

Tiempos de respuesta a estímulos visuales:

*Vinculando el comportamiento
individual y colectivo a través de las
leyes de la Física*



Universitat Politècnica de València

TESIS DOCTORAL

Moisés Hernaiz Guijarro

Directores:

Juan Carlos Castro Palacio

Pedro José Fernández de Córdoba Castellá

Esperanza Navarro Pardo

Enero de 2021

Dedicatoria

A mis padres, a mi esposa, a mi hijo y a mi hija, por acompañarme en mi vida personal y profesional.

Y a mi sobrina Bea, allá donde esté.

Agradecimientos

A los directores de esta tesis, Juan Carlos Castro Palacio, Pedro Fernández de Córdoba Castellá y Esperanza Navarro Pardo, por el esfuerzo y atención dedicada en este trabajo.

A Maica Romany, directora del CEIP La Patacona (Alboraya) en los momentos de realización de los experimentos al alumnado.

A las madres y los padres de dicho alumnado.

INDICE GENERAL

| Contenidos | Página |
|--|--------|
| Resumen | 1 |
| Publicaciones relacionadas con la tesis | 4 |
| Listado de figuras | 5 |
| Listado de tablas | 6 |
| Glosario | 7 |
| Introducción | 8 |
| Capítulo 1. Trastorno por Déficit de Atención e Hiperactividad (TDAH) | 13 |
| 1.1. ¿Qué es el TDAH? | 13 |
| 1.2. Origen y causas que lo provocan. | 14 |
| 1.3. Evaluación, síntomas y diagnóstico. | 14 |
| 1.4. Diferencias de género en el TDAH. | 17 |
| 1.5. Tratamientos del TDAH. | 18 |
| Capítulo 2. Métodos y metodologías | 19 |
| 2.1. Características de la muestra. | 19 |
| 2.2. Descripción de los experimentos informatizados con el software DMDX. | 21 |
| 2.3. Organización de los datos para el análisis. | 22 |
| 2.4. Representación ex-Gaussiana de los datos. Momentos de la distribución. | 23 |
| 2.5. Transformada rápida de Fourier para el análisis de tiempos de respuesta. | 25 |
| 2.6. Entropía de Shannon. Entropía espectral. | 26 |
| 2.7. Modelado de los errores. Analogía con el análisis de fallos en maquinarias. | 27 |
| Capítulo 3. Metodología para la clasificación. | 29 |
| 3.1. Funciones de probabilidad de los tiempos de respuesta. | 29 |
| 3.2. Metodología de clasificación basada en la estadística descriptiva y los parámetros ajustados de la ex-Gaussiana. | 31 |
| 3.3. Criterio basado en el vector de los parámetros de la función ex-Gaussiana. | 36 |
| Capítulo 4. Correlaciones y modelo de la colectividad. | 40 |
| 4.1. Análisis de Fourier de los tiempos de reacción. | 40 |
| 4.2. Análisis espectral basado en la entropía de Shannon. | 43 |
| 4.3. Emergencia de la distribución de Maxwell-Boltzmann (MB) de los datos de tiempos de reacción. Modelo de la colectividad. | 47 |
| Conclusiones | 54 |
| Continuidad de los trabajos | 57 |
| Bibliografía | 58 |
| Anexos | |
| A. Parámetros derivados del ajuste de las funciones de distribución de tiempos de respuesta con la función ex-Gaussiana. | 64 |
| B. Parámetros del modelo de la colectividad basado en la función de MB. | 68 |

Resumen

En la presente tesis se construyen modelos matemáticos para el análisis de tiempos de respuesta (TR) a estímulos visuales en experimentos informatizados. Es conocido que existe una correlación estrecha entre los tiempos de reacción y diversos trastornos cognitivos, tales como el Trastorno por Déficit de Atención e Hiperactividad (TDAH). Sin embargo, no existe consenso en la explicación de estas correlaciones. Una primera aportación, más práctica, de este trabajo, es el desarrollo de una metodología para la clasificación de un grupo coetáneo de niños en edad escolar. La función ex-Gaussiana, originada por la convolución entre una Gaussiana y una exponencial decreciente, se utiliza para representar las funciones de distribución empíricas de tiempos de respuesta. La metodología de clasificación propuesta utiliza las distribuciones de los parámetros de la ex-Gaussiana μ , σ y τ en una muestra de 168 niños, así como la distribución de la moda, obtenida de las distribuciones empíricas de los TR. También utiliza diferentes definiciones de norma del vector de componentes (μ, σ, τ) también analizado en la muestra. Entre los criterios utilizados para detectar los niños más alejados de un comportamiento normativo y, por tanto, con mayor probabilidad de tener algún trastorno cognitivo, se encuentra, por ejemplo, el porcentaje medio de prevalencia mundial de TDAH (7 %) y el hecho de que los niños con alteraciones cognitivas presentan respuestas más lentas o más rápidas pero con un mayor número de errores.

En una segunda parte de la tesis, con un marcado aporte teórico, se analizan las correlaciones existentes entre los tiempos de respuesta de los participantes. Se ha aplicado una metodología propia basada en la transformada rápida de Fourier de las series temporales de las respuestas de los niños a lo largo de estímulos consecutivos y un análisis de correlaciones basado en la Entropía de Shannon espectral (por frecuencia). Los resultados obtenidos son muy novedosos, ya que se evidencia una correlación elevada entre las respuestas de los niños, aun cuando han hecho los experimentos de manera totalmente independiente. A partir de la evidencia empírica de la existencia de correlaciones entre las series temporales de las respuestas de los niños, lo que apunta hacia la existencia de una colectividad, se propone un modelo inspirado en la Física para entender y explicar las correlaciones. Específicamente, se demuestra la existencia de un paralelismo entre las partículas independientes de un gas ideal y los cerebros de los niños, que serían, en última instancia, los que generan las respuestas observables. La distribución de Maxwell-Boltzmann, conocida en Física por describir la distribución de velocidades de un Gas Ideal en equilibrio termodinámico, emerge del análisis de los tiempos de respuesta, en términos de los momentos de las funciones ex-Gaussianas que los representan. La posibilidad de contar con una función de distribución de probabilidades, que describa el comportamiento natural de una colectividad, ofrece muchas posibilidades de aplicación en diferentes áreas. Una de ellas es la posibilidad de clasificar a los individuos con respecto al grupo natural al que pertenecen. Las implicaciones de las aportaciones conceptuales de esta tesis se discuten al final, donde se comenta la continuidad de este trabajo.

Summary

Mathematical models are built to analyse response time data to visual stimuli in computerized experiments. The actual correlation between reaction times and cognitive disorders, such as Attention Deficit Hyperactivity (ADHD) disorder, is well known in the literature. However, there is no clear consensus about how to explain this correlation. A first practical contribution of this work is a classification methodology of a coetaneous group of school-aged children. The ex-Gaussian function, originated by the convolution of a Gaussian and an exponential decay functions is used to represent the experimental probability distributions of reaction times. The classification methodology proposed in this work utilizes the probability distributions of the ex-Gaussian parameters μ , σ and τ across a sample of 168 children, as well as the mode of the empirical probability distributions of the reaction times. Also, some definitions of the norm of the vector with components (μ, σ, τ) are used. The detection of those children who lie furthest from the normative behaviour, and then, are more likely to suffer a cognitive disorder is performed by including the following criteria: the world prevalence percentage of ADHD (7 %) and the fact that children with this disorder show slower and faster responses. In the case of the fast responses, they should be given along with a higher rate of mistakes.

In a second part of this work more conceptual contributions are provided. The evidenced correlations between the children's responses along consecutive visual stimuli are analysed by using the fast Fourier transform and the Shannon's Entropy in spectral form (per frequency). The outcome is surprising as correlations among the children are manifested, even when they carry out the experiments independently. This fact strongly suggests the existence of a collective of children. In order to gain insights into this finding, a Physics-inspired model is proposed. Specifically, the results indicate the existence of a parallelism between the independent particles forming an Ideal Gas and the group of individuals. Then, the Maxwell-Boltzmann distribution of the velocities of the particles of an Ideal Gas, emerges here when the moments of the ex-Gaussian distributions are considered across the sample. This opens many possibilities of applications in different fields as a natural distribution of the response times of the collective is available. For instance, the behaviour of an individual in relation to the natural group it belongs to can be known. The potential applications and impact of these developments are included at the end of this work where the continuity of this work is commented.

Resum

En la present tesi es construeixen models matemàtics per a l'anàlisi de temps de resposta (TR) a estímuls visuals en experiments informatitzats. És conegut que existeix una correlació estreta entre els temps de reacció i diversos trastorns cognitius, com ara el Trastorn per Dèficit d'Atenció i Hiperactivitat (TDAH). No obstant això, no existeix consens en l'explicació d'aquestes correlacions. Una primera aportació, més pràctica, d'aquest treball, és el desenvolupament d'una metodologia per a la classificació d'un grup coetani de xiquets en edat escolar. La funció ex-Gaussiana, originada per la convolució entre una Gaussiana i una exponencial decreixent, s'utilitza per a representar les funcions de distribució empíriques de temps de resposta. La metodologia de classificació proposada utilitza les distribucions dels paràmetres de la ex-Gaussiana μ , σ i τ en una mostra de 168 xiquets, així com la distribució de la moda, obtinguda de les distribucions empíriques dels TR. També utilitza diferents definicions de norma del vector de components (μ, σ, τ) , també analitzat en la mostra. Entre els criteris utilitzats per a detectar els xiquets més allunyats d'un comportament normatiu i, per tant, amb major probabilitat de tenir algun trastorn cognitiu, es troba, per exemple, el percentatge mitjà de prevalença mundial de TDAH (7%) i el fet que els xiquets amb alteracions cognitives presenten respostes més lentes o més ràpides però amb un major nombre d'errors.

En una segona part de la tesi, amb una marcada aportació teòrica, s'analitzen les correlacions existents entre els temps de resposta dels participants. S'ha aplicat una metodologia pròpia basada en la transformada ràpida de Fourier de les sèries temporals de les respostes dels xiquets al llarg d'estímuls consecutius i una anàlisi de correlacions basat en l'Entropia de Shannon espectral (per freqüència). Els resultats obtinguts són molt nous, ja que, s'evidencia una correlació elevada entre les respostes dels xiquets, tot i que han fet els experiments de manera totalment independent. A partir de l'evidència empírica de l'existència de correlacions entre les sèries temporals de les respostes dels xiquets, la qual cosa apunta cap a l'existència d'una col·lectivitat, es proposa un model inspirat en la Física per a entendre i explicar les correlacions. Específicament, es demostra l'existència d'un paral·lelisme entre les partícules independents d'un gas ideal i els cervells dels xiquets, que serien, en última instància, els que generen les respostes observables. La distribució de Maxwell-Boltzmann, coneguda de la Física per descriure la distribució de velocitats d'un Gas Ideal en equilibri termodinàmic, emergeix de l'anàlisi dels temps de resposta, en termes dels moments de les funcions ex-Gaussianes que els representen. La possibilitat de comptar amb una funció de distribució de probabilitats, que descriu el comportament natural d'una col·lectivitat, ofereix moltes possibilitats d'aplicació en diferents àrees. Una d'elles és la possibilitat de classificar als individus respecte al grup natural al qual pertanyen. Les implicacions de les aportacions conceptuals d'aquesta tesi es discuteixen al final, on es comenta la continuïtat d'aquest treball.

Publicaciones relacionadas con la tesis

Artículo 1

A Probabilistic Classification Procedure Based on Response Time Analysis Towards a Quick Pre-Diagnosis of Student's Attention Deficit. M. Hernaiz-Guijarro, J. C. Castro-Palacio, E. Navarro-Pardo, J.M. Isidro y P. Fernández-de-Córdoba, *Mathematics* 5 (7) (2019) 473.

Mathematics es una revista con índice de impacto de 1.747, que ocupa la posición 28 de 324 revistas en la categoría MATHEMATICS de Web of Science (Journal Citation Reports, 2019). Se trata, por tanto, de una revista del primer cuartil (Q1). Así mismo, se encuentra en el primer decil (D1).

Artículo 2

Machinery Failure Approach and Spectral Analysis to Study the Reaction Time Dynamics over Consecutive Visual Stimuli: An Entropy-Based Model. M.E. Iglesias-Martínez, M. Hernaiz-Guijarro, J. C. Castro-Palacio, P. Fernández-de-Córdoba, J. M. Isidro y E. Navarro-Pardo, *Mathematics* 8 (11) (2020) 1979.

Mathematics es una revista con índice de impacto de 1.747, que ocupa la posición 28 de 324 revistas en la categoría MATHEMATICS de Web of Science (Journal Citation Reports, 2019). Se trata, por tanto, de una revista del primer cuartil (Q1). Así mismo, se encuentra en el primer decil (D1).

Listado de figuras

| | Página |
|---|--------|
| Figura 1.1. El TDAH, sus tipos y prevalencia. | 16 |
| Figura 2.1. Distribución de las edades de los niños en la muestra y un fragmento del archivo de salida *.azk del programa DMDX. | 20 |
| Figura 2.2. Un ejemplo visual de la tarea de la red atencional (ANT) desarrollada en este trabajo. | 22 |
| Figura 3.1. Comparación entre los resultados de los experimentos de tiempos de respuesta a estímulos visuales entre los 5 ordenadores portátiles utilizados. | 30 |
| Figura 3.2. Distribuciones de probabilidad de los tiempos de respuesta obtenidas de los experimentos para cada niño. | 31 |
| Figura 3.3. Distribución de probabilidad de las modas y del parámetro μ de las funciones ex-Gaussianas ajustadas a los datos. | 34 |
| Figura 3.4. Distribución de probabilidad de los parámetros σ y τ de las funciones ex-Gaussianas ajustadas a los datos. | 35 |
| Figura 3.5. Distribuciones de probabilidad de los candidatos que resultan de la distribución de probabilidad de la moda y de la distribución del parámetro μ . | 36 |
| Figura 3.6. Distribuciones de probabilidad de los candidatos que resultan de la distribución del parámetro σ y de la distribución del parámetro τ . | 38 |
| Figura 3.7. Normas Euclídea y del máximo, aplicadas al vector de los parámetros de la ex-Gaussiana. | 39 |
| Figura 4.1. Tiempo de reacción medio a lo largo de la muestra de 190 participantes en función del número de orden de presentación de los estímulos. | 41 |
| Figura 4.2. Transformada rápida de Fourier (FFT) media calculada para la muestra de 190 participantes. | 43 |
| Figura 4.3. Pares de correlación de la entropía espectral agrupados por intervalos de asociación en función del índice del par dentro de cada grupo de asociación. | 44 |
| Figura 4.4. Entropía espectral media en función del tiempo. | 46 |
| Figura 4.5. Representación esquemática de la curva del modelo de Tiempo Medio entre Fallos (MTBF por sus siglas en inglés) para maquinarias. | 47 |
| Figura 4.6. Distribuciones de probabilidad de los momentos adimensionales calculados a partir de 24.192 tiempos de reacción experimentales, a lo largo de una muestra de 168 niños. | 50 |
| Figura 4.7. Distribución de Maxwell-Boltzmann de un sistema de cerebros y la correspondiente densidad entrópica. | 52 |
| Figura 4.8. Representación esquemática de la correspondencia entre un sistema de cerebros y el sistema de partículas de un gas ideal. Ambos sistemas se pueden describir por una función de Maxwell-Boltzmann. | 53 |

Listado de tablas

| | Página |
|---|--------|
| Tabla 3.1. Resultados de la clasificación para la moda y los 3 parámetros μ , σ y τ , teniendo en cuenta un 7% de la prevalencia mundial de TDAH en niños de edad escolar. Las filas muestran los porcentajes de las áreas a ambos lados de la moda (%-PD), la correspondiente fracción del porcentaje de prevalencia (%-Prev) y el número de niños resultante (No. Ch.) | 33 |
| Tabla 3.2. Niños seleccionados como candidatos a ser diagnosticados con TDAH, resultantes de la clasificación según las distribuciones de la moda y los 3 parámetros μ , σ y τ y teniendo en cuenta un 7% de la prevalencia mundial de TDAH en niños de edad escolar. | 34 |

Glosario de términos

APA: Asociación Americana de Psiquiatría (del inglés, American Psychiatric Association).

DE: desviación estándar

FFT: transformada rápida de Fourier (del inglés, Fast Fourier Transform).

IIV: variabilidad intra-individual (del inglés, Intra-Individual Variability).

MB: distribución de Maxwell-Boltzmann de los módulos de las velocidades de las partículas en un gas ideal.

MTBF: Tiempo Medio entre Fallos (del inglés, Mean Time Between Failures).

RKHS: Núcleo Reprodutor en el Espacio de Hilbert (del inglés, Reproducing Kernel Hilbert Space)

TDAH: Trastorno por Déficit de Atención e Hiperactividad.

TR: Tiempo de reacción o de respuesta.

Introducción

Entre los trastornos cognitivos, el trastorno del déficit de atención e hiperactividad (TDAH) es común en niños y puede estar presente hasta la edad adulta en alrededor de un 30-50% de los casos [1,2]. Usualmente viene asociado a problemas de atención, hiperactividad y comportamientos impulsivos [3]. Hay otros elementos asociados con TDAH, tales como problemas de comportamiento, bajo rendimiento académico, rechazo, relaciones pobres con sus compañeros y falta de habilidades sociales [4,5].

Las consecuencias psicológicas y educativas asociadas al TDAH se pueden mitigar con un diagnóstico y tratamiento tempranos [6]. Se estima que la prevalencia mundial de TDAH es del 5-7% en niños y niñas de edad escolar, según la Asociación Americana de Psiquiatría (APA) [3].

La realización del diagnóstico de TDAH puede ser largo y, de alguna manera, tedioso comparado con el diagnóstico de otros trastornos mentales [7]. Según la Academia Americana de Psiquiatría del Niño y del Adolescente (AACAP en inglés), el diagnóstico de TDAH puede incluir la recopilación de información de los padres, de la escuela, entrevistas al niño, tener información sobre el funcionamiento general del niño, así como el conocimiento de su historial familiar, social y médico [8].

Debido a que el proceso para realizar un buen diagnóstico de TDAH puede ser difícil y tomar mucho tiempo, es muy deseable tener una metodología informatizada capaz de determinar rápidamente cuáles son los niños más probables de ser diagnosticados con este trastorno. A partir de una primera evaluación tomando en cuenta esta metodología, los niños más probables de padecer TDAH se pueden evaluar de manera definitiva por los facultativos en un segundo momento. De esa manera, la metodología informatizada de esta tesis para pre-diagnóstico rápido de TDAH en niños, basada en los tiempos de reacción a estímulos visuales, puede contribuir enormemente a ahorrar recursos y servir de orientación a los psicólogos.

En relación con los tiempos de respuesta, la literatura refiere [9] que los niños que padecen TDAH pueden tener comportamientos impulsivos y responder más rápido que otros niños. Por otro lado, su desempeño puede ser muy lento en tareas cognitivas. El tiempo de reacción medio a estímulos visuales es siempre mayor que el de otros niños, considerados de comportamiento normativo, independientemente del tipo de tarea que se utilice en los experimentos [10–12]. En general, los niños con TDAH muestran, por un lado, respuestas muy rápidas y por otro, respuestas muy lentas, lo que hace que tengan una variabilidad intra-individual alta (IIV por sus siglas en inglés) [13].

La literatura relaciona un importante número de trabajos sobre tiempos de reacción humanos a estímulos visuales [14-21]. Las respuestas rápidas son comunes en la vida diaria y en una amplia variedad de situaciones en la industria [22], economía del comportamiento, finanzas [23], deportes [24], y salud [25], por mencionar unos pocos ejemplos. Las distribuciones de tiempo de respuesta son sesgadas positivamente [26] y, por lo tanto, no se describen adecuadamente con estimadores de tendencia central como la media o la desviación estándar [27,28]. La función ex-Gaussiana demuestra ser la que ajusta de manera óptima las distribuciones de probabilidad de tiempos de respuesta [29,30]. Esta función resulta de la convolución de una función Gaussiana y una exponencial decreciente [31] y, depende de los parámetros interpretables μ , σ , y τ [27,32]. Los parámetros μ and σ son los de la función Gaussiana y τ , el parámetro de la función exponencial decreciente. Este último permite describir la asimetría de la distribución de los tiempos de respuesta. La utilización de la función ex-Gaussiana evita eliminar los datos de tiempo de reacción más elevados, que usualmente no se consideran al utilizar distribuciones Gaussianas.

Existe un importante grupo de trabajos en la literatura donde la función ex-Gaussiana se utiliza para representar tiempos de respuesta, donde parámetros μ , σ , y τ se interpretan en relación con los trastornos cognitivos. Por ejemplo, los parámetros σ y τ , junto con la desviación típica de la función ex-Gaussiana, se relacionan con TDAH en los adultos. De manera similar, se reporta correlación entre τ y la razón de comisión de errores [29]. En el caso de jóvenes con TDAH,

los análisis ex-Gaussianos revelan valores elevados de la desviación estándar y del parámetro τ (parámetro de la componente exponencial) [33]. En la referencia [32], los autores estudiaron TDAH y el trastorno del espectro autista (ASD por sus siglas en inglés) en niños 7-10 años, para conocer más sobre las fluctuaciones atencionales, lo que se relaciona con una variabilidad de la respuesta temporal. Existen evidencias claras de que los parámetros de la ex-Gaussiana correlacionan con los procesos cognitivos, como la atención. La componente τ se relaciona con TDAH en niños varones [35]. Sin embargo, los autores en la referencia [30] determinaron que esto no es absolutamente cierto, ya que los parámetros de la función ex-Gaussiana puede que no se relacionen de manera unívoca con los procesos cognitivos. En este sentido, los autores señalan que se debe ser más cuidadoso cuando se analizan los cambios en los parámetros de la función ex-Gaussiana, en relación con los trastornos cognitivos. En resumen, a la hora de interpretarse los parámetros de la ex-Gaussiana, es muy probable que los niños que muestran una combinación de valores altos del parámetro μ y valores bajos del parámetro τ muestren tiempos de reacción lentos. Por otro lado, los niños que muestran bajos valores del parámetro μ y altos valores del parámetro τ correlacionan con respuestas mucho más rápidas.

En esta tesis se presenta una metodología de clasificación de los niños, basada en un estudio experimental de tiempos de respuesta, para el pre-diagnóstico rápido de déficit de atención u otros trastornos cognitivos. La muestra de participantes incluye niños escolarizados de 8-12 años de Valencia, España. Los experimentos se realizaron utilizando ordenadores portátiles, en los que se mostraron estímulos visuales y se registraron los tiempos de respuesta. En primer lugar se obtienen las distribuciones de probabilidad empíricas de tiempos de respuesta para cada niño y la promedio. Esta última representa el comportamiento normativo de un niño en la población. Acto seguido, proponemos una metodología de clasificación que permite identificar los niños que se alejan más del comportamiento normativo. Los tiempos de respuesta se representan en términos de la función ex-Gaussiana y sus tres parámetros. En el Anexo A se incluye el listado de los parámetros. Estos parámetros se toman de base para la metodología de clasificación, lo que incluye una representación

global en términos de las componentes de un vector y sus respectivas definiciones de norma. Nuestra principal hipótesis es que, teniendo en cuenta el porcentaje de prevalencia de TDAH en una población general de niños y las evidencias más recientes de la relación entre los tiempos de respuesta y el Déficit de Atención en la literatura, debemos ser capaces de establecer una metodología de clasificación simple y automatizada de niños con TDAH y basada en su distribución de probabilidad de los tiempos de respuesta a estímulos visuales.

A lo largo del trabajo explicamos las etapas seguidas en el análisis de los datos. Nuestra meta última es proporcionar metodología de clasificación para determinar, sin necesidad de pasar por el proceso completo de diagnóstico, aquellos niños que pueden tener un comportamiento diferente del resto (considerado normativo) en relación con el déficit de atención y, por lo tanto, son candidatos potenciales de ser diagnosticados con TDAH u otro trastorno cognitivo. Esta tesis es la primera parte de una serie de trabajos sobre metodologías de clasificación basadas en los tiempos de respuesta y que se encuentran actualmente en marcha.

La transformada rápida de Fourier (FFT) se ha utilizado en la literatura para estudiar la variabilidad intra-individual (IIV por sus siglas en inglés) en niños con TDAH. Por ejemplo, el análisis con FFT de los tiempos de respuesta en la referencia [13] reveló que hay una periodicidad característica (una frecuencia de 0.05 Hz) en niños con TDAH. Estudios similares indicaron una periodicidad a baja frecuencia (frecuencia 0.03-0.05 Hz) observada en diferentes tareas, por ejemplo, Tarea de Respuesta a una Atención Sostenida (SART por sus siglas en inglés) [36], la tarea de flanco de Ericksen [37] y las tareas Go/NoGo [38].

Del mismo modo, la frecuencia a la que se cometen errores durante los experimentos de tiempo de respuesta se ha estudiado intensamente, dado que aporta información importante sobre los trastornos neurológicos que se estudien. En el caso de niños con TDAH, se conoce de la existencia de una correlación entre los errores y los parámetros de la función ex-Gaussiana, cuando esta última es utilizada para ajustar las funciones de distribución de los tiempos de

reacción. En este sentido, un aumento de los errores cometidos, junto con tiempos de respuesta largos, es un indicador importante en tareas yes/no y go/no-go [39].

En esta tesis se aplica un análisis espectral basado en la transformada rápida de Fourier y en la entropía del espectro con el objetivo de obtener detalles sobre las correlaciones y posibles patrones en los tiempos de respuesta de un grupo de individuos a lo largo de estímulos visuales consecutivos. También se realiza un análisis de fallos sobre los errores cometidos por los participantes durante el desarrollo de los experimentos.

Los resultados de esta tesis, basados en la FFT y la entropía espectral, evidencian una correlación entre los tiempos de respuesta de los individuos de un grupo coetáneo cuando los estímulos visuales se presentan en una escala de tiempo muy corta (cientos de milisegundos), es decir, cuando no se espera que influyan elementos educativos o culturales. Motivados por estos resultados experimentales, también se propone un análisis de tiempos de reacción con una visión de colectividad. Como punto de partida se utiliza la función ex-Gaussiana, usualmente utilizada para parametrizar los tiempos de respuesta de un individuo. El tránsito a una función que caracterice la colectividad emerge de las distribuciones Gaussianas de los tres primeros momentos de las ex-Gaussianas resultantes de los tiempos de respuesta de cada uno de los participantes. Estos momentos se combinan para dar origen a una distribución de Maxwell-Boltzmann (MB), conocida en la Física por describir las velocidades de las partículas de un gas ideal [40]. A partir de este hecho, se puede establecer una correspondencia uno a uno entre las partículas de un gas ideal y los individuos que forman una colectividad. Esta última parte de la tesis está en línea con la búsqueda de regularidades en el mundo vivo [41].

Capítulo 1

Trastorno por Déficit de Atención e Hiperactividad (TDAH)

1.1. ¿Qué es el Trastorno por Déficit de Atención e Hiperactividad (TDAH)?

El Trastorno por Déficit de Atención e Hiperactividad (TDAH) es uno de los trastornos cognitivos más comunes que afectan a los niños, aunque también afecta a los adultos. El TDAH puede estar presente hasta la edad adulta en alrededor de un 30-50% de los casos (Figura 1.1) [1,2]. Los síntomas incluyen problemas de atención, hiperactividad (exceso de movimientos) e impulsividad [3,42,43]. Otros elementos relacionados con el TDAH incluyen problemas de comportamiento, bajo rendimiento académico, rechazo, relaciones pobres con sus compañeros y falta de habilidades sociales [42,43].

Las consecuencias psicológicas y educativas asociadas al TDAH se pueden mitigar con un diagnóstico y tratamiento tempranos [6]. Se estima que la prevalencia mundial de TDAH es del 5-7% en niños y niñas de edad escolar, según la Asociación Americana de Psiquiatría (APA por sus siglas en inglés) (Figura 1.1) [3].

1.2. Origen y causas que lo provocan.

Los investigadores no han podido identificar aún las causas específicas del TDAH. Hay evidencia de que la genética contribuye, por ejemplo, 3 de 4 niños tienen familiares con el trastorno. Otros factores que pueden contribuir al desarrollo del trastorno son: el nacimiento prematuro, daños cerebrales, haber tenido una madre fumadora, consumidora de alcohol o con elevado estrés durante el embarazo.

1.3. Evaluación, síntomas y diagnóstico del TDAH.

Hay un grupo de diferentes especialistas que pueden participar en una evaluación formal de TDAH, es decir, psiquiatras infantiles o de adultos, pediatras, especialistas en dificultades de aprendizaje, trabajadores sociales y terapeutas ocupacionales con experiencia en TDAH.

Muchos de los síntomas, tales como altos niveles de actividad, dificultad para mantenerse sentado o de pie en un sitio por largo tiempo o tiempos de atención cortos, son típicos de los niños pequeños en general. La diferencia con los niños que padecen TDAH es que su actividad y falta de atención son notablemente mayores que los esperados para su edad, lo que causa problemas al niño o niña en su relación con la familia, la escuela o amigos.

Existen básicamente tres tipos de TDAH: el que se presenta con falta de atención, el que se presenta con impulsividad e hiperactividad o una combinación de ambos (Figura 1.1). El diagnóstico suele ser prolongado en el tiempo y se basa por lo general en el mantenimiento sostenido de los síntomas por al menos 6 meses.

1.3.1. Síntomas del tipo de TDAH que presenta falta de atención.

Seis síntomas (o siete para los mayores de 17 años) de los siguientes se presentan de manera frecuente:

- No prestan atención a los detalles o cometen errores por descuido en la escuela o en tareas asignadas en el trabajo, para el caso de los adultos.

- El individuo tiene problemas para mantenerse enfocado en tareas o actividades tales como: conferencias, conversaciones o lecturas prolongadas.
- Parecen no escuchar cuando se les habla, es como si su mente estuviera en otra parte.
- No siguen adecuadamente las instrucciones para realizar una determinada tarea o no logran completar los trabajos escolares o deberes laborales. Suelen comenzar la tarea y rápidamente pierden el interés.
- Suelen tener problemas al organizar tareas o programar el trabajo, con problemas para el manejo del tiempo, por lo que pueden llegar a olvidar las fechas importantes en la entrega de trabajos o consecución de metas.
- Evitan realizar tareas que requieren un esfuerzo mental importante, tales como preparar informes o completar cuestionarios.
- A menudo pierden cosas comunes, utilizadas en la vida diaria, como papeles relacionados con la escuela, libros, llaves, billeteras, teléfonos o gafas.
- Olvidan tareas diarias, como hacer cosas rutinarias o recados. Los adolescentes y adultos pueden olvidar devolver llamadas telefónicas, pagar recibos o asistir a citas.

1.3.2. Síntomas comunes del tipo de TDAH impulsivo/hiperactivo.

Seis síntomas (o cinco para los mayores de 17 años) de los siguientes se presentan de manera frecuente:

- El individuo se manifiesta inquieto, por ejemplo, golpeando ligeramente con las manos o moviendo los pies, o se mueve mucho en el asiento.
- No es capaz de permanecer sentado, por ejemplo, durante el desarrollo de una clase o en el trabajo.
- Si es un niño, corre o trepa por sitios que no debe.
- Incapaz de jugar o realizar actividades de esparcimiento de manera tranquila.
- Habla mucho.

- No puede esperar su turno en las conversaciones o en una fila, es impaciente.
- Interrumpe a otros, por ejemplo, en conversaciones, juegos o actividades, o comienza a utilizar las pertenencias de otras personas sin permiso. En el caso de los adolescentes y adultos pueden reemplazar a otros en lo que están haciendo en un momento determinado.

No existe una prueba de laboratorio para diagnosticar TDAH. El diagnóstico incluye la recopilación de información de los padres, maestros y otros, así como conocer la historia personal, familiar, médica y social de las personas. Así mismo, incluye también la comprobación de las facultades de audición y de visión, para descartar otros problemas médicos.

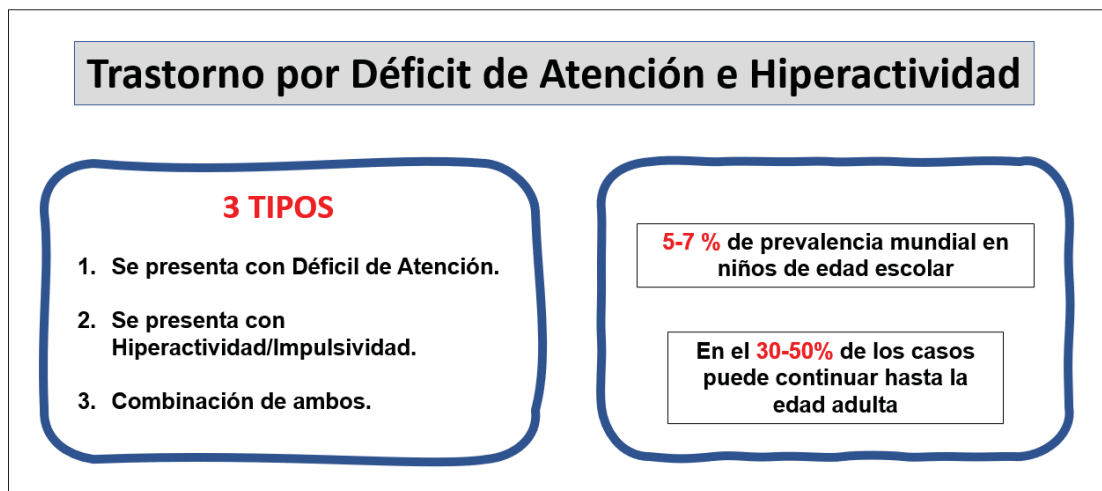


Figura 1.1: El TDAH, sus tipos y prevalencia mundial.

1.3.3. El TDAH y los niños en edad escolar.

Los maestros y otros profesionales de la educación pueden brindar a los padres y facultativos información para ayudar a evaluar problemas de comportamiento y de aprendizaje, y pueden ayudar con entrenamiento de comportamiento. Sin embargo, estos profesionales no pueden diagnosticar el TDAH, tomar decisiones sobre el tratamiento o indicar que los niños tomen algún medicamento para

asistir a la escuela. Solo los padres y los tutores pueden tomar tales decisiones de conjunto con el médico del niño.

Los alumnos cuyo aprendizaje se ve afectado por el TDAH pueden optar por tener una enseñanza especial. Los niños con TDAH se pueden beneficiar de una instrucción más especializada, cambios en el aula, técnicas de aprendizaje alternativas o adaptaciones especiales al currículo de las asignaturas.

1.3.4. El TDAH y los adultos.

Muchos adultos con TDAH no se dan cuenta que tienen este trastorno. Una evaluación integral usualmente incluye una revisión de los síntomas actuales y pasados, un examen e historia médica y el uso de instrumentos específicos para adultos. Los adultos con TDAH usualmente se tratan con medicación, psicoterapia o una combinación de ambos. También pueden ayudar las estrategias para el control del comportamiento, como las que minimizan las distracciones e incrementan organización e incluyen miembros de la familia cercanos.

1.4. Diferencias de género en el TDAH.

Las niñas y mujeres con TDAH no suelen ser hiperactivas. En su lugar, suelen tener la parte del déficit de atención del trastorno. El estereotipo común de TDAH es el caso del niño pequeño hiperactivo, pero en realidad puede afectar al género femenino, tanto en la niñez como en la edad adulta.

El TDAH en niñas suele pasar inadvertido a los ojos de los padres y maestros, porque sus síntomas difieren de los síntomas en el género masculino, ya que las niñas no suelen ser hiperactivas.

Según la literatura, las niñas y adolescentes con TDAH no tratado se encuentran en riesgo de baja autoestima y problemas como depresión y ansiedad. Muestran una baja consecución de sus metas, así como tienen más probabilidad de quedar embarazadas y comenzar a fumar durante la Enseñanza Secundaria. Lo que es peor, las niñas no tratadas con ADHD suelen arrastrar este tipo de problemas hasta la edad adulta. También tienen más probabilidad de tener niños con TDAH.

De hecho, muchas mujeres reciben su diagnóstico al mismo tiempo que su hijo o hija.

Las opciones de tratamiento para mujeres con TDAH incluyen una combinación de medicación estimulante y terapia enfocada al TDAH. En el caso de las niñas y adolescentes también ayudan la medicación estimulante, la terapia familiar y otras intervenciones.

1.5. Tratamiento del TDAH.

Aunque algunos piensan que los medicamentos como Ritalin están utilizados en exceso, las investigaciones demuestran que realmente ayudan a los niños con TDAH.

El tratamiento más común para el TDAH tanto en niños como adultos es la medicación estimulante, como es el caso del Ritalin. Cuando se toma esta medicación se observa un efecto rápido en la mejora de la actuación y la interacción social, aunque su efecto es temporal. Eso hace que la mayoría de las personas que padecen TDAH necesiten ayuda adicional. Además de la medicación, se pueden beneficiar de la educación de los padres, la terapia familiar e intervenciones de apoyo.

En hasta el 90% de los casos, la medicación ayuda a los niños a mejorar su desempeño escolar, aumentar la concentración, su nivel de organización, a pensar antes de actuar, a mejorar las relaciones interpersonales y habilidades sociales. A menudo parecen más felices también.

Sin embargo, también existen preocupaciones sobre el uso de los estimulantes. Por ejemplo, algunos especialistas piensan que la medicación puede limitar el desarrollo de habilidades en los niños para la solución de problemas. También se cree que hay problemas de falsos diagnósticos, al aumentar considerablemente en los últimos años la cantidad de prescripciones de estimulantes. Aunque es cierto que, en última instancia, el análisis de costo-beneficio favorece el uso de tratamientos basados en estimulantes para niños con TDAH. No hay evidencia de daños y el tratamiento es efectivo.

Capítulo 2

Métodos y metodologías

2.1. Características de la muestra.

En los experimentos se ha utilizado una muestra de 190 niños (95 del género masculino y 95 del género femenino) con edades entre 8 y 12 años. La distribución de la edad en la muestra se incluye en el panel a) de la Figura 2.1. La edad media general es de 9,5 años, con una desviación estándar (DE) de 1,3 años. Las edades medias y las desviaciones típicas de los niños y las niñas son de 9,4 (DE=1,3) y 9,7 (DE=1,2) años, respectivamente. Las diferencias en este sentido no son estadísticamente significativas. Los niños que participaron en los experimentos asistieron a una Escuela Primaria en Valencia, España. La Escuela pública se ubica en el barrio La Patacona del municipio de Alborai. Antes de realizar los experimentos se obtuvieron todos los consentimientos y autorizaciones a todos los niveles, es decir: de los padres o tutores de los niños, de la Dirección de la escuela y del Gobierno de la Comunidad Valenciana. Este estudio se llevó a cabo en correspondencia con las recomendaciones de la Secretaría de Educación de la Comunidad Valenciana. El protocolo fue aprobado por el Gobierno de Valencia (Generalitat Valenciana). También se obtuvo el consentimiento escrito de los padres o tutores legales de los niños de acuerdo

con la Declaración de Helsinki [44]. De todos los niños que formaron la muestra sólo diez habían sido diagnosticados con TDAH y con tratamiento, por lo que se consideran niños con comportamiento normativo. Tampoco han tenido ningún daño cerebral u otro daño neurológico que pueda influir en los resultados. Toda esta información se obtuvo de los padres, tutores legales y los psicólogos de la escuela, quienes evalúan a los niños cada dos años.

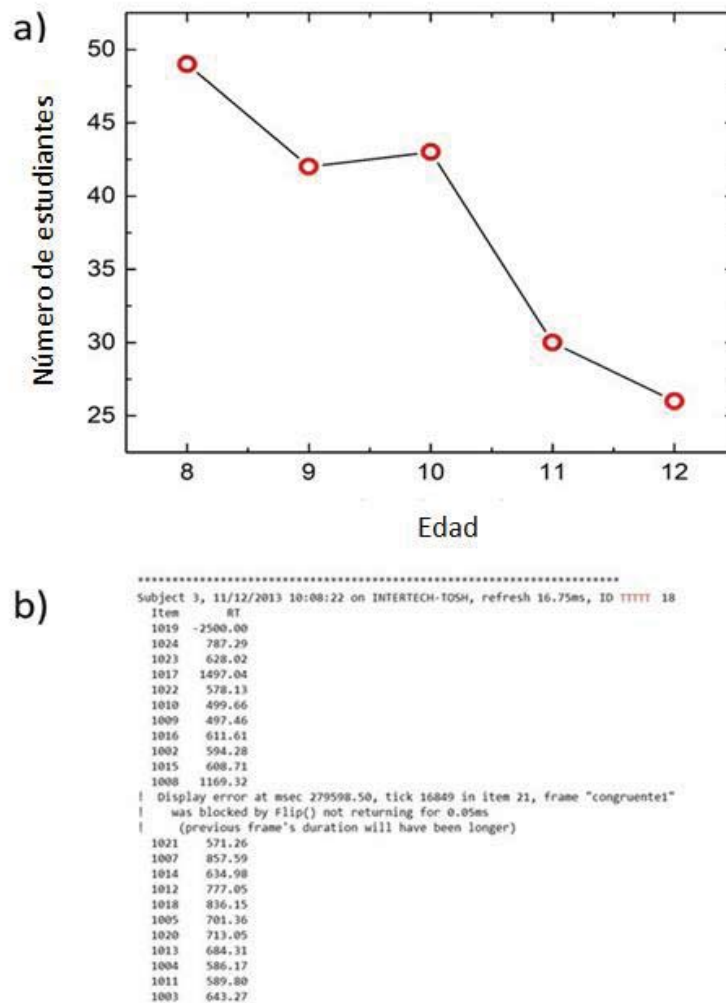


Figura 2.1: En el panel a) se muestra la distribución de las edades de los niños en la muestra y, en el panel b), un fragmento del archivo de salida *.azk del programa DMDX. Con el objetivo de proteger la privacidad de los niños que realizaron los experimentos, hemos utilizado los caracteres "TTTTT" en el lugar del nombre.

2.2. Descripción de los experimentos informatizados con el software DMDX.

Los experimentos informatizados se desarrollaron utilizando el programa de Windows DMDX [45], ampliamente utilizado en la comunidad de psicólogos cognitivos y experimentales [46,47]. Haciendo uso de este programa, se presentaron los estímulos visuales a los participantes y se registraron los tiempos de respuesta. Las tareas aplicadas en este trabajo fueron diseñadas por psicólogos del grupo de Modelización Interdisciplinar InterTech (www.intertech.upv.es), un equipo formado por profesores de la Universitat Politècnica de València y de la Universitat de València.

Los experimentos se desarrollaron en una habitación tranquila y utilizando ordenadores portátiles donde el programa DMDX había sido instalado previamente. Cada experimento duró de 6-7 minutos y los estímulos se presentaron de manera aleatoria para evitar efectos de presentación.

Los experimentos incluyeron una tarea de red atencional (ANT) [47], la cual busca la evaluación de las 3 redes atencionales: *la red de alerta*, *la red de orientación* y *la red de control ejecutivo*. La red de alerta se evalúa mediante los cambios en los tiempos de reacción como producto de una señal de advertencia. La red de orientación se evalúa por los cambios en los tiempos de reacción en relación a dónde el estímulo aparecerá en la pantalla del ordenador. Finalmente, la red de eficiencia del control ejecutivo se evalúa pidiéndole a los niños que presionen una tecla u otra dependiendo de la orientación de la imagen mostrada en pantalla, hacia la izquierda o hacia la derecha, y en correspondencia con los casos neutral, congruente o incongruente. Las tres redes están muy relacionadas entre sí [48,49].

Cada estímulo consistió de 5 peces alineados horizontalmente orientados hacia la izquierda o hacia la derecha (Figura 2a). Los peces eran de color negro y el fondo de color blanco. El objetivo de esta tarea es la identificación, en cada prueba, de la dirección del pez central. Se muestran 3 casos dependiendo de la orientación de los peces alrededor del pez central. El caso neutral es cuando

solo hay un pez, el central. El caso congruente es en el que los peces alrededor miran en la misma dirección que el pez central. El tercer caso, el incongruente, es cuando los peces alrededor miran en la dirección contraria con respecto al pez central. Si el pez central mira a la derecha, se debe presionar la tecla etiquetada como “M” y, en caso contrario, la tecla “Z” (Figura 2.2 a). Antes de la aparición del estímulo se mostraron cuatro variantes de señal previa: “sin señal”, “señal central”, “señal espacial” y “doble señal” (Figura 2.2 b). Se presentaron 144 estímulos en total y de manera aleatoria. Cada estímulo duró en pantalla hasta 2500 ms, si ninguna tecla era presionada antes.

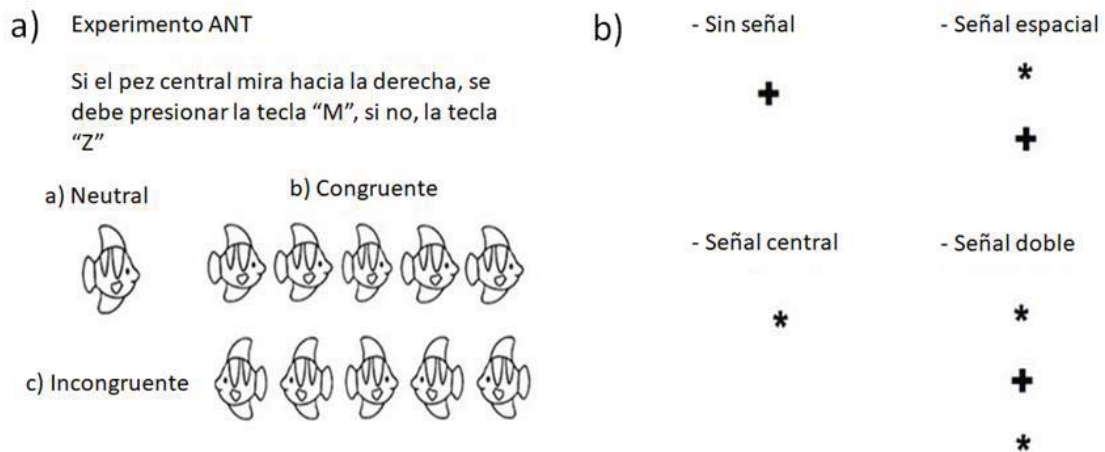


Figura 2.2: En el panel a) se muestra un ejemplo visual de la tarea de la red atencional (ANT) desarrollada en este trabajo, mientras que en el panel b) se incluyen las 4 condiciones para la señal que antecede a la aparición del estímulo visual.

2.3. Organización de los datos para el análisis.

Los resultados de los experimentos desarrollados con el software DMDX se grabaron en los ficheros de salida de este programa con extensión *.azk. La Figura 2.1b muestra un fragmento de este fichero. Primero aparece un encabezado con el nombre del ordenador y del niño. El nombre del niño se ha omitido para preservar su privacidad. A continuación se muestran dos columnas.

La primera con la etiqueta "ITEM" muestra el número que identifica al estímulo en el diseño de los experimentos. La segunda etiqueta, RT, indica el tiempo de respuesta en milisegundos (ms).

En los datos de salida se pueden encontrar dos tipos de error. El primero es cuando el niño no responde después de transcurridos 2500 ms. El segundo error ocurre cuando el niño responde de manera incorrecta, al presionar la tecla incorrecta para el estímulo presentado. Los errores cometidos son analizados en el Capítulo 4 de esta tesis. Los ficheros de salida (*.azk) se analizaron utilizando un código propio en lenguaje FORTRAN. Los datos fueron filtrados para eliminar los errores y organizados en 3 columnas. La primera columna indica la etiqueta que identifica al niño, la segunda columna indica el número de ITEM del estímulo mostrado y la tercera columna indica el tiempo de respuesta en ms.

A partir de los datos filtrados y organizados se construyeron histogramas con los tiempos de respuesta correspondientes a cada niño. Se probaron diferentes anchos de intervalo del histograma, de los que finalmente se escogió el de 50 ms. A partir de los histogramas, se construyeron las distribuciones de probabilidad de tiempos de respuesta de cada niño, por medio de dividir el número de conteos para cada subintervalo por el número total de tiempos. Las funciones de distribución de probabilidad son el punto de partida de nuestros análisis estadísticos. En una primera parte se hace un análisis estadístico descriptivo y, en una segunda, se realiza un análisis ex-Gaussiano, con la correspondiente interpretación de los tres parámetros de esta función.

2.4. Representación ex-Gaussiana de los datos. Momentos de la distribución.

Con el objetivo de representar los tiempos de respuesta, se ha seleccionado la función ex-Gaussiana, utilizada ampliamente en la literatura [50,51]. El tamaño de muestra utilizado está en correspondencia con Ratcliff et al. [52], quien ha

sugerido que las muestras de al menos 100 datos son confiables para la estimación de parámetros. Como se ha comentado anteriormente, la función ex-Gaussiana involucra 3 parámetros: μ (valor medio de la componente Gaussiana), σ (desviación estándar de la componente Gaussiana), y τ (constante de tiempo de la componente exponencial). Múltiples trabajos en la literatura reportan la correlación de estos parámetros con procesos cognitivos tales como el mecanismo de control del esfuerzo o la atención, aunque hay un gran debate acerca de su interpretación [53].

Existen diferentes maneras de representar la función ex-Gaussiana. En este trabajo hemos seleccionado la siguiente, ya que es la que está incorporada al programa de análisis de datos ORIGIN ver. 6.1. [<https://www.originlab.com/>], utilizado como referencia para comprobar nuestro código de FORTRAN.

$$f(x) = y_0 + \frac{A}{t_0} e^{\frac{1}{2}(\frac{\omega}{t_0})^2 - \frac{x-x_c}{t_0}} \int_{-\infty}^z \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{y^2}{2}} dy, \quad (2.1)$$

$$\text{donde } z = \frac{x-x_c}{\omega} - \frac{\omega}{t_0}.$$

En la ecuación 2.1, los parámetros se pueden identificar como $\mu=x_c$, $\sigma=\omega$ y $\tau=t_0$, es decir, en términos de los parámetros de las funciones Gaussiana y exponencial decreciente:

$$f_1(x) = \frac{A}{t_0} e^{-\frac{x}{t_0}}, \quad (2.2)$$

$$f_2(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\omega} e^{-\frac{(x-x_c)^2}{2\omega^2}}. \quad (2.3)$$

Se debe tener en cuenta que los parámetros μ y σ no representan la media y la desviación típica de la distribución ex-Gaussiana, sino de la componente Gaussiana. En su lugar, la media de la distribución ex-Gaussiana es: $M = \mu + \tau$, la varianza es $S^2 = \sigma^2 + \tau^2$ y la asimetría de la distribución: $2\tau^3/S^3$ [54].

De hecho, uno puede caracterizar la distribución $f(x)$ a partir de sus momentos. Si se calculan con respecto al origen de coordenadas se denominan “momentos brutos”, como la media:

$$M \equiv \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) dx, \quad (2.4)$$

y “centrales” con respecto a los valores medios, como el caso de la varianza,

$$S^2 \equiv \int_{-\infty}^{\infty} (x - M)^2 f(x) dx, \quad (2.5)$$

y la asimetría de la distribución,

$$t \equiv 1/S^3 \int_{-\infty}^{\infty} (x - M)^3 f(x) dx. \quad (2.6)$$

La función ex-Gaussiana puede representarse, de manera aproximada, en términos de sus tres primeros momentos,

$$a \equiv (M, S^2, t). \quad (2.7)$$

Los parámetros del ajuste de la función ex-Gaussiana a las funciones de distribución de probabilidad empíricas y sus incertidumbres, se obtuvieron utilizando el algoritmo para ajustes no lineales de Levenberg-Marquardt [55,56], incorporado en el programa para análisis de datos ORIGIN, versión 6.1.

2.5. Transformada rápida de Fourier para el análisis de tiempos de respuesta.

Para señales de tiempo discretas de duración finita $\{x(n)\}_{n=0}^{N-1}$ (lo que representa la señal que se procesará) con N puntos de longitud, el método para la estimación del espectro usando la transformada rápida de Fourier se define como:

$$X(f) = \left| \sum_{n=0}^{N-1} x(n) e^{-j2\pi f \frac{n}{N}} \right|, \quad (2.8)$$

donde f es la frecuencia instantánea de la señal que se procesa, j es la unidad imaginaria y $X(f)$ es el espectro de la amplitud del vector de los tiempos de respuesta. El análisis basado en el espectro se utiliza como un complemento al cálculo de la entropía espectral [57].

2.6. Entropía de Shannon. Entropía espectral.

La entropía de una variable aleatoria de valor discreto conserva un valor máximo para una función uniformemente distribuida. Considerando una variable Z con M estados z_1, z_2, \dots, z_M y probabilidades de estado p_1, p_2, \dots, p_M , es decir, $P(Z = z_i) = p_i$, la entropía de Z se define como:

$$H(Z) = -\sum_{i=1}^M p_i \log_2(p_i). \quad (3.9)$$

Según la ecuación 2.9, la entropía espectral de la señal $\{x(n)\}_{n=0}^{N-1}$ es una medida de su distribución de energía espectral. El concepto se basa en la entropía de Shannon, la cual cuantifica la cantidad de información así como su coherencia. La entropía espectral trata la distribución de energía normalizada de la señal en el dominio de la frecuencia como una distribución de probabilidad y calcula su entropía de Shannon. Entonces, para una señal $\{x(n)\}_{n=0}^{N-1}$, el espectro de energía $S(f)$ se define como el valor cuadrado de la ecuación 2.8:

$$S(f) = (X(f))^2. \quad (2.10)$$

La distribución de probabilidad $P(f)$ es entonces:

$$P(f) = \frac{S(f)}{\sum_i S(i)}, \quad (2.11)$$

donde $S(i)$ es la contribución de energía individual para cada muestra de datos.

Entonces, la energía espectral E , se define como [57]:

$$E = -\sum_{f=0}^F P(f) \cdot \log_2 P(f). \quad (2.12)$$

Normalizando la ecuación anterior:

$$E_n = - \frac{\sum_{f=0}^F P(f) \cdot \log_2 P(f)}{\log_2 F}, \quad (2.13)$$

donde F es el número total de puntos de frecuencia. El denominador $\log_2 F$ representa la entropía máxima espectral de ruido blanco, uniformemente distribuida en el dominio de la frecuencia con el espectro de energía.

Una vez que se ha obtenido la ecuación 2.13, si el coeficiente de correlación basado en la matriz de covarianza se aplica al resultado con el objetivo de buscar la linealidad en los patrones de uniformidad, se obtiene lo siguiente:

$$R(i, j) = \frac{C_2(E_{n(x)}, E_{n(y)})}{\sqrt{C_2(E_{n(x)}, E_{n(x)}) \cdot C_2(E_{n(y)}, E_{n(y)})}}, \quad (2.14)$$

donde $R(i, j)$ es la matriz de los cálculos de covarianza a pares entre cada variable utilizada para cuantificar el contenido espectral en términos de energía, es decir, para cuantificar el grupo de coherencia, como una relación de linealidad en un vector por medio de su energía espectral.

2.7. Modelado de los errores. Analogía con el análisis de fallos en maquinarias.

Para modelizar los fallos de cada uno de los participantes, se propone la entropía espectral media calculada por la muestra de 190 participantes y siguiendo la analogía que existe con el modelo de Tiempo Medio entre Fallos (MTBF por sus siglas en inglés) que puede definirse en términos del valor esperado de la función de densidad de fallos, es decir, $f(t)$:

$$MTBF: \int_0^{\infty} t f(t) dt. \quad (2.15)$$

Sea X_{ij} una matriz discreta donde $(i = 1, \dots, M, j = 1, \dots, N)$ corresponde a los índices de fila y columna y M y N el número de filas y columnas respectivamente en la matriz. Entonces, el valor medio de cada fila de la matriz discreta se da por:

$$X_{mean}(i) = \frac{1}{N} \sum_{j=0}^N X(i, j), \quad (2.16)$$

donde N e i son el número total de puntos y el índice de las filas respectivamente. Sustituyendo la ecuación 2.16 en la ecuación 2.8 y aplicando el espectro de energía, tenemos:

$$P_{mean}(f) = \left| \sum_{t=0}^{N-1} X_{mean}(t) e^{-j2\pi f \frac{t}{N}} \right|^2 \quad (2.17)$$

Obteniendo la distribución de probabilidades, según la ecuación 2.11 y la ecuación 2.17 y aplicando la entropía espectral, tenemos:

$$E = - \sum_{f=0}^F \frac{P_{mean}(f)}{\sum_i P_{mean}(i)} \cdot \log_2 \left(\frac{P_{mean}(f)}{\sum_i P_{mean}(i)} \right) \quad (2.18)$$

La ecuación 2.18 describe el algoritmo propuesto para el proceso de fallos en el experimento descrito anteriormente, en la sección 2.2, y cuyo resultado está asociado con el modelo MTBF discreto:

$$MTBF = \sum_{i=1}^K E_i P(E_i) \quad (2.19)$$

donde K es el número de puntos en el vector $E_1, E_2, E_3, \dots, E_K$, una variable aleatoria discreta con función de probabilidad $P(E_i)$.

Capítulo 3

Metodología para la clasificación

3.1. Funciones de probabilidad de los tiempos de respuesta.

La Figura 3.1 incluye las distribuciones de probabilidad de los tiempos de respuesta de los participantes, obtenidos con el programa DMDX. Específicamente, contiene los promedios por todos los participantes y por ordenador portátil utilizado en los experimentos. Se puede apreciar que el programa DMDX corrige adecuadamente las diferencias entre los microprocesadores de los portátiles utilizados, de manera que no influyan en la medición de tiempo de respuesta realizada. El número de tiempos de respuesta incluido en el cálculo de cada promedio se indica entre paréntesis. El valor de tiempo de respuesta promedio es de aproximadamente 575 ms.

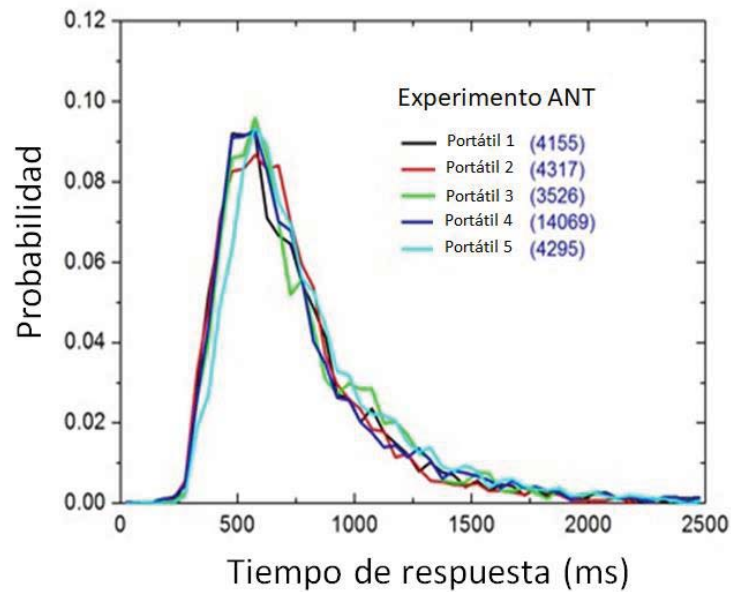


Figura 3.1: Comparación entre los resultados de los experimentos para los 5 ordenadores portátiles utilizados.

Las distribuciones de probabilidad de los tiempos de respuesta para cada participante se muestran en la figura 3.2, junto con la curva promedio. Se ha realizado un promedio entre los conteos para cada subintervalo, a lo largo de la muestra de participantes.

La muestra utilizada no presenta casos diagnosticados con TDAH, por lo que puede ocurrir que alrededor del 7% de los niños puedan ser diagnosticados con este trastorno cognitivo, de acuerdo con el porcentaje mundial de prevalencia. Asumimos que este 7% no variará apreciablemente la curva promedio, considerada como la curva del niño normativo para el rango de edad analizada.

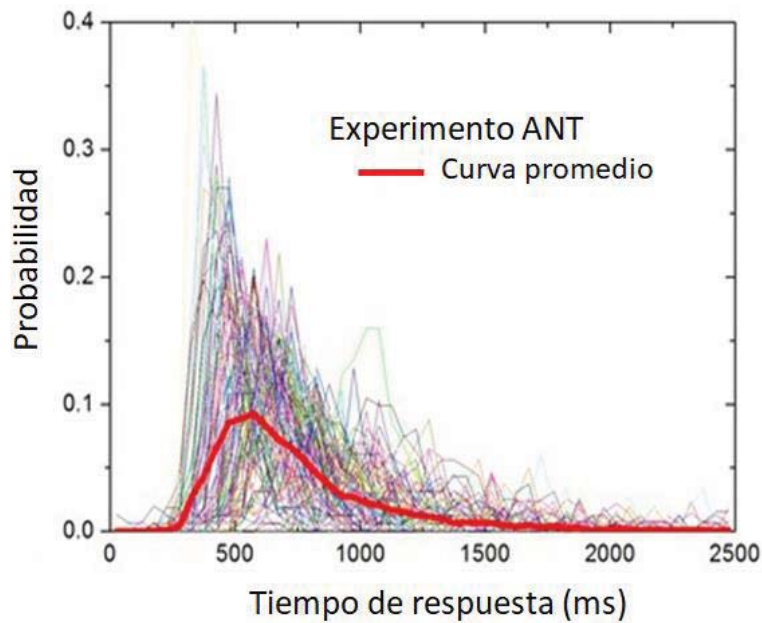


Figura 3.2: Distribuciones de probabilidad de los tiempos de respuesta obtenidas de los experimentos para cada niño y la curva promedio (línea roja gruesa).

3.2. Metodología de clasificación basada en la estadística descriptiva y los parámetros ajustados de la ex-Gaussiana.

Como se planteó anteriormente, uno de los objetivos de este trabajo es proporcionar una metodología informatizada para la determinación rápida de los niños cuyos tiempos de respuesta difieren del valor más probable y, por lo tanto, son potenciales candidatos de padecer TDAH. Entre los criterios que se han utilizado en esta metodología se encuentra el porcentaje mundial de prevalencia del 7% en niños de edad escolar según indica la Asociación de Psiquiatría Americana (2013). Se pueden utilizar porcentajes de prevalencia más específicos si estuviesen disponibles. Para su utilización en nuestra metodología, el porcentaje de prevalencia se ha dividido a su vez en dos porcentajes, uno ubicado en la zona de los tiempos más cortos y otro, más alejado, ubicado en la región de los tiempos largos. Esto se ha hecho en proporción con las áreas bajo la curva a la izquierda y a la derecha de la moda. Este criterio está en correspondencia con el hecho de que los niños con TDAH

manifiestan respuestas rápidas o demoradas, en comparación con el niño normativo [58].

Hay otro criterio que no ha sido considerado pero se podría incluir junto con los anteriores: el TDAH se da con una prevalencia 3 veces mayor en niños que en niñas, aunque algunos autores consideran que el diagnóstico está sobreestimado en niñas debido a que los síntomas y signos difieren de los observados en niños [59].

Para nuestro análisis, se han considerado 4 parámetros. En primer lugar se encuentra la moda, que es el valor de tiempo de respuesta más probable, y que se deriva del análisis estadístico descriptivo. Este parámetro es un mejor descriptor que el valor medio, dado que la distribución de probabilidad de tiempos de respuesta es asimétrica. Los otros tres parámetros utilizados en este primer análisis son los parámetros μ , σ and τ de la ex-Gaussiana, cuya correlación con TDAH es ampliamente reconocida en la literatura [46,54].

Para combinar ambos criterios, se han construido las funciones de distribución de probabilidad para cada uno de los 4 parámetros, es decir, para la moda y para cada uno de los 3 parámetros de la ex-Gaussiana. Los parámetros derivados de los ajustes de las funciones de distribución de tiempos de respuesta a funciones ex-Gaussianas se incluyen en el Anexo A. Con el objetivo de tener en cuenta la asimetría de las distribuciones, se ha tomado el porcentaje de conteos a ambos lados de la moda (a la izquierda y a la derecha), es decir $x_{\text{"izquierda"}}$ y $x_{\text{"derecha"}}$. De esa manera, el porcentaje de prevalencia (P) se puede expresar como,

$$P = x_L + x_R = (N_{\text{izquierda}}/N)100 + (N_{\text{derecha}}/N)100. \quad (3.1)$$

Hemos tomado el porcentaje mundial de prevalencia $P=7\%$ [3], el cual incluye ambos géneros, pero se puede incluir más detalle ya que el TDAH es más prevalente en niños que en niñas (4:1), y tiende a 1:1 en la edad adulta [60]. Los resultados de la metodología han sido incluidos en las Figuras 3.3 y 3.4, donde se muestran las distribuciones de probabilidad de los 4 parámetros incluidos en

el análisis. Se incluye también la división resultante del porcentaje de prevalencia.

Los candidatos resultantes de aplicar la metodología comentada arriba se han incluido en las Tablas 3.1 y 3.2 y representado en las Figuras 3.5 y 3.6. Debe puntualizarse que los candidatos con una respuesta muy rápida pueden considerarse niños con una habilidad especial para responder rápido y de manera correcta. Si los niños que responden rápido cometen, además, un número considerable de errores, entonces sí pueden considerarse probables de padecer TDAH.

En trabajos anteriores, donde la función ex-Gaussiana se ha utilizado para representar tiempos de respuesta de niños con TDAH, los resultados indican que el TDAH correlaciona con respuestas lentas y alta variabilidad en la respuesta, es decir, para valores altos de los parámetros σ y τ [34,60]. Esta es la razón por la cual se incluyen también las funciones de distribución de los parámetros de la ex-Gaussiana.

Tabla 3.1: Resultados de la clasificación para la moda (columna 1) y los 3 parámetros μ , σ y τ (columnas de la 2 a la 5) tomando en cuenta un 7% de la prevalencia mundial de TDAH en niños de edad escolar. Las filas muestran los porcentajes de las áreas a ambos lados de la moda (%-PD), la correspondiente fracción del porcentaje de prevalencia (%-Prev) y el número de niños resultante (No. Ch.).

| | Moda (ms) | | μ (ms) | | σ (ms) | | τ (ms) | |
|----------|-----------|------|------------|------|---------------|------|-------------|------|
| Moda(ms) | 525.5 | | 545.5 | | 87.5 | | 112.5 | |
| | L | R | L | R | L | R | L | R |
| %-PD | 44.4 | 55.6 | 45.0 | 55.0 | 16.5 | 83.5 | 14.9 | 85.1 |
| %-Prev. | 3.1 | 3.9 | 3.2 | 3.8 | 1.2 | 5.8 | 2.0 | 5.0 |
| No. Ch. | 6 | 7 | 6 | 7 | 2 | 11 | 2 | 11 |

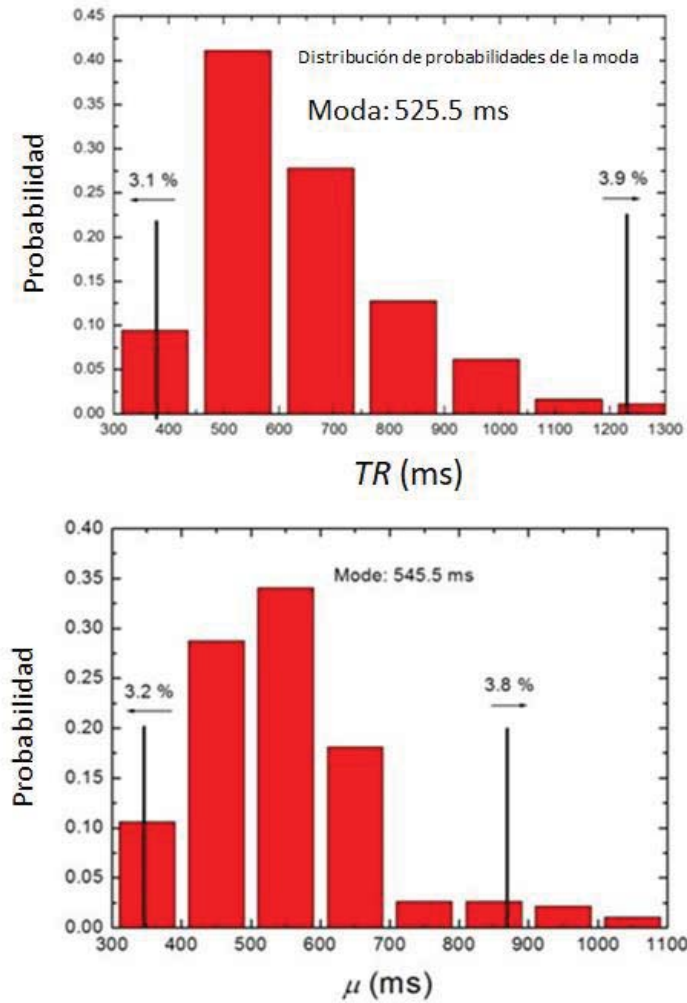


Figura 3.3: Distribución de probabilidad de las modas (panel superior) y del parámetro μ de las funciones ex-Gaussianas ajustadas a los datos (panel inferior).

Tabla 3.2: Niños seleccionados como candidatos a ser diagnosticados con TDAH, resultantes de la clasificación según las distribuciones de la moda (columna 1) y los 3 parámetros μ , σ y τ (columnas de la 2 a la 5) y tomando en cuenta un 7% de la prevalencia mundial de TDAH en niños de edad escolar.

| | Distribución de la moda | Distribución de μ | Distribución de σ | Distribución de τ |
|--------------------------------------|---|--|---|--|
| Etiquetas de los niños seleccionados | 2, 28, 34, 55, 77, 75, 130, 85, 102, 107, 134, 142, 159 | 28, 34, 55, 58, 75, 77, 80, 102, 106, 130, 163, 167, 184 | 5, 39, 41, 58, 71, 80, 85, 109, 130, 136, 141, 183, 184 | 5, 28, 34, 55, 58, 80, 109, 113, 133, 136, 163, 183, 187 |

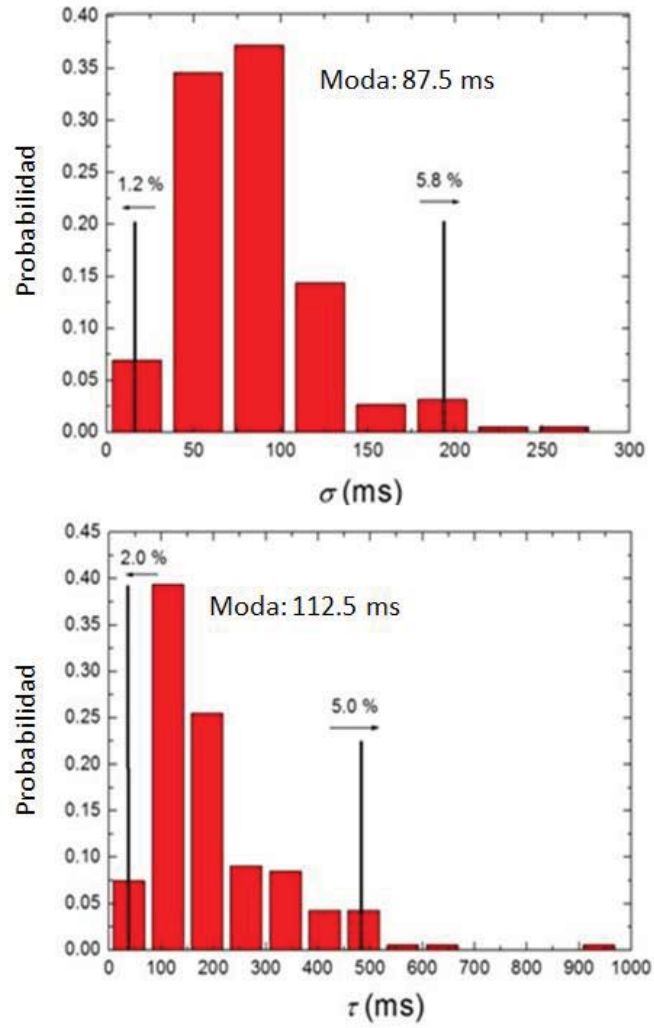


Figura 3.4: Distribución de probabilidad del parámetro σ (panel superior) y de τ (panel inferior) de las funciones ex-Gaussianas ajustadas a los datos.

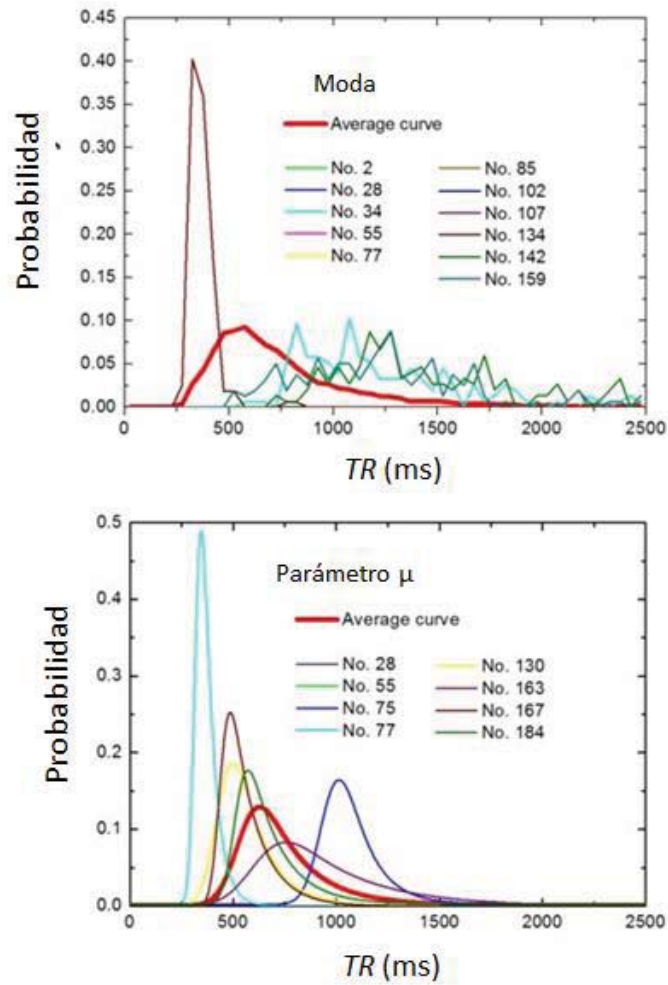


Figura 3.5: Distribuciones de probabilidad de los candidatos que resultan de la distribución de probabilidad de la moda (panel superior) y de la distribución del parámetro μ (panel inferior). También se ha incluido la curva promedio.

3.3. Criterio basado en el vector de los parámetros de la función ex-Gaussiana.

Con los resultados de los ajustes utilizando funciones ex-Gaussianas se pueden definir 190 vectores de tres dimensiones, donde las componentes representan la distancia de los parámetros μ_i, σ_i, τ_i con respecto las modas de sus respectivas distribuciones, M^μ, M^σ, M^τ ,

$$X_i = (\mu_i - M^\mu, \sigma_i - M^\sigma, \tau_i - M^\tau). \quad (3.2)$$

A continuación, se utilizan dos definiciones de norma para el vector planteado en la ecuación 3.2, de manera que cada estudiante quedará definido por un escalar. La norma Euclídea del vector en la ecuación 3.3 se escribiría de la siguiente manera,

$$\|X_i\|_2 = ((\mu_i - M^\mu)^2 + (\sigma_i - M^\sigma)^2 + (\tau_i - M^\tau)^2)^{1/2}. \quad (3.31)$$

La segunda definición de norma que utilizaremos es la norma del máximo,

$$\|X_i\|_\infty = \max (|\mu_i - M^\mu|, |\sigma_i - M^\sigma|, |\tau_i - M^\tau|). \quad (3.4)$$

La Figura 3.7 muestra las curvas, según las definiciones de normas comentadas anteriormente en las ecuaciones 3.3 y 3.4. Los picos más altos en el gráfico representan los niños cuyos parámetros de la ex-Gaussiana se ubican más lejos de sus respectivas modas. En este caso, los niños con etiquetas 5, 34, 41, 58, 80, 110, 131, 137, 142, 169, 185, 186, 189 representan los 13 más alejados (~7% of 190) para ambas normas.

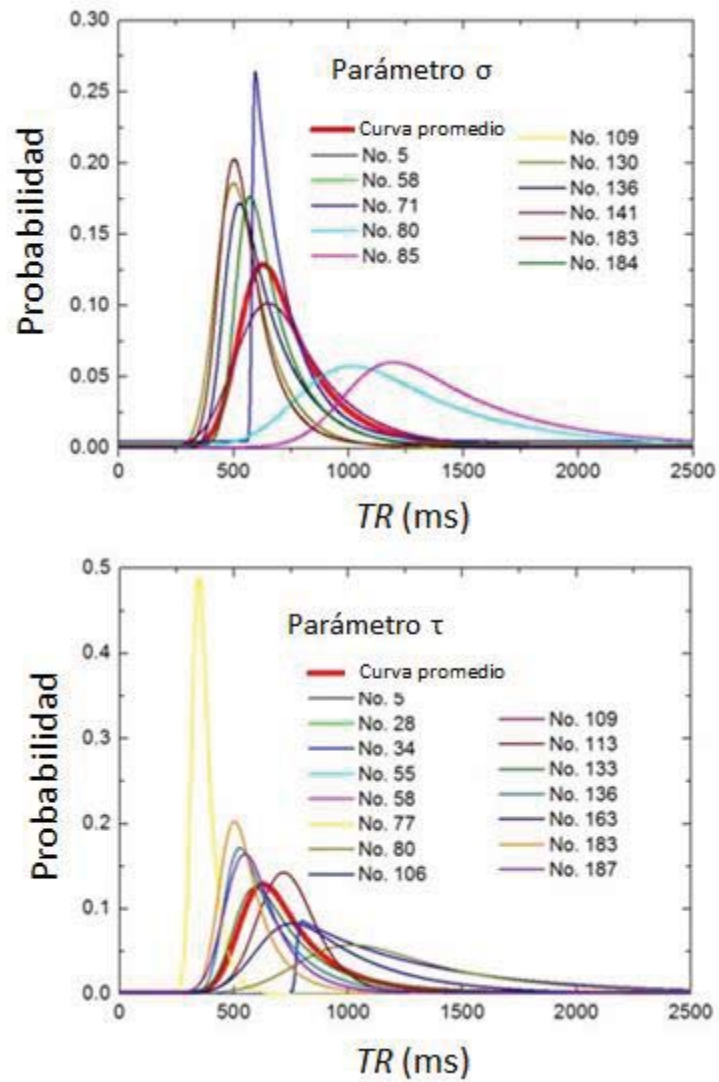


Figura 3.6: Distribuciones de probabilidad de los candidatos que resultan de la distribución del parámetro σ (panel superior) y de la distribución del parámetro τ (panel inferior). También se ha incluido la curva promedio.

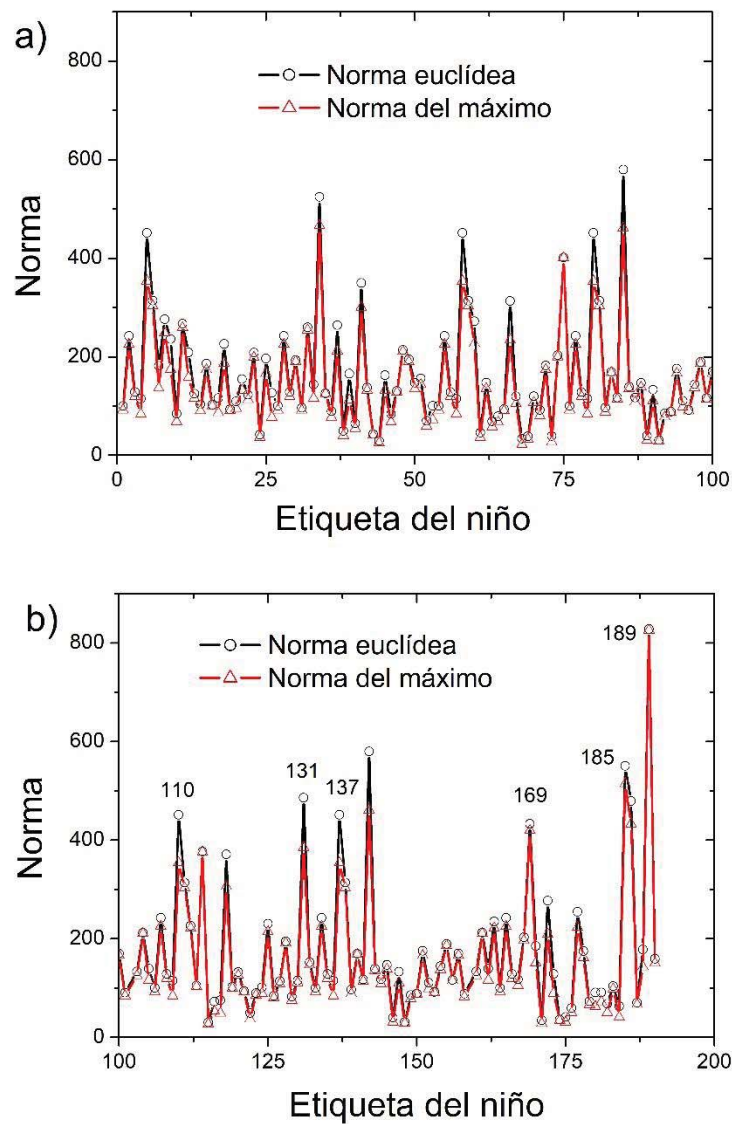


Figura 3.7: Normas Euclídea y del máximo, aplicadas al vector de la ecuación 3.2 en función de las etiquetas que identifican a los estudiantes (desde 1 a 100 en el panel superior y desde el 101 al 190 en el panel inferior). Los estudiantes con etiquetas 110 (M), 131 (F), 137 (M), 169 (F), 185 (M), y 189 (F) aparecen solo en esta clasificación. La letra “M” indica el género masculino y la letra “F” el femenino.

Capítulo 4

Correlaciones y modelo de la colectividad

4.1. Análisis de Fourier de los tiempos de reacción.

Como un primer análisis, y para tener una medida del comportamiento de los tiempos de respuesta a lo largo de estímulos consecutivos, se realiza el cálculo del valor medio de los TRs, para cada estímulo por una muestra de 190 niños.

Específicamente, construimos un vector de 166 componentes (número de estímulos visuales en los experimentos) donde cada componente se corresponde con el valor medio para cada estímulo a través de la muestra de 190 participantes. Los resultados se muestran en la Figura 4.1 con círculos abiertos. Esta vez, los errores cometidos por los participantes no se han tenido en cuenta. Esta variable se analizará más adelante en este Capítulo, en la sección 4.2.

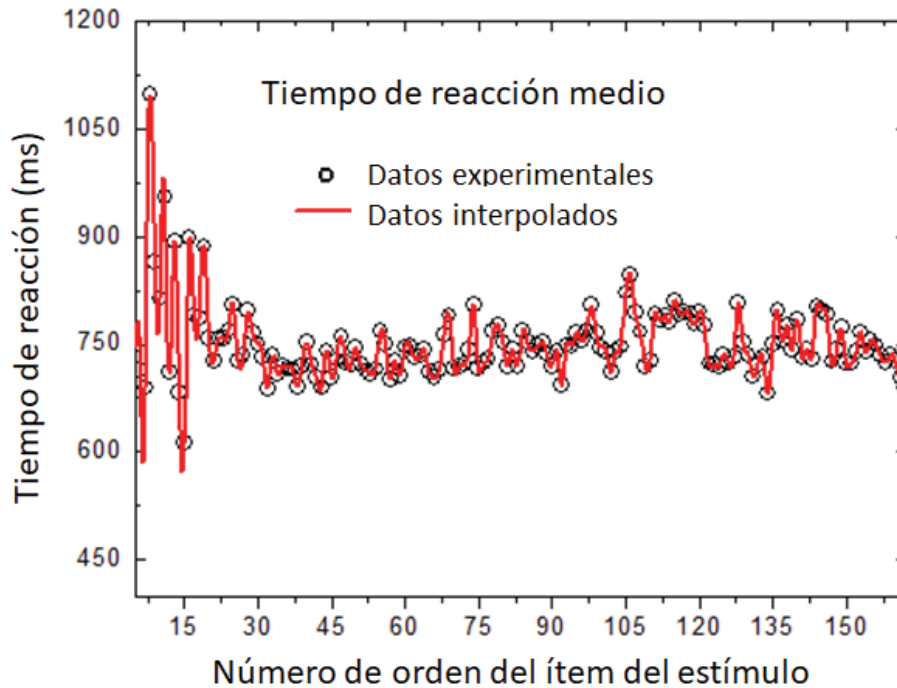


Figura 4.1: Tiempo de reacción medio a lo largo de la muestra de 190 participantes en función del número de orden de presentación de los estímulos.

Con el objetivo de completar los datos de tiempo de respuesta a lo largo de los estímulos consecutivos para cada participante, se han realizado interpolaciones para estimar los tiempos de RTs en aquellos estímulos donde el niño ha cometido errores. Concretamente, hemos seleccionado un método de interpolación en el marco del formalismo del núcleo reproductor en el espacio de Hilbert (RKHS por sus siglas en inglés), el que ha sido utilizado con éxito en las referencias [61-66] para representar superficies de energía potencial de sistemas moleculares de pocos átomos. Hemos escogido este método porque muestra varias ventajas sobre los comúnmente utilizados, como los splines. Es un método genérico que no utiliza parámetros porque utiliza todo el conjunto de datos para realizar cada acto de interpolación. Al utilizar el conjunto de todos los datos, el método es capaz de captar la tendencia global del comportamiento del niño a lo largo de estímulos consecutivos.

La redensificación de los datos (upsampling) se ha realizado con el objetivo de incrementar la resolución espectral y para mejorar el aspecto visual del espectro.

Los valores originales se conservan de manera tal que este proceso no afecta a los datos originales. Los resultados de los tiempos de respuesta promediados para la muestra de 190 participantes, utilizando este procedimiento de interpolación, se presentan en la Figura 4.1 con una línea continua.

La técnica de la transformada rápida de Fourier (FFT) se ha aplicado a los tiempos de respuesta de cada participante con el objetivo de obtener el espectro de frecuencias. La Figura 4.2 muestra el espectro promedio para la muestra de participantes. Se pueden apreciar algunos picos de frecuencia, indicando que hay frecuencias que se repiten a lo largo de los estímulos de todos los participantes, lo cual resulta en un patrón de frecuencia común. La principal frecuencia del espectro se encuentra en $0,1 \text{ ítem}^{-1}$, es decir, hay un patrón común cada 10 ítems. El período correspondiente del patrón sería aproximadamente 7,5s, considerando que el valor medio tomado entre los participantes es 750ms dentro de los primeros 10 ítems (Figura 4.1). Los estudios de variabilidad intra-individual (IIV por sus siglas en inglés) en niños indican que los niños con TDAH muestran un patrón característico en la respuesta a la frecuencia de 0,05Hz (cada 20s) en relación con una frecuencia de 0,075Hz (13,3s) en niños tomados como control [13].

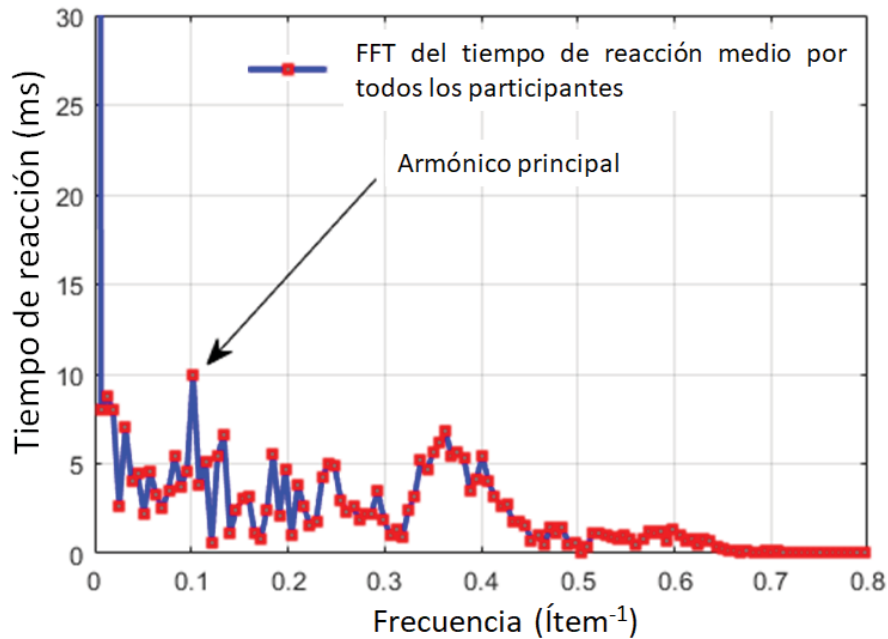


Figura 4.2: Transformada rápida de Fourier media, calculada para la muestra de 190 participantes.

4.2. Análisis espectral basado en la entropía de Shannon.

Para complementar los resultados de la FFT se ha calculado la entropía espectral para la totalidad de la muestra. Este cálculo involucra una matriz espectral de dimensión 166×190 (166 tiempos de respuesta para cada uno de los 190 participantes). De esta manera se puede determinar si hay una distribución similar en el espectro de frecuencia de cada participante, lo cual implicaría un tiempo de reacción común ante un estímulo visual común.

Para averiguar si hay una relación de similitud lineal se han calculado las correlaciones a pares a través de la muestra de los 190 participantes. El algoritmo de correlación utilizado se basa en el coeficiente de correlación de Pearson.

La Figura 4.3 muestra los resultados de la matriz de correlación calculada a partir de los valores de entropía espectral tomada para toda la muestra de participantes.

El gráfico incluye un primer grupo de 11.026 pares de correlación mayores de 0,9 (correspondientes al 61,41% del número total de pares). Este grupo involucra un conjunto de 149 participantes con un patrón muy similar en la distribución de frecuencias.

Hay un segundo grupo de 6.441 de pares de correlación (35,87%) cuyos valores se ubican entre 0,5 y 0,9, que incluye a 114 participantes.

Finalmente, hay un tercer grupo con 33 participantes, que presenta similitudes menos distintivas, con 528 pares de correlación con valores menores de 0,5 (2,72%).

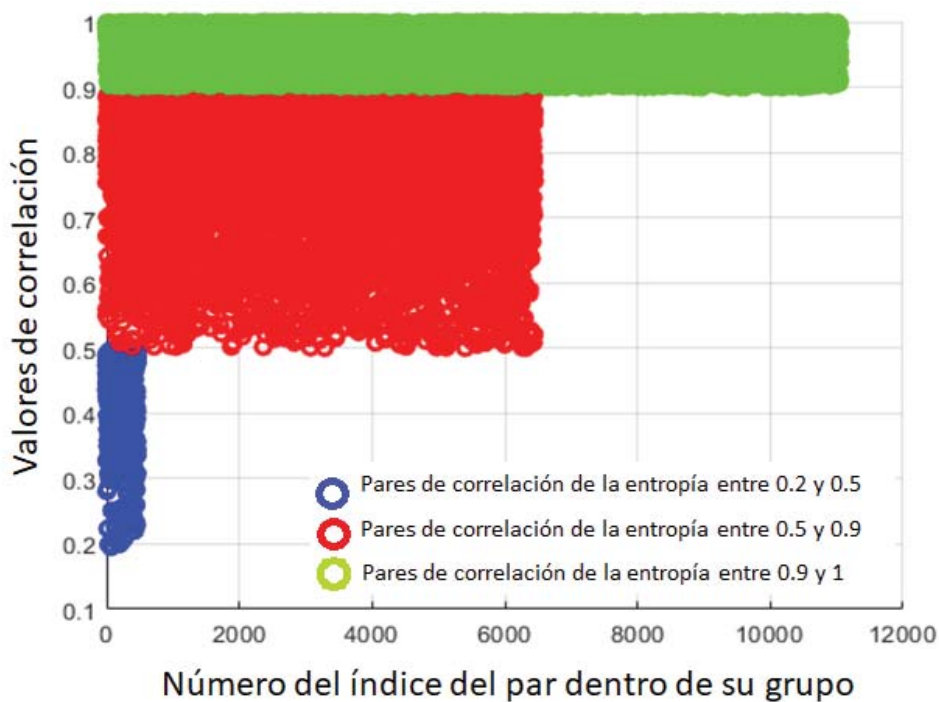


Figure 4.3: Pares de correlación de la entropía espectral agrupados por intervalos de asociación en función del índice del par dentro de cada grupo de asociación.

Se debe puntualizar que el análisis basado en la entropía se basa en los pares de correlación y no en los individuos por separado. Por lo tanto, hay participantes que aparecen en varios grupos de asociación, dado que presentan relaciones

lineales en mayor o menor medida sobre la base del coeficiente de correlación. En consecuencia, la suma de los valores 149, 114 y 33, respectivamente, es mayor que 190 participantes, ya que hay pares comunes a más de un grupo de asociación.

Como es bien conocido, la entropía mide el grado de organización de un sistema. En correspondencia con esto, hay un incremento en la energía medida (espectro de potencia) que resulta de las interacciones de las asociaciones. Este último se representa en este caso por una variable cuantitativa, que es la correlación, y por un cambio determinístico o aleatorio en el sistema, representado, en este caso, por los estímulos visuales. Cada estado asociativo mostrado en la Figura 4.3 resulta de cada una de estas interacciones individuales para cada participante, lo cual se cuantifica con el coeficiente de correlación de Pearson.

Para el caso analizado, esta relación de comportamiento medida a través de la entropía y mostrada en la Figura 4.3, proporciona una distribución del comportamiento colectivo en relación con las características independientes del grupo, como se muestra con la relación lineal intrínseca entre los tiempos de respuesta de varios individuos sin compartir conocimiento entre ellos. Esto sugiere que hay cierta regularidad y patrones comunes para determinadas características grupales en una población.

La Figura 4.4 muestra la entropía espectral media en función del tiempo y calculada para la muestra de participantes. Esta magnitud caracteriza la coherencia de las respuestas de los individuos a lo largo del curso de los experimentos. De esa manera, la entropía espectral es proporcional a la probabilidad de que los participantes cometan errores mientras responden a los estímulos visuales consecutivos. Se puede apreciar en la Figura 4.4 que los valores de la entropía espectral comienzan desde un punto de inestabilidad, porque los participantes se están adaptando a los experimentos. Le sigue un tiempo más largo de comportamiento estacionario, dado que los participantes se adaptan a los estímulos visuales mostrando una respuesta estable. En la última etapa, se comienza a visualizar valores transitorios y picos en la entropía, lo cual

es debido al hecho de que los participantes llevan ya algún tiempo realizando el experimento y la variable “fatiga” comienza a influir.

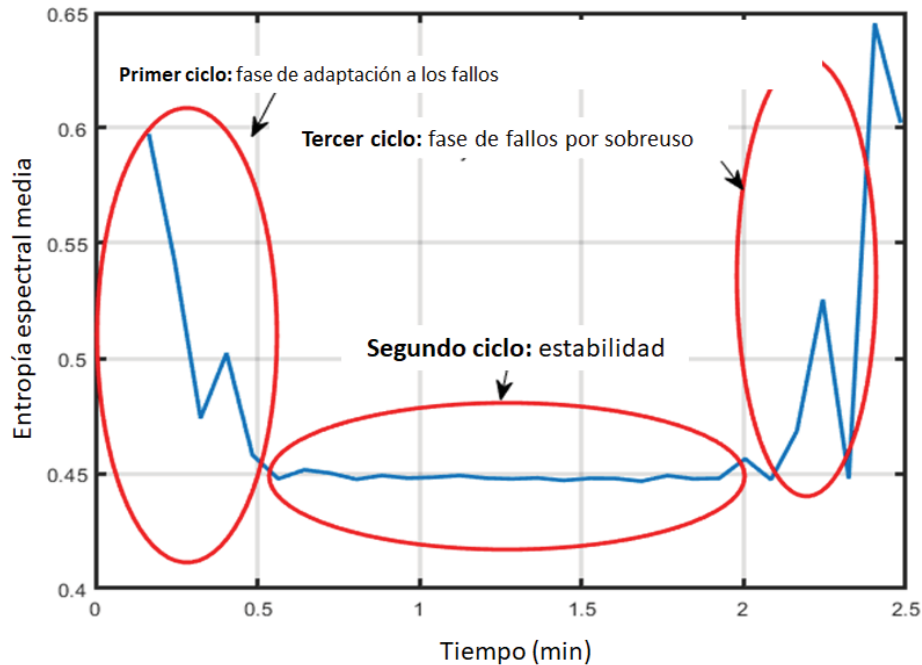


Figura 4.4: Entropía espectral media en función del tiempo.

Este resultado está acuerdo con el modelo de Tiempo Medio entre Fallos (MTBF por sus siglas en inglés), ampliamente utilizado en la industria para el diagnóstico predictivo de maquinarias y equipos eléctricos. Este modelo consiste en tomar la media aritmética de los intervalos de tiempo entre fallos de un sistema. Este modelo asume que el sistema falla y se recupera inmediatamente, como parte de un proceso de renovación [67].

La Figura 4.5 ilustra una representación esquemática de este modelo, donde se pueden apreciar las tres etapas comentadas anteriormente. En la primera etapa, la maquinaria se encuentra en el período de prueba, donde los fallos pueden ocurrir de manera aleatoria, dependiendo de las condiciones y regímenes de operación. La segunda etapa incluye un período de estabilidad de la maquinaria, es decir, cuando ya ha pasado el período de prueba y se adapta a las condiciones y regímenes de trabajo. Finalmente, en la tercera etapa, se

manifiesta el sobreuso de la maquinaria, más allá de las horas recomendadas por el fabricante y es cuando los fallos pueden incrementarse de nuevo.

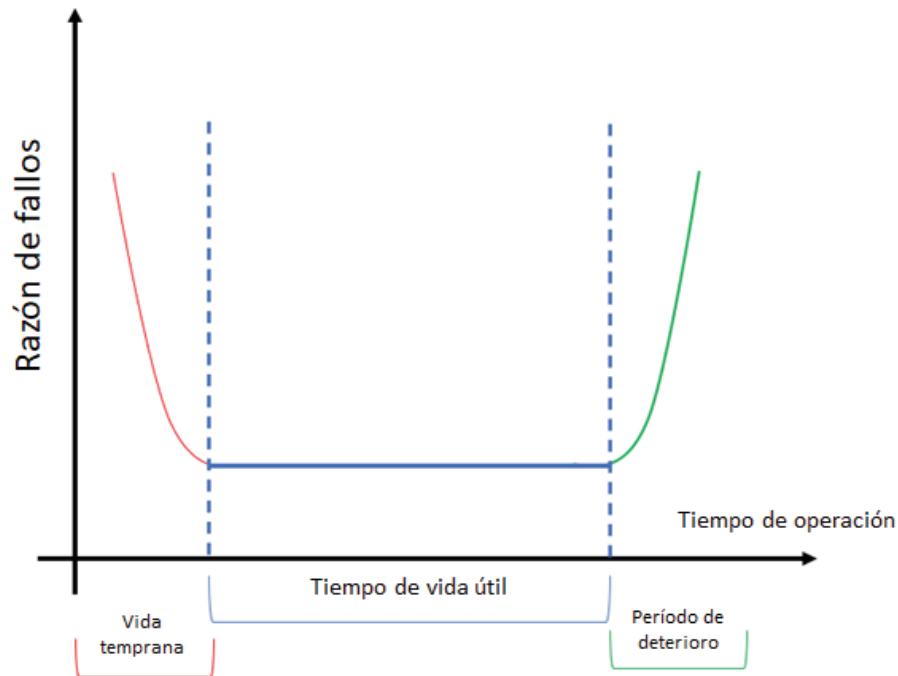


Figura 4:5: Representación esquemática de la curva del modelo de Tiempo Medio entre Fallos (MTBF por sus siglas en inglés) para maquinarias.

Los resultados expuestos en las secciones 4.1 y 4.2 han sido publicados en la referencia [68].

4.3. Emergencia de la distribución de Maxwell-Boltzmann de los datos de tiempos de reacción. Modelo de la colectividad.

En esta sección se analizan los tiempos de respuesta de los individuos con un enfoque de colectividad. Para ello, se ha tomado una muestra de 168 niños (84 del género masculino y 84 del femenino).

Sea i el índice que especifica el individuo i -ésimo, donde $i = 1, \dots, N = 168$. Cada individuo realiza un experimento que arroja un conjunto de tiempos de

reacción cuya distribución se puede representar por una función ex-Gaussiana. Esta distribución se caracteriza por 3 parámetros, que se pueden expresar en forma de un vector tridimensional,

$$\vec{a}_i = (\mu_i, \sigma_i, \tau_i) \quad (4.1)$$

Caractericemos la distribución de tiempos de respuesta de individuo i -ésimo a través de sus momentos, que es una manera más general que utilizar los parámetros μ_i, σ_i, τ_i . Podemos considerar estos momentos centrados en el origen (momentos brutos) o alrededor del correspondiente promedio (momentos centrales). De esa manera,

$$M_i \equiv \int_{-\infty}^{\infty} t f_i(t) dt, \quad (4.2)$$

es el momento bruto de orden 1, mientras que

$$S_i^2 \equiv \int_{-\infty}^{\infty} (t - M_i)^2 f_i(t) dt, \quad (4.3)$$

es la varianza o segundo momento central, de la variable aleatoria t con distribución de probabilidad $f_i(t)$ y centrado en M_i . La raíz cuadrada de la ecuación 4.3 es la desviación típica.

Por otro lado, la asimetría de la distribución λ_i se define como:

$$\lambda_i \equiv \frac{1}{S_i^2} \int_{-\infty}^{\infty} (t - M_i)^3 f_i(t) dt, \quad (4.4)$$

Es decir, el momento centrado de orden 3 dividido por la desviación estándar al cuadrado. Se ha dividido por S_i^2 en lugar de por S_i^3 con el objetivo de mantener la misma dimensión para los tres momentos, es decir, milisegundos.

Específicamente, en el caso de la función ex-Gaussiana, los momentos mencionados anteriormente tienen la siguiente forma: $M = \mu + \sigma$ (primer momento, ecuación 4.2, la varianza $S^2 = \sigma^2 + \tau^2$ (segundo momento, ecuación 4.3 y la asimetría de la distribución: $\lambda = 2\tau^3/S^{\frac{3}{2}}$ (tercer momento, ecuación 4.4) [52]. Entonces, μ_i, σ_i, τ_i no son los momentos de la distribución, sino los

parámetros de la función Gaussiana y exponencial decreciente, que se convolucionan para dar origen a la función ex-Gaussiana. La función de distribución de los tiempos de respuesta para cada participante se puede expresar en términos de los momentos de la ex-Gaussiana de la siguiente manera:

$$\vec{b}_i = (M_i, S_i, \lambda_i), \quad (4.5)$$

Hemos considerado los tres primeros momentos solo porque queremos mantener la dimensionalidad del vector en la ecuación 4.5 igual a 3. Los N vectores \vec{b}_i obtenidos a partir de los tiempos de reacción experimentales, representan los N individuos analizados.

Centremos los vectores en los momentos medios, es decir,

$$(M_i - \langle M \rangle, S_i - \langle S \rangle, \lambda_i - \langle \lambda \rangle), \quad (4.6)$$

donde

$$\langle M \rangle = \frac{1}{N_P} \sum_{i=1}^{N_P} M_i; \langle S \rangle = \frac{1}{N_P} \sum_{i=1}^{N_P} S_i; \langle \lambda \rangle = \frac{1}{N_P} \sum_{i=1}^{N_P} \lambda_i, \quad (4.7)$$

De esa manera, se puede definir el siguiente vector para cada participante:

$$\vec{v}_i = (v_i^{(1)}, v_i^{(2)}, v_i^{(3)}) = (M_i^*, S_i^*, \lambda_i^*) = \left(\frac{M_i - \langle M \rangle}{\langle M \rangle}, \frac{S_i - \langle S \rangle}{\langle S \rangle}, \frac{\lambda_i - \langle \lambda \rangle}{\langle \lambda \rangle} \right) \quad (4.8)$$

Se evidencia que las tres componentes de \vec{v}_i , es decir, $v_i^{(1)}$, $v_i^{(2)}$ y $v_i^{(3)}$ están distribuidas de manera normal a lo largo de la muestra de N estudiantes. Los gráficos en la Figura 4.6 (paneles a, b y c) muestran las distribuciones Gaussianas de cada una de las componentes respectivamente. A un nivel de confianza de 0,05, se demuestra que los datos de las tres componentes del vector \vec{v}_i provienen de una distribución normal, según la prueba de normalidad de Kolmogorov-Smirnov [69]. Por lo tanto, el tamaño de la muestra utilizado en este trabajo ($N = 168$) es suficiente para mostrar el comportamiento gaussiano

de $v_i^{(1)}$, $v_i^{(2)}$ y $v_i^{(3)}$. De hecho, cuando escogemos aleatoriamente una muestra de 50 individuos dentro de los 168 participantes, el error relativo porcentual entre las respectivas varianzas de $v_i^{(1)}$, $v_i^{(2)}$ y $v_i^{(3)}$ se mantienen dentro de 3,6 %.

Es bien conocido que el módulo de \vec{v}_i se puede expresar como:

$$|\vec{v}_i| = \sqrt{(v_i^{(1)})^2 + (v_i^{(2)})^2 + (v_i^{(3)})^2} \quad (4.9)$$

En este trabajo, vamos a utilizar la siguiente forma de la densidad de probabilidad de Maxwell-Boltzmann (MB) de las velocidades de un gas ideal,

$$Q(|\vec{v}_i|) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} B^{-3/2} |\vec{v}_i|^2 \exp\left(-\frac{|\vec{v}_i|^2}{2B}\right), \quad (4.10)$$

donde B es su único parámetro. A partir de esta expresión se puede escribir la entropía de Boltzmann de la siguiente manera:

$$S = -\sum_{i=1}^N p_i \ln p_i \quad (4.11)$$

En nuestro caso, N es el número de individuos en la muestra, y p_i es la probabilidad asociada al individuo i -ésimo:

$$p_i = Q(|\vec{v}_i|) / \sum_{j=1}^N Q(|\vec{v}_j|) \quad (4.12)$$

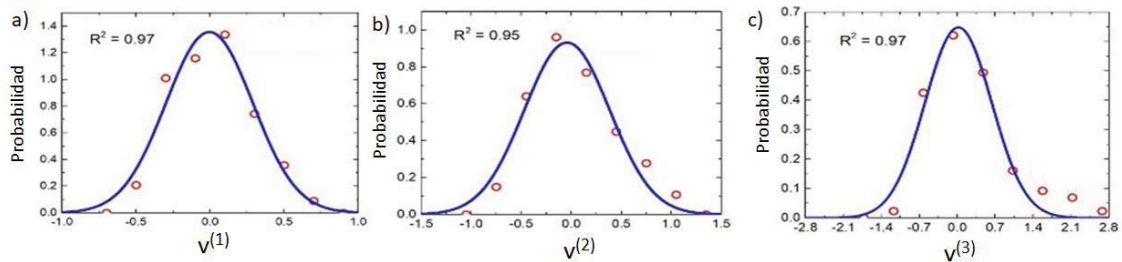


Figura 4.6: Distribuciones de probabilidad de los momentos adimensionales calculados a partir de 24.192 tiempos de reacción experimentales y a lo largo de una muestra de 168 niños (círculos rojos abiertos). El valor medio se muestra en el panel a), la desviación estándar en el panel b) y la asimetría de la distribución en el panel c). El coeficiente de determinación del ajuste se muestra en cada panel y la curva de ajuste, con una línea de color azul.

La Figura 4.7 (panel a) muestra el ajuste de la distribución de MB (ecuación 4.10) a todos los datos de tiempo de reacción obtenidos de los experimentos. Los ajustes mostrados en la Figura 4.6 se realizaron con el algoritmo para ajustes no lineales de Levenberg-Marquardt [54,55]. El Anexo B incluye los momentos de la función ex-Gaussiana y el valor de $|\vec{v}_i|$ correspondiente para cada uno de los participantes. El valor de B obtenido es $0,159 \pm 0,010$ con un coeficiente de determinación $R^2 = 0,88$. El comportamiento Gaussiano de las distribuciones de $v_i^{(1)}$, $v_i^{(2)}$ y $v_i^{(3)}$ conduce a la distribución de Maxwell-Boltzmann de $|\vec{v}_i|$, incluso como en nuestro caso, donde las varianzas de las tres componentes no son iguales. Como se mencionó anteriormente, el ajuste resultante es bueno, con un coeficiente de determinación de $R^2 = 0,88$ utilizando 24.192 tiempos de reacción.

La Figura 4.7 (panel b) muestra la curva de la densidad entrópica para los datos experimentales de este trabajo. La entropía no es solamente un concepto ampliamente conocido en la Física [40], sino también una herramienta de análisis en una variedad de campos fuera de la Física [70-73]. Particularmente, en Psicología la entropía se ha aplicado, por ejemplo, al análisis de experimentos cognitivos [70-73]. Incluso cuando la entropía es una propiedad de la distribución completa, los individuos se pueden ubicar en esta curva (Figura 4.7, panel b) y, por lo tanto, se puede determinar su grado de contribución a la colectividad. De esta manera, podemos saber acerca del comportamiento de cada individuo en relación con el grupo al que pertenece. No se necesita una referencia externa sino que se utiliza la misma distribución “natural” de la colectividad, en este caso dada por la Figura 4.7, panel b. De hecho, a partir de la contribución de cada individuo a la densidad de entropía, se puede establecer una metodología de clasificación dado que los individuos se pueden clasificar como más o menos entrópicos dentro del grupo. Con “más o menos entrópico” nos referimos a que los individuos pueden contribuir en una mayor o menor medida a la densidad entrópica, en dependencia del término individual correspondiente en la ecuación 4.11. Nos gustaría puntualizar que esta metodología de clasificación, fundamentada en la entropía, no se basa en un criterio necesariamente *ad hoc*, sino que emerge de un comportamiento natural y lo consideramos una de las contribuciones de esta tesis.

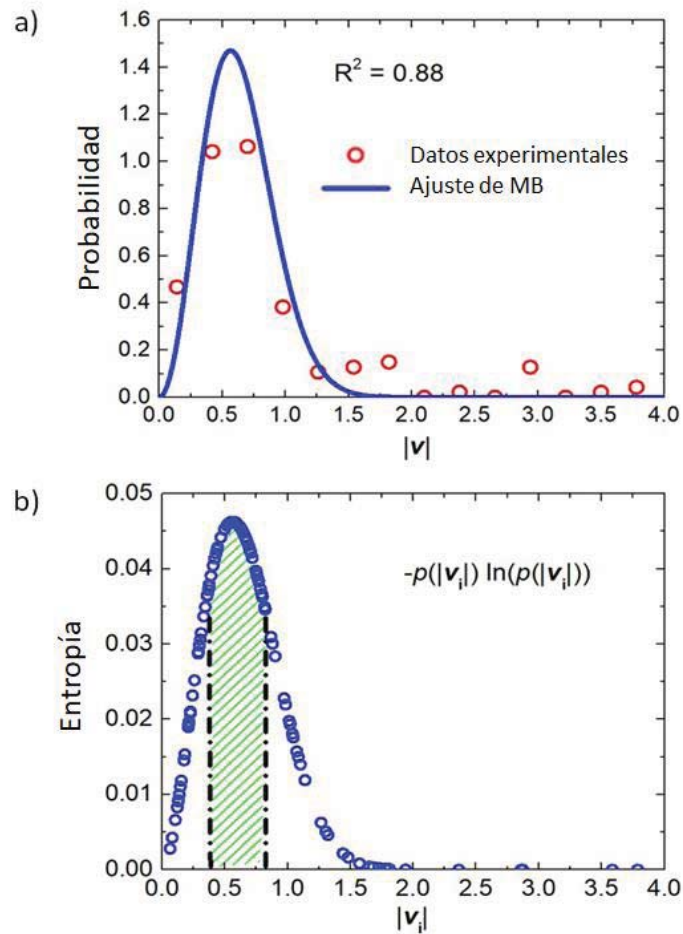
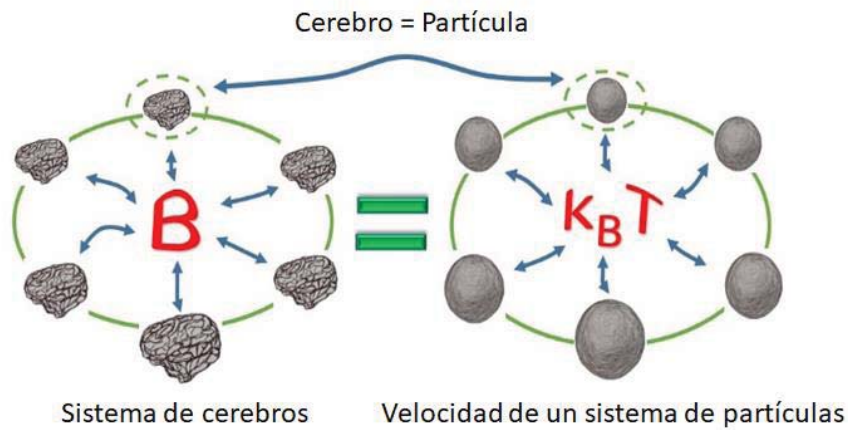


Figura 4.7: Distribución de Maxwell-Boltzmann de un sistema de cerebros en el panel a) y la correspondiente densidad entrópica en el panel b). Los datos mostrados en el panel a) involucraron 24.192 datos experimentales de tiempos de reacción a lo largo de una muestra de 168 niños. El coeficiente de determinación del ajuste, R^2 , se incluye en el panel a). A modo de ejemplo, el 50% de los niños se ha representado con un patrón de rayas en el panel b).

El sistema de N individuos está básicamente caracterizado por el parámetro B en la ecuación 4.10. Como se ha destacado en las secciones anteriores, la muestra consiste de individuos que hacen los experimentos de manera independiente y responden a los estímulos visuales en tiempos muy cortos. Esto sugiere modelar el grupo de individuos como las partículas de un gas ideal, las que no interactúan entre ellas, solo con colisiones elásticas. Por lo tanto, hay una correspondencia uno-a-uno entre los tiempos de respuesta colectivos de un grupo de niños y el sistema de partículas que conforman el gas ideal. En la Figura 4.8 se muestran los principales elementos de esta correspondencia. En este caso concreto, el comportamiento del cerebro (dígase “individuo”) se puede

entender como el comportamiento de una partícula en un gas ideal. Los tres momentos de la distribución ex-Gaussiana para cada niño, encuentran su análogo en las componentes de las velocidades de las partículas de un gas ideal. La distribución de los módulos de un vector definido a partir de los momentos conduce a una distribución Chi con 3 grados de libertad, la que también representa la distribución de los módulos de las partículas en un gas ideal. Las partículas forman un sistema a partir de su interacción con un termostato caracterizado por su temperatura. Por otro lado, el grupo de individuos se caracteriza por un parámetro B , cuyo significado está aún por determinar en el contexto actual. Con estos resultados, nos situamos en un nivel superior de generalidad, más allá de las funciones ex-Gaussianas utilizadas para representar los tiempos de respuesta de un individuo, con el objetivo de capturar la regularidad de la colectividad. Estos resultados representan un paso en dos direcciones: podemos saber sobre la respuesta colectiva de un grupo de individuos y también sobre el comportamiento de un individuo en relación con el grupo al que pertenece.



Distribución de Maxwell-Boltzmann

Figura 4.8: Representación esquemática de la correspondencia entre un sistema de cerebros y el sistema de partículas de un gas ideal. Ambos sistemas se pueden describir por una función de Maxwell-Boltzmann.

Conclusiones

En esta tesis se ha presentado una metodología informatizada y automática de clasificación basada en tiempos de respuesta para realizar un pre-diagnóstico rápido de niños candidatos de padecer TDAH u otro trastorno.

La metodología se ha sustentado en la moda de las funciones de distribución empíricas de los tiempos de respuesta de los participantes y en los 3 parámetros derivados de los ajustes con la función ex-Gaussiana. Específicamente, se han detectado aquellos niños cuyo comportamiento se aleja del comportamiento normativo, tomando las modas de las distribuciones de los parámetros anteriores como referencia. Los niños con comportamiento menos normativo han sido seleccionados tomando el porcentaje mundial de prevalencia de TDAH, dividido a su vez en dos porcentajes distribuidos en las zonas de los tiempos cortos y de los tiempos largos. Se debe especificar que los candidatos identificados en las regiones de tiempos muy rápidos pueden ser normativos, solo que tienen la capacidad de responder rápido y bien. En este caso, se puede tomar los errores como criterio complementario para el diagnóstico. Respuestas rápidas con muchos errores puede ser un indicador de déficit de atención.

La metodología utilizada proporciona una serie de posibilidades de clasificación de los niños con base en experimentos de tiempos de respuesta a estímulos visuales. También hemos presentado una metodología construida a partir en las normas de vector cuyas componentes son las distancias de los parámetros a las modas de sus respectivas distribuciones. Este último criterio permite identificar cada participante dentro de su grupo, por un valor escalar único, en lugar de por una serie de tiempos de respuesta.

Se debe puntualizar que el valor de este trabajo no se limita al pre-diagnóstico de TDAH, sino que podría ser adaptado también para realizar el pre-diagnóstico de otros trastornos cognitivos, no solo en niños sino también en adultos. El desarrollo de instrumentos objetivos, basados en mediciones directas como es el caso de los tiempos de respuesta, puede ofrecer ventaja sobre los métodos tradicionales, basados en entrevistas a personas relacionadas con el niño

sospechoso de padecer TDAH. Aunque en última instancia el diagnóstico debe realizarse por un facultativo, los resultados de nuestra metodología pueden ayudar al especialista a enfocarse en un grupo más reducido de niños, lo que puede ayudar a ahorrar tiempo y recursos.

En una segunda parte de la tesis, los tiempos de reacción a estímulos visuales se han analizado haciendo uso de un análisis espectral y con la metodología típica del análisis de fallos en máquinas. Los resultados del análisis espectral utilizando la transformada rápida de Fourier (FFT) indican que los participantes presentan patrones en sus respuestas a lo largo de las series de estímulos visuales. La frecuencia principal se ubicó en $0,1 \text{ ítem}^{-1}$ (cada 10 ítems, alrededor de 7,5 s). De manera similar, un análisis de correlación basado en la entropía espectral mostró que hay correlaciones entre las series de tiempos de reacción de los participantes, quienes desarrollaron los experimentos de manera independiente y sin intercambiar información. Este resultado se puede entender considerando que los participantes funcionan como un sistema o colectividad cuyas respuestas no son independientes unas de las otras. Por otro lado, el análisis de los errores cometidos por los participantes mientras estos últimos respondían a los estímulos visuales, mostró que siguen un comportamiento consistente con el modelo de fallos en maquinarias, comúnmente utilizado en la industria para el análisis predictivo de máquinas y equipos eléctricos.

En una última parte, se discute la aparición de la teoría del gas ideal cuando se describen los tiempos de respuesta de un grupo de individuos. La función ex-Gaussiana representa muy bien los tiempos de respuesta de un individuo pero falla a la hora de proporcionar una caracterización completa que abarque la respuesta temporal de un grupo de individuos. La distribución de tiempos de respuesta de una colectividad se puede obtener situándonos en un nivel de descripción más general, tal como el proporcionado por una distribución de Maxwell-Boltzmann de los módulos de las velocidades de un gas ideal. Para validar el modelo, se han utilizado 24.192 tiempos de respuesta, obteniéndose un R^2 de 0,88 en el ajuste. Los resultados sugieren que el mismo principio de máxima entropía, válido para un gas ideal, sería también válido aquí para la

distribución de tiempos de respuesta de un grupo de individuos. Un paso significativo con respecto a trabajos anteriores es que con nuestro modelo podemos conocer acerca del comportamiento de un individuo con respecto al grupo al que pertenece y en el marco de una ley física. En términos prácticos, esta propuesta de metodología de clasificación basada en la entropía de Boltzmann no es un criterio *ad hoc* sino una consecuencia de una ley natural. En la base de la emergencia de la distribución de Maxwell-Boltzmann hay una evidencia experimental, es decir, las distribuciones de los momentos siguen una distribución Gaussiana entre el grupo de niños, un hecho derivado de un comportamiento natural. Los resultados sugieren que el modelo fundamental para las partículas independientes de un gas ideal es el mismo que para los tiempos de respuesta de un grupo de individuos.

Continuidad de los trabajos

- En trabajos futuros esperamos poder obtener más evidencias de la relación existente entre los tiempos de respuesta de un grupo de individuos y las partículas independientes de un gas ideal.
- El mismo modelo que caracteriza la colectividad se utilizará para clasificar a los individuos con respecto al grupo natural al que pertenecen. Este hecho tiene importantes implicaciones en diferentes áreas del conocimiento tales como la educación, diagnóstico de enfermedades mentales, proceso de decisión en ciencias económicas y finanzas, donde es importante definir un grupo de referencia o control.
- Otras preguntas que queremos abordar en trabajos futuros tienen que ver con el proceso de envejecimiento a lo largo del ciclo de vida o lo que se considera normativo en Ciencias de la Salud o Educación. Los resultados de esta tesis muestran que los tiempos de reacción de un grupo de individuos coetáneos siguen la misma función de distribución que las velocidades de las partículas de un gas ideal, la distribución de Maxwell-Boltzmann. Poder contar con un modelo que describa el comportamiento de un colectivo humano, en un momento dado, sugiere fuertemente el planteamiento de un modelo que describa la evolución a lo largo del ciclo de vida. Modelos similares se pudieran plantear para otras especies, es decir, no solo para los seres humanos.
- La posibilidad de existencia de un parámetro que prediga la evolución de la función de distribución de los tiempos de reacción de la colectividad a lo largo del ciclo de vida de los humanos o de otras especies puede tener implicaciones filosóficas importantes.

Bibliografía

- [1] Sroubek, A.; Kelly, M.; Li, X. Inattentiveness in attention-deficit/hyperactivity disorder. *Neurosci. Bull.* 2013, 29, 103–110.
- [2] Clauss-Ehlers, C.S. (Ed.) *Encyclopedia of Cross-Cultural School Psychology*; Springer Science & Business Media LLC: Boston, MA, USA, 2010.
- [3] American Psychiatric Association. *American Psychiatric Association Diagnostic and Statistical Manual of Mental Disorders*, 5th ed.; APA:Washington, DC, USA, 2013.
- [4] Barkley, R.A. *Attention Deficit Hyperactivity Disorder: A Handbook for Diagnosis and Treatment*, 3rd ed.; Guilford: New York, NY, USA, 2006.
- [5] DuPaul, G.J.; Volpe, R.J.; Jitendra, A.K.; Lutz, J.G.; Lorah, K.S.; Gruber, R. Elementary school students with AD/HD: Predictors of academic achievement. *J. Sch. Psychol.* 2004, 42, 285–301.
- [6] Sonuga-Barke, E.; Koerting, J.; Smith, E.; McCann, D.C.; Thompson, M. Early detection and intervention for attention-deficit/hyperactivity disorder. *Expert Rev. Neurother.* 2011, 11, 557–563.
- [7] Lavigne Cerván, R.; Romero-Pérez, J.F. *The Attention Deficit Hyperactivity Disorder*; Ediciones Pirámide: Madrid, Spain, 2010; (In Spanish, EL TDAH).
- [8] Pliszka, S. Practice parameter for the assessment and treatment of children and adolescents with attention-deficit/hyperactivity disorder. *J. Am. Acad. Child Adolesc. Psychiatry* 2007, 46, 894–921.
- [9] Tarantino, S.C.; Mogentale, C.; Bisiacchi, P.S. Time-on-Task in Children with ADHD: An ex-Gaussian Analysis. *Vincenza J. Int. Neuropsychol. Soc.* 2013, 19, 820–828.
- [10] Klein, C.; Wendling, K.; Huettner, P.; Ruder, H.; Peper, M. Intra-subject variability in attention-deficit hyperactivity disorder. *Biol. Psychiatry* 2006, 60, 1088–1097.
- [11] Nigg, J.T.; Willcutt, E.G.; Doyle, A.E.; Sonuga-Barke, E.J. Causal heterogeneity in attention-deficit/hyperactivity disorder: Do we need neuropsychologically impaired subtypes? *Biol. Psychiatry* 2005, 57, 1224–1230.
- [12] Willcutt, E.G.; Doyle, A.E.; Nigg, J.T.; Faraone, S.V.; Pennington, B.F. Validity of the executive function theory of attention-deficit/hyperactivity disorder: A meta-analytic review. *Biol. Psychiatry* 2005, 57, 1336–1346.

- [13] Castellanos, F.X.; Sonuga-Barke, E.J.; Scheres, A.; Di Martino, A.; Hyde, C.; Walters, J.R. Varieties of attention-deficit/hyperactivity disorder-related intra-individual variability. *Biol. Psychiatry* 2005, 57, 1416–1423.
- [14] Thorpe, S.J.; Fize, D.; Marlot, C. Speed of processing in the human visual system. *Nature* 1996, 381, 520–522.
- [15] Krajbich, I.M.; Bartling, B.; Hare, T.A.; Fehr, E. Rethinking fast and slow based on a critique of reaction-time reverse inference. *Nat. Commun.* 2015, 6, 7455.
- [16] Barinaga, M. Neuroscience: Neurons Put the Uncertainty Into Reaction Times. *Science* 1996, 274, 344.
- [17] Tuch, D.S.; Salat, D.H.; Wisco, J.J.; Zaleta, A.K.; Hevelone, N.D.; Rosas, H.D. Choice reaction time performance correlates with diffusion anisotropy in white matter pathways supporting visuospatial attention. *Proc. Natl. Acad. Sci. USA* 2005, 102, 12212–12217.
- [18] Colonius, H.; Diederich, A. Measuring multisensory integration: From reaction times to spike counts. *Sci. Rep.* 2017, 7, 1–11.
- [19] Ritchie, J.B.; De Beeck, H.O. Using neural distance to predict reaction time for categorizing the animacy, shape, and abstract properties of objects. *Sci. Rep.* 2019, 9, 1–8.
- [20] Castro-Palacio, J.C.; Fernández de Córdoba, P.; Isidro, J.M.; Navarro-Pardo, E.; Selvas Aguilar, R. Percentile study of Chi distribution. Application to response time data. *Mathematics* 2020, 8, 514–520.
- [21] Hernaiz-Guijarro, M.; Castro-Palacio, J.C.; Pardo, E.N.; Isidro, J.M.; Castellá, P.F.D.C. A Probabilistic Classification Procedure Based on Response Time Analysis Towards a Quick Pre-Diagnosis of Student's Attention Deficit. *Mathematics* 5 (7) (2019) 473.
- [22] Ruhai, G.; Weiwei, Z.; Zhong, W. Research on the Driver Reaction Time of Safety Distance Model on Highway Based on Fuzzy Mathematics. In *Proceedings of the IEEE 2010 International Conference on Optoelectronics and Image Processing (ICOIP)*, Haikou, China, 11–12 November 2010; pp. 293–296.
- [23] Yamagishi, T.; Matsumoto, Y.; Kiyonari, T.; Takagishi, H.; Li, Y.; Kanai, R.; Sakagami, M. Response time in economic games reflects different types of decision conflict for prosocial and prosself individuals. *Proc. Natl. Acad. Sci. USA* 2017, 114, 6394–6399.
- [24] Badau, D.; Baydil, B.; Badau, A. Differences among Three Measures of Reaction Time Based on Hand Laterality in Individual Sports. *Sports* 2018, 6, 45.

- [25] Abbasi-Kesbi, R.; Memarzadeh-Tehran, H.; Deen, M.J. Technique to estimate human reaction time based on visual perception. *Health Technol. Lett.* 2017, 4, 73–77.
- [26] Luce, R.D. *Response Times: Their Role in Inferring Elementary Mental Organization*; Oxford University Press: New York, NY, USA, 1986.
- [27] Hockley, W.E.; Corballis, M.C. Test of serial scanning in item recognition. *Can. J. Psychol.* 1982, 36, 189–212.
- [28] Ratcliff, R.; Murdock, B.B. Retrieval processes in recognition memory. *Psychol. Rev.* 1976, 83, 190–214.
- [29] Gmehlin, D.; Fuermaier, A.B.M.; Walther, S.; Debelak, R.; Rentrop, M.; Westermann, C.; Sharma, A.; Tucha, L.; Koerts, J.; Tucha, O.; et al. Intraindividual Variability in Inhibitory Function in Adults with ADHD—An Ex-Gaussian Approach. *PLoS ONE* 2014, 9, e112298.
- [30] Adamo, N.; Hodsoll, J.; Asherson, P.; Buitelaar, J.K.; Kuntsi, J. Ex-Gaussian, Frequency and Reward Analyses Reveal Specificity of Reaction Time Fluctuations to ADHD and Not Autism Traits. *J. Abnorm. Child Psychol.* 2019, 47, 557–567.
- [31] Burbeck, S.L.; Luce, R.D. Evidence from auditory simple reaction times for both change and level detectors. *Percept. Psychophys.* 1982, 32, 117–133.
- [32] Heathcote, A.; Popiel, S.J.; Mewhort, D.J.K. Analysis of response time distributions: An example using the Stroop task. *Psychol. Bull.* 1991, 109, 340–347.
- [33] Matzke, D.; Wagenmakers, E.-J. Psychological interpretation of the ex-Gaussian and shifted Wald parameters: A diffusion model analysis. *Psychon. Bull. Rev.* 2009, 16, 798–817.
- [34] Shahar, N.; Teodorescu, A.R.; Karmon-Presser, A.; Anholt, G.E.; Meiran, N. Memory for Action Rules and Reaction Time Variability in Attention-Deficit/Hyperactivity Disorder. *Biol. Psychiatry Cogn. Neurosci. Neuroimaging* 2016, 1, 132–140.
- [35] Leth-Steensen, C.; King Elbaz, Z.; Douglas, V.I. Mean response times, variability, and skew in the responding of ADHD children: A response time distributional approach. *Acta Psychol.* 2000, 104, 167–190.

- [36] Johnson, K.A.; Kelly, S.P.; Bellgrove, M.A.; Barry, E.; Cox, M.; Gill, M.; Robertson, I.H. Response variability in Attention Deficit Hyperactivity Disorder: Evidence for neuropsychological heterogeneity. *Neuropsychologia* 2007, 45, 630–638.
- [37] Di Martino, A.; Ghaffari, M.; Curchack, J.; Reiss, P.; Hyde, C.; Vannucci, M.; Petkova, E.; Klein, D.F.; Castellanos, F.X. Decomposing Intra-Subject Variability in Children with Attention-Deficit/Hyperactivity Disorder. *Biol. Psychiatry* 2008, 64, 607–614.
- [38] Vaurio, R.; Simmonds, D.J.; Mostofsky, S.H. Increased intra-individual reaction time variability in attention-deficit/hyperactivity disorder across response inhibition tasks with different cognitive demands. *Neuropsychologia* 2009, 47, 2389–2396.
- [39] Moret-Tatay, C.; Perea, M. Is the go/no-go lexical decision task preferable to the yes/no task with developing readers? *J. Exp. Child Psychol.* 2011, 110, 125–132.
- [40] Tolman, R. *The principles of statistical mechanics.* (Dover Publications Inc., New York, 2003).
- [41] Hattona, I. A., Dobsona, A. P., Storch, D., Galbraithe, E. D. & Loreauh, M. Linking scaling laws across eukaryotes, *PNAS* 201900492 (2019).
- [42] Danielson, ML, et al. Prevalence of Parent-Reported ADHD Diagnosis and Associated Treatment Among U.S. Children and Adolescents, 2016. *Journal of Clinical Child & Adolescent Psychology*, Volume 47, 2018 - Issue 2
- [43] Simon V., Czobor P., Bálint S., et al. Prevalence and correlates of adult attention-deficit hyperactivity disorder: a meta-analysis. *Br J Psychiatry* 194(3):204–211, 2009.
- [44] Forster, K.I.; Forster, J.C. DMDX: A windows display program with millisecond accuracy. *Behav. Res. Methods Instrum. Comput.* 2003, 35, 116–124.
- [45] Fan, J.; McCandliss, B.D.; Sommer, T.; Raz, A.; Posner, M.I. Testing the efficiency and independence of attentional networks. *J. Cogn. Neurosci.* 2002, 14, 340–347.
- [46] Moret-Tatay, C.; Moreno-Cid, A.; Argimon, I.I.D.L.; Quarti Irigaray, T.; Szczerbinski, M.; Murphy, M.; Vázquez-Martínez, A.; Vázquez-Molina, J.; Sáiz-Mauleon, B.; Navarro-Pardo, E.; et al. The effects of age and emotional valence on recognition memory: An ex-Gaussian components analysis. *Scand. J. Psychol.* 2014, 55, 420–426.
- [47] Posner, M.I.; Dehaene, S. Attentional networks. *Trends Neurosci.* 1994, 17, 75–79.

- [48] Posner, M.I.; Raichle, M.E. *Images of Mind*; Scientific American Library: New York, NY, USA, 1994.
- [49] Lacouture, Y.; Cousineau, D. How to use MATLAB to fit the ex-Gaussian and other probability functions to a distribution of response times. *Tutor. Quant. Methods Psychol.* 2008, 4, 35–45.
- [50] Ratcliff, R.; McKoon, G. The diffusion decision model: Theory and data for two-choice decision tasks. *Neural Comput.* 2008, 20, 873–922.
- [51] Ratcliff, R. Group reaction time distributions and an analysis of distribution statistics. *Psychol. Bull.* 1979, 86, 446–461.
- [52] Moret-Tatay, C.; Gamermann, D.; Navarro-Pardo, E.; Fernández-de-Córdoba-Castellá, P. ExGUtils: A python package for statistical analysis with the ex-Gaussian probability density. *Front. Psychol.* 2018, 9, 1–11.
- [53] Hohle, R.H. Inferred components of reaction times as functions of foreperiod duration. *J. Exp. Psychol.* 1965, 69, 382–386.
- [54] Levenberg, K. A method for the solution of certain non-linear problems in least squares. *Q. Appl. Math.* 1944, 2, 164–168.
- [55] Marquardt, D. An algorithm for least-squares estimation of nonlinear parameters. *J. Soc. Ind. Appl. Math.* 1963, 11, 431–441.
- [56] Castellanos, F.X.; Sonuga-Barke, E.J.; Milham, M.P.; Tannock, R. Characterizing cognition in ADHD: Beyond executive dysfunction. *Trends Cogn. Sci.* 2006, 10, 117–123.
- [57] Martínez, M.E.I.; Garcia-Gomez, J.M.; Sáez, C.; Castellá, P.F.D.C.; Conejero, J.A. Feature Extraction and Similarity of Movement Detection during Sleep, Based on Higher Order Spectra and Entropy of the Actigraphy Signal: Results of the Hispanic Community Health Study/Study of Latinos. *Sensors* 2018, 18, 4310.
- [58] Emond, V.; Joyal, C.; Poissant, H. Neuroanatomie structurelle et fonctionnelle du trouble déficitaire d'attention avec ou sans hyperactivité (TDAH) [Structural and functional neuroanatomy of attention-deficit hyperactivity disorder (ADHD)]. *Encephale* 2009, 35, 107–114. (In French)
- [59] Reinhardt, M.C.; Reinhardt, C.A. Attention deficit-hyperactivity disorder, comorbidities, and risk situations. *J. Pediatr. (Rio. J.)* 2013, 89, 124–130.
- [60] Hwang-Gu, S.L.; Chen, Y.C.; Liang, S.H.; Ni, H.C.; Lin, H.Y.; Lin, C.F.; Gau, S.S. Exploring the Variability in Reaction Times of Preschoolers at Risk of Attention-Deficit/Hyperactivity Disorder: An ex-Gaussian Analysis. *J. Abnorm. Child Psychol.* 2019.

- [61] Ho, T.S.; Rabitz, H. A general method for constructing multidimensional molecular potential energy surfaces from ab initio calculations. *J. Chem. Phys.* 1996, 104, 2584–2597.
- [62] Castro-Palacio, J.C.; Nagy, T.; Meuwly, M. Computational study of the $O(3P) + NO(2\pi)$ reaction at temperatures relevant to the Hypersonic Flight Regime. *J. Chem. Phys.* 2014, 141, 164319.
- [63] Unke, O.T.; Castro-Palacio, J.C.; Bemish, R.; Meuwly, M. Collision-induced rotational excitation in $N+2 (2\Sigma+g, v = 0)-Ar$: Comparison of computations and experiment. *J. Chem. Phys.* 2016, 144, 224307.
- [64] Denis-Alpizar, O.; Inostroza, N.; Castro Palacio, J.C. Rotational relaxation of $CF^+(X^1\Sigma)$ in collision with He (1^1S). *Mon. Not. R. Astron. Soc.* 2018, 473.
- [65] Castro-Palacio, J.C.; Bemish, R.J.; Meuwly, M. Communication: Equilibrium rate coefficients from atomistic simulations: The $O(3P) + NO(2\pi) = O_2(X^3\Sigma_g) + N(4S)$ reaction at temperatures relevant to the hypersonic flight regime. *J. Chem. Phys.* 2015, 142, 091104.
- [66] Unke, O.T.; Meuwly, M. Toolkit for the Construction of Reproducing Kernel-Based Representations of Data: Application to Multidimensional Potential Energy Surfaces. *J. Chem. Inf. Model.* 2017, 57, 1923–1931.
- [67] Ferreira, F.J.T.E.; Baoming, G.; De Almeida, A.T. Reliability and Operation of High-Efficiency Induction Motors. In *Proceedings of the IEEE Transactions on Industry Applications*, Calgary, AB, Canada, 5–8 May 2015; Volume 52, doi:10.1109/TIA.2016.2600677.
- [68] M.E. Iglesias-Martínez, M. Hernaiz-Guijarro, J. C. Castro-Palacio, P. Fernández-de-Córdoba, J. M. Isidro y E. Navarro-Pardo. Machinery Failure Approach and Spectral Analysis to Study the Reaction Time Dynamics over Consecutive Visual Stimuli: An Entropy-Based Model. *Mathematics* 8 (11) (2020) 1979.
- [69] Doob, J. L. *Stochastic Processes*. (John Wiley & Sons Inc, New Jersey, 1966).
- [70] Del-Prado-Martín, F. Macroscopic thermodynamics of reaction times. *Journal of Mathematical Psychology* 55, 302–319 (2011).
- [71] Collell, G. & Fauquet, J. Brain activity and cognition: A connection from thermodynamics and information theory. *Frontiers in Psychology* 6, PMC4468356 (2015).
- [72] Tsallis, A. C., Tsallis, C., Magalhaes, A. C. N. & Tamarit, F. A. Human and computer learning: an experimental study. *ComPlexUs* 1, 181–189 (2003).
- [73] Tsallis, C. Possible generalization of Boltzmann-Gibbs statistics. *Journal of Statistical Physics* 52, 479–487 (1988).

Anexo A. Parámetros derivados del ajuste de las funciones de distribución de tiempos de respuesta con la función ex-Gaussiana. También se incluyen las incertidumbres y el coeficiente de determinación R^2 .

| Etiqueta del niño | μ | $\Delta\mu$ | σ | $\Delta\sigma$ | τ | $\Delta\tau$ | R^2 |
|-------------------|---------|-------------|----------|----------------|---------|--------------|-------|
| 1 | 509.905 | 9.691 | 70.113 | 10.156 | 204.958 | 27.634 | 0.92 |
| 2 | 320.243 | 1.002 | 24.460 | 1.205 | 49.327 | 2.174 | 0.99 |
| 3 | 426.089 | 2.485 | 41.221 | 2.622 | 100.348 | 6.294 | 0.99 |
| 4 | 461.935 | 5.604 | 49.780 | 6.257 | 180.059 | 17.640 | 0.95 |
| 5 | 625.017 | 25.930 | 103.227 | 27.224 | 416.369 | 95.579 | 0.78 |
| 6 | 657.217 | 24.226 | 130.568 | 21.275 | 250.176 | 56.331 | 0.87 |
| 7 | 697.108 | 26.781 | 132.895 | 24.231 | 289.330 | 67.366 | 0.85 |
| 8 | 477.053 | 10.971 | 71.787 | 7.207 | 65.470 | 17.285 | 0.95 |
| 9 | 678.567 | 5.871 | 56.705 | 6.756 | 271.493 | 22.240 | 0.96 |
| 10 | 429.687 | 8.039 | 59.235 | 6.328 | 74.184 | 14.624 | 0.95 |
| 11 | 455.141 | 8.152 | 62.096 | 8.323 | 156.086 | 21.176 | 0.93 |
| 12 | 371.971 | 5.293 | 55.223 | 3.617 | 53.288 | 8.542 | 0.98 |
| 13 | 445.240 | 6.085 | 70.187 | 5.072 | 99.939 | 11.797 | 0.98 |
| 14 | 479.434 | 5.589 | 46.993 | 6.446 | 199.024 | 19.223 | 0.95 |
| 15 | 670.740 | 14.205 | 112.898 | 13.756 | 297.836 | 39.734 | 0.93 |
| 16 | 557.241 | 7.568 | 73.393 | 7.806 | 203.058 | 20.962 | 0.96 |
| 17 | 449.988 | 6.593 | 69.439 | 6.579 | 163.875 | 16.626 | 0.96 |
| 18 | 529.325 | 6.925 | 31.239 | 10.630 | 242.355 | 34.108 | 0.87 |
| 19 | 432.277 | 2.237 | 43.309 | 2.235 | 92.707 | 5.295 | 0.99 |
| 20 | 346.615 | 1.915 | 42.501 | 1.678 | 68.359 | 3.908 | 0.99 |
| 21 | 582.001 | 15.725 | 106.339 | 10.689 | 104.522 | 25.666 | 0.95 |
| 22 | 654.098 | 17.108 | 86.549 | 17.661 | 263.385 | 50.961 | 0.85 |
| 23 | 479.659 | 7.423 | 8.337 | 2.123 | 189.388 | 2.112 | 0.94 |
| 24 | 509.890 | 9.690 | 70.102 | 10.155 | 205.001 | 27.635 | 0.92 |
| 25 | 320.243 | 1.002 | 24.460 | 1.205 | 49.327 | 2.174 | 0.99 |
| 26 | 426.089 | 2.485 | 41.221 | 2.622 | 100.348 | 6.294 | 0.99 |
| 27 | 541.718 | 7.810 | 54.104 | 9.159 | 302.089 | 32.684 | 0.93 |
| 28 | 571.096 | 7.495 | 71.852 | 7.772 | 202.336 | 20.941 | 0.96 |
| 29 | 660.233 | 19.319 | 136.277 | 15.072 | 185.414 | 37.135 | 0.93 |
| 30 | 545.076 | 12.571 | 80.302 | 13.032 | 238.182 | 36.599 | 0.90 |
| 31 | 506.113 | 16.278 | 108.530 | 14.325 | 190.736 | 35.612 | 0.92 |
| 32 | 394.386 | 6.985 | 42.356 | 8.466 | 322.344 | 34.894 | 0.92 |
| 33 | 504.662 | 18.673 | 116.518 | 12.658 | 114.360 | 30.483 | 0.94 |
| 34 | 632.634 | 39.866 | 175.045 | 28.898 | 219.255 | 74.097 | 0.85 |
| 35 | 510.470 | 9.142 | 92.654 | 8.234 | 166.953 | 20.136 | 0.96 |
| 36 | 663.846 | 75.053 | 220.567 | 57.224 | 395.235 | 175.205 | 0.66 |
| 37 | 413.415 | 4.976 | 54.756 | 4.461 | 91.186 | 10.394 | 0.97 |
| 38 | 570.608 | 11.075 | 94.877 | 7.814 | 98.988 | 18.560 | 0.97 |
| 39 | 639.764 | 9.387 | 70.116 | 10.125 | 241.572 | 29.565 | 0.93 |

Anexo A. Parámetros del ajuste con funciones ex-Gaussianas

| | | | | | | | |
|----|---------|---------|---------|--------|---------|---------|------|
| 40 | 612.643 | 18.124 | 108.715 | 14.908 | 159.145 | 35.937 | 0.91 |
| 41 | 417.683 | 2.992 | 63.395 | 2.615 | 100.014 | 6.095 | 0.99 |
| 42 | 334.340 | 4.765 | 53.189 | 4.531 | 102.791 | 10.726 | 0.97 |
| 43 | 355.582 | 2.802 | 45.896 | 2.737 | 97.418 | 6.589 | 0.99 |
| 44 | 604.035 | 6.142 | 76.185 | 6.505 | 247.193 | 18.803 | 0.97 |
| 45 | 402.090 | 2.394 | 50.485 | 1.887 | 63.352 | 4.354 | 0.99 |
| 46 | 547.536 | 32.177 | 128.036 | 18.759 | 98.601 | 47.307 | 0.90 |
| 47 | 487.531 | 4.052 | 48.314 | 4.579 | 185.122 | 13.161 | 0.97 |
| 48 | 509.890 | 9.690 | 70.102 | 10.155 | 205.001 | 27.635 | 0.92 |
| 49 | 320.243 | 1.002 | 24.460 | 1.205 | 49.327 | 2.174 | 0.99 |
| 50 | 426.089 | 2.485 | 41.221 | 2.622 | 100.348 | 6.294 | 0.99 |
| 51 | 461.935 | 5.604 | 49.780 | 6.257 | 180.059 | 17.640 | 0.95 |
| 52 | 605.708 | 428.591 | 121.718 | 48.387 | 15.286 | 438.386 | 0.90 |
| 53 | 573.856 | 12.235 | 90.600 | 10.700 | 149.949 | 25.734 | 0.93 |
| 54 | 409.913 | 1.238 | 42.173 | 1.132 | 76.392 | 2.682 | 1.00 |
| 55 | 487.174 | 7.452 | 72.457 | 5.392 | 78.028 | 12.647 | 0.97 |
| 56 | 520.028 | 7.163 | 54.909 | 7.815 | 180.522 | 21.487 | 0.93 |
| 57 | 454.758 | 7.270 | 64.680 | 6.696 | 117.237 | 15.896 | 0.95 |
| 58 | 625.017 | 25.930 | 103.227 | 27.224 | 416.369 | 95.579 | 0.78 |
| 59 | 531.367 | 6.109 | 66.083 | 5.830 | 133.728 | 14.154 | 0.97 |
| 60 | 602.678 | 18.218 | 87.026 | 18.104 | 219.534 | 48.394 | 0.84 |
| 61 | 437.989 | 1.722 | 51.407 | 1.446 | 73.351 | 3.332 | 1.00 |
| 62 | 579.900 | 9.656 | 7.108 | 6.523 | 144.206 | 14.825 | 0.92 |
| 63 | 371.415 | 1.953 | 45.421 | 1.787 | 77.522 | 4.126 | 0.99 |
| 64 | 526.544 | 8.144 | 60.680 | 8.030 | 134.756 | 19.768 | 0.93 |
| 65 | 539.289 | 12.001 | 53.757 | 11.547 | 109.354 | 27.731 | 0.84 |
| 66 | 945.886 | 7.410 | 71.321 | 6.576 | 121.493 | 15.719 | 0.96 |
| 67 | 509.890 | 9.690 | 70.102 | 10.155 | 205.001 | 27.635 | 0.92 |
| 68 | 320.244 | 1.002 | 24.460 | 1.205 | 49.326 | 2.174 | 0.99 |
| 69 | 426.089 | 2.485 | 41.221 | 2.622 | 100.348 | 6.294 | 0.99 |
| 70 | 461.935 | 5.604 | 49.780 | 6.257 | 180.059 | 17.640 | 0.95 |
| 71 | 580.448 | 27.558 | 106.572 | 27.277 | 306.600 | 81.244 | 0.77 |
| 72 | 625.017 | 25.930 | 103.227 | 27.224 | 416.369 | 95.579 | 0.78 |
| 73 | 505.063 | 16.042 | 81.351 | 15.981 | 200.590 | 41.847 | 0.86 |
| 74 | 550.639 | 22.440 | 108.870 | 21.656 | 277.625 | 61.338 | 0.84 |
| 75 | 536.347 | 20.606 | 115.764 | 18.407 | 220.058 | 47.313 | 0.88 |
| 76 | 409.991 | 3.883 | 56.426 | 3.775 | 117.852 | 9.108 | 0.98 |
| 77 | 437.532 | 3.130 | 41.695 | 3.361 | 117.535 | 8.525 | 0.98 |
| 78 | 407.288 | 3.535 | 44.622 | 3.337 | 86.699 | 7.940 | 0.98 |
| 79 | 524.390 | 8.536 | 72.735 | 8.033 | 142.913 | 19.526 | 0.95 |
| 80 | 648.754 | 17.755 | 117.253 | 15.227 | 196.642 | 37.982 | 0.92 |
| 81 | 573.687 | 13.006 | 83.611 | 10.938 | 124.045 | 25.807 | 0.92 |
| 82 | 467.598 | 6.767 | 80.540 | 6.198 | 147.930 | 14.985 | 0.97 |
| 83 | 532.716 | 10.072 | 92.773 | 9.574 | 200.273 | 24.537 | 0.95 |
| 84 | 598.009 | 14.272 | 100.263 | 14.283 | 288.849 | 41.777 | 0.92 |
| 85 | 596.344 | 11.774 | 95.236 | 11.203 | 209.077 | 29.008 | 0.94 |

Anexo A. Parámetros del ajuste con funciones ex-Gaussianas

| | | | | | | | |
|-----|----------|--------|---------|--------|---------|---------|------|
| 86 | 1000.874 | 41.343 | 148.937 | 43.545 | 499.106 | 135.533 | 0.70 |
| 87 | 408.257 | 3.656 | 51.845 | 3.823 | 138.568 | 9.746 | 0.98 |
| 88 | 359.461 | 8.987 | 73.550 | 6.580 | 80.331 | 15.356 | 0.96 |
| 89 | 430.736 | 15.431 | 92.892 | 10.756 | 94.094 | 25.508 | 0.93 |
| 90 | 379.228 | 3.299 | 51.784 | 3.324 | 119.885 | 8.147 | 0.98 |
| 91 | 634.426 | 12.564 | 77.456 | 11.172 | 131.433 | 26.659 | 0.91 |
| 92 | 569.297 | 13.860 | 70.207 | 14.583 | 210.161 | 40.082 | 0.86 |
| 93 | 420.568 | 1.618 | 47.179 | 1.522 | 87.701 | 3.566 | 1.00 |
| 94 | 1170.914 | 2.482 | 361.260 | 6.245 | 1.873 | 6.563 | 0.72 |
| 95 | 429.406 | 4.051 | 46.200 | 4.615 | 177.459 | 13.145 | 0.97 |
| 96 | 509.890 | 9.690 | 70.102 | 10.155 | 205.001 | 27.635 | 0.92 |
| 97 | 320.243 | 1.002 | 24.460 | 1.205 | 49.327 | 2.174 | 0.99 |
| 98 | 426.089 | 2.485 | 41.221 | 2.622 | 100.348 | 6.294 | 0.99 |
| 99 | 461.935 | 5.604 | 49.780 | 6.257 | 180.059 | 17.640 | 0.95 |
| 100 | 571.201 | 18.148 | 91.539 | 18.929 | 316.252 | 59.286 | 0.85 |
| 101 | 625.017 | 25.930 | 103.227 | 27.224 | 416.369 | 95.579 | 0.78 |
| 102 | 647.052 | 17.522 | 102.865 | 11.820 | 99.860 | 28.431 | 0.93 |
| 103 | 518.586 | 8.731 | 78.610 | 6.909 | 101.133 | 16.130 | 0.96 |
| 104 | 521.986 | 17.999 | 85.960 | 19.920 | 483.207 | 82.849 | 0.85 |
| 105 | 591.103 | 16.904 | 102.768 | 14.575 | 168.021 | 35.469 | 0.90 |
| 106 | 596.137 | 25.970 | 135.915 | 17.886 | 140.328 | 43.485 | 0.91 |
| 107 | 445.680 | 8.602 | 92.714 | 5.839 | 89.687 | 13.927 | 0.98 |
| 108 | 419.628 | 4.101 | 46.162 | 4.218 | 112.670 | 10.386 | 0.97 |
| 109 | 565.232 | 9.814 | 81.455 | 9.792 | 202.780 | 25.744 | 0.94 |
| 110 | 508.821 | 6.963 | 64.399 | 6.760 | 136.873 | 16.543 | 0.95 |
| 111 | 569.786 | 11.608 | 90.512 | 11.178 | 203.617 | 28.912 | 0.93 |
| 112 | 632.880 | 27.057 | 123.791 | 14.225 | 82.022 | 37.489 | 0.94 |
| 113 | 373.338 | 0.261 | 0.000 | 0.000 | 79.590 | 12.032 | 0.92 |
| 114 | 753.010 | 23.438 | 122.445 | 23.849 | 417.688 | 77.646 | 0.85 |
| 115 | 567.461 | 6.875 | 58.080 | 7.970 | 307.190 | 28.024 | 0.95 |
| 116 | 470.753 | 9.245 | 108.296 | 7.254 | 140.881 | 17.258 | 0.98 |
| 117 | 434.693 | 4.579 | 61.948 | 4.457 | 131.468 | 10.858 | 0.98 |
| 118 | 461.955 | 4.492 | 0.000 | 0.000 | 152.664 | 93.235 | 0.86 |
| 119 | 398.701 | 6.747 | 70.629 | 4.878 | 75.477 | 11.411 | 0.98 |
| 120 | 509.907 | 9.692 | 70.118 | 10.156 | 204.952 | 27.634 | 0.92 |
| 121 | 320.244 | 1.002 | 24.460 | 1.205 | 49.325 | 2.174 | 0.99 |
| 122 | 426.089 | 2.485 | 41.221 | 2.622 | 100.348 | 6.294 | 0.99 |
| 123 | 461.935 | 5.604 | 49.780 | 6.257 | 180.059 | 17.640 | 0.95 |
| 124 | 625.017 | 25.930 | 103.227 | 27.224 | 416.369 | 95.579 | 0.78 |
| 125 | 505.055 | 16.045 | 81.365 | 15.983 | 200.598 | 41.852 | 0.86 |
| 126 | 550.639 | 22.440 | 108.870 | 21.656 | 277.625 | 61.338 | 0.84 |
| 127 | 536.347 | 20.606 | 115.764 | 18.407 | 220.058 | 47.313 | 0.88 |
| 128 | 410.044 | 3.888 | 56.480 | 3.777 | 117.717 | 9.109 | 0.98 |
| 129 | 437.532 | 3.130 | 41.695 | 3.361 | 117.535 | 8.525 | 0.98 |
| 130 | 407.288 | 3.535 | 44.622 | 3.337 | 86.699 | 7.940 | 0.98 |
| 131 | 648.754 | 17.755 | 117.253 | 15.227 | 196.642 | 37.982 | 0.92 |

Anexo A. Parámetros del ajuste con funciones ex-Gaussianas

| | | | | | | | |
|-----|----------|--------|---------|--------|---------|---------|------|
| 132 | 573.687 | 13.006 | 83.611 | 10.938 | 124.045 | 25.807 | 0.92 |
| 133 | 573.651 | 12.998 | 83.582 | 10.935 | 124.121 | 25.803 | 0.92 |
| 134 | 467.598 | 6.767 | 80.540 | 6.198 | 147.930 | 14.985 | 0.97 |
| 135 | 532.716 | 10.072 | 92.773 | 9.574 | 200.273 | 24.537 | 0.95 |
| 136 | 598.009 | 14.272 | 100.263 | 14.283 | 288.849 | 41.777 | 0.92 |
| 137 | 1000.863 | 41.342 | 148.935 | 43.546 | 499.156 | 135.542 | 0.70 |
| 138 | 634.426 | 12.564 | 77.456 | 11.172 | 131.433 | 26.659 | 0.91 |
| 139 | 408.257 | 3.656 | 51.845 | 3.823 | 138.568 | 9.746 | 0.98 |
| 140 | 359.461 | 8.987 | 73.550 | 6.580 | 80.331 | 15.356 | 0.96 |
| 141 | 379.228 | 3.299 | 51.784 | 3.324 | 119.885 | 8.147 | 0.98 |
| 142 | 596.344 | 11.774 | 95.236 | 11.203 | 209.077 | 29.008 | 0.94 |
| 143 | 569.297 | 13.860 | 70.207 | 14.583 | 210.161 | 40.082 | 0.86 |
| 144 | 420.562 | 1.618 | 47.175 | 1.521 | 87.713 | 3.566 | 1.00 |
| 145 | 429.406 | 4.051 | 46.200 | 4.615 | 177.459 | 13.145 | 0.97 |
| 146 | 571.201 | 18.148 | 91.539 | 18.929 | 316.252 | 59.286 | 0.85 |
| 147 | 509.890 | 9.690 | 70.102 | 10.155 | 205.001 | 27.635 | 0.92 |
| 148 | 320.238 | 1.002 | 24.454 | 1.205 | 49.342 | 2.174 | 0.99 |
| 149 | 426.089 | 2.485 | 41.221 | 2.622 | 100.348 | 6.294 | 0.99 |
| 150 | 440.262 | 1.513 | 36.095 | 1.674 | 120.197 | 4.458 | 0.99 |
| 151 | 541.491 | 4.818 | 34.743 | 5.820 | 306.933 | 25.476 | 0.95 |
| 152 | 693.571 | 8.862 | 67.952 | 9.555 | 229.909 | 27.503 | 0.93 |
| 153 | 963.872 | 17.728 | 95.610 | 17.145 | 224.007 | 45.251 | 0.87 |
| 154 | 534.653 | 7.263 | 53.218 | 7.159 | 116.376 | 17.420 | 0.93 |
| 155 | 573.430 | 7.712 | 86.822 | 6.748 | 142.896 | 16.154 | 0.97 |
| 156 | 631.425 | 35.069 | 149.384 | 26.193 | 187.958 | 64.914 | 0.84 |
| 157 | 768.958 | 34.597 | 139.689 | 28.510 | 223.245 | 72.654 | 0.80 |
| 158 | 383.876 | 1.310 | 25.552 | 2.329 | 86.860 | 3.828 | 0.99 |
| 159 | 479.119 | 15.064 | 87.646 | 10.019 | 81.871 | 24.004 | 0.94 |
| 160 | 603.705 | 13.779 | 120.122 | 11.176 | 173.601 | 27.226 | 0.95 |
| 161 | 515.069 | 5.659 | 41.025 | 6.623 | 184.480 | 19.936 | 0.93 |
| 162 | 503.787 | 14.342 | 104.631 | 12.081 | 160.767 | 29.137 | 0.93 |
| 163 | 447.548 | 4.205 | 52.703 | 4.083 | 109.507 | 9.818 | 0.98 |
| 164 | 513.738 | 4.051 | 46.857 | 4.421 | 149.295 | 11.829 | 0.97 |
| 165 | 478.810 | 9.496 | 71.093 | 8.706 | 128.697 | 20.795 | 0.93 |
| 166 | 685.898 | 20.162 | 118.803 | 17.816 | 220.603 | 45.716 | 0.89 |
| 167 | 613.693 | 28.698 | 91.980 | 34.794 | 865.352 | 190.076 | 0.70 |
| 168 | 577.340 | 6.822 | 44.142 | 8.246 | 259.367 | 28.624 | 0.92 |

Anexo B. Parámetros utilizados en la representación de los datos mediante la función de Maxwell-Boltzmann. El valor de $|\vec{v}_j|$ representa la norma euclídea de un vector de componentes $(M_i^*, S_i^*, \lambda_i^*)$ para cada uno de los individuos de la muestra.

| Etiqueta del niño | 3 primeros momentos de la distribución ex-Gaussiana | | | Momentos normalizados | | | $ \vec{v}_i $ |
|-------------------|---|------------|-------------|-----------------------|---------|---------------|---------------|
| | M_i | S_i | λ_i | M_i^* | S_i^* | λ_i^* | |
| 1 | 714.864 | 46923.842 | 366.973 | 0.07 | 0.273 | 0.571 | 0.636 |
| 2 | 369.57 | 3031.471 | 79.184 | -0.447 | -0.676 | -0.661 | 1.046 |
| 3 | 526.437 | 11768.85 | 171.719 | -0.212 | -0.363 | -0.265 | 0.496 |
| 4 | 641.994 | 34899.327 | 334.548 | -0.039 | 0.098 | 0.432 | 0.445 |
| 5 | 1041.385 | 184018.897 | 784.517 | 0.559 | 1.521 | 2.358 | 2.861 |
| 6 | 907.393 | 79635.751 | 393.239 | 0.359 | 0.658 | 0.683 | 1.014 |
| 7 | 986.438 | 101373.082 | 477.847 | 0.477 | 0.871 | 1.045 | 1.442 |
| 8 | 542.523 | 9439.65 | 59.457 | -0.188 | -0.429 | -0.746 | 0.88 |
| 9 | 950.059 | 76923.599 | 520.288 | 0.423 | 0.63 | 1.227 | 1.442 |
| 10 | 503.871 | 9012.123 | 90.603 | -0.245 | -0.442 | -0.612 | 0.794 |
| 11 | 611.227 | 28218.762 | 269.516 | -0.085 | -0.013 | 0.154 | 0.176 |
| 12 | 425.259 | 5889.219 | 51.388 | -0.363 | -0.549 | -0.78 | 1.021 |
| 13 | 545.179 | 14913.989 | 133.855 | -0.184 | -0.282 | -0.427 | 0.544 |
| 14 | 678.457 | 41818.762 | 377.027 | 0.016 | 0.202 | 0.614 | 0.646 |
| 15 | 968.576 | 101452.42 | 520.835 | 0.45 | 0.872 | 1.229 | 1.573 |
| 16 | 760.298 | 46618.825 | 359.191 | 0.138 | 0.269 | 0.537 | 0.617 |
| 17 | 613.863 | 31676.723 | 277.861 | -0.081 | 0.046 | 0.189 | 0.211 |
| 18 | 771.68 | 59711.809 | 476.788 | 0.156 | 0.436 | 1.041 | 1.139 |
| 19 | 524.983 | 10470.201 | 152.198 | -0.214 | -0.399 | -0.349 | 0.571 |
| 20 | 414.974 | 6479.335 | 98.603 | -0.379 | -0.527 | -0.578 | 0.869 |
| 21 | 686.522 | 22232.849 | 102.72 | 0.028 | -0.124 | -0.56 | 0.575 |
| 22 | 917.483 | 76862.606 | 475.433 | 0.374 | 0.629 | 1.035 | 1.268 |
| 23 | 669.046 | 35937.147 | 378.042 | 0.002 | 0.114 | 0.618 | 0.628 |
| 24 | 714.892 | 46939.818 | 367.078 | 0.071 | 0.273 | 0.571 | 0.637 |
| 25 | 369.57 | 3031.474 | 79.183 | -0.447 | -0.676 | -0.661 | 1.046 |
| 26 | 526.437 | 11768.85 | 171.719 | -0.212 | -0.363 | -0.265 | 0.496 |
| 27 | 843.807 | 94184.813 | 585.4 | 0.264 | 0.803 | 1.506 | 1.727 |
| 28 | 773.433 | 46102.804 | 359.356 | 0.158 | 0.262 | 0.538 | 0.619 |
| 29 | 845.647 | 52949.896 | 240.765 | 0.266 | 0.352 | 0.03 | 0.443 |
| 30 | 783.258 | 63179.027 | 427.743 | 0.173 | 0.477 | 0.831 | 0.973 |
| 31 | 696.849 | 48158.805 | 288.17 | 0.043 | 0.29 | 0.233 | 0.374 |
| 32 | 716.73 | 105699.715 | 633.746 | 0.073 | 0.91 | 1.712 | 1.941 |
| 33 | 619.021 | 26654.435 | 112.222 | -0.073 | -0.041 | -0.52 | 0.526 |
| 34 | 851.889 | 78713.572 | 267.811 | 0.276 | 0.649 | 0.146 | 0.72 |
| 35 | 677.423 | 36458.138 | 255.281 | 0.014 | 0.122 | 0.093 | 0.154 |

Anexo B. Parámetros del modelo de la colectividad basado en la función de MB

| | | | | | | | |
|----|----------|------------|---------|-----------|--------|--------|-------|
| 36 | 1059.081 | 204860.338 | 602.751 | 0.586 | 1.66 | 1.58 | 2.365 |
| 37 | 504.6 | 11313.058 | 134.039 | -0.244 | -0.375 | -0.426 | 0.618 |
| 38 | 669.596 | 18800.219 | 103.185 | 0.003 | -0.194 | -0.558 | 0.591 |
| 39 | 881.335 | 63273.106 | 445.603 | 0.32 | 0.478 | 0.907 | 1.074 |
| 40 | 771.789 | 37146.298 | 217.018 | 0.156 | 0.133 | -0.071 | 0.216 |
| 41 | 517.697 | 14021.639 | 142.696 | -0.225 | -0.304 | -0.389 | 0.543 |
| 42 | 437.131 | 13395.139 | 162.164 | -0.345 | -0.32 | -0.306 | 0.561 |
| 43 | 453 | 11596.616 | 159.445 | -0.322 | -0.367 | -0.318 | 0.582 |
| 44 | 851.228 | 66908.474 | 451.499 | 0.275 | 0.52 | 0.932 | 1.102 |
| 45 | 465.442 | 6562.252 | 77.492 | -0.303 | -0.524 | -0.668 | 0.902 |
| 46 | 646.137 | 26115.524 | 73.414 | -0.032 | -0.05 | -0.686 | 0.688 |
| 47 | 672.652 | 36604.336 | 346.634 | 0.007 | 0.124 | 0.484 | 0.499 |
| 48 | 714.892 | 46939.818 | 367.078 | 0.071 | 0.273 | 0.571 | 0.637 |
| 49 | 369.57 | 3031.471 | 79.184 | -0.447 | -0.676 | -0.661 | 1.046 |
| 50 | 526.437 | 11768.85 | 171.719 | -0.212 | -0.363 | -0.265 | 0.496 |
| 51 | 641.994 | 34899.327 | 334.548 | -0.039 | 0.098 | 0.432 | 0.445 |
| 52 | 620.994 | 15048.804 | 0.475 | -0.07 | -0.279 | -0.998 | 1.039 |
| 53 | 723.805 | 30692.984 | 219.695 | 0.084 | 0.029 | -0.06 | 0.107 |
| 54 | 486.304 | 7614.255 | 117.095 | -0.272 | -0.487 | -0.499 | 0.748 |
| 55 | 565.202 | 11338.406 | 83.798 | -0.154 | -0.374 | -0.641 | 0.758 |
| 56 | 700.55 | 35603.242 | 330.469 | 0.049 | 0.109 | 0.414 | 0.431 |
| 57 | 571.995 | 17928.091 | 179.76 | -0.143 | -0.213 | -0.231 | 0.345 |
| 58 | 1041.385 | 184018.897 | 784.517 | 0.559 | 1.521 | 2.358 | 2.861 |
| 59 | 665.094 | 22250.073 | 214.962 | -0.004 | -0.123 | -0.08 | 0.147 |
| 60 | 822.212 | 55768.772 | 379.442 | 0.231 | 0.388 | 0.624 | 0.77 |
| 61 | 511.34 | 8023.086 | 98.38 | -0.234 | -0.474 | -0.579 | 0.784 |
| 62 | 724.106 | 20845.832 | 287.713 | 0.084 | -0.152 | 0.231 | 0.289 |
| 63 | 448.937 | 8072.638 | 115.42 | -0.328 | -0.472 | -0.506 | 0.766 |
| 64 | 661.3 | 21841.362 | 224.078 | -0.01 | -0.132 | -0.041 | 0.138 |
| 65 | 648.644 | 14848.119 | 176.143 | -0.029 | -0.284 | -0.246 | 0.377 |
| 66 | 1067.379 | 19847.185 | 180.71 | 0.598 | -0.172 | -0.227 | 0.663 |
| 67 | 714.892 | 46939.818 | 367.078 | 0.071 | 0.273 | 0.571 | 0.637 |
| 68 | 369.569 | 3031.291 | 79.18 | -0.447 | -0.676 | -0.661 | 1.046 |
| 69 | 526.437 | 11768.85 | 171.719 | -0.212 | -0.363 | -0.265 | 0.496 |
| 70 | 641.994 | 34899.327 | 334.548 | -0.039 | 0.098 | 0.432 | 0.445 |
| 71 | 887.049 | 105361.155 | 547.1 | 0.328 | 0.907 | 1.342 | 1.653 |
| 72 | 1041.385 | 184018.74 | 784.516 | 0.559 | 1.521 | 2.358 | 2.861 |
| 73 | 705.653 | 46854.215 | 344.515 | 0.057 | 0.272 | 0.475 | 0.55 |
| 74 | 828.264 | 88928.417 | 481.245 | 0.24 | 0.752 | 1.06 | 1.322 |
| 75 | 756.405 | 61826.974 | 344.719 | 0.133 | 0.461 | 0.475 | 0.675 |
| 76 | 527.843 | 17072.887 | 191.748 | -0.21 | -0.232 | -0.179 | 0.361 |
| 77 | 555.067 | 15552.873 | 208.794 | -0.169 | -0.267 | -0.106 | 0.333 |
| 78 | 493.987 | 9507.908 | 137.086 | -0.26 | -0.427 | -0.413 | 0.649 |
| 79 | 667.302 | 25714.359 | 227.021 | -1.00E-03 | -0.058 | -0.028 | 0.064 |
| 80 | 845.396 | 52416.386 | 290.129 | 0.266 | 0.345 | 0.242 | 0.498 |

Anexo B. Parámetros del modelo de la colectividad basado en la función de MB

| | | | | | | | |
|-----|----------|------------|---------|--------|--------|--------|-------|
| 81 | 697.733 | 22377.927 | 170.588 | 0.045 | -0.121 | -0.27 | 0.299 |
| 82 | 615.528 | 28370.064 | 228.213 | -0.078 | -0.01 | -0.023 | 0.082 |
| 83 | 732.989 | 48716.275 | 329.78 | 0.098 | 0.297 | 0.411 | 0.517 |
| 84 | 886.858 | 93486.46 | 515.578 | 0.328 | 0.797 | 1.207 | 1.483 |
| 85 | 805.421 | 52783.152 | 346.302 | 0.206 | 0.35 | 0.482 | 0.63 |
| 86 | 1499.98 | 271289.004 | 916.592 | 1.246 | 2.061 | 2.923 | 3.787 |
| 87 | 546.825 | 21888.932 | 243.104 | -0.181 | -0.131 | 0.041 | 0.227 |
| 88 | 439.792 | 11862.678 | 87.398 | -0.341 | -0.36 | -0.626 | 0.799 |
| 89 | 524.83 | 17482.592 | 95.304 | -0.214 | -0.223 | -0.592 | 0.668 |
| 90 | 499.114 | 17054.067 | 202.069 | -0.253 | -0.233 | -0.135 | 0.369 |
| 91 | 765.859 | 23274.081 | 195.107 | 0.147 | -0.104 | -0.165 | 0.244 |
| 92 | 779.458 | 49096.572 | 378.124 | 0.167 | 0.302 | 0.618 | 0.708 |
| 93 | 508.269 | 9917.297 | 136.035 | -0.239 | -0.415 | -0.418 | 0.635 |
| 94 | 1172.787 | 130512.193 | 0 | 0.756 | 1.123 | -1 | 1.683 |
| 95 | 606.865 | 33626.229 | 332.39 | -0.091 | 0.078 | 0.423 | 0.439 |
| 96 | 714.892 | 46939.818 | 367.078 | 0.071 | 0.273 | 0.571 | 0.637 |
| 97 | 369.57 | 3031.471 | 79.184 | -0.447 | -0.676 | -0.661 | 1.046 |
| 98 | 526.437 | 11768.85 | 171.719 | -0.212 | -0.363 | -0.265 | 0.496 |
| 99 | 641.994 | 34899.327 | 334.548 | -0.039 | 0.098 | 0.432 | 0.445 |
| 100 | 887.453 | 108394.374 | 583.608 | 0.329 | 0.935 | 1.498 | 1.796 |
| 101 | 1041.385 | 184018.897 | 784.517 | 0.559 | 1.521 | 2.358 | 2.861 |
| 102 | 746.912 | 20553.288 | 96.9 | 0.118 | -0.158 | -0.585 | 0.618 |
| 103 | 619.719 | 16407.395 | 126.088 | -0.072 | -0.247 | -0.46 | 0.528 |
| 104 | 1005.193 | 240877.976 | 936.768 | 0.505 | 1.884 | 3.009 | 3.586 |
| 105 | 759.124 | 38792.427 | 244.554 | 0.137 | 0.157 | 0.047 | 0.214 |
| 106 | 736.465 | 38164.76 | 144.81 | 0.103 | 0.148 | -0.38 | 0.421 |
| 107 | 535.367 | 16639.656 | 86.71 | -0.198 | -0.242 | -0.629 | 0.702 |
| 108 | 532.297 | 14825.342 | 192.95 | -0.203 | -0.285 | -0.174 | 0.39 |
| 109 | 768.012 | 47754.604 | 349.211 | 0.15 | 0.284 | 0.495 | 0.59 |
| 110 | 645.694 | 22881.473 | 224.13 | -0.033 | -0.111 | -0.041 | 0.123 |
| 111 | 773.403 | 49652.48 | 340.042 | 0.158 | 0.309 | 0.455 | 0.573 |
| 112 | 714.901 | 22051.773 | 50.046 | 0.071 | -0.127 | -0.786 | 0.799 |
| 113 | 452.928 | 6334.501 | 159.179 | -0.322 | -0.532 | -0.319 | 0.699 |
| 114 | 1170.698 | 189455.932 | 769.267 | 0.753 | 1.558 | 2.293 | 2.872 |
| 115 | 874.651 | 97738.818 | 593.175 | 0.31 | 0.837 | 1.539 | 1.779 |
| 116 | 611.634 | 31575.471 | 177.107 | -0.084 | 0.044 | -0.242 | 0.26 |
| 117 | 566.161 | 21121.521 | 215.164 | -0.152 | -0.146 | -0.079 | 0.225 |
| 118 | 614.62 | 23306.349 | 305.328 | -0.08 | -0.103 | 0.307 | 0.333 |
| 119 | 474.178 | 10685.316 | 80.48 | -0.29 | -0.393 | -0.656 | 0.817 |
| 120 | 714.859 | 46921.819 | 366.954 | 0.07 | 0.273 | 0.571 | 0.636 |
| 121 | 369.569 | 3031.28 | 79.18 | -0.447 | -0.676 | -0.661 | 1.046 |
| 122 | 526.437 | 11768.85 | 171.719 | -0.212 | -0.363 | -0.265 | 0.496 |
| 123 | 641.994 | 34899.327 | 334.548 | -0.039 | 0.098 | 0.432 | 0.445 |
| 124 | 1041.385 | 184018.865 | 784.517 | 0.559 | 1.521 | 2.358 | 2.861 |
| 125 | 705.653 | 46859.874 | 344.516 | 0.057 | 0.272 | 0.475 | 0.55 |

Anexo B. Parámetros del modelo de la colectividad basado en la función de MB

| | | | | | | | |
|-----|----------|------------|----------|--------|--------|--------|-------|
| 126 | 828.264 | 88928.417 | 481.245 | 0.24 | 0.752 | 1.06 | 1.322 |
| 127 | 756.405 | 61826.974 | 344.719 | 0.133 | 0.461 | 0.475 | 0.675 |
| 128 | 527.761 | 17047.263 | 191.379 | -0.21 | -0.233 | -0.181 | 0.362 |
| 129 | 555.067 | 15552.873 | 208.794 | -0.169 | -0.267 | -0.106 | 0.333 |
| 130 | 493.987 | 9507.908 | 137.086 | -0.26 | -0.427 | -0.413 | 0.649 |
| 131 | 845.396 | 52416.386 | 290.129 | 0.266 | 0.345 | 0.242 | 0.498 |
| 132 | 697.733 | 22377.927 | 170.588 | 0.045 | -0.121 | -0.27 | 0.299 |
| 133 | 697.772 | 22391.976 | 170.793 | 0.045 | -0.121 | -0.269 | 0.298 |
| 134 | 615.528 | 28370.064 | 228.213 | -0.078 | -0.01 | -0.023 | 0.082 |
| 135 | 732.989 | 48716.275 | 329.78 | 0.098 | 0.297 | 0.411 | 0.517 |
| 136 | 886.858 | 93486.46 | 515.578 | 0.328 | 0.797 | 1.207 | 1.483 |
| 137 | 1500.019 | 271337.986 | 916.7 | 1.246 | 2.061 | 2.924 | 3.788 |
| 138 | 765.859 | 23274.081 | 195.107 | 0.147 | -0.104 | -0.165 | 0.244 |
| 139 | 546.825 | 21888.932 | 243.104 | -0.181 | -0.131 | 0.041 | 0.227 |
| 140 | 439.792 | 11862.678 | 87.398 | -0.341 | -0.36 | -0.626 | 0.799 |
| 141 | 499.114 | 17054.067 | 202.069 | -0.253 | -0.233 | -0.135 | 0.369 |
| 142 | 805.421 | 52783.152 | 346.302 | 0.206 | 0.35 | 0.482 | 0.63 |
| 143 | 779.458 | 49096.572 | 378.124 | 0.167 | 0.302 | 0.618 | 0.708 |
| 144 | 508.275 | 9919.053 | 136.067 | -0.239 | -0.415 | -0.418 | 0.635 |
| 145 | 606.865 | 33626.229 | 332.39 | -0.091 | 0.078 | 0.423 | 0.439 |
| 146 | 887.453 | 108394.464 | 583.608 | 0.329 | 0.935 | 1.498 | 1.796 |
| 147 | 714.892 | 46939.818 | 367.078 | 0.071 | 0.273 | 0.571 | 0.637 |
| 148 | 369.579 | 3032.589 | 79.224 | -0.447 | -0.676 | -0.661 | 1.046 |
| 149 | 526.437 | 11768.85 | 171.719 | -0.212 | -0.363 | -0.265 | 0.496 |
| 150 | 560.46 | 15750.239 | 220.509 | -0.161 | -0.263 | -0.056 | 0.313 |
| 151 | 848.424 | 95414.729 | 606.099 | 0.27 | 0.815 | 1.594 | 1.811 |
| 152 | 923.48 | 57475.517 | 422.876 | 0.383 | 0.409 | 0.81 | 0.985 |
| 153 | 1187.879 | 59320.438 | 378.975 | 0.779 | 0.431 | 0.622 | 1.086 |
| 154 | 651.03 | 16375.634 | 192.499 | -0.025 | -0.248 | -0.176 | 0.305 |
| 155 | 716.326 | 27957.478 | 208.735 | 0.073 | -0.017 | -0.107 | 0.13 |
| 156 | 819.382 | 57643.807 | 230.388 | 0.227 | 0.411 | -0.014 | 0.47 |
| 157 | 992.203 | 69351.208 | 320.863 | 0.486 | 0.547 | 0.373 | 0.822 |
| 158 | 470.736 | 8197.481 | 159.883 | -0.295 | -0.468 | -0.316 | 0.637 |
| 159 | 560.99 | 14384.677 | 76.298 | -0.16 | -0.295 | -0.673 | 0.753 |
| 160 | 777.306 | 44566.439 | 234.789 | 0.164 | 0.24 | 0.005 | 0.291 |
| 161 | 699.548 | 35715.801 | 351.573 | 0.048 | 0.111 | 0.505 | 0.519 |
| 162 | 664.553 | 36793.441 | 225.864 | -0.005 | 0.127 | -0.033 | 0.132 |
| 163 | 557.055 | 14769.429 | 177.826 | -0.166 | -0.286 | -0.239 | 0.408 |
| 164 | 663.032 | 24484.477 | 271.815 | -0.007 | -0.081 | 0.163 | 0.182 |
| 165 | 607.507 | 21617.147 | 197.214 | -0.09 | -0.136 | -0.156 | 0.226 |
| 166 | 906.501 | 62779.638 | 342.014 | 0.357 | 0.472 | 0.464 | 0.752 |
| 167 | 1479.045 | 757294.475 | 1711.369 | 1.215 | 4.114 | 6.325 | 7.642 |
| 168 | 836.708 | 69219.938 | 504.132 | 0.253 | 0.546 | 1.158 | 1.305 |