Transferencia de Hohmann

Moraño Fernández, José A. (jomofer@mat.upv.es)

Departamento de Matemática Aplicada - ETSID
Universitat Politècnica de València

UNIVERSITAT POLITÈCNICA DE VALÈNCIA

Índice general

1 Introducción

En este artículo se define una de las transferencias orbitales más utilizadas, por su economía y simplicidad, es la llamada **Transferencia de Hohmann**. En su presentación se deducen además, el valor de los impulsos necesarios para su ejecución y el propelente requerido. En esta deducción se considera que las maniobras aplicadas son todas impulsivas (tiempo breve de encendido).

Inicialmente se presenta la transferencia de Hohmann entre dos órbitas circulares y a continuación, se hace un estudio de este tipo de transferencias dando una explicación de la paradoja de Hohmann. Finalmente se muestran las posibilidades de realizar transferencias de Hohmann entre dos órbitas elípticas.

Tras cada razonamiento se presenta algún ejemplo para mostrar su aplicación a diferentes situaciones.

Para la aplicación de las ecuaciones se van a considerar conocidas algunas constantes:

- Cualquier nave o satélite tiene una masa insignificante comparada con la del Sol o con la de un planeta por lo que el parámetro gravitacional es considerado constante $\mu = G(M+m) = GM$ que para el caso de la Tierra resulta ser

$$\mu = 398\,600.5\ km^3/s^2.$$

- La Tierra no es esférica pero cuando, por aproximación se considere que tiene esa forma, se utiliza como radio terrestre el radio ecuatorial

$$R_T = 6378\ km.$$

- La aceleración de la gravedad en la Tierra varía con la altura pero en general se considera la gravedad al nivel del mar

$$g_0 = 9.81 m/s^2 = 0.00981 km/s^2$$

También es necesario recordar que en las órbitas elípticas[1] se verifican las siguientes propiedades:

- El momento angular específico h es constante y en cualquier posición se verifica que $h = r\,v_\perp$, siendo r la distancia al foco y $v_\perp$ la velocidad transversal en esa posición. Aplicando esa propiedad a las posiciones del apogeo r_a y del perigeo r_p, donde $v = v_\perp$, se obtiene:

$$v_a = \frac{h}{r_a} \qquad \text{y} \qquad v_p = \frac{h}{r_p}$$

- $$e = \frac{r_a - r_p}{r_a + r_p}; \quad a = \frac{r_a + r_p}{2}; \quad T = 2\pi\sqrt{\frac{a^3}{\mu}}; \quad h = \sqrt{\mu a\,(1-e^2)} = \sqrt{2\mu}\sqrt{\frac{r_a\, r_p}{r_a + r_p}}$$

[1] e: excentricidad, a semieje mayor y T periodo orbital

Además como las maniobras empleadas son impulsivas hay que tener en cuenta que:

- Durante una maniobra impulsiva la posición de la nave es fija, solo varia el vector velocidad una cantidad Δv que puede originar un cambio en la magnitud (pumping) o en la dirección (cranking) del vector velocidad o en ambos. La magnitud Δv está relacionada con la cantidad de propelente consumido m_P en la maniobra. En el espacio libre, sin drag ni gravedad la ecuación del motor cohete de Tsiolkovski tiene la aproximación[2]

$$\Delta v = I_{sp} g_0 \ln \frac{m_i}{m_f} \quad \rightarrow \quad \frac{m_i}{m_f} = e^{-\frac{\Delta v}{I_{sp} g_0}} \quad \rightarrow \quad \frac{m_P}{m_i} = 1 - e^{-\frac{\Delta v}{I_{sp} g_0}}$$

2 Objetivos

Una vez hayas leído con detenimiento este documento **serás capaz de**:

- Saber calcular la magnitud de los impulsos necesarios para realizar una transferencia orbital de Hohmann, así como la cantidad de propelente necesario para su ejecución y el tiempo empleado en la transferencia.
- Obtener la reserva de maniobra, Δv, necesaria para poder realizar una transferencia de Hohmann a cualquier distancia desde una órbita de radio determinado.
- Estimar y comparar los impulsos y el tiempo de vuelo de las posibles transferencias de Hohmann entre dos órbitas elípticas coaxiales.

3 Transferencia de Hohmann entre órbitas circulares

Una aplicación de las maniobras impulsivas es el estudio de una maniobra bi-impulsiva utilizada para viajar entre dos órbitas circulares coplanarias que comparten el mismo centro/foco. La **Transferencia de Hohmann** es una órbita elíptica recorrida por la nave que es tangente a ambas circunferencias (ver figura 1).

El periapsis y el apoapsis de la órbita de transferencia son el radio de las circunferencias interior y exterior respectivamente:

$$r_p = r_A = R_1 \qquad \text{y} \qquad r_a = r_B = R_2$$

Para hacer el recorrido de la órbita interior O_1 a la órbita exterior O_2 sólo necesitamos recorrer media órbita de transferencia O_H.

Para realizar la maniobra son necesarios dos impulsos:

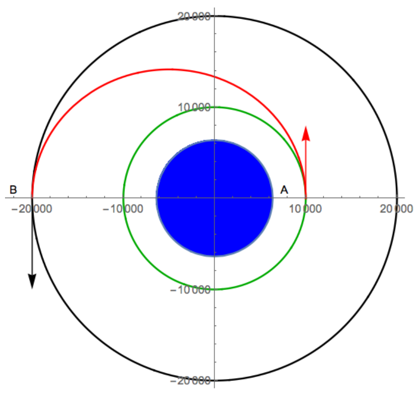

Figura 1: La transferencia de Hohmann entre dos órbitas requiere dos impulsos

[2] Si la masa inicial es $m_i = m_E + m_P + m_{PL}$ (E: Estructura, P: Propelente y PL: Carga de pago o Payload) e I_{sp} es el impulso específico del propulsor y la masa final tras el impulso es $m_f = m_i - m_P$.

- El primero de ellos, Δv_A, pretende hacer un aumento de la altura del apogeo aplicando el impulso en el punto[3] A para dejar O_1 y recorrer O_H. Este impulso debe ser tangencial y de magnitud:

$$\Delta v_A = v_{H_A} - v_{1_A} = \frac{h_H}{r_A} - \frac{h_1}{r_A} = \frac{h_H}{R_1} - \frac{h_1}{R_1}$$

- El segundo, Δv_B, debe conseguir un aumento del perigeo. Para ello se aplica el impulso en B tangencialmente, pasando en ese punto de la órbita O_H a O_2. La magnitud es:

$$\Delta v_B = v_{2_B} - v_{H_B} = \frac{h_2}{r_B} - \frac{h_H}{r_B} = \frac{h_2}{R_2} - \frac{h_H}{R_2}$$

Se puede obtener una expresión que calcule directamente Δv_A y Δv_B a partir de R_1 y R_2: Como las órbitas O_1 y O_2 son circulares:

$$h_1 = \sqrt{\mu R_1} \quad \text{y} \quad h_2 = \sqrt{\mu R_2}$$

pero para la órbita elíptica O_H aplicando $e_H = \frac{R_2 - R_1}{R_1 + R_2}$ y $a_H = \frac{R_1 + R_2}{2}$ resulta:

$$\boxed{h_H} = \sqrt{\mu\, a_H \left(1 - e_H^2\right)} = \boxed{\sqrt{2\mu}\sqrt{\frac{R_1\, R_2}{R_1 + R_2}}} \tag{1}$$

Sustituyendo en las expresiones de Δv_A y Δv_B se obtiene:

$$\begin{aligned} \Delta v_A &= \frac{h_H}{r_A} - \frac{h_1}{r_A} = \frac{\sqrt{2\mu}\sqrt{\frac{R_1\, R_2}{R_1 + R_2}}}{R_1} - \frac{\sqrt{\mu R_1}}{R_1} = \sqrt{\frac{\mu}{R_1}}\left[\sqrt{\frac{2R_2}{R_1 + R_2}} - 1\right] \\ \Delta v_B &= \frac{h_2}{r_B} - \frac{h_H}{r_B} = \frac{\sqrt{\mu R_2}}{R_2} - \frac{\sqrt{2\mu}\sqrt{\frac{R_1\, R_2}{R_1 + R_2}}}{R_2} = \sqrt{\frac{\mu}{R_2}}\left[1 - \sqrt{\frac{2R_1}{R_1 + R_2}}\right] \end{aligned} \tag{2}$$

El tiempo que la nave tarda en recorrer la órbita de transferencia es exactamente un semiperiodo de la órbita O_H:

$$t_{AB} = \frac{T_H}{2} = \pi\sqrt{\frac{a_H^3}{\mu}}$$

Ejemplo 3.1 *Un satélite de $m = 3000\,kg$ orbita alrededor de la Tierra en una órbita de parking circular de altitud $200\,km$. a) ¿Cuánto combustible será necesario para subirlo a una órbita GEO (circular de altitud $36000\,km$) si el impulso específico del propulsor es $I_{sp} = 300\,s$? b) ¿Y para ponerlo en una órbita circular de radio $R_3 = 600000\,km$?*

Solución:

Para cambiar de órbita se utiliza una transferencia de Hohmann con dos impulsos.

[3] Al ser O_1 circular este punto puede ser cualquiera de la órbita

a) El radio de la órbita de parking es $R_1 = R_T + 200 = 6578\,km$ y el radio de la GEO $R_2 = R_T + 36000 = 42378\,km$.

Los momentos de esas órbitas son:

$$h_1 = \sqrt{\mu\, R_1} = \sqrt{398600.5 \cdot 6578} = 51205.4\,km^2/s^2$$

$$h_2 = \sqrt{\mu\, R_2} = \sqrt{398600.5 \cdot 42378} = 129969\,km^2/s^2$$

El momento específico de la órbita de transferencia es

$$h_H \overset{(1)}{=} \sqrt{2\mu}\sqrt{\frac{R_1\, R_2}{R_1 + R_2}} = \sqrt{2 \cdot 398600.5}\sqrt{\frac{6578 \cdot 42378}{6578 + 42378}} = 67374.9\,km^2/s^2$$

Con estos valores se pueden obtener los dos impulsos:

$$\Delta v_1 = \frac{h_H}{R_1} - \frac{h_1}{R_1} = \frac{67374.9}{6578} - \frac{51205.4}{6578} = 2.458\,km/s$$

$$\Delta v_2 = \frac{h_2}{R_2} - \frac{h_H}{R_2} = \frac{129969}{42378} - \frac{67374.9}{42378} = 1.477\,km/s$$

Por tanto, sumando ambos impulsos

$$\Delta v_T = \Delta v_1 + \Delta v_2 = 2.458 + 1.477 = 3.935\,km/s$$

Aplicando (1) se puede deducir el consumo.

$$\frac{\Delta m}{m} = 1 - e^{-\frac{\Delta v_T}{I_{sp}\, g_0}} = 1 - e^{-\frac{3.935}{300 \cdot 0.00981}} = 0.737 \quad \rightarrow \quad \Delta m = 0.737 \cdot 3000 = 2212.2\,kg$$

El tiempo invertido en recorrer la órbita de transferencia es:

$$t_{AB} = \frac{T_H}{2} = \pi\sqrt{\frac{a_H^3}{\mu}} = \pi\sqrt{\frac{\left(\frac{R_1+R_2}{2}\right)^3}{\mu}} = \pi\sqrt{\frac{\left(\frac{6578+42378}{2}\right)^3}{398600.5}} = 19056.6\,s$$

b) Como el radio de la tercera órbita es $R_3 = 600000\,km$

$$h_3 = \sqrt{\mu\, R_3} = \sqrt{398600.5 \cdot 600000} = 489040\,km^2/s^2$$
$$h_{H^*} \overset{(1)}{=} \sqrt{2\mu}\sqrt{\frac{R_1\, R_3}{R_1 + R_3}} = \sqrt{2 \cdot 398600.5}\sqrt{\frac{6578 \cdot 600000}{6578 + 600000}} = 72021.7\,km^2/s^2$$

por lo que los impulsos de esta transferencia son

$$\Delta v_1^* = \frac{h_{H^*}}{R_1} - \frac{h_1}{R_1} = \frac{72021.7}{6578} - \frac{51205.4}{6578} = 3.165\,km/s$$

$$\Delta v_3 = \frac{h_3}{R_3} - \frac{h_{H^*}}{R_3} = \frac{489040}{600000} - \frac{72021.7}{600000} = 0.695\,km/s$$

$$\Delta v_T^* = \Delta v_1^* + \Delta v_3 = 3.165 + 0.695 = 3.860\,km/s$$

que en consumo de combustible resulta:

$$\frac{\Delta m^*}{m} = 1 - e^{-\frac{\Delta v_T^*}{I_{sp}\,g_0}} = 1 - e^{-\frac{3.860}{300\cdot 0.00981}} = 0.731 \quad \rightarrow \quad \Delta^* m = 0.731 \cdot 3000 = 2191.7\,kg$$

El tiempo invertido en esta ocasión para recorrer la órbita de transferencia es:

$$t_{H^*} = \frac{T_{H^*}}{2} = \pi\sqrt{\frac{\left(\frac{R_1+R_3}{2}\right)^3}{\mu}} = \pi\sqrt{\frac{\left(\frac{6578+600000}{2}\right)^3}{398600.5}} = 831124\,s$$

Nota 3.1 *Resulta un poco paradójico que se necesite menos Δv, combustible, para subir un satélite a una órbita más allá de la Luna que para ponerlo en una órbita GEO más cercana.*

4 Análisis de la transferencia de Hohmann

En el apartado b) del Ejemplo 3.1 se ha producido un resultado en principio sorprendente: es menos costoso subir a una órbita de radio $R = 600000\,km$ que a una GEO a poco más de $42000\,km$.

Esta paradoja puede ser justificada si nos fijamos en la variación de energía al aplicar un impulso. Cuando se aplica un impulso Δv en un punto se produce un incremento de la energía de expresión:

$$\Delta\xi = \frac{(v_0 + \Delta v)^2}{2} - \frac{v_0^2}{2} = v_0\,\Delta v + \frac{v_0^2}{2} = \left(v_0 + \frac{\Delta v}{2}\right)\Delta v$$

lo que indica que el incremento de energía, y por tanto de semieje mayor, depende de la velocidad que la nave lleva en el momento de aplicar el impulso.

Si se hace un estudio detallado tomando los impulsos de la transferencia de Hohmann obtenidos en (2), dividiendo de la velocidad circular de la órbita de partida $v_{c1} = \sqrt{\frac{\mu}{R_1}}$ para obtener una expresión adimensional y denotando $\alpha = \frac{R_2}{R_1}$ resulta

$$\frac{\Delta v_A}{v_{c1}} = \sqrt{\frac{2\frac{R_2}{R_1}}{1+\frac{R_2}{R_1}}} - 1 = \sqrt{\frac{2\alpha}{1+\alpha}} - 1 \xrightarrow{R_2\to\infty} \sqrt{2} - 1$$

$$\frac{\Delta v_B}{v_{c1}} = \sqrt{\frac{1}{\frac{R_2}{R_1}}}\left(1 - \sqrt{\frac{2}{1+\frac{R_2}{R_1}}}\right) = \frac{1}{\sqrt{\alpha}}\left(1 - \sqrt{\frac{2}{1+\alpha}}\right) \xrightarrow{R_2\to\infty} 0$$

por lo que el impulso total de la transferencia en relación a v_{c1} es

$$\frac{\Delta v_T}{v_{c1}} = \sqrt{\frac{2\alpha}{1+\alpha}} - 1 + \frac{1}{\sqrt{\alpha}}\left(1 - \sqrt{\frac{2}{1+\alpha}}\right) = \sqrt{\frac{2}{\alpha\,(1+\alpha)}}\,(\alpha - 1) + \frac{1}{\sqrt{\alpha}} - 1 \xrightarrow{R_2\to\infty} \sqrt{2} - 1$$

La función $\frac{\Delta v_T}{v_{c1}}$ alcanza un máximo cuando $\alpha = \frac{R_2}{R_1} = 15.58$ cuyo valor es 0.536 (ver figura 2).

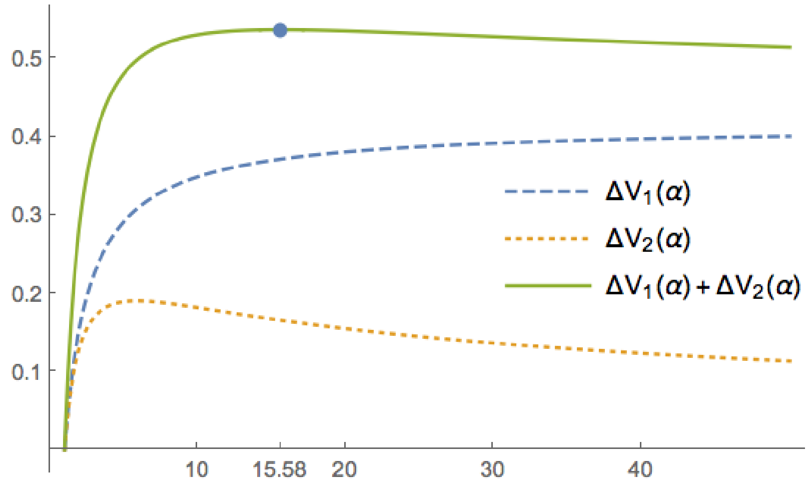

Figura 2: Impulsos y su suma total de una transferencia de Hohmann

Esto indica que hacer una transferencia de Hohmann cuando $R_2 > 15.58\,R_1$ es menos costoso que cuando se hace a una de radio $R_2 = 15.58\,R_1$. En consecuencia, si se dispone de una reserva de maniobra de $0.536\,v_{c1}$ se puede subir a una órbita de cualquier radio.

5 Transferencia de Hohmann entre órbitas elípticas

En la realidad las órbitas perfectamente circulares no existen por lo que sería interesante generalizar la transferencia de Hohmann a órbitas elípticas. Para hacer esta extensión hay que exigir que las órbitas elípticas sean coaxiales y coplanarias. En este caso la órbita de transferencia también debe ser tangente tanto a la inicial como a la final por lo que hay dos posibles recorridos para la ejecución de la maniobra, O_{H_1} y O_{H_2} (ver figura 3) no siendo evidente saber cuál es el de menor consumo.

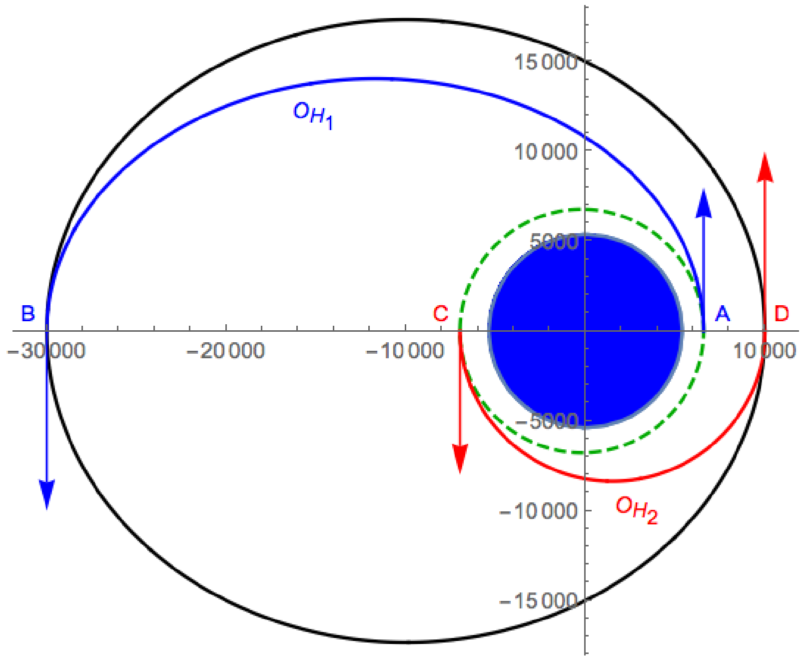

Figura 3: Para hacer una transferencia entre dos órbitas elípticas con la misma línea de ápsides se puede optar entre dos posibles transferencias de Hohmann, O_{H_1} y O_{H_2}.

Ejemplo 5.1 *Un satélite de* $m = 1000\,kg$ *orbita alrededor de la Tierra con semieje mayor* $a_1 = 6778\,km$ *y una excentricidad* $e_1 = 0.03$*. Calcula el impulso total para necesario para situarlo en una órbita coaxial de semieje mayor* $a_2 = 20000\,km$ *y excentricidad* $e_2 = 0.05$*. Calcula y compara las dos posibles transferencias de Hohmann.*

Solución: Para cambiar de órbita mediante una transferencia de Hohmann se puede dar el primer impulso en el perigeo de la órbita interior (ver figura 4) o en el apogeo (ver figura 5).

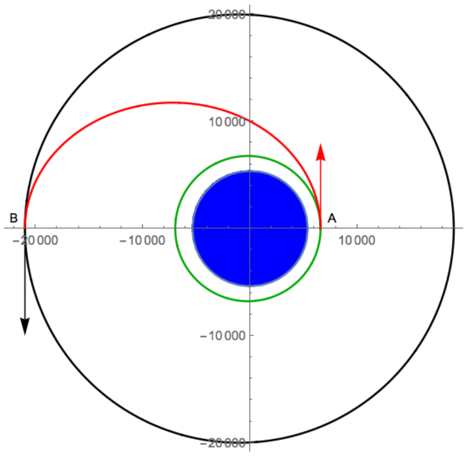

Figura 4: Transferencia de Hohmann con el primer impulso en el perigeo

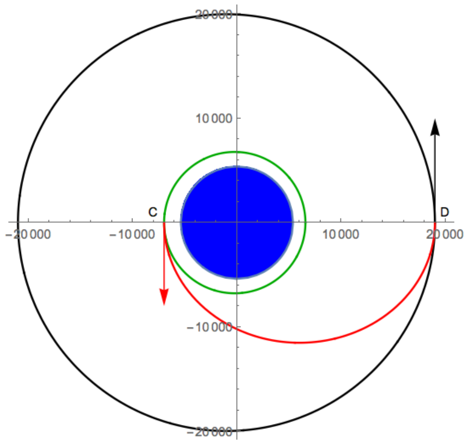

Figura 5: Transferencia de Hohmann con el primer impulso en el apogeo

Los momentos de las órbitas inicial y final son:

$$h_1 = \sqrt{\mu\, a_1\,(1 - e_1^2)} = \sqrt{398600.5 \cdot 6778\,(1 - 0.03^2)} = 51954.6\,km^2/s^2$$

$$h_2 = \sqrt{\mu\, a_2\,(1 - e_2^2)} = \sqrt{398600.5 \cdot 20000\,(1 - 0.05^2)} = 89174.4\,km^2/s^2$$

Si el primero de los impulsos se da en el perigeo de la órbita interior, A, para llegar al apogeo de la exterior, B:

$$h_{H_1} = \sqrt{2\mu}\sqrt{\frac{r_{p_1}\, r_{a_2}}{r_{p_1} + r_{a_2}}} = \sqrt{2 \cdot 398600.5}\sqrt{\frac{6574.66 \cdot 21000}{6574.66 + 21000}} = 63179.3\,km^2/s^2$$

Con estos valores se pueden obtener los dos impulsos de la primera maniobra posible:

$$\Delta v_A = \frac{h_{H_1}}{r_{p_1}} - \frac{h_1}{r_{p_1}} = \frac{63179.3}{6574.66} - \frac{51954.6}{6574.66} = 1.707\,km/s$$

$$\Delta v_B = \frac{h_2}{r_{a_2}} - \frac{h_{H_2}}{r_{a_2}} = \frac{89174.4}{21000} - \frac{63796.9}{21000} = 1.238\,km/s$$

y sumando ambos impulsos el impulso total:

$$\Delta v_{T_1} = \Delta v_A + \Delta v_B = 1.707 + 1.238 = 2.945\,km/s$$

Para la segunda posible órbita, el primer impulso se da en el apogeo de la interior, C, para llegar al perigeo de la exterior, D:

$$h_{H_2} = \sqrt{2\mu}\sqrt{\frac{r_{a_1} r_{p_2}}{r_{a_1} + r_{p_2}}} = \sqrt{2 \cdot 398600.5}\sqrt{\frac{6981.34 \cdot 19000}{6981.34 + 19000}} = 63796.9\, km^2/s^2$$

$$\Delta v_C = \frac{h_{H_2}}{r_{a_1}} - \frac{h_1}{r_{a_1}} = \frac{63796.9}{6981.34} - \frac{51954.6}{6981.34} = 1.696\, km/s$$

$$\Delta v_D = \frac{h_2}{r_{p_2}} - \frac{h_{H_2}}{r_{p_2}} = \frac{89174.4}{19000} - \frac{63796.9}{19000} = 1.336\, km/s$$

y sumando ambos impulsos el impulso total:

$$\Delta v_{T_2} = \Delta v_C + \Delta v_D = 1.696 + 1.336 = 3.032\, km/s$$

Se puede comprobar que el consumo de las posibles transferencias de Hohmann entre órbitas elípticas no es único. La órbita final es la misma pero la posición del satélite sobre ella no será la misma (calcular el tiempo invertido en recorrer cada una de las órbitas).

6 Cierre

En este artículo se ha definido la transferencia de Hohmann entre órbitas circulares y se han determinado los impulsos necesarios para su ejecución así como el propelente que se requiere para ello.

Se ha hecho un análisis de la reserva de maniobra necesaria para hacer transferencias de Hohmann a diferentes alturas.

Por último, se han presentado y estudiado las posibilidades de hacer transferencias de Hohmann entre órbitas elípticas.

Todos estos contenidos han sido apoyados con ejemplos que muestran su aplicación a posibles situaciones reales.

Referencias

[1] CURTIS, HOWARD D.,*Orbital Mechanics for Engieering Students*, tercera edición, Elsevier aerospace engineering series, Kidlington: ButterWorth-Heinemann, 2014.

[2] BATE, ROGER R. ET AL.,*Fundamental of Astrodynamics*, Dover Publications, New York, 1971.

[3] BROWN, CHARLES D.,*Spacecraft Mission Design. Second Edition*, American Institute of Aeronautics and Astronautics Inc., Virginia, 1998.

[4] PRUSSING, JOHN E. AND CONWAY, BRUCE A.,*Orbital Mechanics*, Oxford University Press, New York, 1993.

[5] CHOBOTOV, VLADIMIR A.,*Orbital Mechanics Third Edition*, American Institute of Aeronautics and Astronautics Inc., Virginia, 2002.