatrix} C^{-1} & O \\ O & O \end{bmatrix} P^{-1}.$$

Observación 1.2 *Es posible notar que si ind(A) = 1 (es decir, $k = 1$) entonces la inversa de Drazin de la matriz A coincide con su inversa de grupo. En efecto, de la condición (c) de la definición de inversa de Drazin se tiene que, en este caso, $A^2A^D = A$ y aplicando (b) se obtiene $AA^DA = A$ que es la condición (a) de la definición de inversa de grupo. Las otras dos condiciones coinciden en ambas definiciones.*

El siguiente resultado extiende el dado en el Lema 1.1 para el caso de inversas de Drazin.

Lema 1.2 *Toda matriz* $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ *de rango* $r > 0$ *e índice* $k > 0$ *se puede representar como*

$$A = P \begin{bmatrix} C & O \\ O & N \end{bmatrix} P^{-1}$$

siendo $P \in \mathbb{R}^{n\times n}$ y $C \in \mathbb{R}^{r\times r}$ dos matrices invertibles y $N \in \mathbb{R}^{(n-r)\times(n-r)}$ una matriz nilpotente con índice de nilpotencia k. En este caso, su inversa de Drazin viene dada por

$$A^D = P \begin{bmatrix} C^{-1} & O \\ O & O \end{bmatrix} P^{-1}.$$

Tal representación de la matriz A se llama forma core-nilpotente de A.

Las inversas generalizadas de matrices dadas por bloques han sido estudiadas en [11]. Entre algunos de los resultados allí presentados se muestran dos teoremas que se refieren al cálculo de inversas de Drazin de matrices triangulares por bloques. En el siguiente se presenta el resultado correspondiente a una matriz triangular superior por bloques.

Teorema 1.1 (Teorema 7.7.1, [11]) *Sea*

$$M = \begin{bmatrix} A & B \\ O & C \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n\times n},$$

donde A *y* C *son matrices cuadradas con* $k = \operatorname{ind}(A)$ *y* $l = \operatorname{ind}(C)$. *Entonces*

$$M^D = \begin{bmatrix} A^D & X \\ O & C^D \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n\times n},$$

donde

$$
\begin{aligned}
X \;=\; & (A^D)^2\left[\sum_{i=0}^{l-1}(A^D)^iBC^i\right](I-CC^D)\\
& +(I-AA^D)\left[\sum_{i=0}^{k-1}A^iB(C^D)^i\right](C^D)^2 \qquad (1.1)\\
& -A^DBC^D
\end{aligned}
$$

siendo, por convención, $O^0 = I$*.*

Cuando se requiere el cálculo de la inversa de Drazin de una matriz triangular inferior por bloques se puede utilizar el siguiente resultado.

Teorema 1.2 (Corolario 7.7.1, [11]) *Sea*

$$L = \begin{bmatrix} C & O \\ B & A \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n\times n},$$

donde A *y* C *son matrices cuadradas con* $k = \mathrm{ind}(A)$ *y* $l = \mathrm{ind}(C)$*. Entonces*

$$L^D = \begin{bmatrix} C^D & O \\ X & A^D \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n\times n},$$

donde X *es la matriz dada in (1.1).*

S.K. Jain conjuntamente con otros investigadores como E.K. Kwak, V.K. Goel y J. Tynan, entre otros, caracterizaron la no negatividad de cierto tipo de matrices que involucran inversas generalizadas: inversa de Moore-Penrose, inversa de grupo e inversa de Drazin [31, 32, 33]. Uno de sus resultados que será de gran utilidad es el siguiente.

Teorema 1.3 (Teorema 1, [33]) *Sea* $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ *una matriz no negativa de rango* r*. Entonces las siguientes condiciones son equivalentes:*

(a) $AA^{\#} \geq O$.

(b) Existe una matriz de permutación $P \in \mathbb{R}^{n\times n}$ *que permite escribir la matriz* A *como*

$$PAP^t = \begin{bmatrix} J & JM & O & O \\ O & O & O & O \\ NJ & NJM & O & O \\ O & O & O & O \end{bmatrix} \tag{1.2}$$

donde los bloques diagonales son cuadrados, $J = XTY$, $T \in \mathbb{R}^{r\times r}$ *es una matriz invertible no negativa, y además* $X = diag(x_1, x_2, \ldots, x_r)$, $Y = diag(y_1^t, y_2^t, \ldots, y_r^t)$, x_i *e* y_i *son vectores unitarios positivos tales que* $y_i^t x_i = 1$, *y* M, N *son matrices no negativas de tamaño apropiado.*

A partir de este resultado, se pueden deducir algunas propiedades útiles acerca de la matrices A y J definidas en (1.2), las cuales se presentan en el siguiente lema. Por una cuestión de completitud se incluirá su demostración.

Lema 1.3 *Sea* $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ *una matriz no negativa de rango* $r < n$ *tal que* $AA^{\#} \geq O$ *y sea* J *definida como en (1.2). Entonces se cumplen las siguientes condiciones:*

(a) $\mathrm{rg}(J) = r$.

(b) $\mathrm{ind}(J) \in \{0, 1\}$ *y* $J^{\#} = XT^{-1}Y$.

(c) $\sigma(A) = \sigma(J) \cup \{0\}$.

Demostración.

(a) Puesto que $J = XTY$ y $T \in \mathbb{R}^{r\times r}$ se tiene que $\mathrm{rg}(J) \leq \mathrm{rg}(T) = r$. Además, el hecho de que X tenga rango completo por columnas e Y tenga rango completo por filas implica que existen dos matrices X^- e Y^- tales que $X^-X = I$ e $YY^- = I$ [1]. Entonces $T = X^-JY^-$ y $r = \mathrm{rg}(T) \leq \mathrm{rg}(J)$. Por lo tanto, $\mathrm{rg}(J) = r$.

(b) Es conocido que $\mathrm{rg}(J^2) \leq \mathrm{rg}(J) = r$. Como $J = XTY$ e $YX = I$, se tiene que $J^2 = XT^2Y$. Premultiplicando ambos miembros de la igualdad por Y y postmultiplicando por X se llega a $T^2 = YJ^2X$. Luego, $r = \mathrm{rg}(T^2) \leq \mathrm{rg}(J^2)$ por ser T una matriz invertible. Consecuentemente, $\mathrm{ind}(J) \in \{0, 1\}$. Además, para mostrar que $J^\# = XT^{-1}Y$ es necesario comprobar las tres condiciones de la definición de inversa de grupo:

(I) $JJ^\#J = XTYXT^{-1}YXTY = XTY = J$.

(II) $J^\#JJ^\# = XT^{-1}YXTYXT^{-1}Y = XT^{-1}Y = J^\#$.

(III) $JJ^\# = XTYXT^{-1}Y = XY = XT^{-1}YXTY = J^\#J$.

(c) El espectro de A está dado por los valores de λ que satisfacen la ecuación:

$$\det(A - \lambda I) = \det\left(\begin{bmatrix} J-\lambda I & JM & O & O \\ O & -\lambda I & O & O \\ NJ & NJM & -\lambda I & O \\ O & O & O & -\lambda I \end{bmatrix}\right) = 0.$$

Desarrollando por columnas este último determinante se tiene que $\lambda = 0$ o que

$$\det\left(\begin{bmatrix} J - \lambda I & JM \\ O & -\lambda I \end{bmatrix}\right) = 0,$$

lo cual es equivalente a $\lambda = 0$ o $\det(J - \lambda I) = 0$. Entonces, $\sigma(A) = \sigma(J) \cup \{0\}$ puesto que $r < n$. ■

Un concepto importante que se utilizará a lo largo de toda la memoria es el de proyector de grupo y proyector de Drazin.

Definición 1.3 *Sea $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ una matriz de índice 1. Se llama proyector de grupo de A a la matriz $AA^{\#}$, o equivalentemente a $A^{\#}A$.*

Definición 1.4 *Sea $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ una matriz de índice $k \geq 1$. Se llama proyector de Drazin de A a la matriz AA^D, o equivalentemente a $A^D A$.*

Es fácil de ver que ambas matrices son idempotentes:

$$(AA^{\#})^2 = (AA^{\#})(AA^{\#}) = (AA^{\#}A)A^{\#} = AA^{\#}$$

y

$$(AA^D)^2 = (AA^D)(AA^D) = A(A^D AA^D) = AA^D,$$

con lo que ambos productos son proyectores oblicuos. Más aún, la matriz $AA^{\#}$ es un proyector sobre el rango de A paralelamente al espacio nulo de A; y la matriz AA^D es un proyector sobre el rango de A^k paralelamente al espacio nulo de A^k siendo k el índice de A. Cuando además, los productos sean matrices simétricas, los correspondientes proyectores serán ortogonales.

1.2. Sistemas singulares de control

Los sistemas singulares lineales de control se pueden representar mediante un modelo espacio-estado que relaciona las tres variables del sistema: entradas, estados y salidas. Así, en tiempo discreto, un sistema invariante con n estados, m entradas y p salidas viene dado por

$$\left\{\begin{array}{rcl} Ex(k+1) & = & Ax(k)+Bu(k) \\ y(k) & = & Cx(k)+Du(k) \end{array}\right. \tag{1.3}$$

donde E, A, B, C y D son matrices de coeficientes reales de tamaños $n \times n$, $n \times n$, $n \times m$, $p \times n$ y $p \times m$, respectivamente. Si $E = I$, el sistema se llama estándar, y por extensión todos aquellos en que la matriz E sea invertible ya que, en este caso, el sistema se puede escribir como

$$\left\{\begin{array}{rcl} x(k+1) & = & E^{-1}Ax(k)+E^{-1}Bu(k) \\ y(k) & = & Cx(k)+Du(k). \end{array}\right.$$

Climent, Herranz y Perea han desarrollado aplicaciones de los sistemas estándares como puede encontrarse en [12, 13]. Si la matriz E es no invertible, entonces el sistema se llama singular. Algunas propiedades de este tipo de sistemas se pueden encontrar en [15, 18, 35].

Por otro lado, el sistema (1.3) se llama no negativo si produce estados y salidas no negativos a partir de condiciones iniciales y controles no negativos, más concretamente se expresa en la siguiente definición.

Definición 1.5 *Un sistema singular de control del tipo (1.3) se llama no negativo si cumple que para $x(0) \geq 0$ y $u(k) \geq 0$ para todo $k \geq 1$, se tiene que $x(k) \geq 0$ e $y(k) \geq 0$, para todo $k \geq 1$.*

Así mismo, el sistema (1.3) se dice que es estable si el conjunto $\sigma(E, A)$ anteriormente introducido está contenido en la bola abierta $\mathbb{B}(0,1)$ centrada en el origen y de radio 1.

En términos coloquiales, un sistema dinámico es no negativo si sus variables de estado son no negativas en todos los instantes de tiempo. En las últimas dos décadas, estos sistemas han cobrado gran atención apareciendo en una amplia variedad de áreas aplicadas tales como biología, química y sociología [10, 29, 37, 39, 42].

A lo largo de este trabajo se considerará el siguiente sistema de control singular en tiempo discreto

$$\left\{ \begin{array}{rcl} Ex(k+1) & = & Ax(k) + Bu(k) \\ y(k) & = & Cx(k) \end{array} \right. \tag{1.4}$$

donde $E, A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $B \in \mathbb{R}^{n\times m}$, $C \in \mathbb{R}^{p\times n}$, $x(k) \in \mathbb{R}^n$, $y(k) \in \mathbb{R}^p$ con $\mathrm{rg}(E) = r < n$. Este sistema es denotado por (E, A, B, C) y por (E, A, C) cuando la matriz B sea nula, es decir cuando el sistema carezca de controles.

Si el sistema (1.4) satisface la condición de regularidad, la cual consiste en que existe un escalar α tal que $det(\alpha E+A) \neq 0$, entonces el sistema tiene solucion única. Para obtener dicha solución se transforma el sistema (1.4) en el sistema equivalente $(\widehat{E},\widehat{A},\widehat{B},\widehat{C})$ siendo

$$\widehat{E} = (\alpha E + A)^{-1}E,\ \widehat{A} = (\alpha E + A)^{-1}A,\ \widehat{B} = (\alpha E + A)^{-1}B,\ \widehat{C} = C.$$

Las matrices de este último sistema satisfacen la condición $\widehat{A} = I - \alpha\widehat{E}$ puesto que

$$\alpha\widehat{E} + \widehat{A} = \alpha(\alpha E + A)^{-1}E + (\alpha E + A)^{-1}A = (\alpha E + A)^{-1}(\alpha E + A) = I$$

y la solución del sistema (E, A, B, C) está dada por $y(k) = \widehat{C}x(k)$ donde

$$\begin{aligned} x(k) &= (\widehat{E}^D\widehat{A})^k\widehat{E}^D\widehat{E}x(0) + \sum_{i=0}^{k-1} \widehat{E}^D(\widehat{E}^D\widehat{A})^{(k-i-1)}\widehat{B}u(i) - \\ & \quad -(I - \widehat{E}^D\widehat{E})\sum_{i=0}^{q-1} (\widehat{E}\widehat{A}^D)^i\widehat{A}^D\widehat{B}u(k+i), \end{aligned} \tag{1.5}$$

con $q = ind(\widehat{E})$ y con $x(0)$ una condición inicial admisible [35]. El conjunto de condiciones iniciales admisibles viene dado por

$$\aleph_0 = Im \begin{bmatrix} \widehat{E}^D\widehat{E} & H_0 & \dots & H_{q-1} \end{bmatrix}$$

donde $H_i = (I - \widehat{E}^D\widehat{E})(\widehat{E}\widehat{A}^D)^i\widehat{A}^D, i = 0, \dots, q-1$. Tanto la solución como el conjunto de condiciones iniciales admisibles son independientes del escalar α elegido [11].

Cuando las salidas coinciden con los estados el sistema se denota por (E, A, B). En [8] se establece el siguiente resultado.

Proposición 1.1 *Sea (E, A, B) un sistema singular en tiempo discreto tal que $E^DE \geq O$, $EA = AE$ y $\mathrm{Ker}(E) \cap \mathrm{Ker}(A) = \{0\}$. El sistema (E, A, B) es no negativo si y sólo si se cumplen las siguientes condiciones:*

(a) $E^DA \geq O$,

(b) $E^DB \geq O$,

(c) $-(I - EE^D)(EA^D)^iA^DB \geq O$, *para cada* $i = 0, 1, \dots, \mathrm{ind}(E) - 1$.

Por otro lado, si el sistema (1.4) no satisface la condición de regularidad, no se puede garantizar la existencia de solución del mismo.

En este caso es usual la consideración de realimentaciones de estado, es decir, la utilización de controles de la forma

$$u(k) = Fx(k)$$

con F una matriz de tamaño $m \times n$. Se pretende que el nuevo sistema obtenido, que tendrá la forma

$$\left\{ \begin{array}{rcl} Ex(k+1) & = & (A+BF)x(k) \\ y(k) & = & Cx(k) \end{array} \right. ,$$

satisfaga la condición de regularidad y, dependiendo del problema que se esté resolviendo, alguna propiedad adicional para cierta/s matriz/ces F que se deberá/n encontrar (o caracterizar). Un estudio de este tipo de sistemas se puede encontrar en [21].

La regularización de sistemas singulares a través de realimentaciones de estado fue estudiada por diferentes autores [38, 40]. En general, estos trabajos se han basado en la descomposición de Weierstrass-Kronecker del sistema, la cual usa dos matrices P y Q que pueden cambiar la información de las matrices originales. En algunas aplicaciones la evolución del sistema está representada en la forma espacio-estado y es usual buscar realimentaciones que lo transformen en un nuevo sistema que cumpla algunas propiedades específicas tales como la estabilidad, la simetría, etc. [14].

1.3. Descripción general del contenido de la memoria

Dentro de la matemática aplicada, en un sin número de problemas de la teoría de control se utilizan matrices inversas generalizadas como una herramienta esencial, tanto en la obtención de los propios resultados, como también en sus demostraciones. Es por este motivo que en esta memoria se estudian las matrices inversas generalizadas, y su aplicación a algunos problemas de la teoría de control. Concretamente, la propiedad de no negatividad será la analizada en una variedad de situaciones a las que dan origen diferentes inversas generalizadas.

La memoria se organiza como sigue.

En este primer capítulo se ha realizado una introducción al tema indicando algunos resultados conocidos que serán necesarios en el resto de la memoria. También se incluye parte de la notación que será utilizada a lo largo de la misma.

En esta tesis doctoral se usarán diferentes factorizaciones basadas en el reordenamiento de la información que aparece en las matrices originales. Algunas matrices inversas generalizadas han sido utilizadas para caracterizar las propiedades de no negatividad de los sistemas singulares [6, 8]. Se pretende mejorar estos resultados y realizar extensiones a situaciones de mayor alcance que las conocidas.

Concretamente, en el segundo capítulo, se caracterizan todas las matrices tales que ciertos productos que involucren inversas de grupo sean no negativos, entre ellos el proyector de grupo. Como aplicación, a partir de estos resultados, se analizarán los sistemas singulares de control caracterizando su no negatividad en todos estos casos.

En el tercer capítulo, se analizarán las situaciones que involucren las matrices inversas de Drazin extendiendo así los resultados matriciales presentados en el segundo capítulo. Del mismo modo también se presentarán las aplicaciones correspondientes a sistemas de control singulares que involucren matrices de índices arbitrarios.

La memoria finaliza con una serie de conclusiones generales sobre las aportaciones que se consiguen en la misma. Por otra parte, se incluyen posibles líneas futuras que se han ido vislumbrando a lo largo de la investigación efectuada.

CAPÍTULO 2

Matrices de índice 1 y aplicaciones a teoría de control

2.1. Introducción

Una clase importante dentro de las matrices inversas generalizadas corresponde a la determinada por las inversas de grupo, que se pueden calcular para las matrices de índice a lo sumo 1. Obtener caracterizaciones de las diferentes propiedades de estas matrices resulta de importancia para los diferentes campos de aplicación, como por ejemplo, en cadenas de Markov, ecuaciones diferenciales, etc. Concretamente, la propiedad de no negatividad y su caracterización es lo que se estudiará en este capítulo para su posterior aplicación a la teoría de control.

Por otro lado, una parte importante de los trabajos de ingeniería concierne al establecimiento de modelos matemáticos. Debido a su capacidad para describir simultáneamente la dinámica y las relaciones algebraicas entre las variables de estados, un sistema singular permite dar una descripción matemática a muchos sistemas dinamicos prácticos, los cuales no admiten un modelo de representación estándar del tipo espacio-estado tradicional. Recientemente, la no negatividad de un sistema singular ha sido aplicada en diferentes campos.

En este capítulo se presentan las condiciones que se deben cumplir para que un sistema lineal singular de control de índice 1 sea no negativo. Para ello, se verá que la no negatividad de esta clase de sistemas está caracterizada mediante una partición en bloque de las matrices originales.

Como se ha comentado, la no negatividad de las matrices involucradas juega un importante papel en teoría de control. En particular, la no negatividad de las matrices coeficientes caracteriza los sistemas discretos estándar no negativos. Sin embargo, ésto no es el caso para los sistemas singulares porque esta caracterización está hecha por medio de productos de las inversas de Drazin de las matrices de estados. Los sistemas singulares aparecen cuando se modelizan fenómenos físicos y sistemas interconectados tales como los sistemas eléctricos, mecánicos y procesos químicos [10, 15, 39]. Este tipo de sistemas han recibido un especial interés en los últimos años por diferentes autores [2, 6, 9].

Por otra parte, diferentes aspectos de la no negatividad de las inversas generalizadas han sido estudiados en la litaratura durante los últimos años. Un resultado clásico de A. Berman y R. J. Plemmons da una condición necesaria y suficiente para que una matriz cuadrada sea monótona de grupo. Estas matrices tienen inversa de grupo no negativa y su caracterización involucra el octante positivo y el espacio nulo de la matriz. Específicamente, si $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $\mathrm{Ker}(A)$ denota su espacio nulo e $\mathrm{Im}(A)$ su espacio imagen entonces A es monótona de grupo si y sólo si

$$Ax \in \mathbb{R}^n_+ + \mathrm{Ker}(A), \quad x \in \mathrm{Im}(A) \qquad \Longrightarrow \qquad x \geq 0.$$

Un resultado similar es válido para las matrices monótonas de Drazin como se verá más adelante [3].

En la década de los sesenta, Flor [19] presentó algunos resultados especiales para la no negatividad de matrices idempotentes (es decir, para matrices cuadradas que coinciden con su cuadrado). Más tarde, usando estos resultados, Jain, Goel, Kwak y Tynan obtuvieron algunas caracterizaciones para matrices no negativas que involucran inversas de grupo no negativas, inversas de Drazin no negativas o proyectores de grupo o de Drazin no negativos [31, 32, 33]. Algunos de estos resultados han sido aplicados para caracterizar $A^m = A$ con $m > 2$ para una matriz no negativa A [32]. Además, algunos resultados sobre inversas de Drazin de suma y diferencias de matrices idempotentes también son presentados en [16].

El principal objetivo de este capítulo es dar caracterizaciones de matrices cuadradas A que satisfagan diferentes condiciones. A tal efecto, se introducen los conjuntos que cubren todas las posibilidades en las que interviene la inversa de grupo y se presentan relaciones entre ellos. Estos conjuntos se definen a partir de las siguientes desigualdades:

(I) $A^{\#} \geq O$,

(II) $AA^{\#} \geq O$,

(III) $A \geq O$ y $A^{\#} \geq O$,

(IV) $A \geq O$ y $AA^{\#} \geq O$,

(V) $A^{\#} \geq O$ y $AA^{\#} \geq O$.

En una primera etapa, todos estos conjuntos son caracterizados. Posteriormente, se presentan algunos resultados que caracterizan a las matrices $\{l\}$-periódicas de grupo. Finalmente, los sistemas singulares de control son analizados desde el punto de vista de su no negatividad. Los resultados matriciales anteriormente obtenidos son aplicados para la caracterización de tales sistemas.

2.2. Matrices de índice 1

En esta sección se introducen diferentes conjuntos usando la inversa de grupo de una matriz, así como la caracterización de cada uno de ellos.

El conjunto de las matrices idempotentes no negativas es definido como

$$\mathcal{PI} = \{A \in \mathbb{R}^{n\times n} : \ A \geq O, \ A^2 = A\}.$$

Las matrices monótonas de grupo son consideradas en el siguiente conjunto:

$$\mathcal{PG} = \{A \in \mathbb{R}^{n\times n} : \ A^{\#} \geq O\}$$

y agregando la no negatividad de la matriz A se tienen las matrices monótonas de grupo no negativas:

$$\mathcal{PPG} = \{A \in \mathbb{R}^{n\times n} : \ A \geq O, \ A^{\#} \geq O\}.$$

Por otro lado, cuando se consideran los proyectores de grupo, se tienen las matrices no negativas con proyectores de grupo no negativo:

$$\mathcal{PPGP} = \{A \in \mathbb{R}^{n\times n} : \ A \geq O, \ AA^{\#} \geq O\}$$

y las matrices con proyectores de grupo no negativo propiamente dichas

$$\mathcal{PGP} = \{A \in \mathbb{R}^{n\times n} : \ AA^{\#} \geq O\}$$

cuando no se requiere la no negatividad de A.

Es posible notar que estos conjuntos cubren todas las posibilidades combinando $A \geq O$, $A^{\#} \geq O$ y $AA^{\#} \geq O$. De hecho, no es necesario considerar los conjuntos $\{A \in \mathbb{R}^{n\times n} : \mathrm{ind}(A) = 1, \, A \geq O\}$ y $\{A \in \mathbb{R}^{n\times n} : A^{\#} \geq O, \, AA^{\#} \geq O\}$ porque hay correspondencias biyectivas entre cada uno de ellos y los conjuntos $\mathcal{PG}$ and $\mathcal{PPGP}$, respectivamente.

Por una parte, la función

$$\phi : \{A \in \mathbb{R}^{n\times n} : \mathrm{ind}(A) = 1, \, A \geq O\} \rightarrow \mathcal{PG}$$

dada por $\phi(A) = A^{\#}$ define una de las mencionadas correspondencias. En efecto,

- ϕ está bien definida pues si A es una matriz no negativa de índice 1 entonces $\phi(A) = A^{\#} \in \mathcal{PG}$ puesto que $(A^{\#})^{\#} = A$.

- ϕ es inyectiva pues si $A_1, A_2 \in \mathbb{R}^{n\times n}$ son dos matrices no negativas de índice 1 tales que $\phi(A_1) = \phi(A_2)$ entonces $A_1^{\#} = A_2^{\#}$.

Tomando inversa de grupo en ambos miembros y usando que $(A^{\#})^{\#} = A$ se tiene que $A_1 = A_2$.

- ϕ es sobreyectiva pues si $B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ es una matriz de índice 1 con inversa de grupo no negativa entonces existe $A = B^{\#}$ que cumple $A \geq O$ siendo A también de índice 1. Es evidente que $\phi(A) = (B^{\#})^{\#} = B$.

Por otro lado, la función

$$\varphi : \{A \in \mathbb{R}^{n\times n} : A^{\#} \geq O,\ AA^{\#} \geq O\} \to \mathcal{PPGP}$$

dada por $\varphi(A) = A^{\#}$ define la otra correspondencia. En efecto,

- φ está bien definida pues si A es una matriz de índice 1 con inversa de grupo y proyector de grupo no negativos entonces $\varphi(A) = A^{\#} \in \mathcal{PPGP}$ puesto que $A^{\#}(A^{\#})^{\#} = A^{\#}A = AA^{\#} \geq O$.

- φ es inyectiva pues si $A_1, A_2 \in \mathbb{R}^{n\times n}$ son dos matrices de índice 1 con inversa de grupo y proyector de grupo no negativos tales que $\phi(A_1) = \phi(A_2)$ entonces $A_1^{\#} = A_2^{\#}$. Como antes, tomando inversa de grupo en ambos miembros y usando que $(A^{\#})^{\#} = A$ se tiene que $A_1 = A_2$.

- φ es sobreyectiva pues si $B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ es una matriz de índice 1 no negativa con proyector de grupo no negativo entonces existe $A = B^{\#}$ que cumple $A^{\#} = B \geq O$ (siendo $A^{\#}$ también de índice 1) y $AA^{\#} = B^{\#}(B^{\#})^{\#} = B^{\#}B = BB^{\#} \geq O$. De nuevo, es evidente que $\phi(A) = A^{\#} = (B^{\#})^{\#} = B$.

También es posible establecer las siguientes relaciones entre los conjuntos anteriormente definidos.

Lema 2.1 *Los conjuntos definidos anteriormente satisfacen las siguientes relaciones:*

(a) $\mathcal{PI} \subset \mathcal{PPG}$.

(b) $\mathcal{PPG} \subset \mathcal{PPGP} \subset \mathcal{PGP}$.

(c) $\mathcal{PPG} = \mathcal{PPGP} \cap \mathcal{PG} \subset \mathcal{PG}$.

Las inclusiones son todas estrictas.

Demostración. La condición $A^2 = A$ para una matriz cuadrada no negativa A implica que $A^3 = A$ y entonces $A = A^{\#} \geq O$. Así, $\mathcal{PI} \subseteq \mathcal{PPG}$. Además, la inclusión es estricta porque, por ejemplo, la matriz no negativa

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

satisface que $A = A^{\#} \geq O$ pero $A^2 \neq A$. Luego, el apartado (a) ha sido probado.

Las restantes inclusiones se pueden obtener fácilmente a partir de las definiciones de los conjuntos y de las propiedades de la inversa de grupo. Por lo tanto, se debe centrar la atención en comprobar que las inclusiones son estrictas. Para ello, se presentan los siguientes contraejemplos.

Primero, se comprueba que $\mathcal{PPG} \subset \mathcal{PPGP}$. Por ejemplo, la matriz no negativa

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

satisface que

$$A^{\#} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \ngeq O \qquad \text{y} \qquad AA^{\#} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \geq O,$$

es decir, $A \in \mathcal{PPGP}$ pero $A \notin \mathcal{PPG}$.

Luego, se prueba que $\mathcal{PPGP} \subset \mathcal{PGP}$ y $\mathcal{PPG} \subset \mathcal{PG}$. Por ejemplo, la matriz

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

no es no negativa y cumple que

$$A^{\#} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \end{bmatrix} \geq O \qquad \text{y} \qquad AA^{\#} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \geq O,$$

luego $A \in \mathcal{PGP}$ pero $A \notin \mathcal{PPGP}$ y $A \in \mathcal{PG}$ pero $A \notin \mathcal{PPG}$.

Con esto, los apartados (b) y (c) quedan demostrados y se finaliza la demostración. ■

Ahora se estudiarán con más detalle los conjuntos definidos anteriormente. Se supondrá que todas las matrices involucradas tienen inversa de grupo. Se comienza con un resultado dado parcialmente en [20]. Aquí se incluye además la implicación recíproca.

Lema 2.2 *Sea $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ una matriz con $rg(A) = r > 0$. Luego $A \in \mathcal{PI}$ si y sólo si existe una matriz de permutación $P \in \mathbb{R}^{n\times n}$ tal* *que*

$$A = P \begin{bmatrix} XY & XYM & O \\ O & O & O \\ NXY & NXYM & O \end{bmatrix} P^T \qquad (2.1)$$

donde los bloques diagonales son cuadrados, M, N son matrices arbitrarias no negativas de tamaños apropiados y $X = \mathrm{diag}(x_1, \ldots, x_r)$, $Y = \mathrm{diag}(y_1^T, \ldots, y_r^T)$ siendo x_i e y_j vectores columnas positivos con $i, j \in \{1, \ldots, r\}$ tales que $YX = I$.

Demostración. Si $A \in \mathcal{PI}$ entonces la prueba de que A tiene la forma indicada en el enunciado está dada en la demostración del Lema 2.1 de [20]. Recíprocamente, puesto que P, M, N, X y Y son matrices no negativas, de (2.1) se tiene que $A \geq O$. También de (2.1) y haciendo una multiplicación en bloques se tiene $A^2 = A$. En efecto,

$$\begin{aligned} A^2 &= P \begin{bmatrix} XY & XYM & O \\ O & O & O \\ NXY & NXYM & O \end{bmatrix} \begin{bmatrix} XY & XYM & O \\ O & O & O \\ NXY & NXYM & O \end{bmatrix} P^T \\ &= P \begin{bmatrix} XYXY & XYXYM & O \\ O & O & O \\ NXYXY & NXYXYM & O \end{bmatrix} P^T \\ &= P \begin{bmatrix} XY & XYM & O \\ O & O & O \\ NXY & NXYM & O \end{bmatrix} P^T \\ &= A. \end{aligned}$$

Por lo tanto, el lema ha sido probado. ■

Un caso particular importante se presenta en el siguiente corolario.

Corolario 2.1 *Sea* $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ *una matriz con* $\mathrm{rg}(A) = r > 0$*. Entonces* $A \in \mathcal{PGP}$ *si y sólo si existe una matriz de permutación* $P \in \mathbb{R}^{n\times n}$ *tal que*

$$AA^{\#} = P \begin{bmatrix} XY & XYM & O \\ O & O & O \\ NXY & NXYM & O \end{bmatrix} P^T \tag{2.2}$$

donde los bloques diagonales son cuadrados, M*,* N *son matrices arbitrarias no negativas de tamaños apropiados y* $X = \mathrm{diag}(x_1, \ldots, x_r)$*,* $Y = \mathrm{diag}(y_1^T, \ldots, y_r^T)$ *siendo* x_i *e* y_j *vectores columnas positivos con* $i, j \in \{1, \ldots, r\}$ *tales que* $YX = I$*.*

Demostración. La inversa de grupo $A^{\#}$ de una matriz A satisface que

$$(AA^{\#})^2 = AA^{\#}AA^{\#} = AA^{\#},$$

esto es, $AA^{\#}$ es una matriz idempotente. Luego, el resultado se obtiene directamente aplicando el Lema 2.2 a la matriz $AA^{\#}$ cuando se asume que es no negativa, puesto que $\mathrm{rg}(AA^{\#}) = \mathrm{rg}(A)$. ■

Teniendo en cuenta que para una matriz dada $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ se tiene que $AA^{\#}$ es idempotente, la no negatividad de $AA^{\#}$ induce una factorización de dicho producto. Esta factorización permite establecer el siguiente resultado sobre la matriz A.

Teorema 2.1 *Sea* $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ *una matriz con* $\mathrm{rg}(A) = r > 0$*. Entonces* $A \in \mathcal{PGP}$ *si y sólo si existe una matriz de permutación* $P \in \mathbb{R}^{n\times n}$ *tal* *que*

$$A = P \begin{bmatrix} XTY & XTYM & O \\ O & O & O \\ NXTY & NXTYM & O \end{bmatrix} P^T \tag{2.3}$$

donde los bloques diagonales son cuadrados, M, N son matrices arbitrarias no negativas de tamaños apropiados, $T \in \mathbb{R}^{r\times r}$ es una matriz invertible y $X = \mathrm{diag}(x_1, \ldots, x_r)$, $Y = \mathrm{diag}(y_1^T, \ldots, y_r^T)$ siendo x_i e y_j vectores columnas positivos con $i, j \in \{1, \ldots, r\}$ tales que $YX = I$.

En este caso,

$$A^{\#} = P \begin{bmatrix} XT^{-1}Y & XT^{-1}YM & O \\ O & O & O \\ NXT^{-1}Y & NXT^{-1}YM & O \end{bmatrix} P^T. \tag{2.4}$$

Demostración. Se presentan dos demostraciones de este resultado siendo común a las dos la primera parte de ambas. En efecto, del Corolario 2.1 se puede escribir $AA^{\#}$ de la siguiente forma

$$AA^{\#} = P \begin{bmatrix} XY & XYM & O \\ O & O & O \\ NXY & NXYM & O \end{bmatrix} P^T \tag{2.5}$$

siendo P, M, N, X e Y como antes. Ahora se particiona la matriz A en una matriz por bloques de tamaños adecuados como en (2.5) de la siguiente manera

$$A = P \begin{bmatrix} A_1 & A_2 & A_3 \\ A_4 & A_5 & A_6 \\ A_7 & A_8 & A_9 \end{bmatrix} P^T. \tag{2.6}$$

Aplicando la propiedad $(AA^{\#})A = A$ y teniendo en cuenta la forma de la matriz $AA^{\#}$ y la partición de A se tiene

$$\begin{bmatrix} XY & XYM & O \\ O & O & O \\ NXY & NXYM & O \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_1 & A_2 & A_3 \\ A_4 & A_5 & A_6 \\ A_7 & A_8 & A_9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_1 & A_2 & A_3 \\ A_4 & A_5 & A_6 \\ A_7 & A_8 & A_9 \end{bmatrix}$$

con lo que, al realizar el producto por bloques se obtiene que las matrices A_4, A_5, y A_6 son matrices nulas, y que $A_i = XYA_i$, y $A_{i+6} = NA_i$ para $i = 1, 2, 3$. Puesto que $A^{\#}A = AA^{\#}$, la misma propiedad $A(A^{\#}A) = A$ permite escribir

$$\begin{bmatrix} A_1 & A_2 & A_3 \\ O & O & O \\ NA_1 & NA_2 & NA_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} XY & XYM & O \\ O & O & O \\ NXY & NXYM & O \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_1 & A_2 & A_3 \\ O & O & O \\ NA_1 & NA_2 & NA_3 \end{bmatrix}$$

lo que conduce a $A_3 = O$, $A_1 = A_1XY$ y $A_2 = A_1M$. Luego, la matriz A queda como

$$A = P \begin{bmatrix} A_1 & A_1M & O \\ O & O & O \\ NA_1 & NA_1M & O \end{bmatrix} P^T,$$

donde $A_1 = XYA_1 = A_1XY$.

Primera forma:

Ahora se deben analizar estas dos últimas condiciones para demostrar que $A_1 = XTY$ con T una matriz invertible. Para ello se particiona la matriz A_1 como

$$A_1 = \begin{bmatrix} A_{11} & \dots & A_{1r} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{r1} & \dots & A_{rr} \end{bmatrix} \tag{2.7}$$

de acuerdo a la partición del producto XY. Sustituyendo (2.7) en la condición $A_1 = XYA_1$ y realizando el producto esta expresión se reduce a

$$x_i y_i^T A_{ij} = A_{ij} \tag{2.8}$$

con $i, j \in \{1, \ldots, r\}$. Puesto que $\mathrm{rg}(A_1) = r$, para cada $i \in \{1, \ldots, r\}$, existe $j \in \{1, \ldots, r\}$ tal que $A_{ij} \neq O$. En este caso, $\mathrm{rg}(A_{ij}) = 1$ porque

$$0 < \mathrm{rg}(A_{ij}) = \mathrm{rg}(x_i y_i^T A_{ij}) \leq \mathrm{rg}(x_i) = 1.$$

Así, $A_{ij} = u_{ij} v_{ij}^T$ siendo u_{ij} y v_{ij} vectores no nulos. Entonces, la condición (2.8) se puede escribir como $x_i y_i^T u_{ij} v_{ij}^T = u_{ij} v_{ij}^T$ y postmultiplicando por v_{ij} se tiene $u_{ij} = \alpha_{ij} x_i$ donde $\alpha_{ij} = y_i^T u_{ij}$. Luego, $A_{ij} = x_i \tilde{v}_{ij}^T$ siendo $\tilde{v}_{ij} = \alpha_{ij} v_{ij}$. Nótese que si existe algún $j \in \{1, \ldots, r\}$ tal que $A_{ij} = O$ entonces también se puede escribir $A_{ij} = x_i \tilde{v}_{ij}^T$ siendo $\tilde{v}_{ij} = 0$. Entonces,

$$A_1 = \begin{bmatrix} x_1 \tilde{v}_{11}^T & \ldots & x_1 \tilde{v}_{1r}^T \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ x_r \tilde{v}_{r1}^T & \ldots & x_r \tilde{v}_{rr}^T \end{bmatrix}. \tag{2.9}$$

Además, sustituyendo (2.9) en la igualdad $A_1 = A_1 XY$ y realizando los productos se obtiene que esta condición es equivalente a $x_i \tilde{v}_{ij}^T x_j y_j^T = x_i \tilde{v}_{ij}^T$. Puesto que $y_i^T x_i = 1$, la última condición lleva a $\tilde{v}_{ij} = \beta_{ij} y_j$ siendo $\beta_{ij} = \tilde{v}_{ij}^T x_j$. Finalmente,

$$A_1 = \begin{bmatrix} x_1 \beta_{11} y_1^T & \ldots & x_1 \beta_{1r} y_r^T \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ x_r \beta_{r1} y_1^T & \ldots & x_r \beta_{rr} y_r^T \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} x_1 & & \\ & \ddots & \\ & & x_r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta_{11} & \dots & \beta_{1r} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \beta_{r1} & \dots & \beta_{rr} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1^T & & \\ & \ddots & \\ & & y_r^T \end{bmatrix}$$

donde $T = \begin{bmatrix} \beta_{ij} \end{bmatrix}$ y $r = \mathrm{rg}(A_1) = \mathrm{rg}(XTY) \leq \mathrm{rg}(T) \leq r$ porque $T \in \mathbb{R}^{r\times r}$.

La implicación recíproca es evidente.

Segunda forma: Otra manera de demostrar que $A_1 = XTY$ con T una matriz invertible es considerar las condiciones $A_1 = XYA_1 = A_1XY$ para escribir

$$A_1 = XTY$$

definiendo $T = YA_1X$. Se observa así que $\mathrm{rg}(A_1) = \mathrm{rg}(A) = r$. Así,

$$r = \mathrm{rg}(XTY) \leq \mathrm{rg}(T) \leq r$$

porque $T \in \mathbb{R}^{r\times r}$ y por tanto T es invertible.

La demostración de la implicación recíproca es evidente.

La comprobación de que la inversa de grupo de A tiene la forma especificada en (2.4) se obtiene de comprobar las tres propiedades de su definición y de utilizar su unicidad. Luego el teorema queda probado. ■

En [33], S.K. Jain y J. Tynan obtuvieron un resultado semejante a este último. En su resultado también se asumía como hipótesis que la matriz A era no negativa. La importancia del Teorema 2.1 radica en que la condición $A \geq O$ ha sido eliminada. Además, la forma de la matriz A ha sido ligeramente simplificada respecto a la dada en el Teorema 1 de [33].

Observación 2.1 *Nótese que en el teorema previo la matriz A tiene proyector de grupo no negativo pero ella misma no necesita ser no negativa. En efecto, la condición adicional $A \geq O$ en el teorema previo implica que la matriz T en (2.3) debe ser no negativa, y recíprocamente.*

En el siguiente resultado se agrega la no negatividad de la matriz A lo que permite comparar el Teorema 2.1 con el resultado dado por S. Friedland y E. Virnik en [20].

Corolario 2.2 *Sea $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ una matriz con $\mathrm{rg}(A) = r > 0$. Entonces $A \in \mathcal{PPGP}$ si y sólo si existe una matriz de permutación $P \in \mathbb{R}^{n\times n}$ tal que*

$$A = P \begin{bmatrix} XTY & XTYM & O \\ O & O & O \\ NXTY & NXTYM & O \end{bmatrix} P^T \tag{2.10}$$

donde los bloques diagonales son cuadrados, M, N son matrices no negativas arbitrarias de tamaños adecuados, $T \in \mathbb{R}^{r\times r}$ es invertible y no negativa y $X = \mathrm{diag}(x_1, \ldots, x_r)$, $Y = \mathrm{diag}(y_1^T, \ldots, y_r^T)$ siendo x_i e y_j vectores columna positivos con $i, j \in \{1, \ldots, r\}$ tales que $YX = I$.

Demostración. Aplicando el Teorema 2.1 sólo es necesario mostrar que $T \geq O$. En efecto, de $A \geq O$ y $P \geq O$ se tiene que $P^TAP \geq O$ y entonces, por (2.10), en particular se tiene $XTY \geq O$. Puesto que $X \geq O$, $Y \geq O$ e $YX = I$, pre y postmultiplicando la igualdad $XTY \geq O$ por Y y por X, respectivamente, se obtiene $T \geq O$. ■

A continuación se obtiene un nuevo resultado relativo a la no negatividad de A y a la no negatividad de $A^{\#}$, de forma independiente.

Corolario 2.3 *Sea* $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ *una matriz con* $\mathrm{rg}(A) = r > 0$. *Entonces* $A \in \mathcal{PPG}$ *si y sólo si existe una matriz de permutación* $P \in \mathbb{R}^{n\times n}$ *tal que*

$$A = P \begin{bmatrix} XTY & XTYM & O \\ O & O & O \\ NXTY & NXTYM & O \end{bmatrix} P^T \tag{2.11}$$

donde los bloques diagonales son cuadrados, M, N *son matrices no negativas arbitrarias de tamaños adecuados,* $T \in \mathbb{R}^{r\times r}$ *es una matriz invertible no negativa con* $T^{-1} \geq O$ *y* $X = \mathrm{diag}(x_1, \ldots, x_r)$, $Y = \mathrm{diag}(y_1^T, \ldots, y_r^T)$ *siendo* x_i *e* y_j *vectores columna positivos con* $i, j \in \{1, \ldots, r\}$ *tales que* $YX = I$.

Demostración. Por el Teorema 2.1, la matriz A tiene la forma requerida (2.11) con $T \in \mathbb{R}^{r\times r}$ una matriz invertible. Teniendo en cuenta las hipótesis, la no negatividad de A es equivalente a la no negatividad de T como se ha probado en el Corolario 2.2. Análogamente, de (2.4) se obtiene la equivalencia entre la no negatividad de $A^{\#}$ y T^{-1}. ■

Se recuerda que una caracterización del conjunto $\mathcal{PG}$ fue dada en [3].

Nótese que, en general, para una matriz no negativa $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ la condición $A^2 = A$ implica que $AA^{\#} \geq O$. Sin embargo, la implicación recíproca no es siempre cierta como se puede comprobar mediante el siguiente contraejemplo:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \geq O$$

satisface que $AA^{\#} \geq O$ pero $A^2 \neq A$. Esto implica que el Corolario 2.2 es una versión más general del Lema 2.1 de [20].

2.3. Matrices $\{l\}$-periódicas de grupo

En [7], los autores estudiaron las matrices involutivas de grupo, es decir matrices cuadradas que coinciden con su inversa de grupo. Este concepto se puede generalizar de la siguiente manera.

Definición 2.1 *Sea $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ una matriz de índice 1 y $l \in \{2,3,\dots\}$. Se dice que A es $\{l\}$-periódica de grupo si*

$$A^{\#} = A^{l-1}.$$

Una caracterización inmediata para las matrices $\{l\}$-periódicas de grupo se presenta en el siguiente lema.

Lema 2.3 *Sea $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ una matriz con $\operatorname{ind}(A) = 1$ y $l \in \{2,3,\dots\}$. Entonces A es $\{l\}$-periódica de grupo si y sólo si $A^{l+1} = A$.*

Demostración.

Si $A^{\#} = A^{l-1}$ entonces de la primera condición de la definición de inversa de grupo se tiene que $AA^{l-1}A = A$, es decir que $A^{l+1} = A$.

Recíprocamente, sea $A^{l+1} = A$ y sea $X = A^{l-1}$. Entonces

(a) $AXA = AA^{l-1}A = A^{l+1} = A$

(b) $XAX = A^{l-1}AA^{l-1} = A^{l+1}A^{l-2} = AA^{l-2} = A^{l-1} = X$

(c) $AX = AA^{l-1} = A^{l} = A^{l-1}A = XA$.

De la unicidad de la matriz inversa de grupo se tiene que $A^{\#} = X$. ■

Ahora, el Teorema 2.1 se aplica para caracterizar la clase de matrices $\{l\}$-periódicas de grupo.

Teorema 2.2 *Sea* $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ *una matriz con* $\mathrm{rg}(A) = r$, $\mathrm{ind}(A) = 1$, *y* $A^l \geq O$ *con* $A^l \neq O$ *para algún* $l \in \{1, 2, \dots\}$. *Entonces* A *es* $\{l\}$*-periódica de grupo si y sólo si existe una matriz de permutación* $P \in \mathbb{R}^{n\times n}$ *tal que*

$$A = P \begin{bmatrix} XTY & XTYM & O \\ O & O & O \\ NXTY & NXTYM & O \end{bmatrix} P^T \tag{2.12}$$

donde los bloques diagonales son cuadrados, M, N *son no negativas de tamaño apropiado,* $X = diag(x_1, \dots, x_r)$, $Y = diag(y_1^T, \dots, y_r^T)$, *siendo* x_i *e* y_i *son vectores columna positivos con* $i, j \in \{1, \dots, r\}$ *tal que* $y_i^T x_i = 1$, *y* $T \in \mathbb{R}^{r\times r}$ *es una matriz invertible tal que* $T^l = I$.

Demostración. Del Lema 2.3 se tiene que la condición $A^{l+1} = A$ es equivalente a $A^{\#} = A^{l-1}$, lo cual implica que $AA^{\#} = A^l \geq O$ y por hipótesis $AA^{\#} = A^l \neq O$. Entonces, del Teorema 2.1, se tiene que A y $A^{\#}$ tienen la forma (2.3) y (2.4), respectivamente. Además, usando estas expresiones, se puede ver que la condición $A^{\#} = A^{l-1}$ es equivalente a

$$\begin{bmatrix} XT^{-1}Y & XT^{-1}YM & O \\ O & O & O \\ NXT^{-1}Y & NXT^{-1}YM & O \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} XT^{l-1}Y & XT^{l-1}YM & O \\ O & O & O \\ NXT^{l-1}Y & NXT^{l-1}YM & O \end{bmatrix}.$$

Por lo tanto, se tiene que $XT^{-1}Y = XT^{l-1}Y$. Premultiplicando por Y y postmultiplicando por X esta última igualdad, y usando que $YX = I$ se llega a $T^{-1} = T^{l-1}$, es decir $T^l = I$.

Recíprocamente, si A tiene la forma (2.3) con T invertible, es fácil ver que

$$A^{l+1} = \begin{bmatrix} XT^{l+1}Y & XT^{l+1}YM & O \\ O & O & O \\ NXT^{l+1}Y & NXT^{l+1}YM & O \end{bmatrix}.$$

Teniendo en cuenta que $T^l = I$ resulta que $T^{l+1} = T$, por lo tanto, $A^{l+1} = A$. Del Lema 2.3 resulta que A es una matriz $\{l\}$-periódica de grupo. ■

A partir de este resultado, también es posible conservar la forma de A en el caso $A \geq O$, teniendo en cuenta que entonces la matriz T debe ser no negativa.

Corolario 2.4 *Sea $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ una matriz con $\mathrm{rg}(A) = r$, $\mathrm{ind}(A) = 1$, $A \geq O$ y $A^l \neq O$ para algún $l \in \{1, 2, \dots\}$. Entonces la matriz A es $\{l\}$-periódica de grupo si y sólo si existe una matriz de permutación $P \in \mathbb{R}^{n\times n}$ tal que*

$$A = P \begin{bmatrix} XTY & XTYM & O \\ O & O & O \\ NXTY & NXTYM & O \end{bmatrix} P^T \tag{2.13}$$

donde los bloques diagonales son cuadrados, M, N son matrices arbitrarias no negativas de tamaño adecuado, $X = \mathrm{diag}(x_1, \dots, x_r)$, $Y = \mathrm{diag}(y_1^T, \dots, y_r^T)$ siendo x_i e y_j vectores columnas positivos con

$i, j \in \{1, \ldots, r\}$ tales que $YX = I$ y $T \in \mathbb{R}^{r\times r}$ es una matriz (invertible) no negativa que satisface $T^l = I$.

Demostración. Aplicando el Teorema 2.2 sólo es necesario mostrar que $T \geq O$. En efecto, de $A \geq O$ y $P \geq O$ se tiene que $P^T AP \geq O$ y entonces, por (2.13), en particular se tiene $XTY \geq O$. Puesto que $X \geq O$, $Y \geq O$ e $YX = I$, pre y postmultiplicando la igualdad $XTY \geq O$ por Y y por X, respectivamente, se obtiene $T \geq O$.

■

2.4. Aplicaciones a la teoría de control

En esta sección se presenta un método para analizar si un sistema singular de control es no negativo utilizando información acerca de propiedades sobre los bloques de las matrices coeficientes en lugar de condiciones sobre las matrices completas. A diferencia de los resultados conocidos en que la hipótesis de no negatividad de la matriz E es requerida en esta sección se presenta un resultado donde no es necesario que se cumpla esta condición. De este modo, el análisis de no negatividad realizado es aplicable a una clase más general de sistemas.

2.4.1. Una primera aproximación

A partir de ahora se considerará un sistema singular de control en tiempo discreto (E, A, B, C) descrito por

$$\left\{\begin{array}{rcl} Ex(k+1) & = & Ax(k) + Bu(k) \\ y(k) & = & Cx(k) \end{array}\right. \tag{2.14}$$

donde $E, A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $B \in \mathbb{R}^{n\times m}$, $C \in \mathbb{R}^{p\times n}$, $x(k) \in \mathbb{R}^{n\times 1}$, $u(k) \in \mathbb{R}^{m\times 1}$ e $y(k) \in \mathbb{R}^{p\times 1}$. Se supondrá que se satisface la condición de regularidad, es decir, existe un escalar α tal que $\det(\alpha E + A) \neq 0$. En este caso, el sistema (2.14) se puede transformar en el sistema equivalente

$$\left\{\begin{array}{rcl} \widehat{E}x(k+1) & = & \widehat{A}x(k) + \widehat{B}u(k) \\ y(k) & = & \widehat{C}x(k) \end{array}\right. \tag{2.15}$$

donde $\widehat{E} = (\alpha E + A)^{-1}E$, $\widehat{A} = (\alpha E + A)^{-1}A$, $\widehat{B} = (\alpha E + A)^{-1}B$ y $\widehat{C} = C$. Este nuevo sistema (2.15) satisface las condiciones

(i) $\widehat{E}\widehat{A} = \widehat{A}\widehat{E}$,

(ii) $\mathrm{Ker}(\widehat{E}) \cap \mathrm{Ker}(\widehat{A}) = \{0\}$, con $\mathrm{Ker}(\cdot)$ denotando el espacio nulo de $(\cdot)$,

(iii) $\widehat{A} = I - \alpha\widehat{E}$.

La condición de regularidad asegura que el sistema (2.15) tiene solución y está dada por $y(k) = \widehat{C}x(k)$ donde

$$\begin{aligned} x(k) &= (\widehat{E}^D\widehat{A})^k\widehat{E}^D\widehat{E}x(0) + \sum_{i=0}^{k-1}\widehat{E}^D(\widehat{E}^D\widehat{A})^{k-i-1}\widehat{B}u(i) \\ &\quad -(I - \widehat{E}^D\widehat{E})\sum_{i=0}^{q-1}(\widehat{E}\widehat{A}^D)^i\widehat{A}^D\widehat{B}u(k+i), \end{aligned} \tag{2.16}$$

con $q = \mathrm{ind}(\widehat{E})$ y $x(0)$ una condición inicial admisible [35]. Como se ha indicado en la introducción el conjunto de condiciones iniciales admisibles está dado por $\mathrm{Im}\left[\begin{array}{cccc} \widehat{E}^D\widehat{E} & H_0 & \ldots & H_{q-1} \end{array}\right]$, donde $H_i = (I - \widehat{E}^D\widehat{E})(\widehat{E}\widehat{A}^D)^i\widehat{A}^D$, $i = 0, \ldots, q-1$ e $\mathrm{Im}[\cdot]$ denota el espacio imagen de $[\cdot]$.

A continuación se obtiene una relación entre el índice de las matrices involucradas E y $\widehat{E}$. En general, ni $\operatorname{ind}(E) = 1$ implica $\operatorname{ind}(\widehat{E}) = 1$ ni $\operatorname{ind}(\widehat{E}) = 1$ implica $\operatorname{ind}(E) = 1$. Por ejemplo, dadas las matrices

$$E = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad \text{y} \qquad A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

y tomando $\alpha = 0$, se tiene que

$$\widehat{E} = (\alpha E + A)^{-1} E = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

con $\operatorname{ind}(\widehat{E}) = 2$ mientras $\operatorname{ind}(E) = 1 \neq 2$. Intercambiando los roles de E y $\widehat{E}$ se puede mostrar que $\operatorname{ind}(\widehat{E}) = 1$ no implica que $\operatorname{ind}(E) = 1$.

Sin embargo, se puede probar el siguiente resultado usando el Lema 1.1.

Lema 2.4 *Sea $E \in \mathbb{R}^{n\times n}$ una matriz con $\operatorname{ind}(E) = 1$, es decir,*

$$E = Q \begin{bmatrix} C & O \\ O & O \end{bmatrix} Q^{-1}$$

donde C es una matriz invertible. Sea $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ tal que existe $(\alpha E + A)^{-1}$ para algún escalar α y $Q^{-1}(\alpha E + A)^{-1} Q$ es una matrix triangular superior por bloques. Entonces $\operatorname{ind}((\alpha E + A)^{-1} E) = 1$.

Demostración. Puesto que $Q^{-1}(\alpha E + A)^{-1} Q$ es una matriz triangular superior por bloques,

$$Q^{-1}(\alpha E + A)^{-1} Q = \begin{bmatrix} R_1 & R_2 \\ O & R_3 \end{bmatrix}.$$

Luego,

$$(\alpha E + A)^{-1}E = Q \begin{bmatrix} R_1 C & O \\ O & O \end{bmatrix} Q^{-1}.$$

La invertibilidad $(\alpha E + A)^{-1}$ implica que $Q^{-1}(\alpha E + A)^{-1}Q$ es invertible. Así, R_1 es invertible y, por el Lema 1.1, $\operatorname{ind}((\alpha E + A)^{-1}E) = 1$ ya que C es invertible. ■

Un resultado similar se puede obtener intercambiando los roles de E y $(\alpha E + A)^{-1}E$.

Como se ha indicado en la introducción un sistema (E, A, B, C) es no negativo si, para cada estado inicial admisible $x(0) \geq 0$ y para cualquier sucesión de controles no negativa $u(i)$, $i = 0, 1, \ldots, k-1+\operatorname{ind}(E)$, los estados $x(k)$ son no negativos y las salidas $y(k)$ son no negativas, $\forall k \in \mathbb{Z}^+$. El siguiente resultado presenta condiciones necesarias y suficientes sobre las matrices E, A, B y C para que el sistema (E, A, B, C) sea no negativo.

Teorema 2.3 *Sea (E, A, B, C) un sistema singular en tiempo discreto tal que $E^D E \geq O$, $EA = AE$ y $\operatorname{Ker}(E) \cap \operatorname{Ker}(A) = \{0\}$. El sistema (E, A, B, C) es no negativo si y sólo si se cumplen las siguientes condiciones:*

(a) $E^D A \geq O$,

(b) $E^D B \geq O$,

(c) $C E^D E \geq O$,

(d) $-(I - EE^D)(EA^D)^i A^D B \geq O$, *y*

(e) $-C(I-EE^D)(EA^D)^i A^D B \geq O$.

para cada $i = 0, 1, \ldots, \text{ind}(E) - 1$.

Demostración. A partir de la Proposición 1.1, es claro que la no negatividad del sistema (E, A, B) implica (a), (b) y (d).

Puesto que $E^D E \geq 0$ y para cada $j = 1, \ldots, n$, los vectores $x(0) = E^D E e_j \geq 0$ son condiciones iniciales admisibles (donde e_j representa el vector canónico con un 1 en la posición de la j-ésima componente y ceros en las demás posiciones). Entonces, $y(0) = CE^D E e_j \geq 0$, para cada $j = 1, \ldots, n$ y para cada sucesión de control no negativa $u(i)$. Por lo tanto, $CE^D E = CE^D E \begin{bmatrix} e_1 & e_2 & \ldots & e_n \end{bmatrix}$ y entonces

$$\begin{bmatrix} CE^D E e_1 & CE^D E e_2 & \ldots & CE^D E e_n \end{bmatrix} \geq O,$$

así se cumple (c).

Para cada $j = 1, \ldots, n$, si se elige $x(0) = 0$, $u(k+h) = e_j$ y $u(i) = 0$, $i \in \{0, 1, \ldots, k-1+\text{ind}(E)\} - \{k+h\}$, se tiene que

$$y(k) = Cx(k) = -C(I-EE^D)(EA^D)^h A^D B e_i \geq 0,$$

entonces $-C(I-EE^D)(EA^D)^h A^D B \geq O$ para todo $h = 0, 1, \ldots \text{ind}(E) - 1$ y, por tanto, se cumple (e).

Recíprocamente, a partir de $E^D A = AE^D$ y $E^D E E^D = E^D$, es fácil comprobar que (a), (b), (c), (d) y (e) implican que $x(k) \geq 0$ e $y(k) \geq 0$ para cada $u(i) \geq 0$, $i = 1, \ldots, k-1+\text{ind}(E)$ y cada condición inicial admisible $x(0)$. ■

Se observa que en el resultado anterior se utilizan las matrices coeficientes (completas) para dar la caracterización.

2.4.2. Caracterización de sistemas singulares no negativos de índice 1

De ahora en adelante se considerará el sistema singular de control (2.15) en el cual $\widehat{E}$ es una matriz con índice igual a 1 y con proyector de grupo $\widehat{E}^{\#}\widehat{E} \geq O$. Entonces, se puede aplicar el Teorema 2.1 para escribir la matriz $\widehat{E}$ en la forma (2.3). Por tanto, se utilizará la matriz ortogonal P que aparece en (2.3) para transformar el sistema (2.15) en un sistema equivalente cuyas matrices tienen una forma simplificada de la manera siguiente. Haciendo el cambio $z(k) = Px(k)$, el sistema (2.15) se transforma en el sistema equivalente

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \widetilde{E}z(k+1) & = & \widetilde{A}z(k) + \widetilde{B}u(k) \\ y(k) & = & \widetilde{C}z(k) \end{array} \right. , \tag{2.17}$$

donde las matrices coeficientes son

$$\widetilde{E} = P\widehat{E}P^t = \begin{bmatrix} XTY & XTYM & O \\ O & O & O \\ NXTY & NXTYM & O \end{bmatrix}, \tag{2.18}$$

$$\begin{aligned} \widetilde{A} &= P\widehat{A}P^t = I - \alpha\widetilde{E} \\ &= \begin{bmatrix} I - \alpha XTY & -\alpha XTYM & O \\ O & I & O \\ -\alpha NXTY & -\alpha NXTYM & I \end{bmatrix}, \end{aligned} \tag{2.19}$$

$$\widetilde{B} = P\widehat{B} \qquad \text{y} \qquad \widetilde{C} = \widehat{C}P^t. \tag{2.20}$$

Un cálculo sencillo permite mostrar que $\mathrm{ind}(\widehat{E}) = 1$ implica $\mathrm{ind}(\widetilde{E}) = 1$. En realidad, se cumple que $\mathrm{ind}(\widehat{E}) = 1$ es equivalente a $\mathrm{ind}(\widetilde{E}) = 1$ puesto que $\widetilde{E}$ es una permutación simétrica de $\widehat{E}$.

Además, se cumple que el sistema $(\widehat{E},\widehat{A},\widehat{B},\widehat{C})\geq O$ si y sólo si el sistema $(\widetilde{E},\widetilde{A},\widetilde{B},\widetilde{C})\geq O$ porque claramente se cumplen las siguientes equivalencias:

$$\begin{aligned}
\widehat{E}^{\#}\widehat{E}\geq O &\Leftrightarrow \widetilde{E}^{\#}\widetilde{E}\geq O\\
(\widehat{E}^{\#}\widehat{A})^k\geq O &\Leftrightarrow (\widetilde{E}^{\#}\widetilde{A})^k\geq O\\
(\widehat{E}^{\#}\widehat{A})^k\widehat{E}^{\#}\widehat{E}\geq O &\Leftrightarrow (\widetilde{E}^{\#}\widetilde{A})^k\widetilde{E}^{\#}\widetilde{E}\geq O\\
\widehat{E}^{\#}\widehat{B}\geq O &\Leftrightarrow \widetilde{E}^{\#}\widetilde{B}\geq O\\
-(I-\widehat{E}\widehat{E}^{\#})\widehat{A}^D\widehat{B}\geq O &\Leftrightarrow -(I-\widetilde{E}\widetilde{E}^{\#})\widetilde{A}^D\widetilde{B}\geq O\\
\widehat{C}\widehat{E}^{\#}\widehat{E}\geq O &\Leftrightarrow \widetilde{C}\widetilde{E}^{\#}\widetilde{E}\geq O\\
-\widehat{C}(I-\widehat{E}\widehat{E}^{\#})\widehat{A}^D\widehat{B}\geq O &\Leftrightarrow -\widetilde{C}(I-\widetilde{E}\widetilde{E}^{\#})\widetilde{A}^D\widetilde{B}\geq O
\end{aligned}$$

puesto que $(P\widehat{A}P^{-1})^D=P\widehat{A}^DP^{-1}$.

Ahora se centrará el interés en encontar condiciones sobre las matrices $\widetilde{E}$, $\widetilde{A}$, $\widetilde{B}$ y $\widetilde{C}$ tales que garanticen las propiedades de no negatividad siguientes: $\widetilde{E}^{\#}\widetilde{A}\geq O$, $(\widetilde{E}^{\#}\widetilde{A})^k\widetilde{E}^{\#}\widetilde{E}\geq O$, $\widetilde{E}^{\#}\widetilde{B}\geq O$, $-(I-\widetilde{E}\widetilde{E}^{\#})\widetilde{A}^D\widetilde{B}\geq O$, $\widetilde{C}\widetilde{E}^{\#}\widetilde{E}\geq O$ y $-\widetilde{C}(I-\widetilde{E}\widetilde{E}^{\#})\widetilde{A}^D\widetilde{B}\geq O$, bajo las suposiciones $\operatorname{ind}(\widetilde{E})=1$, $\widetilde{E}^{\#}\widetilde{E}\geq O$, y $\widetilde{A}=I-\alpha\widetilde{E}$.

En primer lugar se estudia el caso $\widetilde{C}=I$, es decir, cuando el vector de salidas es igual al vector de estados. El resultado se presenta en el siguiente lema, el cual es un resultado técnico previo al resultado principal de esta sección.

Para ello, se particionarán las matrices $\widetilde{B}$ y $\widetilde{C}$ dadas en (2.20) de la siguiente manera:

$$\widetilde{B}=P\widehat{B}=\begin{bmatrix}B_1\\B_2\\B_3\end{bmatrix}, \tag{2.21}$$

y

$$\widetilde{C} = \widehat{C}P^t = \begin{bmatrix} C_1 & C_2 & C_3 \end{bmatrix}. \tag{2.22}$$

teniendo en cuenta los tamaños de las matrices X e Y de (2.18).

Lema 2.5 *Sea* $(\widetilde{E}, \widetilde{A}, \widetilde{B})$ *un sistema singular donde* $\widetilde{E}, \widetilde{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $\widetilde{B} \in \mathbb{R}^{n\times m}$ *son matrices tales que* $\mathrm{ind}(\widetilde{E}) = 1$, $\mathrm{rg}(\widetilde{E}) = r > 0$, $\widetilde{E}\widetilde{E}^{\#} \geq O$, $\widetilde{A} = I - \alpha\widetilde{E}$, *para algún escalar* α *y* $\widetilde{B}$ *se particiona como en (2.21). Entonces* $(\widetilde{E}, \widetilde{A}, \widetilde{B})$ *es no negativo si y sólo si se cumplen las siguientes condiciones*

(a) $T^{-1} - \alpha I \geq O$,

(b) $T^{-1}Y(B_1 + MB_2) \geq O$,

(c) $-B_2 \geq O$,

(d) $(XY - I)(H^D B_1 + SB_2) + XYMB_2 \geq O$,

(e) $NXY(H^D B_1 + SB_2 + MB_2) - UB_1 - VB_2 - B_3 \geq O$,

donde X, Y, M, N *y* T *son las matrices definidas en (2.18),* $H = I - \alpha XTY$,

$$S = (I - HH^D)\left[\sum_{i=0}^{l-1} H^i J\right] - H^D J, \tag{2.23}$$

$$U = -\alpha NXTY\left(\sum_{j=0}^{l-1} H^j (I - HH^D) - H^D\right), \tag{2.24}$$

$$V = \alpha NXTY\left(\sum_{j=0}^{l-1} H^j (HS + J) + S\right), \tag{2.25}$$

y $J = -\alpha XTYM$.

Demostración. Suponiendo que $\widetilde{E}^{\#}\widetilde{E} \geq O$, a partir del Teorema 2.3, el sistema $(\widetilde{E}, \widetilde{A}, \widetilde{B})$ es no negativo si y sólo si $(\widetilde{E}^{\#}\widetilde{A})^k \geq O$, $(\widetilde{E}^{\#}\widetilde{A})^k\widetilde{E}^{\#}\widetilde{E} \geq O$, $\widetilde{E}^{\#}\widetilde{B} \geq O$ y $-(I - \widetilde{E}\widetilde{E}^{\#})\widetilde{A}^D\widetilde{B} \geq O$.

A partir de las expresiones de las matrices $\widetilde{E}$ y $\widetilde{A}$ dadas en (2.18) y (2.19), denotando $\mathfrak{T} = T^{-1} - \alpha I$, se tiene que

$$\begin{aligned} \widetilde{E}^{\#}\widetilde{A} &= \widetilde{E}^{\#} - \alpha\widetilde{E}^{\#}\widetilde{E} \\ &= \begin{bmatrix} X\mathfrak{T}Y & X\mathfrak{T}YM & O \\ O & O & O \\ NX\mathfrak{T}Y & NX\mathfrak{T}YM & O \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Por inducción se tiene

$$(\widetilde{E}^{\#}\widetilde{A})^k = \begin{bmatrix} (X\mathfrak{T}Y)^k & (X\mathfrak{T}Y)^kM & O \\ O & O & O \\ N(X\mathfrak{T}Y)^k & N(X\mathfrak{T}Y)^kM & O \end{bmatrix} \tag{2.26}$$

para cada entero positivo k. Dado que $YX = I$, se sigue que $(X\mathfrak{T}Y)^k = X\mathfrak{T}^kY$ y entonces se cumple la no negatividad de $(E^{\#}A)^k$ si y sólo si se satisfacen las siguientes condiciones:

(i) $X\mathfrak{T}^kY \geq O$,

(ii) $X\mathfrak{T}^kYM \geq O$,

(iii) $NX\mathfrak{T}^kY \geq O$, y

(iv) $NX\mathfrak{T}^kYM \geq O$,

las cuales se pueden reducir a la única condición $X\mathfrak{T}^kY \geq O$, porque M y N son matrices no negativas. Ahora, ya que $X \geq O$, $Y \geq O$ e $YX = I$, se tiene que $X\mathfrak{T}^kY \geq O$ es equivalente a $\mathfrak{T}^k = (T^{-1} - \alpha I)^k \geq O$, para todo entero positivo k, y en particular para $k = 1$.

A continuación se analiza el producto $(\widetilde{E}^{\#}\widetilde{A})^k(\widetilde{E}^{\#}\widetilde{E})$. A partir de las expresiones (2.18) y (2.26), se llega a

$$(\widetilde{E}^{\#}\widetilde{A})^k\widetilde{E}^{\#}\widetilde{E} = \begin{bmatrix} X\mathfrak{T}^kY & X\mathfrak{T}^kYM & O \\ O & O & O \\ NX\mathfrak{T}^kY & NX\mathfrak{T}^kYM & O \end{bmatrix}.$$

Así, análogamente, $(\widetilde{E}^{\#}\widetilde{A})^k\widetilde{E}^{\#}\widetilde{E} \geq O$ si y sólo si $T^{-1} - \alpha I \geq O$.

La siguiente propiedad a analizar es la no negatividad de $E^{\#}B$. De nuevo, partiendo B como en (2.21), se consigue

$$\widetilde{E}^{\#}\widetilde{B} = \begin{bmatrix} XT^{-1}YB_1 + XT^{-1}YMB_2 \\ O \\ NXT^{-1}YB_1 + NXT^{-1}YMB_2 \\ O \end{bmatrix}.$$

Por tanto, $\widetilde{E}^{\#}\widetilde{B} \geq O$ si y sólo si $XT^{-1}Y(B_1 + MB_2) \geq O$ (puesto que $N \geq O$). Premultiplicando esta última desigualdad por Y y usando que $YX = I$ y que X e Y son matrices no negativas, se consigue que $\widetilde{E}^{\#}\widetilde{B} \geq O$ si y sólo si $T^{-1}Y(B_1 + MB_2) \geq O$.

Finalmente, se estudia el producto $(I - \widetilde{E}\widetilde{E}^{\#})\widetilde{A}^D\widetilde{B}$. Para ello, se debe calcular $\widetilde{A}^D$. Utilizando la notación $H = I - \alpha XTY$ y $J = -\alpha XTYM$, se tiene que

$$\widetilde{A} = \left[\begin{array}{cc|c} H & J & O \\ O & I & O \\ \hline -\alpha NXTY & NJ & I \end{array}\right] =: \left[\begin{array}{c|c} F & O \\ \hline G & I \end{array}\right], \tag{2.27}$$

donde F y G tienen tamaños adecuados. Aplicando el Teorema 1.2 se obtiene que

$$\widetilde{A}^D = \begin{bmatrix} F^D & O \\ \widetilde{G} & I \end{bmatrix},$$

donde

$$\widetilde{G} \;=\; \left[\sum_{i=0}^{l-1} GF^i\right](I - FF^D) - GF^D \tag{2.28}$$

siendo l el índice de F.

Nótese que $\widetilde{A}$, F y H tienen el mismo índice. En efecto, de (2.27) es fácil ver que $\mathrm{rg}(\widetilde{A}^k) = \mathrm{rg}(F^k) + \mathrm{rg}(I)$ y $\mathrm{rg}(\widetilde{A}^{k-1}) = \mathrm{rg}(F^{k-1}) + \mathrm{rg}(I)$. Así, $\mathrm{rg}(\widetilde{A}^k) - \mathrm{rg}(\widetilde{A}^{k-1}) = \mathrm{rg}(F^k) - \mathrm{rg}(F^{k-1})$, lo cual implica que $\mathrm{ind}(\widetilde{A}) = \mathrm{ind}(F)$. Análogamente, se llega a que $\mathrm{rg}(F^k) = \mathrm{rg}(H^k) + \mathrm{rg}(I)$, para todo entero no negativo k, luego $\mathrm{ind}(F) = \mathrm{ind}(H)$. Esto muestra que la información relevante de $\widetilde{A}$ se concentra en su bloque $(1,1)$, es decir en la matriz F.

A partir del Teorema 1.1 se tiene que la inversa de Drazin de F es

$$F^D = \begin{bmatrix} H^D & S \\ O & I \end{bmatrix},$$

siendo

$$S = (I - HH^D)\left[\sum_{i=0}^{l-1} H^i J\right] - H^D J. \tag{2.29}$$

Con respecto a la matriz $\widetilde{G}$ que aparece en (2.28) se tiene que

$$F^i = \begin{bmatrix} H^i & \displaystyle\sum_{j=0}^{i-1} H^j J \\ O & I \end{bmatrix},$$

y por tanto

$$\sum_{i=0}^{l-1} F^i = I + \begin{bmatrix} \displaystyle\sum_{j=1}^{l-1} H^j & \displaystyle\sum_{p=1}^{l-1} pH^{l-p-1} J \\ O & (l-1)I \end{bmatrix},$$

entonces

$$\widetilde{G} = \begin{bmatrix} U & V \\ O & O \end{bmatrix},$$

donde U y V se han definido en (2.24) y (2.25), respectivamente.

Por lo tanto, la inversa de Drazin de $\widetilde{A}$ es

$$\widetilde{A}^D = \begin{bmatrix} H^D & S & O \\ O & I & O \\ U & V & I \end{bmatrix}. \tag{2.30}$$

Es posible notar que las matrices $\widetilde{A}$ y $\widetilde{A}^D$ tienen la misma estructura de bloques.

Luego, calculando el producto $(I - \widetilde{E}^{\#}\widetilde{E})\widetilde{A}^D\widetilde{B}$ resulta

$$\begin{bmatrix} (I - XY)\mathcal{B} - XYMB_2 \\ B_2 \\ -NXY\mathcal{B} - NXYMB_2 + UB_1 + VB_2 + B_3 \end{bmatrix}, \tag{2.31}$$

donde $\mathcal{B} = H^D B_1 + SB_2$. Así, $-(I - E^{\#}E)A^D B \geq O$ si y sólo si los tres bloques de la matriz son no negativos, es decir, $-B_2 \geq O$, $(XY - I)(H^D B_1 + SB_2) + XYMB_2 \geq O$ y $NXY(H^D B_1 + SB_2 + MB_2) - UB_1 - VB_2 - B_3 \geq O$. Esto termina la demostración. ■

Observación 2.2 *De la demostración del lema anterior es posible observar que una condición necesaria para obtener $\widetilde{E}^{\#}\widetilde{B} \geq O$ es que $Y(B_1 + MB_2) \geq O$ puesto que $TT^{-1} = I$ y $T \geq O$.*

Observación 2.3 *Nótese también que si se agrega la condición $\widetilde{E} \geq O$ como hipótesis adicional en el lema anterior se obtiene la misma conclusión que agregando la condición $T \geq O$.*

Esta sección finaliza analizando la no negatividad de un sistema general $(\widetilde{E}, \widetilde{A}, \widetilde{B}, \widetilde{C})$.

Teorema 2.4 *Sea* $(\widetilde{E}, \widetilde{A}, \widetilde{B}, \widetilde{C})$ *un sistema singular con* $\widetilde{E}, \widetilde{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $\widetilde{B} \in \mathbb{R}^{n\times m}$, $\widetilde{C} \in \mathbb{R}^{p\times n}$ *matrices tales que* $\operatorname{ind}(\widetilde{E}) = 1$, $\operatorname{rg}(\widetilde{E}) = r > 0$, $\widetilde{E}\widetilde{E}^{\#} \geq O$, $\widetilde{A} = I - \alpha\widetilde{E}$, *para algún escalar* α, *y* $\widetilde{B}$ *y* $\widetilde{C}$ *están particionadas como en (2.21) y (2.22), respectivamente. Entonces* $(\widetilde{E}, \widetilde{A}, \widetilde{B}, \widetilde{C})$ *es no negativo si y sólo si se cumplen las siguientes condiciones:*

(a) $T^{-1} - \alpha I \geq O$,

(b) $T^{-1}Y(B_1 + MB_2) \geq O$,

(c) $-B_2 \geq O$,

(d) $(XY - I)(H^D B_1 + SB_2) + XYMB_2 \geq O$,

(e) $NXY(H^D B_1 + SB_2 + MB_2) - UB_1 - VB_2 - B_3 \geq O$,

(f) $(C_1 + C_3N)X \geq O$,

(g) $C_1[(XY-I)(H^D B_1+SB_2)+XYMB_2]-C_2B_2+C_3[NXY(H^D B_1+ SB_2 + MB_2) - UB_1 - VB_2 - B_3] \geq O$,

donde X, Y, M, N *y* T *son las matrices definidas en (2.18),* $H = I - \alpha XTY$, S, U *y* V *son dadas en (2.23), (2.24) y (2.25), respectivamente.*

Demostración. Dado que $\widetilde{E}\widetilde{E}^{\#} \geq O$, se puede aplicar el Teorema 2.3 teniendo que el sistema $(\widetilde{E}, \widetilde{A}, \widetilde{B}, \widetilde{C})$ es no negativo si y sólo si $(\widetilde{E}^{\#}\widetilde{A})^k \geq O$, $(\widetilde{E}^{\#}\widetilde{A})^k\widetilde{E}^{\#}\widetilde{E} \geq O$, $\widetilde{E}^{\#}\widetilde{B} \geq O$, $-(I - \widetilde{E}\widetilde{E}^{\#})\widetilde{A}^D\widetilde{B} \geq O$, $\widetilde{C}\widetilde{E}^{\#}\widetilde{E} \geq O$ y $-\widetilde{C}(I - \widetilde{E}^{\#}\widetilde{E})\widetilde{A}^D\widetilde{B} \geq O$.

Una aplicación inmediata del Lema 2.5 muestra que las cuatro primeras desigualdades lleva directamente a las condiciones (a)-(d) del enunciado.

Ahora se debe analizar la condición $\widetilde{C}\widetilde{E}^{\#}\widetilde{E} \geq O$. En efecto, particionando la matriz $\widetilde{C}$ como en (2.22), se tiene

$$\widetilde{C}\widetilde{E}^{\#}\widetilde{E} = \begin{bmatrix} (C_1 + C_3N)XY & (C_1 + C_3N)XYM & O \end{bmatrix}.$$

Luego, la equivalencia entre $\widetilde{C}\widetilde{E}^{\#}\widetilde{E} \geq O$ y las dos condiciones $(C_1 + C_3N)XY \geq O$ y $(C_1 + C_3N)XYM \geq O$ es clara. Puesto que $M \geq O$, $X \geq O$, $Y \geq O$ e $YX = I$, las dos condiciones se pueden reducir a $(C_1 + C_3N)X \geq O$.

La última condición a ser estudiada es $-\widetilde{C}(I - \widetilde{E}^{\#}\widetilde{E})\widetilde{A}^D\widetilde{B} \geq O$. El análisis de la no negatividad del producto de las matrices $\widetilde{C}$ y $(I - \widetilde{E}^{\#}\widetilde{E})\widetilde{A}^D\widetilde{B}$, dadas por las expresiones (2.22) y (2.31) repectivamente, permite mostrar claramente la condición (g). Esto termina la demostración. ∎

El teorema anterior mejora el resultado obtenido en el Teorema 2.9 de [22] en el sentido que el nuevo resultado no requiere la hipótesis $E \geq O$.

A continuación se presenta un ejemplo que ilustra el Teorema 2.4.

Ejemplo 2.1 *Sea (E, A, B, C) el sistema singular dado por las matrices*

$$E = \begin{bmatrix} 0 & 3 & 3 \\ 0 & 4 & 4 \\ 0 & -4 & -4 \end{bmatrix}, \qquad A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 7 \\ -1 & -3 & -9 \end{bmatrix},$$

$$B = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad \text{y} \qquad C = \begin{bmatrix} C_1 & C_2 & C_3 \end{bmatrix}.$$

Este sistema es equivalente al sistema $(\hat{E}, \hat{A}, \hat{B}, \hat{C})$, donde

$$\hat{E} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{\alpha+1} & \frac{1}{\alpha+1} \\ 0 & \frac{1}{\alpha+1} & \frac{1}{\alpha+1} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \qquad \hat{A} = \begin{bmatrix} 1 & \frac{-\alpha}{\alpha+1} & \frac{-\alpha}{\alpha+1} \\ 0 & \frac{1}{\alpha+1} & \frac{-\alpha}{\alpha+1} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$\hat{B} = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad \text{y} \qquad \hat{C} = C,$$

con $\alpha \neq -1$. Ahora, la matriz $\hat{E}$ tiene índice 1 y $\hat{E}^{\#} = (\alpha+1)^2 \hat{E}$. Así, $\hat{E}\hat{E}^{\#} \geq O$ y $\hat{E}$ se puede escribir en la forma (2.3) siendo

$$P = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$X = Y = M = N = 1$ y $T = \frac{1}{\alpha+1}$. Luego, se obtiene el sistema equivalente $(\tilde{E}, \tilde{A}, \tilde{B}, \tilde{C})$ donde

$$\tilde{E} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\alpha+1} & \frac{1}{\alpha+1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{\alpha+1} & \frac{1}{\alpha+1} & 0 \end{bmatrix}, \qquad \tilde{A} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\alpha+1} & \frac{-\alpha}{\alpha+1} & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{-\alpha}{\alpha+1} & \frac{-\alpha}{\alpha+1} & 1 \end{bmatrix},$$

$$\tilde{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} \qquad \text{y} \qquad \tilde{C} = \begin{bmatrix} C_2 & C_3 & C_1 \end{bmatrix}.$$

Entonces el Teorema 2.4 asegura que el sistema es no negativo cuando $\alpha \neq -1$, $C_1 \geq O$ *y* $C_1 + C_2 \geq O$.

Por otro lado, la expresión (2.16) asegura que el vector de estados está dado por

$$\begin{aligned} x(k) &= (\hat{E}^{\#}\hat{A})^k\hat{E}^{\#}\hat{E}x(0) + \sum_{i=0}^{k-1}\hat{E}^{\#}(\hat{E}^{\#}\hat{A})^{k-i-1}\hat{B}u(i) \\ &\quad -(I-\hat{E}^{\#}\hat{E})\hat{A}^D\hat{B}u(k) \\ &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} x(0) + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} u(k) \end{aligned}$$

y el vector de salidas es

$$y(k) = \begin{bmatrix} 0 & C_1 + C_2 & C_1 + C_2 \end{bmatrix} x(0) + C_1 u(k),$$

lo cual, claramente, muestra que las condiciones encontradas en el Teorema 2.4 son las requeridas para la no negatividad del sistema.

A continuación se presenta otro ejemplo.

Ejemplo 2.2 *Sea* (E, A, B, C) *el sistema singular dado por las matrices*

$$E = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix}, \qquad A = I - \alpha E = \begin{bmatrix} 1-\frac{\alpha}{2} & -\frac{\alpha}{2} & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -\frac{\alpha}{2} & -\frac{\alpha}{2} & 1 \end{bmatrix},$$

$$B = \begin{bmatrix} b_1 \\ 0 \\ b_3 \end{bmatrix} \qquad \text{y} \qquad C = \begin{bmatrix} C_1 & C_2 & C_3 \end{bmatrix},$$

con $\alpha < 2$, los escalares b_1 y b_3 satisfaciendo $b_1 \geq 0$, $b_3 \leq b_1$, y los vectores C_1 y C_3 satisfaciendo $C_3 \geq O$ y $C_1 + C_3 \geq O$. Entonces, el Teorema 2.4 asegura que el sistema es no negativo.

Se puede ver que efectivamente se cumple que el sistema es no negativo a partir de la expresión (2.16). En este caso el vector de estados está dado por

$$\begin{aligned} x(k) &= (E^{\#}A)^k E^{\#}Ex(0) + \sum_{i=0}^{k-1} E^{\#}(E^{\#}A)^{k-i-1}Bu(i) - \\ &\quad -(I - E^{\#}E)A^D Bu(k) \\ &= (2-\alpha)^k \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} x(0) + 2b_1 \sum_{i=0}^{k-1} (2-\alpha)^{k-i-1} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(i) - \\ &\quad - \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ b_3 - b_1 \end{bmatrix} u(k) \end{aligned}$$

y el vector de salidas es

$$\begin{aligned} y(k) &= Cx(k) = (2-\alpha)^k \begin{bmatrix} C_1 + C_3 & C_1 + C_3 & O \end{bmatrix} x(0) \\ &\quad + 2b_1 \sum_{i=0}^{k-1} (2-\alpha)^{k-i-1} (C_1 + C_3) u(i) - C_3(b_3 - b_1)u(k). \end{aligned}$$

Se ha identificado $P = I$, $T = \frac{1}{2}$ y $X = Y = M = N = 1$ como en el Teorema 2.1. La Figura 2.1 muestra la no negatividad de la sucesión de salidas $y(k)$ para diferentes valores del parámetro α y diferentes condiciones iniciales $x(0)$. En ambos casos, se ha elegido $B = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}^t$, $C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ y la sucesión de control $u(i) = i$ para $i = 1, \ldots, k$.

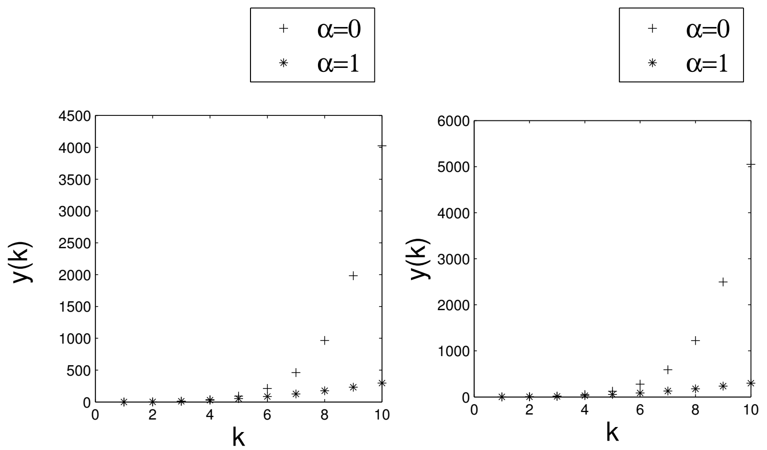

Figura 2.1: La figura de la izquierda representa las salidas $y(k)$ para $x(0) = [0, 0, 0]^t$ y la de la derecha las salidas $y(k)$ para $x(0) = [1, 0, 1]^t$.

En este ejemplo se ha considerado $\alpha < 2$ obteniendo una matriz A invertible. Entonces, la no negatividad de sistema se ha comprobado utilizando el Teorema 2.4. De forma semejante, es posible comprobar la no negativiadad del sistema usando el Teorema 2.3 con cálculos similares. Sin embargo, si se considera el ejemplo con $\alpha = 2$ entonces es más fácil aplicar el Teorema 2.4 que el Teorema 2.3, debido a que en el último se tiene que calcular una inversa de Drazin puesto que la matriz A no es invertible mientras que en el primero no hace falta realizar su cálculo.

El siguiente corolario presenta una situación particular importante del Teorema 2.4.

Corolario 2.5 *Sea* $(\widetilde{E}, \widetilde{A}, \widetilde{B}, \widetilde{C})$ *un sistema singular con* $\widetilde{E}, \widetilde{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $\widetilde{B} \in \mathbb{R}^{n\times m}$, $\widetilde{C} \in \mathbb{R}^{p\times n}$ *matrices tales que* $\widetilde{E} \geq O$, $\mathrm{ind}(\widetilde{E}) = 1$, $\mathrm{rg}(\widetilde{E}) = r > 0$, $\widetilde{E}\widetilde{E}^{\#} \geq O$, $\widetilde{A} = I - \alpha\widetilde{E}$, *para algún escalar* α *y*

$\widetilde{B}$ y $\widetilde{C}$ se particionan como en (2.21) y (2.22), respectivamente. Entonces $(\widetilde{E}, \widetilde{A}, \widetilde{B}, \widetilde{C})$ es no negativo si y sólo si se cumplen las siguientes condiciones:

(a) $T \geq O$,

(b) $T^{-1} - \alpha I \geq O$,

(c) $T^{-1}Y(B_1 + MB_2) \geq O$,

(d) $-B_2 \geq O$,

(e) $(XY - I)(H^D B_1 + SB_2) + XYMB_2 \geq O$,

(f) $NXY(H^D B_1 + SB_2 + MB_2) - UB_1 - VB_2 - B_3 \geq O$,

(g) $(C_1 + C_3N)X \geq O$,

(h) $C_1[(XY-I)(H^D B_1+SB_2)+XYMB_2]-C_2B_2+C_3[NXY(H^D B_1+SB_2 + MB_2) - UB_1 - VB_2 - B_3] \geq O$,

donde X, Y, M, N y T son las matrices definidas en (2.3), $H = I - \alpha XTY$, y S, U y V están dadas en (2.23), (2.24) y (2.25), respectivamente.

2.4.3. Estudio de la no negatividad via realimentaciones

Como se ha presentado en el Capítulo 1, si un sistema no satisface la condición de regularidad entonces no se puede garantizar la existencia de solución del mismo. En este caso la consideración de realimentaciones de estado, es decir, la utilización de controles de la forma

$u(k) = Fx(k)$, con F una matriz de tamaño $n \times m$, permite construir un nuevo sistema que satisfaga dicha condición de regularidad además de otras propiedades.

En esta sección se analiza un sistema (E, A, B, C) con el objetivo de encontrar una realimentación de estados de tal modo que el sistema realimentado cumpla la condición de regularidad. De este modo, una vez garantizada la existencia de solución del nuevo sistema, se podrá estudiar la no negatividad del mismo.

Por tanto, se partirá del sistema (E, A, B, C) dado en (2.14) en el cual la matriz E tiene índice 1 y su proyector de grupo es no negativo. Bajo estas condiciones, el Teorema 2.1 asegura que la matriz E tiene la forma dada en (2.3). Entonces, haciendo el cambio $z(k) = Px(k)$, siendo P la matriz ortogonal que aparece en (2.3), el sistema (2.14) se transforma en el sistema equivalente $(\widetilde{E}, \widetilde{A}, \widetilde{B}, \widetilde{C})$, donde las matrices coeficientes son

$$\widetilde{E} = PEP^t, \quad \widetilde{A} = PAP^t, \quad \widetilde{B} = PB, \quad \widetilde{C} = CP^t. \tag{2.32}$$

Claramente, algunas propiedades de E son heredadas por la matriz $\widetilde{E}$, por ejemplo, $\widetilde{E}$ tiene índice 1 y su proyector de grupo es no negativo.

Sobre este último sistema se realizará una realimentación de estados del tipo $u(k) = Fz(k)$ de modo que el sistema en lazo cerrado $(\widetilde{E}, \widetilde{A} + \widetilde{B}F, \widetilde{C})$, cuya forma es

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \widetilde{E}x(k+1) & = & (\widetilde{A} + \widetilde{B}F)x(k) \\ y(k) & = & \widetilde{C}x(k) \end{array} \right. , \tag{2.33}$$

cumpla la condición de regularidad y sea no negativo.

Con el objetivo de encontrar una matriz adecuada F, ésta se elegirá de manera que

$$\widetilde{A}+\widetilde{B}F = I-\beta\widetilde{E} \tag{2.34}$$

para garantizar que el sistema en lazo cerrado cumple la condición de regularidad. Esta ecuación matricial $\widetilde{B}F = I-\beta\widetilde{E}-\widetilde{A}$ tiene solución si y sólo si $\widetilde{B}\widetilde{B}^{-}(I-\beta\widetilde{E}-\widetilde{A}) = I-\beta\widetilde{E}-\widetilde{A}$ [1], es decir, si y sólo si

$$(I-\widetilde{B}\widetilde{B}^{-})(I-\beta\widetilde{E}-\widetilde{A}) = O.$$

Cuando esta última condición se satisface entonces la forma general de la matriz F viene dada por

$$F = \widetilde{B}^{-}(I-\beta\widetilde{E}-\widetilde{A}) + (I-\widetilde{B}^{-}\widetilde{B})W, \tag{2.35}$$

siendo W una matriz arbitraria de tamaño adecuado.

Además, para asegurar la no negatividad de este sistema se deben analizar las condiciones:

(a) $\widetilde{E}\widetilde{E}^{\#} \geq O$,

(b) $\widetilde{E}^{\#}(\widetilde{A}+\widetilde{B}F) \geq O$,

(c) $\widetilde{C}\widetilde{E}\widetilde{E}^{\#} \geq O$.

La primera de estas tres condiciones se verifica por hipótesis, con lo que sólo es necesario analizar las otras dos.

En primer lugar se estudia la condición (b). Para ello, teniendo en cuenta la forma (2.3) de E, la definición de $\widetilde{E}$ dada en (2.32) y la condición (2.34), se tiene que

$$\widetilde{E}^{\#} = \begin{bmatrix} XT^{-1}Y & XT^{-1}YM & O \\ O & O & O \\ NXT^{-1}Y & NXT^{-1}YM & O \end{bmatrix},$$

con lo que la condición resulta

$$\begin{bmatrix} X(T^{-1}-\beta I)Y & X(T^{-1}-\beta I)YM & O \\ O & I & O \\ NX(T^{-1}-\beta I)Y & NX(T^{-1}-\beta I)YM & I \end{bmatrix} \geq O. \tag{2.36}$$

donde se ha tenido en cuenta que $YX = I$. Esta desigualdad implica que el bloque $(1,1)$ es no negativo, es decir que $X(T^{-1}-\beta I)Y \geq O$. Puesto que X e Y son no negativas y también $YX = I$ se tiene que $T^{-1}-\beta I \geq O$. Se puede notar que es el único bloque que aporta información sobre la no negatividad al ser M y N matrices no negativas.

La siguiente condición que se debe analizar para asegurar la no negatividad del sistema es $\widetilde{C}\widetilde{E}\widetilde{E}^{\#} \geq O$, lo que implica

$$\widetilde{C}\begin{bmatrix} XY & XYM & O \\ O & O & O \\ NXY & NXYM & O \end{bmatrix} \geq O.$$

Particionando en bloques la matriz $\widetilde{C}$ de acuerdo con los tamaños de los bloques de la matriz $\widetilde{E}$ como en (2.22) se tiene que

$$\begin{bmatrix} C_1 & C_2 & C_3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} XY & XYM & O \\ O & O & O \\ NXY & NXYM & O \end{bmatrix} \geq O.$$

De nuevo el bloque $(1,1)$ es el que contiene la información necesaria para asegurar la no negatividad de toda la matriz. Esta condición se transforma en $(C_1 + C_3N)X \geq O$ teniendo en cuenta que $X \geq O$ y que $YX = I$.

Hasta este momento se han encontrado las condiciones necesarias y suficientes para que el sistema en lazo cerrado $(\widetilde{E}, \widetilde{A}+\widetilde{B}F, \widetilde{C})$ cumpla la condición de regularidad y sea no negativo.

Por último, se presenta la solución explícita de dicho sistema mostrando además que efectivamente es no negativa bajo las condiciones encontradas. Como $\widetilde{E}$ tiene índice 1, la inversa de Drazin se reduce a la inversa de grupo, y la solución del sistema realimentado es $y(k) = \widetilde{C}z(k)$ donde $z(k)$ queda de la siguiente manera [35]:

$$z(k) = (\widetilde{E}^{\#}(I - \beta\widetilde{E}))^k \widetilde{E}^{\#}\widetilde{E}z(0)$$

siendo $z(0) \in \operatorname{Im}\begin{bmatrix} \widetilde{E}^{\#}\widetilde{E} & (I - \widetilde{E}^{\#}\widetilde{E})(I - \beta\widetilde{E})^D \end{bmatrix}$ donde $(I - \beta\widetilde{E})^D$ representa la inversa de Drazin de la matriz $I - \beta\widetilde{E}$ [1]. Este último conjunto es el subespacio de las condiciones iniciales admisibles del sistema. Ahora, reescribiendo $z(k)$ mediante propiedades de la inversa de grupo se tiene

$$\begin{aligned} z(k) &= ((I - \beta\widetilde{E})\widetilde{E}^{\#})^k z(0) \\ &= \begin{bmatrix} X(T^{-1} - \beta I)^k Y & X(T^{-1} - \beta I)^k YM & O \\ O & O & O \\ NX(T^{-1} - \beta I)^k Y & NX(T^{-1} - \beta I)^k YM & O \end{bmatrix} z(0). \end{aligned}$$

De esta expresión se observa que los estados $z(k)$ son no negativos cuando $T^{-1} - \beta I \geq O$ y $z(0) \geq 0$.

Por tanto, la salida del sistema viene dada por:

$$\begin{aligned} y(k) &= \widetilde{C}\begin{bmatrix} X(T^{-1} - \beta I)^k Y & X(T^{-1} - \beta I)^k YM & O \\ O & O & O \\ NX(T^{-1} - \beta I)^k Y & NX(T^{-1} - \beta I)^k YM & O \end{bmatrix} z(0) \\ &= (C_1 + C_3N)X(T^{-1} - \beta I)^k Y \begin{bmatrix} I & M & O \end{bmatrix} z(0) \end{aligned}$$

donde se ve claramente que si $(C_1 + C_3N)X \geq O$ y $T^{-1} - \beta I \geq O$ entonces $y(k) \geq 0$ para una condición inicial admisible no negativa.

Todo este razonamiento se presenta resumido en un algoritmo que analiza la existencia de una realimentación y su construcción para un sistema singular de control cuya matriz E tiene índice 1 y satisface $EE^{\#} \geq O$.

Algoritmo.

Entrada: Sistema singular (E, A, B, C) tal que $EE^{\#} \geq O$.

Salidas: La matriz F tal que el sistema en lazo cerrado $(\widetilde{E}, \widetilde{A} + \widetilde{B}F, \widetilde{C})$ es no negativo (y satisface la condición de regularidad) y la solución de dicho sistema.

Paso 1: Transformar el sistema original (E, A, B, C) en el sistema equivalente $(\widetilde{E}, \widetilde{A}, \widetilde{B}, \widetilde{C})$ dado en (2.32).

Paso 2: Si $(C_1 + C_3N)X < O$ entonces '*No existe una matriz F para que el sistema en lazo cerrado sea no negativo*'. Ir al Fin.

Paso 3: Elegir un escalar β tal que $T^{-1} - \beta I \geq O$ y una matriz $\{1\}$-inversa generalizada $\widetilde{B}^{-}$.

Paso 4: Si $(I - \widetilde{B}\widetilde{B}^{-})(I - \beta\widetilde{E} - \widetilde{A}) \neq O$ entonces volver al Paso 3 o ir al Fin.

Paso 5: Construir la matriz F como

$$F = \widetilde{B}^{-}(I - \beta\widetilde{E} - \widetilde{A}) + (I - \widetilde{B}^{-}\widetilde{B})W$$

con W una matriz arbitraria.

Paso 6: Por tanto '*El sistema en lazo cerrado es no negativo y satisface la condición de regularidad*'. Las salidas del sistema $(\widetilde{E}, \widetilde{A}+\widetilde{B}F, \widetilde{C})$ vienen dadas por

$$y(k) = (C_1+C_3N)X(T^{-1}-\beta I)^k Y \begin{bmatrix} I & M & O \end{bmatrix} z(0).$$

Fin

Si al elegir un escalar β y una matriz $\widetilde{B}^-$ en el Paso 3, la condición $(I-\widetilde{B}\widetilde{B}^-)(I-\beta\widetilde{E}-\widetilde{A}) = O$ no se cumple, se debe realizar una nueva elección de ellos. Es posible fijar uno de ellos y cambiar el otro o bien cambiar los dos simultáneamente. En cualquier caso, un criterio de parada puede ser que este paso se realice un número finito de veces.

Por otro lado, la matriz W del paso 5 se puede elegir de manera arbitraria lo que produce diferentes realimentaciones para el valor de β y la matriz $\widetilde{B}^-$ fijados. Si sólo se requiere calcular una realimentación basta tomar $W = O$, pero si se quieren hallar otras realimentaciones puede hacerse variando esta matriz W.

Por último, la condición inicial $z(0)$ que aparece en la solución del sistema realimentado en el Paso 6 debe elegirse de entre las condiciones admisibles del sistema.

CAPÍTULO 3

Matrices de índice $k > 1$ y aplicaciones a teoría de control

3.1. Introducción

En los últimos años, el interés por estudiar la no negatividad de los sistemas lineales de control ha ido en aumento [22] debido a su aplicabilidad en diferentes campos de ingeniería, economía, etc. En todos ellos surge la necesidad de obtener una respuesta del sistema que sea no negativa. Por ejemplo, cuando representan poblaciones, probabilidades, consumo de bienes, densidades de sustancias químicas, etc. Dado que la solución de un sistema singular de control involucra la inversa de Drazin de la matriz singular de coeficientes, la no negatividad de la solución está ligada con la propiedad de no negatividad de dicha inversa de Drazin entre otras. Así, la caracterización de la solución de este tipo de sistemas se ha desarrollado utilizando la no negatividad de la matriz de coeficientes. Recientemente, se han obtenido algunos resultados que involucran la propiedad de no negatividad de la matriz y de su proyector de grupo [27] como se ha presentado en el capítulo anterior. En estos casos sólo se han considerado matrices de índice 1.

En este capítulo se pretende generalizar los resultados obtenidos en el capítulo anterior para matrices de índice mayor que 1 tanto en lo que se refiere al estudio de la no negatividad de las matrices en sí mismas, como al estudio de la no negatividad de los sistemas singulares de control.

La no negatividad de las inversas generalizadas para matrices de índice $k > 1$ ha sido abordada en la literatura desde diferentes puntos de vista. Por ejemplo, en [3], A. Berman y R. J. Plemmons dan una caracterización de las matrices monótonas de Drazin. Estas matrices son matrices cuadradas cuya inversa de Drazin es no negativa y su caracterización involucra el octante positivo y el espacio nulo de la $k-$ésima potencia de la matriz. Concretamente se tiene que si $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ es una matriz de índice k, $\mathcal{N}(A^k)$ denota el espacio nulo de A^k y $\mathcal{R}(A^k)$ su espacio imagen, entonces A es una matriz monótona de Drazin si y sólo si se cumple que

$$Ax \in \mathbb{R}^n_+ + \mathcal{N}(A^k), \quad x \in \mathcal{R}(A^k) \qquad \Longrightarrow \qquad x \geq 0.$$

Así mismo, Jain y Goel presentaron algunos resultados para determinar cuando una matriz cuadrada no negativa admite una inversa de Drazin no negativa [31] dando una forma general para este tipo de matrices como suma de r matrices de índice 1 y una matriz nilpotente.

El principal objetivo de este capítulo es dar caracterizaciones de matrices cuadradas A que satisfagan diferentes condiciones de no negatividad. Con ello se pretende generalizar lo expuesto anteriormente para matrices cuadradas de índice 1. Para ello se definen los conjuntos correspondientes a matrices cuadradas de índice superior de manera que con ellos se cubran todas las posibilidades en las que aparece la inversa de Drazin. Estos conjuntos se definen a partir de las siguientes desigualdades:

(I) $A^D \geq O$,

(II) $AA^D \geq O$,

(III) $A \geq O$ y $A^D \geq O$,

(IV) $A \geq O$ y $AA^D \geq O$,

(V) $A^D \geq O$ y $AA^D \geq O$.

En primer lugar se analizan estos conjuntos dando caracterizaciones o condiciones necesarias para que una matriz cuadrada pertenezca a dichos conjuntos. A continuación se aborda el estudio de las matrices $\{l\}$- periódicas de Drazin y por último se aplican los resultados existentes sobre matrices al análisis de la no negatividad de los sistemas singulares de control.

3.2. Matrices de índice $k > 1$

En esta sección se introducen diferentes conjuntos que involucran la inversa de Drazin de una matriz y se analizan las condiciones que se deben verificar en cada uno de ellos.

En primer lugar se tiene el conjunto de las matrices monótonas de Drazin dado por

$$\mathcal{PD} = \{A \in \mathbb{R}^{n\times n} :\ A^D \geq O\}$$

y agregando la no negatividad de la matriz A se obtienen las matrices monótonas de Drazin no negativas:

$$\mathcal{PPD} = \{A \in \mathbb{R}^{n\times n} :\ A \geq O,\ A^D \geq O\}.$$

Por otro lado, cuando se considera el proyector de Drazin de la matriz A (es decir, el producto AA^D), se puede definir el conjunto de las matrices no negativas cuyo proyector de Drazin es también no negativo:

$$\mathcal{PPDP} = \{A \in \mathbb{R}^{n\times n} :\ A \geq O,\ AA^D \geq O\},$$

o aquellas en las que sólo el proyector de Drazin es no negativo:

$$\mathcal{PDP} = \{A \in \mathbb{R}^{n\times n} :\ AA^D \geq O\},$$

y también el conjunto de las matrices monótonas de Drazin con proyector de Drazin no negativo:

$$\mathcal{PDPDP} = \{A \in \mathbb{R}^{n\times n} :\ A^D \geq O,\ AA^D \geq O\}$$

cuando se exige además la no negatividad de la inversa de Drazin de la matriz A.

Cabe destacar que, en el caso de matrices de índice mayor que 1 donde intervienen las inversas de Drazin, no se puede establecer una biyección similar a la definida para matrices de índice 1. Esto es debido a que, en general, $(A^D)^D \neq A$. De ahí la necesidad de incluir este último conjunto que, como se puede observar, no aparece en el estudio realizado en el capítulo anterior para índice 1 gracias a la existencia de dicha biyección para este último tipo de matrices.

Sin embargo, se pueden establecer otras relaciones entre los conjuntos anteriormente definidos.

Lema 3.1 *Los conjuntos definidos anteriormente satisfacen las siguientes relaciones:*

(a) $\mathcal{PPD} \subset \mathcal{PPDP} \subset \mathcal{PDP}$.

(b) $\mathcal{PPD} = \mathcal{PPDP} \cap \mathcal{PD} \subset \mathcal{PD}$.

(c) $\mathcal{PPD} \subset \mathcal{PDPDP} = \mathcal{PDP} \cap \mathcal{PD}$.

En general, todas las inclusiones son estrictas.

Demostración. Las inclusiones e igualdades especificadas son fácilmente obtenidas a partir de las definiciones de los conjuntos y de las propiedades de la inversa de Drazin. Por lo tanto, se debe centrar la atención en comprobar que las inclusiones son estrictas. Para ello, se buscan matrices que sirvan de contraejemplos.

En primer lugar, la matriz A de índice 3 siguiente

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

no es no negativa y satisface que su inversa de Drazin y su proyector de Drazin son ambos no negativos:

$$A^D = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \geq O \quad \text{y} \quad AA^D = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \geq O$$

por lo tanto se prueba que las inclusiones $\mathcal{PPD} \subset \mathcal{PD}$, $\mathcal{PPDP} \subset \mathcal{PDP}$ y $\mathcal{PPD} \subset \mathcal{PDPDP}$ son realmente estrictas. Con esto se han demostrado los apartados (b), (c) y parte del apartado (a).

Para completar la demostración del apartado (a) se debe estudiar el caso $\mathcal{PPD} \subset \mathcal{PPDP}$. Esta inclusión es esctricta puesto que la matriz

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

de índice 3 es no negativa y satisface que su proyector de Drazin es también no negativo:

$$A^D = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \ngeq O \quad \text{y} \quad AA^D = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \geq O.$$

Sin embargo, como se puede ver, su inversa de Drazin no es no negativa. Con esto se termina la demostración. ■

Todas estas relaciones entre conjuntos, incluidas las especificadas en el capítulo anterior para matrices de índice 1 y sus inversas de grupo, se pueden resumir en la Figura 3.1. En dicho gráfico, las líneas continuas ascendentes indican la inclusión estricta entre los conjuntos conectados. Además, se han tenido también en cuenta las relaciones de inclusión entre los conjuntos que involucran las inversas de grupo y aquellos que involucran las inversas de Drazin ya que ambas inversas coinciden cuando la matriz tiene índice 1.

Así se tiene la inclusión estricta

$$\{A \in \mathbb{R}^{n\times n} : A^{\#} \geq O,\, AA^{\#} \geq O\} \subsetneq \mathcal{PDPDP}.$$

Esta inclusión permite establecer una relación de inyección entre el conjunto $\mathcal{PPGP}$ y el conjunto $\mathcal{PDPDP}$, la cual se ha indicado con una línea de puntos en la Figura 3.1. Esta inyección se define del mismo modo en que se ha establecido la biyección φ introducida en el Capítulo 2.

A continuación se estudian los conjuntos definidos anteriormente con la intención de obtener condiciones que los caractericen. Para ello se utilizará una ligera modificación del resultado dado en el Lema 1.2. Si $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ es una matriz de índice $k > 0$ siempre se puede escribir como [11]:

$$A = S\begin{bmatrix} C & O \\ O & N_1 \end{bmatrix} S^{-1} = B_A + N_A, \tag{3.1}$$

donde se ha denotado

$$B_A = S\begin{bmatrix} C & O \\ O & O \end{bmatrix} S^{-1} \qquad \text{y} \qquad N_A = S\begin{bmatrix} O & O \\ O & N_1 \end{bmatrix} S^{-1},$$

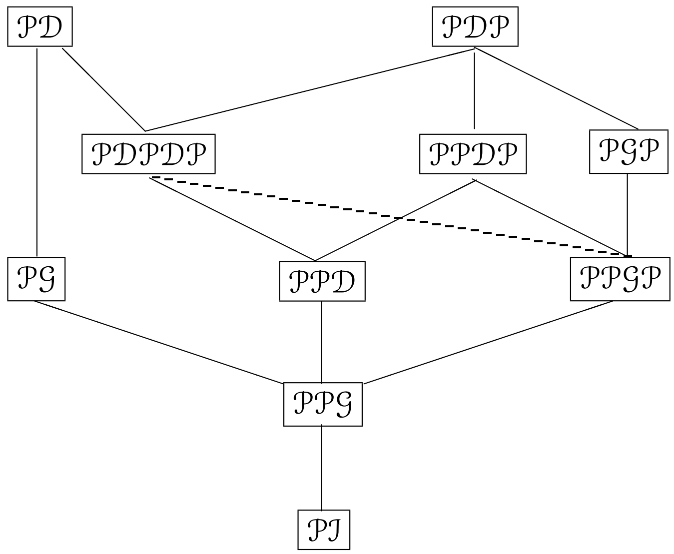

Figura 3.1: Relaciones de inclusión entre los diferentes conjuntos de matrices.

siendo S y C matrices no singulares y N_1 una matriz nilpotente de índice de nilpotencia k. De esta manera, B_A es una matriz de índice 1 y N_A es una matriz nilpotente con índice de nilpotencia k. Como se ha indicado en la introducción, esta descomposición recibe el nombre de descomposición core-nilpotente de la matriz A.

En primer lugar cabe establecer el siguiente lema.

Lema 3.2 *Sea $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ una matriz de índice $k > 1$. Entonces $AA^D = O$ si y sólo si A es la matriz nula o es una matriz nilpotente de índice de nilpotencia k.*

Demostración.

Si $AA^D = O$ entonces premultiplicando ambos miembros de la igualdad por A^D y usando la definición de inversa de Drazin se tiene que

$$A^D = A^D A A^D = O.$$

Si $A \neq O$, y teniendo en cuenta la expresión (1.2) de la página 5, se deduce que la matriz invertible C no puede aparecer en la descomposicón core-nilpotente de A. De este modo, debe ser $A = PNP^{-1}$ para alguna matriz nilpotente de índice de nilpotencia k.

La implicación recíproca se puede deducir de nuevo a partir de la descomposición core-nilpotente de la matriz A. ■

Por tanto, en lo sucesivo se considerarán los casos restantes en los que el proyector de Drazin de la matriz A no es la matriz nula.

El primer resultado que se presenta caracteriza el conjunto de matrices $\mathcal{PDP}$.

Teorema 3.1 *Dada la matriz $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, sea $B_A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ la matriz de la descomposición core-nilpotente (3.1) de A con $\operatorname{rg}(B_A) = r > 0$. Entonces $A \in \mathcal{PDP}$ si y sólo si existe una matriz de permutación $P \in \mathbb{R}^{n\times n}$ tal que la matriz B_A viene dada por*

$$B_A = P \begin{bmatrix} XTY & XTYM & O \\ O & O & O \\ NXTY & NXTYM & O \end{bmatrix} P^T \tag{3.2}$$

donde los bloques diagonales son cuadrados, M y N son matrices no negativas arbitrarias de tamaños apropiados, $T \in \mathbb{R}^{r\times r}$ es una matriz invertible, y además $X = \operatorname{diag}(x_1, \ldots, x_r)$ e $Y = \operatorname{diag}(y_1^T, \ldots, y_r^T)$ siendo x_i e y_j vectores columna positivos con $i, j \in \{1, \ldots, r\}$ tales que $YX = I$.

En este caso,

$$A^D = P \begin{bmatrix} XT^{-1}Y & XT^{-1}YM & O \\ O & O & O \\ NXT^{-1}Y & NXT^{-1}YM & O \end{bmatrix} P^T. \tag{3.3}$$

Demostración. De la descomposición core-nilpotente (3.1) de la matriz A se tiene que $A^D = B_A^{\#}$ y que

$$AA^D = (B_A + N_A)B_A^{\#} = B_A B_A^{\#} + N_A B_A^{\#} = B_A B_A^{\#}$$

ya que $N_A B_A^{\#} = O$. Puesto que se satisface que $B_A B_A^{\#} = AA^D \geq O$ y que $\mathrm{rg}(B_A) > 0$, se puede aplicar el Teorema 2.1 el cual asegura que la matriz B_A tiene la forma especificada en el enunciado. ■

A continuación se aborda el estudio del conjunto $\mathcal{PDPDP}$.

Teorema 3.2 *Dada la matriz $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, sea $B_A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ la matriz de la descomposición core-nilpotente (3.1) de A con $\mathrm{rg}(B_A) = r > 0$. Entonces $A \in \mathcal{PDPDP}$ si y sólo si existe una matriz de permutación $P \in \mathbb{R}^{n\times n}$ tal que la matriz B_A viene dada por*

$$B_A = P \begin{bmatrix} XTY & XTYM & O \\ O & O & O \\ NXTY & NXTYM & O \end{bmatrix} P^T$$

donde los bloques diagonales son cuadrados, M y N son matrices no negativas arbitrarias de tamaños apropiados, $T \in \mathbb{R}^{r\times r}$ es una matriz invertible con $T^{-1} \geq O$, y además se tiene que $X = \mathrm{diag}(x_1, \ldots, x_r)$ e $Y = \mathrm{diag}(y_1^T, \ldots, y_r^T)$ siendo x_i e y_j vectores columna positivos con $i, j \in \{1, \ldots, r\}$ tales que $YX = I$.

Demostración. Aplicando el Teorema 3.1 se obtiene que B_A tiene la forma requerida con $T \in \mathbb{R}^{r\times r}$ una matriz invertible. Para asegurar la no negatividad de la matriz T^{-1} se tiene en cuenta que $A^D = B_A^{\#}$ tiene la forma dada en (3.3). Luego, un simple cálculo lleva a que la no negatividad de T^{-1} es debida a la no negatividad de la matriz A^D. La implicación recíproca es evidente con lo que el teorema queda demostrado. ∎

Los siguientes resultados surgen del estudio del resto de los conjuntos definidos.

Teorema 3.3 *Dada la matriz $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, sea $B_A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ la matriz de la descomposición core-nilpotente (3.1) de A con $\mathrm{rg}(B_A) = r > 0$. Si $A \in \mathcal{PPDP}$ entonces existe una matriz de permutación $P \in \mathbb{R}^{n\times n}$ tal que la matriz B_A tiene la forma*

$$B_A = P \begin{bmatrix} XTY & XTYM & O \\ O & O & O \\ NXTY & NXTYM & O \end{bmatrix} P^T$$

donde los bloques diagonales son cuadrados, M y N son matrices no negativas arbitrarias de tamaños apropiados, $T \in \mathbb{R}^{r\times r}$ es una matriz invertible con $T \geq O$, y además se tiene que $X = \mathrm{diag}(x_1, \ldots, x_r)$ e $Y = \mathrm{diag}(y_1^T, \ldots, y_r^T)$ siendo x_i e y_j vectores columna positivos con $i, j \in \{1, \ldots, r\}$ tales que $YX = I$.

Demostración. Aplicando el Teorema 3.1 se tiene que B_A tiene la forma especificada en el enunciado del teorema donde se cumple la condición que $T \in \mathbb{R}^{r\times r}$ es una matriz invertible. La matriz B_A (correspondiente a la parte core) está relacionada con la matriz AA^DA.

Para ver esta última afirmación se usa la descomposición core-nilpotente de A, el hecho que $N_A B_A^{\#} = B_A^{\#} N_A = O$ (puesto que $B_A^{\#}$ es un polinomio en B_A) y las propiedades de la inversa de grupo, llegando a

$$\begin{aligned} AA^D A &= (B_A + N_A) B_A^{\#} (B_A + N_A) \\ &= B_A B_A^{\#} B_A + N_A B_A^{\#} B_A + B_A B_A^{\#} N_A + N_A B_A^{\#} N_A \\ &= B_A. \end{aligned}$$

Entonces, puesto que $A \geq O$ y $AA^D \geq O$, se tiene que $B_A \geq O$ y esto implica que $T \geq O$ realizando un simple cálculo. Con esto se completa la demostración. ■

Como se puede ver este teorema presenta una condición necesaria para que una matriz A esté en el conjunto $\mathcal{PPDP}$. Sin embargo no representa una condición suficiente ya que, en general, el sentido inverso no es válido. Prueba de ello es el siguiente ejemplo.

Ejemplo 3.1 *La matriz*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

no es no negativa y su descomposición core-nilpotente es $A = B_A + N_A$

donde

$$B_A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \geq O \qquad y \qquad N_A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

siendo N_A nilpotente, B_A de índice 1 escrita como (3.2) con

$$T = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \geq O \quad \textit{e invertible,}$$

y $M = N = O$, $X = Y = I$ y $P = I$.

No obstante, se puede establecer un resultado parcial en el sentido recíproco.

Observación 3.1 *Siguiendo la misma notación que en el Teorema 3.3, se tiene que si $A = B_A + N_A$ con B_A de la forma (3.2) y T una matriz invertible no negativa entonces $AA^D \geq O$ y $B_A \geq O$.*

En el siguiente teorema se establece una condición necesaria para el conjunto $\mathcal{PPD}$.

Teorema 3.4 *Dada la matriz $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, sea $B_A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ la matriz que aparece en la descomposición core-nilpotente (3.1) de A con $\operatorname{rg}(B_A) = r > 0$. Si $A \in \mathcal{PPD}$ entonces existe una matriz de permutación $P \in \mathbb{R}^{n \times n}$ tal que la matriz B_A se escribe de la forma*

$$B_A = P \begin{bmatrix} XTY & XTYM & O \\ O & O & O \\ NXTY & NXTYM & O \end{bmatrix} P^T \tag{3.4}$$

donde los bloques diagonales son cuadrados, M y N son matrices no negativas arbitrarias de tamaños apropiados, $T \in \mathbb{R}^{r\times r}$ es una matriz invertible con $T \geq O$ y $T^{-1} \geq O$, $X = \mathrm{diag}(x_1, \ldots, x_r)$ e $Y = \mathrm{diag}(y_1^T, \ldots, y_r^T)$ siendo x_i e y_j vectores columna positivos con $i, j \in \{1, \ldots, r\}$ tales que $YX = I$.

Demostración. Bajo las hipótesis pedidas, el Teorema 3.2 asegura que B_A tiene la forma requerida con $T \in \mathbb{R}^{r\times r}$ una matriz invertible que satisface que $T^{-1} \geq O$. Además, como por hipótesis $A \geq O$ y $A^D \geq O$ se tiene la no negatividad del proyector de Drazin, $AA^D \geq O$. Por tanto se puede aplicar también el Teorema 3.3, el cual premite asegurar que $T \geq O$. Con esto se completa la demostración del teorema. ■

Como ocurría para el resultado anterior, el resultado recíproco del Teorema 3.4 no se verifica en general. El siguiente ejemplo permite comprobar esta afirmación.

Ejemplo 3.2 *La matriz de índice 2*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

no es no negativa y su desomposición core-nilpotente es $A = B_A + N_A$ donde

$$B_A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \geq O \qquad y \qquad N_A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

siendo N_A una matriz nilpotente, B_A una matriz de índice 1 escrita como en (3.2) con $T = I$, $M = N = O$, $X = Y = I$ y $P = I$.

De nuevo, el resultado recíproco se puede establecer sólo parcialmente.

Observación 3.2 *Siguiendo la misma notación que en el Teorema 3.4, se tiene que si $A = B_A + N_A$ teniendo B_A la forma dada en (3.2) con T y T^{-1} matrices no negativas entonces $A^D \geq O$ y $B_A \geq O$.*

Para finalizar el estudio de los conjuntos definidos usando la inversa de Drazin y el proyector de Drazin de una matriz A, se presenta una observación en la que se ha tenido en cuenta la no negatividad de la matriz A.

Observación 3.3 *Siguiendo la misma notación que en los teoremas anteriores se obtienen las siguientes equivalencias cuando se asume la no negatividad de la matriz A. Es decir, bajo la hipótesis $A \geq O$ se tiene que:*

(a) $AA^D \geq O$ si y sólo si B_A tiene la forma dada en (3.2) con $T \geq O$ e invertible.

(b) $A^D \geq O$ si y sólo si B_A tiene la forma dada en (3.2) con $T \geq O$ y $T^{-1} \geq O$.

3.3. Matrices $\{l\}$-periódicas de Drazin

En el capítulo anterior se introdujeron las matrices $\{l\}$-periódicas de grupo como una generalización de las matrices involutivas de grupo. Además, se caracterizaron haciendo uso de los resultados obtenidos para caracterizar los diferentes conjuntos que involucran la inversa de grupo y el proyector de grupo. Del mismo modo, en esta sección se introducen las matrices $\{l\}$-periódicas de Drazin para cualquier entero $l > 1$ y se caracterizan utilizando los resultados establecidos en la sección anterior y la descomposición core-nilpotente (3.1) de una matriz cuadrada A de índice $k > 0$.

En primer lugar se presenta la siguiente definición.

Definición 3.1 *Sea $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ una matriz de índice $k > 0$ y sea $l \in \{2, 3, \dots\}$. Se dice que A es $\{l\}$-periódica de Drazin si*

$$A^D = A^{l-1}.$$

Esta definición coincide con la Definición 2.1 de la página 33 cuando el índice de la matriz sea $k = 1$. Análogamente se puede establecer una caracterización inmediata de las matrices $\{l\}$-periódicas de Drazin.

Lema 3.3 *Sea $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ una matriz de índice $k > 0$ y sea $l \in \{2, 3, \dots\}$. Entonces A es $\{l\}$-periódica de Drazin si y sólo si se cumple $A^{l-1} = A^{2l-1}$ y $A^k = A^{k+l}$.*

Demostración. Si $A^D = A^{l-1}$ entonces de la primera condición de la definición de inversa de Drazin se tiene que $A^{l-1}AA^{l-1} = A^{l-1}$, es decir que $A^{2l-1} = A^{l-1}$. Además, de la tercera condición de la definición se tiene que $A^{k+1}A^{l-1} = A^k$, es decir que $A^{k+l} = A^k$.

Recíprocamente, si $A^{l-1} = A^{2l-1}$ y $A^k = A^{k+l}$, veamos que $X = A^{l-1}$ satisface las condiciones de la definición de inversa de Drazin:

(a) $XAX = A^{l-1}AA^{l-1} = A^{2l-1} = A^{l-1} = X$,

(b) $AX = AA^{l-1} = A^l = A^{l-1}A = XA$,

(c) $A^{k+1}X = A^{k+1}A^{l-1} = A^{k+l} = A^k$.

Por tanto de la unicidad de la matriz inversa de Drazin se tiene que $A^D = X = A^{l-1}$. ■

A continuación se presenta un resultado previo a la caracterización de las matrices $\{l\}$-periódicas de Drazin.

Lema 3.4 *Dada la matriz $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, sea $B_A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ la matriz que aparece en la descomposición core-nilpotente (3.1) de A con $\mathrm{rg}(B_A) = r > 0$ y sea $l > 1$ tal que $B_A^l \geq O$. Si $A^D = A^{l-1}$ entonces existe una matriz de permutación $P \in \mathbb{R}^{n\times n}$ tal que*

$$B_A = P \begin{bmatrix} XTY & XTYM & O \\ O & O & O \\ NXTY & NXTYM & O \end{bmatrix} P^T$$

donde los bloques diagonales son cuadrados, M, N son matrices no negativas arbitrarias de tamaños adecuados, $T \in \mathbb{R}^{r\times r}$ es una matriz invertible tal que $T^l = I$ y $X = \mathrm{diag}(x_1, \ldots, x_r)$ e $Y = \mathrm{diag}(y_1^T, \ldots, y_r^T)$ siendo x_i e y_i vectores columna positivos con $i, j \in \{1, \ldots, r\}$ tal que $YX = I$.

Demostración. La condición $A^D = A^{l-1}$ implica que

$$B_A^{\#} = (B_A + N_A)^{l-1} = B_A^{l-1} + N_A^{l-1}$$

ya que $B_A N_A = N_A B_A = O$. Entonces, $B_A B_A^{\#} = B_A^l \geq O$, por lo tanto se puede aplicar el Teorema 2.1 obteniendo que B_A y $B_A^{\#}$ tienen la forma dada en (2.3) y (2.4), respectivamente.

Además, gracias a estas expresiones, la igualdad $B_A B_A^{\#} = B_A^l$ se puede escribir como

$$\begin{bmatrix} XY & XYM & O \\ O & O & O \\ NXY & NXYM & O \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} XT^lY & XT^lYM & O \\ O & O & O \\ NXT^lY & NXT^lYM & O \end{bmatrix},$$

de lo que se sigue que $XY = XT^lY$. Premultiplicando por Y, post-multiplicando por X y utilizando que $YX = I$, se obtiene que $T^l = I$.

■

Como se puede ver, este lema da solamente condiciones necesarias para obtener $A^D = A^{l-1}$. En el siguiente resultado se presentan condiciones necesarias y suficientes.

Teorema 3.5 *Dada la matriz $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, sea $B_A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ la matriz que aparece en la descomposición core-nilpotente (3.1) de A con $\mathrm{rg}(B_A) = r > 0$ y sea $l > 1$ tal que $B_A^l \geq O$. Entonces*

$$A^D = \begin{cases} A^{l-1} & l \geq k+1 \\ A^{l-1} - N_A^{l-1} & l < k+1 \end{cases}$$

si y sólo si existe una matriz de permutación $P \in \mathbb{R}^{n\times n}$ tal que

$$B_A = P \begin{bmatrix} XTY & XTYM & O \\ O & O & O \\ NXTY & NXTYM & O \end{bmatrix} P^T \tag{3.5}$$

donde los bloques diagonales son cuadrados, M, N son matrices no negativas arbitrarias de tamaños adecuados, $T \in \mathbb{R}^{r\times r}$ es una matriz invertible tal que $T^l = I$ y además $X = diag(x_1, \ldots, x_r)$ e $Y =$

$diag(y_1^T, \ldots, y_r^T)$ siendo x_i e y_i vectores columna positivos con $i, j \in \{1, \ldots, r\}$ tal que $YX = I$.

Demostración. La necesidad queda prácticamente demostrada por el Lemma 3.4, sólo queda por probar que la condición $A^D = A^{l-1} - N_A^{l-1}$ implica que B_A tiene la forma dada en (3.5) cuando $l < k+1$. Claramente, $A^D = B_A^{\#} = (B_A + N_A)^{l-1} - N_A^{l-1} = B_A^{l-1}$. Entonces, $B_A B_A^{\#} = B_A^l \geq O$. Siguiendo un razonamiento similar al desarrollado en el Lema 3.4 se obtiene que B_A tiene la forma dada en (3.5) con $T^l = I$.

Recíprocamente, dado que $A^D = B_A^{\#} = B_A^{l-1}$ puesto que $T^l = I$, entonces

$$A^{l-1} = B_A^{l-1} + N_A^{l-1} = \begin{cases} A^D & l \geq k+1 \\ A^D + N_A^{l-1} & l < k+1 \end{cases}$$

como se quería demostrar. ■

El siguiente corolario prueba que el teorema anterior incluye también el caso $k = 1$.

Corolario 3.1 *Dada la matriz $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ con $\mathrm{rg}(A) = r > 0$ e $\mathrm{ind}(A) = 1$, sea $l \geq 1$ tal que $A^l \geq O$. Entonces $A^{l+1} = A$ si y sólo si existe una matriz de permutación $P \in \mathbb{R}^{n\times n}$ tal que*

$$A = P \begin{bmatrix} XTY & XTYM & O \\ O & O & O \\ NXTY & NXTYM & O \end{bmatrix} P^T \qquad (3.6)$$

donde los bloques diagonales son cuadrados, M, N son matrices no negativas arbitrarias de tamaños adecuados, $T \in \mathbb{R}^{r\times r}$ es una matriz invertible tal que $T^l = I$ y además $X = diag(x_1, \ldots, x_r)$ e $Y =$

$diag(y_1^T, \dots, y_r^T)$ siendo x_i e y_i vectores columna positivos con $i, j \in \{1, \dots, r\}$ tal que $YX = I$.

Demostración. El caso $l > 1$ es una consecuencia directa del Teorema 3.5 puesto que $A^{\#} = A^{l-1}$ es equivalente a $A^{l+1} = A$ y entonces la descomposición core-nilpotente resulta $A = B_A$ para $k = 1$. El caso $l = 1$ corresponde al Lema 2.2 (donde $A^2 = A$ y $T = I$). ■

Además, si se agrega la no negatividad de la matriz A, se conserva la forma de A teniendo en cuenta que en este caso la matriz T debe ser también no negativa. Es decir, para $l \geq 1$ se tiene que:

$$A \geq O \text{ y } A^{l+1} = A \Longleftrightarrow A \text{ tiene la forma (3.6) con } T \geq O \text{ y } T^l = I.$$

Sin embargo, para índices mayores que 1, las relaciones cambian ligeramente siendo las siguientes.

Observación 3.4 *Los casos correspondientes a $A^D \geq O$ o $A \geq O$ pueden ser estudiados como en el Teorema 3.5 obteniendo los siguientes resultados para $l > 1$.*

(a) $A^D \geq O$ y

$$A^D = \begin{cases} A^{l-1} & l \geq k+1 \\ A^{l-1} - N_A^{l-1} & l < k+1 \end{cases}$$

si y sólo si B_A tiene la forma dada en (3.5) con $T^{-1} \geq O$ y $T^l = I$.

(b) Si $A \geq O$ y

$$A^D = \begin{cases} A^{l-1} & l \geq k+1 \\ A^{l-1} - N_A^{l-1} & l < k+1 \end{cases}$$

entonces B_A tiene la forma dada en (3.5) con $T \geq O$ y $T^l = I$ (además, $T^{-1} \geq O$ cuando $l \geq k+1$).

El ejemplo 3.2 puede ser utilizado para ver que el recíproco del apartado (b) no es válido en general.

3.4. Aplicaciones a teoría de control

En esta sección se pretende analizar las condiciones que garantizan que un sistema singular de control sea no negativo haciendo uso de los resultados presentados anteriormente sobre matrices de índice mayor que 1. Como en el capítulo anterior, el hecho de trabajar con matrices por bloques permite en general el manejo de matrices de menor tamaño que las originales facilitando así una mejor implementación computacional.

Como se ha introducido en el capítulo anterior, se considerará un sistema singular de control en tiempo-discreto (E, A, B, C) descrito por:

$$\left\{ \begin{array}{rcl} Ex(k+1) & = & Ax(k) + Bu(k) \\ y(k) & = & Cx(k) \end{array} \right. \tag{3.7}$$

donde $E, A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $B \in \mathbb{R}^{n \times m}$, $C \in \mathbb{R}^{p \times n}$, $x(k) \in \mathbb{R}^{n \times 1}$, $u(k) \in \mathbb{R}^{m \times 1}$ e $y(k) \in \mathbb{R}^{p \times 1}$. Se supondrá que se satisface la condición de regularidad y por lo tanto el sistema tendrá solución dada por $y(k) = \widehat{C}x(k)$ donde los estados se escriben como:

$$\begin{array}{rcl} x(k) & = & (\widehat{E}^D\widehat{A})^k\widehat{E}^D\widehat{E}x(0) + \displaystyle\sum_{i=0}^{k-1}\widehat{E}^D(\widehat{E}^D\widehat{A})^{k-i-1}\widehat{B}u(i) - \\ & & -\displaystyle\sum_{i=0}^{q-1}(I - \widehat{E}^D\widehat{E})(\widehat{E}\widehat{A}^D)^i\widehat{A}^D\widehat{B}u(k+i) \end{array}$$

siendo $q = \mathrm{ind}(\widehat{E})$, $x(0)$ una condición inicial admisible y

$$\begin{array}{ll} \widehat{E} = (\alpha E + A)^{-1} E & \widehat{A} = (\alpha E + A)^{-1} A \\ \widehat{B} = (\alpha E + A)^{-1} B & \widehat{C} = C \end{array} \tag{3.8}$$

matrices que satisfacen que $\mathrm{Ker}(\widehat{E}) \cap \mathrm{Ker}(\widehat{A}) = \{0\}$, $\widehat{A} = I - \alpha\widehat{E}$ y $\widehat{E}\widehat{A} = \widehat{A}\widehat{E}$.

Se recuerda que un sistema (E, A, B, C) es no negativo si, para cada estado inicial admisible $x(0) \geq 0$ y para cualquier sucesión de control no negativa $u(i)$, $i = 0, 1, \ldots, k-1+\mathrm{ind}(E)$, los estados $x(k)$ son no negativos y las salidas $y(k)$ son no negativas, $\forall k \in \mathbb{Z}^+$. Esto se traduce en que se deben satisfacer las siguiente condiciones:

(a) $\widehat{E}^D\widehat{E} \geq O$

(b) $\widehat{E}^D\widehat{A} \geq O$,

(c) $\widehat{E}^D\widehat{B} \geq O$,

(d) $\widehat{C}\widehat{E}^D\widehat{E} \geq O$,

(e) $-(I - \widehat{E}\widehat{E}^D)(\widehat{E}\widehat{A}^D)^i\widehat{A}^D\widehat{B} \geq O$, y

(f) $-\widehat{C}(I - \widehat{E}\widehat{E}^D)(\widehat{E}\widehat{A}^D)^i\widehat{A}^D\widehat{B} \geq O$.

para cada $i = 0, 1, \ldots, \mathrm{ind}(E) - 1$.

El principal objetivo de esta sección es el análisis de la no negatividad del sistema singular de control (E, A, B, C) cuando la matriz E tiene índice mayor que 1 utilizando las descomposiones en bloques de dicha matriz. Como una primera aproximación se abordará dicho estudio haciendo uso de la caracterización obtenida por Jain y Goel [31] sobre matrices cuadradas no negativas con inversa de Drazin no negativa. Posteriormente se analizarán los casos en que la matriz singular de coeficientes del sistema pertenezca a alguno de los conjuntos estudiados en la sección anterior. Se utilizarán para ello los resultados y las descomposiciones en bloques obtenidas como mejora de los resultados conocidos hasta el momento.

3.4.1. Una primera aproximación

A continuación, se obtiene una nueva caracterización de la no negatividad de un sistema singular de control en tiempo-discreto que implica trabajar con matrices por bloques relacionadas con las matrices coeficientes del sistema. Para ello, se presenta en primer lugar la caracterización obtenida por Jain y Goel [31] de las matrices no negativas que tienen inversa de Drazin no negativa.

Teorema 3.6 *Sea $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ una matriz no negativa con ind$(A) = k$. Entonces $A^D \geq O$ si y sólo si existen matrices A_i, $i \in \{1, 2, \ldots, r\}$ y una matriz nilpotente N con ind$(N) = k$ tales que*

$$A = A_1 + \cdots + A_r + N$$

donde, para todo $i \in \{1, \ldots, r\}$,

1. $A_i \geq O$,
2. $A_i N = N A_i = O$,
3. $A_i A_j = O$, *para todo* $j \in \{1, \ldots, r\}$ *con* $i \neq j$.

4. *para alguna matriz de permutación P_i y para matrices no negativas M_i, N_i*

$$A_i = P_i \begin{bmatrix} G_i & G_iM_i & O & O \\ O & O & O & O \\ N_iG_i & N_iG_iM_i & O & O \\ O & O & O & O \end{bmatrix} P_i^T, \tag{3.9}$$

donde los bloques diagonales son cuadrados, con $G_i = X_iT_iY_i$, $T_i \in \mathbb{R}^{r\times r}$ una matriz invertible, y además $X_i = \mathrm{diag}(x_i^1, \ldots, x_i^r)$ e $Y_i = \mathrm{diag}((y_i^1)^T, \ldots, (y_i^r)^T)$, tales que $x_i^s, y_i^s > 0$ son vectores columna con $s \in \{1, \ldots, r\}$ e $Y_iX_i = I$.

Utilizando este resultado se obtiene la siguiente caracterización de los sistemas singulares de control en tiempo discreto cuya matriz singular de coeficientes es no negativa y tiene inversa de Drazin no negativa.

Teorema 3.7 *Sea (E, A, B, C) un sistema singular en tiempo discreto con $\widehat{E}$ definida como en (3.8) de índice k y satisfaciendo que $\widehat{E} \geq O$ y $\widehat{E}^D \geq O$. Entonces el sistema (E, A, B, C) es no negativo si y sólo si se cumplen las siguientes condiciones:*

(a) $T_i^{-1} - \alpha I \geq O$,

(b) $T_iY_i(\widetilde{B}_{i1} + M_i\widetilde{B}_{i2}) \geq O$,

(c) $(\widetilde{C}_{i1} + \widetilde{C}_{i3}N_i)X_i \geq O$,

(d) $-\left(I - \sum_{i=1}^{r} P_i\widetilde{E}_iP_i^T\right)(\widehat{E}\widehat{A}^D)^i\widehat{A}^D\widehat{B} \geq O$,

(e) $-\widehat{C}\left(I - \sum_{i=1}^{r} P_i \widetilde{E}_i P_i^T\right)(\widehat{E}\widehat{A}^D)^i \widehat{A}^D \widehat{B} \geq O$,

siendo $\widehat{A}$, $\widehat{B}$ *definidas como en (3.8) y* T_i, X_i, Y_i, M_i *y* N_i *dadas en (3.9).*

Demostración. Dado el sistema singular de control (E, A, B, C) de la forma (3.7), se construyen las matrices $\widehat{E}$, $\widehat{A}$, $\widehat{B}$ y $\widehat{C}$ como en (3.8). Como $\mathrm{ind}(\widehat{E}) = k$, $\widehat{E} \geq O$ y $\widehat{E}^D \geq O$, por el Teorema 3.6, se tiene que

$$\widehat{E} = E_1 + \cdots + E_r + N \tag{3.10}$$

y por lo tanto

$$\widehat{A} = I - \alpha\widehat{E} = I - \alpha(E_1 + \cdots + E_r + N)$$

y

$$\widehat{E}^D = E_1^\# + \cdots + E_r^\#.$$

Teniendo en cuenta esta descomposición y la caracterización de sistemas no negativos dada en el Teorema 2.3, se analizará la no negatividad del sistema.

Puesto que la condición $\widehat{E}^D\widehat{E} \geq O$ se satisface por hipótesis, se tiene que analizar en primer lugar la condición $\widehat{E}^D\widehat{A} \geq O$. De hecho,

$$\begin{aligned}
\widehat{E}^D\widehat{A} &= E_1^\# + \cdots + E_r^\# - \alpha(E_1E_1^\# + \cdots + E_rE_r^\#) \\
&= \begin{bmatrix} P_1^T & \ldots & P_r^T \end{bmatrix} D_E \begin{bmatrix} P_1 \\ \vdots \\ P_r \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

donde

$$D_E = \mathrm{diag}(\widetilde{E}_1^{\#} - \alpha \widetilde{E}_1 \widetilde{E}_1^{\#}, \dots, \widetilde{E}_r^{\#} - \alpha \widetilde{E}_r \widetilde{E}_r^{\#}),$$

$$\widetilde{E}_i = \begin{bmatrix} G_i & G_i M_i & O & O \\ O & O & O & O \\ N_i G_i & N_i G_i M_i & O & O \\ O & O & O & O \end{bmatrix}$$

y

$$\widetilde{E}_i^{\#} = \begin{bmatrix} G_i^{\#} & G_i^{\#} M_i & O & O \\ O & O & O & O \\ N_i G_i^{\#} & N_i G_i^{\#} M_i & O & O \\ O & O & O & O \end{bmatrix}.$$

siendo $G_i^{\#} = X_i T_i^{-1} Y_i$ para todo $i \in \{1, \dots, r\}$. Por tanto, se puede concluir que $\widehat{E}^D \widehat{A} \geq O$ si y sólo si $G_i^{\#} - \alpha G_i G_i^{\#} \geq O$, para todo $i \in \{1, \dots, r\}$, si y sólo si $G_i^{\#}(I - \alpha G_i) \geq O$, para todo $i \in \{1, \dots, r\}$. Usando que $Y_i X_i = I$ y $X_i, Y_i \geq O$ se tiene que la última desigualdad resulta $T_i^{-1} - \alpha I \geq O$, para todo $i \in \{1, \dots, r\}$.

A continuación, se tiene que analizar la no negatividad del producto $\widehat{E}^D \widehat{B}$. La forma de $\widehat{E}^D$ lleva a

$$\begin{aligned} \widehat{E}^D \widehat{B} &= (E_1^{\#} + \cdots + E_r^{\#}) \widehat{B} \\ &= \begin{bmatrix} P_1 & \dots & P_r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \widetilde{E}_1^{\#} & \dots & O \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ O & \dots & \widetilde{E}_r^{\#} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_1^T \\ \vdots \\ P_r^T \end{bmatrix} \widehat{B}. \end{aligned}$$

Denotando por

$$\widetilde{B} = \begin{bmatrix} P_1^T \\ \vdots \\ P_r^T \end{bmatrix} \widehat{B} = \begin{bmatrix} \widetilde{B}_1 \\ \vdots \\ \widetilde{B}_r \end{bmatrix},$$

se tiene que $\widehat{E}^D\widehat{B} \geq O$ si y sólo si $\widetilde{E}_i^{\#}\widetilde{B}_i \geq O$, para todo $i \in \{1,\ldots,r\}$, si y sólo si

$$\begin{bmatrix} G_i^{\#} & G_i^{\#}M_i & O & O \\ O & O & O & O \\ N_iG_i^{\#} & N_iG_i^{\#}M_i & O & O \\ O & O & O & O \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \widetilde{B}_{i1} \\ \vdots \\ \widetilde{B}_{ir} \end{bmatrix} \geq O, \text{ para todo } i \in \{1,\ldots,r\}.$$

Por lo tanto, $\widehat{E}^D\widehat{B} \geq O$ si y sólo si $G_i^{\#}\widetilde{B}_{i1} + G_i^{\#}M_i\widetilde{B}_{i2} \geq O$, si y sólo si $G_i(\widetilde{B}_{i1} + M_i\widetilde{B}_{i2}) \geq O$, es decir, $T_iY_i(\widetilde{B}_{i1} + M_i\widetilde{B}_{i2}) \geq O$, para todo $i \in \{1,\ldots,r\}$.

La siguiente condición a estudiar es $\widehat{C}\widehat{E}^D\widehat{E} \geq O$. Dado que

$$\widehat{C}\widehat{E}^D\widehat{E} = \widehat{C}\begin{bmatrix} P_1 & \ldots & P_r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \widetilde{E}_1^{\#}\widetilde{E}_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \widetilde{E}_r^{\#}\widetilde{E}_r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_1^T \\ \vdots \\ P_r^T \end{bmatrix},$$

denotando $\widetilde{C} = \widehat{C}\begin{bmatrix} P_1 & \ldots & P_r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \widetilde{C}_1 & \ldots & \widetilde{C}_r \end{bmatrix}$ se tiene que $\widehat{C}\widehat{E}^D\widehat{E} \geq O$ si y sólo si

$$\begin{bmatrix} \widetilde{C}_{i1} & \ldots & \widetilde{C}_{ir} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} G_i^{\#}G_i & G_i^{\#}G_iM_i & O & O \\ O & O & O & O \\ N_iG_i^{\#}G_i & N_iG_i^{\#}G_iM_i & O & O \\ O & O & O & O \end{bmatrix} \geq O,$$

para todo $i \in \{1, \ldots, r\}$. Luego $\widehat{C}\widehat{E}^D\widehat{E} \geq O$ si y sólo si $\widetilde{C}_{i1}G_iG_i^{\#} + \widetilde{C}_{i3}N_iG_iG_i^{\#} \geq O$, si y sólo si $(\widetilde{C}_{i1} + \widetilde{C}_{i3}N_i)G_i^{\#}G_i \geq O$, es decir $(\widetilde{C}_{i1} + \widetilde{C}_{i3}N_i)X_i \geq O$, para todo $i \in \{1, \ldots, r\}$.

Con esto se finaliza la demostración. ■

Este teorema es una primera aproximación al estudio de la no negatividad de los sistemas singulares de control en tiempo discreto con matriz de coeficientes $\widehat{E}$ de índice mayor que 1.

Por otro lado, la no negatividad del sistema singular de control (E, A, B, C) que satisface que $\mathrm{ind}(\widehat{E}) = k$, $\widehat{E} \geq O$ y $\widehat{E}^D \geq O$ para $\widehat{E}$ definida como en (3.8), puede ser estudiada desde otro punto de vista.

Dado que $\widehat{E} = E_1 + \cdots + E_r + N$, se pueden construir los siguientes subsistemas:

$$\left\{\begin{array}{lcl} E_1x_1(k+1) & = & (I - \alpha E_1)x_1(k) + \widehat{B}u(k) \\ E_2x_2(k+1) & = & (I - \alpha E_2)x_2(k) \\ & \vdots & \\ E_rx_r(k+1) & = & (I - \alpha E_r)x_r(k) \\ Nx_{r+1}(k+1) & = & x_{r+1}(k) \end{array}\right. \tag{3.11}$$

cuyas soluciones están relacionadas con la solución del sistema (E, A, B, C). De hecho la solución de la ecuación

$$\widehat{E}x(k+1) = (I - \alpha\widehat{E})x(k) + \widehat{B}u(k)$$

se puede obtener como

$$x(k) = E_1E_1^{\#}x_1(k) + \cdots + E_rE_r^{\#}x_r(k)$$

siendo $x_i(k)$, para $i \in \{1, \ldots, r\}$, utilizando las soluciones de los subsistemas definidos en (3.11) y asumiendo que $E_1E_1^{\#}\widehat{B} = \widehat{B}$.

Se puede observar que el término de control $\widehat{B}u(k)$ aparece en el primer subsistema pero podría haberse colocado en cualquier otro de los subsistemas. Además en cualquiera de ellos la salida final del sistema es $y(k) = Cx(k)$.

Por tanto la no negatividad de la solución del sistema general (E, A, B, C) se puede analizar via estos r subsistemas asociados. Para ello se asumirá que E_i es una matriz que cumple que $E_iE_i^{\#} \geq O$ para todo $i \in \{1, \ldots, r\}$. Entonces, es posible aplicar el Teorema 3.6 que asegura que existen r matrices de permutación P_i, para todo $i \in \{1, \ldots, r\}$, tales que

$$E_i = P_i \begin{bmatrix} X_iT_iY_i & X_iT_iY_iM_i & O \\ O & O & O \\ N_iX_iT_iY_i & N_iX_iT_iY_iM_i & O \end{bmatrix} P_i^T, \text{ para todo } i \in \{1, \ldots, r\}.$$

Bajo estas condiciones se puede utilizar el Teorema 2.4 para dar las condiciones de no negatividad de cada uno de los r subsistemas. Hay que tener en cuenta que el primer subsistema $(E_1, I - \alpha E_1, \hat{B})$ tiene términos de control mientras que el resto de subsistemas $(E_i, I - \alpha E_i)$, para todo $i \in \{2, \ldots, r\}$, estan libres de controles. Así pues se tiene el siguiente resultado sobre la no negatividad del sistema (E, A, B, C) dado por (3.7).

Teorema 3.8 *Sea (E, A, B, C) un sistema singular en tiempo discreto con $\widehat{E}$ definida como en (3.8) teniendo índice k y satisfaciendo que $\widehat{E} \geq O$ y que $\widehat{E}^D \geq O$. Entonces el sistema (E, A, B, C) es no negativo si se cumplen las siguientes condiciones*

(a) $T_i^{-1} - \alpha I \geq O$, para toda $i \in \{1, 2, \ldots, r\}$.

(b) $T_1^{-1}Y_1(B_1 + M_1B_2) \geq O$,

(c) $-B_2 \geq O$,

(d) $(X_1Y_1 - I)(H_1^D B_1 + S_1B_2) + X_1Y_1M_1B_2 \geq O$,

(e) $N_1X_1Y_1(H_1^D B_1 + S_1B_2 + M_1B_2) - U_1B_1 - V_1B_2 - B_3 \geq O$,

(f) $\displaystyle\sum_{i=1}^{r} CP_iX_iY_iP_i^T \geq O$,

(g) $E_1E_1^{\#}\widehat{B} = \widehat{B}$,

donde todas las matrices que aparecen están dadas en el Teorema 2.4 y en (3.9).

Es fácil ver que las condiciones que aparecen en este teorema se reducen a las condiciones dadas en el Teorema 2.4 cuando $k = 1$.

3.4.2. Caracterización de sistemas singulares no negativos de índice k

En este apartado se hará uso de las caracterizaciones presentadas en la sección anterior, para matrices de índice k con diferentes propiedades, para estudiar la no negatividad de un sistema singular de control. De esta manera se pretende trabajar con matrices por bloques relacionadas con las matrices originales pero que son de menor tamaño en general.

Para el sistema singular (E, A, B, C) dado en (3.7), se construyen las matrices $\widehat{E}$, $\widehat{A}$, $\widehat{B}$ y $\widehat{C}$ como en (3.8), las cuales intervienen en la solución del sistema. A partir de la descomposición core-nilpotente (3.1) de la matriz $\widehat{E}$, como $\operatorname{ind}(\widehat{E}) = q$, se tiene que

$$\widehat{E} = B_{\widehat{E}} + N_{\widehat{E}} \tag{3.12}$$

y entonces $\widehat{A} = I - \alpha\widehat{E} = I - \alpha(B_{\widehat{E}} + N_{\widehat{E}})$ y $\widehat{E}^D = B_{\widehat{E}}^{\#}$. Teniendo en cuenta esta descomposición y el resultado dado en el Teorema 2.3 es posible analizar la no negatividad del sistema (E, A, B, C).

De ahora en adelante se supondrá que el proyector de Drazin de $\widehat{E}$ cumple que es no negativo, es decir $\widehat{E}\widehat{E}^D \geq O$, y tiene $\operatorname{rg}(B_{\widehat{E}}) = r > 0$. De aquí se obtiene que $B_{\widehat{E}}$ tiene la forma dada en el Teorema 3.4. Se recuerda que si se cumplen $\widehat{E} \geq O$ y $\widehat{E}^D \geq O$ entonces $T \geq O$ y $T^{-1} \geq O$.

El siguiente resultado presenta una caracterización de la no negatividad de los sistemas singulares de control en tiempo discreto cuya matriz de coeficientes $\widehat{E}$ tiene índice mayor (o igual) que 1. En este sentido, este resultado es un complemento al obtenido para matrices con índice 1 [27] presentado en el capítulo anterior.

Teorema 3.9 *Sea (E, A, B, C) un sistema singular en tiempo discreto con $\widehat{E}$ definida como en (3.8) una matriz de índice q tal que satisface que su proyector de Drazin es no negativo ($\widehat{E}\widehat{E}^D \geq O$). Entonces el sistema (E, A, B, C) es no negativo si y sólo si se cumplen las condiciones siguientes:*

(a) $T^{-1} - \alpha I \geq O$,

(b) $T^{-1}Y(B_1 + MB_2) \geq O$,

(c) $(C_1 + C_3N)X \geq O$,

(d) $$-a_0\begin{bmatrix} B_1 - XY(B_1+MB_2) \\ B_2 \\ -NXY(B_1+MB_2)\end{bmatrix} - \sum_{j=1}^{n-1} a_j \bar{N}_{\widehat{E}}^{j}\begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \\ B_3\end{bmatrix} \geq O,$$

(e) $$-\left[a_0 I + \sum_{j=1}^{n-1} a_j \bar{N}_{\widehat{E}}^{j}\right]^{i+1} \bar{N}_{\widehat{E}}^{i}\begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \\ B_3\end{bmatrix} \geq O,$$

(f) $$-a_0\left(C_1B_1 - (C_1+C_3N)XY(B_1+MB_2) + C_2B_2\right) -$$
$$-\sum_{j=1}^{n-1} a_j \begin{bmatrix} C_1 & C_2 & C_3 \end{bmatrix} \bar{N}_{\widehat{E}}^{j}\begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \\ B_3\end{bmatrix} \geq O,$$

(g) $$-\begin{bmatrix} C_1 & C_2 & C_3 \end{bmatrix}\left[a_0 I + \sum_{j=1}^{n-1} a_j \bar{N}_{\widehat{E}}^{j}\right]^{i+1} \bar{N}_{\widehat{E}}^{i}\begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \\ B_3\end{bmatrix} \geq O.$$

Demostración. La primera condición que se debe analizar es $\widehat{E}^D\widehat{A} \geq O$. Dado que $\widehat{E}\widehat{E}^D = B_{\widehat{E}}B_{\widehat{E}}^{\#}$ se tiene que

$$\begin{aligned}\widehat{E}^D\widehat{A} &= B_{\widehat{E}}^{\#} - \alpha B_{\widehat{E}}B_{\widehat{E}}^{\#} \\ &= P\begin{bmatrix} X(T^{-1}-\alpha I)Y & X(T^{-1}-\alpha I)YM & O \\ O & O & O \\ NX(T^{-1}-\alpha I)Y & NX(T^{-1}-\alpha I)YM & O\end{bmatrix}P^T.\end{aligned}$$

Por lo tanto, se puede concluir que $\widehat{E}^D\widehat{A} \geq O$ si y sólo si $X(T^{-1} - \alpha I)Y \geq O$. Usando el hecho que $YX = I$ y como $X, Y \geq O$ se obtiene que la última desigualdad se transforma en

$$T^{-1} - \alpha I \geq O. \tag{3.13}$$

A continuación se analiza la no negatividad del producto $\widehat{E}^D\widehat{B}$. La forma de $\widehat{E}^D$ conduce a

$$\widehat{E}^D\widehat{B} = B^{\#}_{\widehat{E}}\widehat{B} = P\begin{bmatrix} XT^{-1}Y & XT^{-1}YM & O \\ O & O & O \\ NXT^{-1}Y & NXT^{-1}YM & O \end{bmatrix}P^T\widehat{B}.$$

Denotando por $\widehat{B} = P\begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \\ B_3 \end{bmatrix}$, se tiene que $\widehat{E}^D\widehat{B} \geq O$ si y sólo si

$$T^{-1}Y(B_1 + MB_2) \geq O. \tag{3.14}$$

Para estudiar la condición $\widehat{C}\widehat{E}^D\widehat{E} \geq O$ se tiene que:

$$\widehat{C}\widehat{E}^D\widehat{E} = \widehat{C}P\begin{bmatrix} XY & XYM & O \\ O & O & O \\ NXY & NXYM & O \end{bmatrix}P^T$$

y denotando $\widehat{C} = \begin{bmatrix} C_1 & C_2 & C_3 \end{bmatrix}P^T$ se obtiene que $\widehat{C}\widehat{E}^D\widehat{E} \geq O$ si y sólo si

$$(C_1 + C_3N)X \geq O. \tag{3.15}$$

Ahora se estudia la condición $-(I - \widehat{E}\widehat{E}^D)(\widehat{E}\widehat{A}^D)^i\widehat{A}^D\widehat{B} \geq O$. Para ello, primero se debe obtener la inversa de Drazin de la matriz $\widehat{A}$. En efecto, es conocido que [11] siempre existe un polinomio p en $\widehat{A}$ tal que

$$\widehat{A}^D = p(\widehat{A}) = \widehat{A}^s q(\widehat{A})^{s+1}$$

donde $s = \text{ind}(\widehat{A})$ y $q(C) = C^{-1}$ siendo C la matriz no singular que aparece en la descomposición core-nilpotente de la matriz $\widehat{A}$. Como $\widehat{A} = I - \alpha\widehat{E}$, un cálculo sencillo lleva a que la inversa de Drazin de $\widehat{A}$

se puede escribir como un polinomio $\bar{p}$ en $\widehat{E}$. Entonces dicha inversa de Drazin tiene la forma

$$\widehat{A}^D = \bar{p}(\widehat{E}) = \sum_{j=0}^{n-1} a_j \widehat{E}^j = \sum_{j=0}^{n-1} a_j (B_{\widehat{E}} + N_{\widehat{E}})^j = a_0 I + \sum_{j=1}^{n-1} a_j (B_{\widehat{E}}^j + N_{\widehat{E}}^j)$$

debido a que $B_{\widehat{E}} N_{\widehat{E}} = O$.

Sustituyendo esta expresión en la condición bajo estudio se obtiene

$$-(I - B_{\widehat{E}} B_{\widehat{E}}^{\#})(B_{\widehat{E}} + N_{\widehat{E}})^i \left[a_0 I + \sum_{j=1}^{n-1} a_j (B_{\widehat{E}}^j + N_{\widehat{E}}^j) \right]^{i+1} \widehat{B} \geq O$$

para todo $i = 0, 1, \ldots, q-1$.

- Si $i = 0$ entonces

$$\left[-a_0 (I - B_{\widehat{E}} B_{\widehat{E}}^{\#}) - \sum_{j=1}^{n-1} a_j N_{\widehat{E}}^j \right] \widehat{B} \geq O$$

  y por lo tanto

$$-a_0 \begin{bmatrix} B_1 - XY(B_1 + MB_2) \\ B_2 \\ -NXY(B_1 + MB_2) \end{bmatrix} - \sum_{j=1}^{n-1} a_j \bar{N}_{\widehat{E}}^j \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \\ B_3 \end{bmatrix} \geq O \quad (3.16)$$

  donde $\bar{N}_{\widehat{E}} = P^T N_{\widehat{E}} P$.

- Si $i > 0$ entonces

$$-N_{\widehat{E}}^i \left[-a_0 I + \sum_{j=1}^{n-1} a_j (B_{\widehat{E}}^j + N_{\widehat{E}}^j) \right]^{i+1} \widehat{B} \geq O$$

  y por lo tanto

$$-\left[a_0 I + \sum_{j=1}^{n-1} a_j \bar{N}_{\widehat{E}}^j \right]^{i+1} \bar{N}_{\widehat{E}}^i \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \\ B_3 \end{bmatrix} \geq O. \quad (3.17)$$

La última condición a estudiar es $-\widehat{C}(I-\widehat{E}\widehat{E}^D)(\widehat{E}\widehat{A}^D)^i\widehat{A}^D\widehat{B} \geq O$. Un análisis semejante al anterior conduce a que

- Si $i = 0$ entonces

$$-a_0\left(C_1B_1 - (C_1+C_3N)XY(B_1+MB_2) + C_2B_2\right) - \\ -\sum_{j=1}^{n-1} a_j \begin{bmatrix} C_1 & C_2 & C_3 \end{bmatrix} \bar{N}_{\widehat{E}}^j \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \\ B_3 \end{bmatrix} \geq O. \tag{3.18}$$

- Si $i > 0$ entonces

$$-\begin{bmatrix} C_1 & C_2 & C_3 \end{bmatrix} \left[a_0 I + \sum_{j=1}^{n-1} a_j \bar{N}_{\widehat{E}}^j\right]^{i+1} \bar{N}_{\widehat{E}}^i \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \\ B_3 \end{bmatrix} \geq O. \tag{3.19}$$

■

Corolario 3.2 *Sea (E, A, B, C) un sistema singular en tiempo discreto con $\widehat{E}$ definida como en (3.8) una matriz de índice q no negativa tal que su inversa de Drazin es también no negativa. Entonces el sistema (E, A, B, C) es no negativo si y sólo si se cumplen las condiciones siguientes:*

(a) $\alpha T \leq I$,

(b) $Y(B_1 + MB_2) \geq O$,

(c) $(C_1 + C_3N)X \geq O$,

(d) $-a_0 \begin{bmatrix} B_1 - XY(B_1 + MB_2) \\ B_2 \\ -NXY(B_1 + MB_2) \end{bmatrix} - \sum_{j=1}^{n-1} a_j \bar{N}_{\widehat{E}}^j \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \\ B_3 \end{bmatrix} \geq O,$

(e) $-\left[a_0 I + \sum_{j=1}^{n-1} a_j \bar{N}_{\widehat{E}}^j\right]^{i+1} \bar{N}_{\widehat{E}}^i \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \\ B_3 \end{bmatrix} \geq O,$

(f) $-a_0 \left(C_1 B_1 - (C_1 + C_3 N)XY(B_1 + MB_2) + C_2 B_2\right) -$

$-\sum_{j=1}^{n-1} a_j \begin{bmatrix} C_1 & C_2 & C_3 \end{bmatrix} \bar{N}_{\widehat{E}}^j \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \\ B_3 \end{bmatrix} \geq O,$

(g) $-\begin{bmatrix} C_1 & C_2 & C_3 \end{bmatrix} \left[a_0 I + \sum_{j=1}^{n-1} a_j \bar{N}_{\widehat{E}}^j\right]^{i+1} \bar{N}_{\widehat{E}}^i \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \\ B_3 \end{bmatrix} \geq O.$

Demostración. Puesto que $\widehat{E}$ y $\widehat{E}^D$ son no negativas se tiene que en la descomposición core-nilpotente de la matriz $\widehat{E}$ aparece la matriz $B_{\widehat{E}}$ de índice 1 que se puede escribir en la forma dada en el Teorema 3.4 con $T \geq O$ y $T^{-1} \geq O$. Además, como $\widehat{E}\widehat{E}^D$ es también no negativa, se puede aplicar el teorema anterior obteniendo las condiciones requeridas. En cuanto a las dos primeras condiciones, dado que T y T^{-1} son matrices no negativas, son equivalentes a:

$$\alpha T \leq I \qquad \text{y} \qquad Y(B_1 + MB_2) \geq O \tag{3.20}$$

respectivamente. ∎

Búsqueda del mejor (más conveniente) valor de α

Como se ha visto, el cálculo de la matriz $\widehat{A}^D$ consiste en encontrar los coeficientes de cierto polinomio característico y realizar algunas operaciones algebraicas. Sin embargo, este proceso se puede simplificar eligiendo adecuadamente el valor de α en (3.8). Para ello, se utiliza el siguiente resultado.

Lema 3.5 *Sea $R \in \mathbb{R}^{n\times n}$ una matriz no nula de índice 0 ó 1. Entonces existe un escalar no nulo $\beta \in \mathbb{R}$ tal que la matriz $I - \beta R$ es invertible.*

Demostración. Bajo las hipótesis del enunciado, la descomposición core-nilpotente de la matriz R es

$$R = S \begin{bmatrix} C & O \\ O & O \end{bmatrix} S^{-1}.$$

En este caso,

$$I - \beta R = S \begin{bmatrix} I - \beta C & O \\ O & I \end{bmatrix} S^{-1}.$$

Así, eligiendo β de manera que $\frac{1}{\beta}$ no es un valor propio C, se obtiene que $I - \beta C$ es invertible, y por lo tanto $I - \beta R$ es invertible, lo cual completa la demostración. ■

Por lo tanto, se puede elegir α de manera que se cumpla que $\alpha E + A$ y $I - \alpha B_{\widehat{E}}$ son matrices invertibles. Esto es posible ya que existen infinitos valores de α tales que se satisfagan $\det(\alpha E + A) \neq 0$ y el Lema 3.5 simultáneamente. Así, es posible asegurar que $\widehat{A} = I - \alpha\widehat{E}$ es invertible y en consecuencia $\widehat{A}^D = (I - \alpha B_{\widehat{E}})^{-1}$, lo cual simplifica el estudio de las últimas dos condiciones de la no negatividad del sistema

(E, A, B, C). En efecto, dichas condiciones se pueden reescribir como sigue:

(a) $-(I - B_{\widehat{E}}B_{\widehat{E}}^{\#})((B_{\widehat{E}} + N_{\widehat{E}})(I - \alpha B_{\widehat{E}})^{-1})^i(I - \alpha B_{\widehat{E}})^{-1}\widehat{B} \geq O$,

(b) $-\widehat{C}(I - B_{\widehat{E}}B_{\widehat{E}}^{\#})((B_{\widehat{E}} + N_{\widehat{E}})(I - \alpha B_{\widehat{E}})^{-1})^i(I - \alpha B_{\widehat{E}})^{-1}\widehat{B} \geq O$,

para todo $i = 0, 1, \ldots, \mathrm{ind}(\widehat{E}) - 1$. Dado que la inversa de toda matriz invertible puede escribirse como un polinomio en ella misma se tiene que

$$(I - \alpha B_{\widehat{E}})^{-1} = \sum_{j=0}^{n-1} b_j B_{\widehat{E}}^j.$$

Ahora, sustituyendo en las dos expresiones anteriores y realizando los cálculos correspondientes se llega a

(a) $-b_0(I - B_{\widehat{E}}B_{\widehat{E}}^{\#})\widehat{B} \geq O$,

(b) $-b_0^{i+1}N_{\widehat{E}}^i\widehat{B} \geq O$,

(c) $-b_0\widehat{C}(I - B_{\widehat{E}}B_{\widehat{E}}^{\#})\widehat{B} \geq O$,

(d) $-b_0^{i+1}\widehat{C}N_{\widehat{E}}^i\widehat{B} \geq O$,

para todo $i = 1, \ldots, \mathrm{ind}(\widehat{E}) - 1$.

Por otro lado, estas condiciones también pueden ser simplificadas bajo la suposición de que el radio espectral de $B_{\widehat{E}}$ es menor que 1. En este caso,

$$(I - \alpha B_{\widehat{E}})^{-1} = \sum_{j=0}^{\infty} B_{\widehat{E}}^j$$

y entonces las condiciones que se obtienen son similares a las últimas cuatro condiciones indicadas (haciendo $b_0 = 1$).

Conclusiones y líneas futuras

Debido a la importancia de la Matemática Aplicada en el desarrollo de la ciencia y la técnica, los sistemas dinámicos de control han tenido un auge notable en diversos campos a partir de la segunda mitad del siglo pasado. En este trabajo se ha centrado la atención en los sistemas singulares de control en tiempo discreto. Para ello, primero se ha hecho un estudio matricial sobre la no negatividad de diferentes matrices y productos de matrices que involucran inversas generalizadas. Estos resultados algebraicos se han aplicado posteriormente al estudio de sistemas singulares de control, de los cuales se ha analizado la propiedad de no negatividad tanto para el caso de matrices de índice 1 como superior.

En el Capítulo 2 se han introducido clases de matrices que permiten analizar la no negatividad de una matriz, de su inversa de grupo y de las diferentes combinaciones entre ambas. Más específicamente, se han considerado los conjuntos que analizan las siguientes propiedades:

(I) $A^{\#} \geq O$ (matriz monótona de grupo),

(II) $AA^{\#} \geq O$ (proyector de grupo no negativo),

(III) $A \geq O$ y $A^{\#} \geq O$,

(IV) $A \geq O$ y $AA^{\#} \geq O$,

(V) $A^{\#} \geq O$ y $AA^{\#} \geq O$.

En primer lugar se ha establecido una relación de inclusión entre los conjuntos que describen estos tipos de matrices. Especial atención se ha prestado al hecho que la mayoría de estas inclusiones son estrictas. Posteriormente, dichos conjuntos han sido caracterizados.

El principal resultado obtenido respecto al análisis algebraico de estos conjuntos se encuentra en el Teorema 2.1 en el que se caracterizan las matrices con proyector de grupo no negativo y se presenta la forma de la inversa de grupo de una matriz de este tipo. Entre las condiciones que aparecen en la caracterización surge una matriz T que juega un papel fundamental en el resto de los resultados. En este caso, T es invertible.

Al agregar en el Teorema 2.1 la condición de no negatividad de la matriz A se obtiene el Corolario 2.2. En este resultado la matriz T además de invertible deberá ser no negativa. Es fácil ver que en el caso particular $T = I$ se recupera el resultado dado en [20] por Friedland y Virnik.

Por otra parte, las matrices no negativas monótonas de grupo han sido analizadas en el Corolario 2.3. La conclusión en este caso es que la matriz T involucrada debe ser no negativa, invertible y su inversa no negativa.

Las matrices $\{l\}$-periódicas de grupo se introducen en este trabajo como una extensión de las matrices involutivas de grupo estudiadas en [7]. Una caracterización de este tipo de matrices se establece en el Teorema 2.2. La matriz T en este caso debe satisfacer que $T^l = I$. Al imponer la hipótesis que además la matriz de partida sea no negativa, se obtiene en el Corolario 2.4 que la matriz T, además de cumplir la condición anterior, debe ser no negativa.

En la segunda parte del Capítulo 2 se realizan aplicaciones de los resultados matriciales anteriores a los sistemas singulares de control del tipo (E, A, B, C). En el Teorema 2.3 se presenta una ligera modificación del principal resultado obtenido por Cantó, Coll y Sánchez en [8]. Se observa que este resultado utiliza las matrices coeficientes para establecer una caracterización de la no negatividad del sistema de control. En la aplicación realizada se encuentra otra caracterización en la que se utilizan sólo bloques de dichas matrices coeficientes (adecuadamente modificados) en lugar de las matrices completas. Este hecho contribuirá a un ahorro de operaciones a la hora de analizar dicha no negatividad. Esto último se debe a que no será necesario el cálculo explícito de inversa de Drazin de la matriz A del sistema.

En el Lema 2.5 se establece la caracterización anteriormente indicada, para el caso de matrices con proyector de grupo no negativo considerando en esta primera etapa el caso particular en que la matriz de salidas C del sistema sea la identidad. El caso general se estudia posteriormente en el Teorema 2.4. Este resultado mejora el obtenido en [22] en el sentido que no se exige la no negatividad de la matriz coeficiente E. Con la intención de poder establecer una comparativa entre ambos resultados se incluye este último como Corolario 2.5.

Cabe notar que en todas las caracterizaciones establecidas aparece una permutación simétrica (dada por la matriz P) lo que implica tan sólo la reorganización de la información dentro de la matriz E, pero no requiere el cálculo de nuevas operaciones.

El capítulo termina con el diseño de un algoritmo y su justificación teórica. Este algoritmo permite buscar una realimentación de estados de modo que el sistema en lazo cerrado cumpla las condiciones de regularidad y no negatividad.

Con el objetivo de extender los resultados obtenidos para el caso de índice 1, en el Capítulo 3, se realiza un estudio paralelo al realizado anteriormente pero considerando ahora la situación general de índice arbitrario. La principal herramienta algebraica que se utiliza es la descomposición core-nilpotente de una matriz cuadrada. Del mismo modo que en el Capítulo 2, también se presentarán las aplicaciones correspondientes a sistemas de control singulares que involucren matrices de índice arbitrario.

Al igual que en el capítulo anterior, se han introducido los conjuntos correspondientes a los enumerados anteriormente en (a)-(e). En este caso se han combinan las condiciones de no negatividad de una matriz, de su inversa de Drazin y de su proyector de Drazin puesto que se ha abordado el caso de índice superior a 1.

Las inclusiones entre los conjuntos definidos ha sido el primer punto estudiado, considerando nuevamente el carácter de ser estricto en la mayoría de los casos. Una vista rápida de estas relaciones se ha presentado en la Figura 3.1, donde también se han incluido los conjuntos de índice 1 y las interrelaciones entre todas ellas.

A continuación se analizan los diferentes conjuntos utilizando la descomposición de una matriz cuadrada A como suma de una matriz B_A de índice 1 y una matriz nilpotente N_A. La matriz B_A involucra una matriz T del mismo modo que en el caso de índice 1.

En el Teorema 3.1 se presenta una caracterización de las matrices que tienen proyector de Drazin no negativo. En este caso se obtiene que T debe ser invertible y además se da la forma de la inversa de Drazin de dicha matriz A. Agregando que la matriz a estudiar sea monótona de Drazin se tiene el Teorema 3.2 en el que la matriz T tiene inversa no negativa.

Cuando el proyector de Drazin es no negativo, además de serlo la propia matriz A, se obtiene que la matriz T debe ser invertible y no negativa. Este resultado se encuentra en el Teorema 3.3. Si bien el resultado da sólo una condición necesaria para que se cumpla tanto $A \geq O$ como $AA^D \geq O$, la Observación 3.3 (a) permite caracterizar, dentro del conjunto de las matrices no negativas, aquellas cuyo proyector de Drazin sea no negativo.

En el Teorema 3.4 se muestra que cuando la matriz A y su inversa de Drazin son no negativas entonces tanto la matriz T como su inversa deben ser también no negativas. Asimismo, el apartado (b) de la Observación 3.3 caracteriza, dentro del conjunto de las matrices no negativas, aquellas cuya inversa de Drazin sea no negativa.

De nuevo, como extensión de las matrices $\{l\}$-periódicas de grupo se introducen las $\{l\}$-periódicas de Drazin. En el Lema 3.4 se obtiene la forma de estas matrices. En este caso se debe satisfacer que $T^l = I$. Si bien el resultado anterior presenta una condición necesaria, esta información se completa con la condición suficiente presentada en el Teorema 3.5.

Una primera aproximación a la caracterización de la no negatividad de un sistema singular de control de índice superior se realiza en el Teorema 3.7 a partir de un resultado de Jain y Goel [31] en el que intervienen la no negatividad de la propia matriz E y de su inversa de Drazin.

Los últimos resultados dados en la memoria se encuentran en el Teorema 3.9 y el Corolario 3.2. En ellos, se caracteriza la no negatividad de un sistema singular de control cuya matriz E tiene proyector de Drazin no negativo en el primer caso y en el otro caso, la matriz E y su inversa de Drazin son no negativas. Este resultado simplifica el dado en la primera aproximación desde el punto de vista en que sólo se debe considerar una matriz T.

Por otra parte, en cuanto al desarrollo futuro de los temas estudiados en la presente memoria, cabe destacar que han sido numerosos los problemas que se han planteado de forma paralela a los que se resolvían a medida que se abordaban algunos de los resultados presentados en esta Tesis.

Como líneas generales para futuras investigaciones se destacan las relacionadas con el diseño de realimentaciones de estado que permitan que el sistema en lazo cerrado cumpla las condiciones de no negatividad para las diferentes situaciones estudiadas en esta memoria.

Por otra parte, teniendo en cuenta los resultados conocidos en la literatura sobre los sistemas simétricos de control, parece interesante plantearse el análisis de la no negatividad en ese caso, así como los algoritmos necesarios para su sistematización.

Bibliografía

[1] A. Ben-Israel, T. Greville. Generalized Inverses: Theory and Applications, John Wiley & Sons, Segunda Edition, 2003.

[2] L. Benvenuti, L. Farina, A tutorial on the positive realization problem, *IEEE Trans. on Automatic Control*, 49, 5, 651–664, 2004.

[3] A. Berman, R.J. Plemmons, Nonnegative matrices in Mathematical Sciences. SIAM Academic Press, Nueva York, 1979.

[4] P. Bernhard, On singular implicit linear dynamical systems, *SIAM J. Control and Optimization*, 20, 5, 612–633, 1982.

[5] R. Bru, J.M. Carrasco, L.C. Paraíba, Unsteady state fugacity model by a dynamic control system, *Applied Mathematical Modelling*, 22, 484–494, 1998.

[6] R. Bru, C. Coll, E. Sánchez, Structural properties of positive linear time–invariant difference–algebraic equations, *Linear Algebra and its Applications*, 349, 1–10, 2002.

[7] R. Bru, N. Thome. Group inverse and group involutory matrices, *Linear and Multilinear Algebra*, 45, 2-3, 207–218, 1998.

[8] B. Cantó, C. Coll, E. Sánchez, Positive solutions of a discrete-time descriptor system, *International Journal of Systems Science*, 39, 1, 81–88, 2008.

[9] R. Cantó, B. Ricarte, A.M. Urbano, Positive realizations of transfer matrices with real points, *IEEE Trans. Circuits Syst. II, Expr. Briefs*, 54, 6, 517–521, 2007.

[10] S.L. Campbell, *Singular systems of differential equations*, Pitman, Londres, 1980.

[11] S.L. Campbell, C.D. Meyer, Jr.. Generalized Inverses of Linear Transformations. Dover, Nueva York, 1979.

[12] J.J. Climent, V. Herranz, C. Perea, A first approximation of concatenated convolutional codes from linear systems theory viewpoint, *Linear Algebra and its Applications*, 425, 673–699, 2007.

[13] J.J. Climent, V. Herranz, C. Perea, Linear system modelization of concatenated block and convolutional codes, *Linear Algebra and its Applications*, 429, 1191–1212, 2008.

[14] C. Coll, A. Herrero, E. Sánchez, N. Thome, Output feedback stabilization for symmetric control systems, *Journal of the Franklin Institute*, 342, 814–823, 2005.

[15] L. Dai, *Singular control systems*, Springer-Verlag, Nueva York, 1989.

[16] C.Y. Deng, The Drazin inverses of sum and difference of idempotents, *Linear Algebra and its Applications*, 430, 1282–1291, 2009.

[17] J.J. Distefano III, A.R. Stubberud, I.J. Williams, Retroalimentación y sistemas de control, MacGraw-Hill, 1982.

[18] G.R. Duan, *Analysis and design of descriptor linear systems*, Springer, 2010.

[19] P. Flor, On groups of non-negative matrices, *Compositio Mathematica*, 21, 4, 376–382, 1969.

[20] S. Friedland, E. Virnik, Nonnegative of Schur complements of nonnegative idempotent matrices, *Electronic Journal of Linear Algebra*, 17, 426–435, 2008.

[21] M.I. García-Planas, Holomorphic generic families of singular systems under feedback and derivative feedback, *International journal of mathematical models and methods in applied sciences*, 1–2, 1–7, 2008.

[22] A. Herrero, A. Ramírez, N. Thome, An algorithm to check the nonnegativity of singular systems, *Applied Mathematics and Computations*, 189, 355–365, 2007.

[23] A. Herrero, A. Ramírez, N. Thome, Nonnegativity, stability and regularization of nonnegativity of discrete-time descriptor systems, *Linear Algebra and its Applications*, 432, 837–846, 2010.

[24] A. Herrero, F.J. Ramírez, N. Thome, Characterization of matrices with nonnegative group-projector, *Lecture Notes in Control and Information Sciences*, 389, 315–320, 2009.

[25] A. Herrero, F.J. Ramírez, N. Thome, Nonnegativity of the group-projectors used to obtain the nonnegativity of control singular systems, *SIAM Conference on Applied Linear Algebra*, California, Estados Unidos, 2009.

[26] A. Herrero, F.J. Ramírez, N. Thome, On the solution of nonnegative discrete-time singular control systems, *8th AIMS International Conference on Dynamical Systems, Differential Equations and Applications*, Technische Universitat Desden, Desden, Alemania, 2010.

[27] A. Herrero, F.J. Ramírez, N. Thome, Nonnegativity of descriptor systems of index 1, *19th International Symposium Mathematical Theory of Networks and Systems (MTNS2010)* (eds. A. Edelmayer), 823–828, 2010.

[28] A. Herrero, F.J. Ramírez, N. Thome, Relationships between different sets involving group and Drazin projectors and nonnegativity, Por aparecer en *Linear Algebra and its Applications*, DOI: 10.1016/j.laa.2011.08.029.

[29] J. Hofbauer, K. Sigmund, *Evolutionary games and population dynamics*, Cambridge University Press, 1998.

[30] R.A. Horn, C.R. Johnson. Matrix Analysis, Cambridge University Press, Cambridge, 1985.

[31] S.K. Jain, V.K. Goel, Nonnegative matrices having nonnegative Drazin pseudoinverses, *Linear Algebra and its Applications*, 29, 173–183, 1980.

[32] S.K. Jain, E.K. Kwak, V.K. Goel, Decomposition of nonnegative group-monotone matrices, *Transactions of the American Mathematical Society*, 257, 2, 371–385, 1980.

[33] S.K. Jain, J. Tynan, Nonnegative matrices A with $AA^{\#} \geq O$, *Linear Algebra and its Applications*, 379 381–394, 2004.

[34] T. Kaczorek, *Two–Dimensional Linear Systems*, Springer–Verlag, Londres, 1985.

[35] T. Kaczorek, *Linear control systems*, Vol. I and II, Wiley, Nueva York, 1992.

[36] D.G. Luenberger, Time-invariant descriptor systems, *Automatica*, 14, 473–480, 1978.

[37] D.G. Luenberger, *Introduction to dymamic systems*, John Wiley & Sons, 1979.

[38] R. Mukundan, W. Dayawansa, Feedback control of singular systems-proportional and derivative feedback of the state, *Internat. J. Systems Sci.*, 14, 615–632, 1983.

[39] P.C. Müller, Linear mechanical descriptor systems: identification, analysis and design, *Preprints of IFAC Conference on control of independent systems*, Belfort, France, 501–506, 1997.

[40] A. Shayman, Z. Zhou, Feedback control and classification of generalized linear systems, *IEEE Trans. Automat. Control*, AC–32, 483–494, 1987.

[41] G.C. Verghese, B.C. Lévy, T. Kailath, A generalized state-space for singular systems, *IEEE Trans. Aut. Control*, AC-26, 4, 811–831, 1981.

[42] F. Viel, F. Jadot, G. Bastin, Global stabilization of exothermic chemical reactors under input constraints. *Automatica* 33, 1437–1448, 1997.