



UNIVERSITAT
POLITÈCNICA
DE VALÈNCIA

Funciones de desplazamiento y deformación de una barra por axil y flector

| | |
|--------------------------|---|
| Apellidos, nombre | Basset Salom, Luisa (lbasset@mes.upv.es) |
| Departamento | Mecánica de Medios Continuos y Teoría de Estructuras |
| Centro | Escuela Técnica Superior de Arquitectura Universitat Politècnica de València |



1 Resumen de las ideas clave

En este artículo se obtendrá la expresión de las funciones de desplazamiento por axil y por flector de una barra, además de sus correspondientes funciones de deformación, suponiendo un comportamiento elástico y lineal de la estructura. Estas expresiones se deducirán, en cada caso, mediante integración sucesiva de las ecuaciones de campo, a las que se impondrán las condiciones cinemáticas correspondientes.

2 Introducción

Sea una barra en la que se ha definido un sistema de ejes dextrógiro, siendo X el que va desde su extremo inicial (extremo i) hasta su extremo final (extremo j), e Y, Z los ejes principales de la sección. Las funciones de desplazamiento longitudinal, $u(x)$, transversal, $v(x)$, y giro, $\theta(x)$, caracterizan cinemáticamente cada una de las secciones de la barra, ya que definen el movimiento longitudinal, transversal y de giro en una sección cualquiera de la misma como suma de las deformaciones efectivas y de los movimientos de sólido rígido hasta la sección considerada.

Las funciones de deformación longitudinal, $u'(x)$, y transversal o ley de curvaturas, $v''(x)$, relacionadas con las sollicitaciones correspondientes ($N(x)$ y $M(x)$) mediante el factor de rigidez EA o EI , se obtienen, respectivamente, derivando las funciones de desplazamiento.

3 Objetivos

EL alumno, tras la lectura de este documento, será capaz de:

- determinar la expresión de las funciones de desplazamiento longitudinal, transversal y giro de una barra a partir de las cargas que actúan sobre la barra y de los movimientos de sus extremos
- identificar las funciones de forma del axil y la flexión
- obtener las funciones de deformación de la barra y relacionarlas con las sollicitaciones

4 Funciones de desplazamiento y deformación

4.1 Concepto, nomenclatura y criterio de signos

Definidos los ejes de la barra, los movimientos en el extremo inicial (i) son dx_i , dy_i y θ_i y en el extremo final (j) son dx_j , dy_j y θ_j , (Figura 1).

Llamamos $u(x)$, $v(x)$ y $\theta(x)$ a las funciones de desplazamientos longitudinales, transversales y de giros, expresadas en ejes locales de la barra.

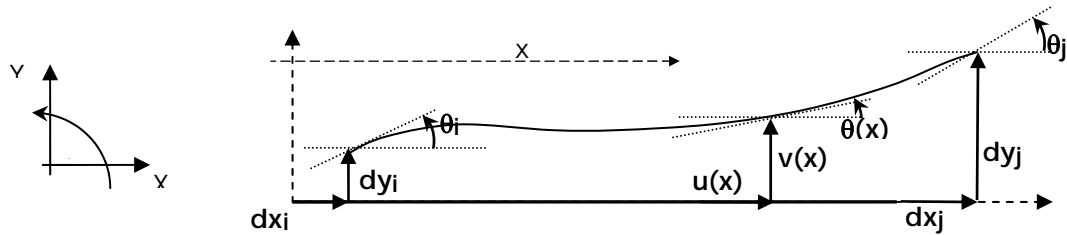


Figura 1. Movimientos en la barra

Si particularizamos para los extremos inicial y final, es decir, para $x=0$ y para $x=L$:

$$\begin{aligned} dx_i &= u(0) & dx_j &= u(L) \\ dy_i &= v(0) & dy_j &= v(L) \\ \theta_i &= \theta(0) & \theta_j &= \theta(L) \end{aligned}$$

Llamamos $u'(x)$ y $v''(x)$ respectivamente a las funciones de deformación longitudinales y transversales, expresadas en ejes locales de la barra.

4.2 Funciones de desplazamiento por axil

La ecuación de campo del axil de una barra para una carga axial variable $p_A(x)$, siendo L , su longitud, A , el área de la sección transversal y E , el módulo de elasticidad longitudinal es:

$$\text{ECUACIÓN DE CAMPO DEL AXIL} \quad \boxed{EA u''(x) = -p_A(x)} \quad (1)$$

CARGA AXIAL CONSTANTE POSITIVA: $p_A(x)=p$ (kN/m)

Se obtendrá, inicialmente, la expresión para una barra sobre la que actúa una carga axial constante $p_A(x)=p$, figura 2, generalizando, posteriormente la expresión para carga variable.

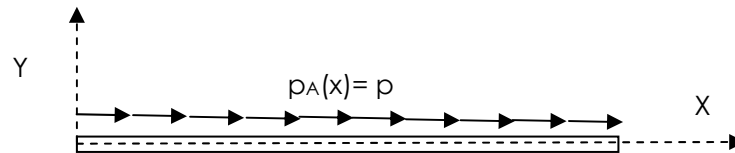


Figura 2. Barra con carga axial constante positiva

Integraremos sucesivamente dos veces para llegar a la expresión de la función de desplazamiento $u(x)$:

$$EA u'(x) = -px + c_1 \quad (2)$$

$$EA u(x) = -p \frac{x^2}{2} + c_1 x + c_2 \quad (3)$$



Aplicando las condiciones cinemáticas en los extremos i, j (figura 3) obtendremos el valor de las constantes c_1 y c_2 :

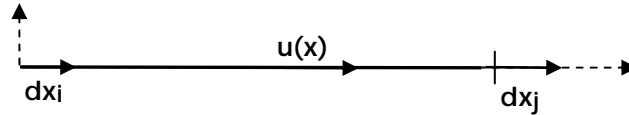


Figura 3. Condiciones cinemáticas del axil

Para $x=0$: $u(0) = dx_i$

Para $x=L$: $u(L) = dx_j$

$$c_1 = \frac{pL}{2} - \frac{EA}{L} dx_i + \frac{EA}{L} dx_j \quad c_2 = EAdx_i$$

Sustituimos en la ecuación (3), agrupando términos y despejando $u(x)$:

Función de desplazamientos:

$$u(x) = \left[\frac{-px^2}{2EA} + \frac{pLx}{2EA} \right] + \left(1 - \frac{x}{L} \right) dx_i + \left(\frac{x}{L} \right) dx_j$$

La parte de la expresión entre corchetes depende de la carga, mientras que los otros dos sumandos dependen de los movimientos de los extremos.

Llamamos **funciones de forma del axil** a la forma que adopta la función de desplazamientos cuando su movimiento asociado es 1 y los demás 0. Así en el axil tenemos dos funciones de forma:

$$\text{Funciones de forma axil: } N_1^a(x) = \left(1 - \frac{x}{L} \right) \quad N_2^a(x) = \left(\frac{x}{L} \right)$$

Sustituyendo en la ecuación 2 tendremos la expresión de la función de deformación:

Función de deformación:

$$u'(x) = \left[\frac{-px}{EA} + \frac{pL}{2EA} \right] + N_1^a(x) dx_i + N_2^a(x) dx_j$$

$$N_1^a(x) = \left(-\frac{1}{L} \right) \quad N_2^a(x) = \left(\frac{1}{L} \right)$$

BARRA SIN CARGA AXIAL: $p_A(x)=0$

Función de desplazamientos:

$$u(x) = N_1^a(x) dx_i + N_2^a(x) dx_j$$

$$N_1^a(x) = \left(1 - \frac{x}{L} \right) \quad N_2^a(x) = \left(\frac{x}{L} \right)$$



Función de deformación:

$$u'(x) = N_1^{a'}(x)dx_i + N_2^{a'}(x)dx_j$$

$$N_1^{a'}(x) = \left(-\frac{1}{L}\right) \quad N_2^{a'}(x) = \left(\frac{1}{L}\right)$$

CARGA AXIAL GENÉRICA: $p_A(x)$

Función de desplazamientos:

$$u(x) = \frac{-1}{EA} \left[\int_0^x p_A(x)dx - \frac{x}{L} \int_0^L p_A(x)dx \right] + N_1^a(x) dx_i + N_2^a(x) dx_j$$

$$\text{Funciones de forma axial: } N_1^a(x) = \left(1 - \frac{x}{L}\right) \quad N_2^a(x) = \left(\frac{x}{L}\right)$$

Función de deformación:

$$u'(x) = \frac{-1}{EA} \left[\int_0^x p_A(x)dx - \frac{1}{L} \int_0^L p_A(x)dx \right] + N_1^{a'}(x)dx_i + N_2^{a'}(x) dx_j$$

$$N_1^{a'}(x) = \left(-\frac{1}{L}\right) \quad N_2^{a'}(x) = \left(\frac{1}{L}\right)$$

4.3 Funciones de desplazamiento por flexión

La ecuación de campo de la flexión de una barra para una carga transversal variable $p_N(x)$, siendo L , su longitud, I , el momento de inercia de la sección transversal y E , el módulo de elasticidad longitudinal es:

$$\text{ECUACIÓN DE CAMPO DE LA FLEXIÓN} \quad \boxed{EI v''''(x) = p_N(x)} \quad (4)$$

CARGA TRANSVERSAL CONSTANTE POSITIVA: $p_N(x)=p$ (kN/m)

Se obtendrá, inicialmente, la expresión para una barra sobre la que actúa una carga Transversal constante $p_N(x)=p$, figura 4, generalizando, posteriormente la expresión para carga variable.

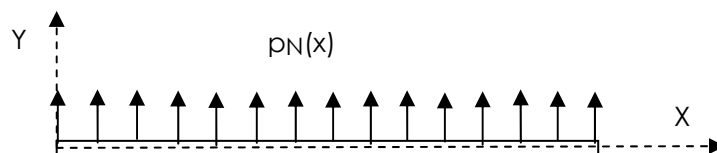


Figura 4. Barra con carga transversal constante positiva

Integraremos sucesivamente cuatro veces para llegar a la expresión de la función de desplazamiento $v(x)$:



$$EI v'''(x) = px + c_1 \quad (5)$$

$$EI v''(x) = p \frac{x^2}{2} + c_1 x + c_2 \quad (6)$$

$$EI v'(x) = p \frac{x^3}{6} + c_1 \frac{x^2}{2} + c_2 x + c_3 \quad (7)$$

$$EI v(x) = p \frac{x^4}{24} + c_1 \frac{x^3}{6} + c_2 \frac{x^2}{2} + c_3 x + c_4 \quad (8)$$

Aplicando las condiciones cinemáticas en los extremos i, j (figura 5) obtendremos el valor de las constantes c_1, c_2, c_3 y c_4 :

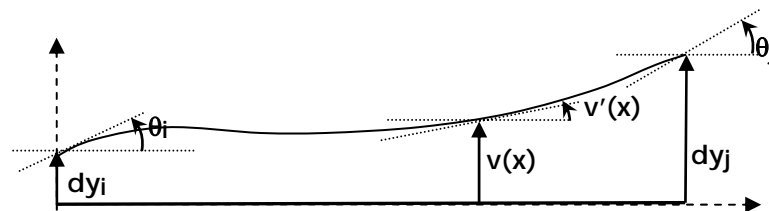


Figura 5. Condiciones cinemáticas de la flexión

$$\text{Para } x=0: v(0) = dy_i \quad v'(0) = \theta_i \quad \text{Para } x=L: v(L) = dy_j \quad v'(L) = \theta_j$$

$$c_1 = -\frac{pL}{2} + \frac{12EI}{L^3} dy_i + \frac{6EI}{L^2} \theta_i - \frac{12EI}{L^3} dy_j + \frac{6EI}{L^2} \theta_j$$

$$c_2 = \frac{pL^2}{12} - \frac{6EI}{L^2} dy_i - \frac{4EI}{L} \theta_i + \frac{6EI}{L^2} dy_j - \frac{2EI}{L} \theta_j$$

$$c_3 = EI\theta_i$$

$$c_4 = EIdy_i$$

Sustituimos en las ecuaciones (7) y (8), agrupando términos y despejando $v(x)$ y $v'(x)$

Función de desplazamientos (ley de flechas):

$$v(x) = \frac{1}{EI} \left[\frac{px^4}{24} - \frac{pLx^3}{12} + \frac{pL^2x^2}{24} \right] + N_1^f(x) dy_i + N_2^f(x) \theta_i + N_3^f(x) dy_j + N_4^f(x) \theta_j$$

Funciones de forma flexión:

$$N_1^f(x) = \frac{2x^3}{L^3} - \frac{3x^2}{L^2} + 1 \quad N_2^f(x) = \frac{x^3}{L^2} - \frac{2x^2}{L} + x \quad N_3^f(x) = \frac{-2x^3}{L^3} + \frac{3x^2}{L^2} \quad N_4^f(x) = \frac{x^3}{L^2} - \frac{x^2}{L}$$



Ley de giros:

$$v'(x) = \frac{1}{EI} \left[\frac{px^3}{6} - \frac{pLx^2}{4} + \frac{pL^2x}{12} \right] + N_1^{f'}(x)dy_i + N_2^{f'}(x)\theta_i + N_3^{f'}(x)dy_j + N_4^{f'}(x)\theta_j$$

$$N_1^{f'}(x) = \frac{6x^2}{L^3} - \frac{6x}{L^2} \quad N_2^{f'}(x) = \frac{3x^2}{L^2} - \frac{4x}{L} + 1 \quad N_3^{f'}(x) = \frac{-6x^2}{L^3} + \frac{6x}{L^2} \quad N_4^{f'}(x) = \frac{3x^2}{L^2} - \frac{2x}{L}$$

Ley de curvaturas:

$$v''(x) = \frac{1}{EI} \left[\frac{px^2}{2} - \frac{pLx}{2} + \frac{pL^2}{12} \right] + N_1^{f''}(x) dy_i + N_2^{f''}(x) \theta_i + N_3^{f''}(x) dy_j + N_4^{f''}(x) \theta_j$$

$$N_1^{f''}(x) = \left(\frac{12x}{L^3} - \frac{6}{L^2} \right) \quad N_2^{f''}(x) = \left(\frac{6x}{L^2} - \frac{4}{L} \right) \quad N_3^{f''}(x) = \left(-\frac{12x}{L^3} + \frac{6}{L^2} \right) \quad N_4^{f''}(x) = \left(\frac{6x}{L^2} - \frac{2}{L} \right)$$

BARRA SIN CARGA TRANSVERSAL: $p_N(x)=0$

Función de desplazamientos (ley de flechas):

$$v(x) = N_1^f(x)dy_i + N_2^f(x)\theta_i + N_3^f(x)dy_j + N_4^f(x)\theta_j$$

Funciones de forma flexión:

$$N_1^f(x) = \frac{2x^3}{L^3} - \frac{3x^2}{L^2} + 1 \quad N_2^f(x) = \frac{x^3}{L^2} - \frac{2x^2}{L} + x \quad N_3^f(x) = \frac{-2x^3}{L^3} + \frac{3x^2}{L^2} \quad N_4^f(x) = \frac{x^3}{L^2} - \frac{x^2}{L}$$

Ley de giros:

$$v'(x) = N_1^{f'}(x)dy_i + N_2^{f'}(x)\theta_i + N_3^{f'}(x)dy_j + N_4^{f'}(x)\theta_j$$

$$N_1^{f'}(x) = \frac{6x^2}{L^3} - \frac{6x}{L^2} \quad N_2^{f'}(x) = \frac{3x^2}{L^2} - \frac{4x}{L} + 1 \quad N_3^{f'}(x) = \frac{-6x^2}{L^3} + \frac{6x}{L^2} \quad N_4^{f'}(x) = \frac{3x^2}{L^2} - \frac{2x}{L}$$

Ley de curvaturas:

$$v''(x) = N_1^{f''}(x) dy_i + N_2^{f''}(x) \theta_i + N_3^{f''}(x) dy_j + N_4^{f''}(x) \theta_j$$

$$N_1^{f''}(x) = \left(\frac{12x}{L^3} - \frac{6}{L^2} \right) \quad N_2^{f''}(x) = \left(\frac{6x}{L^2} - \frac{4}{L} \right) \quad N_3^{f''}(x) = \left(-\frac{12x}{L^3} + \frac{6}{L^2} \right) \quad N_4^{f''}(x) = \left(\frac{6x}{L^2} - \frac{2}{L} \right)$$



CARGA TRANSVERSAL GENÉRICA: $p_N(x)$

Función de desplazamientos (ley de flechas):

$$v(x) = \frac{1}{EI} \left[\int_0^x \int \int p_N(x) dx + \frac{6}{L^2} A \left(\frac{x^3}{3L} - \frac{x^2}{2} \right) - \frac{2B}{L} \left(\frac{x^3}{2L} - \frac{x^2}{2} \right) \right] + N_1^f(x) dy_i + N_2^f(x) \theta_i + N_3^f(x) dy_j + N_4^f(x) \theta_j$$

$$A = \int_0^L \int \int p_N(x) dx \quad B = \int_0^L \int \int p_N(x) dx$$

Funciones de forma flexión:

$$N_1^f(x) = \frac{2x^3}{L^3} - \frac{3x^2}{L^2} + 1 \quad N_2^f(x) = \frac{x^3}{L^2} - \frac{2x^2}{L} + x \quad N_3^f(x) = \frac{-2x^3}{L^3} + \frac{3x^2}{L^2} \quad N_4^f(x) = \frac{x^3}{L^2} - \frac{x^2}{L}$$

Ley de giros:

$$v'(x) = \frac{1}{EI} \left[\int_0^x \int p_N(x) dx + \frac{6}{L^2} A \left(\frac{x^2}{L} - x \right) - \frac{2B}{L} \left(\frac{3x^2}{2L} - x \right) \right] + N_1^{f'}(x) dy_i + N_2^{f'}(x) \theta_i + N_3^{f'}(x) dy_j + N_4^{f'}(x) \theta_j$$

$$N_1^{f'}(x) = \frac{6x^2}{L^3} - \frac{6x}{L^2} \quad N_2^{f'}(x) = \frac{3x^2}{L^2} - \frac{4x}{L} + 1 \quad N_3^{f'}(x) = \frac{-6x^2}{L^3} + \frac{6x}{L^2} \quad N_4^{f'}(x) = \frac{3x^2}{L^2} - \frac{2x}{L}$$

Ley de curvaturas:

$$v''(x) = \frac{1}{EI} \left[\int_0^x p_N(x) dx + \frac{6}{L^2} A \left(\frac{2x}{L} - 1 \right) - \frac{2B}{L} \left(\frac{3x}{L} - 1 \right) \right] + N_1^{f''}(x) dy_i + N_2^{f''}(x) \theta_i + N_3^{f''}(x) dy_j + N_4^{f''}(x) \theta_j$$

$$N_1^{f''}(x) = \left(\frac{12x}{L^3} - \frac{6}{L^2} \right) \quad N_2^{f''}(x) = \left(\frac{6x}{L^2} - \frac{4}{L} \right) \quad N_3^{f''}(x) = \left(-\frac{12x}{L^3} + \frac{6}{L^2} \right) \quad N_4^{f''}(x) = \left(\frac{6x}{L^2} - \frac{2}{L} \right)$$

5 Cierre

A lo largo de este tema hemos obtenido las funciones de desplazamiento y de deformación de una barra, necesarias para la resolución cinemática de una estructura de barras, relacionándolas con la carga exterior y con los movimientos de extremo de barra. Mediante estas expresiones queda definida cinemáticamente la estructura.

Se proponen la siguiente cuestión:

1. Determinar las funciones de desplazamiento y deformación para una carga triangular (orientada en sentido del eje Y negativo), $p_N(x) = -2x$, a partir de la expresión genérica.



Solució:

$$v(x) = \frac{1}{EI} \left[\left(-\frac{x^5}{60} + \frac{3L^2x^3}{20} + \frac{-2L^3x^2}{20} \right) \right] + N_1^f(x)dy_i + N_2^f(x)\theta_i + N_3^f(x)dy_j + N_4^f(x)\theta_j$$

$$v'(x) = \frac{1}{EI} \left[-\frac{x^4}{12} + \frac{9L^2x^2}{20} + \frac{-L^3x}{5} \right] + N_1^{f'}(x)dy_i + N_2^{f'}(x)\theta_i + N_3^{f'}(x)dy_j + N_4^{f'}(x)\theta_j$$

$$v''(x) = \frac{1}{EI} \left[-\frac{x^3}{3} + \frac{9L^2x}{10} + \frac{-L^3}{5} \right] + N_1^{f''}(x) dy_i + N_2^{f''}(x) \theta_i + N_3^{f''}(x) dy_j + N_4^{f''}(x) \theta_j$$

6 Bibliografía

6.1 Libros:

[1] Basset, L.; Apuntes de clase.

[2] Gere J.M., Timoshenko S.P. "Mecánica de Materiales" Grupo editorial Iberoamérica. 1984

[3] ICE: "Leyes de esfuerzos y funciones de desplazamiento a lo largo de una barra", Artículo Docente ETSA, 2011.

Disponibile en Riunet: <http://hdl.handle.net/10251/12714>

6.2 Figuras:

Figura 1. Movimientos en la barra.

Figura 2. Barra con carga axial constante.

Figura 3. Condiciones cinemáticas del axil.

Figura 4. Barra con carga normal constante.

Figura 5. Condiciones cinemáticas de la flexión.

Autora de las figuras: Luisa Basset