La maximización de beneficios en un modelo de duopolio con ajuste continuo de la producción

Parte I: Cuando las funciones de costes marginales son constantes

Apellidos, nombre	Cortés López, Juan Carlos; Romero Bauset, José Vicente; Roselló Ferragud, María Dolores; Villanueva Micó, Rafael Jacinto (jccortes@imm.upv.es;jvromero@imm.upv.es; drosello@imm.upv.es;rjvillan@imm.upv.es)
Departamento	Matemática Aplicada Instituto Universitario de matemática Multidisciplinar
Centro	**Facultad de Administración y Dirección de Empresas**

1 Resumen de las ideas clave

El estudio de modelos dinámicos basados en sistemas de ecuaciones diferenciales ordinarias constituye una base importante para el desarrollo de los fundamentos de numerosas áreas científicas, y en particular de la Economía. Un ejemplo notable de tales sistemas dinámicos se presenta en el estudio de los modelos de mercado, y más concretamente, en el duopolio. En este trabajo se expone, bajo un contexto bastante general, el estudio de un modelo continuo de duopolio cuyas funciones de costes marginales se asumen constantes. El enfoque matemático que presentamos permite complementar el correspondiente análisis descriptivo que se realiza comúnmente en los textos económicos.

2 Introducción

El estudio de diferentes tipologías de mercado, tales como el monopolio (una única empresa), el duopolio (dos empresas), el oligopolio (tres o más empresas) o, en el caso extremo en que concurren en el mercado un gran número de empresas del mismo sector, denominado competencia perfecta, constituyen tópicos del desarrollo de la teoría económica. Para llevar a cabo un análisis en profundidad, la matemática se revela como una herramienta muy valiosa que permite llegar a conclusiones cuantitativas y fundamentar mejor las interpretaciones descriptivas y cualitativas que caracterizan cada tipo de mercado y, que usualmente se describen en los manuales de economía. En estas páginas, centramos nuestro estudio en un modelo dinámico, es decir, asumimos que las magnitudes económicas consideradas son susceptibles de cambiar con el paso del tiempo. Bajo este enfoque analizaremos un modelo de mercado duopolista, por tanto, dos son las empresas que concurren y, a través de sus respectivas producciones (que varían con el tiempo), fijan el precio del bien que ambas producen y ofertan en el mercado. Específicamente, el estudio dinámico (continuo) de un modelo de mercado duopolista consiste en la determinación de las producciones instantáneas de ambas empresas con objeto de maximizar su beneficio. Para llevar a cabo este análisis desde un enfoque cuantitativo necesitaremos de una serie de prerrequisitos matemáticos que expondremos a continuación.

En primer lugar, se necesitará conocer la solución de un problema de valor inicial (p.v.i.) basado en un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias (s.e.d.o.) lineal de primer orden no homogéneo o completo a coeficientes constantes (véase Ecuación 1). Obsérvese que la solución dada en la Ecuación 1 solo es válida si la matriz de coeficientes del sistema A es invertible, o lo que es equivalente, si el cero no es valor propio de dicha matriz, (en otras palabras: el cero no pertenece al espectro de la matriz: $0 \notin \sigma(A)$).

$$\left.\begin{array}{rcl} \vec{x}'(t) & = & A\vec{x}(t)+\vec{b} \\ \vec{x}(t_0) & = & \vec{x}_0 \end{array}\right\} \Rightarrow \vec{x}(t) = e^{A(t-t_0)}\left(\vec{x}_0 + A^{-1}\vec{b}\right) - A^{-1}\vec{b} \quad \text{si} \quad 0 \notin \sigma(A)$$

Ecuación 1. Solución de un p.v.i. basado en un s.e.d.o. lineal de primer orden no homogéneo o completo a coeficientes constantes.

Por otra parte, también vamos a estar interesados en estudiar cómo se comporta el modelo a largo plazo. Por ello, se necesitará conocer el punto de equilibrio del s.e.d.o. dado en la Ecuación 1 (es decir el valor del siguiente límite: $\lim_{t\to\infty}\vec{x}(t)=\vec{x}^e$). Se puede caracterizar la existencia del equilibrio a partir del resultado mostrado en la Ecuación 2, que nos indica que el equilibrio está dado por el vector $\vec{x}^e=-A^{-1}\vec{b}$ y se presenta únicamente cuando todos los valores propios de la matriz A tienen parte real negativa. Esta condición espectral es la que garantiza que la exponencial matricial que aparece en el primer sumando de la solución dada en la Ecuación 1 tienda al vector columna nulo cuando $t\to\infty$, resultando entonces como el valor del límite el valor de equilibrio señalado anteriormente.

$$\vec{x}_e=\lim_{t\to\infty}\vec{x}(t)=-A^{-1}\vec{b} \quad \text{si y sólo si} \quad \mathrm{Re}(\lambda)<0 \quad \forall\lambda\in\sigma(A)$$

Ecuación 2. Caracterización del equilibrio de la solución de modelo dado en la Ecuación 1.

Obsérvese a modo informativo que, asumiendo la existencia del vector de equilibrio no es necesario conocer explícitamente la solución del p.v.i. para calcularlo tal y como hemos razonado anteriormente. En efecto, imponiendo la condición de equilibrio, $\vec{x}'(t)=0$ (esta condición indica que en el equilibrio el vector solución se estabiliza, es decir, es constante tal como refleja su definición: $\lim_{t\to\infty}\vec{x}(t)=\vec{x}^e$) directamente sobre el p.v.i. se puede calcular fácilmente el vector de equilibrio (véase la Ecuación 3).

$$\vec{x}'(t)=0\Rightarrow A\vec{x}(t)+\vec{b}=\vec{0}\Rightarrow\vec{x}(t)=-A^{-1}\vec{b}\Rightarrow\vec{x}^e=-A^{-1}\vec{b}.$$

Ecuación 3. Cálculo del equilibrio del modelo dado en la Ecuación 1 sin conocer explícitamente la solución y asumiendo su existencia.

En nuestro caso, al tratarse el modelo de un duopolio (dos empresas), el s.e.d.o. que plantearemos posteriormente tendrá un vector columna incógnita $\vec{x}(t)$ de tamaño 2 (cuyas componentes serán las producciones de cada una de las dos empresas en cada instante) y la matriz cuadrada de coeficientes A tendrá tamaño 2, $A=\lfloor a_{ij}\rfloor_{1\le i,j\le 2}$. Para este caso particular, se puede explicitar fácilmente el cálculo de los valores propios de una matriz de tamaño dos directamente en términos de sus coeficientes a través de la traza de la matriz (en nuestro caso dada por la suma de los dos elementos de su diagonal principal: $\mathrm{tr}(A)=a_{11}+a_{22}$) y su determinante (en nuestro caso dado por: $\det(A)=a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}$), tal y como puede verse en la Ecuación 4. Esto nos permitirá posteriormente realizar el estudio de la estabilidad del modelo de duopolio de dos formas equivalentes.

$$\det\begin{pmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda \end{pmatrix}=\lambda^2-(a_{11}+a_{22})\lambda+(a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21})=\lambda^2-\mathrm{tr}(A)\lambda+\det(A)=0$$

$$\lambda_1=\frac{\mathrm{tr}(A)+\sqrt{(\mathrm{tr}(A))^2-4\det(A)}}{2} \quad , \quad \lambda_2=\frac{\mathrm{tr}(A)-\sqrt{(\mathrm{tr}(A))^2-4\det(A)}}{2}$$

Ecuación 4. Valores propios de una matriz cuadrada de tamaño 2 expresados en términos de la traza y del determinante de la matriz.

3 Objetivos

Los principales objetivos docentes de este artículo son que el alumno sea capaz de:

1. Aplicar los sistemas de ecuaciones diferenciales lineales completos a coeficientes constantes para modelizar problemas económicos y, en particular, el modelo de mercado de duopolio, obteniendo su solución.
2. Calcular los puntos de equilibrio de tales sistemas de ecuaciones y aplicarlos a modelos económicos, en particular, al modelo de mercado de duopolio.

4 Un modelo continuo de duopolio con costes marginales constantes

4.1 Formulación del modelo y cálculo de la solución

En este apartado presentaremos el modelo objeto de estudio. Asumiremos una función de demanda lineal estándar de la forma $P(t)=a-bQ(t)$, donde al tratarse de un duopolio, la producción ofertada está dada por la suma de las producciones de ambas empresas: $Q(t)=Q_1(t)+Q_2(t)$. Asumiremos que las funciones de costes totales de cada empresas son de la forma: $CT_1(Q_1(t))=c_1Q_1(t)$ y $CT_2(Q_2(t))=c_2Q_2(t)$, lo que supone asumir que los costes marginales (y en este caso también unitarios) de cada empresa son constantes e iguales a $c_1>0$ y $c_2>0$, respectivamente. Esta es una restricción en la formulación del modelo objeto de estudio que resulta adecuada desde el punto de vista pedagógico en una primera etapa del estudio del modelo, pero en un trabajo futuro se abordará el caso en que los costes marginales son variables. Resumimos toda la información del modelo presentada hasta ahora en la Ecuación 5.

$$\left.\begin{array}{rcll} P(t) & = & a-bQ(t) & , \quad a,b>0 \\ Q(t) & = & Q_1(t)+Q_2(t) & , \\ CT_1(Q_1(t)) & = & c_1Q_1(t) & , \quad 0<2c_1<a \\ CT_2(Q_2(t)) & = & c_2Q_2(t) & , \quad 0<2c_2<a \end{array}\right\}$$

Ecuación 5. Función de demanda y funciones de costes totales del modelo.

Como veremos la hipótesis $0<2c_i<a, i=1,2$ es puramente técnica y servirá para asegurar que el valor de equilibrio del modelo de duopolio está bien definido.

Asumimos que en cada instante $t>0$ ambas empresas varían continuamente sus producciones o outputs $Q_i'(t),\ i=1,2$, proporcionalmente a la discrepancia entre sus niveles actuales de producción dados por $Q_i(t),\ i=1,2$, y los niveles deseados por ambas empresas, denotados por $Q_i^*(t),\ i=1,2$, y siendo $\gamma_i>0,\ i=1,2$ las constantes de proporcionalidad (véase Ecuación 6).

$$Q_i'(t) = \gamma_i \left(Q_i^*(t) - Q_i(t) \right), \quad \gamma_i > 0, i = 1, 2$$

Ecuación 6. Ajuste continuo de las producciones de las empresas a los niveles deseados.

Obsérvese que la Ecuación 6 nos indica implícitamente que para cada una de las empresas si en un instante $t > 0$, el nivel de producción $Q_i(t)$ es mayor (menor) que el nivel de producción deseado $Q_i^*(t)$, entonces como $Q_i^*(t) - Q_i(t) < 0$ ($Q_i^*(t) - Q_i(t) > 0$), y $\gamma_i > 0$, se tendrá que $Q_i'(t) < 0$ $\left(Q_i'(t) > 0\right)$, es decir, que la producción deberá disminuir (aumentar) para alcanzar el nivel deseado $Q_i^*(t)$. Por tanto, la Ecuación 6 refleja adecuadamente la dinámica de la producción dirigida a alcanzar el objetivo deseado. El parámetro $\gamma_i > 0$ indica la velocidad con que tiene lugar el ajuste de la producción $Q_i(t)$ hacia el nivel deseado $Q_i^*(t)$.

Pero, ¿cómo fijar el nivel de producción deseado $Q_i^*(t),\ i = 1, 2$ por cada una de los dos empresas? El criterio que siguen las firmas es, lógicamente, establecer aquel nivel de producción que maximiza sus beneficios. Obviamente, como los beneficios de cada una de las dos empresas dependen del precio $P(t)$, el cual depende no solo de su propia producción, si también de la producción de la otra empresa (obsérvese a partir de la función de demanda en la Ecuación 5 que $P(t) = a - bQ(t)$, siendo $Q(t) = Q_1(t) + Q_2(t)$), cada empresa necesitará por tanto realizar algún tipo de hipótesis acerca de la producción de la otra empresa para fijar su propia producción encaminada a alcanzar su propio nivel deseado. Llegado este punto asumiremos que el nivel de producción de cada empresa es el nivel de *output* que maximiza sus beneficios bajo la hipótesis de que la otra firma no altera su nivel de producción. A este tipo de hipótesis en economía se le denomina "variación conjetural nula" y resulta coherente ya que, si como es lógico ninguna de las empresas tiene información privilegiada de la otra, antes que asumir una determinada función de variación de la producción para la otra empresa, parece más razonable, en un primer paso de este estudio, suponer que su producción no se altera.

VARIACIÓN CONJETURAL NULA

> El nivel de producción de cada empresa es el nivel de *output* que maximiza sus beneficios bajo la hipótesis de que la otra firma no altera su nivel de producción.

Para mayor claridad en la presentación, ahora detallaremos el cálculo del nivel de producción óptimo que maximiza los beneficios de la primera empresa, y posteriormente extenderemos, por la simetría que existe en la notación, los resultados para la segunda empresa. La función de beneficios B_1 de la primera empresa está dada en la Ecuación 7, y en esta expresión se observa que dicha función depende de las producciones de ambas empresas, por tanto, simbólicamente se puede escribir $B_1(Q_1(t), Q_2(t))$. Sin embargo, desde el punto de vista de la maximización de beneficios, y apoyándonos en la hipótesis de variación conjetural nula, dicha función únicamente depende de la producción de la primera empresa. Es decir, para la búsqueda del óptimo de la función B_1 únicamente debemos considerar que la función de beneficios de la primera empresa depende de una variable: $B_1(Q_1(t))$ (tal y como hemos enfatizado en la notación de la Ecuación 7). Esto además se soporta intuitivamente, ya que, la empresa 1 únicamente puede controlar su producción para alcanzar el nivel óptimo que maximiza sus beneficios.

$$\begin{aligned}
B_1(Q_1(t)) &= P(t)Q_1(t) - CT_1(Q_1(t)) \\
&= (a - bQ(t))Q_1(t) - CT_1(Q_1(t)) \\
&= (a - b(Q_1(t) + Q_2(t)))Q_1(t) - c_1Q_1(t) \\
&= -b(Q_1(t))^2 + (a - c_1 - bQ_2(t))Q_1(t)
\end{aligned}$$

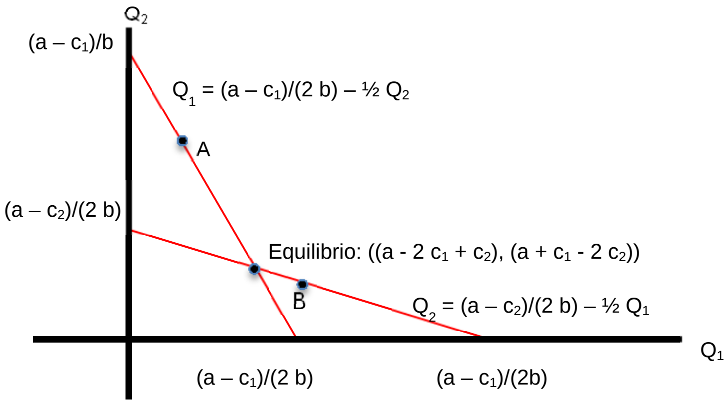
Ecuación 7. Cálculo de la función de beneficios de la primera empresa.

Como función de $Q_1(t)$, la función de beneficios $B_1(Q_1(t))$ de la primera empresa es simplemente una función polinómica cuadrática cóncava y por tanto su punto crítico (que es el vértice de dicha parábola) es el máximo global de dicha función. Esto permite determinar directamente el nivel de producción deseado de la empresa 1. Este valor, junto al correspondiente para la empresa 2 se especifican en la Ecuación 8.

$$Q_1^*(t) = \frac{a - c_1}{2b} - \frac{1}{2}Q_2(t), \quad Q_2^*(t) = \frac{a - c_2}{2b} - \frac{1}{2}Q_1(t)$$

Ecuación 8. Niveles de producción deseados (que maximizan los beneficios) de cada una de las empresas en cada instante $t > 0$.

En la literatura económica a estas funciones se les denominan *funciones de reacción* de cada una de las empresas (y están representadas en la Gráfica 1). Focalizando sobre una de los dos empresas, por ejemplo, sobre la primera, esta denominación está sugerida por el siguiente hecho: en cada instante $t > 0$ la empresa 2 tiene una determinada producción $Q_2(t)$ y la empresa 1 debe *reaccionar* produciendo la cantidad $Q_1^*(t)$ dada en la Ecuación 8 para maximizar sus beneficios. Pero cuando la empresa 1 ha modificado su producción para maximizar sus beneficios, esto hará a su vez que la empresa 2 fije su producción según la cantidad $Q_2^*(t)$ dada en la Ecuación 8. Este proceso dinámico continúa hasta que los niveles de producción de ambas empresas les son satisfactorios a las dos (las cuales actúan individualmente), lo que ocurre en el punto de corte de ambas funciones de reacción. Este punto de intersección se denomina punto de equilibrio y cuyo valor hemos especificado en la Gráfica 1. Enfaticemos de otra forma similar un poco más este proceso dinámico con objeto de comprenderlo un poco mejor. Obsérvese que en cada instante $t > 0$ habrá unos niveles de producción para cada una de las empresas: $(Q_1(t), Q_2(t))$. Este punto puede representarse en la Gráfica 1. Supóngase que está representado por el afijo A (B). Al estar sobre el segmento rojo que define la función de reacción de la empresa 1 (2) dada por: $Q_1(t)$ ($Q_2(t)$), esta producción maximiza únicamente los beneficios de la empresa 1 (2). En ese caso, la estrategia productiva de la empresa 2 (1) cambiará para intentar alcanzar su máximo beneficio. Esto provocará que los nuevos niveles de producción cambien de modo que ya no estén sobre el segmento rojo $Q_1(t)$ ($Q_2(t)$) y por tanto, la empresa 1 (2) perderá el nivel de producción que maximiza su beneficio, originando una dinámica productiva para cada empresa que les llevará, actuando individualmente, a conseguir unos niveles de producción que les satisfagan simultáneamente a ambas empresas (¿porque con ellos ambas maximizan sus beneficios!). Se llegará así al punto de equilibrio.



Gráfica 1. Funciones de reacción de ambas empresas y punto de equilibrio.

La determinación de las producciones deseadas para cada empresa nos permite establecer con más precisión el sistema dinámico dado en la Ecuación 6 que gobierna el ajuste de las producciones con tan solo sustituir las expresiones $Q_1^*(t)$ y $Q_2^*(t)$ calculadas en la Ecuación 8 en la Ecuación 6 (véase la Ecuación 9).

$$Q_1'(t)=\gamma_1\left(\frac{a-c_1}{2b}-Q_1(t)-\frac{1}{2}Q_2(t)\right),\ Q_2'(t)=\gamma_2\left(\frac{a-c_2}{2b}-\frac{1}{2}Q_1(t)-Q_2(t)\right)$$

Ecuación 9. Ajuste continuo de las producciones de las empresas: expresión explícita.

Obsérvese que el modelo descrito en la Ecuación 9 puede escribirse en el patrón dado en la Ecuación 1. En la Ecuación 10 se explicita la identificación de las variables y parámetros de ambos modelos. Dadas una producciones iniciales $Q_1(0)=Q_{10}$ y $Q_2(0)=Q_{20}$, como la matriz A es invertible (pues su determinante es $\det(A)=3\gamma_1\gamma_2/4>0$, ya que, por hipótesis $\gamma_1,\gamma_2>0$), aplicando la solución del p.v.i. dada en la Ecuación 1 podríamos dar la solución del modelo de duopolio en función de cualquier juego de parámetros $(t_0,a,c_1,c_2,\gamma_1,\gamma_2,Q_{10},Q_{20})$ todos ellos positivos, pero la expresión resultante es tan farragosa que, únicamente a título ilustrativo, en la Ecuación 11, se representa la solución del modelo de duopolio para el caso particular en que las constantes de velocidad del ajuste son iguales: $\gamma_1=\gamma_2=\gamma$.

$$t_0=0,\quad \vec{x}(t)=\begin{bmatrix} Q_{10} \\ Q_{20} \end{bmatrix},\quad \vec{x}_0=\begin{bmatrix} Q_1(0) \\ Q_2(0) \end{bmatrix},\quad \vec{b}=\frac{1}{2b}\begin{bmatrix} \gamma_1(a-c_1) \\ \gamma_2(a-c_2) \end{bmatrix},\quad A=-\begin{bmatrix} \gamma_1 & \frac{\gamma_1}{2} \\ \frac{\gamma_2}{2} & \gamma_2 \end{bmatrix}$$

Ecuación 10. Identificación de las variables y parámetros del modelo de duopolio.

$$Q_1(t)=\frac{1}{6}\left\{2(a-2c_1+c_2)+\left[c_1+c_2-2a+3b(Q_{10}+Q_{20})\right]e^{-\frac{3}{2}\gamma t}+3\left[c_1-c_2+b(Q_{10}-Q_{20})\right]e^{-\frac{1}{2}\gamma t}\right\}$$

$$Q_2(t)=\frac{1}{6}\left\{2(a+c_1-2c_2)+\left[c_1+c_2-2a+3b(Q_{10}+Q_{20})\right]e^{-\frac{3}{2}\gamma t}-3\left[c_1-c_2+b(Q_{10}-Q_{20})\right]e^{-\frac{1}{2}\gamma t}\right\}$$

Ecuación 11. Solución (producciones de ambas empresas en cada instante) cuando las constantes de velocidad del ajuste son iguales: $\gamma_1=\gamma_2=\gamma$.

4.2 Estudio de la estabilidad del modelo

Para estudiar el comportamiento del modelo a largo plazo utilizaremos los resultados introducidos al principio del trabajo. Vamos a probar que el modelo de duopolio presentado es incondicionalmente estable, es decir, que con independencia de los valores numéricos que tomemos para los parámetros del modelo, las producciones de ambas empresas convergen a valores finitos cuando $t\to\infty$. Según la Ecuación 2 necesitamos calcular los valores propios de la matriz A dada en la Ecuación 10 y ver que tienen parte real negativa (véase la Ecuación 12). De hecho ambos valores propios son reales pues el radicando se puede escribir de la siguiente forma: $(\gamma_1)^2-\gamma_1\gamma_2+(\gamma_2)^2=(\gamma_1-\gamma_2)^2+\gamma_1\gamma_2>0$. A partir de la expresión de los valores propios dados en la Ecuación 12 es sencillo ver que ambos son negativos. Claramente como $\gamma_1,\gamma_2>0$, entonces $\lambda_2<0$. Y para ver que $\lambda_1<0$ basta tener en cuenta que $(\gamma_1)^2-\gamma_1\gamma_2+(\gamma_2)^2=(\gamma_1+\gamma_2)^2-3\gamma_1\gamma_2<(\gamma_1+\gamma_2)^2$ con lo que la raíz del numerador tendrá módulo menor que $-(\gamma_1+\gamma_2)$, lo que garantiza que el numerador de λ_1 será negativo, y por tanto $\lambda_1<0$.

$$\sigma(A)=\left\{\lambda_1=\frac{-(\gamma_1+\gamma_2)+\sqrt{(\gamma_1)^2-\gamma_1\gamma_2+(\gamma_2)^2}}{2}<0,\lambda_2=\frac{-(\gamma_1+\gamma_2)-\sqrt{(\gamma_1)^2-\gamma_1\gamma_2+(\gamma_2)^2}}{2}<0\right\}$$

Ecuación 12. Justificación de la estabilidad incondicional del modelo.

Obsérvese que el criterio de estabilidad dado en la Ecuación 3 resulta más directo de aplicar a partir de la expresión de los valores propios en términos de la traza y el determinante de la matriz A. A partir de las Ecuaciones 3 y 13, nótese que como $(\mathrm{tr}(A))^2-4\det(A)>0$, se tiene asegurado que los valores propios son reales. Además como $\mathrm{tr}(A)<0$, claramente según la Ecuación 3, $\lambda_2<0$. Para comprobar que $\lambda_1<0$ obsérvese que como $\det(A)>0$, se tendrá que $\sqrt{(\mathrm{tr}(A))^2-4\det(A)}<\sqrt{(\mathrm{tr}(A))^2}=\mathrm{tr}(A)$ lo que garantiza que también $\lambda_1<0$.

$$\mathrm{tr}(A)=-(\gamma_1+\gamma_2)<0,\ \det(A)=\frac{3}{4}\gamma_1\gamma_2>0\ ,\ (\mathrm{tr}(A))^2-4\det(A)=(\gamma_1-\gamma_2)^2+\gamma_1\gamma_2>0$$

Ecuación 13. Cálculo de la traza y el determinante de la matriz del modelo para justificar la estabilidad incondicional.

Una vez queda garantizada la estabilidad incondicionalmente, la Ecuación 3 nos indica cómo calcular el valor de equilibrio (véase Ecuación 14), el cual está bien definido, es decir, es positivo, ya que, por hipótesis: $0<2c_i<a, i=1,2$.

$$\vec{Q}^e = \begin{bmatrix} Q_1^e \\ Q_2^e \end{bmatrix} = -A^{-1}\vec{b} = \frac{1}{3b}\begin{bmatrix} a-2c_1+c_2 \\ a+c_1-2c_2 \end{bmatrix}$$

Ecuación 14. Cálculo de las producciones de equilibrio.

A modo ilustrativo, obsérvese tomando límites cuando $t \to \infty$ en las expresiones explícitas de las producciones dadas en el caso particular analizado en la Ecuación 13, que se obtiene el punto de equilibrio explicitado en la Ecuación 14.

El estudio anterior de la estabilidad puede completarse construyendo el diagrama de fase del s.e.d.o. dado en la Ecuación 9, ya que, el sistema es autónomo (sus coeficientes no dependen del tiempo). Esto permite estudiar la estabilidad del s.e.d.o. y para ello en primer lugar se representa dicho sistema en el equilibrio, es decir, cuando se cumple $(Q_1'(t)=0, Q_2'(t)=0)$ (y donde (Q_1, Q_2) no dependen del tiempo). Imponiendo esta condición en la Ecuación 9, resulta el sistema lineal algebraico dado en la Ecuación 15 cuya representación son dos funciones lineales que pueden verse en la Gráfica 2-izquierda. Estas rectas son, como se vio en la Gráfica 1, las denominadas funciones de reacción de cada empresa.

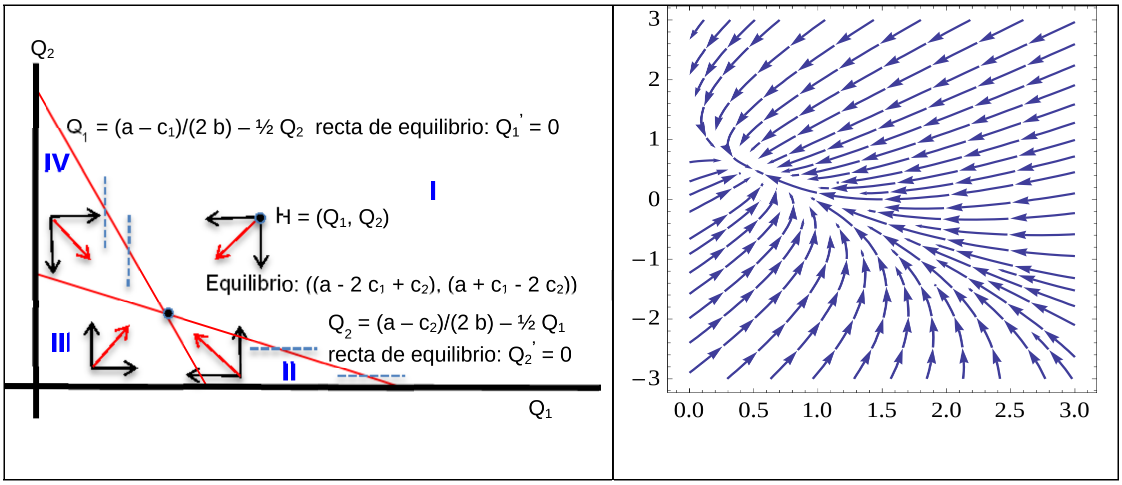
Para comprender el significado del diagrama fase, primero consideraremos los puntos (Q_1, Q_2) que están sobre la primera (segunda) recta de equilibrio o función de reacción de la empresa 1 (2). Estos puntos cumplen: $Q_1 = (a-c_1)/(2b) - (1/2)Q_2$ ($Q_2 = (a-c_2)/(2b) - (1/2)Q_1$) ya que esta recta se obtiene al imponer la condición de equilibrio $Q_1' = 0$ ($Q_2' = 0$) sobre la primera (segunda) ecuación del sistema dinámico dado en la Ecuación 9. Esto nos indica que sobre estos puntos, la primera (segunda) coordenada Q_1 (Q_2) no cambia. En la Gráfica 2-izquierda indicamos esto mediante las líneas verticales (horizontales) punteadas. Cuando tomamos un punto $H = (Q_1, Q_2)$ en el plano de fase que no pertenece a las rectas de reacción, éste estará en una de los cuatro regiones I, II, III ó IV determinadas por las funciones de reacción (véase Gráfica 2-izquierda). Como veremos a continuación, un análisis detallado nos indica cómo evoluciona el sistema dinámico que gobierna el modelo de duopolio dado por la Ecuación 9, cuando se parte de la condición inicial dada por el punto $H = (Q_1, Q_2)$ que, para esta discusión asumiremos como se indica en la Gráfica 2-izquierda, está en la región I. Por ello las coordenadas de dicho punto cumplen:

- $Q_1 > (a-c_1)/(2b) - (1/2)Q_2$. A partir del miembro derecho de la primera ecuación de la Ecuación 9 se deduce que: $Q_1' < 0$, lo que nos indica que Q_1 tiende a decrecer. Esto lo representamos en el diagrama de fase poniendo en el punto $H = (Q_1, Q_2)$ una flecha $\leftarrow$ (llamada vector de fuerza) que indica que en el eje horizontal Q_1 decrece.
- $Q_2 > (a-c_2)/(2b) - (1/2)Q_1$. A partir del miembro derecho de la segunda ecuación de la Ecuación 9 se deduce que: $Q_2' < 0$, lo que nos indica que Q_2 tiende a decrecer. Esto lo representamos en el diagrama de fase poniendo en el punto $H = (Q_1, Q_2)$ una flecha $\downarrow$ que indica que en el eje vertical Q_2 decrece.

Este análisis nos indica que, con independencia de donde esté situado el punto $H=(Q_1,Q_2)$ dentro de la región I, el sistema dinámico siempre tenderá al punto de equilibrio. Razonando análogamente, es sencillo extender este estudio al resto de las regiones II, III y IV, llegándose a la misma conclusión, tal y como hemos representado en la Gráfica 2-izquierda. En la Gráfica 2-derecha, se ha representado el diagrama de fase para valores específicos de los parámetros y en esta representación se observa que efectivamente el equilibrio es asintóticamente globalmente estable (es decir, con independencia de la condición inicial, siempre hay convergencia hacia el equilibrio).

$$0=\frac{a-c_1}{2b}-Q_1-\frac{1}{2}Q_2\ ,\ 0=\frac{a-c_2}{2b}-\frac{1}{2}Q_1-Q_2$$

Ecuación 15. Ecuaciones del diagrama de fase.



Gráfica 2. Izquierda: Diagrama de fase general. Derecha: Diagrama de fase para $a=4,\ c_1=c_2=1,\ b=2$ que corresponde al equilibrio $(1/2,1/2)$. Se observa que con independencia de la condición inicial el modelo converge al equilibrio.

5 Cierre

En este trabajo se ha estudiado, a través de un ejemplo, la efectividad de las matemáticas para analizar modelos en Economía. Utilizando resultados básicos sobre s.e.d.o. hemos estudiado el modelo dinámico de duopolio asumiendo que las dos empresas fijan sus producciones para maximizar sus beneficios.

6 Bibliografía

[1] Shone, R.: “Economic Dynamics”, 2nd edition, Ed. Cambridge, 2002.

Este texto presenta el estudio sobre modelos económicos con el denominador común de ser todos ellos de tipo de dinámico. Combina la exposición de los modelos con la presentación de software para analizarlos.