



UNIVERSIDAD  
POLITECNICA  
DE VALENCIA

## Modelos dinámicos continuos de oferta y demanda.

### Parte I: Cuando el ajuste del precio depende únicamente del exceso de demanda y del inventario

<b>Apellidos, nombre</b>	Cortés López, Juan Carlos; Romero Bauset, José Vicente; Roselló Ferragud, María Dolores; Villanueva Micó, Rafael Jacinto ( <a href="mailto:jccortes@imm.upv.es">jccortes@imm.upv.es</a> ; <a href="mailto:jvromero@imm.upv.es">jvromero@imm.upv.es</a> ; <a href="mailto:drosello@imm.upv.es">drosello@imm.upv.es</a> ; <a href="mailto:rjvillan@imm.upv.es">rjvillan@imm.upv.es</a> )
<b>Departamento</b>	Matemática Aplicada Instituto Universitario de Matemática Multidisciplinar
<b>Centro</b>	Facultad de Administración y Dirección de Empresas



## 1 Resumen de las ideas clave

El estudio de los modelos dinámicos de oferta y demanda es uno de los tópicos indispensables en la formación matemático-económica. Cuando se estudia este tipo de modelos se suelen presentar principalmente dos versiones, por un lado, un primer modelo cuya dinámica del precio viene determinada por el ajuste instantáneo del mismo en función del exceso de demanda, y una segunda versión en la cual dicho ajuste depende del exceso de oferta representado a través de la existencia de un stock o inventario. En este trabajo analizamos desde un punto de vista económico, las carencias del primer modelo que permiten motivar *pedagógicamente* la formulación natural del segundo. Una vez analizados conjuntamente ambos modelos, realizamos una crítica a los aspectos que invariablemente suelen ignorar ambos tipos de estudios.

## 2 Introducción

La presentación de modelos matemáticos constituye un elemento fundamental en la formación universitaria. En los estudios con intensificación en economía, empresa y finanzas resulta de especial interés el desarrollo de los modelos dinámicos continuos de oferta y demanda basados en ecuaciones diferenciales ordinarias (edo's). En este contexto, usualmente se consideran en una primera aproximación dos modelos cuya formulación se expresa en términos del ajuste instantáneo del precio en función, primero del excedente de la demanda, y después, del exceso de la oferta (o equivalentemente del inventario o stock). Una de las deficiencias que hemos observado en la presentación de este tipo de modelos es, en primer lugar, que no suelen estudiarse de forma relacionada. En segundo lugar, son muchos los autores que focalizan en una presentación superficial de la descripción de la dinámica del precio, sin prestar atención a la dinámica de la cantidad comercializada. En cualquier instante temporal fuera del equilibrio, únicamente puede haber una cantidad comercializada, y si ésta es igual o bien a la cantidad ofertada o bien a la cantidad demandada, dependerá de las hipótesis que sobre la dinámica del mercado se realicen. En este trabajo analizaremos con cierto detalle ambos modelos de oferta y demanda, y estableceremos una relación natural en su presentación, que nos permitirá motivar a partir del estudio de un primer modelo, introducir el segundo con objeto de superar las deficiencias que con el primero se presentan.

Por otra parte, tal y como el título del trabajo indica, en un segundo artículo analizaremos otro tipo de modelos relacionados con los que aquí presentamos, pero más complejos donde la variación del precio depende no solo del exceso de oferta y demanda, sino también de otros términos y, analizaremos la relación entre las soluciones a largo plazo de ambos modelos.

## 3 Objetivos

Los principales objetivos docentes de este artículo son que el alumno sea capaz de:



- Reconocer el valor formativo de los modelos dinámicos clásicos de oferta y demanda.
- Reconocer las limitaciones de dichos modelos desde el punto de vista explicativo del problema económico que tratan de modelizar.
- Establecer una relación entre ambos tipos de modelos de forma que el tránsito en el estudio de ambos modelos quede motivado desde un punto de vista económico.

### 3.1 Un modelo dinámico de oferta y demanda basado en el exceso de demanda

Vamos a considerar un modelo dinámico, debido al economista de finales del siglo XIX León Walras, para explicar el ajuste del precio a través de funciones de oferta y demanda lineales estándar (véase Ecuación 1).

$$\left. \begin{aligned} q^D(t) &= a - bp(t) & , & \quad a, b > 0, \\ q^S(t) &= -c + dp(t) & , & \quad c, d > 0, \\ p'(t) &= \alpha(q^D(t) - q^S(t)) & , & \quad \alpha > 0. \end{aligned} \right\}$$

*Ecuación 1. Modelo dinámico estándar de ajuste del precio dependiendo del exceso de demanda.*

La primera (segunda) ecuación nos indica que en cada instante la cantidad demanda  $q^D = q^D(t)$  (ofertada  $q^S = q^S(t)$ ) decrece (crece) linealmente con el precio  $p = p(t)$ . La tercera ecuación postula que la variación instantánea del precio, representada por la derivada  $p'(t)$ , es directamente proporcional (siendo  $\alpha$  la constante de proporcionalidad) al exceso de demanda ( $q^D(t) - q^S(t)$ ). A partir de esta última ecuación obsérvese que se tiene que:

- Si hay más demanda que oferta, esto es, si  $q^D(t) - q^S(t) > 0$ , como  $\alpha > 0$ , la variación instantánea del precio será positiva:  $p'(t) > 0$ , lo que nos indica, como es esperable, que los precios tenderán a crecer.
- Si hay más oferta que demanda, esto es, si  $q^D(t) - q^S(t) < 0$ , como  $\alpha > 0$ , la variación instantánea del precio será negativa:  $p'(t) < 0$ , lo que nos indica que los precios tenderán a decrecer.
- Si la oferta y la demanda coinciden, esto es, si  $q^D(t) - q^S(t) = 0$ , la variación instantánea del precio será nula:  $p'(t) = 0$ , lo que nos indica que los precios permanecerán constantes e iguales al valor que haya en la actualidad.
- La constante  $\alpha$  puede ser interpretada como la velocidad del ajuste del precio dependiendo del exceso de demanda. Así un valor grande de esta constante indica una mayor variación instantánea del precio, que se traduce en una mayor rapidez del ajuste del precio.

Para estudiar la dinámica del precio con el paso del tiempo, basta sustituir las funciones de demanda y oferta en la tercera relación de la Ecuación 1, lo que nos



conduce a establecer una ecuación diferencial ordinaria (edo) lineal para el precio, fijado un precio inicial  $p_0$  (véase Ecuación 2).

$$\left. \begin{aligned} p'(t) &= -\alpha(b+d)p(t) + \alpha(a+c), \\ p(0) &= p_0. \end{aligned} \right\}$$

*Ecuación 2. Ecuación diferencial para la dinámica del precio.*

Identificando los coeficientes del modelo dado en la Ecuación 2, con los de un problema de valor inicial (pvi) basado en una edo lineal no homogénea a coeficientes constantes de primer orden (véase Ecuación 3):  $a = -\alpha(b+d) \neq 0$  y  $b = \alpha(a+c)$ , obtenemos explícitamente la dinámica del precio (véase Ecuación 4).

$$\left. \begin{aligned} x'(t) &= ax(t) + b \\ x(0) &= x_0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow x(t) = \begin{cases} e^{at} \left( x_0 + \frac{b}{a} \right) - \frac{b}{a} & \text{si } a \neq 0, \\ bt + x_0 & \text{si } a = 0. \end{cases}$$

*Ecuación 3. Solución de un pvi basado en una edo lineal no homogénea a coeficientes constantes de primer orden.*

$$p(t) = e^{-\alpha(b+d)t} \left( p_0 - \frac{a+c}{b+d} \right) + \frac{a+c}{b+d}.$$

*Ecuación 4. Dinámica del precio del modelo dado en la Ecuación 2.*

Sustituyendo esta expresión en las funciones de demanda y de oferta dadas en la Ecuación 1, calculamos las trayectorias temporales de las cantidades demandas y ofertadas con el paso del tiempo (véase Ecuación 5).

$$\begin{aligned} q^D(t) &= \frac{ad-bc}{b+d} - b \left( p_0 - \frac{a+c}{b+d} \right) e^{-\alpha(b+d)t}, \\ q^S(t) &= \frac{ad-bc}{b+d} + d \left( p_0 - \frac{a+c}{b+d} \right) e^{-\alpha(b+d)t}. \end{aligned}$$

*Ecuación 5. Dinámica de la demanda y oferta del modelo dadas en las Ecuaciones 1 y 2.*

Analicemos el comportamiento del modelo en el largo plazo. Para ello tomamos límites cuando  $t \rightarrow \infty$  en las Ecuaciones 4 y 5. Como  $\alpha > 0$ , se obtienen los puntos de equilibrio dados en la Ecuación 6. Claramente el precio de equilibrio siempre está bien definido, ya que los parámetros  $a, b, c, d > 0$ , mientras que para que la cantidad de equilibrio sea positiva, estas constantes deben cumplir que  $ad > bc$ , lo cual permite asegurar que las funciones lineales de oferta y demanda se cortan en un punto (el de equilibrio) del primer cuadrante.

$$p^* = \frac{a+c}{b+d} > 0, \quad q^* = \frac{ad-bc}{b+d} > 0 \Leftrightarrow ad > bc.$$

*Ecuación 6. Puntos de equilibrio del modelo dinámico.*



Esto nos permite expresar las trayectorias temporales, tanto del precio (Ecuación 4) como de las cantidades demandadas y ofertadas (Ecuación 5), en función del precio y la cantidad de equilibrio:

$$\begin{aligned}p(t) &= p^* + (p_0 - p^*) e^{-\alpha(b+d)t}, \\q^D(t) &= q^* - b(p_0 - p^*) e^{-\alpha(b+d)t}, \\q^S(t) &= q^* + d(p_0 - p^*) e^{-\alpha(b+d)t}.\end{aligned}$$

*Ecuación 7. Dinámica del precio y de las cantidades demandadas y ofertadas en función del precio y de la cantidad de equilibrio.*

Aunque aparentemente el modelo dinámico queda matemáticamente resuelto, desde el punto de vista de la dinámica económica existen algunas lagunas sobre la forma en que varía la cantidad comercializada en el mercado (la cual no debería confundirse con las cantidades ofertadas y demandadas). En efecto, a partir de las expresiones explícitas para la demanda y la oferta (Ecuación 7), observábamos que todo lo que indica el modelo es que, si por ejemplo, se partiera de un precio inicial  $p_0$  que fuera mayor (menor) que el precio de equilibrio  $p^*$ , es decir,  $p_0 > p^*$  ( $p_0 < p^*$ ), entonces en todo instante la cantidad demandada sería menor (mayor) que la ofertada, pero el modelo no indica cuál es la cantidad que se comercializa en el mercado. Estos distintos comportamientos están representados en la Gráfica 1.

Para continuar con el análisis se necesita por tanto añadir alguna hipótesis *razonable* acerca de cómo se realizan las transacciones del bien representado en el modelo. Si por ejemplo,  $p_0 > p^*$ , parece plausible que sea el "lado corto" del mercado el que motive un movimiento de la cantidad del bien comercializado mediante una demanda menor para que así baje el precio (obsérvese que obviamente, si  $p_0 > p^*$ , la oferta estará dispuesta a poner en el mercado más cantidad del bien porque el precio le resulta atractivo, pero el lado corto del mercado, representado por los consumidores, no reaccionará ante esta situación porque el precio le resulta elevado). Y viceversa, si  $p_0 < p^*$ , será la oferta quien, representando ahora el lado corto del mercado, activará la dinámica de la cantidad ofertada. Todo ello nos conduce a asumir la siguiente hipótesis sobre la dinámica de la cantidad comercializada en el mercado:

#### HIPÓTESIS 1

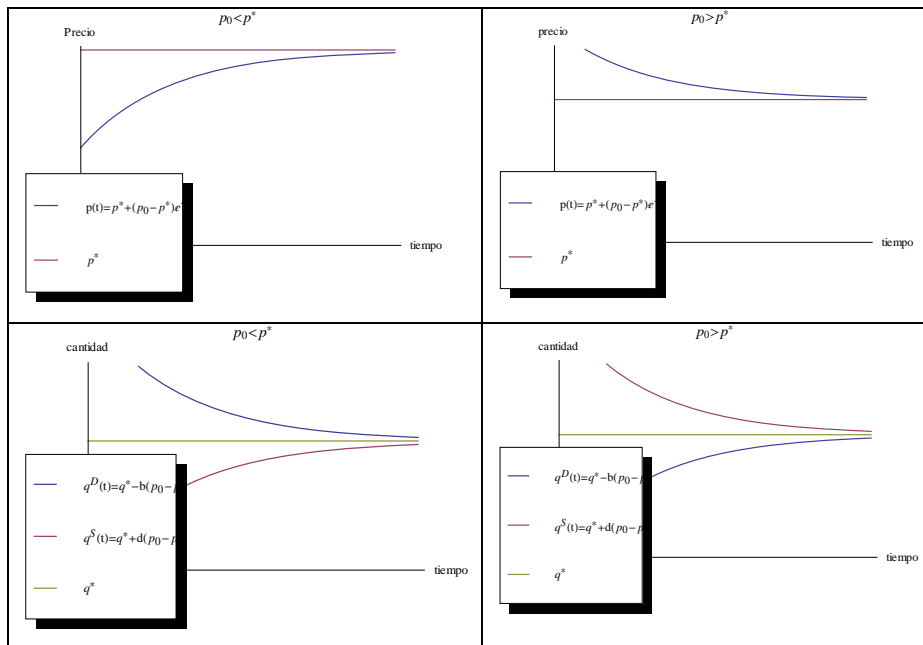
En ausencia de equilibrio, será el lado corto del mercado el que será comercializado, es decir, asumiremos la condición dada en la Ecuación 8.

$$q(t) = \min(q^D(t), q^S(t)) \equiv q(t) = \begin{cases} q^S(t) & \text{si } p_0 \leq p^*, \\ q^D(t) & \text{si } p_0 \geq p^*. \end{cases}$$

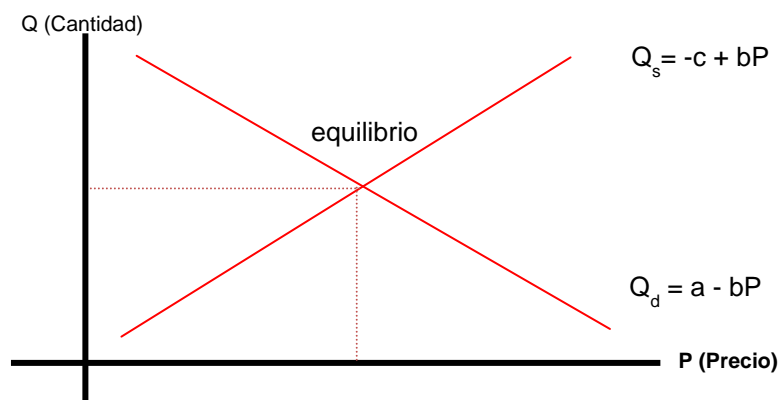
*Ecuación 8. Hipótesis sobre la dinámica de la cantidad comercializada en ausencia de equilibrio.*

Obsérvese que en el escenario habitual en que se considera una función lineal de demanda decreciente con el precio y una función lineal de oferta creciente con el precio, y ambas se cortan en el punto de equilibrio, la hipótesis 1 siempre se satisface (véase la Gráfica 2).

Implícitamente estamos asumiendo que el modelo no considera *stocks*, y que cuando el precio está por debajo del precio de equilibrio, la producción que hay en el mercado es toda la que pueden ofertar los productores y por tanto, sino se está en el equilibrio alguna demanda no se atenderá. Esto incentiva a los productores a producir más y subir el precio. Si, por otro lado, el precio del mercado es superior al precio de equilibrio y la producción actual supera a la demanda, los productores no pueden forzar a los compradores a adquirir el bien que posee un precio mayor que el que están dispuestos a pagar. Esto hará que los productores únicamente vendan la cantidad que se demande.



Gráfica 1. Comportamiento gráfico del precio y de las cantidades dependiendo de la relación entre el precio inicial y el precio de equilibrio.



Gráfica 2. Funciones lineales estándar de oferta y demanda.



### 3.2 Un modelo dinámico de oferta y demanda con inventario o stock

La interpretación anterior conduce de forma natural a reformular el modelo dinámico de manera que éste considere en su planteamiento la existencia de un stock o inventario.

Para introducir este razonamiento en el nuevo modelo asumiremos dos hipótesis (véase las Hipótesis 2.1 y 2.2.). La primera de ellas es la siguiente:

#### HIPÓTESIS 2.1

Los stocks son suficientemente grandes para asegurar que todas las demandas se satisfagan al precio correspondiente. La variación instantánea del inventario responde a los cambios de los niveles de stocks o inventario (véase Ecuación 9).

$$\frac{di}{dt} = q^S(t) - q^D(t).$$

*Ecuación 9. Hipótesis sobre la dinámica del stock.*

Fijadas las funciones de demanda y oferta (como por ejemplo, las especificadas en la Ecuación 1), el inventario se obtiene integrando la edo dada en la Ecuación 9 y cuya expresión está especificada en la Ecuación 10, donde se asume conocido el inventario inicial  $i(0)$ .

$$i(t) = i(0) + \int_0^t (q^S(r) - q^D(r)) dr.$$

*Ecuación 10. Determinación del inventario.*

El ajuste instantáneo del precio ahora se realiza en términos de la fluctuación del inventario (y no del exceso de demanda, como en el primer modelo!). Tal y como refleja la primera parte de la Ecuación 11, si el inventario aumenta (disminuye), i.e.,  $\frac{di(t)}{dt} > 0$  ( $\frac{di(t)}{dt} < 0$ ), al ser la constante  $\alpha > 0$ , el precio tenderá a disminuir (aumentar), ya que, los productores tratarán con esa medida de deshacerse (acumular) el stock o inventario.

$$\frac{dp(t)}{dt} = -\alpha \frac{di(t)}{dt} = -\alpha (q^S(t) - q^D(t)) = \alpha (q^D(t) - q^S(t)), \quad \alpha > 0.$$

*Ecuación 11. Variación instantánea del precio en función del inventario.*

Observamos a partir de la Ecuación 11 que la edo que modeliza la variación instantánea del precio bajo la Hipótesis 2.1, (esto es, asumiendo la existencia de inventario en el mercado), es la misma que en el primer modelo dada en la tercera expresión de la Ecuación 1. Por tanto, en este caso la trayectoria temporal del precio es la misma bajo ambos supuestos (y por tanto, también tienen ambos el mismo punto de equilibrio). La diferencia radica en la cantidad que se comercializa en el mercado fuera del equilibrio. Para un precio superior al de equilibrio, la cantidad comercializada coincide con la demandada, ya que, sigue siendo el lado corto del mercado el que dinamiza la transacción del bien, y la producción que no se coloca en el mercado pasa a los stocks. Es el aumento del stock el que estimula a los productores a bajar el precio del bien (esto cubre el



vacio explicativo que dejaba el primer modelo basado en la Hipótesis 1). Por otra parte, cuando el precio está por debajo del precio de equilibrio, la cantidad comercializada coincide con la demandada (¡ahora interviene el “lado largo” del mercado!). El exceso de demanda sobre la producción del bien comercializado es satisfecho por los stocks existentes (Hipótesis 2.1). Es la caída de los stocks, la señal de estímulo que reciben los productores para subir el precio y aumentar la producción.

La aceptación de la Hipótesis 2.1 conduce a que en este contexto se tenga, como parece más razonable desde el punto de vista económico, que la cantidad que se comercializa sea la cantidad demandada, en otras palabras, asumiremos que:

HIPÓTESIS 2.2

$$q(t) = q^D(t), \quad \forall p = p(t).$$

*Ecuación 12. Hipótesis sobre la dinámica de la cantidad comercializada en ausencia de equilibrio bajo el modelo de inventario.*

## 4 Cierre

La búsqueda de puentes formativos que conecten diferentes áreas de conocimiento en la formación universitaria entendemos que es un compromiso docente que debemos asumir en el marco de la docencia universitaria actual. En este trabajo, se ha tratado de materializar esta idea conectando las áreas de Matemáticas y Microeconomía, a través del estudio de dos modelos dinámicos de oferta y demanda. El estudio también pretende mostrar las carencias del primer modelo estudiado para motivar la introducción natural del segundo, hecho que por nuestra experiencia es ignorado en numerosas fuentes bibliográficas.

Por otra parte, cabe subrayar que el arte de modelizar en cualquier ciencia consiste en saber elegir unas “pocas” variables, así como asumir las hipótesis más “realistas” posibles que representen adecuadamente el fenómeno objeto de estudio. En este caso, se ha tratado de estudiar la evolución temporal del precio y de las cantidades demandadas y ofertadas de un único bien asumiendo que las funciones de oferta y demanda son lineales estándar y que el precio fluctúa con el inventario. Esta última hipótesis no recoge ciertos comportamientos observados en determinados mercados, como por ejemplo, cuando los compradores actúan con fines especulativos, es decir, demandan más cuando observan un crecimiento del precio. Esto conduce a replantear el modelo aquí estudiado y esto será objeto de análisis en una segunda parte de este artículo donde además se analizará la relación entre las soluciones proporcionadas por ambos modelos.

## 5 Bibliografía

[1] Shone, R.: “Economic Dynamics”, 2<sup>nd</sup> edition, Ed. Cambridge, 2002.

Este excelente texto presenta el estudio de diferentes modelos económicos que aparecen en Microeconomía y en Macroeconomía con el denominador común de





UNIVERSIDAD  
POLITECNICA  
DE VALENCIA

ser todos ellos de tipo de dinámico. Combina la exposición de los modelos con la presentación de software para analizarlos.

[2] Chiang, A.: "Métodos Fundamentales de Economía Matemática", Ed. McGraw-Hill, 1993.

Este libro expone los temas clásicos de álgebra lineal, cálculo infinitesimal y programación matemática con una fuerte vocación de mostrar ejemplos de interés para la economía. En algunos de los capítulos, el autor dedica extensas explicaciones de los conceptos matemáticos que se estudian para motivar la utilidad de los mismos en economía.