



Fundamentos del transporte de calor en régimen transitorio

Apellidos, nombre	Castelló Gómez, Marisa (mcasgo@upv.es) Fito Suñer, Pedro (pedfisu@tal.upv.es) Tarrazó Morell, José (jtarrazo@tal.upv.es)
Departamento	Departamento de Tecnología de Alimentos
Centro	Universitat Politècnica de València

1 Resumen

En este artículo vamos a presentar las características básicas que hay que tener en cuenta a la hora de abordar situaciones en las que hay **cambios de temperatura** en un sistema **en función del tiempo** de tratamiento al que se somete. Para ello, haremos uso de la segunda ley de Fourier, veremos qué son las geometrías básicas, también cuáles son los cuatro módulos adimensionales que se manejan en estos casos y, por último, trabajaremos con la regla de Newman cuando hay varias direcciones de transporte.

2 Introducción

La transmisión de calor en régimen transitorio es una operación unitaria muy frecuente, tanto a nivel doméstico como industrial. Todos tenemos en mente cuánto tiempo debemos freír unas patatas fritas para que alcancen las condiciones ópticas de consumo o que no se tarda lo mismo en descongelar un alimento a 4°C que a temperatura ambiente. A nivel industrial, establecer con precisión los tiempos de proceso en los tratamientos térmicos, contribuye a optimizar los recursos energéticos y a estandarizar la calidad de los productos que pueden ser tanto alimentos como fármacos, caldos de fermentación, etc. En la Figura 1 se muestran algunos ejemplos frecuentes en los que el transporte de calor tiene lugar.

Por tanto, en este artículo vamos a abordar las **situaciones en las que se modifica la temperatura de un cuerpo** hasta que alcance un determinado valor **en un punto concreto** del mismo, **durante un tiempo** específico. Por ello, no sólo tendremos en cuenta la variable tiempo sino también la posición, ya que no es igual la temperatura que se alcanza en la superficie a la del centro del producto sometido a una etapa de calentamiento o de enfriamiento para un mismo tiempo.



Figura 1. Ejemplo de algunas de las aplicaciones del transporte de calor en régimen transitorio

3 Objetivos

Una vez que te leas con detenimiento este documento, serás capaz de:

- **Predecir la temperatura** alcanzada **en un** determinado **punto** de un producto al someterse a un proceso de calentamiento o enfriamiento **durante un determinado tiempo**
- **Establecer la “dinámica del sistema”** en procesos continuos para saber la “respuesta” a una modificación externa de las condiciones que los separe del régimen estacionario
- Recomendar el **tamaño** adecuado de producto en función del tratamiento térmico aplicado
- Estimar la **difusividad térmica** (α) de un producto

4 Desarrollo

En estos casos, vamos a recurrir a la **ecuación diferencial de la conservación de la energía**, que nos proporciona una relación entre la temperatura, el tiempo y la posición en el espacio. Esta relación dependerá de las propiedades físicas del sólido y debemos tener presente las siguientes consideraciones:

- No existe generación interna en el sólido
- No se produce cambio de fase
- Densidad y calor específico son constantes
- La conductividad térmica del sólido no depende de T

Quedando dicha ecuación así:

$$\rho \cdot c_p \cdot \frac{\partial T}{\partial t} = k \cdot \nabla^2 \cdot T$$

Pensando en un volumen de control, en régimen transitorio, el valor de la temperatura no solo depende de la posición, sino también del tiempo. Por tanto, hay que considerar el término de ACUMULACIÓN y se hace necesario trabajar con ecuaciones en derivadas parciales (Figura 2).

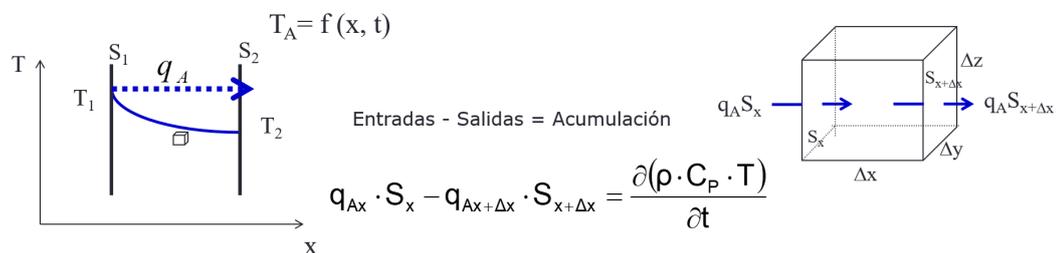


Figura 2. Ejemplo de la aplicación de los balances de energía a un volumen de control

De esta forma, surge la **2ª Ley de Fourier** que describe en forma diferencial la relación entre la temperatura y el tiempo en un punto dado del sistema y que se expresa así:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = -\alpha \left[\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right]$$

Esta ley tiene solución sencilla en situaciones en las que hay una única dirección de transporte. Esto implica que haya que trabajar con **geometrías básicas**, que en este contexto son la lámina infinita (li), el cilindro infinito (ci) y la esfera (e) (Figura 3).

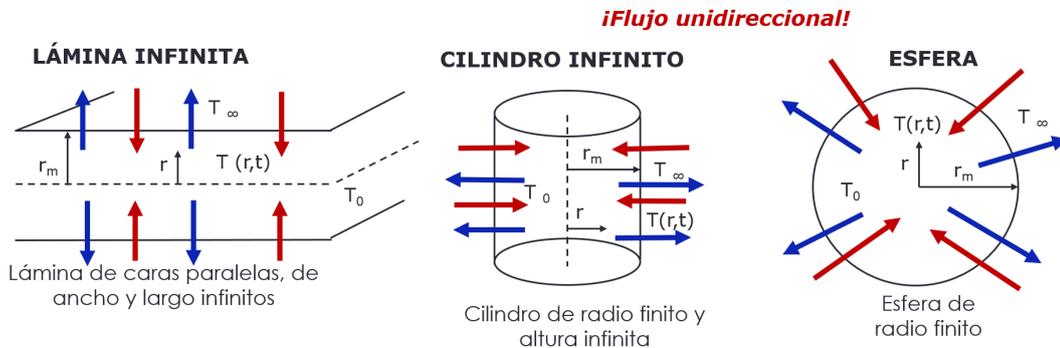


Figura 3. Geometrías básicas para el transporte de calor en régimen transitorio

En la Figura 3, las flechas azules se refieren a los casos en los que el producto se enfría y las rojas a los casos en los que se calienta. Además, la nomenclatura incluida, se refiere a lo siguiente:

- r_m : dimensión característica. Distancia desde el punto al que le cuesta más alcanzar las condiciones del medio hasta el punto al que le cuesta menos
- r : distancia desde el punto al que le cuesta más alcanzar las condiciones del medio hasta el punto concreto donde queremos averiguar la temperatura o donde nos dan el dato de temperatura
- T_∞ : temperatura del medio que rodea al producto que se calienta o enfría y debe mantenerse constante durante el tiempo del proceso
- T_0 : temperatura inicial del cuerpo, que debe ser uniforme
- $T(r,t)$: temperatura en un punto concreto del producto transcurrido un determinado tiempo

4.1 Módulos adimensionales

Para resolver la 2ª ley de Fourier en cada una de las geometrías básicas (GB), debemos trabajar con cuatro parámetros adimensionales que son la fuerza impulsora (Y), el tiempo reducido o número de Fourier (X), la posición relativa (n) y la relación entre la resistencia externa al transporte de calor y la resistencia interna (m), cuyas fórmulas son las siguientes:

$$Y = \frac{T_\infty - T(r,t)}{T_\infty - T_0} \quad [1,0] \quad X = \frac{\alpha}{r_m^2} t \quad n = \frac{r}{r_m} \quad [0,1] \quad m = \frac{1}{Bi} = \frac{k}{hr_m}$$

Donde:

- α es la difusividad térmica (m^2/s), que se obtiene por: $\alpha = \frac{k}{\rho \cdot c_p}$, siendo k la conductividad térmica (W/mK), ρ la densidad (kg/m^3) y c_p el calor específico ($J/kg \cdot ^\circ C$) del producto estudiado
- t : es el tiempo (s)
- Bi : es el número de Biot
- h es el coeficiente individual de transporte de calor por convección (W/m^2K)

Conociendo 3 de estos 4 módulos adimensionales, seremos capaces de deducir el cuarto y por tanto de averiguar la incógnita del problema.

4.2 Método de resolución analítica, gráfica o con fichero de Excel

Para poder resolver los casos en los que se estima que el transporte de calor en régimen transitorio ocurre en una única dirección, se pueden utilizar distintas metodologías que se basan en el desarrollo de la 2ª ley de Fourier para cada caso.

Empecemos por la resolución analítica. Para las tres GB, la resolución de la 2ª ley de Fourier cuando el parámetro adimensional $m=0$ da lugar a las siguientes ecuaciones que son series convergentes:

$$Y_{li} = \frac{4}{\pi} \left[\begin{aligned} & \exp\left(-\frac{\pi^2}{4}X\right) \cos\left(\frac{\pi}{2}n\right) - \frac{1}{3} \exp\left(-\frac{9\pi^2}{4}X\right) \cos\left(\frac{3\pi}{2}n\right) \\ & + \frac{1}{5} \exp\left(-\frac{25\pi^2}{4}X\right) \cos\left(\frac{5\pi}{2}n\right) + \frac{1}{7} \exp\left(-\frac{49\pi^2}{4}X\right) \cos\left(\frac{7\pi}{2}n\right) \dots \end{aligned} \right]$$

$$Y_{ci} = 1,602 \exp(-5,784X) J_0(2,405 \cdot n) - 1,066 \exp(-30,47X) J_0(5,52 \cdot n) + 0,853 \exp(-74,892X) J_0(8,654 \cdot n) - (0,731) \exp(139,051X) J_0(11,792n) + \dots$$

$$Y_e = 2 \left[\begin{aligned} & (\exp(-\pi^2 X) \frac{\text{sen}\pi n}{\pi n} - \exp(-4\pi^2 X) \frac{\text{sen}2\pi n}{2\pi n} + \\ & + \exp(-16\pi^2 X) \frac{\text{sen}4\pi n}{4\pi n}) - \exp(-16\pi^2 X) \frac{\text{sen}(4\pi n)}{4\pi n} + \dots \end{aligned} \right]$$

Si, además, asumimos que se ha superado el periodo de inducción (generalmente para valores de $X > 0,5$), únicamente será necesario el primer término de las ecuaciones anteriores para obtener el valor de la fuerza impulsora, ya que el resto no modificarán su valor. En ese caso:

$$Y_{li} = \frac{4}{\pi} \exp\left(-\frac{\pi^2}{4}X\right) \cos\left(\frac{\pi}{2}n\right)$$

$$Y_{ci} = 1.602 \exp(-5,784 \cdot X) J_0(2,405 \cdot n) \quad \text{sabiendo que } J_0(0) = 1$$

$$Y_e = 2 \exp(-\pi^2 X) \frac{\text{sen}\pi n}{\pi n} \quad \text{sabiendo que } \lim_{n \rightarrow 0} \left(\frac{\text{sen}\pi n}{\pi n}\right) = 1$$

Para la **resolución gráfica**, haremos uso de unos ábacos que representan varias soluciones de la 2ª ley de Fourier, pero cuando se ha superado el periodo de inducción, por lo que no serán adecuados cuando la fuerza impulsora está muy próxima a 1, es decir, para momentos cercanos al inicio del calentamiento o enfriamiento. En la Figura 4 se muestra un ejemplo del ábaco para cada GB. Como puede verse, en la parte superior izquierda de los 3 ábacos hay una región a la que no llegan los haces de rectas de los diferentes valores de m y de n porque en esa zona la Y se acerca a 1. También hay que tener presente que, en estos casos, en el eje de ordenadas hay una escala logarítmica y por tanto hay que tenerlo en cuenta a la hora de manejar los ábacos.

¿Nos ponemos a prueba? Sabiendo que un producto que tienen que tiene geometría, cuyo valor de X es 2,5, $m=2$ y $n=0$, ¿cuánto vale Y ?

Solución: $Y=0,04$

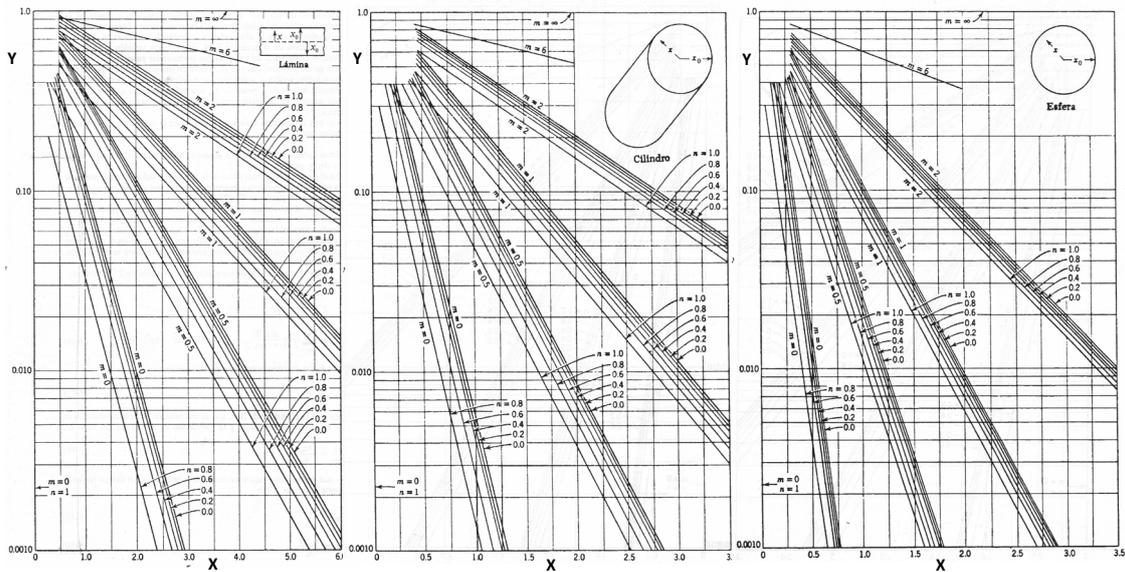


Figura 4. Ejemplo de los ábacos para resolución gráfica en las geometrías básicas (adaptadas de Costa *et al.*, 1991)

Como podéis imaginar estos dos procedimientos tienen dificultades para poder abarcar todos los casos, obligándonos a tener que ir a programas de integración arduos y difíciles. Una solución alternativa y versátil es recurrir a una herramienta programada en **macros de Excel**, por los profesores autores del artículo, que calcula 2000 términos de las series resueltas para cada GB, dando un parámetro adimensional a partir de los otros tres. A continuación, os mostramos una captura de la interfaz que tiene este fichero para que os hagáis una idea de su versatilidad (Figura 5).

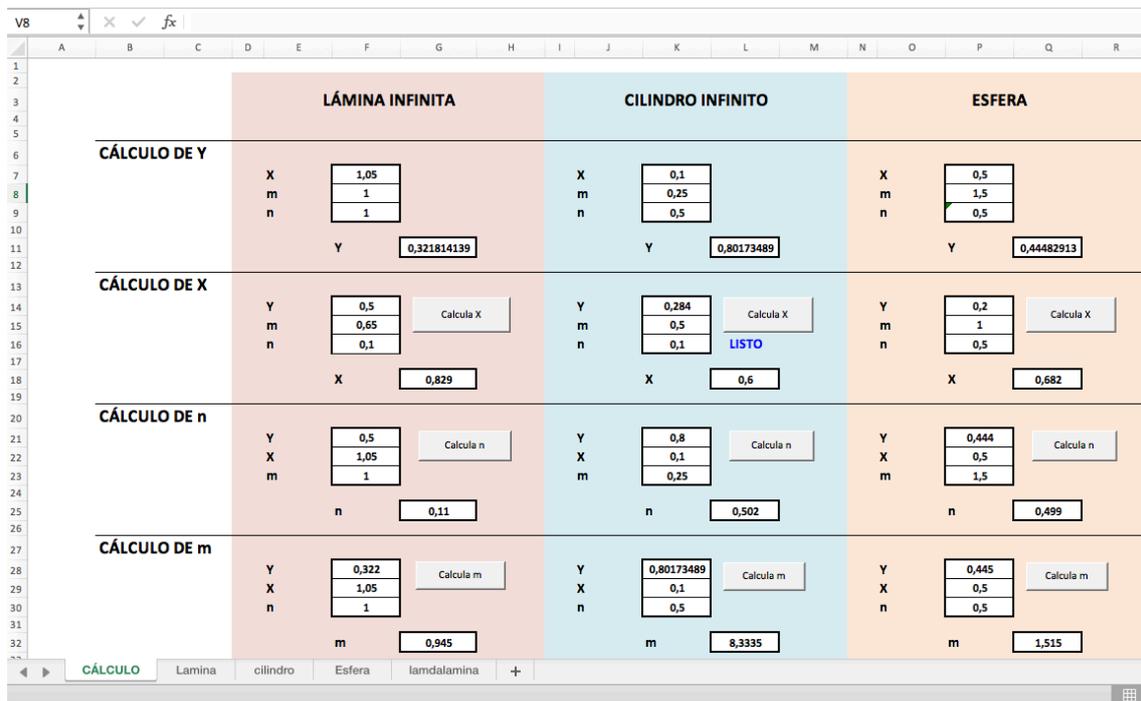


Figura 5. Captura de pantalla del fichero de Excel en el que se han incorporado todas las posibles soluciones de la 2ª ley de Fourier

4.3 Geometrías con varias direcciones de transporte. Regla de Newman

Como podréis imaginar, en la vida real, los productos tienen varias direcciones por las que se calienten o enfrían, por lo que hay que recurrir a la **regla de Newman** que establece que *la fuerza impulsora de un cuerpo con varias direcciones de transporte viene dada por el producto de las fuerzas impulsoras que corresponden a las figuras básicas que lo han generado.*

En general, solemos encontrar paralelepípedos con dimensiones finitas, o cilindros en los que tanto el diámetro como la altura son finitos. En estos casos, la fuerza impulsora se obtendrá de la siguiente manera:

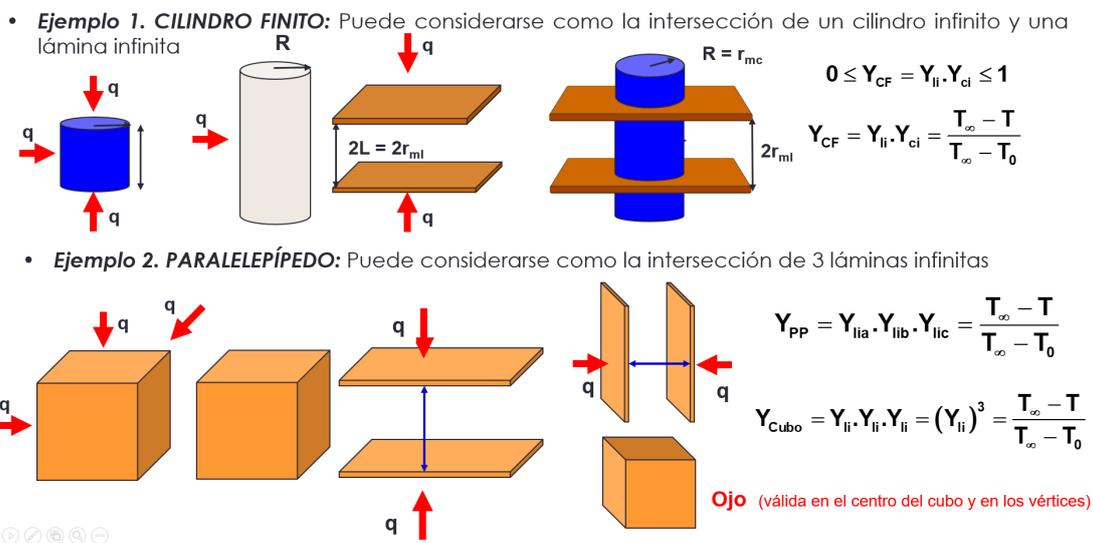
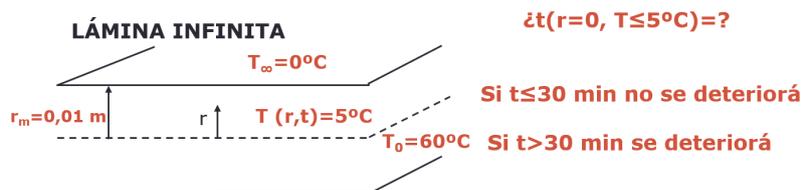


Figura 6. Ejemplos de la obtención de la fuerza impulsora de un cilindro finito y de un paralelepípedo aplicando la regla de Newman.

4.4 Ejemplos

La mejor forma de saber si tenemos clara la metodología es ponerse a prueba, así que vamos a resolver un par de ejemplos en los que hay transferencia de calor en régimen transitorio.

Caso 1. Hay que enfriar rápidamente para evitar su deterioro un material biológico en forma de láminas planas, de 2 cm de espesor, recién procesado y que está a 60 °C. Dicho material tiene una densidad de 1,07 gcm⁻³, un calor específico de 3 kJkg⁻¹K⁻¹ y una conductividad térmica de 0,5 Wm⁻¹K⁻¹. Se ha estimado que el sólido no puede estar más de 30 minutos por encima de 5 °C. Las placas se colocan en un frigorífico a 0 °C y con un coeficiente individual de transmisión de calor 50 Wm⁻²K⁻¹. Predecir si se deterioraría el material.



Utilizando la resolución gráfica

$$Y = \frac{(T_{\infty} - T_i)}{(T_{\infty} - T_o)} = \frac{0 - 5}{0 - 60} = 0,083$$

$$n = \frac{r}{r_m} = \frac{0}{0,01} = 0$$

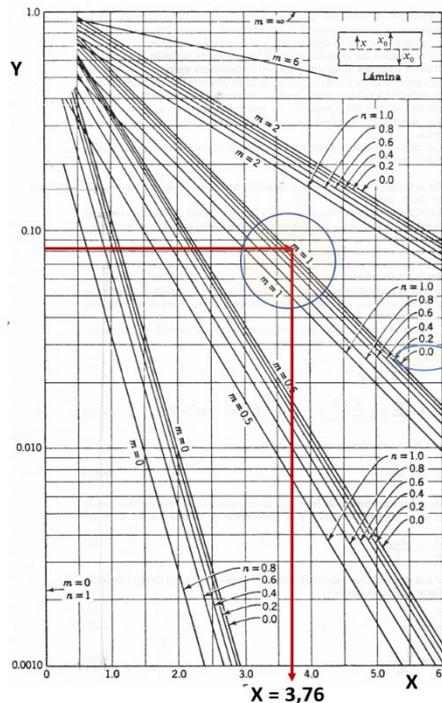
$$m = \frac{k}{h \cdot r_m} = \frac{0,50}{50,0 \cdot 0,01} = 1$$

$$X = \frac{k}{\rho \cdot c_p} \frac{t}{r_m^2} = \frac{0,5}{3000 \cdot 1070} \cdot \frac{t}{(0,01)^2} = 1,56 \cdot 10^{-3} \cdot t$$

$$3,76 = 1,56 \cdot 10^{-3} \cdot t$$

$$t = 21414 \text{ s} = 40 \text{ min}$$

El material biológico sí se estropeará



Utilizando el fichero de Excel Fourier

1º) Posicionarse en la hoja de cálculo de la geometría básica correspondiente.

2º) Sabiendo que $Y=0,083$, $m=1$ y que $n=0$, introduciremos esos valores numéricos en las celdas correspondiente del Excel, donde se indique el cálculo de la variable desconocida:

CÁLCULO DE Y

X: 1.05, m: 1, n: 1

Y: 0.321814139

CÁLCULO DE X

Y: 0.083, m: 1, n: 0

X: 0.829

CÁLCULO DE n

Y: 0.5, m: 1, n: 0

X: 0.5

LÁMINA INFINITA

Y: 0.083, m: 1, n: 0

X: 2.026

Y: 0.083, m: 1, n: 0

X: 3.395

$$t = \frac{X \cdot r_m^2}{\alpha} = 2180 \text{ s}$$

$$T = 36 \text{ min} > 30 \text{ min}$$

El material biológico sí se estropeará

Este primer caso era sencillo porque el producto sólo tenía una dirección de transporte. Veamos otro caso con varias direcciones de transporte.

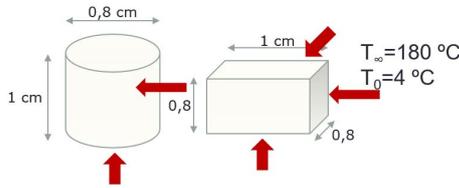
Caso 2. Se desea saber el tiempo de fritura de dos piezas de patata (refrigeradas inicialmente a 4 °C) troqueladas en forma de paralelepípedo y de cilindro. Las piezas de patata se sumergen en aceite de girasol a una temperatura de 180 °C ($h=20 \text{ W/m}^2\text{K}$). Sabiendo que la gelatinización de los almidones de la patata se produce a 85 °C y las reacciones de Maillard de coloración a 165 °C:

a. ¿Cuánto tiempo tarda cada pieza de patata en estar totalmente gelatinizada?

b. ¿Cuánto tiempo tardará la superficie en estar coloreada?

Datos: $K: 0,4 \text{ W/mK}$, $\rho: 960 \text{ kg/m}^3$, $c_p: 3,9 \text{ kJ/kgK}$

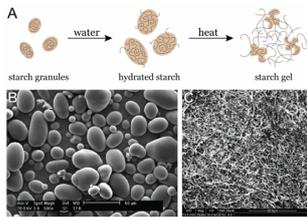
Transporte de calor en RT con varias direcciones de transporte. 2ª Ley de Fourier. Regla de Newman.
Cilindro finito: $Y_{CF}=Y_{Cl} \cdot Y_{Li}$. Paralelepípedo $Y_{PP}=Y_{Lia} \cdot Y_{Lib} \cdot Y_{Lic}$



- a) $t(r=0, T=85\text{ °C})=?$
b) $t(r=r_m, T=165\text{ °C})=?$



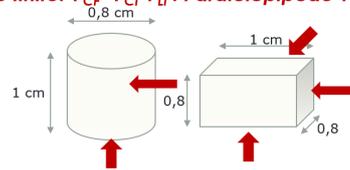
En estos casos, lo recomendable es construirse una tabla para introducir los valores de cada GB:



- a) $t(r=0, T=85\text{ °C})=?$

- a) $t(r=0, T=85\text{ °C})=?$

Cilindro finito: $Y_{CF}=Y_{Cl} \cdot Y_{Li}$. Paralelepípedo $Y_{PP}=Y_{Lia} \cdot Y_{Lib} \cdot Y_{Lic}$



$$Y_{patata} = \frac{180-85}{180-4} = 0,54$$

	Cilindro finito (CF)			X	Paralelepípedo (PP)			Y
	CI	LI	CF		Ll _a	Ll _b	Ll _c	
r _m	0,004	0,005	X	r _m	0,004	0,004	0,005	X
r	0	0		r	0	0	0	
n	0	0		n	0	0	0	
m	5	4		m	5	5	4	
X	?	?		X	?	?	?	
Y	?	?	0,540	Y	?	?	?	0,540

¿Cómo podemos conseguir los valores de fuerza impulsora para aplicar la regla de Newman? Iterando. Para ello, rellenamos la tabla de iteración considerando distintos tiempos. En el rango de valores de fuerza impulsora que contemple en este caso el valor de 0,540 iteraremos como se muestra a continuación:

Tabla de iteración

t ^{supuesto} (s)	X _{Cl}	X _{Li}	Y _{Cl}	Y _{Li}	Y _{CF}	X _{Lia} =X _{Lib}	X _{Lic}	Y _{Lia} =Y _{Lib}	Y _{Lic}	Y _{PP}
100	0,668	0,427	0,818	0,940	0,769	0,668	0,427	0,913	0,940	0,783
400	2,671	1,709	0,389	0,700	0,273	2,671	1,709	0,635	0,700	0,282
300	2,003	1,282	0,499	0,773	0,385	2,003	1,282	0,716	0,773	0,397
200	1,335	0,855	0,639	0,853	0,544	1,335	0,855	0,809	0,853	0,558

CILINDRO INFINITO

X: 0.7
m: 5
n: 0

Y: 0.8176123

LÁMINA INFINITA

X: 0.4273504
m: 4
n: 0

Y: 0.940273906

Interpolación lineal

Patata con geometría de cilindro finito

$$(300-200)=100\text{ s} \Rightarrow 0,544-0,385 \quad \beta = 97\text{ s}$$

$$\beta \Rightarrow 0,54-0,385 \quad t_{\text{real}}=300-\beta = 203\text{ s}=3,4\text{ min}$$

Patata con geometría de paralelepípedo

$$(300-200)=100\text{ s} \Rightarrow 0,558-0,397 \quad \beta' = 97\text{ s}$$

$$\beta' \Rightarrow 0,54-0,397 \quad t_{\text{real}}=300-\beta' = 211\text{ s}=3,5\text{ min}$$

LÁMINA INFINITA

X: 0.667735
m: 5
n: 0

Y: 0.912599795

LÁMINA INFINITA

X: 0.4273504
m: 4
n: 0

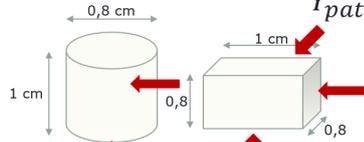
Y: 0.940273906

Para el siguiente apartado, se procede de la misma forma, pero ahora, teniendo en cuenta el nuevo valor de fuerza impulsora.

b) $t(r=0, T=165\text{ °C})=?$

b) $t(r=r_m, T=165\text{ °C})=?$

$$Y_{patata} = \frac{180-165}{180-4} = 0,085$$



Cilindro finito: $Y_{CF} = Y_{Cl} \cdot Y_{Li}$

Paralelepípedo $Y_{PP} = Y_{Lia} \cdot Y_{Lib} \cdot Y_{Lic}$

Cilindro finito (CF)				Paralelepípedo (PP)				
	Cl	Li	CF	Li _a	Li _b	Li _c	PP	
r_m	0,004	0,005	X	r_m	0,004	0,004	0,005	X
r	0,004	0,005		r	0,004	0,004	0,005	
n	1	1		n	1	1	1	
m	5	4		m	5	5	4	
X	?	?		X	?	?	?	
Y	?	?	0,085	Y	?	?	?	0,085

$$Y_{cf} = Y_{pp} = 0,085$$

Tabla de iteración

$t_{supuesto}$ (s)	X_{Cl}	X_{Li}	Y_{Cl}	Y_{Li}	Y_{CF}	$X_{Lia} = X_{Lib}$	X_{Lic}	$Y_{Lia} = Y_{Lib}$	Y_{Lic}	Y_{PP}
100	0,668	0,427	0,744	0,835	0,621	0,668	0,427	0,831	0,835	0,577
400	2,671	1,709	0,354	0,621	0,220	2,671	1,709	0,578	0,621	0,208
600	4,006	2,564	0,216	0,510	0,110	4,006	2,564	0,454	0,510	0,105
800	5,342	3,419	0,132	0,419	0,055	5,342	3,419	0,356	0,419	0,053

CILINDRO INFINITO	
X	0.7
m	5
n	1
Y	0.743658
LÁMINA INFINITA	
X	0.4273504
m	4
n	1
Y	0.835286266

Interpolación lineal

Patata con geometría de cilindro finito

$$(800-600)=200\text{ s} \Rightarrow 0,110-0,055$$

$$\beta' = 91\text{ s}$$

$$\beta' \Rightarrow 0,110-0,085$$

$$t'_{real} = 600 + \beta' = 691\text{ s} = 11,5\text{ min}$$

Patata con geometría de paralelepípedo

$$(800-600)=200\text{ s} \Rightarrow 0,105-0,053$$

$$\beta' = 77\text{ s}$$

$$\beta' \Rightarrow 0,105-0,085$$

$$t'_{real} = 600 + \beta' = 677\text{ s} = 11,3\text{ min}$$

LÁMINA INFINITA	
X	0.667735
m	5
n	1
Y	0.831192455
LÁMINA INFINITA	
X	0.4273504
m	4
n	1
Y	0.835286266

5 Cierre

A lo largo de este objeto de aprendizaje hemos visto cómo trabajar con las herramientas matemáticas que nos permiten resolver situaciones en las que hay transporte de calor en régimen transitorio. ¡Ánimo con la aplicación de las mismas!

6 Bibliografía

- Castelló, ML., Fito, P.J., Tarrazó, J. (2021). Heat Transport in Unsteady State. RiuNet. Repositorio institucional UPV. <http://hdl.handle.net/10251/158432>
- Conduction heat transfer; unsteady state. <https://www.cheric.org/files/education/cyberlecture/e201501/e201501-401.pdf>
- Costa, J., Cervera, S. (1991). Curso de Química Técnica. Introducción a los procesos, las operaciones unitarias y los fenómenos de transporte en la Ingeniería Química. Editorial Reverté S.A.
- Tarrazó, J., Sanjuán N. (2005). Problemas de ingeniería de procesos en las industrias agroalimentarias. Editorial UPV.