Maniobra impulsiva general coplanaria (No-Hohmann)

Moraño Fernández, José A. (jomofer@mat.upv.es)

Departamento de Matemática Aplicada - ETSID
Universitat Politècnica de València

UNIVERSITAT POLITÈCNICA DE VALÈNCIA

Índice general

1 Introducción

Este artículo presenta como se realiza la maniobra de cambio de órbita dentro de un mismo plano mediante la aplicación de un único impulso. Se considera un caso general donde las transferencias realizadas no son de Hohmann (impulso en perigeo o apogeo). En este caso general, la variación del vector velocidad produce cambios en el tamaño y en la forma de la órbita además de variar la dirección de su perigeo. En las maniobras monoimpulsivas, se considera que el radio orbital no cambia antes y después del impulso.

Cualquier nave o satélite tiene una masa insignificante comparada con la del Sol o con la de un planeta por lo que el parámetro gravitacional es considerado constante $\mu = G(M+m) = GM$ que para el caso de la Tierra resulta ser

$$\mu = 398\,600.5\ km^3/s^2.$$

También es necesario recordar que en órbitas elípticas[1] se verifican las siguientes igualdades

$$r = \frac{\frac{h^2}{\mu}}{1+e\cos\theta} \qquad\qquad \frac{h^2}{\mu} = a\left(1-e^2\right)$$

y que conociendo la anomalía verdadera θ de una nave en un punto de la órbita se pueden conocer las componentes de la velocidad y el ángulo de vuelo en ese punto

$$v_\perp = \frac{\mu}{h}\,(1+e\cos\theta) \qquad\qquad v_r = \frac{\mu}{h}\,e\sin\theta \qquad\qquad \tan\gamma = \frac{v_r}{v_\perp}$$

2 Objetivos

Una vez hayas leído con detenimiento este documento **serás capaz de**:

- Saber calcular el impulso y la dirección de su aplicación para producir un cambio en el vector velocidad de un cuerpo en su movimiento orbital.
- Calcular qué impulso es necesario para cambiar los elementos (semieje mayor, excentricidad y argumento del perigeo) de una órbita a otra coplanaria, determinando también la dirección y el punto de aplicación de éste.
- Obtener como caso particular que impulso (punto y dirección de aplicación y magnitud) permite cambiar el argumento del perigeo de una órbita sin cambiar el resto de elementos.

3 Variación del vector velocidad en órbitas coplanarias

Cuando las maniobras impulsivas se aplican en el perigeo o en el apogeo, los cambios producidos en el vector velocidad $\overrightarrow{v}$ son solo de su magnitud sin que se produzcan variaciones en su dirección. En cambio, cuando el impulso es aplicado en un punto distinto del apogeo y del perigeo sí que aparecen cambios en la dirección del vector $\overrightarrow{v}$ además de en su magnitud, ver figura 1.

[1] r: Radio orbital, a: semieje mayor, e: excentricidad, h: momento angular específico y θ: Anomalía verdadera.

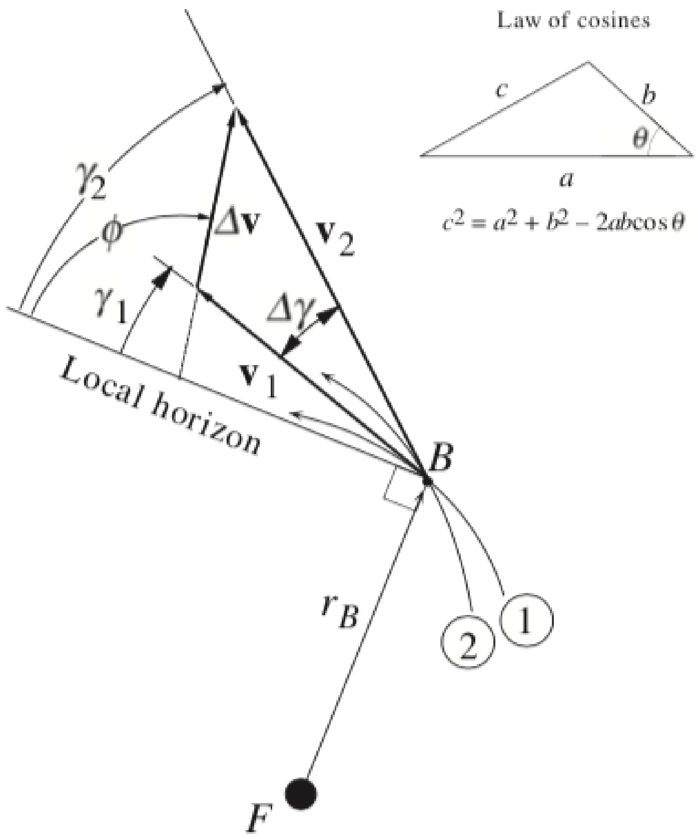

Figura 1: El teorema del coseno permite hallar Δv a partir de la variación del ángulo de vuelo, γ

- La **magnitud del impulso**, Δv es la magnitud del cambio del vector velocidad, que no tiene porque coincidir con la diferencia en la longitud de los dos vectores. Se deduce

$$\Delta v = \|\Delta \overrightarrow{v}\| = \|\overrightarrow{v}_2 - \overrightarrow{v}_1\| = \sqrt{(\overrightarrow{v}_2 - \overrightarrow{v}_1)\cdot(\overrightarrow{v}_2 - \overrightarrow{v}_1)} = \sqrt{v_1^2 + v_2^2 - 2\overrightarrow{v}_1 \cdot \overrightarrow{v}_2} \rightarrow$$

$$\boxed{\Delta v = \sqrt{v_1^2 + v_2^2 - 2v_1 v_2 \cos\Delta\gamma}} \quad (1)$$

  siendo $\Delta\gamma = \gamma_2 - \gamma_1$.

- La **variación de la dirección** viene determinada por el ángulo ϕ existente entre el vector $\Delta\overrightarrow{v}$ y el Horizonte Local. Según la figura 1

$$\boxed{\tan\phi = \frac{\Delta v_r}{\Delta v_\perp}} \quad (2)$$

  siendo v_r y $v_\perp$ las velocidades radial y transversal respectivamente.

Nota: Si la magnitud de la velocidad antes y después del impulso es la misma $v_1 = v_2 = v$, la expresión (1) se simplifica:

$$\Delta v = \sqrt{v^2 + v^2 - 2v \cdot v\cos\Delta\gamma} = v\sqrt{2\,(1 - \cos\Delta\gamma)} \quad (3)$$

por lo que, cambiar la dirección de la velocidad, aunque no se cambie la magnitud, requiere del consumo de propelente.

Nota: $\Delta\gamma = 0$ solo ocurre cuando los vectores inicial y final de la velocidad tienen la misma dirección, es decir, en el apogeo y en el perigeo.

Ejemplo 3.1 *Un satélite orbita alrededor de la Tierra con en semieje mayor $a = 19000\,km$ y una excentricidad $e = 0.368421$. Calcula la dirección y el impulso de la maniobra Δv que hay que realizar en un punto A, de anomalía verdadera $\theta = 140^o$, para situar al satélite en una nueva órbita que inicie la reentrada en la atmósfera $(alt = 100\,km)$ al llegar al perigeo.*

Solución: Conociendo el semieje mayor y la excentricidad se puede determinar el momento específico y el radio en la posición θ:

$$\frac{h^2}{\mu} = a\left(1 - e^2\right) \rightarrow h = \sqrt{\mu a\left(1 - e^2\right)} = \sqrt{398600.5 \cdot 19000\left(1 - 0.368421^2\right)} = 80903.9\,km^2/s^2$$

$$r_A = \frac{a\left(1 - e^2\right)}{1 + e\cos\theta} = \frac{19000\left(1 - 0.368421^2\right)}{1 + 0.368421\cos 140^\circ} = 22877.8\,km$$

Con ambas expresiones se calculan las componentes de la velocidad:

$$v_\perp = \frac{h}{r_A} = \frac{80903.9}{22877.8} = 3.536\,km/s$$

$$v_r = \frac{\mu}{h}e\sin\theta = \frac{398600.5}{80903.9}0.368421\sin 140^\circ = 1.167\,km/s$$

de donde se deducen la velocidad y el ángulo de vuelo

$$v_A = \sqrt{v_\perp^2 + v_r^2} = \sqrt{3.536^2 + 1.167^2} = 3.724\,km/s$$

$$\gamma = \arctan\left(\frac{v_r}{v_\perp}\right) = \arctan\left(\frac{1.167}{3.536}\right) = 18.26^\circ$$

Ahora hay que hallar esos parámetros para la órbita objetivo cuya ecuación orbital será:

$$r = \frac{\frac{h_2^2}{\mu}}{1 + e_2\cos\theta}$$

Aplicando esa ecuación orbital al punto inicial, $r_A = r(140^\circ) = 22877.8\,km$ y al punto final, $r_B = r(0^\circ) = R_T + 100 = 6478\,km$ se tiene un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas, h_2 y e_2:

$$\left\{22877.8 = \frac{\frac{h_2^2}{\mu}}{1 + e_2\cos(140^\circ)} \quad , \quad 6478 = \frac{\frac{h_2^2}{\mu}}{1 + e_2\cos(0^\circ)}\right\}$$

que resolviendo se obtiene

$$h_2 = 65926.6\,km^2/s^2 \quad \text{y} \quad e_2 = 0.683227$$

lo que permite hallar las componentes de la velocidad en A para la nueva órbita:

$$v_{\perp_2} = \frac{h_2}{r_A} = \frac{65926.6}{22877.8} = 2.882\,km/s$$

$$v_{r_2} = \frac{\mu}{h_2}e_2\sin\theta = \frac{398600.5}{65926.6}0.683227\sin 140^\circ = 2.655\,km/s$$

y la nueva velocidad y el nuevo ángulo de vuelo

$$v_{A_2} = \sqrt{v_{\perp_2}^2 + v_{r_2}^2} = \sqrt{2.882^2 + 2.655^2} = 3.919\,km/s$$

$$\gamma_2 = \arctan\left(\frac{v_{r_2}}{v_{\perp_2}}\right) = \arctan\left(\frac{2.655}{2.882}\right) = 42.66^{\circ}$$

Ahora se puede determinar $\Delta\gamma$ y aplicando (1) Δv:

$$\Delta\gamma = \gamma_2 - \gamma_1 = 42.66 - 18.26 = 24.40^{\circ}$$

$$\Delta v = \sqrt{v_A^2 + v_{A_2}^2 - 2 v_A v_{A_2} \cos\Delta\gamma} =$$
$$= \sqrt{3.724^2 + 3.919^2 - 2 \cdot 3.724 \cdot 3.919 \cos(24.40^{\circ})} = 1.626\, km/s$$

Se puede observar que

$$v_{A_2} - v_A = 0.195 \neq 1.626 = \Delta v$$

También se puede hallar la dirección del impulso con la expresión (2):

$$\phi = \arctan\left(\frac{v_{r_2} - v_r}{v_{\perp_2} - v_{\perp}}\right) = \arctan\left(\frac{2.655 - 1.167}{2.882 - 3.536}\right) \overset{(\gamma_2 \geq \gamma_1)}{=} -66.26^{\circ} + 180^{\circ} = 113.74^{\circ}$$

4 Aplicación: Rotación de la línea de ápsides

La figura 2 muestra dos órbitas O_1 y O_2 contenidas en un mismo plano y con un foco primario común F pero, con diferente línea de ápsides.

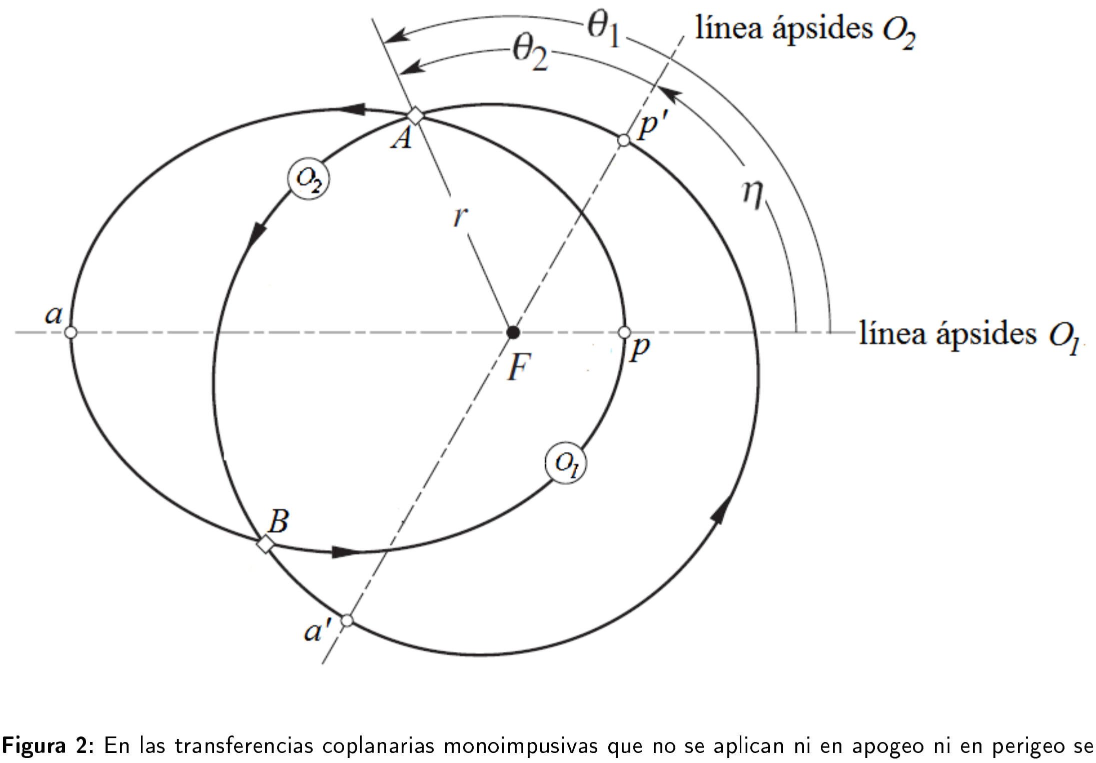

Figura 2: En las transferencias coplanarias monoimpusivas que no se aplican ni en apogeo ni en perigeo se producen cambios en el tamaño y la forma de la órbita y un giro de la línea de ápsides

Para hacer una transferencia de la órbita O_1 a la O_2 con un solo impulso éste debe ser aplicado en un punto perteneciente a ambas órbitas (puntos A y B en la figura). Al aplicar el impulso en uno de estos puntos se produce un cambio en los elementos orbitales que determinan el tamaño y la forma de la órbita, el semieje mayor a (y por tanto h) y la excentricidad e. También se produce una rotación de la línea de ápsides (modificando el argumento del perigeo ω).

¿En qué punto de la órbita inicial θ_1 hay que aplicar un impulso, en qué dirección y con qué magnitud para pasar la nave de la órbita O_1 a la órbita O_2.

Si se considera que la rotación de la línea de ápsides (dirección del perigeo) es de un ángulo η, la anomalía verdadera inicial se verá modificada, pasando de ser θ_1 a ser $\theta_2 = \theta_1 - \eta$, resultando

$$\eta = \theta_1 - \theta_2$$

Como se ha mencionado antes, hay dos puntos posibles para realizar la transferencia, A y B.

Para determinar el punto A se utiliza que la distancia al foco primario r_A, es la misma en las dos órbitas, por lo que

$$r_A = \frac{\frac{h_1^2}{\mu}}{1 + e_1\, \cos\theta_1} = \frac{\frac{h_2^2}{\mu}}{1 + e_2\, \cos\theta_2}$$

$$h_1^2\,(1 + e_2\, \cos\theta_2) = h_2^2\,(1 + e_1\, \cos\theta_1) \quad \rightarrow \quad h_2^2\, e_1\, \cos\theta_1 - h_1^2\, e_2\, \cos\theta_2 = h_2^2 - h_1^2$$

Como $\theta_2 = \theta_1 - \eta$

$$\cos\theta_2 = \cos(\theta_1 - \eta) = \cos\theta_1 \cos\eta + \sin\theta_1 \sin\eta$$

sustituyendo resulta

$$h_2^2 e_1 \cos\theta_1 - h_1^2 e_2 (\cos\theta_1 \cos\eta + \sin\theta_1 \sin\eta) = h_1^2 - h_2^2$$

agrupando términos y renombrando los paréntesis, se obtiene una ecuación de incógnita θ_1

$$\underbrace{\left(h_2^2 e_1 - h_1^2 e_2 \cos\eta\right)}_{a} \cos\theta_1 + \underbrace{\left(-h_1^2 e_2 \sin\eta\right)}_{b} \sin\theta_1 = \underbrace{h_1^2 - h_2^2}_{c}$$

$$a\, \cos\theta_1 + b\, \sin\theta_1 = c \tag{4}$$

Resolviendo la ecuación se obtienen dos soluciones[2] que se corresponden con las anomalías verdaderas de los dos puntos posibles (A y B):

$$\theta_1 = \alpha \pm \arccos\left(\frac{c}{a}\cos\alpha\right) \tag{5}$$

con $\alpha = \arctan\left(\frac{b}{a}\right)$.

La magnitud y la dirección del impulso en cada posición se calculan con las expresiones (1) y (2) respectivamente.

Ejemplo 4.1 *Un satélite orbita alrededor de la Tierra con un semieje mayor $a_1 = 12\,000\,km$, una excentricidad $e_1 = 0.25$ y un argumento del perigeo $\omega_1 = 10^o$. Se quiere transferir el satélite a una nueva órbita de elementos $a_2 = 13\,000\,km$, $e_2 = 0.384615$ y $\omega_2 = 40^o$. Encuentra los puntos donde puede realizarse la maniobra, la dirección de los impulsos y su magnitud.*

Solución: Conociendo el semieje mayor y la excentricidad de cada órbita se pueden determinar los respectivos momentos específicos

[2]Se propone como ejercicio comprobar que las soluciones de la ecuación (4) son las presentadas en (5)

$$h_1 = \sqrt{\mu\, a_1\,(1 - e_1^2)} = \sqrt{398600.5 \cdot 12000\,(1 - 0.25^2)} = 66964.6\, km^2/s^2$$
$$h_2 = \sqrt{\mu\, a_2\,(1 - e_2^2)} = \sqrt{398600.5 \cdot 13000\,(1 - 0.384615^2)} = 66447.5\, km^2/s^2$$

Con las excentricidades y los momentos de las órbitas inicial y destino y sabiendo que la línea de ápsides debe girar

$$\eta = \omega_2 - \omega_1 = 40^\circ - 10^\circ = 30^\circ$$

se pueden determinar los coeficientes de la ecuación (4)

$$a = h_2^2\, e_1 - h_1^2\, e_2 \cos\eta = 66447.5^2 \cdot 0.25 - 66964.6^2 \cdot 0.384615 \cos(30^\circ) = -3.898 \cdot 10^8$$
$$b = -h_1^2\, e_2 \sin\eta = -\,66964.6^2 \cdot 0.384615 \sin(30^\circ) = -8.624 \cdot 10^8$$
$$c = h_1^2 - h_2^2 = 66964.6^2 - 66447.5^2 = 6.899 \cdot 10^7$$

Resolviendo (4) con un software matemático o con la expresión (5) y, considerando que las anomalías verdaderas resultantes deben estar entre 0° y 360°, se obtiene

$$\alpha = \arctan\left(\frac{b}{a}\right) = \arctan\left(\frac{-8.624 \cdot 10^8}{-3.898 \cdot 10^8}\right) = 65.675^\circ$$

$$\theta_1 = \alpha \pm \arccos\left(\frac{c}{a}\cos\alpha\right) = 65.675 \pm \arccos\left(\frac{6.899 \cdot 10^7}{-3.898 \cdot 10^8}\cos(65.675^\circ)\right) \rightarrow \begin{cases} \theta_{1A} = 159.86^\circ \\ \theta_{1B} = 331.50^\circ \end{cases}$$

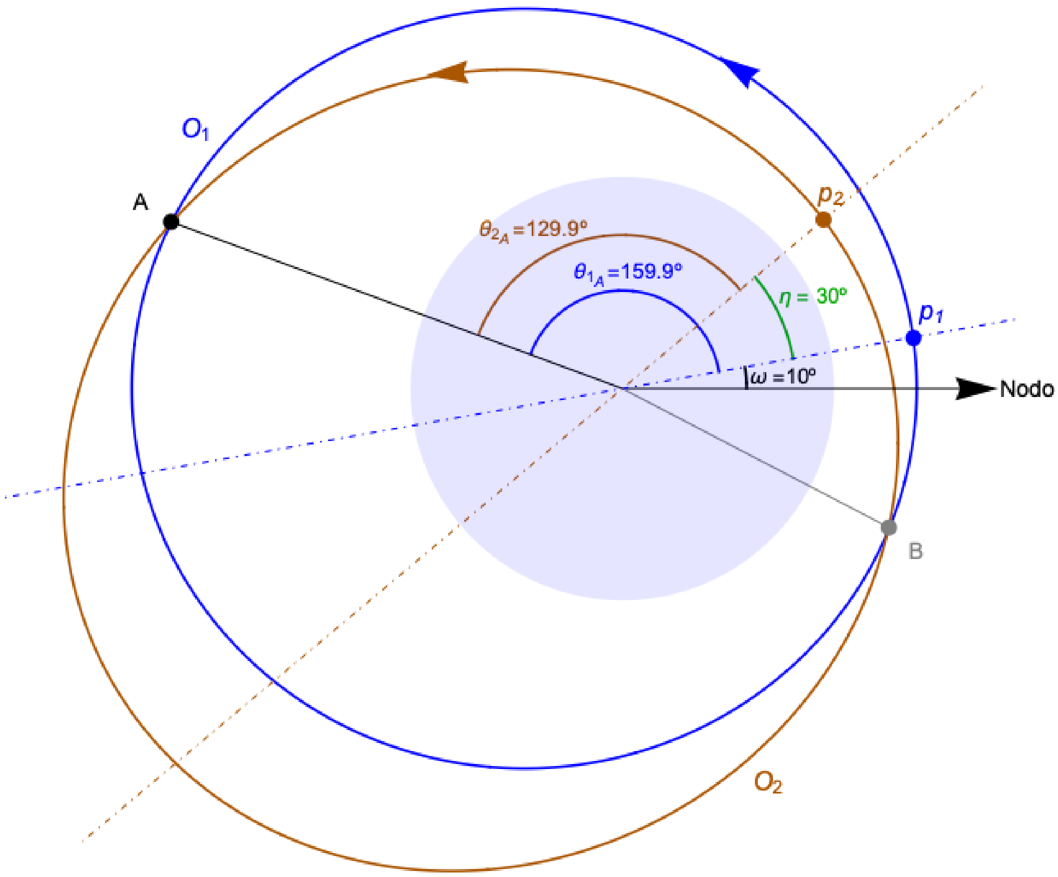

Figura 3: Representación de las órbitas del ejemplo con las anomalía verdadera de aplicación del impulso para la transferencia entre ambas

Utilizando la anomalía verdadera del primero de los puntos, θ_{1A}, es posible hallar las componentes de la velocidad en ese punto

$$v_{\perp_{1A}} = \frac{\mu}{h_1}\left(1 + e_1 \cos\theta_{1A}\right) = \tfrac{398600.5}{66964.6}\left(1 + 0.25\cos 159.86^o\right) = 4.555\,km/s$$

$$v_{r_{1A}} = \frac{\mu}{h_1} e_1 \sin\theta_{1A} = \tfrac{398600.5}{66964.6}\, 0.25 \sin 159.86^o = 0.5125\,km/s$$

y con ellas el ángulo de vuelo y la magnitud de la velocidad

$$\gamma_{1A} = \arctan\frac{v_{r_{1A}}}{v_{\perp_{1A}}} = \arctan\tfrac{0.5125}{4.555} = 6.42^o$$

$$v_{1A} = \sqrt{v_{\perp_{1A}}^2 + v_{r_{1A}}^2} = \sqrt{4.555^2 + 0.5125^2} = 4.584\,km/s$$

Como la línea de ápsides gira $\eta = 30^o$ la anomalía verdadera en la órbita final tendrá un nuevo valor

$$\theta_{2A} = \theta_{1A} - \eta = 159.86 - 30 = 129.86^o$$

y repitiendo el proceso anterior ahora para la órbita destino resultan

$$v_{\perp_{2A}} = \frac{\mu}{h_2}\left(1 + e_2 \cos\theta_{2A}\right) = \tfrac{398600.5}{66447.5}\left(1 + 0.384615\cos 129.86^o\right) = 4.520\,km/s$$

$$v_{r_{2A}} = \frac{\mu}{h_2} e_2 \sin\theta_{2A} = \tfrac{398600.5}{66447.5}\, 0.384615 \sin 129.86^o = 1.771\,km/s$$

$$\gamma_{2A} = \arctan\frac{v_{r_{2A}}}{v_{\perp_{2A}}} = \arctan\tfrac{1.771}{4.520} = 21.40^o$$

$$v_{2A} = \sqrt{v_{\perp_{2A}}^2 + v_{r_{2A}}^2} = \sqrt{4.520^2 + 1.771^2} = 4.855\,km/s$$

Pudiendo aplicar ahora la expresión (1) para hallar la magnitud del impulso

$$\Delta v_A = \sqrt{v_{1A}^2 + v_{2A}^2 - 2 v_{1A} v_{2A} \cos\left(\gamma_{2A} - \gamma_{1A}\right)} =$$

$$= \sqrt{4.584^2 + 4.855^2 - 2\cdot 4.584\cdot 4.855\,\cos\left(21.40^o - 6.42^o\right)} = 1.259\,km/s$$

y (2) para obtener la dirección (ángulo con el horizonte local)

$$\phi = \arctan\left(\frac{v_{r_{2A}} - v_{r_{1A}}}{v_{\perp_{2A}} - v_{\perp_{1A}}}\right) = \arctan\left(\frac{1.771 - 0.5125}{4.520 - 4.555}\right) = 91.6^o$$

Para $\theta_{1B} = 331.50^o$ el proceso a seguir es similar obteniendo los siguientes valores

$$\Delta v_B = 1.258\,km/s$$
$$\phi = 87.45^{oo}$$

4.1 Caso particular: Cambio del argumento del perigeo

Un caso particular del anterior se produce cuando se mantienen el tamaño y la forma de la órbita cambiando solo **el argumento del perigeo**.

Consideremos una órbita elíptica O_1 con un argumento del perigeo ω que pretendemos girar un ángulo $\Delta\omega$ en la dirección del movimiento. Esto implica que la anomalía verdadera del punto de aplicación θ_1 cambiará su valor a una nueva θ_2. Se debe verificar que

$$\Delta\omega = \theta_1 - \theta_2$$

Se pretende mantener la forma de la órbita, h, a y e. Además al ser una maniobra impulsiva el radiovector del punto de aplicación no varía:

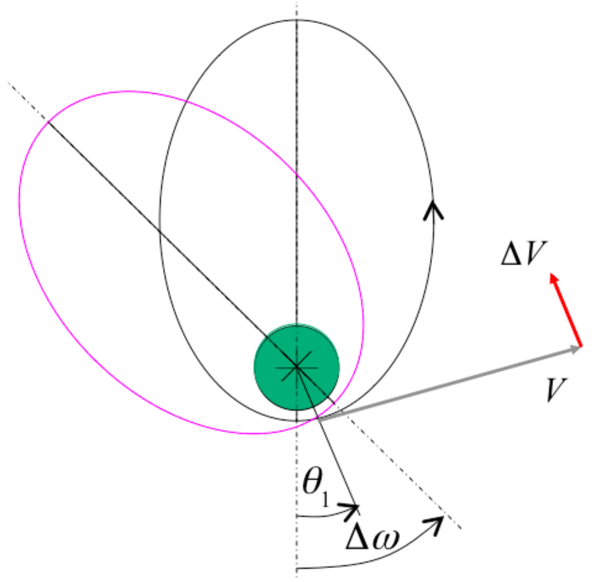

Figura 4: El giro de la línea de ápsides requiere un impulso radial cuando la anomalía verdadera es la mitad del giro deseado

$$r(\theta_2) = r(\theta_1) \rightarrow \frac{\frac{h^2}{\mu}}{1 + e\cos(\theta_2)} = \frac{\frac{h^2}{\mu}}{1 + e\cos(\theta_1)} \rightarrow \theta_2 = \pm\theta_1 \overset{O_2 \neq O_1}{\longrightarrow} \theta_2 = -\theta_1$$

por tanto

$$\Delta\omega = \theta_1 - \theta_2 = 2\theta_1 \rightarrow \boxed{\theta_1 = \frac{\Delta\omega}{2}}$$

que es el **punto de aplicación**.

Para encontrar la dirección y la magnitud del impulso se deben calcular las componentes radial y transversal de las velocidades antes y después:

$$v_{2,\perp} = \frac{\mu}{h}\left(1 + e\cos(\theta_2)\right) = \frac{\mu}{h}\left(1 + e\cos(-\theta_1)\right) = v_{1,\perp}$$
$$v_{2,r} = \frac{\mu}{h} e\sin(\theta_2) = \frac{\mu}{h} e\sin(-\theta_1) = -v_{1,r}$$

de donde se puede deducir la dirección del impulso:

$$\Delta v_r = v_{2,r} - v_{1,r} = -2v_{1,r} < 0 \qquad \text{y} \qquad \Delta v_\perp = v_{2,\perp} - v_{1,\perp} = 0$$

lo que indica que el impulso debe ser **radial hacia el foco** para que el ángulo del vector $\Delta\overrightarrow{v}$ con el horizonte local sea $\phi = -90^{\circ}$.

También se pueden deducir las velocidades y los ángulos de vuelo

$$v_2 = \sqrt{v_{2,r}^2 + v_{2,\perp}^2} = \sqrt{(-v_{1,r})^2 + v_{1,\perp}^2} = v_1$$
$$\tan\gamma_2 = \frac{v_{2,r}}{v_{2,\perp}} = \frac{-v_{1,r}}{v_{1,\perp}} = \tan(-\gamma_1) \rightarrow \gamma_2 = -\gamma_1$$

Como la magnitud de la velocidad no varía se pueden aplicar tanto la expresión general (1) como la expresión (3) para calcular la magnitud del impulso[3]

$$\boxed{\Delta v} = v_1\sqrt{2\left(1-\cos(\gamma_2-\gamma_1\right)} = v_1\sqrt{2\left(1-\cos(2\gamma_1\right)}$$

$$= v_1\sqrt{2\left(1-\cos^2\gamma_1+\sin^2\gamma_1\right)} = \boxed{2v_1\sin\gamma_1}$$

Ejemplo 4.2 *Un satélite describe una órbita terrestre con semieje mayor $a = 92000\,km$, excentricidad $e = 0.5$ y argumento del perigeo $\omega = 0^o$. ¿Qué impulso hay que dar al satélite para que su argumento del perigeo pase a ser $\omega = 60^o$ sin variar los demás elementos orbitales? ¿dónde hay que dar el impulso y hacia donde hay que apuntar?*

Solución: El punto de aplicación debe ser

$$\theta = \tfrac{\Delta\omega}{2} = \tfrac{60^{\text{o}}}{2} = 30^{\text{o}}$$

Para aplicar la fórmula obtenida se necesita la velocidad y el ángulo de vuelo γ en, por tanto:

Para aplicar la fórmula obtenida se necesitan el ángulo de vuelo γ y la velocidad. El primero de ellos es

$$\gamma = \arctan\left(\frac{e\sin\theta}{1+e\cos\theta}\right) = \arctan\left(\frac{0.5\sin(30^{\text{o}})}{1+0.5\cos(30^{\text{o}})}\right) = 9.896^{\text{o}}$$

La velocidad se puede hallar con la expresión de la energía o tal y como se ha hecho anteriormente, hallando las velocidades transversal y radial:

$$v_\perp = \frac{\mu}{h}\left(1+e\cos(\theta)\right) = \sqrt{\frac{398600.5}{92000(1-0.5^2)}}\left(1+0.5\cos 30^{\text{o}}\right) = 3.444\,km/s$$

$$v_r = \frac{\mu}{h}e\sin(\theta) = \frac{\mu}{\sqrt{\mu a(1-e^2)}}e\sin(\theta) = \sqrt{\frac{398600.5}{92000(1-0.5^2)}}0.5\sin 30^{\text{o}} = 0.601\,km/s$$

$$v = \sqrt{v_r^2+v_\perp^2} = \sqrt{0.601^2+3.444^2} = 3.496\,km/s$$

Ahora con la velocidad y el ángulo de vuelo ya se puede calcular el impulso

$$\Delta v = 2v\sin\gamma = 2\cdot 3.496\sin(9.896^{\text{o}}) = 1.202\,km/s$$

La dirección es, tal y como se indicó antes, $\phi = -90^{\text{o}}$, es decir, apuntando al centro de la Tierra.

[3] Hay otras expresiones que permiten determinar está magnitud como por ejemplo: $\Delta v = \frac{\mu}{h}2e\sin\left(\frac{\Delta\omega}{2}\right)$

5 Cierre

En este artículo se han desarrollado las expresiones que permiten calcular la maniobra de una transferencia orbital coplanaria.

En la primera sección se han obtenido la magnitud y la dirección del impulso necesario para que se produzca una determinada variación del vector velocidad de una nave manteniendo el mismo plano orbital.

En la sección 4 se han deducido, como aplicación de la maniobra general coplanaria, los posibles puntos de aplicación, la magnitud y la dirección de un impulso que permita modificar los elementos que definen el tamaño (a), la forma (e) y la dirección del perigeo (ω) de una órbita.

Finalmente se ha estudiado el caso particular de la maniobra que varía únicamente la dirección del perigeo.

Para ayudar al aprendizaje de estos contenidos han sido presentados varios ejemplos que muestran su aplicación a posibles situaciones reales.

Referencias

[1] CURTIS, HOWARD D.,*Orbital Mechanics for Engieering Students*, tercera edición, Elsevier aerospace engineering series, Kidlington: ButterWorth-Heinemann, 2014.

[2] BATE, ROGER R. ET AL.,*Fundamental of Astrodynamics*, Dover Publications, New York, 1971.

[3] BROWN, CHARLES D.,*Spacecraft Mission Design. Second Edition*, American Institute of Aeronautics and Astronautics Inc., Virginia, 1998.

[4] PRUSSING, JOHN E. AND CONWAY, BRUCE A.,*Orbital Mechanics*, Oxford University Press, New York, 1993.

[5] CHOBOTOV, VLADIMIR A.,*Orbital Mechanics Third Edition*, American Institute of Aeronautics and Astronautics Inc., Virginia, 2002.