



UNIVERSITAT
POLITÈCNICA
DE VALÈNCIA

Clasificación estática de las estructuras

Apellidos, nombre	Basset Salom, Luisa (lbasset@mes.upv.es)
Departamento	Mecánica de Medios Continuos y Teoría de Estructuras
Centro	Escuela Técnica Superior de Arquitectura Universitat Politècnica de València



1 Resumen de las ideas clave

En este artículo se clasificará estáticamente las estructuras en función de su grado de indeterminación estática, partiendo de la definición de éste y de su determinación, aportando ejemplos de cada tipo.

2 Introducción

Toda estructura debe cumplir con las condiciones que se derivan de las tres componentes que intervienen en su cálculo (estática, cinemática y leyes de comportamiento) que se traducen en ecuaciones de equilibrio, ecuaciones de compatibilidad y ecuaciones constitutivas.

Calcular una estructura implica determinar tanto las incógnitas estáticas (reacciones, esfuerzos de extremo de barra y sollicitaciones) como las cinemáticas (movimientos y funciones de desplazamiento). Ambos grupos de incógnitas están relacionadas entre sí, por lo que, para abordar el cálculo, debe decidirse, en primer lugar, qué incógnitas son las principales: las estáticas o las cinemáticas y, en segundo lugar, de qué tipo de estructura se trata.

Si la elección recae en las incógnitas estáticas es imprescindible determinar su número o grado de indeterminación estática de la estructura (GIE) con el fin de utilizar un método adecuado para su resolución estática en función de su clasificación. Por otra parte debe identificarse si la estructura es un mecanismo y, por lo tanto, presenta problemas de estabilidad.

3 Objetivos

EL alumno, tras la lectura de este documento, será capaz de:

- determinar el número de fuerzas redundantes de la estructura o grado de indeterminación estática
- identificar estáticamente una estructura
- proponer ejemplos de estructuras con distintos grados de indeterminación estática

4 Clasificación estática de las estructuras

Como se ha mencionado en la introducción, si las incógnitas principales son las fuerzas debe obtenerse, en primer lugar, el grado de indeterminación estática de la estructura (GIE) y, a partir de éste, clasificarla estáticamente, para aplicar un método adecuado de cálculo. Debe prestarse especial atención al caso de los mecanismos, ya que el valor del grado de indeterminación no es el único determinante, pudiendo presentarse problemas de inestabilidad como se verá en los ejemplos planteados en el tema. ¿Podrías poner algún ejemplo?



4.1 Grado de indeterminación estática

El grado de indeterminación estática (GIE) o grado de hiperestaticidad es el número de fuerzas redundantes de la estructura, es decir, el número de fuerzas incógnita independientes que no pueden determinarse mediante las ecuaciones de equilibrio de la estructura, dado que el número de incógnitas estáticas excede el número total de ecuaciones de equilibrio disponibles.

El número de fuerzas redundantes no varía para una misma estructura, aunque sí variará la selección que se haga de éstas de entre todas las fuerzas incógnitas.

Llamamos:

B = número de barras

N = número de nudos

ΣDt_b = número de desconexiones totales en extremo de barra

ΣR = número de reacciones

El número total de incógnitas estáticas se obtiene sumando las incógnitas externas (reacciones) y las incógnitas internas (esfuerzos de extremo de barra). Dado que una barra perteneciente a una estructura plana tiene 2 extremos (i,j) y 3 esfuerzos en cada uno de ellos (axil, cortante y flector: F_{xi} , F_{yi} , M_i , F_{xj} , F_{yj} , M_j), el número total de incógnitas estáticas será:

$$\text{Número total de incógnitas estáticas: } 6B + \Sigma R$$

El número total de ecuaciones de equilibrio se obtiene sumando las ecuaciones de equilibrio en nudo y en barra, que son 3 respectivamente en el caso de estructuras planas. A éstas hay que sumarle una ecuación por cada desconexión total en extremo de barra, ya que aporta una condición de esfuerzo nulo en la dirección de la desconexión.

$$\text{Número total de ecuaciones de equilibrio: } 3N + 3B + \Sigma Dt_b$$

El GIE se obtiene descontando del número total de incógnitas estáticas el número de ecuaciones de equilibrio, es decir, mediante la expresión:

$$GIE = (6B + \Sigma R) - (3N + 3B + \Sigma Dt_b) = (3B + \Sigma R) - (3N + \Sigma Dt_b)$$

La aplicación de esta expresión implica una modelización previa de la estructura, separando nudos y barras y asignando a cada extremo de éstas sus condiciones de vínculo, así como identificando los tipos de apoyo y sus reacciones asociadas.

Puede utilizarse una variante de esta expresión que no necesita modelización si se distingue entre nudos libres (NL) y apoyos (A) y se añaden las desconexiones totales en los apoyos (Dt_A). Entonces:

$$3N = 3NL + 3A \quad \text{y} \quad \Sigma R = 3A - \Sigma Dt_A$$

Al sustituir en la expresión del GIE se obtiene esta nueva expresión que no necesita de modelización previa:

$$GIE = (3B + \Sigma R) - (3N + \Sigma Dt_b) = (3B + 3A - \Sigma Dt_A) - (3NL + 3A + \Sigma Dt_b)$$

$$GIE = (3B) - (3NL + \Sigma Dt_b + \Sigma Dt_A)$$



Veamos un ejemplo:

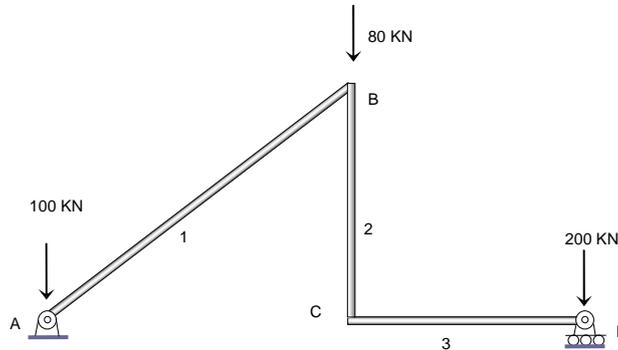


Figura 1: Ejemplo de estructura plana para la obtención del GIE

$B = 3$ (barras 1, 2 y 3)

$NL = 2$ (nudos B y C)

$A = 2$ (apoyos A y D)

$Dt_b = 0$ (no hay desconexiones entre barras, los nudos B y C son rígidos)

$\Sigma Dt_A = 3$ (giro en A, movimiento horizontal y giro en D)

$$\text{Por tanto: } GIE = (3B) - (3NL + \Sigma Dt_b + \Sigma Dt_A) = 9 - (6 + 0 + 3)$$

$$GIE = 0$$

Calcularemos ahora el GIE de la misma estructura a partir de la modelización representada en la figura 2, en la que se ha asociado la rótula al extremo i de la barra 1 y el carrito al extremo j de la barra 2.

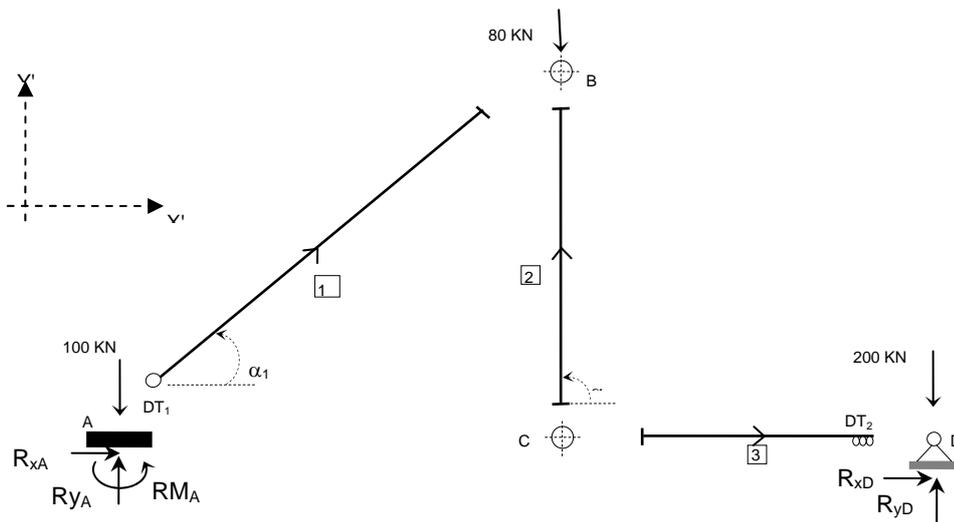


Figura 2: Ejemplo de modelización de la estructura plana del ejemplo 1

Según esta modelización:

$B = 3$ (barras 1, 2 y 3)

$N = 4$ (2 nudos libres, B y C, y 2 apoyos, A y D)

$Dt_b = 2$



$$\Sigma R = 5 \text{ (tres en A y 2 en D)}$$

$$\text{Por tanto: } GIE = (3B + \Sigma R) - (3N + \Sigma Dt_b) = (9 + 5) - (12 + 2)$$

$$GIE = 0$$

4.2 Clasificación

Las estructuras se clasifican estáticamente, según el GIE, en:

- 1.- Estructuras isostáticas: $GIE = 0$
- 2.- Estructuras hiperestáticas: $GIE > 0$
- 3.- Estructuras hipostáticas: $GIE < 0$

4.3 Estructuras isostáticas

Una estructura es isostática cuando el $GIE = 0$. En ese caso el número de ecuaciones de equilibrio coincide con el número de incógnitas estáticas.

Una estructura isostática tiene una única configuración estática admisible posible y está estáticamente determinada. Se obtiene aplicando sólo las ecuaciones de equilibrio

Ejemplo 1 (figura 3):

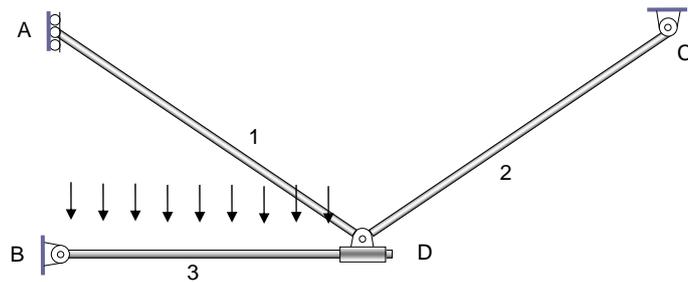


Figura 3: Estructura isostática

$$GIE = (3B) - (3NL + \Sigma Dt_b + \Sigma Dt_A) = 9 - (3 + 3 + 3) = 0$$

Ejemplo 2 (figura 4):

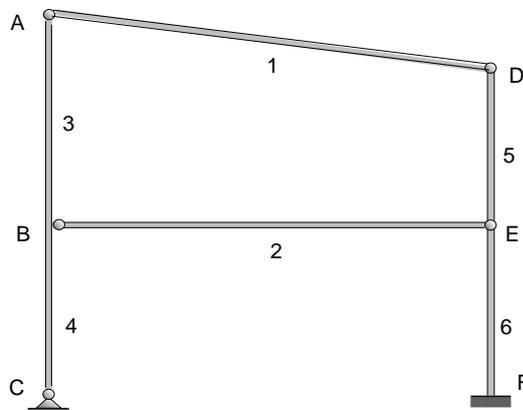


Figura 4: Estructura isostática

$$GIE = (3B) - (3NL + \Sigma Dt_b + \Sigma Dt_A) = 18 - (12 + 5 + 1) = 0$$

4.4 Estructuras hiperestáticas

Una estructura es hiperestática cuando el $GIE > 0$. En ese caso el número de ecuaciones de equilibrio es menor que el número de incógnitas estáticas

Una estructura hiperestática tiene infinitas configuraciones estáticamente admisibles. Será, por lo tanto, estáticamente indeterminada (para obtener la configuración estática real tendríamos que considerar las condiciones de compatibilidad y las leyes de comportamiento)

Ejemplo 1 (figura 5):

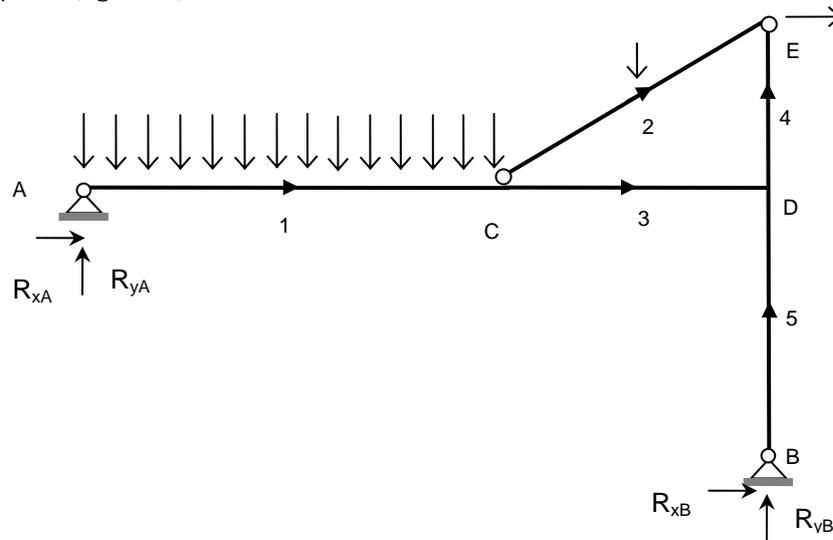


Figura 5: Estructura hiperestática

$$GIE = (3B) - (3NL + \Sigma Dt_b + \Sigma Dt_A) = 15 - (9 + 2 + 2) = 2$$

Hay varias posibilidades en la elección de las 2 fuerzas redundantes. Por ejemplo: M_{j1} y M_{j3} . ¿Qué otras parejas de fuerzas incógnita podrían seleccionarse como redundantes?

Ejemplo 2 (figura 6): Se trata de la misma estructura de la figura 1 pero en la que se ha impedido el desplazamiento del apoyo D, por lo que su grado de hiperestaticidad será 1

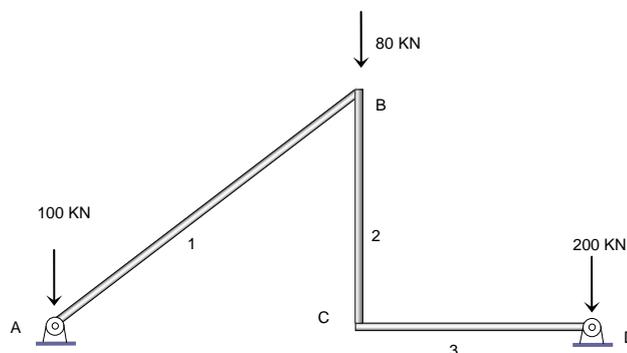


Figura 5: Estructura hiperestática

$$GIE = (3B) - (3NL + \Sigma Dt_b + \Sigma Dt_A) = 9 - (6 + 0 + 2) = 1$$

Del mismo modo que en el ejemplo 1 hay varias posibilidades en la elección de la fuerza redundante. Por ejemplo: R_{xD} . ¿Qué otra de fuerza incógnita podría seleccionarse como redundante?

4.5 Estructuras hipostáticas

Una estructura es hipostática cuando el $GIE < 0$. En ese caso el número de ecuaciones de equilibrio es excesivo ya que supera el número de incógnitas estáticas. Se trata de un mecanismo, es decir, una estructura inestable que no puede equilibrarse.

Ejemplo 1 (figura 7): Se trata de la misma estructura de la figura 3 pero en la que se ha permitido el giro en el apoyo superior (nudo A), por lo que su grado de hiperestaticidad será -1. La estructura es inestable.

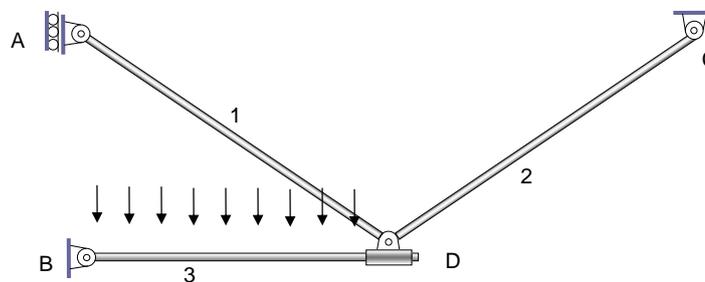


Figura 7. Estructura hipostática

$$GIE = (3B) - (3NL + \Sigma Dt_b + \Sigma Dt_A) = 9 - (3 + 3 + 4) = -1$$

Pero el hecho de que el GIE sea igual o mayor que 0 no garantiza que la estructura sea estable, pudiendo tener una inestabilidad local y, por tanto, será un mecanismo. Veamos algún ejemplo (figura 8):

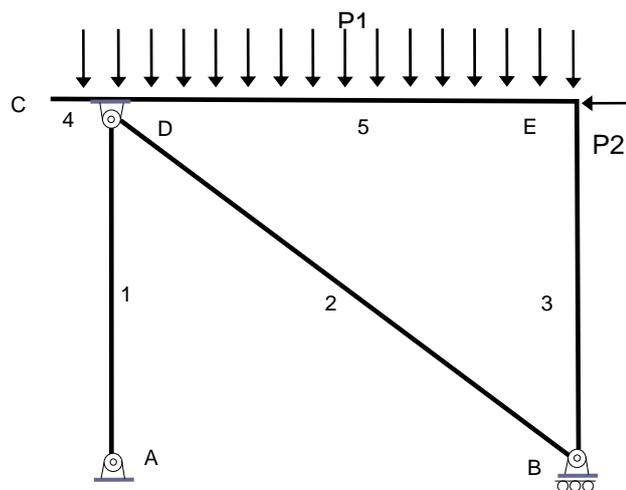


Figura 8. Mecanismo

$$GIE = (3B) - (3NL + \Sigma Dt_b + \Sigma Dt_A) = 15 - (9 + 2 + 4) = 0$$



El valor del GIE es 0 luego podría suponerse que la estructura es isostática, sin embargo no lo es. La estructura no puede equilibrarse horizontalmente. La barra 1 por ser biarticulada y no tener cargas perpendiculares a su directriz tendrá cortante nulo, es decir, la reacción horizontal en A es nula. Como en B el movimiento horizontal está permitido, no hay reacción. La fuerza horizontal P2 no puede equilibrarse. Si rigidizáramos la unión entre la barra 2 y la viga (4-5), dejando únicamente articulado el soporte 1, obtendríamos un GIE de valor 1, sin embargo, la estructura seguiría sin poder equilibrarse a fuerzas horizontales.

Se proponen estos dos ejemplos (figura 9) para determinar el GIE y para verificar si se trata de mecanismos o no. (En ambos casos el GIE es 0 pero sólo la estructura de la izquierda es isostática, la de la derecha es un mecanismo)

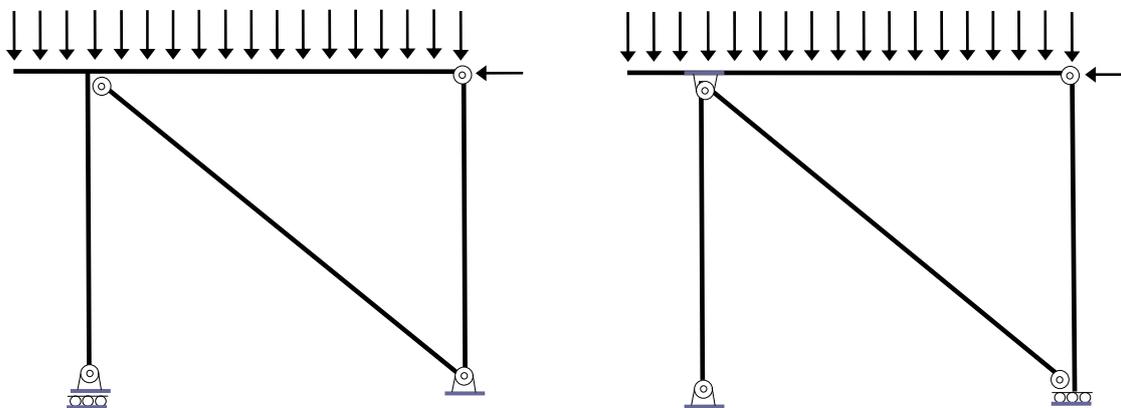


Figura 9. Ejemplos propuestos

5 Cierre

A lo largo de este tema se ha definido el grado de indeterminación estática de una estructura y se ha determinado su valor. Posteriormente se han clasificado las estructuras en función de éste en isostáticas, hiperestáticas y mecanismos y se han planteado diferentes ejemplos de cada tipo..

6 Bibliografía

6.1 Libros:

[1] Basset, L.; Cálculo matricial de estructuras. Desconexiones y vínculos. Disponible en Biblioteca UPV.

6.2 Figuras:

Figura 1. Ejemplo de estructura plana para la obtención del GIE.

Figura 2. Ejemplo de modelización de la estructura plana del ejemplo 1.

Figura 3. Estructura isostática.

Figura 4. Estructura isostática.



UNIVERSITAT
POLITÈCNICA
DE VALÈNCIA

- Figura 5. Estructura hiperestática.
- Figura 6. Estructura hiperestática.
- Figura 7. Estructura hipostática.
- Figura 8. Mecanismo.
- Figura 9. Ejemplos propuestos.

Autora de las figuras: Luisa Basset