



UNIVERSITAT
POLITÈCNICA
DE VALÈNCIA

Cálculo estático de una estructura isostática

Apellidos, nombre	Basset Salom, Luisa (lbasset@mes.upv.es)
Departamento	Mecánica de Medios Continuos y Teoría de Estructuras
Centro	Escuela Técnica Superior de Arquitectura Universitat Politècnica de València



1 Resumen de las ideas clave

En este artículo se resolverá estáticamente una estructura isostática, mediante la aplicación sucesiva de todas las ecuaciones de equilibrio disponibles, explicando la transmisión de esfuerzos entre extremo de barra y nudo y especificando qué fuerzas intervienen en los equilibrios de cada parte.

2 Introducción

Las estructuras isostáticas, a diferencia de las hiperestáticas, pueden resolverse estáticamente utilizando exclusivamente las ecuaciones de equilibrio. Estas ecuaciones deben plantearse para el conjunto de la estructura y también para cada una de sus partes (ecuaciones de equilibrio en los nudos y barras).

Se ha tomado como ejemplo una estructura formada por 5 barras, con 4 reacciones externas y con nudos que tienen más de dos barras concurrentes, ya que, en este caso, no es directa la obtención de las incógnitas y debe recurrirse al equilibrio de los diferentes elementos estructurales para su resolución.

Se determinarán las reacciones, esfuerzos de extremo de barra, leyes de esfuerzos y diagramas.

3 Objetivos

EL alumno, tras la lectura de este documento, será capaz de:

- Obtener las reacciones en los apoyos de una estructura isostática
- Obtener los esfuerzos de extremo de barra
- Determinar la expresión de las leyes de esfuerzo mediante el equilibrio en la barra

4 Cálculo estático de la estructura isostática

4.1 Datos y esquema de la estructura

La estructura de la figura 1 está formada por 5 barras y 5 nudos (3 libres y 2 apoyos). Los apoyos, nudos A y B son fijos. Los nudos C y E son articulados (las barras concurrentes tienen un giro diferente), mientras que en el nudo D, hay una unión rígida entre las barras 4 y 5, estando articulada la barra 3.

La estructura es isostática:

Nº de incógnitas fuerza (3 por barra + reacciones exteriores): $15+4 = 19$

Nº de ecuaciones de equilibrio: (3 por nudo + condiciones de esfuerzo nulo en extremo de barra por las desconexiones) $15+4=19$

Datos de las barras: barras 1 y 3: IPE 360, barras 2: IPE 300, barras 4 y 5: HEB 450

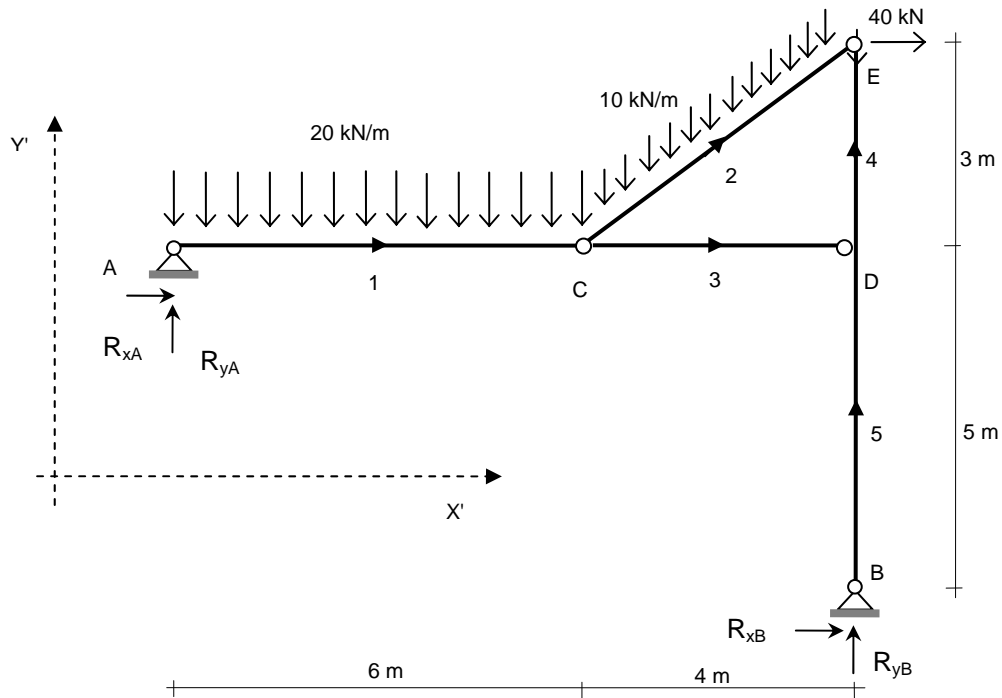


Figura 1. Esquema de la estructura

4.2 Cálculo de reacciones y esfuerzos de extremo de barra

Externamente la estructura tiene 4 reacciones por lo que para determinarlas, además de las 3 ecuaciones de equilibrio global, se planteará el equilibrio parcial, por ejemplo, aislando la barra 1 ya que, por estar articulada en su extremo j , el momento correspondiente a dicho extremo será 0.

Equilibrio de fuerzas exteriores (equilibrio global de la estructura)

$$\sum F_x=0 \quad R_{xA} + R_{xB} + 40 = 0 \quad (1)$$

$$\sum F_y=0 \quad R_{yA} + R_{yB} = 120 + 50 \quad (2)$$

$$\sum M=0 \quad 120 \cdot 3 + 50 \cdot 8 + 40 \cdot 3 = R_{yB} \cdot 10 + R_{xB} \cdot 5 \quad (3)$$

Equilibrio de fuerzas exteriores en la barra 1 (figura 2)

Aislamos la barra 1. Por estar articulada en ambos extremos, $M_i=0$ y $M_j=0$.

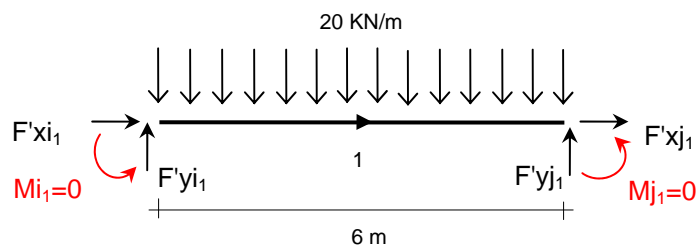


Figura 2. Equilibrio de fuerzas en la barra 1



$$\Sigma F_x=0 \quad F'x_{i1} + F'x_{j1} = 0 \quad (4)$$

$$\Sigma F_y=0 \quad F'y_{i1} + F'y_{j1} = 120 \quad (5)$$

$$\Sigma M_j=0 \quad M_{i1} - F'y_{i1} \cdot 6 + 120 \cdot 3 + M_{j1} = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{F'y_{i1} = 60 \text{ kN}}$$

$$(5) \quad \boxed{F'y_{j1} = 60 \text{ kN}}$$

Además por ser la barra 1 la única barra incidente en el nudo A, al plantear el equilibrio en éste se obtiene:

Equilibrio en el nudo A (figura 3)

$$\Sigma F_x=0 \quad R_{xA} - F'x_{i1} = 0 \quad \Rightarrow \quad R_{xA} = F'x_{i1}$$

$$\Sigma F_y=0 \quad R_{yA} - F'y_{i1} = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{R_{yA} = 60 \text{ kN}}$$

Al haber obtenido el valor de una reacción exterior podemos volver a las ecuaciones de equilibrio de la estructura completa y sustituir en ellas su valor, para así determinar las restantes.

$$(2) \quad 60 + R_{yB} = 120 + 50 \quad \Rightarrow \quad \boxed{R_{yB} = 110 \text{ kN}}$$

$$(3) \quad 120 \cdot 3 + 50 \cdot 8 + 40 \cdot 3 = 110 \cdot 10 + R_{xB} \cdot 5 \quad \Rightarrow \quad \boxed{R_{xB} = -44 \text{ kN}}$$

$$(1) \quad R_{xA} - 44 + 40 = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{R_{xA} = 4 \text{ kN}}$$

$$\text{Volviendo al equilibrio del nudo A:} \quad \Rightarrow \quad \boxed{F'x_{i1} = 4 \text{ kN}}$$

Y finalmente a la ecuación de equilibrio de la barra 1 que quedaba pendiente:

$$(4) \quad \Rightarrow \quad \boxed{F'x_{j1} = -4 \text{ kN}}$$

Una vez equilibrada la barra 1 y obtenidos los esfuerzos en el extremo j de la misma, así como las reacciones exteriores seguiremos equilibrando el nudo C y las barras 2 y 3 para luego ir bajando por la barra 4 y, finalmente, por la 5 comprobando el equilibrio en el nudo B (podíamos haber elegido equilibrar la barra 5 e ir subiendo hasta el nudo C).

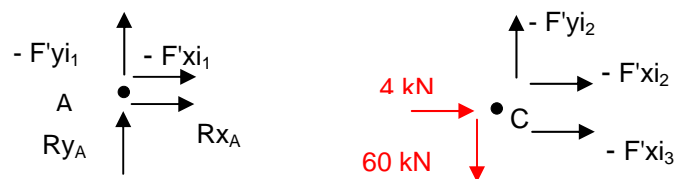


Figura 3. Equilibrio de fuerzas en los nudos A y C

Equilibrio en el nudo C (figura 3)

Transmitimos al nudo los esfuerzos del extremo j de la barra 1.

La barra 3 por ser biarticulada sin carga sólo trabajará a axil, es decir, $F_{y3}=0$, $M_{i3}=0$, $F_{j3}=0$ y $M_{j3}=0$. No ocurre lo mismo con la barra 2, por estar cargada.

$$\Sigma F_x=0 \quad 4 + (-F'x_{i2}) + (-F'x_{i3}) = 0 \quad (6)$$

$$\Sigma F_y=0 \quad (-F'y_{i2}) - 60 = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{F'y_{i2} = -60 \text{ kN}}$$

La componente vertical transmitida por la barra 1 se equilibra, únicamente, con el esfuerzo vertical en el extremo i de la barra 2 (por las características mencionadas de la barra 3 y porque ésta es una barra horizontal, igual que la 1. Si estuviese inclinada no ocurriría lo mismo). No podemos, sin embargo determinar, en este momento el valor de las componentes horizontales de las barras 2 y 3. Para determinar su valor recurrimos al equilibrio en la barra 2.

Equilibrio de fuerzas exteriores en la barra 2 (figura 4)

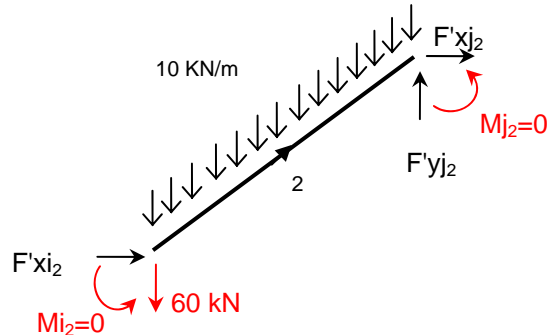


Figura 4. Equilibrio de fuerzas en la barra 2

$$\begin{aligned} \Sigma F_x=0 & \quad F'x_{i2} + F'x_{j2} = 0 & (7) \\ \Sigma F_y=0 & \quad -60 + F'y_{j2} = 50 & \quad \boxed{F'y_{j2} = 110 \text{ kN}} \\ \Sigma M_i=0 & \quad M_{i2} + F'x_{i2} \cdot 3 + 60 \cdot 4 + 50 \cdot 2 + M_{j2} = 0 \Rightarrow & \quad \boxed{F'x_{i2} = -113,3 \text{ kN}} \\ & & (7) \quad \boxed{F'x_{j2} = 113,3 \text{ kN}} \end{aligned}$$

El equilibrio se ha realizado en ejes globales para poder efectuar la transmisión directa, por el principio de acción y reacción, entre extremo de barra y nudo.

Volvemos a la ecuación (6) del nudo C:

$$(6) \quad 4 + 113,3 + (-F'x_{i3}) = 0 \Rightarrow \boxed{F'x_{i3} = 117,3 \text{ kN}}$$

Equilibrio de fuerzas exteriores en la barra 3 (figura 5)

$$\Sigma F_x=0 \quad F'x_{i3} + F'x_{j3} = 0 \Rightarrow \boxed{F'x_{j3} = -117,3 \text{ kN}}$$

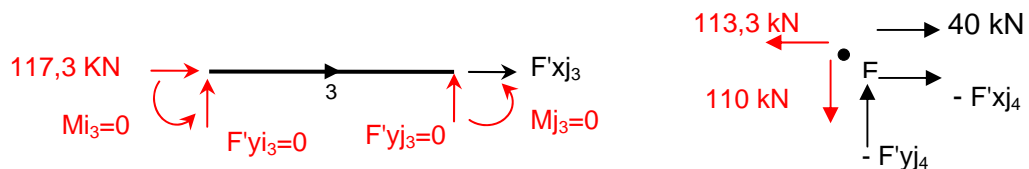


Figura 5. Equilibrio de fuerzas en la barra 3 y en el nudo E

Equilibrio en el nudo E (figura 5)

$$\begin{aligned} \Sigma F_x=0 & \quad 40 + (-F'x_{j4}) - 113,3 = 0 & \quad \boxed{F'x_{j4} = -73,3 \text{ kN}} \\ \Sigma F_y=0 & \quad (-F'y_{j4}) - 110 = 0 & \quad \Rightarrow \quad \boxed{F'y_{j4} = -110 \text{ kN}} \end{aligned}$$



Equilibrio de fuerzas exteriores en la barra 4 (figura 6)

$$\begin{aligned}\Sigma F_x=0 & \quad F'x_{i4} - 73,3 = 0 & \Rightarrow & \quad \boxed{F'x_{i4} = 73,3 \text{ kN}} \\ \Sigma F_y=0 & \quad F'yi_4 - 110 = 0 & \Rightarrow & \quad \boxed{F'yi_4 = 110 \text{ kN}} \\ \Sigma M_i=0 & \quad Mi_4 + 73,3 \cdot 3 = 0 & \Rightarrow & \quad \boxed{Mi_4 = -219,9 \text{ kNm} \approx -220 \text{ kNm}}\end{aligned}$$

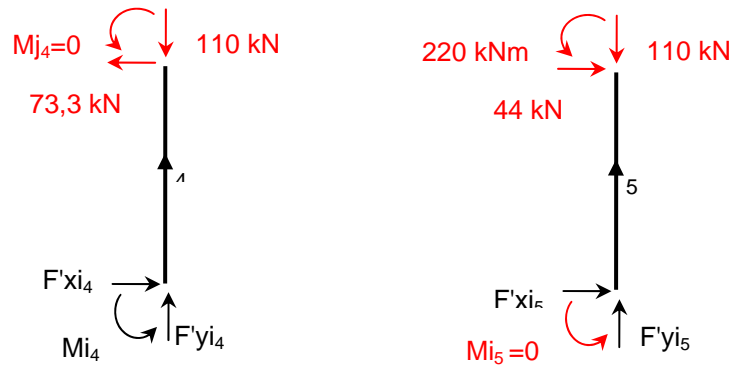


Figura 6. Equilibrio de fuerzas en las barras 4 y 5

Equilibrio en el nudo D (figura 7)

$$\begin{aligned}\Sigma F_x=0 & \quad 117,3 - 73,3 + (-F'x_{j5}) = 0 & \Rightarrow & \quad \boxed{F'x_{j5} = 44 \text{ kN}} \\ \Sigma F_y=0 & \quad (-F'y_{j5}) - 110 = 0 & \Rightarrow & \quad \boxed{F'y_{j5} = -110 \text{ kN}} \\ \Sigma M = 0 & \quad (-M_{j5}) + 220 = 0 & \Rightarrow & \quad \boxed{M_{j5} = 220 \text{ kNm}}\end{aligned}$$

Equilibrio de fuerzas exteriores en la barra 5 (figura 6)

$$\begin{aligned}\Sigma F_x=0 & \quad F'xi_5 + 44 = 0 & \Rightarrow & \quad \boxed{F'xi_5 = -44 \text{ kN}} \\ \Sigma F_y=0 & \quad F'yi_5 - 110 = 0 & \Rightarrow & \quad \boxed{F'yi_5 = 110 \text{ kN}} \\ \Sigma M_i=0 & \quad 220 - 44 \cdot 5 = 0 \text{ cumple}\end{aligned}$$

Comprobación del equilibrio en el nudo B (figura 7)

$$\begin{aligned}\Sigma F_x=0 & \quad 44 - 44 = 0 & \text{cumple} \\ \Sigma F_y=0 & \quad 110 - 110 = 0 & \text{cumple}\end{aligned}$$

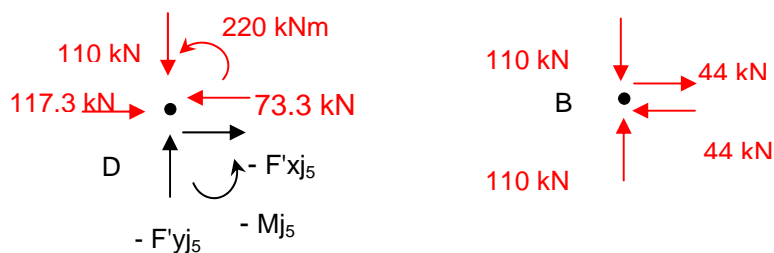


Figura 7. Equilibrio de fuerzas en los nudos D y B

4.3 Esquema del equilibrio de cada parte de la estructura

En la figura 8 se representa el esquema completo del equilibrio en ejes globales

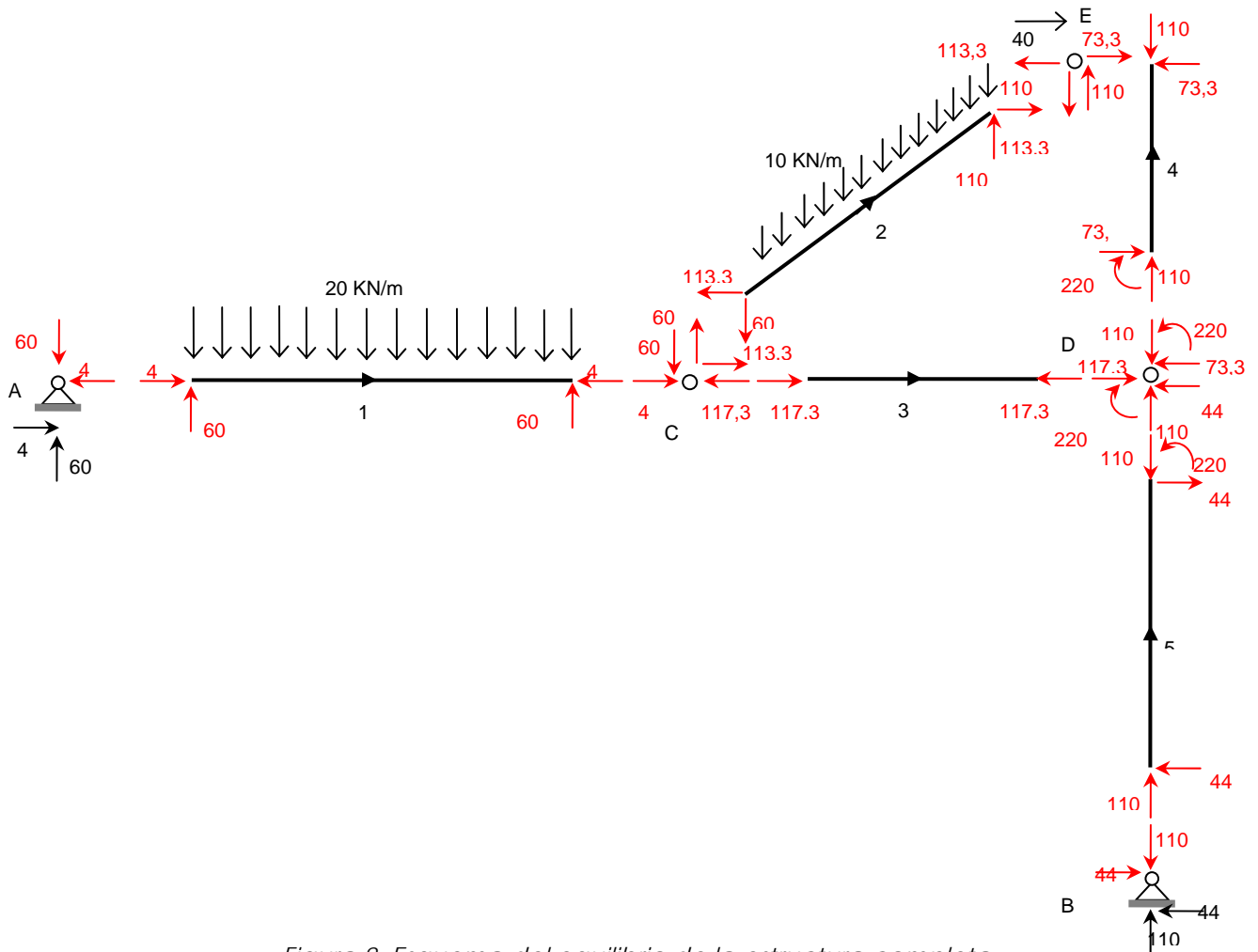


Figura 8. Esquema del equilibrio de la estructura completa

4.4 Leyes de esfuerzos

Se obtienen las leyes de esfuerzos a partir del equilibrio en cada barra,

Barra 1 (figura 9):

$$N_1 = -4$$

$$V_1(x) = 60 - 20x$$

$$M_1(x) = 60x - 10x^2$$

$$x=0 \quad V_1(0) = 60$$

$$x=0 \quad M_1(0) = 0$$

$$M_{\text{máx}} = 90 \text{ para } x = 3$$

$$x=6 \quad V_1(6) = -60$$

$$x=6 \quad M_1(6) = 0$$

Barra 2 (figura 10):

Proyectamos las fuerzas sobre los ejes de la barra

$$N_2(x) = 126,64 + 6x$$

$$V_2(x) = 20 - 8x$$

$$M_2(x) = 20x - 4x^2$$

$$x=0 \quad N_2(0) = 126,64$$

$$x=0 \quad V_2(0) = 20$$

$$x=0 \quad M_2(0) = 0$$

$$M_{\text{máx}} = 25 \text{ para } x = 2,5$$

$$x=5 \quad N_2(5) = 156,64$$

$$x=5 \quad V_2(5) = -20$$

$$x=5 \quad M_2(5) = 0$$

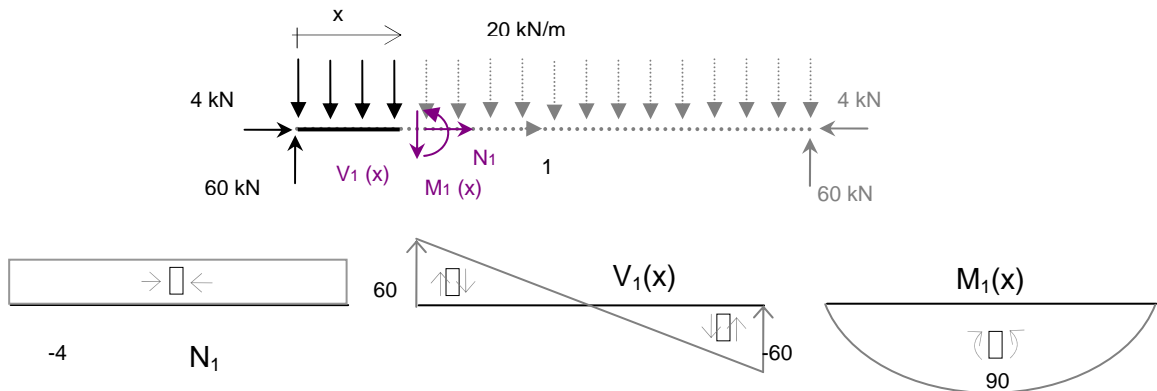


Figura 9. Leyes de esfuerzos de la barra 1

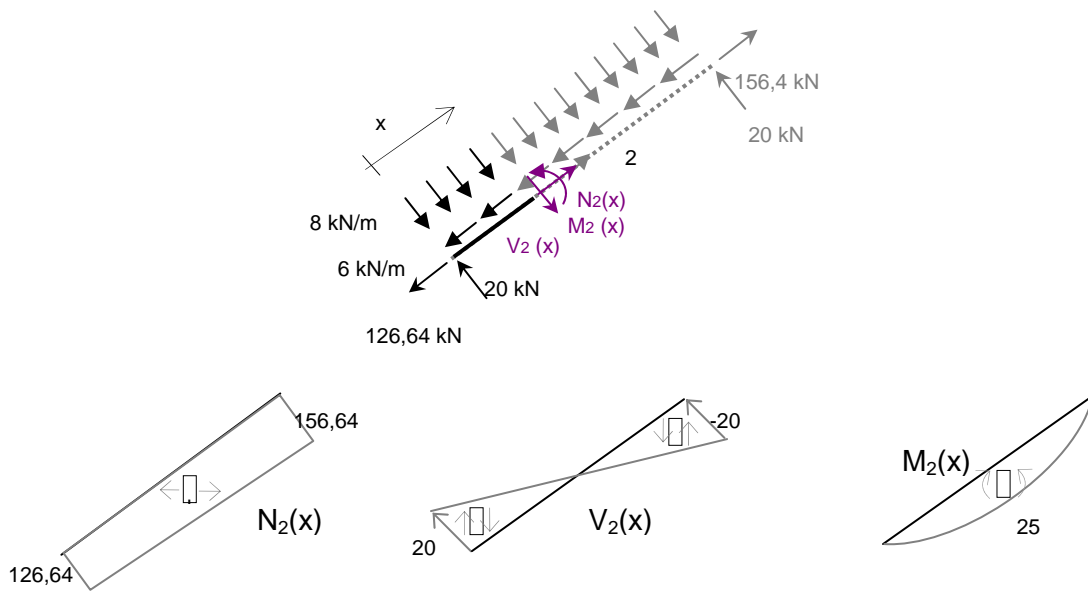


Figura 10. Leyes de esfuerzos de la barra 2

Barra 3 (figura 11)

$$N_3 = -117,3$$

$$V_3 = 0$$

$$M_3 = 0$$

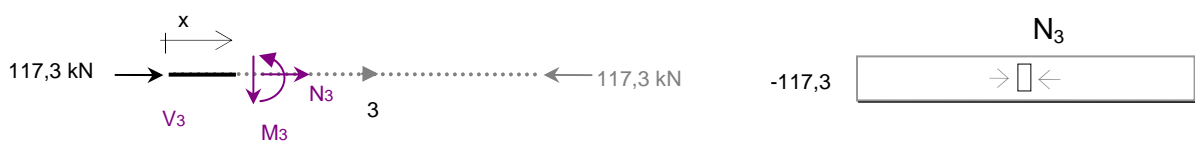


Figura 11. Leyes de esfuerzos de la barra 3



Barra 4 (figura 12)

$$N_4 = -110$$

$$V_4 = -73,3$$

$$M_4(x) = 220 - 73,3x$$

$$x=0 \quad M_4(0) = 220$$

$$x=3 \quad M_4(3) = 0$$

Barra 5 (figura 12)

$$N_5 = -110$$

$$V_5 = 44$$

$$M_5(x) = 44x$$

$$x=0 \quad M_5(0) = 0$$

$$x=5 \quad M_5(5) = 220$$

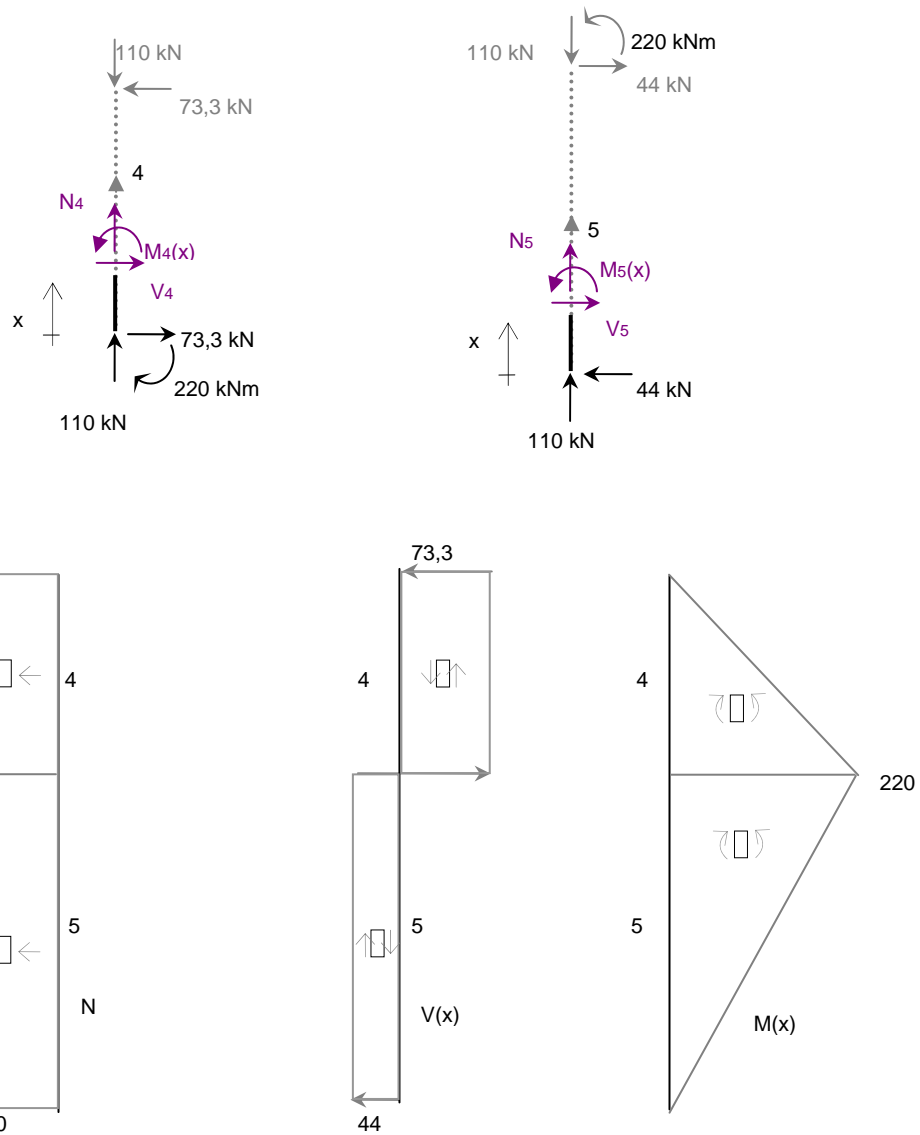


Figura 12. Leyes de esfuerzos de las barras 4 y 5

5 Cierre

A lo largo de este tema se han obtenido las reacciones, esfuerzos de extremo de barra y leyes de esfuerzos de una estructura isostática, utilizando las ecuaciones de equilibrio global y las ecuaciones de equilibrio en barra y en nudo.

Se propone como aplicación la resolución estática de la estructura de la figura 13.

(Reacciones: $R_{x_C} = -7.5 \text{ kN}$, $R_{y_C} = 146.9575 \text{ kN}$, $R_{x_D} = -1.5 \text{ kN}$, $R_{y_D} = 155.9575 \text{ kN}$.)

Leyes: $N_1 = -6$, $M_1(x) = 150x - 30x^2$, $N_2 = -150$, $N_3(x) = 7.996 + 0.2572x$; $M_3(x) = 1.25x - 0.2143x^2$, $N_4 = -155.9575$, $M_4(x) = 1.5x - 0.5x^2$

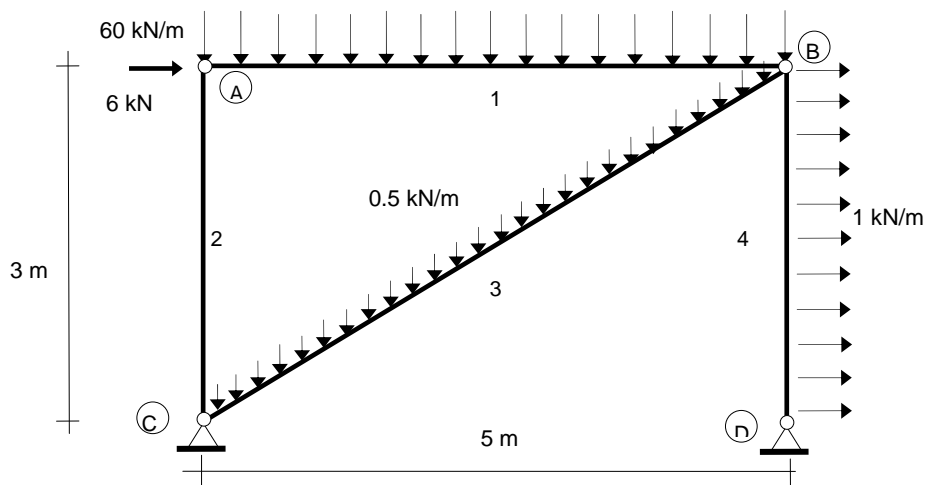


Figura 13. Problema propuesto

6 Bibliografía

6.1 Libros:

[1] Basset, L.; Apuntes de clase.

6.2 Figuras:

Figura 1. Esquema de la estructura.

Figura 2. Equilibrio de fuerzas en la barra 1.

Figura 3. Equilibrio de fuerzas en los nudos A y C.

Figura 4. Equilibrio de fuerzas en la barra 2.

Figura 5. Equilibrio de fuerzas en la barra 3 y en el nudo E.

Figura 6. Equilibrio de fuerzas en las barras 4 y 5.

Figura 7. Equilibrio de fuerzas en los nudos D y B.

Figura 8. Esquema del equilibrio de la estructura completa.

Figura 9. Leyes de esfuerzos de la barra 1.

Figura 10. Leyes de esfuerzos de la barra 2.

Figura 11. Leyes de esfuerzos de la barra 3.

Figura 12. Leyes de esfuerzos de las barras 4 y 5.

Figura 13. Problema propuesto.

Autora de las figuras: Luisa Basset