UNIVERSITAT POLITÈCNICA DE VALÈNCIA

Cálculo del área bajo una curva: la suma de Riemann

Apellidos, nombre	Talens Oliag, Pau (pautalens@tal.upv.es)
Departamento	Tecnología de Alimentos
Centro	Universitat Politècnica de València

1 Resumen de las ideas clave

El área de una figura geométrica es todo el espacio que queda encerrado entre los límites de esa figura. En geometría elemental, existen un sinfín de fórmulas que permiten calcular el área de cualquier figura plana limitada por segmentos rectilíneos, pero, ¿cómo podemos calcular el área bajo una curva? En estos casos requiere introducir métodos de geometría diferencial.

En este artículo vamos a presentar como podemos calcular el área bajo una curva cuando no se conoce la función matemática que describe dicha curva aplicando la suma de Riemann.

2 Introducción

El área de una figura geométrica es todo el espacio que queda encerrado entre los límites de esa figura. En geometría elemental, existen un sinfín de fórmulas que permiten calcular el área de cualquier figura plana limitada por segmentos rectilíneos. Algunos ejemplos los tenemos en la figura 1.

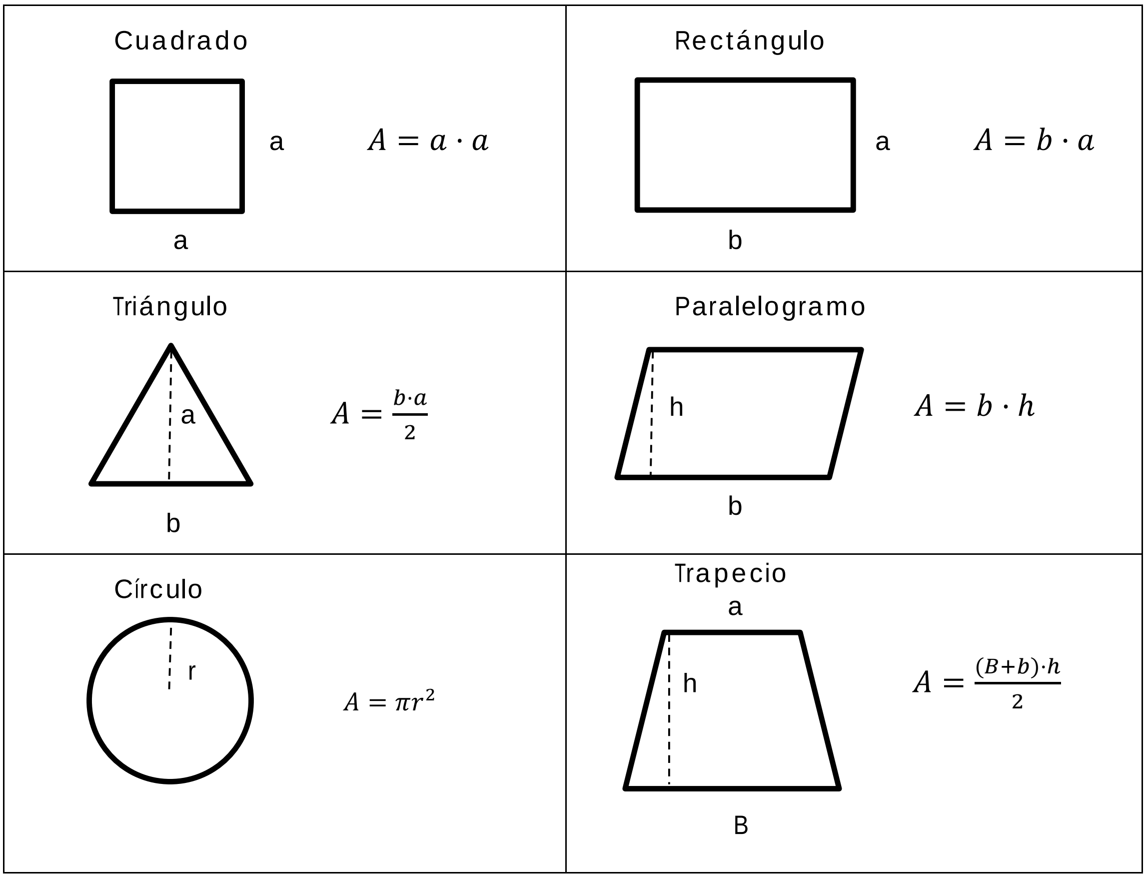


Figura 1. Ejemplos de cálculos de áreas para algunas figuras planas limitadas por segmentos rectilíneos

¿Pero qué sucede si la figura no está limitada por segmentos rectilíneos? ¿Cómo podemos calcular el área bajo una curva? En estos casos requiere introducir métodos de geometría diferencial. Si se conoce la función de la curva, se pueden aplicar integrales. En caso de no conocerse la función, una forma de aproximar su cálculo es aplicando las sumas de Riemann. En matemáticas, la Suma de Riemann es un tipo de aproximación del valor de una integral mediante una suma finita(1). Se llama así en honor al matemático alemán del siglo XIX, Bernhard Riemann que realizó contribuciones muy importantes al análisis y la geometría diferencial(2).

La suma de Riemann consiste en trazar un número finito de formas, generalmente rectángulos o trapecios dentro del área irregular, calcular el área de cada una de las formas finitas y sumarlas. Este método de integración numérica presenta el problema que al sumar las áreas se obtiene un margen de error grande. Para minimizar el error debemos dividir la región de cálculo en el mayor número de formas finitas que podamos. A medida que las formas se hacen cada vez más pequeñas, la suma dará una mayor precisión de cálculo.

3 Objetivo

Con la redacción de este artículo docente se persigue que los alumnos adquieran destreza en el cálculo de áreas bajo una curva aplicando los métodos de la suma de Riemann

4 Desarrollo

En el punto 4.1 vamos a describir los fundamentos teóricos del cálculo

En el punto 4.2 veremos con un ejemplo de cálculo.

4.1 Fundamentos teóricos del cálculo

El área bajo una curva podemos calcularla aplicando la suma de Riemann. Consiste en dividir el área bajo la curva en rectángulos o trapecios, normalmente de ancho igual, de manera que todas estas áreas juntas formen una región lo más similar posible al área de la curva que queremos determinar. Si calculamos el área para cada una de estas formas y, las sumamos, obtendremos una aproximación numérica para una integral definida.

Existen 4 métodos de aplicar la suma de Riemann: aproximación por defecto, aproximación por exceso, aproximación en el punto medio y aproximación trapezoidal.

En una suma de Riemann de aproximación por defecto, o también llamada suma de Riemann izquierda**,** aproximamos el área con rectángulos donde la altura de cada rectángulo es igual al valor de la función en el extremo izquierdo de su base (Figura 2a).

En una suma de Riemann de aproximación por exceso, o también llamada suma de Riemann derecha, aproximamos el área con rectángulos donde la altura de cada rectángulo es igual al valor de la función en el extremo derecho de su base (Figura 2b).

En una suma de Riemann de aproximación en el punto medio, aproximamos el área con rectángulos donde la altura de cada rectángulo es igual al valor de la función en el punto medio de su base (Figura 2c).

En la suma de Riemann por aproximación trapezoidal, aproximamos el área con trapecios donde los dos vértices superiores del trapecio tocan la curva (Figura 2d).

Para facilitar el cálculo, siempre que sea posible la base de los rectángulos o trapecios debe ser siempre igual, y mientras más rectángulos o trapecios usemos, más cercana será la aproximación al área real. Para calcular el área de cada rectángulo o de cada trapecio recurriremos al cálculo de áreas para figuras planas limitadas por segmentos rectilíneos (Figura 1).

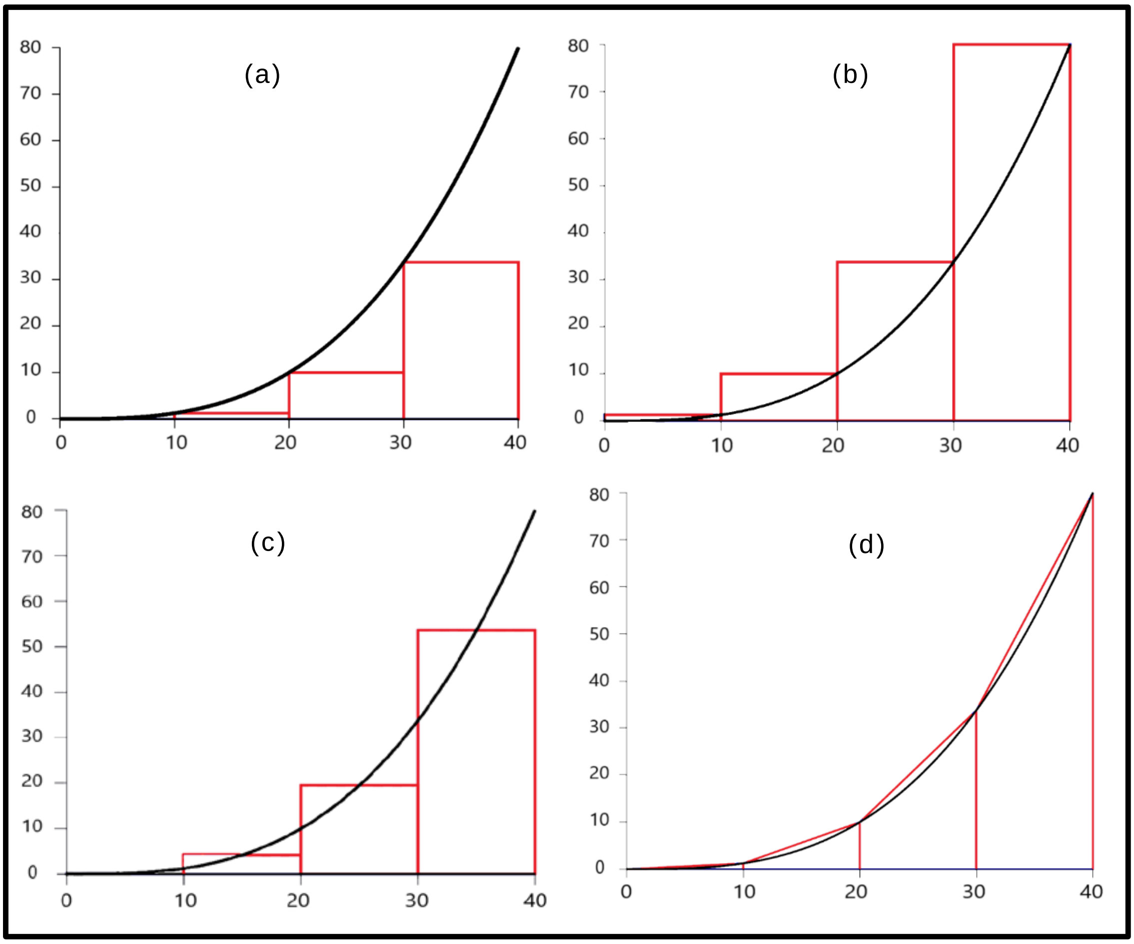
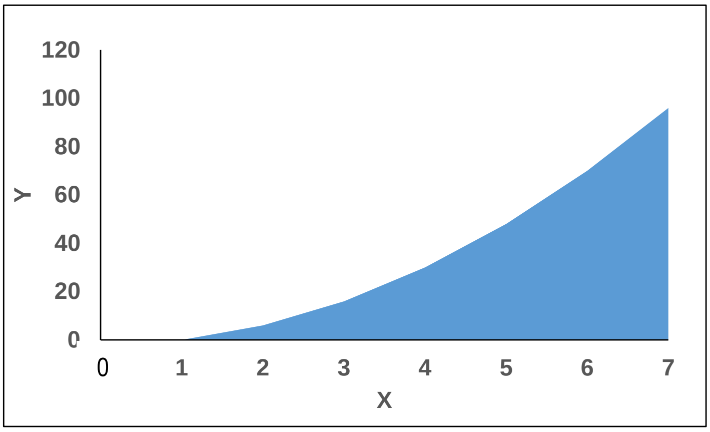


Figura 2. Suma de Riemann por defecto (a), por exceso (b), de punto medio (c) y por aproximación trapezoidal (d)

4.2 Ejemplos de cálculo

Imaginad que queremos determinar el área bajo la curva de la figura 3. En la misma figura 3 se presentan los valores de coordenadas X e Y que permiten construir la curva. Dado que se trata de un ejemplo de cálculo se ha obviado poner unidades en ambos ejes y por tanto se dará un valor numérico para el área sin indicar las unidades correspondientes. Es importante que cuando se aplique la suma de Riemann para calcular un área se incluyan las unidades correspondientes del cálculo efectuado, en función de las unidades del eje de abscisas y eje de ordenadas.



X	Y
1	0
2	6
3	16
4	30
5	48
6	70
7	96

Figura 3. Ejemplo para el cálculo del área bajo la curva

La figura 4 muestra el cálculo del área a través de la suma de Riemann de aproximación por defecto y por exceso, indicando como se calcula el área del primer rectángulo del sumatorio. Para obtener el cálculo más aproximado de la curva se debe calcular el promedio de ambas áreas, siendo para este ejemplo de 218.

$(X_2 - X_1) \cdot Y_1 = (2-1) \cdot 0$

$(X_2 - X_1) \cdot Y_2 = (2-1) \cdot 6$

X	Y	Defecto		X	Y	Exceso
1	0	0		1	0	6
2	6	6		2	6	16
3	16	16		3	16	30
4	30	30		4	30	48
5	48	48		5	48	70
6	70	70		6	70	96
7	96			7	96	
	Área =	170			Área =	266
			Área			
			(170-266)/2 = 218			

Figura 4. Cálculo del área bajo la curva por aproximación por defecto y por exceso

La figura 5 muestra el cálculo del área a través de la suma de Riemann de aproximación en el punto medio, indicando como se calcula el área del primer rectángulo del sumatorio. En este caso, la altura de cada rectángulo es igual al valor de la función en el punto medio de su base, siendo para el ejemplo presentado de 218, lo que coincide con el valor medio del cálculo del área a través de la suma de Riemann de aproximación por defecto y por exceso.

$$(X_2 - X_1) \cdot \frac{(Y_1 + Y_2)}{2} = (2-1) \cdot \frac{6}{2}$$

X	Y	Punto Medio
1	0	3
2	6	11
3	16	23
4	30	39
5	48	59
6	70	83
7	96	
	Área =	218

Figura 5. Cálculo del área bajo la curva por aproximación en el punto medio

La figura 6 muestra el cálculo del área a través de la suma de Riemann por aproximación trapezoidal, indicando como se calcula el área del primer trapecio (figura 1). El cálculo obtenido es de 218, coincidiendo con el cálculo del área a través del valor medio de la suma de Riemann de aproximación por defecto y por exceso, así como a través de la suma de Riemann de aproximación en el punto medio.

$$\frac{(Y_1 + Y_2) \cdot (X_2 - X_1)}{2} = \frac{6 \cdot (2-1)}{2}$$

X	Y	Trapecio
1	0	3
2	6	11
3	16	23
4	30	39
5	48	59
6	70	83
7	96	
	Área =	218

5 Cierre

En este objeto de aprendizaje se han expuesto los fundamentos para el cálculo aproximado del área bajo una curva en base a la suma de Riemman. Se han descrito los principales métodos y se ha presentado un ejemplo real de cálculo.

6 Bibliografía

[1] https://es.wikipedia.org/wiki/Suma_de_Riemann

[2] https://es.wikipedia.org/wiki/Bernhard_Riemann