



UNIVERSITAT  
POLITÈCNICA  
DE VALÈNCIA



TRABAJO DE FIN DE GRADO

# Desarrollo de un modelo teórico para el despegue de un dron y su validación experimental

UNIVERSIDAD POLITÉCNICA DE VALENCIA

Ingeniería Aeroespacial

**Autor:** Avilés Urbán, Alberto

**Tutor:** Riera Guasp, Jaime

**Cotutor:** Ginestar Peiró, Damián

12 de mayo 2021

## Resumen

En este proyecto se procede a desarrollar un modelo matemático para el despegue de un cuadricóptero y a estudiar la influencia que puedan tener perturbaciones externas como ráfagas de viento. Primero, detallando el marco teórico en el cual se desarrolla y los parámetros de los que depende. A continuación, para el modelo Cheerwing Syma X5SW-V3, se ensayan y caracterizan los parámetros a introducir en el modelo. Posteriormente, se graba un vídeo de la trayectoria que se pretende reproducir, para todos los casos de estudio. Por último, mediante software matemático se analizan los resultados obtenidos por el modelo y se comparan con los datos experimentales, validando el modelo teórico desarrollado para el despegue de un dron.

## **Resum**

En aquest projecte es procedeix a desenvolupar un model matemàtic per a l'enlairament d'un quadricopter i a estudiar la influència que puguen tindre perturbacions externes com ràfegues de vent. Primer, detallant el marc teòric on es desenvolupa i els paràmetres dels que dependrà. A continuació, per al model Cheerwing Syma X5SW-V3, s'assagen i es caracteritzen els paràmetres a introduir al model. Posteriorment, es grava la trajectòria que es pretén reproduir, per tots els casos d'estudi. Finalment, mitjançant software matemàtic s'analitzen els resultat obtenits pel model i es comparen amb les dades experimentals, validant el model teòric desenvolupat per al enlairament d'un dron.

## **Abstract**

In this project, a mathematical model for the take-off of a quadcopter is developed and the impact of external disturbances like gusts of wind is checked. First, introducing the theoretical framework in which it is developed and the parameters on which it will depend. Next, for the Cheerwing Syma X5SW-V3 model, the parameters to be entered in the model are tested and characterized. The trajectory it intends to reproduce is filmed for every studied case. By last, using mathematical software, the results obtained by the model are analyzed and compared with the experimental data, validating the theoretical model for the take-off of a drone.

## Nomenclatura

a	Aceleración lineal
$\alpha$	Aceleración angular
b	Número de palas de las hélices
$\beta$	Ángulo de batimiento
C	Término de Coriolis
c	Cuerda media aerodinámica
$c_{l\alpha}$	Pendiente del coeficiente de sustentación
$c_d$	Coeficiente de resistencia aerodinámica
$(c_d)_h$	Coeficiente de resistencia aerodinámica de las hélices
$(c_{D0})_{lateral}$	Coeficiente de resistencia parásita lateral del cuadricóptero
$(c_{D0})_{normal}$	Coeficiente de resistencia parásita normal del cuadricóptero
CF	Coeficiente de fricción
D	Resistencia aerodinámica
$d_{in}$	Distancia en el eje $n$ desde el rotor $i$ hasta el centro de gravedad
F	Fuerzas externas
$F_i$	Tracción generada por el rotor $i$
$\phi$	Ángulo de alabeo y ángulo de incidencia
g	Gravedad de la Tierra en la superficie
$H^b$	Sistema de referencia en ejes cuerpo
$H^e$	Sistema de referencia en ejes Tierra
$H^p$	Sistema de referencia en ejes pala
I	Matriz Identidad
$I_{xx}$	Momento de inercia en el eje longitudinal
$I_{yy}$	Momento de inercia en el eje lateral
$I_{zz}$	Momento de inercia en el eje vertical
J	Matriz de inercia
$\chi$	Ángulo de arrastre
L	Momentos externos y momento de alabeo
$L_c$	Parámetro dependiente de la geometría del cuerpo y el Mach de vuelo
l	Longitud del brazo del dron
M	Momento de cabeceo
$M_i$	Momento de arrastre del rotor $i$
m	Masa del cuadricóptero y matriz de masas
Ma	Número de Mach
N	Momento de guiñada
NED	North-East-Down (Norte-Este-Abajo)
$n_i$	Velocidad de rotación del rotor $i$
$n_{fot}$	Número de fotogramas
$n_g$	Relación de transmisión
$\omega$	Velocidad angular
$P_i$	Potencia parásita
$P_\infty$	Presión del aire a nivel del mar
p	Velocidad angular respecto al eje longitudinal
$\psi$	Ángulo de guiñada y ángulo de posición de la hélice
Q	Par de arrastre
q	Velocidad angular respecto al eje lateral
$q_i$	Capacidad de carga de la batería

R	Radio de las hélices
$R^{be}$	Matriz de transformación de ejes Tierra a ejes cuerpo
$R_{\phi}^{be}$	Matriz de transformación del ángulo de alabeo de ejes Tierra a ejes cuerpo
$R_{\theta}^{be}$	Matriz de transformación del ángulo de cabeceo de ejes Tierra a ejes cuerpo
$R_{\psi}^{be}$	Matriz de transformación del ángulo de guiñada de ejes Tierra a ejes cuerpo
$R^{eb}$	Matriz de transformación de ejes cuerpo a ejes Tierra
$R_{LS}$	Factor de corrección de Superficie Sustentadora
Re	Número de Reynolds
r	Velocidad angular respecto al eje vertical
$\rho$	Densidad del fluido
$\rho_{\infty}$	Densidad del aire al nivel del mar
$S_b$	Superficie de referencia del cuadricóptero
$(S_b)_{wetted}$	Superficie de mojada del cuadricóptero
T	Tracción del rotor
$T_{\infty}$	Temperatura del aire al nivel del mar
$T_{fot}$	Período de grabación
TCM	Teoría de Cantidad de Movimiento
TEP	Teoría del Elemento Pala
$t_f$	Tiempo final
$t_i$	Tiempo inicial
$t_v$	Tiempo de inicio de la ráfaga de viento
$t/c$	Espesor relativo de los brazos del dron
$\theta$	Ángulo de cabeceo y ángulo de paso de la hélice
$\theta_g$	Ángulo de paso geométrico de la hélice
UAV	Unmanned Aerial Vehicle (Vehículo Aéreo No Tripulado)
u	Velocidad lineal en el eje longitudinal
$V_{fot}$	Velocidad de grabación
$V_r$	Velocidad de incidencia
$V_v$	Velocidad del viento
$V_z$	Velocidad normal al rotor
v	Velocidad lineal en el eje lateral
$v_b$	Tensión nominal de la batería
$v_i$	Velocidad inducida
W	Peso del cuadricóptero
w	Velocidad lineal en el eje vertical
$x^b$	Eje longitudinal en ejes cuerpo
$x^e$	Eje longitudinal en ejes Tierra
$x^p$	Eje longitudinal en ejes pala
$y^b$	Eje lateral en ejes cuerpo
$y^e$	Eje lateral en ejes Tierra
$y^p$	Eje lateral en ejes pala
$z^b$	Eje vertical en ejes cuerpo
$z^e$	Eje vertical en ejes Tierra
$z^p$	Eje vertical en ejes pala

# Índice

<b>Nomenclatura</b>	<b>4</b>
<b>1. Introducción</b>	<b>8</b>
1.1. Estado del arte . . . . .	8
1.2. Objetivos . . . . .	9
<b>2. Pliego de condiciones</b>	<b>10</b>
2.1. Normativa en el uso de drones . . . . .	10
2.2. Normativa en proyectos experimentales . . . . .	10
<b>3. Marco teórico</b>	<b>11</b>
3.1. Ecuaciones de la trayectoria . . . . .	11
3.1.1. Sistemas de referencia . . . . .	11
3.1.2. Dinámica del sistema . . . . .	12
3.1.3. Cinemática del sistema . . . . .	16
3.1.4. Sistema de ecuaciones de la trayectoria . . . . .	18
3.1.5. Perturbaciones externas . . . . .	18
3.2. Modelo de tracción de las hélices . . . . .	19
3.2.1. Sistemas de referencia . . . . .	19
3.2.2. Teoría TCM-TEP . . . . .	20
3.2.3. Tracción y par de los rotores . . . . .	22
<b>4. Análisis experimental</b>	<b>23</b>
4.1. Caracterización del cuadricóptero . . . . .	23
4.1.1. Parámetros generales . . . . .	23
4.1.2. Batería . . . . .	24
4.1.3. Motores y Hélices . . . . .	25
4.1.4. Caracterización de parámetros externos . . . . .	27
4.2. Obtención experimental de la trayectoria . . . . .	28
4.2.1. <i>Tracker</i> . . . . .	29
4.2.2. Derivadas numéricas y ajuste suave . . . . .	29
<b>5. Validación del modelo teórico</b>	<b>31</b>
5.1. Implementación en el software matemático . . . . .	31
5.1.1. Resolución del despegue vertical . . . . .	31
5.1.2. Resolución del despegue vertical con viento lateral . . . . .	32
5.2. Resultados . . . . .	33
5.2.1. Resultados del despegue vertical . . . . .	33
5.2.2. Resultados del despegue vertical con viento lateral . . . . .	38
<b>6. Conclusiones</b>	<b>42</b>
6.1. Desarrollo futuro . . . . .	42
<b>7. Presupuesto</b>	<b>44</b>
7.1. Desglose de costes . . . . .	44
7.2. Presupuesto general . . . . .	44
<b>8. Referencias</b>	<b>46</b>

<b>Anexos</b>	<b>47</b>
<b>Anexo I: <i>Scripts</i> de MatLab</b>	<b>47</b>
Anexo I.1: Resolución . . . . .	47
Anexo I.2: Gráficas . . . . .	48
<b>Anexo II: Tratamiento de errores</b>	<b>51</b>

# 1. Introducción

El desarrollo de los vehículos no tripulados (*UAV*) en las últimas décadas responde a un requerimiento de inmediatez, tecnificación y masificación al que los servicios (sanidad, mensajería, transporte, ..) están siendo sometidos socialmente. Primero en el ámbito militar y últimamente también en el civil, los *UAV* han sufrido un enorme auge en uso y popularidad dada su capacidad de realizar una gran variedad de tareas de forma económica, eficiente y rápida. Desde misiones de reconocimiento y bombardeos estratégicos, al reparto a domicilio o su uso como cámara aérea, los vehículos no tripulados han demostrado que su gran versatilidad, junto al menor tamaño y coste de mantenimiento, inferior a cualquier vehículo tripulado de sus mismas capacidades, es un atractivo que la industria no ha pasado por alto.

Dentro de los *UAV*, el cuadricóptero es el que parece destacar sobre el resto, especialmente en el ámbito comercial e industrial. La facilidad en su control, su escalabilidad y su sencillez mecánica y electrónica le han facilitado su aparición como nuevo usuario del espacio aéreo. Desde pequeños aparatos prácticamente de juguete hasta grandes drones profesionales, el uso de los cuadricópteros se ha extendido a todos los ámbitos, tanto industriales como de ocio y esta tendencia sólo parece que va incrementar en el futuro.

Por tanto, el estudio de sus actuaciones resulta crucial para optimizar las operaciones que tengan que desempeñar y en consecuencia, sean lo más eficientes posible. Y de este modo, se pueda lograr un diseño óptimo de los cuadricópteros según sea su misión objetivo. En el caso de la actuación de despegue en un cuadricóptero es necesario definir todos los parámetros relevantes que intervienen, así como, determinar la influencia que puedan tener perturbaciones externas como: despegues inclinados, despegues en movimiento o como el caso estudiado en este proyecto despegues con viento lateral.

Por último, desde el punto de vista educativo, los cuadricópteros son una gran herramienta, pues permiten aplicar y desarrollar conocimientos adquiridos en un gran ámbito de campos como la mecánica de vuelo, la aerodinámica, el estudio de aeronaves de ala rotativa y el análisis experimental, como se hace en este proyecto. Pero también en otros ámbitos que no se han incluido, por ejemplo, el control, la electrónica digital o el estudio de los motores eléctricos.

## 1.1. Estado del arte

Desde el inicio de la aviación, la investigación sobre los vehículos aéreos no ha cesado en la búsqueda de nuevas formas de aplicación y de mejora de las ya existentes. Ya a principios del siglo XX, en pleno auge de la aviación, se reportan, como parte del desarrollo militar durante la Primera Guerra Mundial, los primeros vehículos aéreos no tripulados, el *RAF Aerial Target* (1917), el *Hewitt-Sperry Automatic Airplane* (1917) y el *Kettering Bug* (1918)[1] precursores de toda la aviación no tripulada como los misiles guiados o los *UAV*. Un par de años más tarde, también se conseguiría desarrollar el primer cuadricóptero tripulado el *Oehmichen No.2* (1921)[2].

Durante gran parte del siglo XX, el desarrollo de los *UAV* se limitó prácticamente al ámbito militar, primero como objetivos de entrenamiento, y conforme su desarrollo iba progresando, también empezaron a usarse para bombardeos o en misiones de reconocimiento. Los cuadricópteros en cambio no sufrieron un gran desarrollo, puesto que los helicópteros eclipsaron todo el ámbito de las aeronaves de ala rotativa.

No es hasta principios del siglo XXI, con el auge de la electrónica digital, cuando la popularidad de los *UAV* en el ámbito civil estalla. Especialmente los cuadricópteros, pues se comprueba que son los modelos más eficientes en estos ámbitos. Este enorme desarrollo de los cuadricópteros en los últimos años, incluyendo una gran mejora en su autonomía, cámaras para seguir su trayectoria e incluso la introducción la de realidad aumentada, han hecho que determinar el comportamiento de sus actuaciones sea clave para un buen funcionamiento de estos.

Dentro de los estudios realizados en la ETSID de Valencia sobre el análisis del comportamiento de los drones destacamos que en 2019 Miguel Matínez Valero en su Trabajo de Fin de Grado *Desarrollo de un sistema automático para el seguimiento de un dron*[3], ya consiguió una primera aproximación teórica de la trayectoria de despegue de la cual partiremos en el presente proyecto.

## 1.2. Objetivos

A partir de las conclusiones obtenidas en el estudio de M. Martínez, se pretende obtener un modelo más preciso que consiga reproducir la trayectoria de despegue. Teniendo en cuenta las condiciones de vuelo en las que se desarrolla y las perturbaciones que puedan ocurrir durante el vuelo, como la existencia de viento que provoque el arrastre del dron en uno de sus ejes.

Para conseguir el objetivo principal de este proyecto, la obtención del modelo de despegue, estableceremos una serie de objetivos más focalizados y accesibles, que nos permitan, por un lado, ir obteniendo las distintas partes del modelo y por el otro, extraer los resultados experimentales que permitan su validación. Por tanto, podemos definir los puntos que constituirán las diferentes secciones del proyecto:

- Establecer las condiciones para las cuales el modelo será válido y las hipótesis que se van a utilizar en su desarrollo.
- Obtener las ecuaciones de la mecánica de vuelo que rigen su comportamiento.
- Desarrollar el modelo de tracción de las hélices.
- Caracterizar en las condiciones de estudio experimentalmente los parámetros del dron.
- Obtener la trayectoria del dron mediante un software de seguimiento óptico.
- Implementar el modelo matemático en un software de programación.
- Comparar los resultados analíticos y experimentales para comprobar la validez del modelo.
- Analizar el comportamiento del cuadricóptero en las condiciones de estudio.

Una vez logrados todos los objetivos propuestos, se podrán sacar las conclusiones del proyecto y proponer ámbitos de mejora para próximos trabajos que pretendan ampliar lo desarrollado en éste.

## **2. Pliego de condiciones**

Para el buen desempeño de un proyecto, especialmente en uno experimental es necesario el estudio de la normativa vigente en el ámbito, con el fin de poder desarrollar dicho proyecto con éxito y seguridad. Para ello, se expondrá la ley actual en referencia al uso de drones y al desarrollo de un proyecto experimental.

### **2.1. Normativa en el uso de drones**

Dado el auge de los drones en las últimas décadas ha sido necesario establecer unas normativas y regulaciones que rijan su buen uso y la garanticen la seguridad de su vuelo. Esta normativa es reciente y aún no está estandarizada en el ámbito europeo, como si lo está el resto de la aviación. Sin embargo, en España ya existe una normativa para la aeronaves pilotadas por control remoto con el Real Decreto 1036/2017. En esta normativa se recoge lo siguiente:

- Siempre se deberá mantener contacto visual con aparato de forma clara, por tanto, no se podrá volar detrás de obstáculos en condiciones baja de visibilidad, como vuelos nocturnos o en condiciones de lluvia, niebla o elevado viento.
- No se pueden realizar vuelos a alturas superiores a 120 metros, en zonas de espacio aéreo controlado o limitado, por encima de grandes aglomeraciones de personas ni en zonas áreas urbanas, a excepción esta última, para drones de menos de 250 g que vuelen por debajo de los 20 metros.
- El vuelo se ha de realizar en condiciones de seguridad y prestando atención al entorno donde se vuela.
- Cualquier daño causado por el dron, ya sea personal, legal o material, será responsabilidad del piloto del vehículo.

### **2.2. Normativa en proyectos experimentales**

La ley 14/2011 establece el marco para desarrollar ensayos y experimentos en el uso de laboratorios e instrumental de observación y medida para el ámbito científico y técnico. En ésta se establecen la condiciones de seguridad, el uso de los instrumentos, las condiciones de los ensayos y el desarrollo de éstos.

### 3. Marco teórico

Para determinar las ecuaciones que rigen el comportamiento dinámico y cinemático del cuadricóptero, se han de establecer las hipótesis mecánicas y aerodinámicas de éste, así como las del entorno de vuelo donde el modelo será válido.

Primero, se considera que el dron es un sólido rígido indeformable con tres ejes de simetría correspondientes a sus tres ejes principales ( $x^b$ ,  $y^b$  y  $z^b$ ). Su movimiento puede ser determinado por seis grados de libertad: tres de traslación ( $x^e$ ,  $y^e$  y  $z^e$ ) y tres de rotación ( $\phi$ ,  $\theta$  y  $\psi$ ) y cuatro variables controlables: la velocidad de rotación de las hélices ( $n_1$ ,  $n_2$ ,  $n_3$ , y  $n_4$ ). Para el entorno de vuelo se hace uso de la atmósfera ISA en  $z^e = 0$  para establecer las condiciones de vuelo, por tanto,  $\rho_\infty = 1,225 \text{ kg/m}^3$ ,  $p_\infty = 101300 \text{ Pa}$  y  $T_\infty = 288,15 \text{ K}$ .

En el cálculo de la tracción de las hélices, se toman las siguientes hipótesis adicionales: actúan como discos actuadores, el flujo es incompresible ( $Ma < 0,3$ ) y cuasi-estacionario y se desprecian los términos viscosos ( $Re \gg 1$ ).

Por último, para el comportamiento aerodinámico del cuerpo del cuadricóptero sólo se considera que presenta resistencia parásita por fricción y presión y que no proporciona ninguna sustentación por sí mismo, por tanto, tampoco presenta resistencia inducida. Se suponen ángulos de rotación muy pequeños ( $\phi, \theta, \psi \ll 1$ ) y, por tanto, no aparecerán términos cruzados en la resistencia aerodinámica, es decir, la matriz de coeficientes será diagonal. En cuanto a las hélices, sólo se estudiarán los efectos aerodinámicos en su plano transversal, no en cambio en su dirección normal, es decir, en la de avance.

#### 3.1. Ecuaciones de la trayectoria

El comportamiento del cuadricóptero viene determinado por las ecuaciones de la mecánica de vuelo que se desarrollarán en este punto. En estas, se estudia el comportamiento tanto dinámico como cinemático del sistema, el cual permite determinar la trayectoria de despegue de un cuadricóptero. Una vez obtenidas y explicadas también se reordenarán, con el fin de que puedan ser integradas fácilmente en un software matemático como *MatLab*. Además, también se realizará un estudio del comportamiento del dron frente a un cierto tipo de perturbaciones externas, ráfagas de viento lateral.

##### 3.1.1. Sistemas de referencia

En primer lugar, se definen los dos sistemas de coordenadas en los que se trabajará (*fig.1*). El primero, un sistema de referencia en ejes Tierra, orientación NED, ( $H^e$ ), en el cual se determina el movimiento, tanto de traslación como de rotación, del dron respecto a un observador fijo situado en la Tierra, que es el origen de dicho sistema. Las fuerzas externas que afectan al cuadricóptero, como la gravedad o las perturbaciones del entorno, también se expresarán en el sistema en ejes Tierra. El segundo, un sistema en ejes cuerpo ( $H^b$ ) situado en el centro de gravedad del dron, cuya alineación en el instante inicial coincide con el sistema  $H^e$ . Las velocidades lineales, angulares o las fuerzas externas desarrolladas por el dron, es decir, la tracción de las hélices y la resistencia aerodinámica irán asociadas a estos ejes.

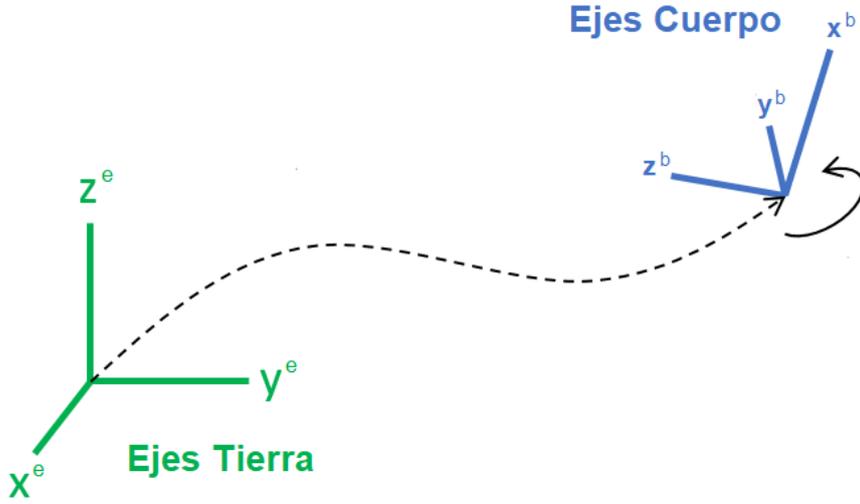


Figura 1: Sistemas de referencia definidos.

Para trabajar con las variables de ambos sistemas de referencia es necesario definir las matrices de transformación, que permitan cambiar las variables expresadas en un sistema al otro. Estas se obtendrán mediante la rotación de los ángulos Euler ( $\phi$ ,  $\theta$  y  $\psi$ ) [4], que son los que indican la rotación del sistema de referencia en ejes cuerpo ( $H^b$ ) respecto al de ejes tierra ( $H^e$ ). De tal modo, rotando los ángulos en los tres ejes se consigue la matriz de transformación  $R^{be}$  de  $H^e$  a  $H^b$ , tal y como se observa en la ecuación (1).

$$R^{be} = R_{\phi}^{be} R_{\theta}^{be} R_{\psi}^{be} \quad (1a)$$

$$R^{be} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\phi) & \sin(\phi) \\ 0 & -\sin(\phi) & \cos(\phi) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos(\theta) & 0 & -\sin(\theta) \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin(\theta) & 0 & \cos(\theta) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos(\psi) & \sin(\psi) & 0 \\ -\sin(\psi) & \cos(\psi) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (1b)$$

$$R^{be} = \begin{pmatrix} \cos(\psi) \cos(\theta) & \sin(\psi) \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \cos(\psi) \sin(\theta) \sin(\phi) - \sin(\psi) \cos(\phi) & \sin(\psi) \sin(\theta) \sin(\phi) + \cos(\psi) \cos(\phi) & \cos(\theta) \sin(\phi) \\ \cos(\psi) \sin(\theta) \cos(\phi) + \sin(\psi) \sin(\phi) & \sin(\psi) \sin(\theta) \cos(\phi) - \cos(\psi) \sin(\phi) & \cos(\theta) \cos(\phi) \end{pmatrix} \quad (1c)$$

Y a partir de esta, se puede calcular la matriz de transformación inversa ( $R^{eb}$ ), que permite el cambio opuesto, de  $H^b$  a  $H^e$ , ecuación (2).

$$R^{eb} = (R^{be})^{-1} \quad (2a)$$

$$R^{eb} = \begin{pmatrix} \cos(\psi) \cos(\theta) & \cos(\psi) \sin(\theta) \sin(\phi) - \sin(\psi) \cos(\phi) & \cos(\psi) \sin(\theta) \cos(\phi) + \sin(\psi) \sin(\phi) \\ \sin(\psi) \cos(\theta) & \sin(\psi) \sin(\theta) \sin(\phi) + \cos(\psi) \cos(\phi) & \sin(\psi) \sin(\theta) \cos(\phi) - \cos(\psi) \sin(\phi) \\ -\sin(\theta) & \cos(\theta) \sin(\phi) & \cos(\theta) \cos(\phi) \end{pmatrix} \quad (2b)$$

### 3.1.2. Dinámica del sistema

La dinámica de un sólido rígido con seis grados de libertad se describe mediante las ecuaciones de Newton-Euler [5]. Estas se expresan en ejes cuerpo, ya que facilitan su expresión, al permitir una matriz de inercia constante en el tiempo, cuyos términos

no diagonales son igual a 0 debido a la simetría del cuadricóptero. Las ecuaciones combinan la dinámica traslacional y la rotacional de un cuerpo rígido y vienen definidas según la ecuación (3):

$$\begin{pmatrix} F \\ L \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m & 0 \\ 0 & J \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ \alpha \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \omega \times mv \\ \omega \times J\omega \end{pmatrix} \quad (3)$$

donde

F es el conjunto de fuerzas externas actuando sobre el centro de masas.

L es el conjunto de momentos sobre el centro de masas.

m es la matriz de masas.

J es la matriz de inercia.

a es la aceleración lineal del cuerpo.

$\alpha$  es la aceleración angular del cuerpo.

$\omega$  es la velocidad angular del cuerpo.

A continuación, se irá desarrollando y explicando cada uno de los términos de la ecuación (3).

En las fuerzas externas que afectan al comportamiento del cuerpo se distinguen tres términos diferentes. Como se observa en la *figura 2*, éstas son: la fuerza de tracción generada por las hélices ( $\sum F_i$ ), el peso del cuadricóptero ( $W$ ) y la resistencia aerodinámica al avance del dron ( $D$ ). Sin embargo, solo la tracción de las hélices puede originar una fuerza no alineada con el centro de masas, en consecuencia, sólo éstas pueden generar un momento de rotación del cuerpo ( $\sum M_i$ ).

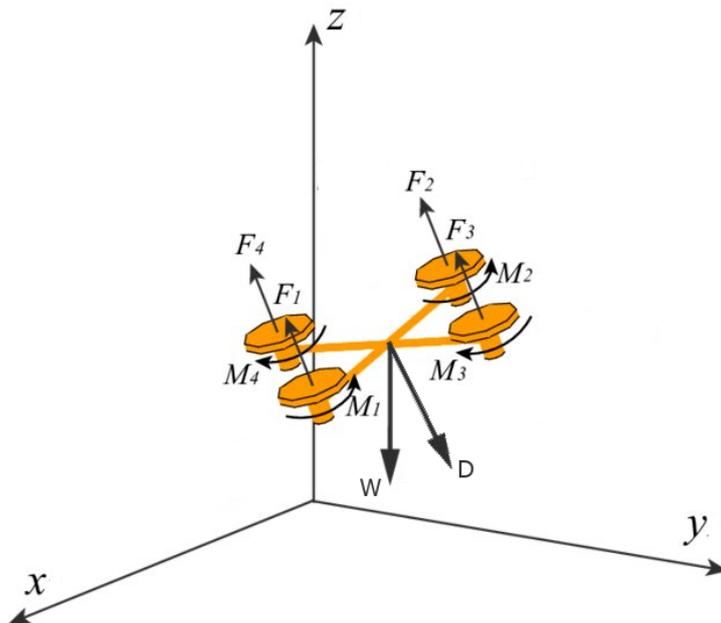


Figura 2: Fuerzas y momentos externos que actúan sobre el sistema.

La tracción de las hélices y la fuerza  $F$  se desarrollará y detallará en el apartado 3.2 y dado que se define en ejes cuerpo no es necesario rotarla, con lo que la expresión sería, ecuación (4):

$$F^b = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ F1 + F2 + F3 + F4 \end{pmatrix} \quad (4)$$

El peso del cuadricóptero es sencillo de definir en ejes Tierra, puesto que por las hipótesis tomadas es una fuerza constante igual al producto de la masa del dron y la gravedad en la superficie terrestre, ecuación (5a). Este vector, mediante la matriz de transformación, ecuación (1), se rota a ejes cuerpo para poder trabajar con él, ecuación (5b).

$$W^e = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ mg \end{pmatrix} \quad (5a)$$

$$W^b = \begin{pmatrix} -mg \sin(\theta) \\ mg \cos(\theta) \sin(\phi) \\ mg \cos(\theta) \cos(\phi) \end{pmatrix} \quad (5b)$$

Para el cálculo aerodinámico del coeficiente de resistencia lateral del dron se supone que la altura de vuelo y el Mach es prácticamente 0 ( $z = Ma \approx 0$ ), se aproximan sus brazos a alas rectas con las características de la *tabla 1*. El cálculo del coeficiente de fricción ( $CF$ ) está basado en el estudio de White-Christoph[6] para fricción superficial de capa límite turbulenta. Éste se corrige mediante un factor de corrección para una superficie sustentadora ( $R_{LS}$ ) y otro factor dependiente del espesor relativos de los brazos( $t/c$ ) y un parámetro condicionado por el Mach de vuelo y la geometría del brazo. Por último se evalúa en la superficie de referencia ( $S_b$ ) ya el que coeficiente de fricción se calcula para toda la superficie mojada ( $(S_b)_{wetted}$ ).

$L_c$ [7]	$t/c$	$R_{LS}$	$S_b$ [ $m^2$ ]	$(S_b)_{wetted}$ [ $m^2$ ]	$CF$
2	0.625	1.1026	0.0052	0.0163	0.0188

Tabla 1: Datos para el cálculo de la resistencia parásita del cuadro del dron.

Con los anteriores datos se puede obtener el coeficiente de resistencia parásita para una dirección lateral de incidencia del flujo. El cálculo del coeficiente de resistencia en la dirección normal en cambio, al igual que se hará en el cálculo de las inercias, se realiza aproximando el cuadricóptero a un disco plano. Con lo cual el coeficiente de resistencia del dron es el indicado en la *tabla 2*:

$(C_{D0})_{lateral}$ [7][8][9]	$(C_{D0})_{normal}$ [10]
0.96	1.15

Tabla 2: Coeficiente de resistencia parásita del cuadricóptero para ambas direcciones de incidencia del flujo.

Calculado el coeficiente de resistencia del dron, y según las hipótesis tomadas, se puede calcular la fuerza de resistencia aerodinámica en cada una de las direcciones, ecuación (2).

$$D^b = \frac{1}{2} \rho S_b \begin{pmatrix} (C_{D0})_{lateral} & 0 & 0 \\ 0 & (C_{D0})_{lateral} & 0 \\ 0 & 0 & (C_{D0})_{normal} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u^2 \\ v^2 \\ w^2 \end{pmatrix} \quad (6)$$

Una vez desarrolladas las fuerzas externas, se puede analizar una distribución no simétrica de la tracción de las hélices, la cual puede originar momentos de giro en cada uno de los ejes, por lo que para calcularlos será necesario la tracción de cada motor y las distancia en los ejes  $x^b$  y  $y^b$  de éstos al centro de gravedad (*fig. 2*). Los momentos de alabeo ( $L$ ) y cabeceo ( $M$ ), los que se producen respecto a los ejes del plano transversal, son sencillos de calcular puesto que, dos motores alineados ofrecen momento positivo y los otros dos alineados en su simétrica ofrecen momentos negativos, ecuaciones (7a y 7b). Estos dos momentos solo dependen de la tracción de cada rotor ( $F_i$ ) y de la longitud del brazo proyectada en cada eje ( $d_{ix}$  y  $d_{iy}$  es la distancia del brazo que une el rotor  $i$  y el centro de gravedad proyectada en el eje  $x$  e  $y$  respectivamente). En cambio, el giro respecto al eje normal del dron, es decir, la guiñada ( $N$ ), requiere establecer el momento que genera sobre el centro del gravedad en dirección transversal cada uno de los motores, ecuación (7c). Afortunadamente, el cuadricóptero es completamente simétrico y se puede establecer la relación simplemente comparando el momento de arrastre en cada motor ( $M_i$ ) y su sentido de giro, esto se desarrollará en el apartado 3.2.

$$L = F_1 d_{1y} - F_2 d_{2y} - F_3 d_{3y} + F_4 d_{4y} \quad (7a)$$

$$M = -F_1 d_{1x} + F_2 d_{2x} - F_3 d_{3x} + F_4 d_{4x} \quad (7b)$$

$$N = -M_1 - M_2 + M_3 + M_4 \quad (7c)$$

El término inercial, el primero término a la derecha de la ecuación (3), está constituido por la concatenación de las matrices de masa y inercia que se desarrollarán a continuación.

La matriz de masas  $m$  se calcula mediante la masa del cuadricóptero y la matriz identidad, ecuación (8).

$$m = mI = \begin{pmatrix} m & 0 & 0 \\ 0 & m & 0 \\ 0 & 0 & m \end{pmatrix} \quad (8)$$

El cálculo de la matriz de inercia requiere primero el cálculo de los momentos de inercia de los ejes principales. Para ello, en la ecuación (9)[11] se obtienen aproximando el cuadricóptero a un disco plano.

$$I_{zz} = \frac{1}{2} m l^2 \quad (9a)$$

$$I_{xx} = I_{yy} = \frac{1}{4} m l^2 \quad (9b)$$

Teniendo en cuenta, como se ha explicado anteriormente, que debido a la simetría del dron los productos de inercia son nulos, la expresión de la matriz de inercia se simplifica enormemente, ecuación (10).

$$J = \begin{pmatrix} I_{xx} & 0 & 0 \\ 0 & I_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & I_{zz} \end{pmatrix} \quad (10)$$

Las aceleraciones lineales y angulares ( $a$  y  $\alpha$ ) son las derivadas variables de estudio, ecuación (11), las cuales se obtendrán mediante la resolución de las ecuaciones diferenciales.

$$a = \begin{pmatrix} \dot{u} \\ \dot{v} \\ \dot{w} \end{pmatrix} \quad (11a)$$

$$\alpha = \begin{pmatrix} \dot{p} \\ \dot{q} \\ \dot{r} \end{pmatrix} \quad (11b)$$

Por último, el término restante de la ecuación es el debido al efecto Coriolis. Este fenómeno se observa cuando un cuerpo tiene un movimiento relativo respecto a un sistema de referencia en rotación. Este movimiento relativo provoca la aparición de una aceleración también relativa perpendicular al eje de rotación del sistema y a la velocidad del cuerpo (fig.3)

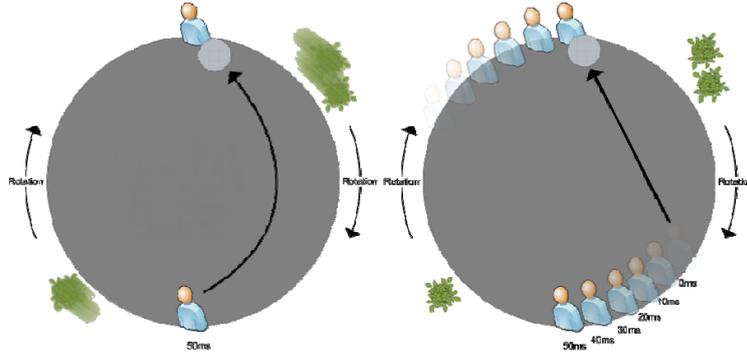


Figura 3: Efecto Coriolis en el sistema de referencia en rotación (izquierda). Movimiento respecto a un sistema de referencia fijo (derecha).

Por tanto, desarrollando los términos de la ecuación (3) que conforman el fenómeno de Coriolis ( $C$ ) obtenemos la ecuación (12).

$$C = \begin{pmatrix} m(qw - rv) \\ m(ru - pw) \\ m(pv - qu) \\ qr(I_{zz} - I_{yy}) \\ pr(I_{xx} - I_{zz}) \\ pq(I_{yy} - I_{xx}) \end{pmatrix} \quad (12)$$

### 3.1.3. Cinemática del sistema

El desarrollo de las ecuaciones de la cinemática del sistema se realiza en ejes Tierra, esto se debe a que la trayectoria que se busca estudiar es precisamente la trayectoria del cuerpo en el sistema de referencia  $H^e$ . Para ello, se obtienen los movimientos tanto rotacional como traslacional mediante la transformación de las velocidades angulares ( $\omega$ ) y lineales ( $v$ ) del cuerpo que están expresadas en el sistema  $H^b$ .

En el estudio de la rotación del cuerpo es preciso señalar que la velocidad angular de este ( $\omega$ ) no es igual a la derivada respecto al tiempo de los ángulos de Euler que indican la rotación del cuerpo respecto al sistema  $H^e$ . Esto es porque los ángulos de Euler representan la rotación consecutiva del cuerpo en cada uno de sus ejes principales, mientras que la velocidad angular es el ratio de variación angular instantáneo en cada uno de sus ejes. En consecuencia, se ha de establecer una relación geométrica que asocie la velocidad angular del dron al ratio de giro de cada ángulo de Euler en su sistema de referencia asociado,  $H^b$  para  $\phi$ ,  $H^{b'}$  para  $\theta$  y  $H^{b''}$  para  $\psi$  (fig.4).

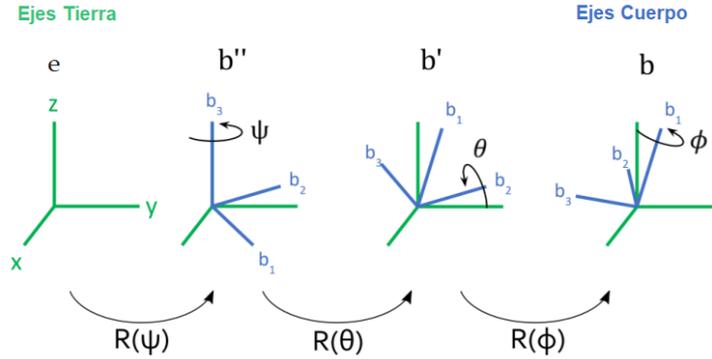


Figura 4: Rotación del sistema desde ejes Tierra a ejes cuerpo pasando por los sistemas de referencia intermedios  $H^{b''}$  y  $H^{b'}$ .

Por tanto, la rotación del cuerpo, que es la velocidad angular en el sistema en ejes cuerpo, será igual a la tasa de variación de los ángulos de Euler en cada uno de sus sistemas intermedios asociados, ecuación (13).

$$\omega = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\psi} \end{pmatrix}^{b''} + \begin{pmatrix} 0 \\ \dot{\theta} \\ 0 \end{pmatrix}^{b'} + \begin{pmatrix} \dot{\phi} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}^b \quad (13)$$

Utilizando las matrices de rotación desarrolladas en el apartado 3.1.1, se obtiene, ecuación (14):

$$\begin{pmatrix} p \\ q \\ r \end{pmatrix} = R_{\phi}^{be} R_{\theta}^{bc} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\psi} \end{pmatrix} + R_{\phi}^{be} \begin{pmatrix} 0 \\ \dot{\theta} \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \dot{\phi} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (14a)$$

$$\begin{pmatrix} p \\ q \\ r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dot{\phi} - \dot{\psi} \sin \theta \\ \dot{\theta} \cos \phi + \dot{\psi} \cos \theta \sin \phi \\ \dot{\psi} \cos \theta \cos \phi - \dot{\theta} \sin \phi \end{pmatrix} \quad (14b)$$

Para el cálculo del movimiento transaccional simplemente hay que transformar la velocidad lineal del cuerpo ( $v$ ) a ejes Tierra mediante la matriz de transformación de la ecuación (2), consiguiendo, de este modo, la velocidad lineal del cuadricóptero en ejes Tierra lo que permite resolver su trayectoria, ecuación (15), donde la  $z^e$ , dado que el sistema de referencia está en coordenadas NED, será negativa.

$$\begin{pmatrix} \dot{x}^e \\ \dot{y}^e \\ \dot{z}^e \end{pmatrix} = R^{eb} \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} \quad (15a)$$

$$\begin{pmatrix} \dot{x}^e \\ \dot{y}^e \\ \dot{z}^e \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \phi \cos \psi u + (\sin \phi \sin \theta \cos \psi - \cos \phi \sin \psi)v + (\cos \phi \sin \theta \cos \psi + \sin \phi \sin \psi)w \\ \cos \phi \cos \psi u + (\sin \phi \sin \theta \sin \psi + \cos \phi \cos \psi)v + (\cos \phi \sin \theta \sin \psi - \sin \phi \cos \psi)w \\ (-\sin \theta u + \sin \phi \cos \theta v + \cos \phi \cos \theta w) \end{pmatrix} \quad (15b)$$

### 3.1.4. Sistema de ecuaciones de la trayectoria

Una vez estudiadas todas la ecuaciones que rigen el comportamiento de un dron, hay que desarrollarlas y reordenarlas para que sean fácilmente resolubles mediante métodos numéricos, es decir, es necesario despejar todas las incógnitas a resolver ( $\dot{u}$ ,  $\dot{v}$ ,  $\dot{w}$ ,  $\dot{p}$ ,  $\dot{q}$ ,  $\dot{r}$ ,  $\dot{\phi}$ ,  $\dot{\theta}$ ,  $\dot{\psi}$ ,  $\dot{x}^e$ ,  $\dot{y}^e$  y  $\dot{z}^e$ ). Reagrupando los términos y despejando las incógnitas se llega al sistema de la ecuación (16) el cual es el objetivo a resolver.

$$\dot{u} = -g \sin \theta - \frac{\frac{1}{2}\rho S_b u^2 (C_{D0})_{lateral}}{m} + rv - qw \quad (16a)$$

$$\dot{v} = g \sin \phi \cos \theta + \frac{\frac{1}{2}\rho S_b v^2 (C_{D0})_{lateral}}{m} - ru + pw \quad (16b)$$

$$\dot{w} = \frac{-F_z + \frac{1}{2}\rho S_b w^2 (C_{D0})_{normal}}{m} + g \cos \phi \cos \theta + qu - pv \quad (16c)$$

$$\dot{p} = \frac{L + (I_{yy} - I_{zz})qr}{I_{xx}} \quad (16d)$$

$$\dot{q} = \frac{M + (I_{zz} - I_{xx})pr}{I_{yy}} \quad (16e)$$

$$\dot{r} = \frac{N + (I_{xx} - I_{yy})pq}{I_{zz}} \quad (16f)$$

$$\dot{\phi} = p + (q \sin \phi + r \cos \phi) \tan \theta \quad (16g)$$

$$\dot{\theta} = q \cos \phi - r \sin \phi \quad (16h)$$

$$\dot{\psi} = (q \sin \phi + r \cos \phi) \sec \theta \quad (16i)$$

$$\dot{x}^e = \cos \phi \cos \psi u + (\sin \phi \sin \theta \cos \psi - \cos \phi \sin \psi)v + (\cos \phi \sin \theta \cos \psi + \sin \phi \sin \psi)w \quad (16j)$$

$$\dot{y}^e = \cos \phi \cos \psi u + (\sin \phi \sin \theta \sin \psi + \cos \phi \cos \psi)v + (\cos \phi \sin \theta \sin \psi - \sin \phi \cos \psi)w \quad (16k)$$

$$\dot{z}^e = (-\sin \theta u + \sin \phi \cos \theta v + \cos \phi \cos \theta w) \quad (16l)$$

### 3.1.5. Perturbaciones externas

El entorno de vuelo no siempre es el ideal y pueden aparecer perturbaciones externas, como ráfagas de viento, que modifiquen el comportamiento de la aeronave. Por eso, para el estudio de la trayectoria de despegue de un cuadricóptero es necesario tener en cuenta la posible aparición de este tipo de perturbaciones externas y el efecto que puede tener en su movimiento.

Para estudiar el comportamiento del dron bajo una perturbación de este tipo se supondrá que existe una ráfaga de viento de velocidad  $V_v$  en la dirección  $x^e$ , ecuación (17), que provoca en el cuerpo una fuerza de arrastre en esa dirección, debido a la resistencia aerodinámica propia del dron calculada en el apartado 3.1.2.

$$V_v^e = \begin{pmatrix} V_v \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (17)$$

Esta fuerza aerodinámica, ecuación (18a), se ha de transformar a ejes cuerpo para que pueda ser incluida en las ecuaciones de Newton-Euler como fuerza externa junto al resto de fuerzas que actúan sobre el sistema. Para esto, mediante la ecuación (1) se pasa del sistema  $H^e$  a  $H^b$ , ecuación (18b), y se introducen los términos en las ecuaciones correspondientes, ecuaciones (16a, 16b y 16c), como se ve en la ecuación (18c):

$$D_v^e = 1/2\rho S_b \begin{pmatrix} V_v^2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} (C_{D0})_{lateral} \quad (18a)$$

$$D_v^b = 1/2\rho S_b \begin{pmatrix} V_v^2 \cos \psi \cos \theta \\ V_v^2 (\cos \psi \sin \theta \sin \phi - \sin \psi \cos \phi) \\ V_v^2 (\cos \psi \sin \theta \cos \phi + \sin \psi \sin \phi) \end{pmatrix} (C_{D0})_{lateral} \quad (18b)$$

$$\begin{pmatrix} \dot{u} \\ \dot{v} \\ \dot{w} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -g \sin \theta - \frac{1}{2}\rho S_b (u^2 (C_{D0})_{lateral} - V_v^2 \frac{\cos \psi \cos \theta (C_{D0})_{lateral}}{m}) + rv - qw \\ g \sin \phi \cos \theta + \frac{1}{2}\rho S_b (v^2 (C_{D0})_{lateral} + V_v^2 \frac{(\cos \psi \sin \theta \sin \phi - \sin \psi \cos \phi) (C_{D0})_{lateral}}{m}) - ru + pw \\ -F_z + \frac{1}{2}\rho S_b (w^2 (C_{D0})_{normal} - V_v^2 \frac{(\cos \psi \sin \theta \cos \phi + \sin \psi \sin \phi) (C_{D0})_{lateral}}{m}) + g \cos \phi \cos \theta + qu - pv \end{pmatrix} \quad (18c)$$

## 3.2. Modelo de tracción de las hélices

La tracción generada por las hélices de un rotor se puede obtener combinando la Teoría de Cantidad de Movimiento (*TCM*) con la Teoría del Elemento Pala (*TEP*). Gracias a esto, se puede calcular la tracción y el par generado por cada motor y por ende, calcular la fuerza y el momento total aplicados sobre el cuadricóptero explicados en el apartado 3.1.2. La teoría unificada TCM-TEP[12] permite configurar las restricciones al movimiento<sup>1</sup> que pueda tener. No obstante, el rotor de un dron es un rotor rígido simplificado, ya que solo posee ángulo de paso geométrico ( $\theta_g$ ) y el resto de movimientos están restringidos.

Los cuatro rotores del dron son idénticos en características, sin embargo, para contrarrestar el momento antipar de cada uno de los motores, el sentido de giro se implementa de forma que dos giran en sentido horario y dos en sentido antihorario. Para el modelo de tracción, el sentido de giro de las hélices no es relevante más que para el sentido del momento generado, por tanto, sólo se tendrá en cuenta esta diferencia en su cálculo.

### 3.2.1. Sistemas de referencia

En el modelado de la tracción de las hélices también se usarán dos sistemas de referencia. El sistema de referencia en ejes cuerpo asociado al dron, definido en el apartado 3.1.1 ( $H^b$ ), al cual se referirá el ángulo  $\psi$  que marca la posición de la hélice. Y un nuevo sistema asociado a las palas del rotor ( $H^p$ ) (*fig.5*) y que gira

<sup>1</sup>Un rotor puede tener tres tipos de movimiento angular sobre su eje de rotación: ángulo de batimiento ( $\beta$ ) sobre el eje  $x^p$ , ángulo de paso ( $\theta$ ) sobre el eje  $y^p$  y ángulo de arrastre ( $\chi$ ) sobre el eje  $z^p$ .

en solidaridad con éstas en el cual se calcularán todos los efectos aerodinámicos consecuencia de la rotación de las palas.

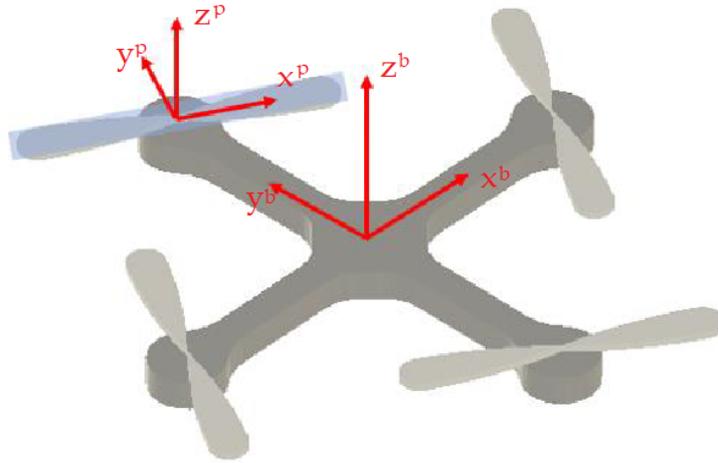


Figura 5: Sistemas de referencia definidos.

### 3.2.2. Teoría TCM-TEP

Para describir la combinación de las teoría TCM-TEP primero se definirán ambas por separado y se expondrán sus particularidades.

En primer lugar, la Teoría de Cantidad de Movimiento[12] estudia los efectos globales del rotor en el volumen de control, considerándolo un disco actuador a través del cual el flujo experimenta un salto velocidades, ya que este induce una velocidad ( $v_i$ ) y, por tanto, aplicando la conservación de la cantidad de movimiento, se produce un salto de presiones aguas abajo del rotor (*fig.6*).

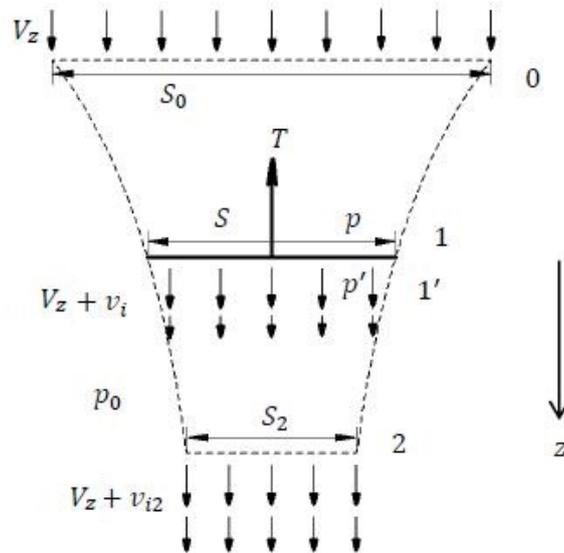


Figura 6: Diagrama del volumen de control de la Teoría de Cantidad de Movimiento.

Este salto de presiones provoca la aparición de una fuerza en sentido opuesto a

la dirección del flujo, la tracción del rotor. Esta fuerza se puede calcular utilizando la teoría de conservación de la masa, ecuación (19a), donde se calcula el flujo másico al través del rotor. La teoría de cantidad de movimiento, ecuación (19b), que a partir del incremento de velocidad inducida obtiene la tracción. Y la teoría de conservación la energía, ecuación (19c), que calcula la potencia parásita generada por el rotor. Operando con estas ecuaciones se demuestra la relación entre las diferentes velocidades del flujo en el volumen de control, ecuación (19d).

$$d\dot{m} = 2\pi r \rho (V_z + v_i) dr \quad (19a)$$

$$dT = v_{i2} d\dot{m} = 2\pi r \rho (V_z + v_i) v_{i2} dr \quad (19b)$$

$$dP_i = \frac{1}{2} d\dot{m} (V_z + v_i)^2 - \frac{1}{2} d\dot{m} V_z^2 = dT (V_z + v_i) \quad (19c)$$

$$2v_i = v_{i2} \quad (19d)$$

En segundo lugar, la Teoría del Elemento Pala[12] estudia los efectos aerodinámicos locales producidos sobre la pala: sustentación y resistencia (fig.7). Dado que la velocidad de rotación de la pala es mucho mayor que la de ascenso, se puede simplificar enormemente las ecuaciones que conforman esta teoría. Estas son una sustentación definida según la ecuación (20a) que se corresponde a la tracción, y una resistencia aerodinámica, ecuación (20b), que genera un par sobre el cuerpo. Además del par de reacción de las palas se puede calcular la potencia parásita del rotor, (ecuación (20c), donde  $V_r$  es la velocidad de incidencia del flujo en dirección normal ( $w$ ) y  $\phi$  el ángulo de incidencia de éste, ecuación (20d).

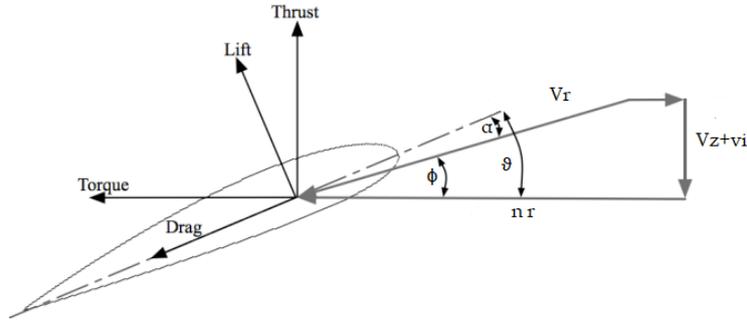


Figura 7: Diagrama de la descomposición de fuerzas de la Teoría del Elemento Pala.

$$dT = \frac{1}{2} b \rho (V_r)^2 c c_{l\alpha} (\theta_g - \phi) dr \quad (20a)$$

$$dQ = \frac{1}{2} b \rho (V_r)^2 c c_d dr + \frac{1}{2} b \rho (V_r)^2 c c_{l\alpha} (\theta_g - \phi) \phi dr \quad (20b)$$

$$dP_i = \left( \frac{1}{2} b \rho (V_r)^2 c c_d + \frac{1}{2} b \rho (V_r)^2 c c_{l\alpha} (\theta_g - \phi) \phi \right) n r dr \quad (20c)$$

$$V_r = n r; \phi = \frac{V_z + v_i}{n r} \quad (20d)$$

Una vez desarrollados ambos modelos se pueden combinar para obtener tanto la tracción genera por cada uno de los cuatro motores del dron como el par de rotación que generan sobre el centro de gravedad.

### 3.2.3. Tracción y par de los rotores

Para el cálculo de la tracción, primero se ha de obtener la velocidad inducida por el rotor igualando las tracciones de ambos métodos, ecuación (21a). Después, sustituyéndola en cualquiera de las dos ecuaciones, se obtiene la tracción de cada motor, ecuación (21b).

$$v_i = \frac{-b c c_{l\alpha} n - 8\pi V_z + \sqrt{(b c c_{l\alpha} n + 8\pi V_z)^2 - 32\pi(b c c_{l\alpha} n V_z - b c c_{l\alpha} n^2 R \theta_g)}}{16\pi} \quad (21a)$$

$$T = 2\pi R^2 \rho (V_z + v_i) v_i \quad (21b)$$

Obtenida la velocidad inducida, ecuación (21a), también se puede obtener el momento de giro de los rotores y, por tanto, el momento que provocan estos sobre el cuerpo dron. A partir de la potencia parásita desarrollada por los motores  $P_i$  y su velocidad de rotación  $n$  se obtiene el par de arrastre, ecuación (22).

$$M = \frac{P_i}{n} = \frac{1}{24} b c R^2 (3c_d n^2 R^2 - 2c_{l\alpha} (v_i + V_z) (3v_i + 3V_z - 2n R \theta_g)) \quad (22)$$

La fuerza y el momento total que afectan a la dinámica del cuadricóptero será la suma de de cada uno los motores teniendo en cuenta el sentido de aplicación. Por ello, la tracción de todos los motores tendrá la misma dirección, que será negativa en el sistema de referencia  $H^b$ . Por otro lado, el momento de los motores 1 y 3 tendrá sentido horario, en cambio, el de los motores 2 y 4 lo tendrá sentido anti-horario.

Una vez desarrollado el modelo de tracción, se puede concretar, por un lado, las variables y entradas de las que depende el modelo y por el otro, los parámetros que son necesarios obtener de las hélices. El modelo de tracción se ha comprobado que sólo depende de la velocidad vertical del dron ( $w$ ) y de la velocidad angular de los rotores ( $n$ ). En cuanto a los parámetros de las hélices se ha de determinar el número de palas ( $b$ ), el radio del rotor ( $R$ ), la cuerda media aerodinámica ( $c$ ), la pendiente del coeficiente de sustentación ( $c_{l\alpha}$ ), el coeficiente de resistencia ( $cd$ ) y la torsión geométrica ( $\theta_g$ ).

## 4. Análisis experimental

Una vez desarrollado un modelo matemático completo que permite determinar la trayectoria de despegue de un cuadricóptero, es necesario realizar un análisis experimental que permita validarlo. Para ello, por un lado, se han de caracterizar todos los parámetros relevantes del cuadricóptero<sup>II</sup>, los cuales se han detallado y explicado en el apartado 3. Por el otro, se ha de obtener la trayectoria de despegue del dron en las condiciones establecidas, estas son, despegue vertical y despegue vertical con viento lateral.

El cuadricóptero empleado para este proyecto es el *Cheerwing Syma X5SW-V3* (fig.8). Es un dron comercial muy ligero y de reducidas dimensiones, por lo que también tiene una baja autonomía, de hasta 8 minutos máximo. Opcionalmente, se le pueden agregar protecciones para las hélices y una cámara, en este proyecto solo las protecciones han sido incluidas. La emisora, la cual puede ser utilizada hasta una distancia de 50 metros del cuadricóptero, es simple pues solo está enlazada al receptor del dron y los únicos controles que permite son: el control de potencia, y los controles de alabeo, cabeceo y guiñada.



Figura 8: Dron Cheerwing Syma X5SW-V3.

### 4.1. Caracterización del cuadricóptero

En la caracterización del cuadricóptero se definirán los parámetros que, tal y como se ha visto en el apartado 3, son relevantes porque determinan su movimiento. Éstos son tanto, las características generales propias del dron en su conjunto, como parámetros específicos de las distintas partes que conforman el cuadricóptero.

#### 4.1.1. Parámetros generales

Las características generales del dron son: su masa, la distancia entre los puntos donde se aplican las fuerzas, es decir, la longitud del brazo que une el eje de rotación

---

<sup>II</sup>Dado la situación del Covid-19 y a las restricciones debidas a este, gran parte de las mediciones en laboratorio no se han podido realizar. Por tanto, para los datos que no se hayan podido medir se tomarán los datos obtenidos por M. Martínez, ya que el cuadricóptero utilizado es el mismo.

de los motores con el centro del dron, donde se encuentra su centro de gravedad y el momento de inercia en cada uno de sus ejes principales (*tabla 3*).

Masa $m$	$0,12 \pm 0,01 \text{ kg}$
Longitud de brazo $l$	$0,115 \pm 0,001 \text{ m}$
Momento de inercia en el eje $x$ $I_{xx}$	$3,968 \cdot 10^{-4} \pm 9 \cdot 10^{-5} \text{ kg m}^2$
Momento de inercia en el eje $y$ $I_{yy}$	$3,968 \cdot 10^{-4} \pm 9 \cdot 10^{-5} \text{ kg m}^2$
Momento de inercia en el eje $z$ $I_{zz}$	$7,935 \cdot 10^{-4} \pm 9 \cdot 10^{-5} \text{ kg m}^2$

Tabla 3: Datos generales del cuadricóptero *Cheerwing Syma X5SW-V3*.<sup>III</sup>

#### 4.1.2. Batería

El *Cheerwing Syma X5SW-V3* monta una única batería de polímero iones de litio (*Li-po*) de una única celda (*fig. 9*). El fabricante proporciona el valor nominal para la tensión ( $v_b = 3,7 \text{ V}$ ) y la capacidad de carga de las baterías ( $q_i = 0,5 \text{ Ah}$ ).



Figura 9: Batería Li-po.

Midiendo la tensión en bornes cuando la palanca de potencia está al mínimo se obtiene una tensión de  $2,4 \pm 0,006 \text{ V}$  en la placa controladora, con lo cual el regulador de potencia (*fig. 10*) tiene fijado el mínimo de diferencia de tensión para empezar a controlar los motores. Conforme el regulador de potencia se incrementa la tensión que establezca en los motores también aumentará, desde  $0 \pm 0,006 \text{ V}$  hasta  $0,52 \pm 0,006 \text{ V}^{\text{IV}}$ , con lo que el régimen de giro de las hélices será mayor y la tracción generada aumentará.

<sup>III</sup>Todas las mediciones de masa se han obtenido del proyecto de M. Martínez[3].

<sup>IV</sup>Mediciones realizadas en el trabajo de M. Martínez[3].



Figura 10: Emisora del *Cheerwing Syma X5SW-V3*.

Encontrar la relación de potencia entre la tensión aplicada en los bornes del motor y el régimen de giro resultante es una de las maneras de medir y controlar la entrada del sistema (Apartado 3). Sin embargo, dada la poca robustez que encontró Miguel Martínez[3] en el sistema eléctrico se utilizarán como entradas las mediciones descritas en el apartado 4.1.3.

#### 4.1.3. Motores y Hélices

El *Cheerwing Syma X5SW-V3* lleva cuatro motores idénticos *brushless* de tamaño 0820 (8 mm de diámetro y 20 mm de altura). Estos se conectan a las hélices a partir de una pareja de engranajes de relación  $n_g = 6$ , es decir, el rotor gira 6 veces más rápido que las hélices, pero también le proporciona 6 veces más de par máximo.

Como se ha visto en el apartado 4.1.2, el regulador de potencia de la emisora (*fig. 10*) puede regular la tensión de los motores, y con ello, la velocidad de giro del motores y las hélices. La variación del regulador de potencia es continua, sin embargo, se puede discretizar fácilmente siguiendo las guías que muestra la pantalla de la emisora que marca un total de 12 posiciones discretas para el regulador (*fig. 11*): una posición 0 para el estado de reposo y 11 posiciones donde sucesivamente se va incrementando la velocidad de giro del motor.

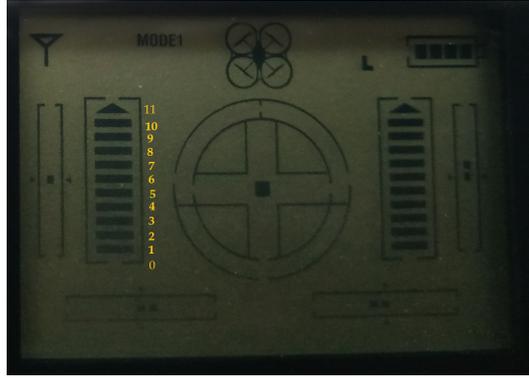


Figura 11: Discretización de las posiciones del regulador de potencia.

La estimación de la velocidad de rotación de las hélices para las 12 posiciones definidas se realiza mediante la grabación obtenida por una cámara de alta velocidad ( $V_{fot}$ ) de 1000,46 *fps*. Se halla el número de fotogramas ( $n_{fot}$ ) en los que la hélice da una vuelta completa y se calcula el periodo de giro de las hélices, ecuación (23).

$$T_{fot} = \frac{n_{fot}}{V_{fot}} \quad (23)$$

Calculando las velocidades de rotación de los rotores para cada posición, mediante métodos de estimación del flujo óptico[13] y la transformada discreta de Fourier en *MatLab*, se obtiene la *tabla 4*.

Posición	Velocidad Angular
1	$2610 \pm 110 \text{ rpm}$
2	$3530 \pm 210 \text{ rpm}$
3	$3750 \pm 230 \text{ rpm}$
4	$4000 \pm 300 \text{ rpm}$
5	$4000 \pm 300 \text{ rpm}$
6	$4140 \pm 300 \text{ rpm}$
7	$4280 \pm 300 \text{ rpm}$
8	$4440 \pm 300 \text{ rpm}$
9	$4440 \pm 300 \text{ rpm}$
10	$4530 \pm 300 \text{ rpm}$
11	$4513 \pm 300 \text{ rpm}$

Tabla 4: Mediciones de la velocidad angular de las hélices para el *Cheerwing Syma X5SW-V3*.

Obtenida la velocidad angular de las hélices, que es la entrada del sistema, también se ha de caracterizar la geometría de éstas para poder determinar la tracción y el momento que generarán como se ha descrito en el apartado 3.2. Las cuatro hélices montadas son idénticas, exceptuando su orientación (*fig. 12*). Como ya se ha visto dos de ellas giran en sentido horario y las otras dos en sentido anti-horario. En consecuencia, el sentido en el que están orientados estos dos grupos de hélices es opuesto.



Figura 12: Hélices montadas en el cuadricóptero.

Para caracterizar las hélices, primero, a falta de datos del fabricante, se aproxima el perfil de la hélice a uno estandarizado *NACA 64-206*, ya que se aproxima a las características geométricas (espesor relativo y curvatura) de las hélices montadas en el dron. Después, se miden los parámetros que determinan el tamaño de la hélice como son la cuerda media y la envergadura. Por último, se miden el resto de características relevantes: el número de palas y la torsión geométrica de éstas. Todos estos parámetros se pueden ver en la *tabla 5*.

$b$	$c$ [m]	$R$ [m]	$c_{l\alpha}$	$c_d$	$\theta_g$ [°]
2	$0,018 \pm 0,001$	$0,067 \pm 0,001$	$6,71 \pm 0,1$	$0,06 \pm 0,01$	$10 \pm 1$

Tabla 5: Datos geométricos de las hélices.

#### 4.1.4. Caracterización de parámetros externos

En la sección 3.1.5 se introdujo una ráfaga de viento en dirección lateral que perturbaba el entorno de vuelo y, por tanto, la trayectoria seguida por el dron. Es necesario caracterizar también dicha ráfaga para poder estudiar el efecto que tiene esta perturbación externa en el comportamiento del dron.

El chorro de viento está provocado por un ventilador doméstico con tres posiciones posibles para velocidades del chorro. Cada una de las posiciones del ventilador se mide con un anemómetro, obteniéndose los resultados de la *tabla 6*. Sin embargo, en el proyecto solo se estudiará la posición máxima del ventilador porque es la que tiene un efecto más notorio en la trayectoria del cuadricóptero.

Posición	Velocidad del viento
1	$1,5 \pm 0,1 \frac{m}{s}$
2	$3 \pm 0,1 \frac{m}{s}$
3	$5 \pm 0,1 \frac{m}{s}$

Tabla 6: Velocidades del viento para las tres posiciones del ventilador.

## 4.2. Obtención experimental de la trayectoria

En esta sección se expondrán todos los pasos y procedimientos necesarios para poder seguir la trayectoria de despegue del dron. Este procedimiento se han realizado tanto para las grabaciones de despegue vertical, como para las de despegue vertical con viento lateral. Se ha realizado y analizado varios vídeos para cada condición de vuelo (3 vídeos de despegue vertical y 2 vídeos de despegue vertical con viento lateral), de tal modo que se puedan seleccionar y promediar los mejores resultados obtenidos. Primero, se graba el despegue del cuadricóptero. Posteriormente, se obtiene el desplazamiento mediante el uso de un *software* análisis de vídeo. Para, por último, por medio del uso de derivadas numéricas y técnicas de ajuste suave obtener la evolución de la velocidad. La cámara usada para los experimentos es la *UI-3360CP-M-GL Rev.2*[14], que consta: de una resolución *2k* ( $2018 \times 1088$  *Píxeles*), de un tamaño de píxel de  $5,5 \mu m$  y una profundidad de color de  $12$  *bits*. Está cámara puede grabar, dependiendo de la apertura de campo, has a una velocidad de  $152$  *fps* con un tiempo de exposición que puede variar entre  $0,025$  *ms* y  $500$  *ms*.

La grabación del despegue requiere cumplir con una serie de requerimientos (*fig. 13*). Primero, el entorno de grabación tiene que ser seguro y controlable, por eso, un espacio interior lo suficientemente amplio y despejado es lo más adecuado para la realización de este experimento. Segundo, para conseguir una buena precisión se necesita grabar con la mayor tasa de fotogramas posibles, en el caso de este proyecto, y dado las restricciones a las que se ha visto sometido, se han conseguidos velocidades de grabación de entre  $77,42$  *fps* y  $137,59$  *fps* dependiendo de la apertura de campo que la grabación necesite. Tercero, es necesario una referencia conocida en el plano de grabación para que el *software* de análisis de vídeo pueda interpretar las coordenadas obtenidas en píxeles y transformarlas en coordenadas métricas (SI).

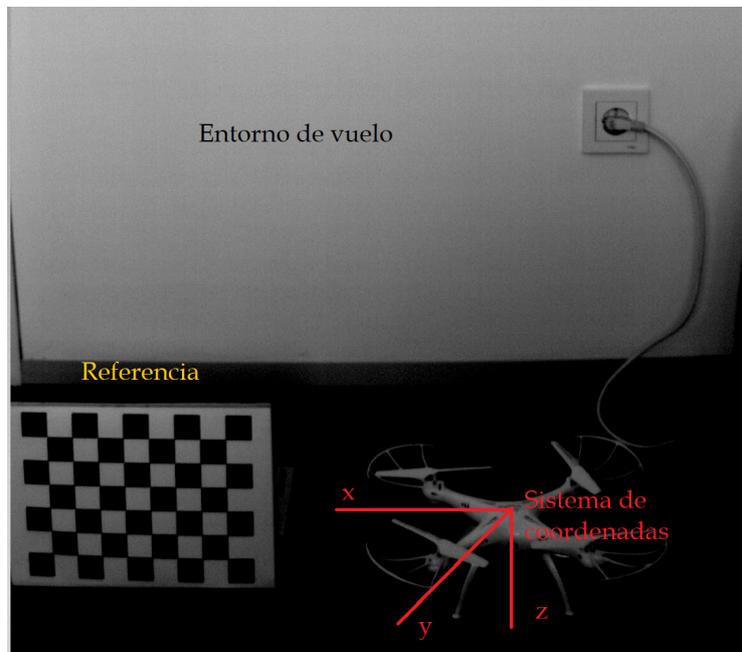


Figura 13: Entorno de grabación.

#### 4.2.1. Tracker

El tratamiento de las grabaciones se puede realizar de varias maneras. Dependiendo de las características del vídeo, de la saturación de luz y forma del objeto a seguir se pueden utilizar diferentes técnicas de análisis de vídeo, como pueda ser la umbralización o la correlación entre imágenes. Para este proyecto, la correlación entre imágenes mediante el *software Tracker* ha resultado la alternativa más viable, dada las condiciones de grabación, debido a la situación de restricciones por la pandemia (*fig. 14*). Para obtener la trayectoria en dicho *software*, se ha de establecer una distancia de referencia en el plano de grabación, ya que solo puede analizar vídeos bidimensionales. Se ha de establecer el origen del sistema de referencia. Se han de establecer los límites de seguimiento, desde el fotograma donde se quiere iniciar el seguimiento hasta el fotograma donde se quiere terminar. Y finalmente, se ha de seleccionar el sector de la imagen que el programa tiene que seguir fotograma a fotograma estableciendo una nube de puntos que determinen la trayectoria completa. Una vez procesado el vídeo, se pueden extraer las posiciones  $x$  y  $z$  obtenidas por el programa.

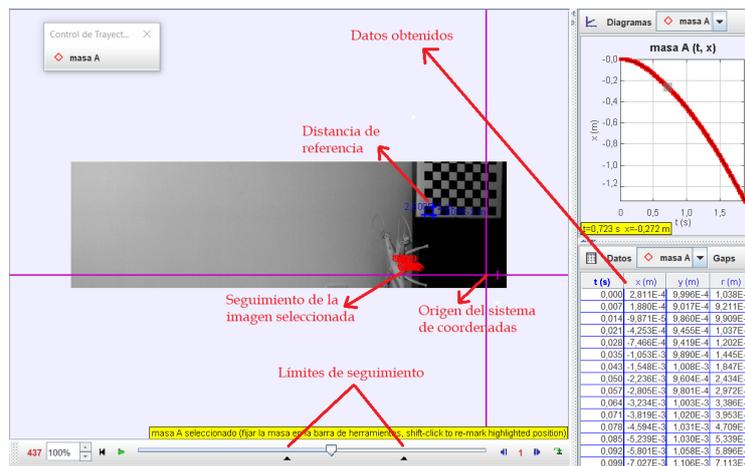
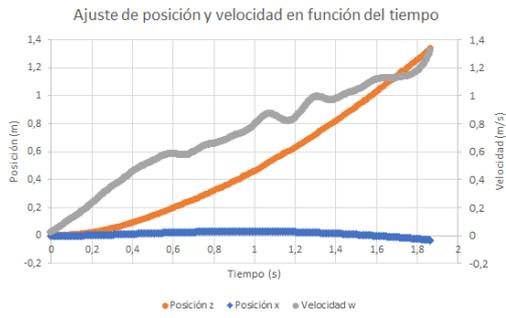


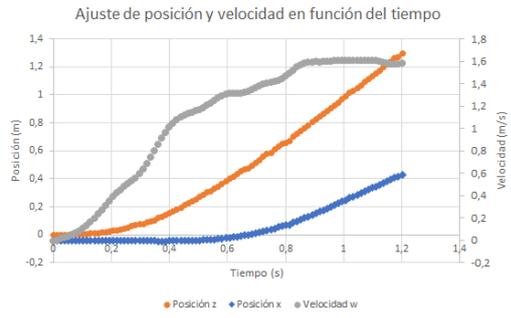
Figura 14: Análisis de la grabación en *Tracker*.

#### 4.2.2. Derivadas numéricas y ajuste suave

Por último, para la obtención de la velocidad del dron de forma experimental se necesita derivar numéricamente los datos obtenidos con *Tracker*. Es por esto, que una gran densidad de puntos (alta tasa de *fps*) y una buena precisión en la medida de la posición es crucial para obtener una curva de velocidad fiable. Estos resultados se pueden mejorar mediante técnicas de ajuste suave que obtienen las derivadas utilizando un gran número de puntos anteriores y posteriores al instante de derivación suavizando de este modo la curva[15]. Empleando este procedimiento para los datos de los dos casos estudiados se obtiene las curvas observadas en la *figura 15*.



(a) Despegue vertical.



(b) Despegue vertical con viento lateral.

Figura 15: Posición y velocidad obtenidas experimentalmente.

## 5. Validación del modelo teórico

Con el objetivo de cotejar los resultados obtenidos en los apartados 3 y 4.1, para poder validar el modelo desarrollado, es necesaria su implementación en un *software* matemático como *MatLab*. De este modo, se pueden representar los resultados y realizar un análisis de los datos obtenidos.

Para esto, primero se detallará la estructura de las funciones programadas y las condiciones de vuelo introducidas en cada caso. Para, a continuación, analizar los gráficos obtenidos y extraer las conclusiones de los resultados.

### 5.1. Implementación en el software matemático

Para la implementación en *MatLab* se programan dos bloques de *scripts*, uno donde se resuelve el sistema de ecuaciones diferenciales del apartado 3.1.4, añadiendo lo desarrollado en el apartado 3.1.5 para el caso e viento lateral, y otro donde se grafican los resultados del primer bloque y los resultados experimentales obtenidos siguiendo el procedimiento del apartado 4.2. El desarrollo completo de todos los *scripts* se incluye en el Anexo I.

Los *scripts* de resolución se dividen en dos secciones. El primero, donde se define la función que el se va a tener que resolver. En la función primero se hallan las tracciones y momentos del apartado 3.2.3, para posteriormente resolver, ahora si, el sistema de ecuaciones completo, añadiendo el término de arrastre aerodinámico en el caso con viento. El segundo consta, por un lado, de la definición de todas las constantes del sistema, de las variables de entrada y de las condiciones iniciales. Por el otro, se elige el algoritmo de resolución que se va a utilizar y se configura estableciendo el tiempo de integración y las opciones. En este proyecto se utiliza la función *ode45* que utiliza el método de Runge-Kutta de orden 4 y 5 para ecuaciones diferenciales no rígidas.

El segundo bloque de *scripts* carga, primero, en el espacio de trabajo: los datos obtenidos experimentalmente mediante *Tracker*, las derivadas numéricas de éstos y los resultados obtenidos en los programas anteriores. Después, se representan todos los parámetros relevantes como la trayectoria, las velocidades lineales y angulares o la rotación del dron. Por último, se comparan gráficamente, también, ambos resultados, es decir, se compran las trayectorias obtenidas ( $x^e - z^e$ ) y la velocidad vertical del dron ( $w^e$ ).

#### 5.1.1. Resolución del despegue vertical

Para el análisis del despegue vertical primero, se definen todos los parámetros constantes que influyen en el modelo, los cuales se han medido o calculado en los apartados 3 y 4 (*tabla 7*).

$m$ [kg]	$l$ [m]	$S_w$ [m <sup>2</sup> ]	$I_{xx}$ [kgm <sup>2</sup> ]	$I_{yy}$ [kgm <sup>2</sup> ]	$I_{zz}$ [kgm <sup>2</sup> ]	$g$ [m/s]	$\rho$ [kg/m <sup>3</sup> ]
0,12	0,115	0,0184	$3,968 \cdot 10^{-4}$	$3,968 \cdot 10^{-4}$	$7,935 \cdot 10^{-4}$	9,81	1,225
$(c_d)_{lateral}$	$(c_d)_{normal}$	$b$	$c$ [m]	$R$ [m]	$(c_{l\alpha})_h$	$(c_d)_h$	$\theta_g$ [°]
0,96	1,15	2	0,018	0,067	6,71	0,06	10

Tabla 7: Parámetros constantes del modelo.

A continuación, se introducen las entradas del sistema, es decir, las cuatro velocidades de rotación de las hélices. Para el vídeo analizado, la posición de la palanca

de potencia es la 8<sup>a</sup> y no se ejerce control en ninguna variable del sistema, por lo que observando la *tabla 4*, se obtiene una velocidad de rotación, igual para todas de las hélices de 4440 *rpm*. Sin embargo, se ha comprobado experimentalmente que esta velocidad angular aunque aproximada no es exacta, ni la misma en las cuatros hélices. En consecuencia, se ha medido la desviación del voltaje que recibe cada motor para esa posición de la palanca de potencia y, a partir de la misma, se ha obtenido velocidad de rotación de cada hélice (*tabla 8*).

$n_1$ [ <i>rpm</i> ]	$n_2$ [ <i>rpm</i> ]	$n_3$ [ <i>rpm</i> ]	$n_4$ [ <i>rpm</i> ]
4439,4	4440,6	4441,1	4439,6

Tabla 8: Velocidades angulares de los cuatro motores en el caso analizado de despegue vertical.

Las condiciones iniciales de la variables del sistema son todas nulas. A excepción de la velocidad en  $x^b$  que parece iniciar con una pequeña tendencia hacia las coordenadas positivas del eje que rápidamente la asimetría de tracción de los motores corrige y la tendencia del desplazamiento se invierte. Por tanto, se introduce una ligera velocidad inicial en dicho eje de  $u = 0,02$  *m/s* (*tabla 9*).

$u$ [ <i>m/s</i> ]	$v$ [ <i>m/s</i> ]	$w$ [ <i>m/s</i> ]	$p$ [ <i>rad/s</i> ]	$q$ [ <i>rad/s</i> ]	$r$ [ <i>rad/s</i> ]
0,02	0	0	0	0	0
$\phi$ [ <i>rad</i> ]	$\theta$ [ <i>rad</i> ]	$\psi$ [ <i>rad</i> ]	$x^e$ [ <i>m</i> ]	$y^e$ [ <i>m</i> ]	$z^e$ [ <i>m</i> ]
0	0	0	0	0	0

Tabla 9: Condiciones iniciales para el caso de despegue vertical.

Finalmente, se establece el periodo de integración del solver, el tiempo desde que el dron despega hasta que desaparece el objetivo. En el experimento analizado es desde un tiempo inicial:  $t_i = 0$  *s* hasta un tiempo final:  $t_f = 1,83$  *s*, con un paso de integración definido de 0,01 *s*.

Una vez definidos todos los valores relevantes que se han de introducir en el *script*, se ejecuta y se extraen los resultados y se representan.

### 5.1.2. Resolución del despegue vertical con viento lateral

Para el análisis del despegue vertical con viento lateral, las constantes del sistema son las mismas que para el caso anterior (*tabla 7*). Sin embargo, aparece una nueva variable, la velocidad del viento lateral, la cual se observa experimentalmente que no aparece en tiempo 0, ya que el ventilador usado no se encuentra perfectamente alienado con el origen de coordenadas vertical ( $z^e = 0$ ). Por tanto, se ajusta una función escalón con los datos de la *tabla 10*.

$V_v \leq t_v$ [ <i>m/s</i> ]	$V_v > t_v$ [ <i>m/s</i> ]	$t_v$ [ <i>s</i> ]
0	5	0,45

Tabla 10: Velocidad del viento lateral según el tiempo.

La posición de la palanca de potencia en este caso es la 10<sup>a</sup>, por lo que hay que volver a ajustar la desviación de los cuatro motores. Realizando el mismo procedi-

miento que en el caso anterior se obtiene la desviación de cada motor respecto al promedio medido y se consiguen las velocidades angulares de entrada de la *tabla 11*.

$n_1$ [rpm]	$n_2$ [rpm]	$n_3$ [rpm]	$n_4$ [rpm]
4528,4	4432,6	4531,1	4529,6

Tabla 11: Velocidades angulares de los cuatro motores en el caso analizado de despegue vertical con viento lateral.

Las condiciones iniciales en este caso si que son aparentemente todas nulas, por lo que la tabla de estas se establece como (*tabla 12*):

$u$ [m/s]	$v$ [m/s]	$w$ [m/s]	$p$ [rad/s]	$q$ [rad/s]	$r$ [rad/s]
0	0	0	0	0	0
$\phi$ [rad]	$\theta$ [rad]	$\psi$ [rad]	$x^e$ [m]	$y^e$ [m]	$z^e$ [m]
0	0	0	0	0	0

Tabla 12: Condiciones iniciales para el caso de despegue vertical con viento lateral.

El tiempo de integración para esta grabación es desde  $t_i = 0$  s  $t_f = 1,2$  s, menor que el anterior, ya que el dron se sale lateralmente del objetivo, antes de poder completar toda la trayectoria vertical.

Establecidos todos los datos se ejecuta el *script*, se guardan los datos y se representan.

## 5.2. Resultados

Una vez desarrollado un modelo matemático para el despegue de un dron (sección 3), obtenidos experimentalmente los datos de dicha actuación en un dron específico (*Cheerwing Syma X5SW-V3*), haberlo caracterizado (Apartado 4) y haber implementado todos estos resultados en un *software* matemático como es *MatLab* (Apartado 5.1); se puede finalmente analizar los resultados obtenidos y comprobar si es válido el modelo desarrollado, objetivo final de este proyecto.

En el análisis de los resultados, primero se estudiará y explicará la evolución de todas las variable relevantes del sistema ( $u, v, w, p, q, r, \phi, \theta, \psi, x^e, y^e$  y  $z^e$ ). Posteriormente, se compararán con los datos obtenidos experimentalmente y se analizará la validez de la aproximación teórica y la solidez de los datos experimentales.

### 5.2.1. Resultados del despegue vertical

Para un despegue vertical simple, con las condiciones iniciales establecidas en la sección 5.1.1, se obtiene que la evolución de fuerzas y momentos producida por los rotores es la mostrada en la *figura 16*. Los motores en un inicio, dado que el cuadricóptero no tiene velocidad vertical, tiene un gran ángulo de ataque por lo que la fuerza desarrollada por los motores es elevada, sin embargo, una vez el cuadricóptero empieza a ascender y el ángulo de ataque que ven las hélices comienza a disminuir, la tracción que desarrollan también lo hace. Esta variación en la fuerza de tracción se verá reflejada en las *figuras 17 y 18* con la evolución de la velocidad vertical  $w$  y la posición  $z^e$  las cuales iniciarán con un gran aumento que se irá reduciendo

conforme la tracción lo hace. Debido a la asimetría de la tracción que generan los motores también se produce un ligero momento de rotación en los tres ejes, que aun siendo ínfimo si que tiene un efecto considerable en la trayectoria del dron y en su inclinación.

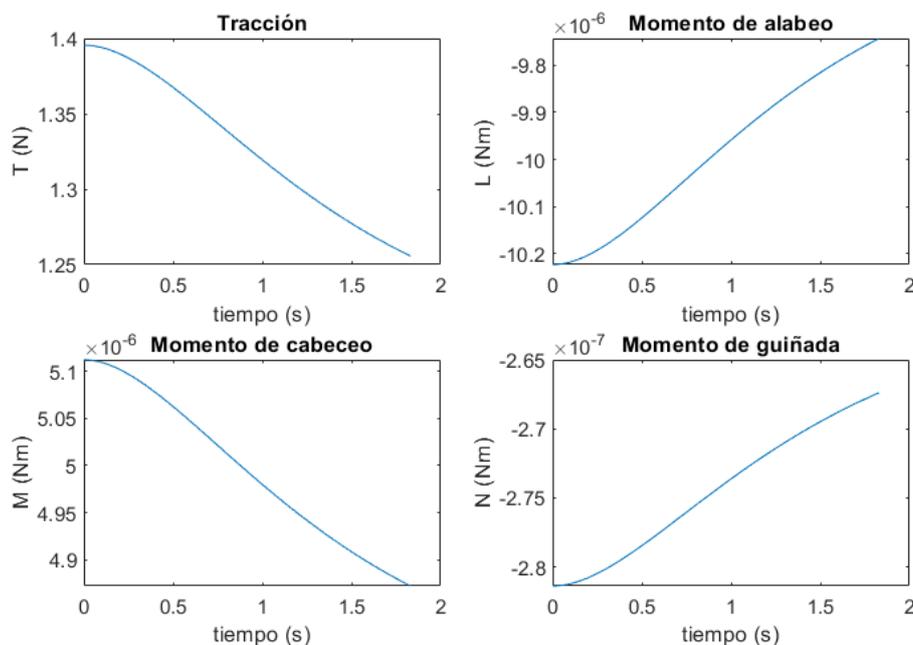


Figura 16: Evolución de la fuerzas y momentos para un despegue vertical.

La trayectoria seguida por el cuadricóptero se observa en la *figura 17*. En la evolución de la coordenada  $x^e$  se puede apreciar como la inercia inicial, que ya se ha comentado hacia las coordenadas positivas, genera un movimiento en ese sentido, que rápidamente se ve corregido y la trayectoria del dron cambia hacia el sentido contrario, dado a la asimetría de la tracción proporcionada por los motores. Prácticamente ocurre lo mismo en el eje  $y^e$ , donde el dron también tiene una ligera deriva hacia las coordenadas negativas. La trayectoria vertical del dron, correspondiente al eje  $z^e$ , es, como se pretende en la actuación de despegue, el principal eje de avance. Como se ha comentado en la *figura 16*, su pendiente tiene una gran incremento en los primeros instantes de vuelo que se va reduciendo hasta tender a una pendiente constante, conforme la fuerza de tracción de los rotores disminuye.

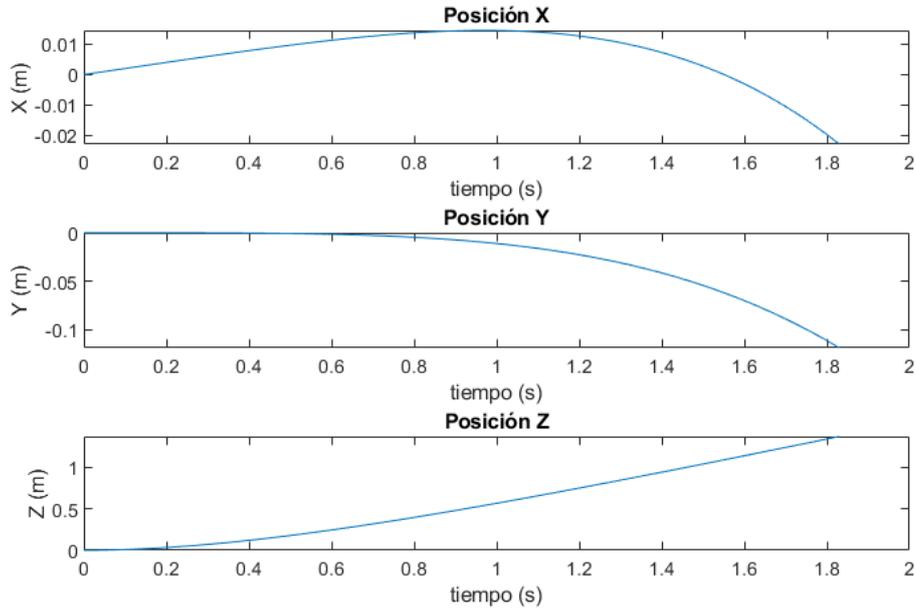


Figura 17: Trayectoria para un despegue vertical.

En la *figura 18* se puede ver la evolución en el tiempo de las velocidades lineales ( $u$ ,  $v$  y  $w$ ) y angulares ( $p$ ,  $q$  y  $r$ ), así como, la de los ángulos de Euler ( $\phi$ ,  $\theta$  y  $\psi$ ). Las dos velocidades laterales ( $u$ ,  $v$ ), aunque relativamente pequeñas respecto a la velocidad normal ( $w$ ), sí que tiene un crecimiento muy significativo, lo que indica que si no se interviene en el control del dron puede llevar a una pérdida de control sobre éste, lo que se confirma experimentalmente en el vuelo sin control. La velocidad normal, por otro lado, presenta una evolución inversa, crece rápidamente al inicio, pero gradualmente la aceleración del cuerpo va disminuyendo hasta que la velocidad tiende a una constante: la velocidad límite del cuerpo en estas condiciones, donde la fuerza de tracción de los rotores se iguala al peso de la aeronave y a su resistencia aerodinámica. Las velocidades angulares son consecuencia directa de los momentos de la *figura 16*, por lo que son, al igual que éstos, muy reducidas y tiene poca influencia en el comportamiento del cuadricóptero respecto a las velocidades lineales. Por último, los ángulos de Euler en el tiempo de vuelo muestreado son reducidos, sin embargo, sí que tienen un gran incremento en su pendiente, con lo que para tiempos de vuelo algo mayores, al igual que con la velocidad lateral, si no se ejerce un control en su dirección, provocan que el vuelo del cuadricóptero se vuelva inestable.

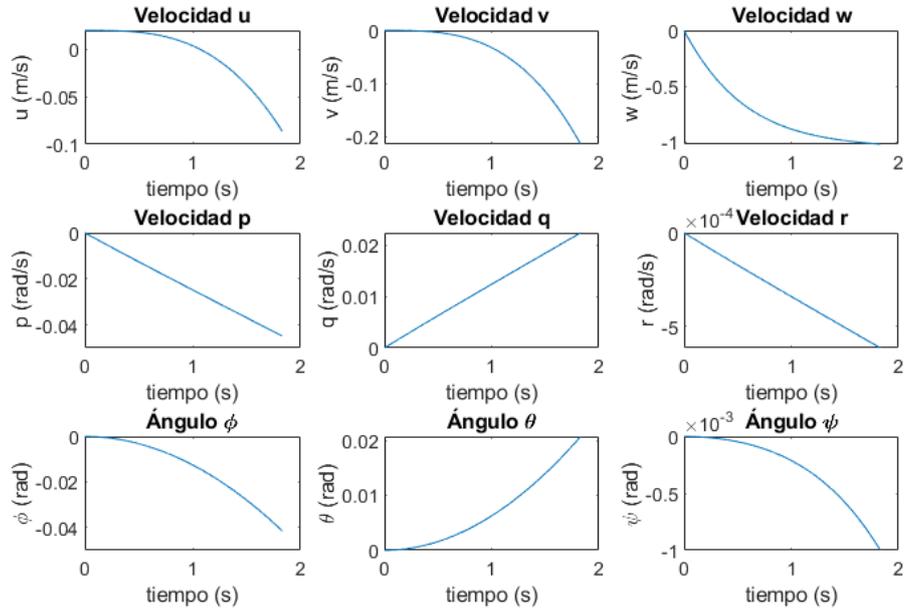


Figura 18: Evolución de las velocidades y ángulos de Euler par un despegue vertical.

Para la validación del modelo se compararan las trayectorias y velocidades verticales obtenidas. Observando la evolución, comparando la similitud de los resultados y analizando las diferencias entre ambos, se podrá determinar si el modelo es válido.

Si se observa la evolución de la posición  $z^e$  con el tiempo (*fig. 19a*), se puede apreciar como la evolución de ambas es muy similar. La principal diferencia que existe entre ambas es que el modelo analítico predice una mayor pendiente al inicio lo que provoca que diverjan ambas líneas. Sin embargo, esta tendencia es rápidamente igualada por los datos experimentales obteniendo en consecuencia dos curvas prácticamente paralelas, es decir, con el mismo ratio de aumento. Lo mismo ocurre si se compara la trayectoria  $x^e-z^e$  (*fig. 19b*). Una misma tendencia de evolución en ambas curvas que difieren ligeramente en el ratio de variación. En este caso, la trayectoria experimental inicia con una mayor tendencia hacia las  $x$  negativas, sin embargo, también realiza un cambio de sentido más pronunciado. En consecuencia, y a pesar de las leves diferencias, la trayectoria de ambas es prácticamente coincidente.

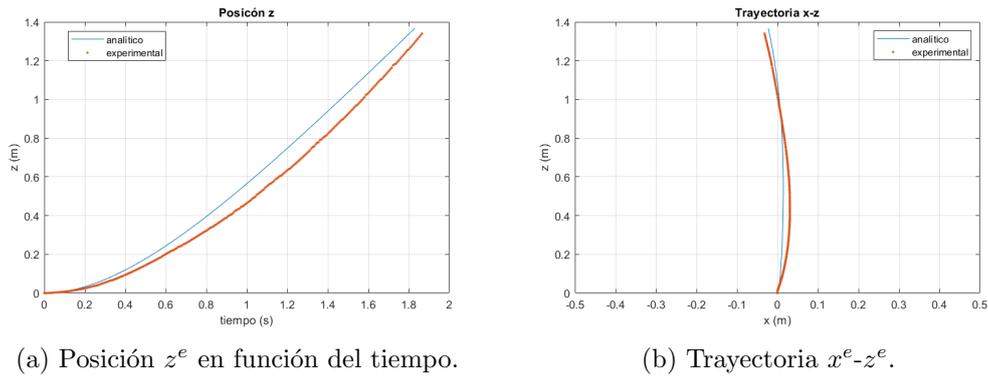


Figura 19: Comparación analítico-experimental de la trayectoria para un despegue vertical.

La velocidad, por el contrario, no presenta esta enorme similitud (*fig. 20*). La relativa baja velocidad de fotograma ( $77,42 - 137,59 \text{ fps}$ ), junto con los errores de medición de *Tracker*, apenas apreciables en la posición, si resultan muy relevantes en la línea de velocidad, que se presenta sinuosa y no suficientemente suavizada. A pesar de esto, la evolución de ambas tendencias es muy similar, tendiendo ambas a velocidades límite muy similares del orden de  $1,1 \text{ m/s}$  aproximadamente.

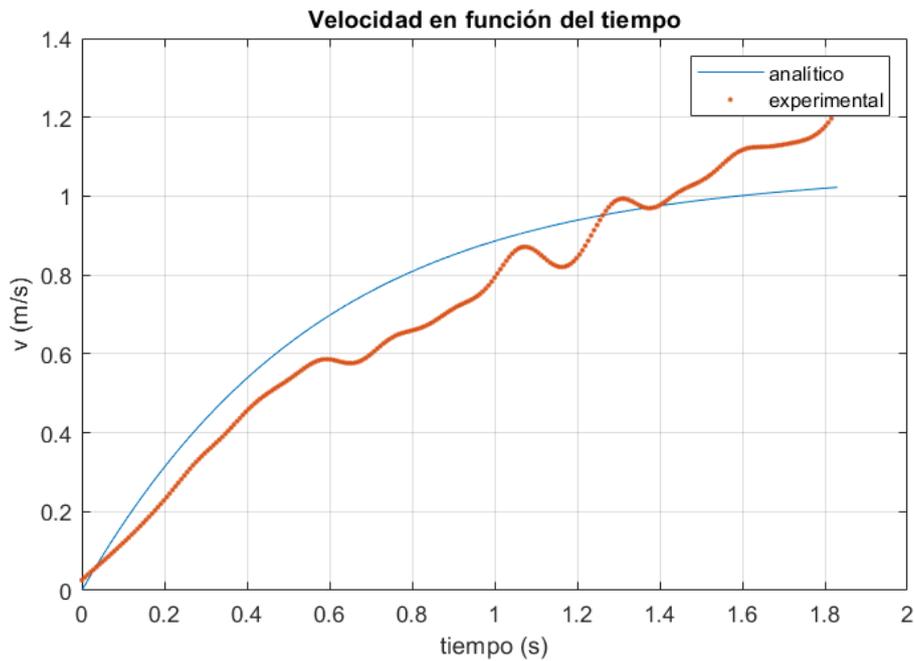


Figura 20: Comparación analítico-experimental de la velocidad  $w$  para un despegue vertical.

Con los datos obtenidos, se puede afirmar que el modelo base desarrollado es bastante preciso a la hora de reproducir la trayectoria seguida por el cuadricóptero. En la velocidad también se realiza una buena aproximación, pero debido a la inestabilidad de los datos medidos no se puede afirmar que el modelo sea tan preciso como para el cálculo de la trayectoria.

### 5.2.2. Resultados del despegue vertical con viento lateral

El desarrollo de las variable en función del tiempo para un despegue vertical con viento lateral es muy similar al caso sin viento. La principal diferencia se observará en las variables alienadas con la dirección del viento, es decir, la mayor variación en los resultados será en la velocidad  $u$  y en la posición  $x^e$ .

La evolución de la tracción y los momentos es similar al apartado 5.2.1. Por un lado, una gran fuerza de sustentación inicial que va gradualmente disminuyendo. En este caso, al ser la velocidad de rotación mayor la fuerza inicial desarrollada por los rotores también lo es. Por el otro, los tres momentos son muy reducidos, pero aun así, tienen cierta influencia en la trayectoria lateral (*fig. 21*).

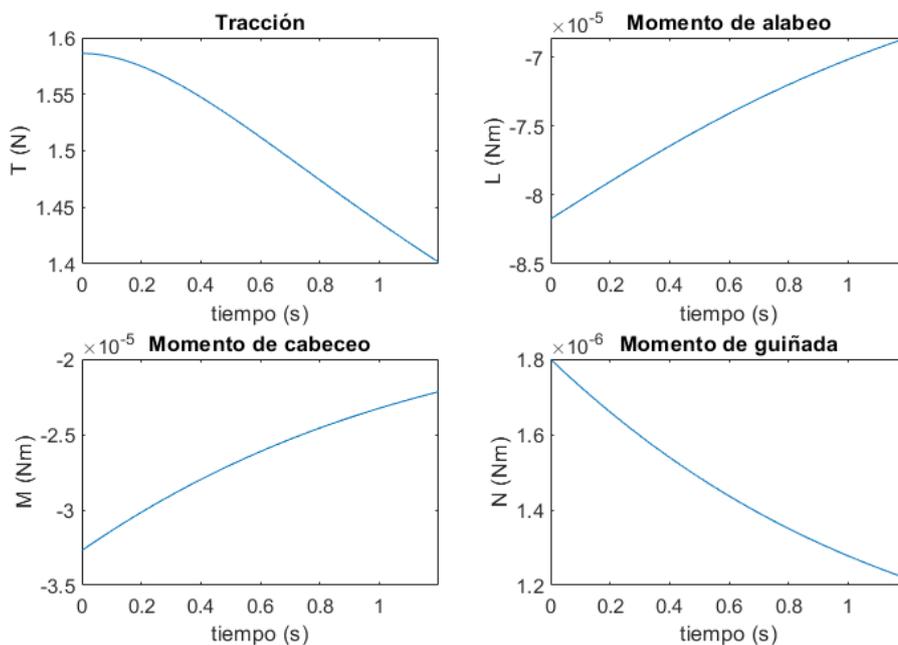


Figura 21: Evolución de la fuerzas y momentos para un despegue vertical con viento lateral.

En la trayectoria del dron se aprecian las principales diferencias entre los dos casos estudiados (*fig. 22*). Hasta el instante  $t = 0,45$  s ambas trayectorias (*fig. 17* y *22*) son similares, pero, a partir de ese instante, cuando el factor viento aparece, el arrastre que produce en el eje  $x^e$  es muy significativo. Sin embargo, dado que la dirección del viento es exclusivamente en ese eje, el movimiento en los ejes  $y^e$  y  $z^e$  no se ve muy perturbado y permanece una dirección prácticamente vertical en ese plano.

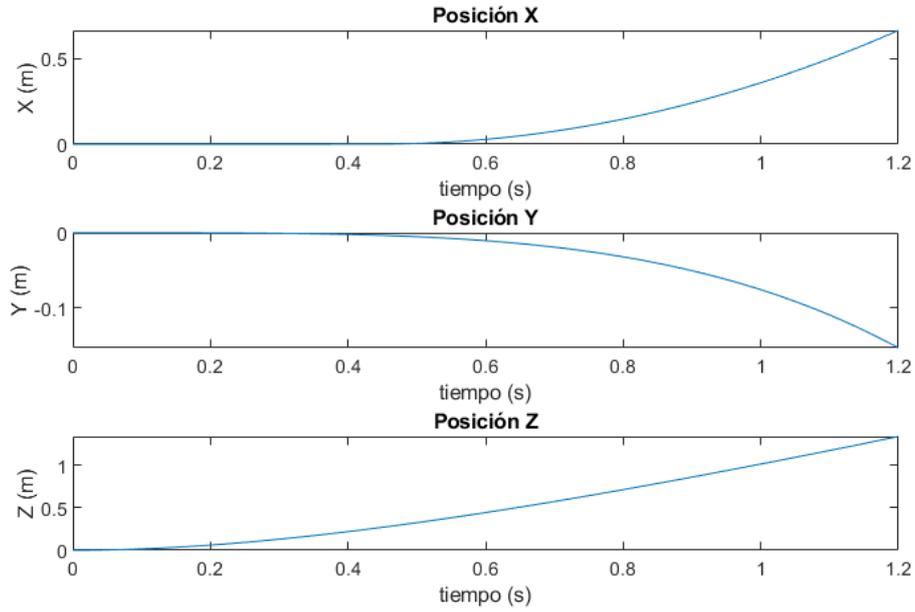


Figura 22: Trayectoria para un despegue vertical con viento lateral.

La variación de las velocidades y ángulos de Euler (*fig. 23*), siguen la misma tendencia que la trayectoria. Las velocidades angulares y los ángulos de Euler siguen siendo poco relevantes en la trayectoria del dron, al menos en el tiempo de muestreo. La velocidad vertical ( $w$ ) sigue empezando con una gran pendiente que se va reduciendo hasta alcanzar una velocidad límite. La velocidad lateral  $v$  sigue siendo pequeña inicialmente pero su pendiente sigue creciendo rápidamente. Pero, en la velocidad  $u$  se encuentra la gran diferencia entre ambos casos. Hasta el instante  $t = 0,45$  s, ésta es del orden de la velocidad  $v$ , pero a partir de ese instante, entra en la ráfaga de viento y empieza a crecer rápidamente, hasta el orden de magnitud de la velocidad  $w$ . Este gran aumento de velocidad lateral es debido al arrastre aerodinámico, provocado por la resistencia del cuerpo al flujo de aire incidente lateralmente, con velocidad  $V_v$ .

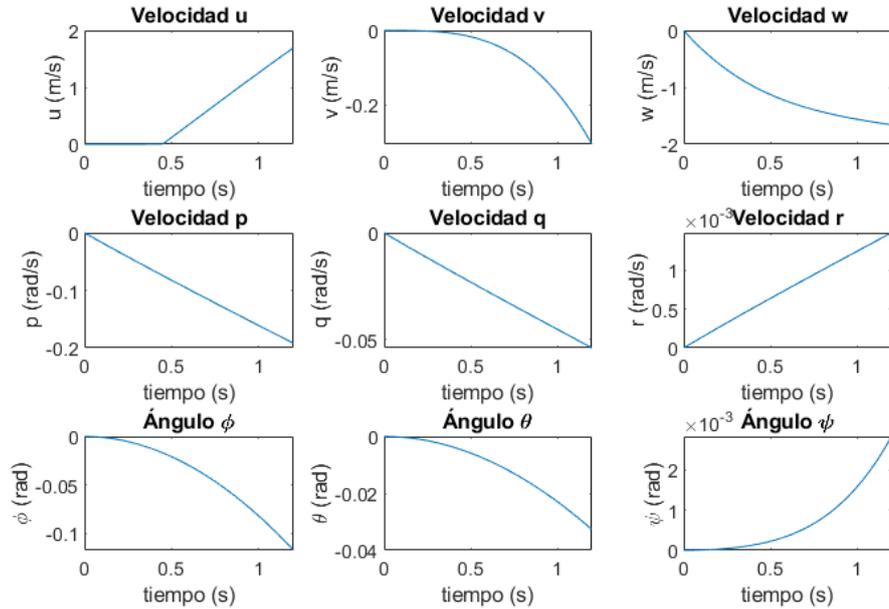
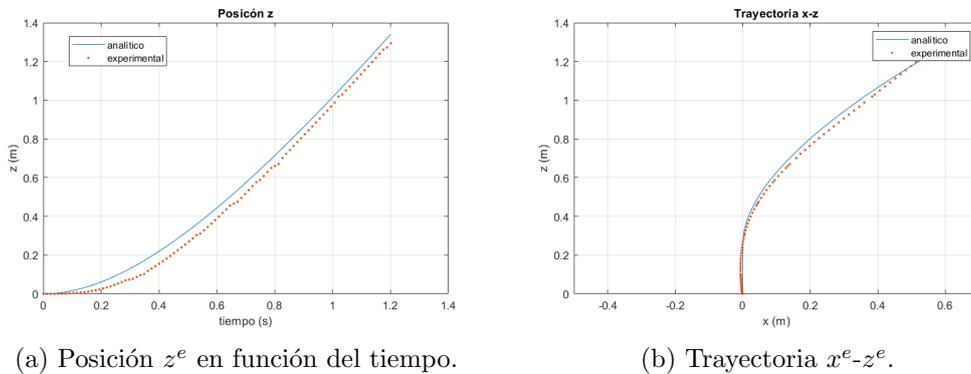


Figura 23: Evolución de las velocidades y ángulos de Euler par un despegue vertical con viento lateral.

Ya se ha comprobado en la sección 5.2.1 que el modelo base es válido para el cálculo de la trayectoria de despegue. Sin embargo, la inclusión del viento como perturbación externa hace necesario el volver a validar el modelo en estas condiciones.

La evolución de la posición en este caso también es muy precisa. La mayor pendiente inicial en el modelo analítico también aparece en este caso y la pendiente se iguala en ambas curvas (*fig. 24a*). Además, el modelo reproduce sorprendentemente bien la aparición del viento lateral, puesto que ambas curvas reaccionan a la aparición del viento de forma muy similar. En la *figura 24b* se observa como en el instante  $t = 0,45$  s ambas trayectorias cambian apreciablemente de trayectoria fruto del arrastre aerodinámico ya explicado.



(a) Posición  $z^e$  en función del tiempo.

(b) Trayectoria  $x^e-z^e$ .

Figura 24: Comparación analítico-experimental de la trayectoria para un despegue vertical con viento lateral.

En cuanto a la evolución de la velocidad, en este caso, pese a que los datos experimentales obtenidos también están muy poco suavizados, se adapta incluso

mejor que en el caso base del apartado 5.2.1. Examinando la *figura 25* se aprecia como ambas curvas siguen una misma tendencia, tendiendo ambas a una velocidad límite de aproximadamente  $1,7 - 1,8 \text{ m/s}$ .

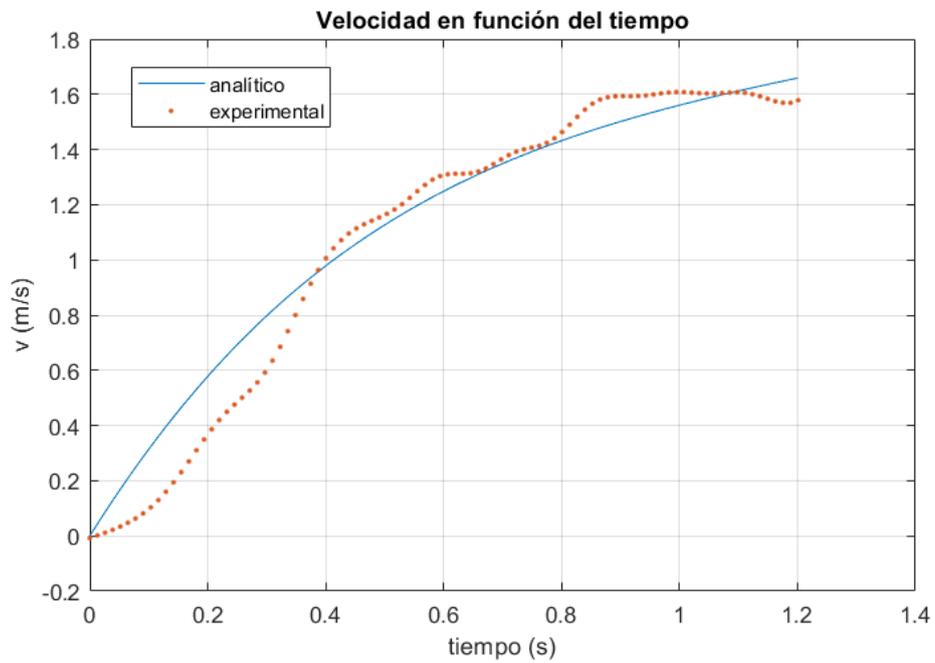


Figura 25: Comparación analítico-experimental de la velocidad  $w$  para un despegue vertical con viento lateral.

## 6. Conclusiones

En este proyecto nos habíamos propuesto como objetivo el desarrollo completo de un modelo matemático que nos permitiese calcular la trayectoria de despegue de un cuadricóptero. Además, también nos pusimos como objetivo, por un lado, el analizar el impacto que pueden tener perturbaciones externas en su comportamiento y por el otro validar experimentalmente dicho modelo. Una vez cumplidos dichos objetivos podemos extraer las conclusiones del trabajo.

Primero, podemos confirmar que el modelo desarrollado es válido y reproducible en el entorno para el cual ha sido diseñado. Las hipótesis tomadas han sido válidas y útiles a la hora de desarrollar los términos de las ecuaciones. Los sistemas de referencia establecidos han facilitado el trabajo con las ecuaciones, simplificando enormemente los términos. El uso de las ecuaciones de Newton-Euler y cinemáticas nos han permitido estudiar el movimiento completo del dron.

Segundo, el modelo de tracción desarrollado a partir de la Teoría TCM-TEP ha demostrado ser sólido y preciso a la hora de calcular la tracción y los momentos generados por las hélices.

Tercero, los datos experimentales, tanto los obtenidos en este proyecto, como los recopilados del proyecto de Miguel Martínez[3], han resultado, pese a la falta de robustez del dron, suficientemente fiables y precisos. Sin embargo, si que ha quedado patente que la fiabilidad del *Cheerwing Syma X5SW-V3* es demasiado baja como para asegurar la reproducibilidad de los experimentos, en consecuencia, se ha tenido que caracterizar las grabaciones una a una.

Cuarto, *MatLab* ha demostrado ser una herramienta muy útil a la hora, primero, de la resolución numérica de las ecuaciones, pero también, de tratar los datos y representar los resultados.

Quinto, se ha incluido satisfactoriamente términos externos en el modelo. La introducción de ráfagas de viento, que han provocado el arrastre lateral del dron, no han interferido en la fiabilidad del modelo, al contrario, sólo han reforzado su solidez.

En conclusión, podemos establecer que todos los objetivos propuestos para este proyecto se han cumplido satisfactoriamente. Se ha desarrollado un modelo sólido y fiable a partir del cual trabajar y desarrollar, no solo la actuación de despegue, sino también el resto.

### 6.1. Desarrollo futuro

En vistas a futuros proyectos y trabajos, a continuación se expondrán una serie de propuestas que permitan la mejora y el desarrollo del actual proyecto.

- Terminar de montar y configurar el dron que posee el departamento.
- Desarrollar un modelo para el período transitorio durante el inicio de rotación de las hélices.
- Comprobar la validez del modelo y las hipótesis tomadas en el resto de actuaciones: ascenso, crucero y aterrizaje.

- Realizar un mejor estudio de la aerodinámica del cuadricóptero en un túnel de viento.
- Obtener un modelo fiable que relacione la tensión en bornes de los motores con su velocidad de rotación.
- Desarrollar, a partir del modelo matemático, un sistema de control, que permita controlar el dron en cualquier situación para la cual ha sido diseñado, como en condiciones de viento.

## 7. Presupuesto

Todo proyecto, especialmente uno experimental, tiene asociado un coste. En este aparatado, se procede a analizar y estudiar el presupuesto que ha sido necesario para la realización del proyecto, incluyendo el coste de los experimentos, del software y del personal.

### 7.1. Desglose de costes

Primero, se establece el cálculo de la depreciación que han sufrido los distintos componentes utilizados. Para ello se analiza la diferencia del valor residual ( $V_R$ ) y del valor de compra ( $V_C$ ) respecto al número de años ( $n_a$ ) del componente, según la ecuación (24a), y con ello la tasa de coste horaria, ecuación (24b), asumiendo 30 horas de trabajo semanal, y por tanto, un total de 1380 *horas/año* de trabajo.

$$a = \frac{V_C - V_R}{n_a} \quad (24a)$$

$$t_h = \frac{a}{h} \quad (24b)$$

Como equipo informático se ha usado un ordenador personal MSI 2PC Apache, con  $V_C = 1200$  €,  $V_R = 300$  € y  $n_a = 6$ /años. Con estos datos, se obtiene una tasa horaria de  $t_h = 0,11$  €/hora.

En cuanto al equipo de laboratorio, el dron utilizado, el *Cheerwing Syma X5SW-V3*, se adquirió por un valor de  $V_C = 42$  €. La cámara empleada para la grabación de la trayectoria, (*UI-3360CP-M-GL Rev.2*), se estima que presenta una tasa de coste horario de  $t_h = 8,70$  €/hora. Por último, el multímetro usado para las mediciones de tensión ha sido adquirido por  $V_C = 30$  €.

Por otro lado, el software empleado también presentan una tasa de coste en función de sus horas de uso. Gran parte de los programas empleados (*TexStudio*, *Traker*, *Adobe*, *Paint...*) son de código libre o gratuitos. Sin embargo, tanto las licencias universitarias de *MatLab* y *Mathematica*, como el paquete *Office 365* si que presentan un coste anual de 500 €/año, 160 €/año y 69 €/año respectivamente. Por tanto, las tasas de coste horario del software sera,  $t_h = 0,36$  €/hora para *MatLab*,  $t_h = 0,12$  €/hora para *Mathematica* y  $t_h = 0,05$  €/hora para el paquete *Office 365*.

El lugar de trabajo ha sido en el domicilio propio y en una oficina particular. No se considera coste ninguno para las horas de trabajo en domicilio. Se estima un coste de 300 €/mes para el alquiler de la oficina, que solo se ha utilizado para la realización de los experimentos.

Por último, se calcula el coste del personal, el cual ha sido un total tres personas involucradas en el proyecto. Se considera que el estudiante universitario presenta una tasa de coste horaria nula. Pero, los dos tutores involucrados, dado que ambos son profesores doctorados, presentan un coste horario de  $t_h = 47$  €/hora

### 7.2. Presupuesto general

En consecuencia, agrupando toda la información expuesta en el apartado anterior y asumiendo un tiempo de trabajo total de 450 *horas* y un IVA del 21 %, se obtiene el presupuesto total de la tabla 13.

Concepto	Periodo [hora]	Tasa horaria [€/hora]	Importe bruto [€]	Importe [€]
Equipo y software				
Ordenador personal	450	0,08	48,91	59,18
<i>MatLab</i>	450	0,36	162	196,02
<i>Mathematica</i>	100	0,12	12	14,52
<i>Office 365</i>	450	0,04	18	21,78
Material				
Dron			42	50,82
Multímetro			30	36,30
Cámara	5	8,70	43,50	52,64
Oficina y personal				
Oficina			300	363
Personal	100	47	9400	11374
Totales				
Equipo y software			240,91	291,50
Material			115,50	169,76
Oficina y Personal			9700	11737
Total			10056,41	12168,26

Tabla 13: Presupuesto total del trabajo.

El presupuesto total del trabajo asciende a:

**DOCE MIL CIENTO SESENTA Y OCHO EUROS CON VEINTISÉIS CÉNTIMOS**

## 8. Referencias

- [1] L. E. Trejo Medina, J. M. Cabrera Peña, R. J. Aguasca Colomo, B. Galvan Gonzalez. "Technology review, standards and applications of unmanned aerial vehicle in engineering (part 1)". *DYNA*, no. 5, pp. 91, 2016.
- [2] A. Sigalos, M. Papoutsidakis, A. Chatzopoulos, D Piromalis. "Design of a flight controller and peripherals for a quadcopter". *International Journal of Engineering Applied Sciences and Technology*, vol. 4, pp. 463-470, 2019.
- [3] M. Martínez Valero, "Desarrollo de un sistema automático para el seguimiento de un dron", TFG, ETSID, UPV, Valencia, España, 2019.
- [4] D. M. Henderson, "Euler angles, quaternions, and transformation matrices for space shuttle analysis", McDonnell-Douglas Technical Services Co.,Inc. Houston, TX, United States, NASA-CR-151435, DN-1.4-8-020, 9 de junio, 1977.
- [5] B. Bongardt, F. Kirchner, "Newton-Euler equations in general coordinates" in IMA Mathematics of Robotics, Bremen, Germany, pp 8, 2015.
- [6] F. M. White, G. H. Christoph, "A simple new analysisi of compresible turbulent two-dimensional skin friction under arbitrary conditions", University of Rhode Island, Rhode Island, EEUU, Technical Report, AFFDL-TR-79-133, Febrero 1971.
- [7] R. Shevell, "Fundamentals of Flight", Prentice-Hall, 1989.
- [8] E. R. Althoff, C. R. Dauwalter, *AIAA Aerospace Design Engineers Guide*, Ned Allen, 2012.
- [9] R. D. Finck, D. E. Hoak, Air Force Flight Dynamics Laboratory (U.S.), *USAF stability and control DATCOM*, Irvine, CA: Global Engineering Documents, 1978.
- [10] NASA, Shape Effects on Drag[Online]. Available:[www.grc.nasa.gov/WWW/k-12/airplane/shaped.html](http://www.grc.nasa.gov/WWW/k-12/airplane/shaped.html).
- [11] Á. Franco (5 de Mayo de 2008), Cálculo de momentos de inercia[Online], Available: [www.sc.ehu.es/sbweb/fisica/solido/din\\_rotacion/inercia/inercia.htm](http://www.sc.ehu.es/sbweb/fisica/solido/din_rotacion/inercia/inercia.htm).
- [12] G. D. Padfield, *Helicopter Flight Dynamics, The Theory and Application of Flying Qualities and Simulation Modelling*, 2<sup>a</sup> edición, Oxford: Blackwell Publishing, 2007
- [13] Departamento de Matemática Aplicada, "Introducción al manejo de imágenes y vídeos con Matlab", UPV, Valencia, España, 2019.
- [14] IDS, "UI-3360CP-M-GL Rev.2", AB00517.
- [15] A. Page, P. Candela, F. Belmar, "On the use of local fitting techniques for the analysis of physicaldynamic systems", *Eur. J. Phys.*, vol 27, 2006.

# Anexos

## Anexo I: *Scripts* de MatLab

### Anexo I.1: Resolución

```
1 function yt= ecuacion(t,y) % funcion
2
3 yt=zeros(16,1); %creación de la matriz de salida
4
5 u=y(1);v=y(2);w=y(3);p=y(4);q=y(5);r=y(6);phi=y(7);theta=y(8);psi=y(9)
6 ;...
7 X=y(10);Y=y(11);Z=y(12);Fa(3)=y(13);La=y(14);Ma=y(15);Na=y(16); %
8 definición de las variables
9
10 for i=1:4 % calculo de la velocidad inducida, la traccion y el par
11 vi(i)=(-2*cm*clalpha*n(i)-8*pi*abs(w)+sqrt((2*cm*clalpha*n(i)+8*pi*...
12 abs(w))^2-32*pi*(2*cm*clalpha*n(i)*abs(w)-2*cm*clalpha*n(i)^2*rd
13 ...
14 *(10*pi/180)))))/(16*pi);
15 T(i)=2*pi*rd^2*rho*(abs(w)+vi(i))*vi(i);
16 Mo(i)=1/24*2*cm*rd^2*(3*0.06*n(i)^2*rd^2-2*clalpha*(vi(i)+abs(w))...
17 *(3*vi(i)+3*abs(w)-2*n(i)*rd*(10*pi/180)));
18 end
19 F=[0;0;T(1)+T(2)+T(3)+T(4)]; %definicion de la fuerza de traccion
20 W=[0;0;m*g]; %definicion del peso
21 L=T(1)*d-T(2)*d-T(3)*d+T(4)*d; %definicion del momento l
22 M=T(1)*d-T(2)*d+T(3)*d-T(4)*d; %definicion del momento m
23 N=(-Mo(1)+Mo(2)-Mo(3)+Mo(4)); %definicion del momento n
24
25 %Sistema de ecuaciones completo
26 yt(1)=-g*sin(theta)+r*v-q*w+0.5*cd*Sw*Vv^2*rho/m*cos(theta)*cos(psi)
27 ...
28 -0.5*cd2*Sw2*u^2*rho/m;
29 yt(2)=g*sin(phi)*cos(theta)-r*u+p*w+0.5*cd*Sw*Vv^2*rho/m*(cos(psi)...
30 *sin(theta)*sin(phi)-cos(phi)*sin(psi))-0.5*cd*Sw*v^2*rho/m;
31 yt(3)=1/m*(-F(3))+g*cos(phi)*cos(theta)+q*u-p*v+0.5*cd*Sw*Vv^2*rho/m
32 ...
33 *(cos(psi)*sin(theta)*cos(phi)+sin(phi)*sin(psi))+0.5*cd2*Sw2*w^2*
34 rho/m;
35 yt(4)=1/Ixx*(L+(Iyy-Izz)*q*r);
36 yt(5)=1/Iyy*(M+(Izz-Ixx)*p*r);
37 yt(6)=1/Izz*(N+(Ixx-Iyy)*p*q);
38 yt(7)=p+(q*sin(phi)+r*cos(phi))*tan(theta);
39 yt(8)=q*cos(phi)-r*sin(phi);
40 yt(9)=(q*sin(phi)+r*cos(phi))*sec(theta);
41 yt(10)=cos(theta)*cos(psi)*u+(-cos(theta)*sin(psi)+sin(phi)*sin(theta)
42 ...
43 *cos(psi))*v+(sin(phi)*sin(psi)+cos(phi)*sin(theta)*cos(psi))*w;
44 yt(11)=cos(theta)*sin(psi)*u+(cos(theta)*cos(psi)+sin(phi)*sin(theta)
45 ...
46 *sin(psi))*v+(-sin(phi)*cos(psi)+cos(phi)*sin(theta)*sin(psi))*w;
47 yt(12)=-sin(theta)*u+sin(phi)*cos(theta)*v+cos(phi)*cos(theta)*w;
48
49 %Fuerzas y moemntos
50 yt(13)=F(3)-Fa(3);
51 yt(14)=L-La;
52 yt(15)=M-Ma;
53 yt(16)=N-Na;
```

```

46
47 end

1 clear all % Limpiar variables
2 close all % Cerrar graficas
3
4 %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
5 % Datos
6 Vv=5; % velocidad del viento (0 para el caso base)
7 m=0.120; % masa
8 l=0.115; % longitud del brazo
9 d=l/sqrt(2); % longitud del brazo proyectado
10 Sw=4*0.04*1; % superficie de referencia
11 cd=0.96; % coeficiente de resistencia lateral
12 Sw2=4*0.04*1; % superficie de referencia
13 cd2=1.15; % coeficiente de resistencia normal
14 clalpha=6.71; % coeficiente de sustentacion
15 rd=0.067; % radio de la helice
16 cm=0.018; % cuerda media aerodinámica
17 g=9.81; % gravedad
18 rho=1.225; % densidad
19 Ixx=3.968*10^-4; % inercia en x
20 Iyy=3.968*10^-4; % inercia en y
21 Izz=7.935*10^-4; % inercia en z
22
23 n=[4528.4,4532.6,4531.4,4529.6]*2*pi/60; % velocidad de rotacion en
    rad/s
24 % Condiciones iniciales
25 tspan=[0:0.001:1.2]; % tiempo de integracion
26 y0=[0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,1.5861,-8.174209435892615e-05,...
27     -3.269683774356075e-05,1.799528950172319e-06]; %condiciones
    iniciales
28
29
30 %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
31 % Ecuaciones del movimiento
32
33
34
35 [t,y]=ode45(@(t,y)ecuation(t,y),tspan,y0); % Solver
36 u=y(:,1); % velocidad u
37 v=y(:,2); % velocidad v
38 w=y(:,3); % velocidad w
39 p=y(:,4); % velocidad p
40 q=y(:,5); % velocidad q
41 r=y(:,6); % velocidad r
42 phi=y(:,7); % angulo phi
43 theta=y(:,8); % angulo theta
44 psi=y(:,9); % angulo psi
45 X=y(:,10); % posicion x
46 Y=y(:,11); % posicion y
47 Z=y(:,12); % posicion z
48 T=y(:,13); % traccion
49 L=y(:,14); % momento l
50 M=y(:,15); % momento m
51 N=y(:,16); % momento n

```

## Anexo I.2: Gráficas

```

1 figure(1) % graficas de velocidad y angulos
2 subplot(3,3,1)

```

```

3 plot(t,u)
4 xlabel('tiempo (s)')
5 ylabel('u (m/s)')
6 title('Velocidad u')
7
8 subplot(3,3,2)
9 plot(t,v)
10 xlabel('tiempo (s)')
11 ylabel('v (m/s)')
12 title('Velocidad v')
13
14 subplot(3,3,3)
15 plot(t,w)
16 xlabel('tiempo (s)')
17 ylabel('w (m/s)')
18 title('Velocidad w')
19
20 subplot(3,3,4)
21 plot(t,p)
22 xlabel('tiempo (s)')
23 ylabel('p (rad/s)')
24 title('Velocidad p')
25
26 subplot(3,3,5)
27 plot(t,q)
28 xlabel('tiempo (s)')
29 ylabel('q (rad/s)')
30 title('Velocidad q')
31
32 subplot(3,3,6)
33 plot(t,r)
34 xlabel('tiempo (s)')
35 ylabel('r (rad/s)')
36 title('Velocidad r')
37
38 subplot(3,3,7)
39 plot(t,phi)
40 xlabel('tiempo (s)')
41 ylabel('\phi (rad)')
42 title('Ángulo \phi')
43
44 subplot(3,3,8)
45 plot(t,theta)
46 xlabel('tiempo (s)')
47 ylabel('\theta (rad)')
48 title('Ángulo \theta')
49
50 subplot(3,3,9)
51 plot(t,psi)
52 xlabel('tiempo (s)')
53 ylabel('\psi (rad)')
54 title('Ángulo \psi')
55
56 figure(2) % graficas de poscion
57 subplot(3,1,1)
58 plot(t,X)
59 xlabel('tiempo (s)')
60 ylabel('X (m)')
61 title('Posición X')
62
63 subplot(3,1,2)

```

```

64 plot(t,Y)
65 xlabel('tiempo (s)')
66 ylabel('Y (m)')
67 title('Posición Y')
68
69 subplot(3,1,3)
70 plot(t,Z)
71 xlabel('tiempo (s)')
72 ylabel('Z (m)')
73 title('Posición Z')
74
75 figure(3) % graficas de fuerzas y momentos
76 subplot(2,2,1)
77 plot(t,T)
78 xlabel('tiempo (s)')
79 ylabel('T (N)')
80 title('Tracción')
81
82 subplot(2,2,2)
83 plot(t,L)
84 xlabel('tiempo (s)')
85 ylabel('L (Nm)')
86 title('Momento de alabeo')
87
88 subplot(2,2,3)
89 plot(t,M)
90 xlabel('tiempo (s)')
91 ylabel('M (Nm)')
92 title('Momento de cabeceo')
93
94 subplot(2,2,4)
95 plot(t,N)
96 xlabel('tiempo (s)')
97 ylabel('N (Nm)')
98 title('Momento de guiñada')

```

```

1 figure(1) % comparacion posicion z
2 plot(ta,za,'-', 'color',[0,0.45,0.74])
3 hold on
4 plot(te,ze,'.', 'color',[0.85,0.33,0.1])
5 hold on
6 ylabel('z (m)')
7 xlabel('tiempo (s)')
8 legend('analítico','experimental')
9 grid on
10 title('Posición z')
11
12 figure(2) % comparacion velocidad
13 plot(ta,va)
14 hold on
15 plot(te,ve,'.')
16 hold on
17 xlabel('tiempo (s)')
18 ylabel('v (m/s)')
19 grid on
20 legend('analítico','experimental')
21 title('Velocidad en función del tiempo')
22
23 figure(3) % comparacion trayectoria x-z
24 plot(xa,za)
25 hold on

```

```

26 plot(xe, ze, '.')
27 hold on
28 xlabel('x (m)')
29 ylabel('z (m)')
30 grid on
31 axis([-0.5, 0.7, 0, 1.4])
32 legend('analítico', 'experimental')
33 title('Trayectoria x-z')

```

## Anexo II: Tratamiento de errores

Toda medición realizada lleva consigo una cierta incertidumbre ( $\sigma$ ), proveniente de la sensibilidad del aparato usado, de la calidad de la medición y de posibles errores humanos cometidos en la medición. Además, cuando se trabaja con variables más complejas, las cuales no se pueden medir directamente, las incertidumbres de los términos que intervienen en dicha variable se propagan.

Para este proyecto sólo se ha considerado, a la hora de analizar la incertidumbre, la sensibilidad de los aparatos utilizados y la teoría de propagación de errores. Dicha teoría establece que tratando la distribución de mediciones como una normal, el valor de la incertidumbre será el de un intervalo de confianza del 68 % respecto la media. Por tanto, para hallar la incertidumbre de variables que dependen de la combinación lineal o no lineal de otras, se ha de expandir los términos en series de Taylor según la ecuación (25).

$$\sigma^2 = \left(\frac{\partial f(a,b)}{\partial a}\right)^2 \sigma_a^2 + \left(\frac{\partial f(a,b)}{\partial b}\right)^2 \sigma_b^2 + 2 * \frac{\partial f(a,b)}{\partial a} \frac{\partial f(a,b)}{\partial b} COV_{ab} \quad (25)$$

A continuación se irá detallando una a una las mediciones e incertidumbres que han aparecido en el trabajo:

La masa y las longitudes de los brazos se obtienen directamente mediante una balanza con 1 g de incertidumbre y una regla cuyo error máximo es de 1 mm. Con ambos datos y la propagación de errores se obtienen las incertidumbres de los momentos de inercia en cada eje.

Las medidas de tensión se realizan con un multímetro de 0,1 V de sensibilidad, que realizando una serie de tres medidas para cada valor se concreta el error a, ecuación (26):

$$\sigma_{vm} = \frac{(\sigma_{vm})_{mm}}{\sqrt{3}} \quad (26)$$

La incertidumbre de la velocidad de rotación de las hélices depende de la velocidad de grabación ( $V_{fot}$ ) y del período de grabación ( $t_{fot}$ ). De manera que la incertidumbre del período de grabación viene determinado por la ecuación (27a). Y, por tanto, la incertidumbre en la velocidad angular es la expresada en la ecuación (27b).

$$\sigma_{t_{fot}} = \frac{1}{V_{fot}} \quad (27a)$$

$$\sigma_n = \frac{60}{t_{fot}} \sigma_{t_{fot}} \quad (27b)$$

Las incertidumbres en las características aerodinámicas de las hélices, se toman directamente de la sensibilidad de los elementos utilizados. La cuerda y el radio

mediante una regla de precisión 1 *mm*. Los coeficientes aerodinámicos, en cambio, se han obtenido de gráficas cuya precisión es la indicada: 0,1 para el coeficiente de sustentación y 0,01 para el de resistencia.

Por último, para hallar la velocidad del viento se a hecho uso de un anemómetro, que pese a tener una sensibilidad de 0,01 *m/s*, las mediciones para cada posición del ventilador varían hasta 0,1 *m/s*, por tanto, la calidad de la medición en este caso, prima sobre la sensibilidad del aparato.