



UNIVERSITAT
POLITÈCNICA
DE VALÈNCIA

Efectos del achatamiento terrestre sobre las órbitas

Moraño Fernández, José A. (jomofer@mat.upv.es)

Departamento de Matemática Aplicada - ETSID
Universitat Politècnica de València

Índice general

1. Introducción	2
2. Objetivos	3
3. ¿Qué es el achatamiento terrestre?	3
4. Consecuencias	4
4.1. Regresión/Avance de los nodos	4
4.2. Avance/Retroceso del perigeo	4
4.3. Ejemplos	5
5. Aplicación de la Precesión del nodo: Órbitas Heliosíncronas	6
6. Aplicación del Avance del perigeo: Órbitas MOLNIYA	7
7. Cierre	9

1 Introducció

Este artículo presenta los efectos que tiene la deformación principal de la Tierra sobre una órbita alrededor de la Tierra. En una primera aproximación del movimiento orbital se asume que la única fuerza de atracción existente es la gravitatoria que es ejercida por el cuerpo principal el cual se supone tiene simetría esférica considerando entonces que toda la masa está concentrada en el centro geométrico. Estas aproximaciones son bastante buenas pero cálculos más precisos requieren tener en cuenta perturbaciones causadas por otras fuerzas. En la [figura 1](#) podemos ver la importancia de algunas fuerzas en función de su altitud. En particular, a partir de poco más de 100 km de altitud la fuerza perturbadora más importante es la del achatamiento terrestre, J_2 , que es la que se estudia en este artículo.

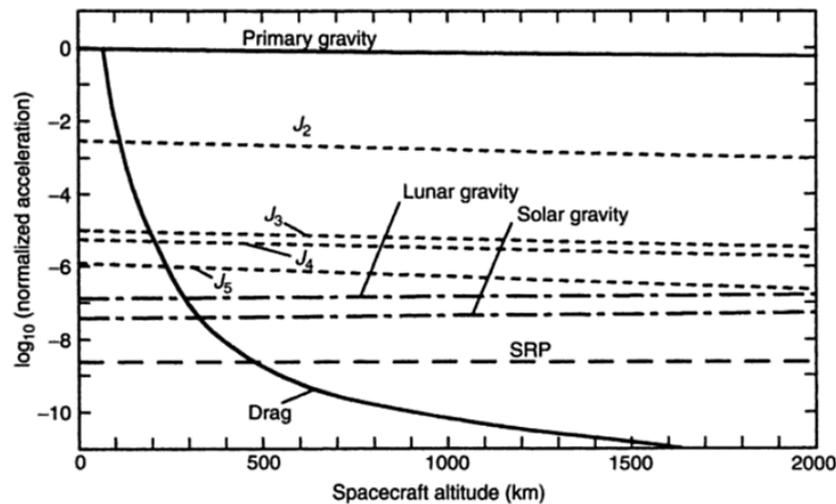


Figura 1: Importancia de las diferentes fuerzas perturbadoras de una órbita en función de su altitud

En la Sección 3 se describe la magnitud del achatamiento y se presenta el parámetro J_2 que se usa para analizar sus efectos. También se muestran los elementos orbitales que sufren variaciones por esta perturbación, se cuantifican esas variaciones en función de la inclinación y en la siguiente sección se analizan los efectos que tienen sobre los nodos y el perigeo.

En las dos últimas secciones se exponen dos aplicaciones de esa perturbación describiendo como las variaciones pueden ser aprovechadas para conseguir órbitas heliosíncronas o con perigeo fijo. Para poder entender los desarrollos que se hacen en este artículo es necesario conocer la expresión polar de la ecuación orbital así como conocer y distinguir los elementos orbitales clásicos ($a, e, i, \Omega, \omega, \theta$) y otros parámetros constantes como el momento angular específico h .

Además debes recordar algunas constantes y relaciones entre parámetros (ver bibliografía):

- Cualquier nave o satélite tiene una masa insignificante si la comparamos con la de la Tierra el parámetro gravitacional es considerado constante: $\mu = G(M+m) = GM = 398\,600.5 \text{ km}^3/\text{s}^2$
- El momento angular de cualquier órbita verifica: $h = r v_{\perp}$.
- La energía específica para una órbita elíptica cumple: $\varepsilon = \frac{v^2}{2} - \frac{\mu}{r} = -\frac{\mu}{2a}$.
- La velocidad radial y la transversal en cualquier posición y órbita son:

$$v_r = \frac{\mu}{h} e \sin \theta \quad v_{\perp} = \frac{\mu}{h} (1 + e \cos \theta).$$

- El periodo de una órbita cerrada es: $T = 2\pi \sqrt{\frac{a^3}{\mu}}$.

2 Objetivos

Una vez hayas leído con detenimiento este documento **serás capaz de:**

- Saber que elementos orbitales se ven alterados por el efecto del achatamiento terrestre.
- Cuantificar las variaciones de la RAAN y del argumento del perigeo que se producen según la inclinación de la órbita.
- Obtener la inclinación adecuada de una órbita para que un satélite sea heliosíncrono a una determinada altura y viceversa.
- Calcular las inclinaciones en las que se consigue que la variación del perigeo sea nula.

3 ¿Qué es el achatamiento terrestre?

La Tierra como todos los planetas con rotación presenta un abultamiento en el Ecuador debido a la fuerza centrífuga. El radio ecuatorial es de 6378 km que es mayor que el radio polar (6357 km) lo que en ocasiones nos lleva a utilizar el radio medio 6371 km (ver [figura 2](#)). Esta deformación es conocida como **achatamiento** terrestre y viene dado por:

$$\text{Achatamiento} = \frac{\text{Radio ecuatorial} - \text{Radio polar}}{\text{Radio ecuatorial}} = \frac{6378 - 6357}{6378} = 0.00330293$$

El achatamiento tiene efectos sobre las órbitas keplerianas, las que se darían si el planeta fuese un cuerpo esférico. El campo gravitatorio de un planeta esférico depende solo de la distancia a su centro, sin embargo, el achatamiento provoca una variación también con la latitud.

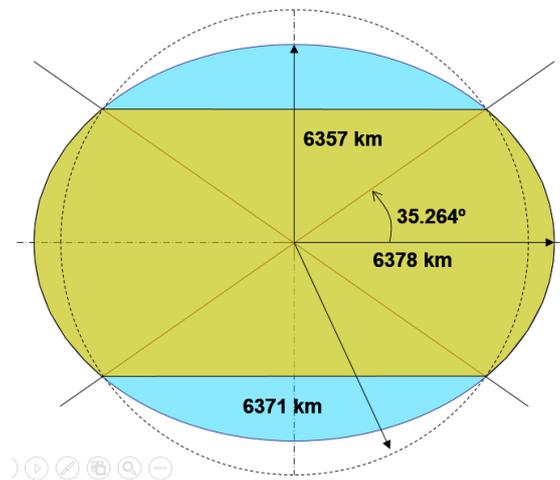


Figura 2: Achatamiento de la Tierra. El radio polar es 21 km más corto que el radio ecuatorial

El parámetro adimensional que cuantifica los mayores efectos del achatamiento sobre las órbitas es J_2 o **segundo armónico zonal**. J_2 no es una constante universal si no que cada planeta presenta su propio valor de J_2 . El valor de este segundo armónico zonal para la Tierra es:

$$J_2 = 1.08263 \times 10^{-3} \quad (1)$$

El achatamiento causa, con el tiempo, variaciones en dos de los seis elementos orbitales: en la ascensión recta del nodo ascendente Ω , y en el argumento del perigeo, ω . Pueden calcularse (ver [Curtis]) las tasas medias de variación de esos dos ángulos obteniendo:

$$\frac{d\Omega}{dt} = - \left(\frac{3}{2} \frac{\sqrt{\mu} J_2 R_T^2}{(1-e^2)^2 a^{\frac{7}{2}}} \right) \cos i \quad (\text{rad/s}) \quad (2)$$

y

$$\frac{d\omega}{dt} = - \left(\frac{3}{2} \frac{\sqrt{\mu} J_2 R_T^2}{(1-e^2)^2 a^{\frac{7}{2}}} \right) \left(\frac{5}{2} \sin^2 i - 2 \right) = \frac{d\Omega}{dt} \frac{\frac{5}{2} \sin^2 i - 2}{\cos i} \quad (\text{rad/s}) \quad (3)$$

donde R_T y μ son el radio y el parámetro gravitacional del planeta, respectivamente; a y e son el semieje mayor y la excentricidad de la órbita e i es la inclinación.

4 Consecuencias

4.1 Regresión/Avance de los nodos

Cuando la órbita es posígrada ($i \in [0, 90^\circ)$) entonces $\dot{\Omega} < 0$ lo que indica que la ascensión recta del nodo ascendente irá decreciendo continuamente. A este retroceso del nodo se le conoce como **Regresión de los nodos**.

En cambio si la órbita es retrógrada ($i \in (90^\circ, 180^\circ]$) entonces $\dot{\Omega} > 0$ por lo que la línea de nodos avanzaría hacia el este ganando ascensión recta. Para órbitas polares ($i = 90^\circ$) la línea nodal se mantendrá fija.

4.2 Avance/Retroceso del perigeo

En la ecuación (3) podemos ver que la variación del argumento del perigeo se anula para determinados valores de la inclinación:

$$\dot{\omega} = 0 \Leftrightarrow \frac{5}{2} \sin^2 i - 2 = 0 \rightarrow \sin i = \sqrt{\frac{4}{5}} \rightarrow i = \arcsin \sqrt{\frac{4}{5}} = \begin{cases} 63.4^\circ \\ 116.6^\circ \end{cases} \quad (4)$$

Por lo tanto $\dot{\omega} > 0$ cuando $i \in [0^\circ, 63.4^\circ)$ o $i \in (116.6^\circ, 180^\circ]$ lo que indica que el perigeo avanza en la dirección del movimiento, fenómeno conocido como **Avance del perigeo**. El efecto contrario, **Retroceso del perigeo**, se presenta cuando $\dot{\omega} < 0$, es decir cuando $i \in (63.4^\circ, 116.6^\circ)$. Notemos que hay dos inclinaciones críticas en las que la línea de ápsides no gira: $i = 63.4^\circ$ e $i = 116.6^\circ$.

4.3 Ejemplos

Ejemplo 4.1 Representa gráficamente la regresión del nodo y el avance del perigeo (en °/día) que se produce según su inclinación (i entre 0° y 110°) en órbitas con excentricidad muy baja ($e = 0.001$) y alturas comprendidas entre 200 km y 1200 km.

Solución:

Para hacer la representación utilizaremos las expresiones (2) y (3) que deberemos pasar a °/día. El resultado obtenido debe ser similar a figura 3 y figura 4.

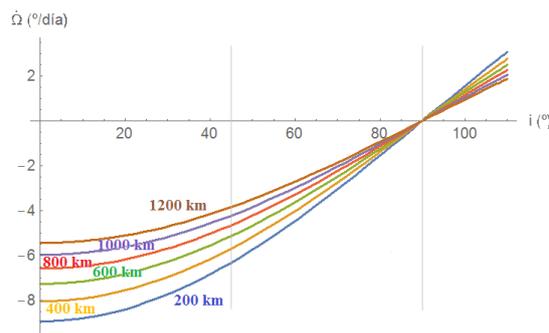


Figura 3: Regresión del nodo para alturas entre 200 y 1200 km

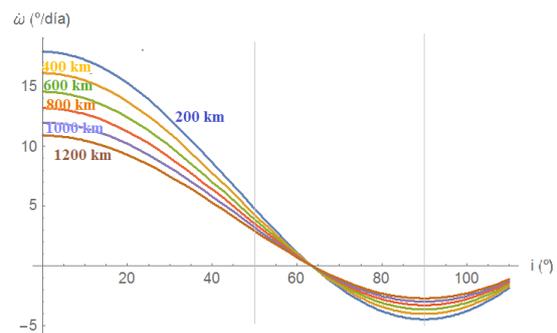


Figura 4: Avance del perigeo para alturas entre 200 y 1200 km

Ejemplo 4.2 La estación espacial internacional (ISS) presenta en formato TLE los valores de la figura 5. Calcula cuanto precesiona el nodo de la ISS en cada órbita y en cada día.

```
ISS (ZARYA)
1 25544U 98067A 20050.26224537 .00000769 00000-0 22015-4 0 9994
2 25544 51.6440 216.8949 0004782 288.7212 72.8952 15.49172836213580
```

Figura 5: Elementos (TLE) obtenidos para el módulo ZARYA de la ISS

Solución:

Conociendo el formato TLE, obtenemos los elementos necesarios: La inclinación $i = 51.6440^\circ$, la excentricidad $e = 0.0004782$ y el movimiento medio $n = 15.49172836 \text{ rev/día}$.

En primer lugar debemos convertir las unidades del movimiento medio para luego deducir el semieje mayor:

$$n = 15.49172836 \cdot \frac{2\pi}{86400} = 0.00112659 \text{ rad/s}$$

$$a = \sqrt[3]{\frac{\mu}{n^2}} = \sqrt[3]{\frac{398600.5}{0.00112659^2}} = 6797.28 \text{ km}$$

Ya con el semieje, la excentricidad y la inclinación podemos utilizar la igualdad (3):

$$\frac{d\Omega}{dt} = - \left(\frac{3 \sqrt{398600.5} \cdot 1.08263 \cdot 10^{-6} \cdot 6378^2}{2 (1 - 0.0004782^2)^2 6797.28^{\frac{7}{2}}} \right) \cos(51.6440^\circ) = -9.99562 \cdot 10^{-7} \text{ rad/s}$$

que expresado en $^{\circ}/s$ sería

$$\frac{d\Omega}{dt} = -9.99562 * 10^{-7} \cdot \frac{180}{\pi} = -5.72707 * 10^{-5} \text{ }^{\circ}/s$$

Multiplicando por el periodo $T = \frac{2\pi}{n}$ tenemos la variación por órbita

$$\frac{d\Omega}{dt} = -5.72707 * 10^{-5} \cdot \frac{2\pi}{n} = -5.72707 * 10^{-5} \cdot \frac{2\pi}{0.00112659} = -0.319408 \text{ }^{\circ}/\text{órbita}$$

Para obtener la variación por día se multiplicaría por la duración del día, 86400 s:

$$\frac{d\Omega}{dt} = -5.72707 * 10^{-5} \cdot 86400 = -4.94819 \text{ }^{\circ}/\text{día}$$

Esto nos indica que el módulo Zarya de la ISS desplaza su nodo ascendente $4.94819^{\circ}/\text{día}$ hacia el Oeste.

5 Aplicación de la Precesión del nodo: Órbitas Heliosíncronas

El efecto de la inclinación orbital sobre la precesión del nodo es útil para un tipo importante de órbitas. Las órbitas **Heliosíncronas (SSO)** son aquellas que mantienen constante el ángulo que forma el plano orbital con la dirección radial del Sol tal y como se puede ver en la [figura 6](#).

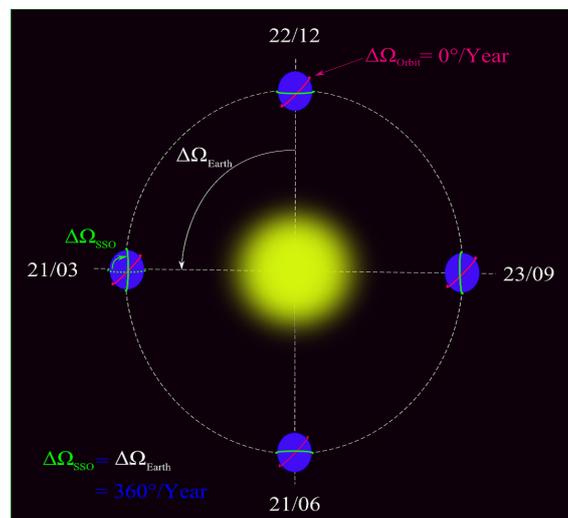


Figura 6: En las órbitas SSO o heliocéntricas coincide la variación angular del nodo con el giro que la órbita tiene respecto al Sol en el movimiento de traslación de la Tierra

Manteniendo este ángulo constante el satélite verá cualquier franja del planeta bajo las mismas condiciones de iluminación a lo largo de cada órbita conservando la misma perspectiva del Sol.

Para que esto suceda el plano orbital debe girar con una velocidad angular de

$$\frac{2\pi}{365.26 \text{ días}} = 0.017202 \text{ rad/día} = 0.9856 \text{ }^{\circ}/\text{día}$$

hacia el Este, así irá compensando la traslación de la Tierra con la perturbación debida al achatamiento.

Ejemplo 5.1 El satélite SPOT-7, lanzado el 30 de junio del 2014 es un satélite SSO del que se conocen dos de sus TLEs, su excentricidad $e = 0.0001121$ y su movimiento medio $n = 14.58545448 \text{ rev/día}$. ¿Cuál debe ser su inclinación para mantener su propiedad SSO?

Solución:

Se puede deducir el semieje mayor a partir del movimiento medio:

$$\frac{2\pi}{n} = T = 2\pi \sqrt{\frac{a^3}{\mu}} \rightarrow a = \sqrt[3]{\frac{\mu}{n^2}} = \sqrt[3]{\frac{398600.5}{(14.58545448 \cdot \frac{2\pi}{86400})^2}} = 7076.01 \text{ km}$$

Para ser SSO el avance del nodo (2) debe ser igual al ángulo que gira la Tierra alrededor del Sol en un segundo

$$\frac{d\Omega}{dt} = \frac{2\pi}{365.26 \cdot 86400} = - \left(\frac{3 \sqrt{398600.5} \cdot 0.00108263 \cdot 6378^2}{2 (1 - 0.0001121^2)^2 7076.01^{\frac{7}{2}}} \right) \cos i \rightarrow \boxed{i = 98.18^\circ}$$

6 Aplicación del Avance del perigeo: Órbitas MOLNIYA

Tal y como se ha deducido en (4) para inclinaciones $i = 63.4^\circ$ e $i = 116.6^\circ$ la línea de ápsides permanece estacionaria y por tanto el perigeo y apogeo se mantienen fijos.

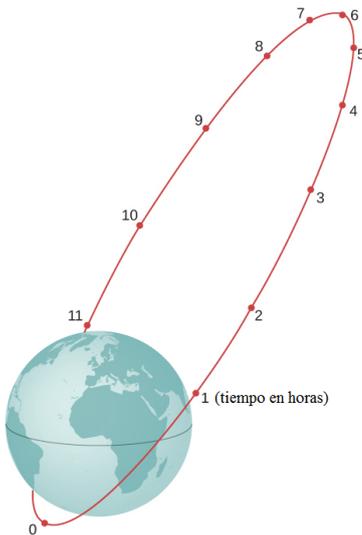


Figura 7: La órbita Molniya tiene $i = 63.4^\circ$ o $i = 116.6^\circ$ para mantener fijo el perigeo.

Este hecho fue aprovechado por el programa espacial ruso diseñando el sistema de satélites de comunicación Molniya (rayo) con esas propiedades. Actualmente, se denominan **órbitas Molniya** a las órbitas que tienen estas inclinaciones para mantener fijo el perigeo. Estas órbitas son interesantes por varias razones. Una de ellas es que los rusos tienen todas sus bases de lanzamiento por encima de los 45° de latitud lo que hace inevitable hacer una costosa maniobra de cambio de plano para situar satélites en órbitas con inclinaciones más bajas (entre ellos los geostacionarios $i = 0^\circ$). Por otra parte desde los satélites geostacionarios no pueden ver con efectividad las latitudes muy altas, lo que hace interesante también este tipo de órbitas para otros países como EEUU o Canadá.

Otra ventaja de estas órbitas es que la velocidad en el paso por el apogeo es muy baja por lo que al situarlo sobre la zona de interés el satélite está mucho más tiempo sobre esa zona mientras que el paso por el perigeo es realizado a una velocidad mucho más alta (ver figura 7).

Ejemplo 6.1 El satélite americano *Trumpet*¹ fue lanzado en 2017 para ocupar una órbita de tipo Molniya y así mantener fijo su perigeo. Las alturas del perigeo y del apogeo son $h_p = 1266 \text{ km}$ y $h_a = 39089 \text{ km}$. Determina:

- El semieje mayor, el periodo, la excentricidad y el momento específico de la órbita.
- Las velocidades en el apogeo, perigeo y cuando la distancia es igual al semilado recto.

Solución:

a) Considerando que el radio de la Tierra es $R_T = 6378 \text{ km}$ podemos calcular los radios del apogeo y perigeo y con ellos el semieje mayor y la excentricidad:

$$\begin{aligned} r_p &= R_T + h_p = 6378 + 1266 = 7644, \text{ km} \\ r_a &= R_T + h_a = 6378 + 39089 = 45467, \text{ km} \\ a &= \frac{r_a + r_p}{2} = \frac{45467 + 7644}{2} = 26555.5 \text{ km} \\ e &= \frac{r_a - r_p}{r_a + r_p} = \frac{45467 - 7644}{45467 + 7644} = 0.71215 \end{aligned}$$

El periodo se puede hallar con el semieje mayor

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{a^3}{\mu}} = 2\pi \sqrt{\frac{26555.5^3}{398600.5}} = 43066.8 \text{ s} \sim 11.963 \text{ h}$$

y, si conocemos la excentricidad, el momento angular, ya que $\frac{h^2}{\mu} = a(1 - e^2)$:

$$h = \sqrt{\mu a(1 - e^2)} = \sqrt{398600.5 \cdot 26555.5(1 - 0.71215^2)} = 72227.1 \text{ km}^2/\text{s}^2$$

b) Para calcular las velocidades en apogeo y perigeo se puede aplicar que en ellos toda la velocidad es transversal por lo que

$$\begin{aligned} h &= h_{apo} = r_a v_a \rightarrow v_a = \frac{h}{r_a} = \frac{72227.1}{45467} = 1.59 \text{ km/s} \\ h &= h_{per} = r_p v_p \rightarrow v_p = \frac{h}{r_p} = \frac{72227.1}{7644} = 9.45 \text{ km/s} \end{aligned}$$

Como se puede observar la velocidad en el perigeo es casi 6 veces mayor que en el apogeo.

La velocidad cuando $r = p$ se puede calcular hallando las velocidades radial y transversal aplicando que en ese momento $\theta = 90^\circ$

$$\begin{aligned} v_r &= \frac{\mu}{h} e \sin(90^\circ) = \frac{398600.5}{72227.1} \cdot 0.71215 = 3.93 \text{ km/s} \\ v_\perp &= \frac{\mu}{h} (1 + e \cos(90^\circ)) = \frac{398600.5}{72227.1} = 5.52 \text{ km/s} \\ v_{r=p} &= \sqrt{v_r^2 + v_\perp^2} = \sqrt{3.93^2 + 5.52^2} = 6.78 \text{ km/s} \end{aligned}$$

¹<https://www.n2yo.com/satellite/?s=42941>

También podíamos calcular la velocidad utilizando la ecuación de la energía

$$\frac{v^2}{2} - \frac{\mu}{r} = -\frac{\mu}{2a} \rightarrow v \underset{(r=p)}{=} \sqrt{\frac{2\mu}{p} - \frac{\mu}{a}} = \sqrt{\frac{2\mu^2}{h^2} - \frac{\mu}{a}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 398600.5^2}{72227.1^2} - \frac{398600.5}{26555.5}} = 6.78 \text{ km/s}$$

Ejemplo 6.2 Determina la excentricidad y las alturas del apogeo y perigeo de un satélite que es SSO, el argumento del perigeo es constante y su periodo es de 2 horas 50 minutos

Solución:

Conociendo el periodo, $T = 2 \cdot 3600 + 50 \cdot 60 = 10200 \text{ s}$, se puede calcular el semieje mayor

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{a^3}{\mu}} \rightarrow a = \sqrt[3]{\mu \left(\frac{T}{2\pi}\right)^2} = \sqrt[3]{398600.5 \left(\frac{10200}{2\pi}\right)^2} = 10165.4 \text{ km}$$

Para la excentricidad debemos utilizar la expresión (2) imponiendo la condición de ser helio-síncrono lo que obliga a que el movimiento sea retrógrado ($i > 90^\circ$) para que el nodo avance hacia el Este.

$$\frac{d\Omega}{dt} = \frac{2\pi}{325.26 \cdot 86400} = 1.99097 \cdot 10^{-7} \text{ rad/s}$$

$$1.99097 \cdot 10^{-7} = -\frac{3}{2} \frac{\sqrt{\mu} J_2 R_T^2}{(1-e^2)^2 a^{\frac{7}{2}}} \cos(116.6^\circ) \rightarrow e = \sqrt{1 - \sqrt{-\frac{3\sqrt{\mu} J_2 R_T^2 \cos(116.6^\circ)}{2 \cdot 1.99097 \cdot 10^{-7} a^{\frac{7}{2}}}}} = 0.242745$$

7 Cierre

En este artículo se ha definido y calculado una primera aproximación del achatamiento de la Tierra. En la sección 3 se ha presentado el parámetro adimensional J_2 que permite calcular las variaciones de los dos elementos orbitales que cambian por el efecto perturbador del achatamiento de los planetas.

En la siguiente sección se han mostrado las dos principales consecuencias de esa perturbación: La regresión o avance del nodo y la rotación de la línea del perigeo.

En las dos últimas secciones se han estudiado dos aplicaciones de estas variaciones: las órbitas SSO y las MOLNIYA.

Estos contenidos han sido apoyados con ejemplos que muestran su aplicación a posibles situaciones reales.

Referencias

- [1] CURTIS, HOWARD D., *Orbital Mechanics for Engineering Students*, tercera edición, Elsevier aerospace engineering series, Kidlington: ButterWorth-Heinemann, 2014.
- [2] BATE, ROGER R. ET AL., *Fundamental of Astrodynamics*, Dover Publications, New York, 1971.
- [3] BROWN, CHARLES D., *Spacecraft Mission Design. Second Edition*, American Institute of Aeronautics and Astronautics Inc., Virginia, 1998.
- [4] PRUSSING, JOHN E. AND CONWAY, BRUCE A., *Orbital Mechanics*, Oxford University Press, New York, 1993.
- [5] CHOBOTOV, VLADIMIR A., *Orbital Mechanics Third Edition*, American Institute of Aeronautics and Astronautics Inc., Virginia, 2002.