



TRABAJO DE FIN DE GRADO

**ESTUDIO DEL EFECTO DE LAS
VARIACIONES DEL COEFICIENTE DE DRAG
EN LAS ÓRBITAS DE SATÉLITES LEO**

Autor: **Elfidio Ángel Alonso Artal**

Tutores: **José Antonio Morano Fernández, Alicia
Herrero Debón, Santiago Moll López**

Grado en Ingeniería Aeroespacial

Curso 2020-2021

Escuela Técnica Superior de Ingeniería del Diseño

UNIVERSITAT POLITÈCNICA DE VALÈNCIA

10 de julio de 2021

A mi madre

Agradecimientos

Quisiera expresar mi más sincero agradecimiento a todas las personas que durante estos años de carrera me han apoyado y me han impulsado a seguir trabajando, y a evolucionar tanto en el aspecto académico como el personal.

Agradecer a mi familia el apoyo incondicional durante estos cuatro años, y especialmente a mi madre, quien me ha educado y facilitado el camino para llegar a ser la persona que soy ahora.

A todos mis compañeros de piso, por convivir conmigo durante mi estancia en Valencia, y en particular a Luis, por aguantarme durante cuatro años seguidos.

A Lau, por estar a mi lado en los peores momentos y compartir conmigo los mejores días de este último año.

A José Antonio, Alicia y Santi, por su paciencia, profesionalidad y gran dedicación; no solo como tutores del proyecto, sino también como profesores. Ha sido un placer.

Y en general, a aquellas personas que he conocido en este periodo, fuera o dentro de la universidad que han hecho de estos últimos años una experiencia inolvidable.

A todos ellos, gracias.

Resumen

Gracias a las contribuciones teóricas de Kepler y Newton, se ha logrado controlar y modificar las trayectorias de los cuerpos lanzados al espacio de manera deliberada. Esto se consigue por medio de potentes propagadores que consideran los efectos que desvían las órbitas de los satélites artificiales de sus trayectorias deseadas. Una correcta integración de las ecuaciones del movimiento permiten predecir las posiciones y velocidades de cualquier satélite en todo instante.

En este trabajo se diseña un propagador utilizando el método de Cowell e incluyendo las perturbaciones debidas al achatamiento terrestre y la resistencia aerodinámica para órbitas bajas (también conocidas como órbitas *LEO*). La validez y precisión del integrador diseñado se obtiene mediante comparación de los resultados con el propagador de la interfaz *Horizons* de la *NASA*. Dado que el interés se centra en los satélites *LEO*, esta comparativa se realiza propagando sus órbitas en un intervalo de tiempo de una semana, ya que estos sufren correcciones en su trayectoria con frecuencia.

Una vez validado el integrador diseñado, se procede al estudio principal del trabajo, el cual consiste en analizar los efectos de las variaciones del coeficiente de *drag* en las órbitas *LEO*. Dicho estudio se realiza sobre los elementos orbitales clásicos, los cuales permiten una mejor interpretación de los efectos que se observan. Además, se hace uso del software *STK* para obtener una mejor visualización de la evolución de los elementos orbitales al considerar diferentes coeficientes de *drag*.

Los resultados muestran una tendencia decreciente en el tiempo para el semieje mayor y la excentricidad. Esta evolución se acentúa cuanto mayor es el *drag*. Sin embargo, el argumento del perigeo y la RAAN no presentan un comportamiento tan evidente.

Palabras Clave: órbita, satélite, propagador, perturbación, *drag*.

Abstract

Thanks to the theoretical contributions by Kepler and Newton, it has been possible to deliberately control and modify the trajectories of the bodies launched into space. This is achieved by means of powerful propagators that consider the effects that deviate artificial satellite's orbits from their desired trajectories. A correct integration of the movement equations allow to predict both satellite's position and velocity coordinates at any instant.

In this thesis, a Cowell's Method based propagator is designed including the perturbations due to the Earth's oblateness and aerodynamic drag for Low Earth Orbits (*LEO*). The designed propagator's validity and precision is achieved by comparing the results with that of *NASA's Horizons* interface propagator. Due to the fact that this thesis is *LEO* oriented, this comparison is performed by integrating the chosen orbits for a week time, since *LEO* satellites trajectories' are corrected frequently.

Once the designed propagator is validated, a main study regarding the drag coefficient's variation effect in *LEO* orbits will be carried out. Specifically, this analysis is performed on the classical orbital elements, which allow a better result interpretation. In addition, the *STK* software is used in order to obtain a better visualization of the orbital elements when considering different drag coefficients.

The results show a decreasing tendency in time for the semimajor axis and the eccentricity. This evolution is magnified for larger drag coefficients. However, the argument of perigee and RAAN elements do not show an obvious behaviour.

Keywords: orbit, satellite, propagator, perturbation, drag.

Resum

Gràcies a les contribucions teòriques de Kepler i Newton s'ha aconseguit controlar i modificar les trajectòries dels cossos llançats al espai de manera deliberada. Açò es possible mitjançant potents propagadors que consideren els efectes que desvien les òrbites dels satèl·lits artificials de les seues trajectòries desitjades. Una correcta integració de les equacions del moviment permet predir les posicions i velocitats de qualsevol satèl·lit en qualsevol instant.

En aquest treball es dissenya un propagador utilitzant el mètode de Cowell i incloent les perturbacions degudes a l'aplanament terrestre i la resistència aerodinàmica per a òrbites baixes (també conegudes com òrbites *LEO*). La validesa i precisió de l'integrador dissenyat s'obté mitjançant la comparació dels resultats amb el propagador de la interfície *Horizons* de la *NASA*. Donat que l'interès es centra en els satèl·lits *LEO*, aquesta comparativa es realitza propagant les seues òrbites en un interval de temps de una setmana, ja que aquests pateixen correccions en la seua trajectòria amb freqüència.

Una vegada validat l'integrador dissenyat, es procedeix a l'estudi principal del treball, el qual consisteix en analitzar els efectes de les variacions del coeficient de drag en les òrbites *LEO*. Aquest estudi es realitza sobre els elements orbitals clàssics, els quals permeten una millor interpretació dels efectes que s'observen. A més, s'utilitza el software *STK* per a obtenir una millor visualització de l'evolució dels elements orbitals al considerar diferents coeficients de drag sobre l'òrbita.

Els resultats mostren una tendència decreixent en el temps per al semieix major i excentricitat. Aquesta evolució s'accentua quan major es el drag. D'altra banda, l'argument del perigeu i la RAAN no presenten un comportament tan evident.

Paraules Clau: òrbita, satèl·lit, propagador, perturbació, *drag*.

Índice general

	<i>Página</i>
Resumen	XIII
Índice General	XIII
Índice de Tablas	XVII
Índice de Figuras	XVIII
Nomenclatura	XXI
I Memoria	1
1 Planteamiento del trabajo	3
1.1 Introducción	3
1.2 Estado del arte y justificación del proyecto	5
1.3 Motivación	7
1.4 Objetivo del proyecto	8
1.5 Estructura	8
2 Ecuaciones del movimiento relativo	10
2.1 Sistemas de referencia	10
2.1.1 El sistema Heliocéntrico-Eclíptico	11
2.1.2 El sistema Topocéntrico-Horizontal	12
2.1.3 El sistema Geocéntrico-Ecuatorial	13
2.2 El problema de dos cuerpos	15
3 Las órbitas de Kepler	21
3.1 Introducción a las Leyes de Kepler	21
3.2 Geometría de una órbita elíptica	22

3.3	Consecuencias de las Leyes de Kepler	24
3.3.1	Conservación del momento angular	24
3.3.2	Descomposición del vector velocidad y ángulo de vuelo	26
3.3.3	Conservación de la energía mecánica	28
3.3.4	Conservación del vector de Laplace y la excentricidad	29
3.3.5	La ecuación orbital	30
3.3.6	La conservación de la velocidad areolar	33
3.4	Otros tipos de órbitas	35
3.4.1	Órbitas circulares	36
3.4.2	Órbitas parabólicas	39
3.4.3	Órbitas hiperbólicas	40
3.5	El tiempo en las órbitas	43
3.5.1	El tiempo de paso por el perigeo	44
3.5.2	La ecuación de tiempos en órbitas elípticas	45
3.5.3	La ecuación de Kepler	47
4	Elementos orbitales y búsqueda de datos	49
4.1	Representación del estado de un satélite	49
4.1.1	Los elementos orbitales clásicos	49
4.1.2	Determinación de los elementos orbitales a partir del vector estado	51
4.2	<i>Tool-Line Elements Set</i>	54
4.2.1	Formato	55
4.2.2	Información relevante: Los coeficientes balísticos	56
4.2.3	Procesamiento de <i>TLE</i>	58
4.3	Sitios de búsqueda de datos	59
4.3.1	Obtención de datos en <i>CelesTrak</i>	59
4.3.2	Obtención de datos en <i>Horizons</i>	59
4.4	Selección del satélite	62
4.4.1	Especificaciones del satélite <i>Aeolus</i>	62
5	Diseño y ejecución del propagador	65
5.1	Integración por el método de Cowell	65
5.2	Las perturbaciones de la órbita	66
5.2.1	El efecto del achatamiento terrestre	67
5.2.2	El efecto de la resistencia aerodinámica	72

5.3	Implementación del código	75
5.3.1	Función principal	76
5.3.2	Función de integración	77
5.3.3	Función de densidad atmosférica	78
6	Análisis de resultados	79
6.1	Validación del propagador	79
6.2	Estudio del efecto de las variaciones del C_D	87
6.2.1	Efecto en una órbita <i>LEO</i> baja	88
6.2.2	Efecto en una órbita <i>LEO</i> alta	105
7	Conclusiones	112
7.1	Conclusiones	112
7.2	Trabajos futuros	114
II	Presupuesto	116
1	Presupuesto	118
1.1	Desglose de costes unitarios	118
1.2	Presupuesto total	121
III	Pliego de Condiciones	123
1	Condiciones generales	125
1.1	Real Decreto 488/1997 del 14 de abril	126
2	Especificaciones técnicas	134
2.1	Especificaciones de materiales y equipos	134
2.1.1	Hardware	134
2.1.2	Software	134
2.1.3	Conexión a internet	135
2.1.4	Conocimientos previos	135
2.1.5	Conocimientos informáticos	135
2.1.6	Material adicional	135
2.1.7	Supervisión	136
2.2	Condiciones de calidad	136
2.3	Condiciones de garantía y mantenimiento	136

2.4	Reclamaciones	137
2.5	Condiciones legales y contractuales	137
2.6	Revisión de los precios	137
2.7	Fianza	138
2.8	Aceptación	138
Bibliografía		142

Índice de tablas

Tabla 3.1	Constantes de las órbitas keplerianas	35
Tabla 3.2	Tipos de cónicas y su rango de excentricidad	36
Tabla 4.1	Elementos orbitales clásicos	52
Tabla 4.2	Información que proporciona la primera fila de un <i>TLE</i> . .	56
Tabla 4.3	Información que proporciona la segunda fila de un <i>TLE</i> . .	56
Tabla 4.4	Especificaciones relevantes de <i>Aeolus</i> para este trabajo [1]. .	63
Tabla 5.1	Valores del segundo al sexto armónico zonal de la Tierra . .	70
Tabla 5.2	Las constantes necesarias para ejecutar el código	76
Tabla 6.1	Rango de coeficientes de <i>drag</i> a utilizar	88
Tabla 6.2	Leyenda para las representaciones en <i>STK</i>	100

Índice de figuras

Figura 1.1	Ejemplo del proceso de caracterización de una misión de puesta en órbita [2].	4
Figura 1.2	Estimación de la inversión global en el sector espacial desde 2015 hasta 2040 (en millones de dólares) [3].	6
Figura 2.1	Sistema Heliocéntrico/Geocéntrico-Eclíptico [4].	12
Figura 2.2	Sistema Topocéntrico-Horizontal [4].	13
Figura 2.3	Sistema Geocéntrico-Ecuatorial [4].	14
Figura 2.4	Sistema inercial fijo con respecto a las estrellas [5].	16
Figura 2.5	Movimiento de un punto P en un sistema de referencia inercial [6].	20
Figura 3.1	Geometría de una órbita elíptica [7].	22
Figura 3.2	Visualización del vector excentricidad [8].	23
Figura 3.3	Visualización del semilado recto o parámetro orbital [8].	23
Figura 3.4	Visualización del momento angular específico [6].	25
Figura 3.5	Visualización de las componentes de la velocidad [6].	26
Figura 3.6	Visualización de los horizontes local y vertical y el ángulo de vuelo [6].	27
Figura 3.7	Visualización de los signos que toma el ángulo de vuelo a lo largo de la órbita [9].	28
Figura 3.8	Visualización de la relación entre la anomalía verdadera y el vector excentricidad [6].	31
Figura 3.9	Área barrida por \vec{r} en un intervalo de tiempo diferencial dt [6].	34
Figura 3.10	Tipos de curvas cónicas [8].	36
Figura 3.11	Rango de altitudes de distintos tipos de órbitas circulares (escala aproximada) [10].	39
Figura 3.12	Geometría de una órbita hiperbólica [6].	41
Figura 3.13	Visualización de las órbitas cónicas [11].	43

Figura 3.14	Posición del satélite en cada instante de tiempo [12].	44
Figura 3.15	Visualización de la anomalía excéntrica [6].	46
Figura 4.1	Órbita y plano de referencia ecuatorial [13].	50
Figura 4.2	Visualización de los elementos orbitales clásicos [6].	51
Figura 4.3	Disposición general de cualquier <i>TLE</i> [14].	55
Figura 4.4	Ejemplo conjunto <i>TLE</i> de la <i>ISS</i> [14].	55
Figura 4.5	Ejemplo de archivo con extensión <i>.txt</i> descargado de <i>Horizons</i> (solo las primeras filas).	61
Figura 4.6	Satélite <i>Aeolus</i> [1].	63
Figura 4.7	Simulación de la órbita de <i>Aeolus</i> en <i>CelesTrak</i> [15].	64
Figura 5.1	Sistema Topocéntrico-Horizontal [4].	68
Figura 5.2	Distintos armónicos zonales de la Tierra [16].	69
Figura 5.3	Fragmento de la Tabla I de la <i>USSA76</i> [17].	73
Figura 6.1	Conjunto <i>TLE</i> para <i>Aeolus</i>	79
Figura 6.2	Error entre el vector posición obtenido con el integrador sin perturbaciones y el vector posición proporcionado por <i>Horizons</i>	81
Figura 6.3	Error entre el vector velocidad obtenido con el integrador sin perturbaciones y el vector velocidad proporcionado por <i>Horizons</i>	82
Figura 6.4	Error entre el vector posición obtenido mediante el integrador con J_2 y el vector posición proporcionado por <i>Horizons</i>	83
Figura 6.5	Error entre el vector velocidad obtenido mediante el integrador con J_2 y el vector velocidad proporcionado por <i>Horizons</i>	84
Figura 6.6	Error entre el vector posición obtenido mediante el integrador con J_2, J_3, J_4, J_5, J_6 y <i>drag</i> , y el vector posición proporcionado por <i>Horizons</i>	85
Figura 6.7	Error entre el vector velocidad obtenido mediante el integrador con J_2, J_3, J_4, J_5, J_6 y <i>drag</i> , y el vector velocidad proporcionado por <i>Horizons</i>	86
Figura 6.8	Oscilación del semieje mayor para órbita <i>LEO</i> baja	89
Figura 6.9	Evolución del semieje mayor en función del C_D para órbita <i>LEO</i> baja	89
Figura 6.10	Oscilación de la excentricidad para órbita <i>LEO</i> baja	90
Figura 6.11	Evolución de la excentricidad en función del C_D para órbita <i>LEO</i> baja	91

Figura 6.12	Oscilación de la inclinación para órbita <i>LEO</i> baja	92
Figura 6.13	Evolución de la inclinación en función del C_D para órbita <i>LEO</i> baja	92
Figura 6.14	Visualización de la oscilación que sufre el argumento del perigeo cada periodo en <i>STK</i>	93
Figura 6.15	Oscilación que sufre el argumento del perigeo cada periodo para órbita <i>LEO</i> baja	94
Figura 6.16	Oscilación del argumento del perigeo para órbita <i>LEO</i> baja	94
Figura 6.17	Evolución del argumento del perigeo en función del C_D para órbita <i>LEO</i> baja	95
Figura 6.18	Evolución de la anomalía verdadera en función del C_D para órbita <i>LEO</i> baja	96
Figura 6.19	Evolución más detallada de la anomalía verdadera	96
Figura 6.20	Evolución de la RAAN en función del C_D para órbita <i>LEO</i> baja	97
Figura 6.21	Oscilación del radio del perigeo para órbita <i>LEO</i> baja	98
Figura 6.22	Evolución del radio del perigeo en función del C_D para órbita <i>LEO</i> baja	98
Figura 6.23	Oscilación del periodo para órbita <i>LEO</i> baja	99
Figura 6.24	Evolución del periodo en función del C_D para órbita <i>LEO</i> baja	100
Figura 6.25	Visualización de la órbita inicial en <i>STK</i>	101
Figura 6.26	Visualización de las órbitas perturbadas en <i>STK</i>	102
Figura 6.27	Visualización de las órbitas de ambos propagadores en <i>STK</i>	102
Figura 6.28	Visualización de la inclinación y la RAAN para todas las órbitas presentadas, en <i>STK</i>	103
Figura 6.29	Visualización en <i>STK</i> de la variación de RAAN en km con respecto al instante inicial	104
Figura 6.30	Visualización en <i>STK</i> de la variación de RAAN en km en el instante final	104
Figura 6.31	Evolución del semieje mayor en función del C_D para órbita <i>LEO</i> alta	106
Figura 6.32	Evolución de la excentricidad en función del C_D para órbita <i>LEO</i> alta	106
Figura 6.33	Evolución de la inclinación en función del C_D para órbita <i>LEO</i> alta	107

Figura 6.34	Oscilación que sufre el argumento del perigeo cada periodo para órbita <i>LEO</i> alta	108
Figura 6.35	Evolución del argumento del perigeo en función del C_D para órbita <i>LEO</i> alta	109
Figura 6.36	Evolución de la RAAN en función del C_D para órbita <i>LEO</i> alta	110
Figura 6.37	Evolución del radio del perigeo en función del C_D para órbita <i>LEO</i> alta	110
Figura 6.38	Visualización de las órbitas <i>LEO</i> alta y baja en <i>STK</i>	111

Nomenclatura

Acrónimos

ASCII American Standard Code for Information Interchange

c.d.m Centro de masas

ESA European Space Agency o Agencia Espacial Europea

GEO Geostationary Equatorial Orbit u órbita geoestacionaria ecuatorial

GPS Global Positioning System o Sistema de Posicionamiento Global

IAU International Astronomical Union o Unión Astronómica Internacional

ISS International Space Station o Estación Espacial Internacional

KMPER KiloMeters Per Earth Radii o radio de la Tierra en km

LEO Low Earth Orbit u órbita baja terrestre

LIDAR Laser Imaging Detection and Ranging

MEO Medium Earth Orbit u órbita intermedia terrestre

NASA National Aeronautics and Space Administration o Administración Nacional de Aeronáutica y el Espacio

NORAD North American Aerospace Defense Command o Mando Norteamericano de Defensa Aeroespacial

RA Ascensión Recta

RAAN Acensión Recta del Nodo Ascendente

s.d.r Sistema de referencia

SDP Simplified Deep Space Perturbations

SGP Simplified General Perturbations

STK Systems Tool Kit

USSA76 US Standard Atmosphere 1976 o Atmósfera Estándar Estadounidense de 1976

TLE Tool-Line Elements o conjunto de elementos de dos líneas

Símbolos griegos

α Ascensión Recta rad

$\bar{\omega}$ Longitud del perigeo rad

β Latitud eclíptica rad

δ	Declinación	rad
$\ddot{\vec{\Omega}}$	Vector aceleración angular absoluta del s.d.r en movimiento	rad/s ²
ϵ	Oblicuidad de la eclíptica	rad
η	Subíndice de un armónico zonal de la Tierra ($2 \leq \eta \leq 6$)	[-]
γ	Ángulo de vuelo del satélite	rad
λ	Longitud eclíptica	rad
μ	Parámetro gravitacional geocéntrico	km ³ /s ²
ω_E	Velocidad angular de la Tierra	rad/s
Ω	Ascensión recta del nodo ascendente	rad
ω	Argumento del perigeo	rad
Φ	Perturbación del pot. gravitacional debido al achatamiento terrestre	km ² /s ²
ϕ	Ángulo polar complementario a la elevación	rad
Ψ	Vector columna que contiene a \vec{r} y \vec{v}	km, km/s
ρ_0	Densidad de referencia según el modelo SGP8	kg/m ² ·E _{Radio}
ρ	Densidad del aire a cierta altitud	kg/km ³
τ	Cualquier coordenada x , y ó z en dirección \hat{i} , \hat{j} ó \hat{k} , respectivamente	[-]
θ	Anomalía verdadera	rad
Υ	Punto Vernal o Punto Aries	[-]
$\vec{\Omega}$	Vector velocidad angular absoluta del s.d.r en movimiento	rad/s
ξ	Energía mecánica específica del satélite	km ² /s ²

Símbolos latinos

$\ddot{\vec{r}}$	Vector aceleración del satélite	km/s ²
$\ddot{\vec{R}}_1$	Vector aceleración del c.d.m de la Tierra en un s.d.r inercial	km/s ²
$\ddot{\vec{R}}_2$	Vector aceleración del c.d.m del satélite en un s.d.r inercial	km/s ²
$\ddot{\vec{R}}_G$	Vector aceleración del c.d.m del sistema en un s.d.r inercial	km/s ²
$\dot{\vec{r}}$	Vector velocidad del satélite	km/s
$\dot{\vec{R}}_1$	Vector velocidad del c.d.m de la Tierra en un s.d.r inercial	km/s
$\dot{\vec{R}}_2$	Vector velocidad del c.d.m del satélite en un s.d.r inercial	km/s
$\dot{\vec{R}}_G$	Vector velocidad del c.d.m del sistema en un s.d.r inercial	km/s
\hat{i}	Vector unitario en el eje X positivo	[-]
\hat{j}	Vector unitario en el eje Y positivo	[-]
\hat{k}	Vector unitario en el eje Z positivo	[-]
\hat{u}_\perp	Vector unitario en la dirección transversal de la velocidad	[-]
\hat{u}_h	Vector unitario en la dirección normal al plano orbital	[-]
\hat{v}_{rel}	Vector unitario de la velocidad relativa del satélite y la atmósfera	[-]
\vec{a}	Vector aceleración del satélite	km/s ²

\vec{C}	Vector de Laplace	[-]
\vec{D}	Vector resistencia aerodinámica	kg·km/s ²
\vec{e}	Vector excentricidad de la órbita	[-]
\vec{H}	Vector momento angular del satélite	km ² ·kg/s
\vec{h}	Vector momento angular específico del satélite	km ² /s
\vec{n}	Vector línea de nodos	[-]
\vec{p}	Vector perturbación total	km/s ²
\vec{p}_{Drag}	Vector perturbación debido a la resistencia aerodinámica del aire	km/s ²
\vec{p}_{J_η}	Vector perturbación debido al armónico η	km/s ²
\vec{r}	Vector posición del satélite	km
\vec{R}_1	Vector posición del c.d.m de la Tierra en un s.d.r inercial	km
\vec{R}_2	Vector posición del c.d.m del satélite en un s.d.r inercial	km
\vec{R}_G	Vector posición del c.d.m del sistema en un s.d.r inercial	km
\vec{v}	Vector velocidad del satélite	km/s
\vec{v}_{atm}	Velocidad de la atmósfera	km/s
\vec{v}_{rel}	Vector velocidad relativa del satélite y la atmósfera	km/s
\vec{v}_\perp	Vector velocidad transversal del satélite	km/s
\vec{v}_r	Vector velocidad radial del satélite	km/s
a	Semieje mayor de la órbita	km
a_τ	Aceleración del satélite en una dirección τ	km/s ²
B	Coeficiente balístico del satélite	km ² /kg
b	Semieje menor de la órbita	km
B^*	Coeficiente balístico <i>estrella</i> del satélite	1/E _{Radio}
c	Distancia semifocal de la órbita	km
C_D	Coeficiente de resistencia aerodinámica	[-]
C_3	Energía característica de la trayectoria hiperbólica	km ² /s ²
D	Resistencia aerodinámica	kg·km/s ²
dA/dt	Velocidad areolar de la órbita	km ² /s
E	Anomalía excéntrica de la órbita	rad
e	Excentricidad de la órbita	[-]
E_{Radio}	Unidad radio de la Tierra	km
e_τ	Componente del vector excentricidad en una dirección τ	[-]
F	Foco de la órbita de sección cónica	[-]
G	Constante de gravitación universal	km ³ /kg·s ²
h	Momento angular específico del satélite	km ² /s
h_τ	Componente del vector mom. angular específico en una dirección τ	km ² /s

h_e	Altitud desde el nivel del mar	km
i	Inclinación de la órbita	rad
J_2	Segundo armónico zonal de la Tierra	[-]
J_3	Tercer armónico zonal de la Tierra	[-]
J_4	Cuarto armónico zonal de la Tierra	[-]
J_5	Quinto armónico zonal de la Tierra	[-]
J_6	Sexto armónico zonal de la Tierra	[-]
$KMPER$	Factor de conversión Radio de la Tierra - km	[-]
L	Longitud verdadera	rad
M	Masa de la Tierra	kg
m	Masa del satélite	kg
M_e	Anomalía media de la órbita	rad
n	Movimiento medio de la órbita	rad/s
n_τ	Componente del vector línea de nodos en una dirección τ	[-]
p	Semilado recto o parámetro orbital	km
$p_{\text{Drag}\tau}$	Perturbación producida por la resistencia en una dirección τ	km/s ²
$p_{J_\eta\tau}$	Perturbación producida por un armónico η en una dirección τ	km/s ²
r	Posición del satélite	km
R_E	Radio de la Tierra en el ecuador	km
r_a	Radio del apogeo	km
r_p	Radio del perigeo	km
S	Área frontal del satélite	m ²
T	Periodo de la órbita	s
t	Tiempo	s
t_p	Tiempo de paso por el perigeo	s
u	Argumento de latitud	rad
V	Energía potencial gravitatoria en la Tierra	km ² /s ²
v	Velocidad del satélite	km/s
v_∞	Velocidad hiperbólica excedente	km/s
v_τ	Velocidad del satélite en una dirección τ	km/s
v_{cir}	Velocidad de la órbita circular	km/s
v_{esc}	Velocidad de escape de una órbita	km/s
v_{rel}	Velocidad relativa del satélite y la atmósfera	km/s
v_\perp	Velocidad transversal del satélite	km/s
v_r	Velocidad radial del satélite	km/s
x	Posición del satélite en la dirección \hat{i}	km

X_{GE}	Posición en dirección \hat{i} en el sistema Geocéntrico-Ecuatorial	km
y	Posición del satélite en la dirección \hat{j}	km
Y_{GE}	Posición en dirección \hat{j} en el sistema Geocéntrico-Ecuatorial	km
z	Posición del satélite en la dirección \hat{k}	km
Z_{GE}	Posición en dirección \hat{k} en el sistema Geocéntrico-Ecuatorial	km
$\ddot{\vec{r}}_{re}$	Vector aceleración relativa en un sistema en movimiento	km/s ²
$\dot{\vec{r}}_{re}$	Vector velocidad relativa en un sistema en movimiento	km/s
\hat{u}_r	Vector unitario en la dirección de \vec{r}	[-]
\vec{F}_{12}	Vector fuerza gravitatoria ejercida por el satélite sobre la Tierra	kg·km/s ²
\vec{F}_{21}	Vector fuerza gravitatoria ejercida por la Tierra sobre el satélite	kg·km/s ²
\vec{r}_{re}	Vector posición relativa en un sistema en movimiento	km
Az	Azimut	rad
El	Elevación	rad
RA	Ascensión Recta	rad

Parte I

Memoria

Capítulo 1

Planteamiento del trabajo

1.1. Introducción

Desde la puesta en órbita del primer satélite artificial en el año 1957, el estudio y aplicación de la mecánica orbital juega un papel fundamental en el desarrollo tecnológico del mundo globalizado, proporcionando multitud de servicios en una amplia variedad de sectores.

Gracias a la luz arrojada por Kepler y a hombros de las leyes del movimiento y gravitación universal formuladas por Newton ya hace varios siglos, se ha conseguido controlar y modificar de manera deliberada las trayectorias de los cuerpos lanzados al espacio. Con la finalidad de que permanezcan rodeando la Tierra a una determinada altitud durante un tiempo concreto y realizando una determinada función hasta que su vida útil finalice o, incluso, con el fin de que traspasen los límites de influencia gravitatoria del planeta y poder explorar nuevos horizontes.

A pesar de que la teoría se conoce desde el siglo XVII, la puesta en órbita de un satélite y su monitorización requieren un gran trabajo ingenieril previo, y es que no fue hasta mediados del siglo XX cuando se logró reunir la tecnología y el equipo necesario para transportar una cierta masa más allá de la mesosfera de manera controlada y fiable. Estos, lanzamientos son muy costosos ya que se ha de considerar previamente multitud de fases, de manera que el proceso resulte lo más eficiente y seguro posible, como se muestra en la figura 1.1.

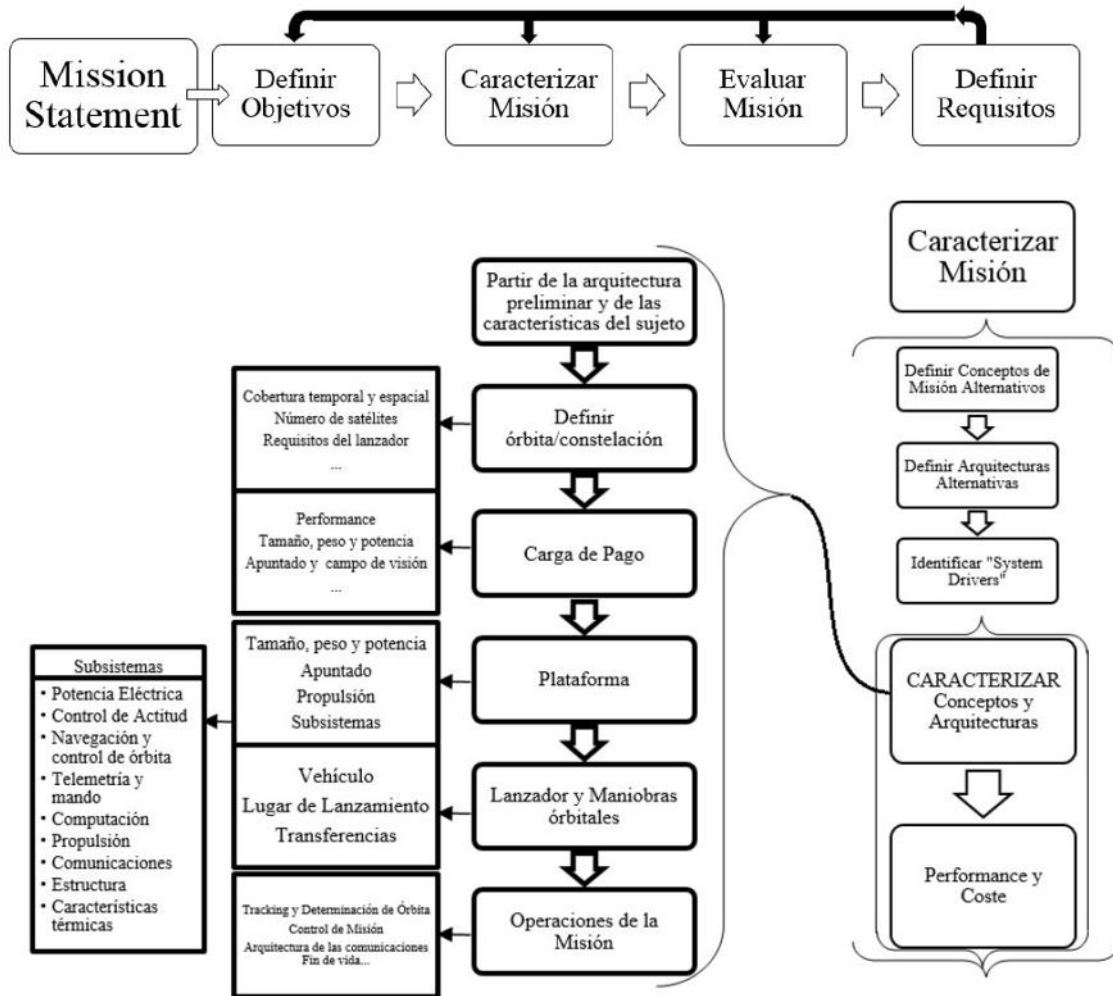


Figura 1.1. Ejemplo del proceso de caracterización de una misión de puesta en órbita [2].

En la industria espacial, el equipo humano encargado de definir el tipo y características de la órbita de un satélite habrá de tener en cuenta la cobertura temporal y espacial que proveerá una vez se encuentre en posición, así como modificar su trayectoria y actitud eventualmente ante posibles perturbaciones mediante sus dispositivos propulsores. Todo ello con objeto de maximizar la operatividad del satélite durante su vida útil.

1.2. Estado del arte y justificación del proyecto

A día de hoy, la tecnología espacial ha logrado hazañas asombrosas. Con algo más de medio siglo de historia, se ha conseguido comunicar cualquier parte del planeta, mapearlo, conocer posiciones geográficas a tiempo real, tener capacidad para pronosticar el clima y aumentar la comprensión de la Tierra y el universo que nos rodea, entre muchas otras cosas. Todo lo cual hubiera sido inimaginable hasta hace relativamente poco tiempo [18].

Pocos sectores, como el sector espacial, han demostrado su gran potencial para generar un impacto significativo a nivel mundial a partir de una acción concertada de los gobiernos, las empresas y la ciencia. Por lo que es pertinente preguntarse ¿qué viene después?.

Una de las afirmaciones que se pueden hacer casi con total seguridad es que el sector espacial seguirá creciendo. Cada vez hay más naciones interesadas en el espacio y la afluencia de capital empresarial impulsa la innovación y las tecnologías espaciales. Todo esto forma un círculo virtuoso que está potenciando el desarrollo espacial de una manera muy rápida. Algunos de los empresarios más exitosos del mundo están interesados en el espacio e invierten grandes cantidades de dinero en empresas innovadoras que pretenden desarrollar misiones muy ambiciosas como la colonización de Marte y la Luna, proporcionar comunicaciones de banda ancha a todo el mundo e impulsar el turismo y la minería espacial. Por lo tanto, es muy probable que el liderazgo del desarrollo espacial se transfiera del sector público al sector privado. Este cambio de paradigma se debe a la mayor eficiencia de las empresas al no estar sujetas a tantas restricciones regulatorias como los gobiernos, sobre todo para realizar negocios internacionales. Esto permitirá que el sector privado realice alianzas a escala global [18].

El apoyo del sector privado al sector espacial generará una mayor convergencia de disciplinas a un ritmo de innovación que no ha ocurrido en mucho tiempo. Por ejemplo, la tendencia a la miniaturización de componentes y sistemas espaciales continuará y hará que cada vez sea más fácil incluir mayor capacidad de desempeño en volúmenes más pequeños y que consuman menos energía. Esto, disminuirá costos y permitirá concebir misiones con constelaciones de naves pequeñas, que aumentará la capacidad de las misiones y distribuirá los riesgos. Esta convergencia de las tecnologías se dará en muchas áreas: la inteligencia artificial, la robótica, la nanotecnología,

el *blockchain*, la manufactura digital, y otras tecnologías emergentes y exponenciales, jugarán un papel preponderante en el desarrollo de misiones espaciales cada vez más poderosas, seguras y económicas.

En los últimos años se ha optado por misiones que utilicen constelaciones de satélites pequeños, entre ellos *CubeSats*. Las ventajas de estos son múltiples y tal vez la principal es el aumento de la fiabilidad: si un satélite deja de operar o funciona mal, el sistema en su totalidad no se ve significativamente afectado en su conjunto. Además, su uso se extenderá a todo tipo de aplicaciones, tales como la observación de la Tierra, las comunicaciones de banda ancha, la navegación y muchas otras más [18].

Morgan Stanley estima que la industria espacial global podría generar un beneficio superior a un billón de dólares o más en 2040. Actualmente está generando unos 350 mil millones [3], según la figura 1.2, siendo el servicio de suministro de banda ancha el que más oportunidades ofrecerá a corto y medio plazo.

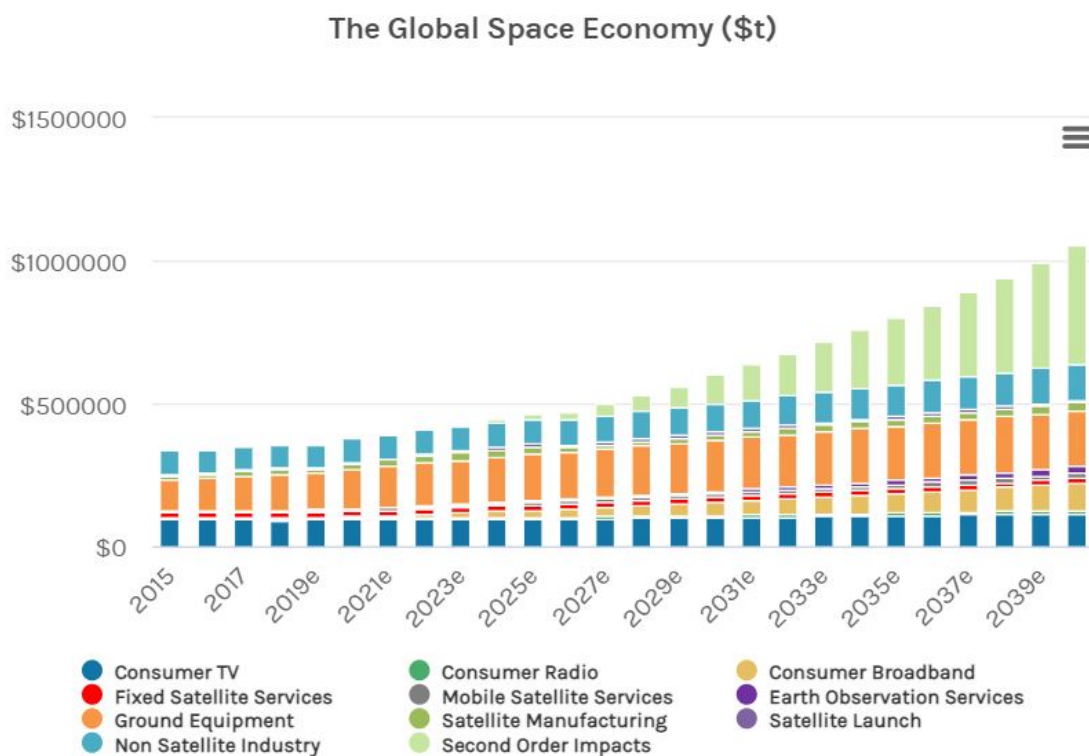


Figura 1.2. Estimación de la inversión global en el sector espacial desde 2015 hasta 2040 (en millones de dólares) [3].

Asimismo, uno de los factores que más contribuirá al desarrollo de este sector será la reutilización de los vehículos de lanzamiento y su reducción en el coste económico global de la misión. Actualmente, el coste del lanzamiento de un satélite ha bajado desde aproximadamente 200 millones de dólares a unos 60 millones por medio de este tipo de vehículos y es una tendencia que continúa perfeccionándose [3]. Hasta ahora, solo *SpaceX*, *Virgin Galactic*, *Blue Origin* y *RocketLab* han desarrollado sistemas de lanzamiento reutilizables fiables, sin embargo, sus éxitos y potencial señalan el camino a seguir en los proyectos espaciales venideros.

En cuanto al cálculo y seguimiento de los satélites operativos, en la actualidad se hace uso de propagadores muy precisos ejecutados por ordenadores potentes que manejan una gran cantidad de datos al mismo tiempo. Estos propagadores tienen en cuenta el achatamiento de los polos de la Tierra, la resistencia aerodinámica a bajas altitudes (con diferentes modelos de atmósfera), las atracciones gravitatorias del Sol y la Luna, la radiación solar, etc. De ese modo, la precisión que se consigue es muy alta y se pueden predecir las posiciones y velocidades de los cuerpos orbitantes para cualquier instante de tiempo.

1.3. Motivación

El interés mostrado a este campo de la ingeniería surgió a raíz de la asignatura *Órbitas, satélites y relatividad* durante el tercer curso del grado, pues se presentaron las herramientas básicas para poder calcular trayectorias de satélites con distintos tipos de órbitas, así como los parámetros que las definen y sus posibles maniobras impulsivas. Una buena organización del trabajo propuesto durante aquel cuatrimestre hizo que los conceptos sobre la materia fueran asentándose de manera constante y moderada, de tal forma que el proceso de aprendizaje resultó agradable e interesante. Todo ello, junto a una gran curiosidad previa por el ámbito de la exploración espacial hicieron que se quisiera realizar este Trabajo de Fin de Grado.

Como se ha comentado anteriormente, las órbitas keplerianas describen parcialmente la trayectoria de los satélites ya que estos sufren también los efectos debidos a la forma real de la Tierra, a la atmósfera terrestre, etc. Para los satélites que orbitan en órbitas bajas, el efecto debido a la atmósfera presenta dificultades a la hora de incorporarlo a las ecuaciones de movimiento ya que no solo se debe modelizar la atmósfera sino que además se debe determinar el coeficiente de *drag* a tener en cuenta.

Por ello se plantea estudiar los efectos que se producen sobre las órbitas de este tipo de satélites cuando se varía ligeramente el coeficiente de *drag* para un modelo de atmósfera dado.

1.4. Objetivo del proyecto

El objetivo de este trabajo Fin de Grado es el estudio del efecto de la atmósfera sobre la trayectoria de los satélites en órbita LEO (*Low Earth Orbit*) atendiendo a las características del satélite, al coeficiente de *drag* asociado y al modelo de atmósfera elegido.

Inicialmente se implementará un propagador orbital para la integración de las ecuaciones de movimiento del problema de dos cuerpos, al cual se le añadirán diversas perturbaciones como las debidas al achatamiento terrestre, dada la relevancia de éstas en satélites que orbitan a distancias cercanas a la Tierra. Además, teniendo en cuenta el objetivo principal de este trabajo, se incorporará también la perturbación debida a la atmósfera terrestre utilizando un modelo exponencial de atmósfera. Se validará la eficacia del propagador generado comparando con los resultados calculados por la herramienta *Horizons* del *Jet Propulsion Laboratory* de la *NASA*.

Una vez validado el integrador, se procederá a realizar un estudio de las variaciones orbitales a las que da lugar la consideración de diferentes valores del coeficiente de *drag* dentro de un rango admisible teniendo en cuenta las dimensiones y forma del satélite. Además, el tiempo de integración no será mayor a una semana, puesto que para los satélites *LEO*, las correcciones de la órbita son frecuentes y el efecto de la resistencia aerodinámica se percibe a los pocos días.

1.5. Estructura

El proceso seguido en la elaboración de este trabajo se detalla a continuación:

Parte I. Memoria

En el primer capítulo, *Planteamiento del trabajo* se realiza una descripción general de lo que va a consistir el proyecto, así como su justificación y motivación.

En el segundo capítulo, *Ecuaciones del movimiento relativo*, se presentan las bases teóricas del movimiento relativo de dos cuerpos a partir de la segunda ley de Newton.

En el tercer capítulo, *Las órbitas de Kepler*, se presentan las bases teóricas de las órbitas con sección cónica a partir de las leyes de Kepler.

En el cuarto capítulo, *Elementos orbitales y búsqueda de datos*, se desarrolla el método directo de obtención de los elementos orbitales clásicos a partir del vector estado y se describe el proceso de obtención de datos en *CelesTrak* y *Horizons*.

En el quinto capítulo, *Diseño y ejecución del propagador*, se desarrolla el método de integración elegido y las ecuaciones del vector perturbación formado por las influencias del achatamiento terrestre y la resistencia aerodinámica. Además, se explica de manera descriptiva la implementación del código utilizado.

En el sexto capítulo, *Análisis de resultados*, se valida el propagador diseñado comparando los resultados obtenidos con *Horizons* y se representan gráficamente las evoluciones de los elementos orbitales bajo la influencia de las perturbaciones mencionadas.

En el séptimo capítulo, *Conclusiones*, se comentan las conclusiones más relevantes a partir de los resultados obtenidos y se proponen diversas formas complementar el estudio realizado en futuros trabajos.

Parte II. Presupuesto

En el primer capítulo, *Presupuesto*, se estiman los costes asociados a la realización de este proyecto.

Parte III. Pliego de condiciones

En el primer capítulo, *Condiciones generales*, se establecen las condiciones apropiadas para el desarrollo de un proyecto de estas características y se incluye el Real Decreto que rige estas condiciones de trabajo.

En el segundo capítulo, *Especificaciones técnicas*, se contemplan las características que debe poseer el proyectando para poder realizar el trabajo, así como el software y hardware utilizado.

Capítulo 2

Ecuaciones del movimiento relativo

La mecánica orbital es la ciencia que se encarga de describir el movimiento de los cuerpos en el espacio. Esta materia puede dividirse en dos partes: una relacionada con el movimiento de naves espaciales, denominada *astrodinámica* y otra relacionada con el movimiento de los astros, referida como *mecánica celeste*. Sus trayectorias se calculan a partir de las leyes de gravitación universal y del movimiento (*mecánica clásica*) formuladas por Newton. Se trata de una disciplina primordial dentro del control y diseño de las misiones espaciales.

2.1. Sistemas de referencia

Existen diferentes sistemas de coordenadas utilizados habitualmente en los problemas relacionados con el movimiento de los astros y los diferentes cuerpos que los orbitan, entre los cuales destacan:

- Heliocéntrico/Geocéntrico-Eclíptico
- Topocéntrico-Horizontal
- Geocéntrico-Ecuatorial

La elección de uno de estos sistemas en concreto depende del problema en cuestión, de modo que el cálculo y visualización de cada elemento y movimiento sea lo más sencillo posible. Todos ellos conservan unas características comunes, que son: un origen, un plano y una dirección de referencia. A modo de complemento, se describirán brevemente algunos elementos destacados en la esfera celeste:

- El plano de la eclíptica es aquel que describe el movimiento de la Tierra alrededor del Sol. Debido a que el eje de rotación del planeta no es perpendicular a

este plano, se forma un ángulo conocido como oblicuidad de la eclíptica, con un valor de $\epsilon = 23.4^\circ$ [19]. Tanto el plano eclíptico como el ecuatorial intersectan en una recta conocida como la línea de equinoccios.

- El primer día de primavera se produce el equinoccio vernal, en el que tanto el día como la noche duran el mismo tiempo. Durante este día el Sol cruza el ecuador terrestre desde el Sur hacia el Norte, definiendo un punto en el cielo llamado Punto Vernal o Punto Aries (Υ). En cambio, en el equinoccio de otoño (medio año después del vernal), el Sol aparenta cruzar el ecuador de Norte a Sur, definiendo así el Punto Libra.

A pesar de que se considera fijo en el espacio, el Punto Vernal gira lentamente como consecuencia de que la Tierra no tiene una forma esférica perfecta y sufre la atracción gravitatoria de la Luna y el Sol. Este efecto es conocido como precesión de equinoccios y modifica la inclinación del eje de giro del planeta hacia el Oeste unos 1.4° cada siglo, alrededor del vector normal a la eclíptica. Otro efecto producido por la acción de la Luna es la nutación sobre la precesión, causante cierto bamboleo en la oblicuidad de la eclíptica. En concreto, con una amplitud de 0.0025° cada 18.6 años [19].

2.1.1. El sistema Heliocéntrico-Eclíptico

Este sistema de referencia es utilizado en misiones interplanetarias cuando los vehículos espaciales escapan de la influencia gravitatoria de los planetas. Tiene como origen el Sol, el plano de la eclíptica como plano de referencia y la dirección del punto vernal como dirección fija. Como se muestra en la figura 2.1.

El ecuador queda inclinado respecto al plano de la eclíptica. El eje X apunta al Punto Vernal, el eje Z es normal a la eclíptica y el eje Y forma un triedro a derechas. Además, se pueden definir dos medidas angulares: la Longitud eclíptica (λ) desde el Punto Vernal hacia el Este y la Latitud eclíptica (β) desde ésta última perpendicularmente.

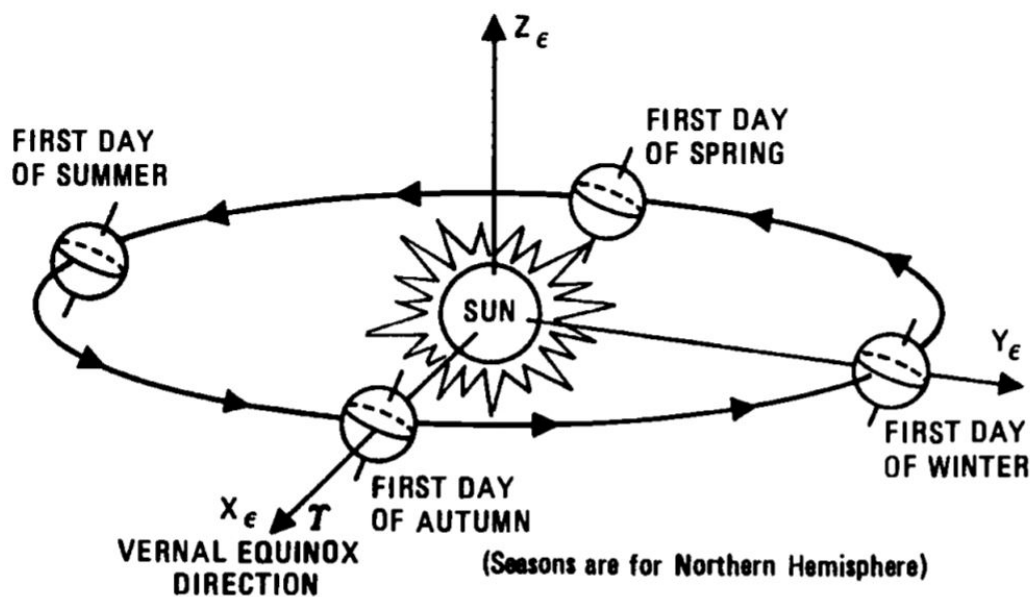


Figura 2.1. Sistema Heliocéntrico/Geocéntrico-Eclíptico [4].

Si se considera este mismo sistema de coordenadas pero teniendo como origen el Baricentro del Sistema Solar, se le denominará sistema Baricéntrico-Eclíptico. Si por el contrario, el origen se encuentra en la Tierra, sistema Geocéntrico-Eclíptico.

2.1.2. El sistema Topocéntrico-Horizontal

También llamado sistema de referencia Local-horizontal o Azimutal, se caracteriza por tener origen en el observador, plano de referencia en el plano del horizonte celeste del observador y dirección fija en el Sur-horizontal, que es la del punto de intersección entre el meridiano del lugar y el horizonte. Como se muestra en la figura 2.2.

Con centro en el observador, se considera como eje X la dirección Sur sobre el horizonte, el eje Z la dirección del Zenit y, en consecuencia, el eje Y hacia el Este. Al girar junto a la Tierra, este sistema es considerado no inercial.

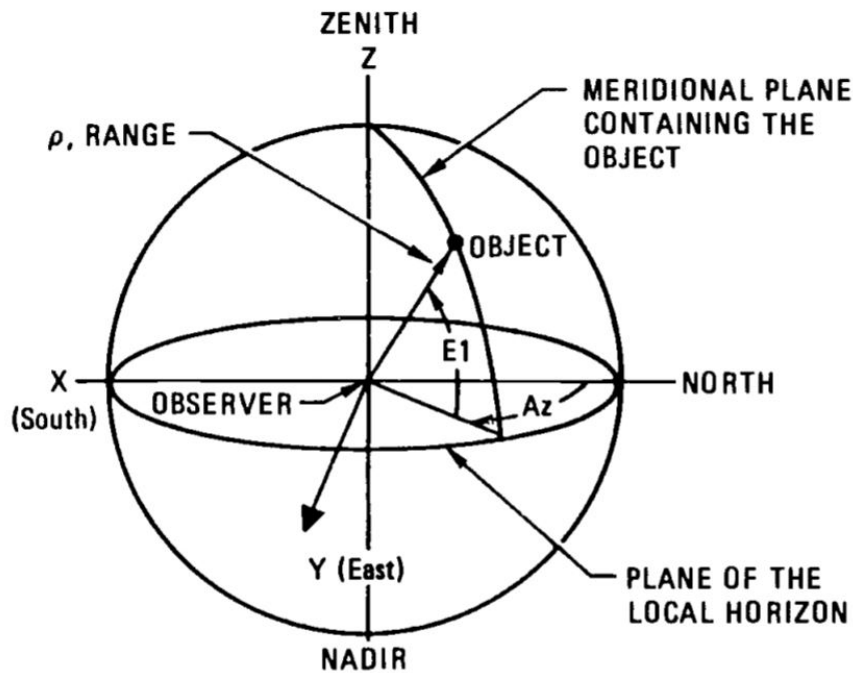


Figura 2.2. Sistema Topocéntrico-Horizontal [4].

Se definen dos coordenadas angulares: el Azimut (Az) y la elevación o altura ($E1$). El Azimut se mide hacia el Este sobre el horizonte desde el Norte y la Elevación es el ángulo entre la dirección del observador el plano del horizonte.

2.1.3. El sistema Geocéntrico-Ecuatorial

Este sistema es el más utilizado en el cálculo orbital alrededor de planetas y es el que se aplicará en este trabajo. Tiene origen en el centro de masas del cuerpo central (la Tierra en este caso), como plano de referencia está el plano ecuatorial y como dirección fija, la dirección del Punto Vernal. Como se muestra en la figura 2.3.

De nuevo, la dirección X la señala el Punto Vernal, pero el eje Z será el eje de rotación del planeta (Norte como sentido positivo). El eje Y forma un triedro a derechas. Al considerarse fijo con respecto a las estrellas, el sistema de referencia es inercial.

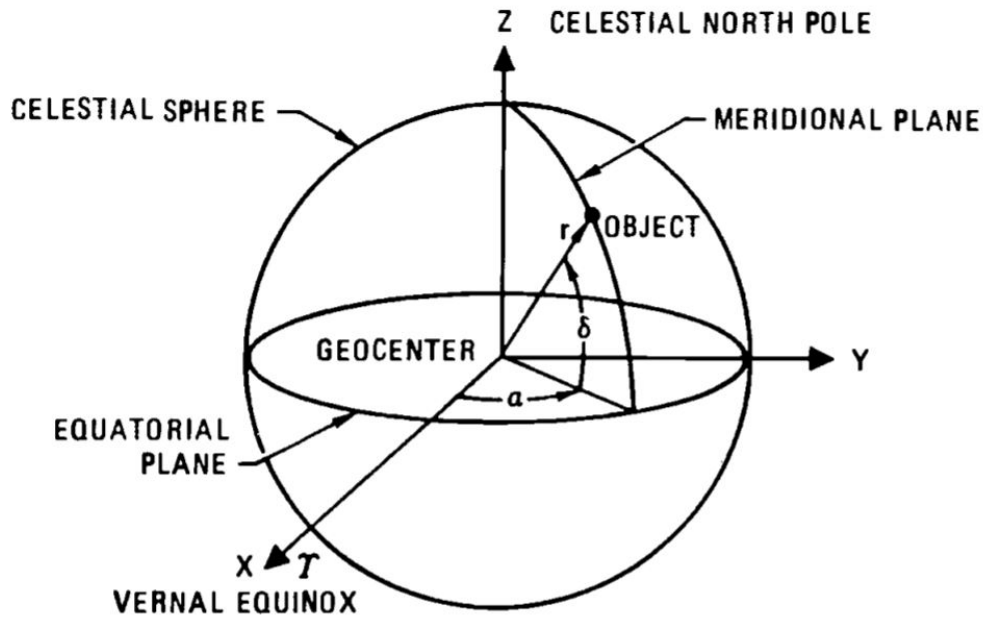


Figura 2.3. Sistema Geocéntrico-Ecuatorial [4].

Como coordenadas angulares se tiene: la Ascensión Recta (RA o α), ángulo medido desde la dirección del Punto Vernal hacia el Este. Y la Declinación (δ), ángulo medido desde el ecuador y de forma perpendicular a éste con sentido positivo hacia en Norte.

La relación entre las componentes cartesianas del sistema Geocéntrico- Ecuatorial con sus coordenadas angulares pueden calcularse por trigonometría:

$$\begin{aligned} X_{GE} &= r \cos \delta \cos \alpha \\ Y_{GE} &= r \cos \delta \sin \alpha \\ Z_{GE} &= r \sin \delta \end{aligned} \quad (2.1)$$

A su vez, la distancia y la posición se pueden hallar de manera sencilla como:

$$\begin{aligned} r &= \sqrt{X_{GE}^2 + Y_{GE}^2 + Z_{GE}^2} \\ \delta &= \arcsin \left(\frac{Z_{GE}}{r} \right) \end{aligned} \quad (2.2)$$

Y para hallar Ascensión Recta habrá que tener en cuenta el signo de la coordenada Y_{GE} . Este permitirá saber si el ángulo es mayor o menor a 180° , de la siguiente manera:

$$\alpha = \begin{cases} \arccos\left(\frac{X_{\text{GE}}/r}{\cos\delta}\right) & \text{si } Y_{\text{GE}} \geq 0 \\ 2\pi - \arccos\left(\frac{X_{\text{GE}}/r}{\cos\delta}\right) & \text{si } Y_{\text{GE}} < 0 \end{cases} \quad (2.3)$$

A modo de simplificación de la notación, como será el sistema de referencia utilizado en todo el trabajo, las componentes cartesianas X_{GE} , Y_{GE} y Z_{GE} pasarán a ser simplemente x , y , z .

2.2. El problema de dos cuerpos

La comprensión completa del problema de dos cuerpos y sus hipótesis es crucial para la astrodinámica. Estas técnicas son extremadamente útiles para los cálculos preliminares y normalmente sirven como punto de partida para estudios más complejos.

La 2ª ley de Newton del movimiento y su ley de gravitación universal son el comienzo de cualquier estudio de una órbita, especialmente cuando se combina con las leyes de Kepler. La 2ª ley de Newton establece que la derivada temporal del momento lineal de un cuerpo es directamente proporcional a la fuerza neta aplicada sobre el mismo. Para un sistema con masa constante:

$$\sum \vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt} = \frac{d(m\vec{v})}{dt} = m\vec{a} \quad (2.4)$$

En un sistema inercial formado por dos masas puntuales en el que únicamente actúa la fuerza gravitatoria (ver figura 2.4), se tienen las posiciones de sus centros de masa \vec{R}_1 y \vec{R}_2 . El origen del sistema inercial se puede mover a velocidad constante respecto a las estrellas fijas, pero no rota.

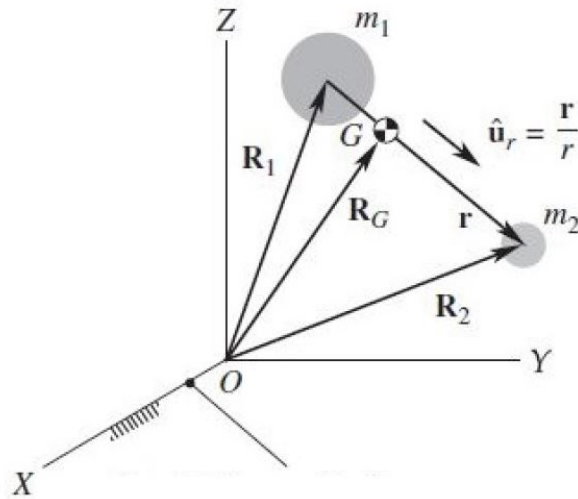


Figura 2.4. Sistema inercial fijo con respecto a las estrellas [5].

La masa mayor corresponderá a la masa de la Tierra y la menor a la del satélite. El vector posición del satélite o la distancia que separa sus centros de masa se podrá calcular vectorialmente como:

$$\vec{r} = \vec{R}_2 - \vec{R}_1 \quad (2.5)$$

la cual, a su vez, se puede descomponer en sus coordenadas cartesianas. Los vectores posición y velocidad del satélite quedan como:

$$\vec{r} = x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k} = \begin{bmatrix} x & y & z \end{bmatrix}^T \quad (2.6)$$

$$\vec{v} = v_x\hat{i} + v_y\hat{j} + v_z\hat{k} = \begin{bmatrix} v_x & v_y & v_z \end{bmatrix}^T$$

Y sus módulos, fácilmente calculables:

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \quad (2.7)$$

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}$$

Se define el vector unitario \hat{u}_r en la dirección de \vec{r} con sentido positivo apuntando

al satélite. De ese modo, la fuerza de atracción gravitatoria producida por la Tierra que sufre el satélite es descrita por la ley de gravitación universal:

$$\vec{F}_{21} = -\frac{G(M \cdot m)}{r^2} \hat{u}_r \quad (2.8)$$

Donde:

- G es la constante de gravitación universal
- M es la masa de la Tierra
- m es la masa del satélite

Y de manera análoga, por la tercera ley de Newton, la fuerza gravitatoria que sufre la Tierra por la presencia del satélite es:

$$\vec{F}_{12} = \frac{G(M \cdot m)}{r^2} \hat{u}_r \quad (2.9)$$

Al ser \hat{u}_r un vector unitario, se puede expresar como el vector correspondiente dividido por su módulo, es decir, $\hat{u}_r = \frac{\vec{r}}{r}$. De ese modo, las expresiones (2.8) y (2.9) quedarán como:

$$\begin{aligned} \vec{F}_{21} &= -\frac{G(M \cdot m)}{r^3} \vec{r} \\ \vec{F}_{12} &= \frac{G(M \cdot m)}{r^3} \vec{r} \end{aligned} \quad (2.10)$$

Nótese que tanto las expresiones (2.8) y (2.9) como las expresiones (2.10) mantienen la forma de la segunda ley de Newton, donde una fuerza (\vec{F}) es igual a una masa (por ejemplo, m) multiplicada por un campo gravitatorio con unidades de aceleración producido por otra masa ($-\frac{GM}{r^2} \hat{u}_r$).

Haciendo uso de esta misma ley, se puede expresar la fuerza gravitatoria producida por cualquiera de los dos cuerpos como:

$$\begin{aligned} M \cdot \ddot{\vec{R}}_1 &= \frac{G(M \cdot m)}{r^2} \hat{u}_r \\ m \cdot \ddot{\vec{R}}_2 &= -\frac{G(M \cdot m)}{r^2} \hat{u}_r \end{aligned} \quad (2.11)$$

O, lo que es lo mismo:

$$\begin{aligned}\ddot{\vec{R}}_1 &= Gm \frac{\vec{r}}{r^3} \\ \ddot{\vec{R}}_2 &= -GM \frac{\vec{r}}{r^3}\end{aligned}\tag{2.12}$$

Obteniendo el sistema de ecuaciones que representa el movimiento de dos cuerpos en el sistema de referencia inercial. La posición del centro de masas (\vec{R}_G) se podrá calcular fácilmente:

$$\vec{R}_G = \frac{M\vec{R}_1 + m\vec{R}_2}{M + m}\tag{2.13}$$

La velocidad y aceleración del mismo se calcula como la primera y segunda derivada temporal, respectivamente:

$$\begin{aligned}\dot{\vec{R}}_G &= \frac{M\dot{\vec{R}}_1 + m\dot{\vec{R}}_2}{M + m} \\ \ddot{\vec{R}}_G &= \frac{M\ddot{\vec{R}}_1 + m\ddot{\vec{R}}_2}{M + m}\end{aligned}\tag{2.14}$$

Sumando el sistema de ecuaciones (2.12), se obtiene la expresión $M\ddot{\vec{R}}_1 = -m\ddot{\vec{R}}_2$, significando que la aceleración del centro de masas del sistema de dos cuerpos será nula y este se desplazará con respecto al sistema inercial siguiendo un movimiento rectilíneo uniforme, donde \vec{R}_{G_0} es la posición del centro de masas en el instante inicial:

$$\vec{R}_G = \vec{R}_{G_0} + \dot{\vec{R}}_G \cdot t\tag{2.15}$$

Esto implica que las ecuaciones (2.12) son las ecuaciones del movimiento de dos cuerpos en el sistema de referencia inercial. Para hallar la expresión de la aceleración relativa solo hace falta derivar dos veces con respecto al tiempo la expresión (2.5) del movimiento relativo y sustituir en ella las ecuaciones (2.12) ya calculadas, dando como resultado:

$$\ddot{\vec{r}} = -\frac{G(M + m)}{r^3}\vec{r}\tag{2.16}$$

Esta última ecuación será de vital importancia para el cálculo y propagación de órbitas, lo cual es fundamento de este trabajo. Como simplificación, se pueden agrupar la constante de gravitación y las masas del sistema en un solo parámetro conocido como parámetro gravitacional geocéntrico de la Tierra, de la siguiente manera:

$$\mu = G(M + m) \quad (2.17)$$

Además se puede demostrar fácilmente que este parámetro puede prescindir de la masa del satélite, puesto que la masa de cualquier satélite que se pueda enviar al espacio actualmente en comparación con la masa de la Tierra, siempre es despreciable:

$$\frac{m}{M} \approx \frac{m}{10^{24}} \approx 0 \quad (2.18)$$

Más adelante se sustituirán valores más precisos de todas estas constantes. De modo que el parámetro gravitacional se puede expresar como:

$$M \gg m \quad \Rightarrow \quad \mu \approx GM \quad (2.19)$$

Y la ecuación del movimiento relativo de dos cuerpos queda de la manera más simplificada:

$$\boxed{\ddot{\vec{r}} = -\mu \frac{\vec{r}}{r^3}} \quad , \quad (2.20)$$

la cual es conocida como la ecuación fundamental del movimiento relativo de dos cuerpos. Esta ecuación diferencial no lineal de segundo orden permitirá integrar la trayectoria del satélite en el tiempo en coordenadas geocéntricas.

Como comprobación, en un sistema de referencia inercial (figura 2.5):

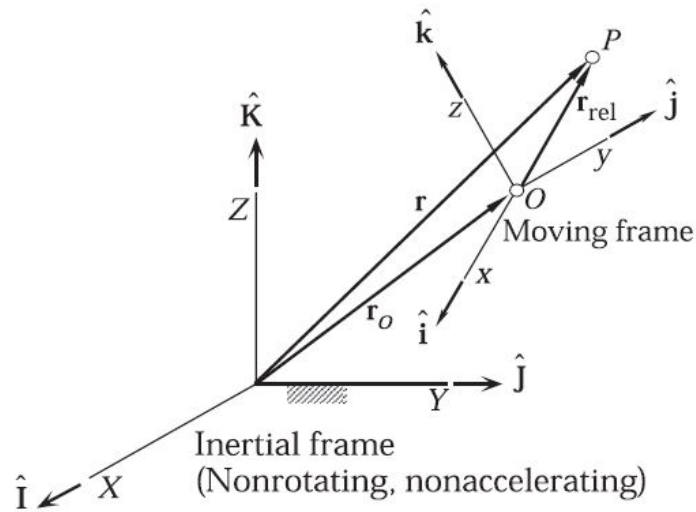


Figura 2.5. Movimiento de un punto P en un sistema de referencia inercial [6].

La aceleración absoluta del movimiento relativo experimentada por un cuerpo, se puede calcular como [6]:

$$\ddot{\vec{r}} = \ddot{\vec{r}}_{re} + \dot{\vec{\Omega}} \times \vec{r}_{re} + \vec{\Omega} \times (\vec{\Omega} \times \vec{r}_{re}) + 2\vec{\Omega} \times \dot{\vec{r}}_{re} \quad (2.21)$$

donde la aceleración del cuerpo en el instante inicial ha sido considerada nula. Como el sistema de referencia no rota, la velocidad y aceleración angular absolutas ($\vec{\Omega}$ y $\dot{\vec{\Omega}}$) son también nulas, dando como resultado que la aceleración absoluta del cuerpo es igual a la aceleración relativa en el sistema de referencia inercial.

A modo de resumen, se expondrán las hipótesis planteadas hasta el momento para hallar la ecuación fundamental del movimiento relativo:

1. La masa del satélite es despreciable comparada con la de la Tierra.
2. El sistema de coordenadas elegido para un problema particular es inercial.
3. Tanto el satélite como el planeta al cual orbita se consideran masas esféricas y simétricas, con densidad uniforme. Esto permite tratarlas como masas puntuales.
4. Únicamente se consideran las fuerzas de naturaleza gravitatoria en una dirección uniéndolo los centros de ambos cuerpos.

Capítulo 3

Las órbitas de Kepler

A pesar de que Isaac Newton (1642-1727) produjo una gran parte de las matemáticas necesarias para resolver el problema de una órbita, Johannes Kepler (1571-1630) ya había hecho importantes descubrimientos. Las leyes de Kepler proporcionan las condiciones necesarias para el problema completo de dos cuerpos. Se examinarán estas leyes con cierto detalle porque son la base de cualquier problema relacionado con la mecánica orbital. También resolvió la que hoy es conocida como ecuación de Kepler, estrechamente relacionada con el tiempo en las órbitas. Esto le permitió predecir las trayectorias de los planetas y por lo tanto, también la de los satélites.

3.1. Introducción a las Leyes de Kepler

En tiempos de Aristóteles, quien pensaba que el movimiento circular era el único movimiento natural y perfecto, se creía que los astros debían trasladarse siguiendo trayectorias completamente circulares de distintos radios alrededor de otros astros mayores. Sin embargo, con la ayuda del trabajo previo realizado por Tycho Brahe (1546-1601), Kepler logró demostrar con gran precisión que realmente estos cuerpos siguen trayectorias elípticas publicando sus tres leyes del movimiento planetario. Estas marcaron un antes y un después en la historia de la astronomía y son las siguientes:

1. *La órbita de cualquier planeta sigue una trayectoria elíptica, con el Sol en uno de sus focos.*
2. *La línea que une el planeta con el Sol barre áreas iguales en tiempos iguales.*
3. *El cuadrado del periodo orbital de un planeta es proporcional al cubo de la longitud del semieje mayor de su órbita elíptica.*

Estas leyes pueden ser aplicadas a un satélite artificial orbitando un planeta. Es preciso entonces definir ciertos parámetros importantes.

3.2. Geometría de una órbita elíptica

La geometría de una órbita elíptica se muestra en la figura 3.1, donde el planeta está situado en uno de los dos focos de la elipse (F):

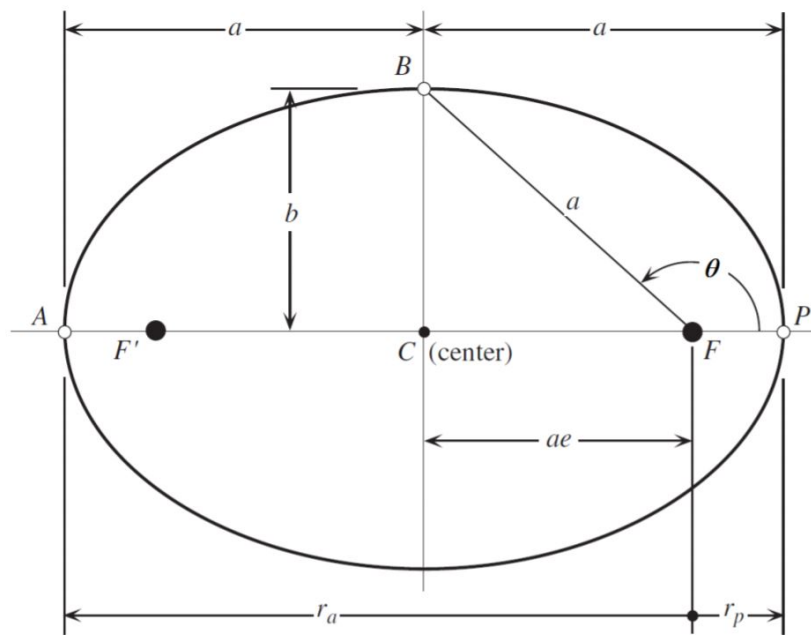


Figura 3.1. Geometría de una órbita elíptica [7].

Esta elipse queda definida por un *semieje mayor* (a), un *semieje menor* (b), una *distancia semifocal* (a_e ó c), un *radio del apogeo* (r_a) y un *radio del perigeo* (r_p). Estas dos últimas distancias son las distancias máxima y mínima que separarán el satélite del planeta durante su órbita, respectivamente.

Además, se define la *anomalía verdadera* (θ) como el ángulo barrido por el satélite, con origen en el perigeo (extremo del semieje mayor más cercano al foco principal) o la línea de ápsides (definida por el vector excentricidad). La *excentricidad* (e) de la órbita se calcula como:

$$e = \frac{2c}{2a} = \frac{c}{a} \quad (3.1)$$

Para una órbita elíptica, la excentricidad toma valores $0 < e < 1$. Sin embargo también puede tomar otros valores en función de la sección cónica que represente la órbita, los cuales se comentarán en los próximos apartados. Por otro lado, el vector excentricidad se encuentra sobre el semieje mayor en sentido marcado por $\theta = 0^\circ$, como puede verse en la figura 3.2:

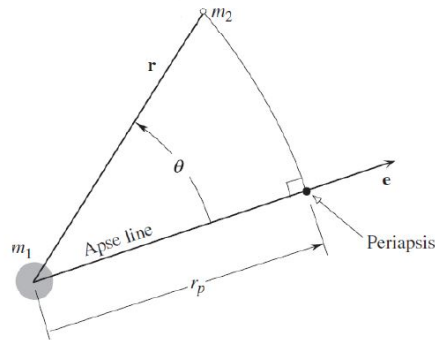


Figura 3.2. Visualización del vector excentricidad [8].

Finalmente, se definirá el *semilado recto* o *parámetro orbital* (p), un valor importante de cualquier trayectoria (ver figura 3.3); como la distancia al cuerpo central cuando la anomalía verdadera forma un ángulo recto ($\theta = 90^\circ$ ó $\theta = 270^\circ$).

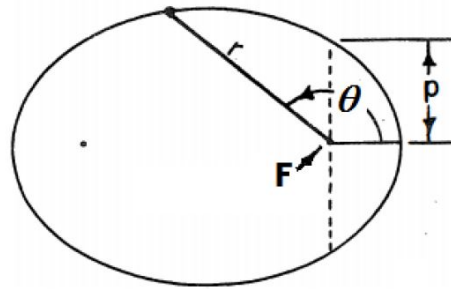


Figura 3.3. Visualización del semilado recto o parámetro orbital [8].

Se puede relacionar con otros parámetros orbitales, como por ejemplo, el semieje mayor y la excentricidad [8]:

$$p = a(1 - e^2) \quad (3.2)$$

O bien, en función del momento angular específico (h , el cual se explicará a continuación) y el parámetro gravitacional (μ).

$$p = \frac{h^2}{\mu} \quad (3.3)$$

Esta expresión, sin embargo, no es válida para órbitas parabólicas; que también serán explicadas en apartados posteriores.

3.3. Consecuencias de las Leyes de Kepler

De manera más concreta a lo mencionado al principio del capítulo, la *Primera Ley de Kepler* establece que todo planeta o cuerpo orbitante se mueve con una trayectoria elíptica o sección cónica (los distintos tipos de secciones se comentarán en apartados posteriores). Una vez conocidos ciertos parámetros fundamentales, es preciso mostrar la ecuación orbital del movimiento, dependiente de varios de estos parámetros. En lo que a la *Segunda* y *Tercera* ley respecta, se tratará de clarificar qué es lo que ocurre con el área barrida, el tiempo en las órbitas, su periodo, las anomalías, el movimiento medio y finalmente, la ecuación de Kepler.

3.3.1. Conservación del momento angular

Se puede desarrollar una expresión para el momento angular de un cuerpo que es constante para toda su órbita e independiente de la masa. Para obtener el *momento angular específico* del satélite (h), se ha de multiplicar vectorialmente la ecuación del movimiento relativo de dos cuerpos (con unidades de aceleración) y el vector posición [16]:

$$\vec{r} \times \ddot{\vec{r}} + \vec{r} \times \mu \frac{\vec{r}}{r^3} = 0 \quad (3.4)$$

Como $\vec{r} \times \vec{r} = 0$, el segundo término de la ecuación anterior se simplifica. Por otro lado, la derivada en el tiempo del producto vectorial:

$$\frac{d(\vec{r} \times \dot{\vec{r}})}{dt} = \dot{\vec{r}} \times \dot{\vec{r}} + \vec{r} \times \ddot{\vec{r}} = \vec{r} \times \ddot{\vec{r}} \quad (3.5)$$

Se puede sustituir en la ecuación (3.4) esta última derivada, pero como el resultado de esta es cero, su primitiva ha de ser constante (h). Si se reorganiza y sustituye la derivada de la posición con la velocidad, la expresión original resulta:

$$\boxed{\vec{h} = \vec{r} \times \vec{v} = cte.} \quad (3.6)$$

El mismo resultado se consigue al hacer uso de la expresión del momento angular de un cuerpo con respecto a otro, donde la masa m se corresponde a la masa del cuerpo que orbita [6]:

$$\vec{H} = \vec{r} \times m\dot{\vec{r}} \quad (3.7)$$

Si se divide por la masa del cuerpo que orbita ($\vec{H}/m = \vec{h}$) se obtiene el momento angular específico del satélite:

$$\vec{h} = \vec{r} \times \dot{\vec{r}} \quad (3.8)$$

Derivando el momento angular específico en el tiempo se obtiene el mismo resultado que en la expresión (3.5), y como $\ddot{\vec{r}} = -\mu \frac{\vec{r}}{r^3}$, entonces:

$$\frac{d\vec{h}}{dt} = -\frac{\mu}{r^3}(\vec{r} \times \vec{r}) = \vec{0} \quad (3.9)$$

Como resultado se obtiene que el momento angular específico de un cuerpo en órbita es constante (*Ley de conservación del momento angular*). Su dirección es perpendicular al plano formado por los vectores posición (\vec{r}) y velocidad (\vec{v}). Este plano se denomina *plano orbital* (ver figura 3.4).

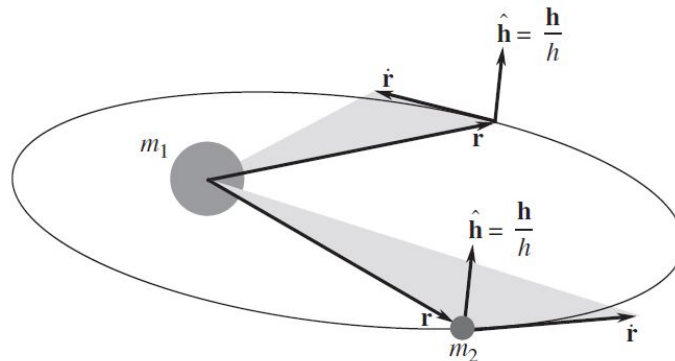


Figura 3.4. Visualización del momento angular específico [6].

3.3.2. Descomposición del vector velocidad y ángulo de vuelo

Se puede orientar el movimiento sobre la órbita al estar en un único plano. El vector velocidad ($\dot{\vec{r}} = \vec{v}$) se descompone en una componente radial en el sentido de \vec{r} (por lo que su vector unitario será \hat{u}_r) y otra componente perpendicular a esta última, denominada velocidad transversal (ver figura 3.5).

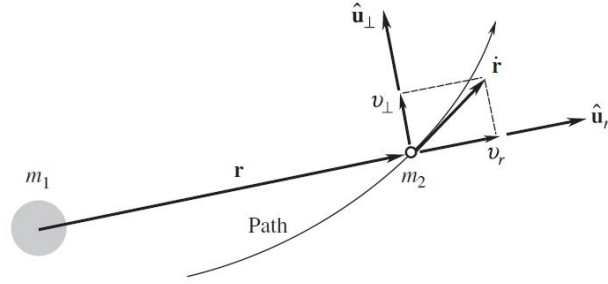


Figura 3.5. Visualización de las componentes de la velocidad [6]

Las velocidades radial (\vec{v}_r) y transversal (\vec{v}_\perp) se pueden expresar entonces como:

$$\begin{aligned}\vec{v}_r &= v_r \hat{u}_r \\ \vec{v}_\perp &= v_\perp \hat{u}_\perp\end{aligned}\quad (3.10)$$

El vector velocidad resultará ser la suma de estas dos componentes vectoriales:

$$\vec{v} = \vec{v}_r + \vec{v}_\perp = v_r \hat{u}_r + v_\perp \hat{u}_\perp \quad (3.11)$$

Y, por lo tanto, el momento angular específico se podrá reescribir como:

$$\vec{h} = \vec{r} \times \vec{v} = r \vec{u}_r \times (v_r \hat{u}_r + v_\perp \hat{u}_\perp) = r \cdot v_r \cdot (\hat{u}_r \times \hat{u}_r) + r \cdot v_\perp \cdot (\hat{u}_r \times \hat{u}_\perp) = r \cdot v_\perp \cdot \hat{u}_h \quad (3.12)$$

siendo \vec{u}_h el vector unitario del momento angular específico ($\hat{u}_h = \frac{\vec{h}}{h} = \hat{u}_r \times \hat{u}_\perp$). Esto implica que el momento angular específico del satélite se expresa como función de la posición del satélite y su velocidad transversal:

$$h = r \cdot v_\perp \quad (3.13)$$

A partir de la componente transversal de la velocidad (\vec{v}_\perp) es posible definir lo que

se conoce como *horizonte local* y en la dirección radial (\vec{v}_r), el *horizonte vertical* (ver figura 3.6). El ángulo formado por el vector velocidad (\vec{v}) tangente a la trayectoria y el *horizonte local* se denomina *ángulo de vuelo* (γ):

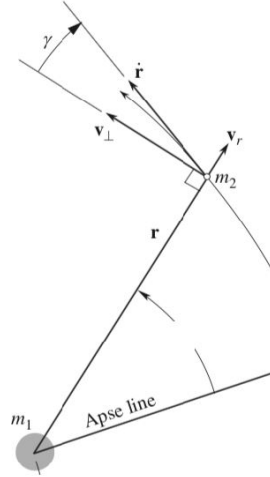


Figura 3.6. Visualización de los horizontes local y vertical y el ángulo de vuelo [6].

De la figura 3.6 se puede deducir que:

$$\tan \gamma = \frac{v_r}{v_{\perp}} \quad (3.14)$$

y del producto vectorial del momento angular específico, $\vec{h} = \vec{r} \times \vec{v}$ se tiene:

$$h = rv \sin(90^\circ - \gamma) = rv \cos \gamma \quad (3.15)$$

Para resolver la ambigüedad del signo de γ al despejar la igualdad (3.15), se ha de atender al signo del producto $\vec{r} \cdot \vec{v}$, de modo que:

$$\begin{cases} \text{Si } \vec{r} \cdot \vec{v} > 0, & \vec{v} \text{ está por encima del } \textit{horizonte local} \implies \gamma > 0 \\ \text{Si } \vec{r} \cdot \vec{v} < 0, & \vec{v} \text{ está por debajo del } \textit{horizonte local} \implies \gamma < 0 \end{cases} \quad (3.16)$$

Estos signos pueden verse mejor en la figura 3.7. El ángulo de vuelo toma valores positivos cuando el satélite se aleja del perigeo ($0^\circ < \theta < 180^\circ$) y viceversa.

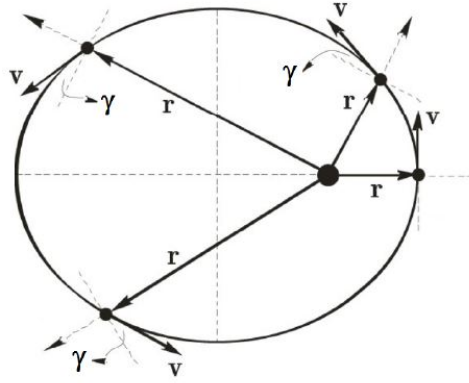


Figura 3.7. Visualización de los signos que toma el ángulo de vuelo a lo largo de la órbita [9].

3.3.3. Conservación de la energía mecánica

Para obtener la energía mecánica del satélite por unidad de masa (ξ), se ha de multiplicar la ecuación del movimiento relativo de dos cuerpos por el vector velocidad ($\dot{\vec{r}}$) a ambos lados de la igualdad [6]:

$$\ddot{\vec{r}} \cdot \dot{\vec{r}} = -\mu \frac{\vec{r}}{r^3} \cdot \dot{\vec{r}} \quad (3.17)$$

Desarrollando el primer término, sabiendo que $\vec{v} \cdot \vec{v} = v^2$:

$$\ddot{\vec{r}} \cdot \dot{\vec{r}} = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} (\dot{\vec{r}} \cdot \dot{\vec{r}}) = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} (v^2) = \frac{d}{dt} \left(\frac{v^2}{2} \right) \quad (3.18)$$

Por otro lado, conociendo que $\vec{r} \cdot \dot{\vec{r}} = r \cdot \dot{r}$:

$$\mu \frac{\vec{r}}{r^3} \cdot \dot{\vec{r}} = \mu \frac{r}{r^3} \cdot \dot{r} = -\frac{d}{dt} \left(\frac{\mu}{r} \right) \quad (3.19)$$

Sustituyendo el resultado obtenido en (3.17), se llega a la expresión:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{v^2}{2} \right) - \frac{d}{dt} \left(\frac{\mu}{r} \right) = 0 \implies \frac{d}{dt} \left(\frac{v^2}{2} - \frac{\mu}{r} \right) = 0 \quad (3.20)$$

Al integrar (3.20) en el tiempo, se obtiene un valor constante para la energía mecánica específica del satélite:

$$\xi = \frac{v^2}{2} - \frac{\mu}{r} = cte. \quad (3.21)$$

El primer término de la expresión $(\frac{v^2}{2})$ es la energía cinética por unidad de masa y el segundo término $(-\frac{\mu}{r})$, es la energía potencial por unidad de masa del satélite. La suma de ambos términos resulta ser la energía mecánica específica. Al ser esta constante en toda la órbita, se la conoce como *Ley de conservación de la energía* o ecuación *Vis-Viva*.

3.3.4. Conservación del vector de Laplace y la excentricidad

Continuando con nuevos parámetros constantes en las órbitas keplerianas, antes de introducir las consecuencias de la *Segunda* y *Tercera* ley, se describirá cómo se obtiene de manera analítica el *vector de Laplace* y su relación con el *vector excentricidad*.

Se considera de nuevo la ecuación del movimiento relativo de dos cuerpos (2.20) y se multiplica vectorialmente a ambos lados de la igualdad por el momento angular específico [6]:

$$\ddot{\vec{r}} \times \vec{h} = -\mu \frac{\vec{r}}{r^3} \times \vec{h} \quad (3.22)$$

A continuación, se desarrolla el término de la izquierda. Como \vec{h} es un parámetro constante, el producto vectorial $\dot{\vec{r}} \times \frac{d\vec{h}}{dt}$ será cero:

$$\frac{d}{dt} (\dot{\vec{r}} \times \vec{h}) = \ddot{\vec{r}} \times \vec{h} + \dot{\vec{r}} \times \frac{d\vec{h}}{dt} = \ddot{\vec{r}} \times \vec{h} \quad (3.23)$$

Para el término de la derecha, sabiendo que $\vec{r} \times \dot{\vec{r}} = r \cdot \dot{r}$ y $\vec{r} \cdot \vec{r} = r^2$ se tiene:

$$\begin{aligned} -\frac{\mu}{r^3} (\vec{r} \times \vec{h}) &= -\frac{\mu}{r^3} (\vec{r} \times (\vec{r} \times \dot{\vec{r}})) = -\frac{\mu}{r^3} (\vec{r} \cdot (\vec{r} \cdot \dot{\vec{r}}) - \dot{\vec{r}} \cdot (\vec{r} \cdot \vec{r})) = \\ &= -\frac{\mu}{r^3} (\vec{r} \cdot (r \cdot \dot{r}) - \dot{\vec{r}} \cdot r^2) = -\frac{\mu}{r^2} (\vec{r}\dot{r} - \dot{\vec{r}}r) = \frac{d}{dt} \left(\frac{\mu\vec{r}}{r} \right) \end{aligned} \quad (3.24)$$

Sustituyendo en la expresión inicial (3.22) lo obtenido en (3.23) y (3.24), se llega a:

$$\frac{d}{dt} (\dot{\vec{r}} \times \vec{h}) = \frac{d}{dt} \left(\frac{\mu \vec{r}}{r} \right) \implies \frac{d}{dt} \left(\dot{\vec{r}} \times \vec{h} - \mu \frac{\vec{r}}{r} \right) = \vec{0} \quad (3.25)$$

El *vector de Laplace* (\vec{C}) resulta ser la primitiva de la expresión anterior, constante en el tiempo:

$$\boxed{\vec{C} = \dot{\vec{r}} \times \vec{h} - \mu \frac{\vec{r}}{r} = cte.} \quad (3.26)$$

Y, en consecuencia, si se parte del *vector de Laplace*, multiplicando escalarmente ambos lados de la igualdad (3.26) por el vector momento angular. y sabiendo que $\vec{r} \perp \vec{h}$ implica $\vec{r} \cdot \vec{h} = 0$ y $(\dot{\vec{r}} \times \vec{h}) \perp \vec{r} \perp \vec{h}$, entonces $(\dot{\vec{r}} \times \vec{h}) \cdot \vec{h} = 0$, y

$$\vec{C} \cdot \vec{h} = \left(\dot{\vec{r}} \times \vec{h} - \mu \frac{\vec{r}}{r} \right) \cdot \vec{h} = (\dot{\vec{r}} \times \vec{h}) \cdot \vec{h} - \frac{\mu}{r} (\vec{r} \cdot \vec{h}) = 0 \quad (3.27)$$

Es decir, \vec{C} también es perpendicular a \vec{h} y está contenido en el *plano orbital*:

$$\vec{C} \cdot \vec{h} = 0 \implies \vec{C} \perp \vec{h} \quad (3.28)$$

Con la ayuda de este parámetro constante, se puede obtener una expresión para el *vector excentricidad* (del cual ya se conoce la expresión de su módulo, ver (3.1)), también constante y adimensional, de la siguiente manera:

$$\boxed{\vec{e} = \frac{\vec{C}}{\mu} = \frac{\dot{\vec{r}} \times \vec{h}}{\mu} - \frac{\vec{r}}{r}} \quad (3.29)$$

Como ya se ha mencionado anteriormente, este vector tiene la dirección del semieje mayor y apunta hacia el exterior del cuerpo central, es decir, en el sentido marcado por $\theta = 0^\circ$, también conocida como *línea de ápsides*.

3.3.5. La ecuación orbital

Toda la información que proporciona la *Primera Ley de Kepler* hasta el momento se utilizará para obtener una igualdad que ofrezca la posición del satélite con respecto al cuerpo central en cualquier punto de su órbita y para cualquier tipo de órbita.

Se comienza multiplicando la expresión (3.29) escalarmente por el vector posición,

sabiendo que $\vec{r} \cdot \vec{r} = r^2$, $\vec{h} \cdot \vec{h} = h^2$ y que $\vec{r} \times \dot{\vec{r}} = \vec{h}$ [6]:

$$\vec{r} \cdot \vec{e} = \vec{r} \cdot \left(\frac{\dot{\vec{r}} \times \vec{h}}{\mu} - \frac{\vec{r}}{r} \right) = \frac{(\vec{r} \times \dot{\vec{r}}) \cdot \vec{h}}{\mu} - r = \frac{h^2}{\mu} - r \quad (3.30)$$

A su vez, por geometría, según la figura 3.8, la relación entre el vector excentricidad y la anomalía verdadera mediante el producto escalar de \vec{r} y \vec{e} es:

$$\vec{r} \cdot \vec{e} = re \cos \theta \quad (3.31)$$

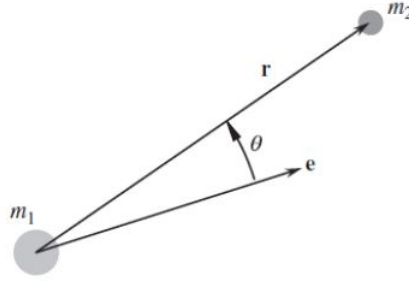


Figura 3.8. Visualización de la relación entre la anomalía verdadera y el vector excentricidad [6].

Finalmente, sustituyendo (3.31) en (3.30), se tiene que:

$$re \cos \theta = \frac{h^2}{\mu} - r \quad (3.32)$$

y, al despejar, la posición del satélite queda como:

$$\boxed{r = \frac{h^2/\mu}{1 + e \cos \theta}} \quad , \quad (3.33)$$

la cual es también conocida como *ecuación de la trayectoria*. Esta relación orbital representa el movimiento de una masa alrededor de otra, siendo los parámetros μ , h y e constantes (con signo positivo siempre) y la única variable restante es la anomalía verdadera (θ). Cabe destacar que se trata de la ecuación de una sección cónica en coordenadas polares [13] con origen en el foco principal de la órbita, donde alcanzará un valor mínimo con anomalía verdadera nula ($\theta = 0^\circ$) y máximo para $\theta = 180^\circ$. Por otro lado, es pertinente preguntarse qué ocurre cuando la excentricidad varía de

una órbita a otra. Se profundizará en esta cuestión en el apartado relacionado con los tipos de órbitas.

Al disponer de una igualdad que relaciona tantos parámetros, es posible hacer ciertos cambios que ayuden a obtener expresiones en función de las componentes de la velocidad, el ángulo de vuelo, la energía específica, etc.

Recordando la definición del semilado recto ($p = \frac{h^2}{\mu}$), y ahora que se ha expuesto la ecuación de la trayectoria, es trivial ver que el semilado recto o parámetro orbital es el numerador de la ecuación (3.33), por lo que, sustituyendo:

$$r = \frac{p}{1 + e \cos \theta} \quad (3.34)$$

Además, conociendo los valores de la anomalía verdadera para las posiciones del perigeo y el apogeo y recordando que $p = a(1 - e^2)$ la ecuación de la trayectoria quedaría como:

$$\begin{cases} r_p = \frac{h^2/\mu}{1 + e} = \frac{p}{1 + e} = a(1 - e) & \text{si } \theta = 0^\circ \\ r_a = \frac{h^2/\mu}{1 - e} = \frac{p}{1 - e} = a(1 + e) & \text{si } \theta = 180^\circ \end{cases} \quad (3.35)$$

Por lo que la distancia desde el foco principal de la órbita al perigeo y el apogeo quedan definidas. Con estas, se puede obtener fácilmente una expresión que relacione la excentricidad con los radios del perigeo y el apogeo. Dividiendo ambas distancias:

$$\frac{r_p}{r_a} = \frac{1 - e}{1 + e} \implies e = \frac{r_a - r_p}{r_a + r_p} \quad (3.36)$$

También es posible relacionar las componentes de la velocidad en cada instante con la anomalía verdadera. Recordando que el momento angular específico del satélite se puede expresar como $h = rv_\perp$, siendo r la expresión (3.33), la componente transversal de la velocidad resulta ser:

$$v_\perp = \frac{h}{r} = \frac{h(1 + e \cos \theta)}{h^2/\mu} = \frac{\mu}{h}(1 + e \cos \theta) \quad (3.37)$$

Y para la componente radial de la velocidad, conociendo que la velocidad angular de \vec{r} es $\dot{\theta}$, por lo que $v_\perp = \dot{\theta} \cdot r$; y despejando esta velocidad angular, $\dot{\theta} = \frac{h}{r^2}$, la velocidad radial resulta:

$$v_r = \dot{r} = \frac{dr}{dt} = \frac{h^2}{\mu} \frac{e \cdot \dot{\theta} \cdot \sin \theta}{(1 + e \cos \theta)^2} = \left(\frac{h^2}{\mu(1 + e \cos \theta)} \right) \left(\frac{h/r^2}{1 + e \cos \theta} \right) e \sin \theta = \frac{\mu}{h} e \sin \theta \quad (3.38)$$

Lo que significa que habrá dos puntos de la órbita en los que el satélite no tendrá velocidad radial (v_r), aquellos en los que $\sin \theta = 0$, es decir, el perigeo y el apogeo.

Siguiendo con las relaciones posibles al desarrollar la ecuación orbital, se puede expresar el ángulo de vuelo (γ) en función de la anomalía verdadera, puesto que según la expresión (3.14), esta depende de las dos componentes de la velocidad:

$$\gamma = \frac{v_r}{v_\perp} = \frac{e \sin \theta}{1 + e \cos \theta} \quad (3.39)$$

En el caso de la energía específica, se puede expresar en función del momento angular, de la excentricidad y del semieje mayor. Recordando la igualdad (3.21), para la posición en el perigeo ($r = r_p$, con $\theta = 0^\circ$), donde la velocidad radial es nula ($v_r = 0$):

$$v_p = v_\perp = \frac{h}{r_p} \quad , \quad (3.40)$$

la energía mecánica por unidad de masa queda en función del momento angular y la excentricidad como:

$$\xi = \frac{h}{2r_p} - \frac{\mu}{r_p} = \frac{2h^2}{(1+e)(h^2/\mu)} - \frac{\mu(1+e)}{h^2/\mu} = -\frac{\mu^2}{2h^2}(1-e^2) \quad (3.41)$$

Haciendo uso de las igualdades ya conocidas del semilado recto, (3.2) y (3.3), la energía específica podrá expresarse también como:

$$\boxed{\xi = -\frac{\mu}{2a}} \quad . \quad (3.42)$$

3.3.6. La conservación de la velocidad areolar

Entrando ahora en las consecuencias de la *Segunda y Tercera Ley de Kepler*, se sabe que el vector posición del satélite barre una superficie diferencial dA durante un intervalo diferencial de tiempo dt , tal y como se muestra en la figura 3.9:

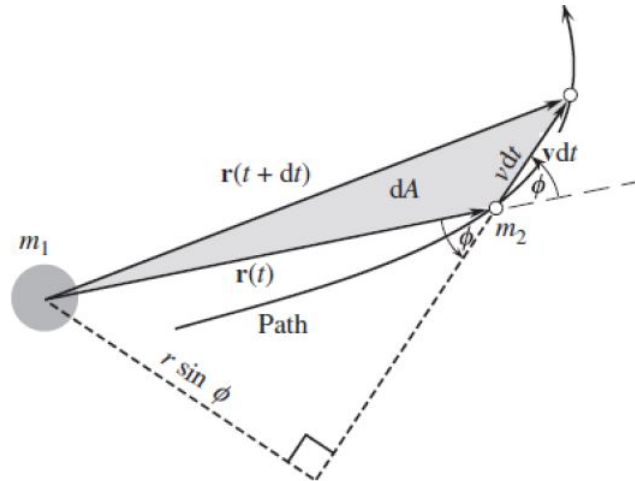


Figura 3.9. Área barrida por \vec{r} en un intervalo de tiempo diferencial dt [6].

La segunda ley establece que el vector \vec{r} barre áreas iguales en tiempos iguales. Al ser este área diferencial, puede considerarse como un triángulo; de modo que reconociendo en la figura anterior $v \sin \phi = v_{\perp}$, el área del triángulo formado es:

$$dA = \frac{1}{2} \cdot v dt \cdot r \sin \phi = \frac{1}{2} r (v \sin \phi) dt = \frac{1}{2} r v_{\perp} dt = \frac{h}{2} dt \quad (3.43)$$

Como es conocido, el momento angular específico es constante en toda la órbita, por lo que la velocidad areolar (dA/dt) también lo será:

$$\boxed{\frac{dA}{dt} = \frac{h}{2} = cte.} \quad (3.44)$$

La tercera ley, por su parte establece que el cuadrado del periodo de una órbita es directamente proporcional al cubo de su semieje mayor (ver figura 3.1). Para hallar el periodo de una órbita elíptica, se comienza aplicando que el semieje menor de la elipse (b) es:

$$b = \sqrt{a^2 - c^2} = a\sqrt{1 - e^2} \quad (3.45)$$

Por la segunda ley, $\Delta A = \frac{h}{2} \Delta t$, por lo que para una vuelta completa: $\Delta A = \pi ab$ siendo $\Delta t = T$. Además, sabiendo que $h^2/\mu = a(1 - e^2) = p$:

$$\pi ab = T \cdot \frac{h}{2} \implies T = \frac{2\pi ab}{h} = \frac{2\pi}{h} a^2 \sqrt{1-e^2} = \frac{2\pi}{\mu^2} \left(\frac{h}{\sqrt{1-e^2}} \right)^3 \quad (3.46)$$

Recurriendo de nuevo a la igualdad del semilado recto (p), pero despejando el momento angular específico $h = \sqrt{\mu a(1-e^2)}$, se demuestra la tercera ley de Kepler:

$$\boxed{T = 2\pi \sqrt{\frac{a^3}{\mu}}} \implies T^2 = 4\pi^2 \left(\frac{a^3}{\mu} \right) \quad (3.47)$$

A modo de resumen, se recogerán en la tabla 3.1 las constantes de las órbitas keplerianas:

Parámetro		Unidad
Momento angular esp.	\vec{h}	km ² /s
Energía mecánica esp.	ξ	km ² /s ²
Vector de Laplace	\vec{C}	[-]
Excentricidad	\vec{e}	[-]
Velocidad areolar	dA/dt	km ² /s

Tabla 3.1. Constantes de las órbitas keplerianas

3.4. Otros tipos de órbitas

Hasta el momento se ha hablado solamente de las órbitas elípticas, pero en ciertas partes de este documento se ha dado a entender que no son las únicas existentes. Y es que cuando se formuló la primera ley, se mencionó que la trayectoria seguida por el cuerpo orbitante ha de seguir una forma de sección cónica, entre las cuales se incluye la elipse. Uno de los parámetros más importantes de la geometría de cualquier órbita es la excentricidad de la misma y dependiendo de su valor, la trayectoria seguida por el cuerpo orbitante variará. Las secciones cónicas posibles entonces son: la elipse, la circunferencia, la parábola y la hipérbola; todas ellas con sus correspondientes rangos de excentricidades posibles.

Una cónica puede obtenerse por la intersección de un plano con un cono circular recto, como se muestra en la figura 3.10:

La forma de cada una de estas órbitas keplerianas es marcada por su excentricidad

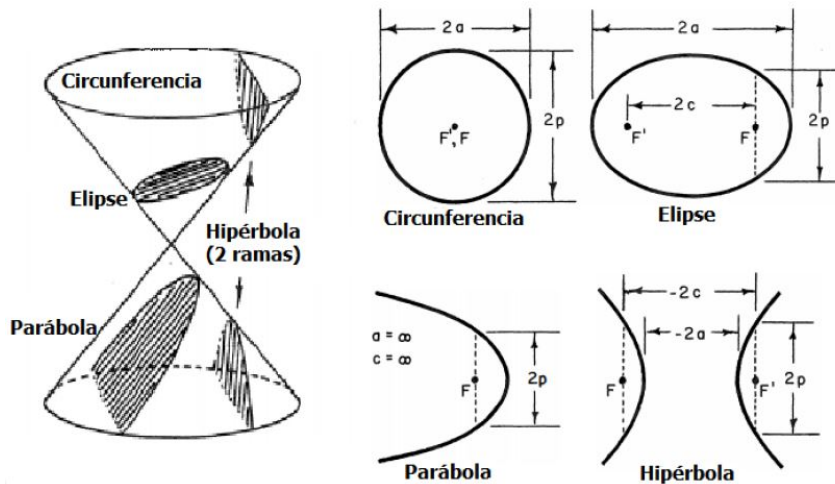


Figura 3.10. Tipos de curvas cónicas [8].

y sus rangos se muestran en la tabla 3.2.

Cónica	Excentricidad
Circular	$e = 0$
Elíptica	$0 < e < 1$
Parabólica	$e = 1$
Hiperbólica	$e > 1$

Tabla 3.2. Tipos de cónicas y su rango de excentricidad

Esto tiene repercusión en la ecuación de la trayectoria, la cual depende de e . A continuación se entrará en cierto detalle con los tipos no mencionados hasta el momento.

3.4.1. Órbitas circulares

Al ser una órbita sin excentricidad ($e = 0$), la ecuación de la trayectoria (3.33) se ve reducida a:

$$r = \frac{h^2}{\mu} \quad (3.48)$$

Como h es constante, r también lo será. Por otro lado, al ser r constante, su derivada temporal será nula y $v_r = 0$; es decir, que el satélite tendrá solamente velocidad transversal ($v = v_{\perp}$) implicando que $h = rv_{\perp} = rv$. Sustituyendo esta última igualdad en la expresión (3.48) y despejando la velocidad, se obtiene la velocidad de

la órbita circular:

$$v_{\text{cir}} = \sqrt{\frac{\mu}{r}} \quad , \quad (3.49)$$

la cual es constante. En consecuencia, se puede calcular el periodo de la órbita circular como su perímetro entre esta velocidad constante:

$$T = \frac{2\pi r}{\sqrt{\mu/r}} = 2\pi \sqrt{\frac{r^3}{\mu}} \quad (3.50)$$

En cuanto a la energía específica (ver (3.41)), al sustituir $e = 0$ y aplicando (3.48), resulta:

$$\xi = -\frac{1}{2} \frac{\mu^2}{h^2} = -\frac{\mu}{2r} \quad , \quad (3.51)$$

de donde se puede deducir que al aumentar el radio de la órbita (r), disminuye la relación $\frac{\mu}{2r}$, por lo que la energía potencial va reduciéndose hasta llegar al punto en el que es superada por la energía cinética. Como consecuencia, escapar de la atracción gravitatoria de un planeta es más sencillo cuanto más alejado se está de él.

Algunos tipos de órbitas que suelen ser circulares (o con excentricidad muy cercana a cero) son las siguientes [10][20]:

Órbitas LEO

Las *Low Earth Orbit* u órbitas *LEO* son órbitas terrestres circulares bajas utilizadas normalmente por naves o estaciones espaciales y satélites de teledetección con finalidades múltiples. Están situadas en un rango entre 150 km y 2000 km de altitud aproximadamente para poder situarse por encima de las zonas en las que más afecta la resistencia aerodinámica (también conocida como *drag*) producida por la atmósfera y, a su vez, por debajo de los *cinturones de Van Allen* (zonas en las que la radiación puede ser muy severa) localizados a unos 2400 km de altitud. Aún así, este tipo de órbitas son las más influenciadas por el *drag*.

Se puede calcular fácilmente la velocidad a la que se orbita con la expresión (3.49), teniendo en cuenta que la posición r es igual a $R_E + h_e$; esta suele estar comprendida entre unos 7 y 8 km/s aproximadamente. El periodo y la energía específica siguen las

expresiones (3.50) y (3.42), siendo $r = a$ en una órbita circular.

Este tipo de órbita baja será el utilizado en este trabajo, pues se tratará de analizar la influencia del *drag* atmosférico en satélites artificiales. Las órbitas bajas son las únicas en las que este efecto no es despreciable, por lo que la trayectoria del cuerpo se verá perturbada (frenada) y habrá que realizar correcciones para mantener el satélite orbitando por más tiempo.

A su vez, estas pueden subdividirse en órbitas *LEO* polares (pasan cerca de los polos debido a su inclinación), heliosíncronas (mantienen la misma orientación respecto al eje Sol-Tierra) o de estacionamiento (posición en la que los satélites esperan a ser trasladados a otra órbita).

Órbitas MEO

Existen también órbitas de altitud intermedia (*MEO* en inglés) situadas entre los 2000 y 35000 km con periodos más largos. Son utilizadas por satélites de observación, posicionamiento, defensa y constelaciones. Los satélites situados en una órbita intermedia no sufren apenas los efectos del *drag* atmosférico.

Órbitas GEO

Otro tipo de órbita circular es la denominada *GEO* u *Órbita Geoestacionaria Ecuatorial*. Son muy usadas e satélites de comunicación o meteorológicos puesto que permanecen en una misma posición fija en el cielo (sobre el ecuador) al ajustar su velocidad angular a la de la Tierra. Estos satélites se encuentran a una altitud concreta que se obtiene al despejar su posición en la igualdad $v = \sqrt{\frac{\mu}{r}} = \omega_E \cdot r$ y restándole el radio de la Tierra, obteniendo una altitud de 35786 km a una velocidad aproximada de 3.075 km/s [20].

Para una mejor visualización, se muestra en la figura 3.11 de manera esquemática las altitudes correspondientes a las órbitas circulares mencionadas. El 1 representa la Tierra, el rango 2 corresponde a los satélites de órbita baja (*LEO*), el rango 3 corresponde a las órbitas intermedias y el rango 4 corresponde a los satélites geostacionarios:

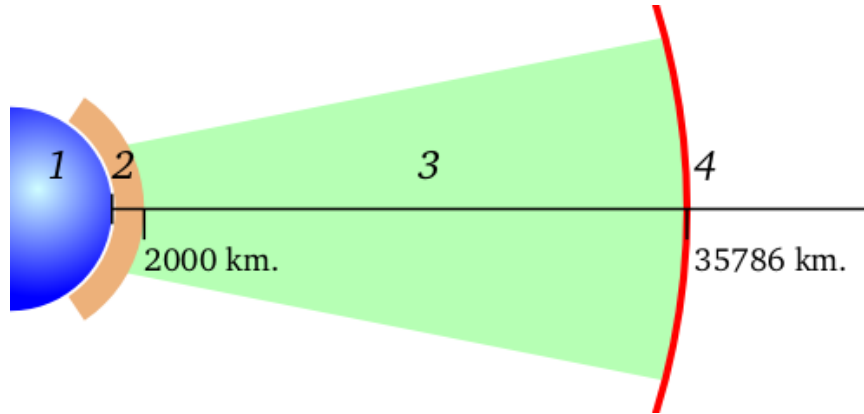


Figura 3.11. Rango de altitudes de distintos tipos de órbitas circulares (escala aproximada) [10].

3.4.2. Órbitas parabólicas

El caso de las parabólicas corresponde a $e = 1$, de modo que la ecuación orbital resulta ser:

$$r = \frac{h^2/\mu}{1 + \cos \theta} \quad , \quad (3.52)$$

donde aparece una singularidad para anomalías verdaderas cercanas al apogeo ($\theta = 180^\circ$). El denominador en ese punto valdrá cero y la distancia r , por tanto, tenderá a infinito.

Su energía específica, recordando la expresión (3.41), para $e = 1$ es:

$$\xi = -\frac{1}{2} \frac{h^2}{\mu^2} (1 - e^2) = 0 \quad , \quad (3.53)$$

es decir, que la energía específica en una órbita parabólica es nula. El porqué recae en el hecho de que si un cuerpo es lanzado en una órbita parabólica, su posición tenderá al infinito llegando allí con una velocidad nula sin retorno. Las trayectorias parabólicas son entonces trayectorias de escape de influencia gravitacional.

La velocidad que debe tener un cuerpo para salir de la esfera de influencia del cuerpo central es conocida como *velocidad de escape* (v_{esc}) y se puede calcular despejando la velocidad en la expresión (3.21) cuando la energía cinética se iguala a la potencial:

$$\xi = \frac{v^2}{2} - \frac{\mu}{r} = 0 \implies v_{\text{esc}} = \sqrt{\frac{2\mu}{r}} = \sqrt{2}v_{\text{cir}} \quad (3.54)$$

Esto quiere decir que para poder escapar de la influencia gravitatoria en una órbita circular alrededor del cuerpo central es necesario incrementar la velocidad del cuerpo orbitante $\sqrt{2}$ veces (un 41.4%). Como en realidad la masa central no será la única que influirá gravitacionalmente al satélite, una vez alcanzada la velocidad de escape, este se verá atraído por la gravedad del cuerpo con mayor masa más próximo (otro planeta o el Sol), por lo que no llegará al infinito.

Además, en este tipo de órbitas, el ángulo de vuelo depende únicamente de la anomalía verdadera. Recordando la igualdad (3.39), para excentricidad igual a la unidad y teniendo en cuenta las relaciones trigonométricas $\sin \theta = 2 \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2}$ y $1 + \cos \theta = 2 \cos^2 \frac{\theta}{2}$:

$$\tan \gamma = \frac{e \sin \theta}{1 + e \cos \theta} = \frac{\sin \theta}{1 + \cos \theta} = \frac{2 \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2}}{2 \cos^2 \frac{\theta}{2}} = \tan \frac{\theta}{2} \implies \gamma = \frac{\theta}{2} \quad (3.55)$$

Por lo que, en una órbita parabólica, el ángulo de vuelo siempre es la mitad de la anomalía verdadera.

3.4.3. Órbitas hiperbólicas

El último tipo de sección cónica por comentar es la hipérbola. Estas órbitas son algo más complejas que las mencionadas hasta el momento (ver figura 3.12).

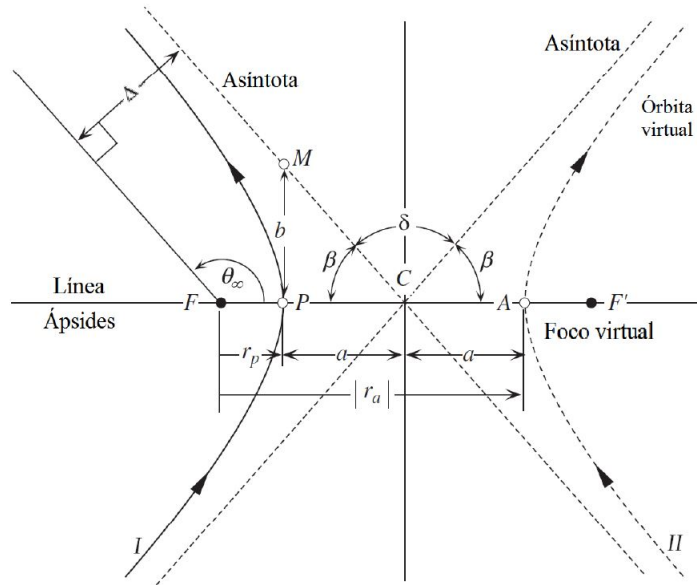


Figura 3.12. Geometría de una órbita hiperbólica [6].

Aunque este tipo de órbitas no entran en el objetivo de este trabajo, de manera descriptiva se puede comentar que poseen una anomalía verdadera de la asíntota (θ_∞ en la figura anterior) dependiente de la excentricidad y un ángulo de giro (δ) también dependiente de la excentricidad [6].

Atendiendo a la figura 3.12, la distancia mínima entre los dos cuerpos se alcanza en el perigeo (P) cuando ($\theta = 0^\circ$) y el máximo no alcanzable se produce en el apogeo ($\theta = 180^\circ$). Sustituyendo en la ecuación orbital se obtiene:

$$\begin{aligned} r_p &= \frac{h^2/\mu}{1+e} \\ r_a &= \frac{h^2/\mu}{1-e} \end{aligned} \tag{3.56}$$

los cuales coinciden con las expresiones de los radios del perigeo y apogeo de una órbita elíptica. Sin embargo, para excentricidad mayor a la unidad, el valor del radio del apogeo (r_a) es negativo, lo que significa que el apogeo se encuentra virtualmente a la derecha del foco F .

El semieje mayor se puede deducir en la figura como:

$$2a = |r_a| - r_p \implies a = \frac{h^2}{\mu} \left(\frac{1}{e^2 - 1} \right) \quad , \quad (3.57)$$

en la que aparece el semilado recto $p = h^2/\mu$. Así la ecuación orbital queda:

$$r = \frac{a(e^2 - 1)}{1 + e \cos \theta} \quad , \quad (3.58)$$

la cual es muy parecida pero, no idéntica, a la de las órbitas elípticas con sus valores de radios del perigeo y apogeo en función del semieje mayor y la excentricidad. Existe un parámetro importante conocido como el parámetro de impacto (Δ) o la distancia entre la asíntota y una línea paralela que pasa por el foco. Este depende también depende del semieje mayor y la excentricidad.

Por otro lado, si se despeja el momento angular de la expresión (3.57) y se sustituye en (3.41), la energía específica resulta ser:

$$\xi = \frac{-1}{2} \frac{\mu^2}{\mu a(e^2 - 1)} (1 - e^2) = \frac{\mu}{2a} \quad (3.59)$$

Por lo que la energía específica en las órbitas hiperbólicas es positiva e independiente de la excentricidad. Además en estas órbitas, la energía cinética supera a la energía potencial, ya que:

$$\xi = \frac{v^2}{2} - \frac{\mu}{r} = \frac{\mu}{2a} \quad , \quad (3.60)$$

de donde se deduce un dato importante conocido como la *velocidad hiperbólica excedente*, denotada como v_∞ para $r \rightarrow \infty$:

$$\frac{v_\infty^2}{2} - \frac{\mu}{\infty} = \frac{\mu}{2a} \implies v_\infty = \sqrt{\frac{\mu}{a}} \quad (3.61)$$

Por lo que la ley de conservación de la energía en (3.60) puede reescribirse como:

$$\xi = \frac{v^2}{2} - \frac{\mu}{r} = \frac{v_\infty^2}{2} \quad (3.62)$$

A partir de la velocidad de escape $v_{\text{esc}} = \sqrt{2\mu/r}$, la igualdad anterior resulta:

$$v^2 = v_{\text{esc}}^2 + v_\infty^2 = v_{\text{esc}}^2 + C_3 \quad , \quad (3.63)$$

donde la velocidad hiperbólica excedente v_∞ indica el exceso de energía cinética al conseguir escapar de la influencia gravitatoria del cuerpo central. Esta velocidad al cuadrado se conoce como el parámetro C_3 o *energía característica* de la trayectoria y se utiliza como medida de la energía necesaria para una misión interplanetaria y como máxima energía que un vehículo lanzador puede aplicar a una nave de cierta masa.

Para una mejor visualización final, se presentan los tipos de órbitas keplerianas juntas en la figura 3.13, para unos valores de excentricidad y semieje mayor dados:

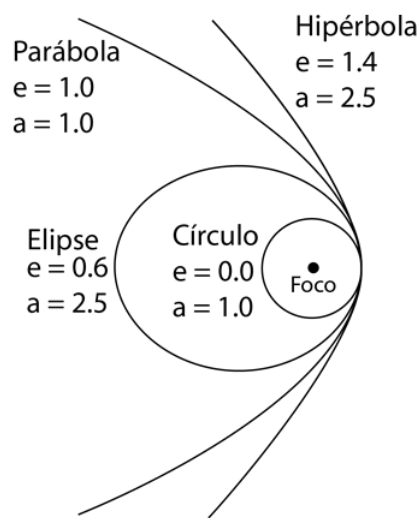


Figura 3.13. Visualización de las órbitas cónicas [11].

3.5. El tiempo en las órbitas

Para finalizar el capítulo, haciendo uso de lo ya descrito por las tres leyes, se tratará de relacionar la posición con el tiempo en la órbita cerrada de un cuerpo alrededor de una masa central. Al resolver la ecuación del movimiento (2.20) y hallar la ecuación de la trayectoria (3.33) se ha prescindido de la dependencia del tiempo, pero es muy importante poder tener localizado al cuerpo orbitante en todo instante (ver figura 3.14). Se explicarán ciertos parámetros temporales que derivan de la *ecuación de Kepler* [12].

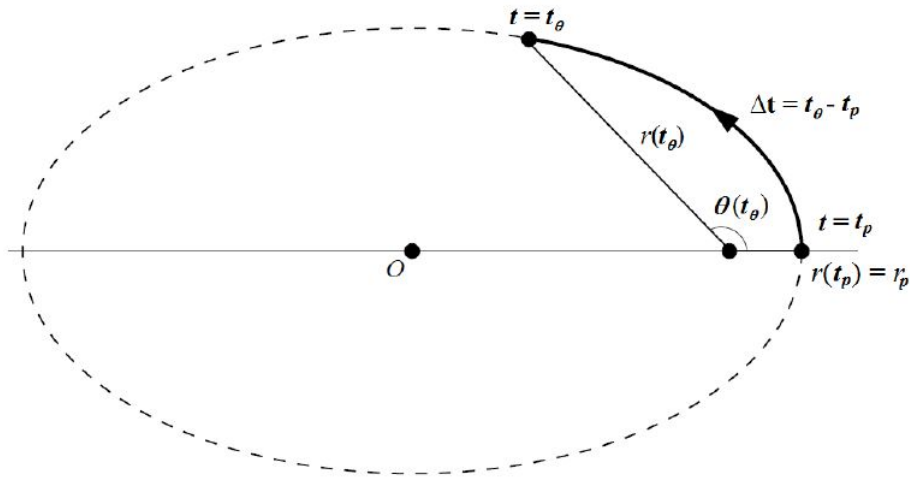


Figura 3.14. Posición del satélite en cada instante de tiempo [12].

3.5.1. El tiempo de paso por el perigeo

Como ya se ha comprobado en apartados anteriores, el momento angular específico del cuerpo se expresa como $h = r \cdot v_{\perp}$ y la velocidad transversal, a su vez, es la velocidad angular por la distancia ($v_{\perp} = r \cdot \dot{\theta}$). De modo que la anomalía verdadera depende del tiempo como:

$$h = r^2 \dot{\theta} \quad (3.64)$$

o también como:

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{h}{r^2} = \frac{h}{\left(\frac{h^2/\mu}{1 + e \cos \theta} \right)^2} \quad (3.65)$$

que, reorganizando, resulta:

$$\frac{1}{(1 + e \cos \theta)^2} d\theta = \frac{\mu^2}{r^3} dt \quad (3.66)$$

Entonces, considerando t_p el tiempo en el momento justo en el que se pasa por el perigeo ($\theta = 0^\circ$) e integrando a ambos lados:

$$\boxed{\int_{t_p}^t \frac{\mu^2}{h^3} dt = \int_0^\theta \frac{1}{(1 + e \cos \theta)^2} d\theta} \quad , \quad (3.67)$$

se tiene una expresión distinta para cada tipo de cónica. Por ejemplo, para una órbita circular con excentricidad nula:

$$\frac{\mu^2}{h^3} (t - t_p) = \int_0^\theta d\theta \quad (3.68)$$

Por lo que, recordando la expresión del periodo orbital de la órbita circular (3.50):

$$t - t_p = \frac{h^3}{\mu^2} \theta = \sqrt{\frac{r^3}{\mu}} \theta = \frac{T}{2\pi} \theta \quad . \quad (3.69)$$

3.5.2. La ecuación de tiempos en órbitas elípticas

Se introducen ahora algunos conceptos importantes para las órbitas elípticas: el *movimiento medio* y las *anomalías media y excéntrica*.

El movimiento medio

En una órbita elíptica, la velocidad angular ($\dot{\theta}$) del vector posición no es constante, aunque se cumple que 2π rad siempre son barridos en un tiempo T . La velocidad angular media se conoce como *movimiento medio* (n) y se representa por la relación:

$$\boxed{n = \frac{2\pi}{T} = \sqrt{\frac{\mu}{a^3}}} \quad (3.70)$$

La anomalía media

El ángulo recorrido por un cuerpo ficticio moviéndose en la trayectoria elíptica con velocidad angular constante n se conoce como *anomalía media* (M_e), de modo que:

$$\boxed{M_e = n(t - t_p) = \frac{2\pi}{T} (t - t_p) = \sqrt{\frac{\mu}{a^3}} (t - t_p)} \quad (3.71)$$

En una órbita circular, la anomalía media coincide con la anomalía verdadera ($M_e = \theta$) pero en una elíptica únicamente coinciden en el perigeo y el apogeo.

La anomalía excéntrica

Por otro lado, el ángulo medido desde el centro de la elipse, entre la proyección del planeta o cuerpo central sobre la circunferencia principal y el semieje mayor de la elipse (ver figura 3.15) es conocido como la *anomalía excéntrica* (E).

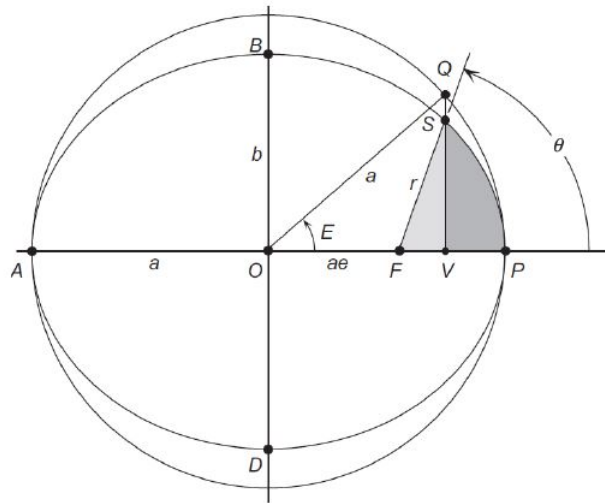


Figura 3.15. Visualización de la anomalía excéntrica [6].

De la figura anterior se puede deducir que:

$$\begin{aligned} a \cos E = a \cdot e + r \cos \theta &\implies a \cos E = a \cdot e + \frac{a(1 - e^2) \cos \theta}{1 + e \cos \theta} \implies \\ &\implies \cos E = \frac{e + \cos \theta}{1 + e \cos \theta} \end{aligned} \quad (3.72)$$

Permitiendo entonces encontrar el $\cos E$ cuando se conoce $\cos \theta$ y viceversa; pero al tratar de calcular E ó θ aparece una ambigüedad con dos valores posibles. Para solucionar este problema, se considerará la expresión:

$$\sin E = \frac{\sqrt{1 - e^2} \sin \theta}{1 + e \cos \theta}, \quad (3.73)$$

la cual se obtiene de la fórmula fundamental de la trigonometría.

Si se agrupan las dos expresiones anteriores y se hace uso de las fórmulas del ángulo mitad se obtiene:

$$\boxed{\tan \frac{E}{2} = \sqrt{\frac{1-e}{1+e}} \tan \frac{\theta}{2}} \quad (3.74)$$

Ahora sí que habrá un solo valor de E para cualquier θ . Además, para anomalías verdaderas $\theta > 180^\circ$, tanto M_e como E serán negativas por lo que el intervalo de tiempo $t - t_p$ también lo será. Para hallar el verdadero tiempo que ha pasado desde el paso por el perigeo se debe sumar el periodo: $(t - t_p) + T$.

3.5.3. La ecuación de Kepler

Estos parámetros relacionados con el tiempo en las órbitas llevan a la relación conocida como *Ley de Kepler*. Esta ley, haciendo uso de la ley de las áreas, relaciona las anomalías media y excéntrica como [6]:

$$\boxed{M_e = E - e \cdot \sin E} \quad (3.75)$$

Con esta ecuación, se pueden resolver dos tipos de problemas con muchas aplicaciones en la mecánica orbital. El primer tipo y el más sencillo de obtener parte de una órbita con parámetros dados h y e en la que se ha de hallar el tiempo transcurrido desde el paso por el perigeo $(t - t_p)$ para un θ en concreto. Para ello:

1. Se calcula E a partir de θ mediante (3.74)
2. Se obtiene M_e a partir de E mediante (3.75)
3. Se halla $t - t_p$ a partir de M_e mediante (3.71)

El segundo tipo de problema es algo más complicado de calcular, puesto que, partiendo de un $t - t_p$ dado y conociendo la órbita (h y e), se debe determinar la anomalía verdadera (θ). Ocurre que no se puede despejar E en función de M_e , por lo que se ha de recurrir a métodos numéricos mediante iteraciones. Un método muy conocido y sencillo es el *Método de Newton*, aunque no es el único, ni mucho menos. Para resolver el problema:

1. Se obtiene M_e a partir de $t - t_p$ mediante (3.71)
2. Se calcula E a partir de M_e en (3.75) mediante el *Método de Newton* u otro método numérico.
3. Se halla θ a partir de E mediante (3.74)

Capítulo 4

Elementos orbitales y búsqueda de datos

Para poder empezar a simular el propagador, es necesario conocer una serie de conceptos y herramientas que serán de gran utilidad. Se desarrollará con cierto detalle la representación clásica de los elementos orbitales de cualquier órbita, seguida por las herramientas de búsqueda y obtención de datos relevantes. Además, se escogerá un satélite que cumpla con las restricciones de órbita baja y cuyas potenciales perturbaciones se encuentren dentro del objeto de este trabajo.

4.1. Representación del estado de un satélite

Se necesitan seis constantes para especificar completamente la órbita de un satélite concreto con respecto al cuerpo central. En su forma más elemental, seis componentes de los vectores \vec{r} y \vec{v} en un instante determinado serán suficiente. Si se conocen estas dos variables en un instante inicial t_0 , la posición y velocidad del satélite en el futuro podrá ser determinada. Desafortunadamente, \vec{r} y \vec{v} no proporcionan demasiada información sobre la órbita directamente. Por ejemplo, no muestran explícitamente qué tipo de sección cónica representan. Por ello, otro conjunto de seis constantes conocidos como los *elementos orbitales* se definen para ayudar a describirla mejor [13].

4.1.1. Los elementos orbitales clásicos

Por el hecho de que el vector $\vec{h} = \vec{r} \times \vec{v}$ es constante, se sabe que el plano de la órbita se encuentra fijo en el espacio. Los vectores \vec{r} y \vec{v} están contenidos en este plano y \vec{h} es normal al mismo. La órbita y el plano de referencia ecuatorial se muestran en la

figura 4.1. La primera constante que se definirá es la *inclinación* (i), el ángulo formado entre el plano de la órbita y el plano de referencia ecuatorial. Estos se intersectan en una recta, llamada *línea de nodos* (\vec{n}), y su dirección será la segunda constante. Pero para especificar su dirección se necesita otra referencia del mismo modo en que se necesita un plano de referencia.

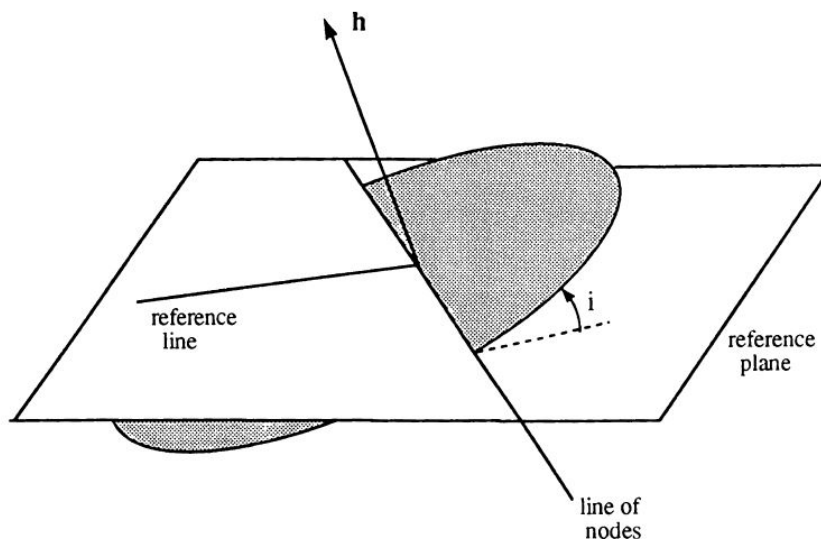


Figura 4.1. Órbita y plano de referencia ecuatorial [13].

La elección propia de la "línea de referencia" es la dirección desde el Sol a un punto fijo en la esfera celeste. Este punto es el Punto Aries (Υ), ya mencionado en el segundo capítulo de este documento. Visto desde la Tierra, el Sol se orientará hacia este punto directamente en el equinoccio vernal. Por supuesto, cualquier otro punto puede servir como referencia fija, pero el Punto Aries es el más aceptado.

Entonces, se define el *nodo ascendente* como el punto de la línea de nodos donde el satélite cruza "hacia arriba" el plano ecuatorial. El *nodo descendente*, en contrapartida, es aquel punto en el que el cuerpo cruza el ecuador "hacia abajo". La dirección del vector \vec{n} es aquella que apunta hacia el nodo ascendente. Todo ello ayudan a definir el siguiente elemento, conocido como la *ascensión recta del nodo ascendente* (Ω) o *RAAN* de sus siglas en inglés. Se trata del ángulo entre el eje X positivo que apunta a Υ , y \vec{n} (ver figura 4.2).

Para describir el tamaño y forma de la órbita se hace uso del semieje mayor (a) y la excentricidad (e); con lo que ya se tienen cuatro constantes. Para describir la orientación de la órbita en el plano es suficiente con localizar el perigeo: este ángulo

se medirá desde la línea de nodos mediante el argumento del perigeo (ω). Finalmente, la posición del satélite a lo largo de la órbita se determina con la anomalía verdadera (θ), como ya se conoce. A veces ésta es sustituida por la anomalía media (M_e).

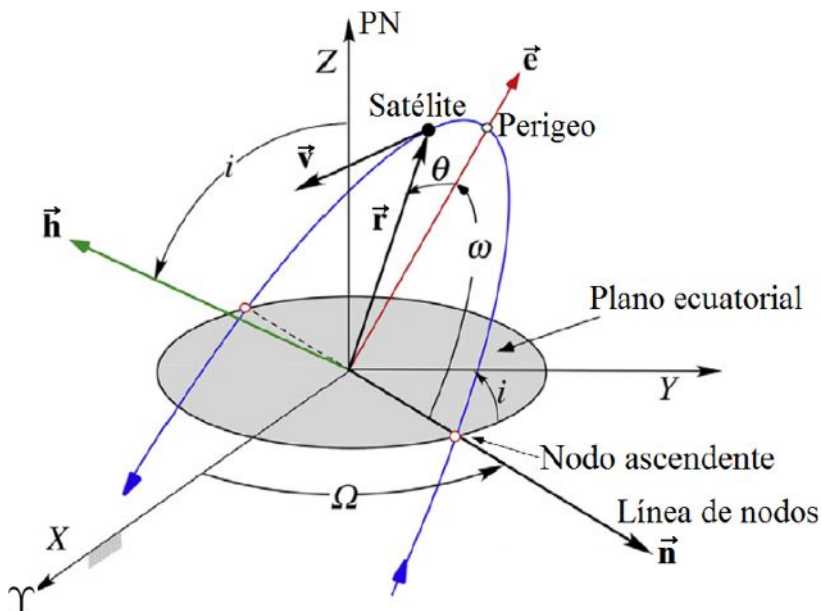


Figura 4.2. Visualización de los elementos orbitales clásicos [6].

Otras posibles opciones para los elementos orbitales son la *longitud del perigeo*, definida como: $\bar{\omega} = \Omega + \omega$, el argumento de latitud: $u = \omega + \theta$ y la longitud verdadera: $L = \Omega + \omega + \theta$.

Estos elementos orbitales alternativos son útiles en los casos en los que uno o más de los elementos clásicos no están definidos (por ejemplo cuando i o e son iguales a cero). Cuando $i = 0^\circ$, los elementos Ω y ω quedan indefinidos, pero $\bar{\omega}$ y L sí que están definidos. En general, seis elementos orbitales son necesarios para definir la órbita inequívocamente. En casos simples se necesitan incluso menos.

Los elementos mencionados quedan resumidos en la tabla 4.1:

4.1.2. Determinación de los elementos orbitales a partir del vector estado

Como ya se ha mencionado en la sección anterior, los elementos orbitales contienen la misma información que los vectores \vec{r} y \vec{v} en un instante determinado. Es posible, entonces, transformar un conjunto de constantes al otro. Por supuesto, la

Elemento		Unidad
Semieje mayor	a	km
Excentricidad	e	[-]
Inclinación	i	rad
Anomalía verdadera	θ	rad
Argumento del perigeo	ω	rad
RAAN	Ω	rad
Longitud del perigeo	$\bar{\omega} = \Omega + \omega$	rad
Argumento de latitud	$u = \omega + \theta$	rad
Longitud verdadera	$L = \Omega + \omega + \theta$	rad

Tabla 4.1. Elementos orbitales clásicos

transformación puede hacerse en ambos sentidos; cada uno corresponde a la solución de un problema práctico. En cuanto a este trabajo, se optará por calcular el problema directo puesto que se partirá de un vector estado con \vec{r} y \vec{v} conocidos. Para hallar el problema inverso se utiliza el llamado *Sistema de Referencia Perifocal*, con el cual, mediante unas matrices de rotación con giros respecto a los tres ejes se pueden expresar los vectores posición y velocidad en el sistema geocéntrico-ecuatorial a partir de los seis elementos orbitales.

En coordenadas geocéntrico-ecuatoriales, dada la posición (\vec{r}) y velocidad (\vec{v}) de un satélite, el proceso directo es [13] [6]:

1. Calcular los módulos r y v :

$$\begin{aligned} r &= |\vec{r}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \\ v &= |\vec{v}| = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2} \end{aligned} \quad (4.1)$$

2. Calcular la energía mecánica específica y el semieje mayor:

$$\begin{aligned} \xi &= \frac{v^2}{2} - \frac{\mu}{r} \\ a &= -\frac{\mu}{2\xi} \end{aligned} \quad (4.2)$$

3. Calcular el momento angular específico:

$$\vec{h} = \vec{r} \times \vec{v} \implies h = |\vec{h}| \quad (4.3)$$

4. Calcular la excentricidad

$$\vec{C} = \dot{\vec{r}} \times \vec{h} - \mu \frac{\vec{r}}{r} \quad (4.4)$$

$$\vec{e} = \frac{\vec{C}}{\mu} \implies e = |\vec{e}|$$

5. Calcular la inclinación. Conociendo la dirección \hat{k} y nombrando h_z como la componente de h en la dirección \hat{k} . Entonces $\hat{k} \cdot \vec{h} = |k| h \cos i$:

$$i = \arccos \left(\frac{\hat{k} \cdot \vec{h}}{h} \right) = \arccos \left(\frac{h_z}{h} \right) \quad (4.5)$$

6. Calcular la dirección de la línea de nodos y la *RAAN* sabiendo que $\vec{n} = \hat{k} \times \vec{h}$. Nombrando a n_x como la componente del vector línea de nodos en la dirección \hat{i} y sabiendo que $\hat{i} \cdot \vec{n} = |\hat{i}| |\vec{n}| \cos \Omega$:

$$\Omega = \arccos \left(\frac{\hat{i} \cdot \vec{n}}{|\vec{n}|} \right) = \arccos \left(\frac{n_x}{|\vec{n}|} \right) \quad (4.6)$$

pero como $0^\circ \leq \Omega \leq 360^\circ$, puede haber ambigüedad en el signo de la función arco. Nombrando a n_y como la componente del vector línea de nodos en la dirección \hat{j} :

$$\Omega = \begin{cases} \arccos \left(\frac{n_x}{|\vec{n}|} \right) & \text{si } n_y \geq 0 \\ 2\pi - \arccos \left(\frac{n_x}{|\vec{n}|} \right) & \text{si } n_y < 0 \end{cases} \quad (4.7)$$

7. Calcular el argumento del perigeo sabiendo que $\vec{n} \cdot \vec{e} = |\vec{n}| e \cos \omega$:

$$\omega = \arccos \left(\frac{\vec{n} \cdot \vec{e}}{|\vec{n}| e} \right) \quad (4.8)$$

Aquí también ocurre que $0^\circ \leq \omega \leq 360^\circ$, así que nombrando a e_z como la

componente del vector excentricidad en la dirección \hat{k} :

$$\omega = \begin{cases} \arccos\left(\frac{\vec{n} \cdot \vec{e}}{|\vec{n}|e}\right) & \text{si } e_z \geq 0 \\ 2\pi - \arccos\left(\frac{\vec{n} \cdot \vec{e}}{|\vec{n}|e}\right) & \text{si } e_z < 0 \end{cases} \quad (4.9)$$

8. Calcular la anomalía verdadera sabiendo que $\vec{e} \cdot \vec{r} = e \cdot r \cos \theta$:

$$\theta = \arccos\left(\frac{\vec{e} \cdot \vec{r}}{er}\right) \quad (4.10)$$

y como $0^\circ \leq \theta \leq 360^\circ$, entonces:

$$\theta = \begin{cases} \arccos\left(\frac{\vec{e} \cdot \vec{r}}{e \cdot r}\right) & \text{si } (\vec{r} \cdot \vec{v}) \geq 0 \\ 2\pi - \arccos\left(\frac{\vec{e} \cdot \vec{r}}{e \cdot r}\right) & \text{si } (\vec{r} \cdot \vec{v}) < 0 \end{cases} \quad (4.11)$$

4.2. *Tool-Line Elements Set*

Los elementos orbitales clásicos son ampliamente utilizados en la comunidad científica, pero no aplican a todos los campos. Por ejemplo, algunos cuerpos militares y agencias espaciales utilizan los conjuntos *Tool-Line Elements (TLE)*; una lista de datos codificados de elementos orbitales de un cuerpo que orbita la Tierra para un determinado instante. Utilizando una fórmula adecuada, el vector estado en cualquier punto pasado o futuro puede ser estimado con cierta precisión. La representación de datos *TLE* es característica de los *modelos de perturbación simplificados* (SGP, SGP4, SDP4, SGP8 y SDP8), así que cualquier algoritmo que utilice un *TLE* como fuente de datos debe implementar uno de estos modelos SGP para computar de manera correcta el estado del cuerpo orbitante en el tiempo que se desee [14].

Estas listas se usan con frecuencia como entrada para proyectar las futuras trazas de basura espacial con el propósito de llevar a cabo análisis de riesgo de impacto, maniobras de evasión, etc. Como estos se encuentran disponibles para el público general a través de diversos medios y se hará uso de ellos en este trabajo, se comentará la información que describen.

4.2.1. Formato

Su formato original estaba pensado para ser representado en papel, pero ahora prevalece el formato digital. Consta de 2 filas con 69 columnas en *ASCII*. *La Fuerza Aérea de los Estados Unidos* mantiene el seguimiento de todos los cuerpos que orbitan la Tierra, cada uno con su *TLE*. La mayoría son publicados, pero existen muchos otros ocultos por motivos varios.

De manera general, los caracteres de la lista se presentan como en la figura 4.3.

```
1 NNNNNC NNNNNAAA NNNNN.NNNNNNNN +.NNNNNNNN +NNNNN-N +NNNNN-N N NNNNN
2 NNNNN NNN.NNNN NNN.NNNN NNNNNNNN NNN.NNNN NNN.NNNN NN.NNNNNNNNNNNNNNN
```

Figura 4.3. Disposición general de cualquier *TLE* [14].

Organizado en 69 columnas, los únicos caracteres que pueden ser usados son los números del 0 al 9, las letras mayúsculas de la *A* a la *Z*, el punto, el espacio y los signos positivo y negativo. En la figura 4.3 se muestra qué tipo de caracteres son válidos para cada columna. Aquellas con un espacio o punto no pueden llevar una letra, número o signo. Las que tienen una *N* solo pueden representar números o, en algunos casos, un espacio. Aquellas con una *A* pueden representar cualquier letra o un espacio. La columna con una *C* solamente puede representar la clasificación del conjunto de elementos; normalmente una *U* para datos no clasificados o una *S* para datos secretos. Las columnas con un signo positivo pueden llevar también un signo negativo o un espacio. Por último, aquellas con un signo negativo pueden llevar o un signo negativo o uno positivo (si el resto del campo no está en blanco).

He aquí (ver figura 4.4) un ejemplo real de conjunto *TLE* perteneciente a la *Estación Espacial Internacional (ISS)* [14]:

```
ISS (ZARYA)
1 25544U 98067A 08264.51782528 -.00002182 00000-0 -11606-4 0 2927
2 25544 51.6416 247.4627 0006703 130.5360 325.0288 15.72125391563537
```

Figura 4.4. Ejemplo conjunto *TLE* de la *ISS* [14].

A partir de la figura anterior, se detallará en la tabla 4.2 toda la información que se obtiene de la primera fila del mismo *TLE*. Esto puede ser aplicado a cualquier otro caso.

Campo	Columna	Descripción	Ejemplo
1.1	01	Fila	1
1.2	03-07	Número de satélite	25544
1.3	08	Clasificación	<i>U</i>
1.4	10-11	Últimos dos dígitos del año de lanz.	98
1.5	12-14	Número de lanzamiento de ese año	067
1.6	15-17	Pieza del lanzamiento	<i>A</i>
1.7	19-20	Últimos dos dígitos del año actual	08
1.8	21-32	Día del año y su fracción del mismo día	264.51782528
1.9	34-43	1ª derivada del mov. medio	-.00002182
1.10	45-52	2ª derivada del mov. medio	00000 - 0
1.11	54-61	Coefficiente balístico estrella	-11606 - 4
1.12	63	Tipo de efemérides	0
1.13	65-68	Número de conjunto de elementos	292
1.14	69	<i>Checksum</i>	7

Tabla 4.2. Información que proporciona la primera fila de un *TLE*

Y en la tabla 4.3, se detallará toda la información que ofrece la segunda columna del mismo *TLE*, también aplicable a cualquier caso.

Campo	Columna	Descripción	Unidad	Ejemplo
2.1	01	Fila	[-]	2
2.2	03-07	Número de satélite	[-]	25544
2.3	09-16	Inclinación	°	51.6416
2.4	18-25	RAAN	°	247.4627
2.5	27-33	Excentricidad (decimal)	[-]	0006703
2.6	35-42	Argumento del perigeo	°	130.5360
2.7	44-51	Anomalía media	°	325.0288
2.8	53-63	Movimiento medio	rev/día	15.72125391
2.9	64-68	Revoluciones actuales	rev	56353
2.10	69	<i>Checksum</i>	[-]	7

Tabla 4.3. Información que proporciona la segunda fila de un *TLE*

4.2.2. Información relevante: Los coeficientes balísticos

En este trabajo, puesto que se partirá de un vector estado conocido, la información que proporciona la segunda fila no será de mayor utilidad. Se podrán calcular todos los elementos orbitales clásicos mediante las expresiones obtenidas al comienzo de este capítulo. Pero como se estudiará el comportamiento del satélite bajo la influencia de

la resistencia aerodinámica producida por la atmósfera, el valor más relevante que proporciona la primera fila del *TLE* es el *coeficiente balístico estrella* del satélite.

Localizado en las columnas 54 a 61 correspondiente al campo 1.11, se trata de un tipo de coeficiente de *drag* característico del modelo de perturbación SGP4 [14]. En la teoría de la aerodinámica, cada objeto posee un *coeficiente balístico* (B), que es el producto de su coeficiente de resistencia aerodinámica (C_D) y su sección transversal (S) dividido por su masa (m):

$$B = \frac{C_D \cdot S}{m} \quad (4.12)$$

El coeficiente balístico representa cuán susceptible es un objeto o cuerpo a la resistencia aerodinámica. Cuanto mayor sea, más le afecta esta perturbación. Por otro lado, el coeficiente balístico estrella es un término ajustado del coeficiente balístico que utiliza como valor de referencia una densidad atmosférica concreta (ρ_0) y se calcula como [14]:

$$B^* = \frac{B \cdot \rho_0}{2} = \frac{C_D \cdot S \cdot \rho_0}{2m} \quad (4.13)$$

Este coeficiente balístico estrella viene dado en unidades $1/E_{\text{Radio}}$ (inversa del radio de la Tierra). En el *TLE*, las columnas en las que se encuentra tiene un formato algo distinto al resto. En concreto, se utiliza una notación exponencial modificada con un punto decimal asumido. Las seis primeras columnas representan la base y los dos últimos el exponente. De modo que, según la figura 4.4 y la tabla 4.2, el coeficiente balístico que posee la *ISS* en el momento en el que se obtuvo el *TLE* es:

$$-11606 - 4 \implies B^* = -0.11606 \cdot 10^{-4} \quad 1/E_{\text{Radio}} \quad (4.14)$$

La densidad de referencia (ρ_0) se obtiene en modelos de predicción SGP. Existen cinco modelos de predicción de posición y velocidad para satélites [21].

El primero de ellos, el SGP, fue desarrollado en 1966 y se utiliza para satélites cercanos a la Tierra. Hace uso de una simplificación para el modelo gravitacional y mantiene el efecto del *drag* atmosférico en el movimiento medio lineal en el tiempo. El efecto del *drag* en la excentricidad se modeliza de tal manera que el radio del perigeo se mantiene constante.

El segundo modelo, el SGP4, fue desarrollado en 1970 y también se utiliza en

satélites cercanos a la Tierra. Fue obtenido como simplificación de la más extensa y analítica teoría de *Lane* y *Cranford* (1969) que hacía uso de la solución de *Brouwer* (1959) para el modelo gravitacional y una función densidad para el modelo atmosférico.

El siguiente modelo, el SDP4, es una extensión del SGP4 utilizada para satélites localizados en el espacio profundo.

El modelo SGP8, usado en satélites cercanos, hace uso de los mismos modelos que *Lane* y *Cranford* pero integrando las ecuaciones diferenciales de una manera distinta. Es en este modelo en el que se menciona el parámetro de referencia constante para la densidad atmosférica. Su valor y unidades son:

$$\rho_0 = (2.461 \cdot 10^{-5}) \cdot KMPER \quad kg/(m^2 \cdot E_{Radio}) \quad , \quad (4.15)$$

donde *KMPER* es un factor de conversión equivalente al número de kilómetros del radio de la Tierra (en el ecuador). Aunque más adelante se hablará de estas constantes, según la *Unión Astronómica Internacional (IAU)*: el radio de la Tierra en el ecuador es igual a $6378.1 \cdot 10^3$ km [22]. De modo que la densidad de referencia resulta ser

$$\rho_0 = (2.461 \cdot 10^{-5}) \cdot 6378.1 = 0.15696 \quad kg/(m^2 \cdot E_{Radio}) \quad (4.16)$$

Por último, el modelo SDP8 es una extensión del SGP8 para satélites viajando en el espacio exterior.

4.2.3. Procesamiento de *TLE*

Los *TLE* deben ser filtrados porque puede darse el caso que los medios que provean estas listas suban secuencias de datos incorrectos a sus sitios web. El uso de estos *TLE* aberrantes en análisis posteriores deterioraría la precisión de los resultados. Este filtrado consta de varias etapas [23]:

- Desechar los *TLE* que fueron publicados pero rápidamente corregidos.
- Utilizar listas subidas en un amplio intervalo de tiempo con respecto a la anterior porque sus comprobaciones aumentarán la consistencia de la información que proporcionan.

- Identificar y desechar los *TLE* con movimientos medios inconsistentes.
- Desechar los *TLE* con B^* negativo, puesto que provocan una propagación SGP4 incorrecta.

Los *TLE* con B^* negativo se desechan porque producen un aumento del semieje mayor en el modelo SGP4, lo que no es realista en órbitas con decaimiento [23].

4.3. Sitios de búsqueda de datos

Como ya se ha mencionado, los conjuntos de datos *TLE* pueden ser obtenidos fácilmente en determinados sitios web y están abiertos al público general de manera gratuita. Por un lado, se hará uso de la web *CelesTrak*, la cual entre muchas otras cosas, provee los conjuntos *TLE* de la mayoría de los cuerpos que orbitan el planeta. Solamente hace falta saber qué satélite o cuerpo se quiere buscar, introducir su nombre o en su defecto, su número designado y abrir el archivo correspondiente. Por otro lado, *Horizons* proporcionará el documento que contiene el vector estado del satélite en el intervalo de tiempo deseado.

4.3.1. Obtención de datos en *CelesTrak*

CelesTrak es un sitio web creado por el Dr. T.S. Kelso con la finalidad de proveer datos orbitales mediante un amplio catálogo de satélites, datos *GPS*, información acerca de lanzamientos de cohetes, visualización de órbitas, etc [15].

Conocido el nombre del satélite, su designador internacional o bien su número en el catálogo de *NORAD*, se despliegan una o más filas (si procede) con los archivos *TLE* de los satélites y su visualización de la órbita actual. Si se pulsa sobre el documento *TLE* se abre una pestaña automáticamente con una página en formato *.txt* idéntico al mostrado en la figura 4.4.

4.3.2. Obtención de datos en *Horizons*

Horizons es una interfaz en línea creada por el *Jet Propulsion Laboratory* de la *NASA* que provee acceso a datos concretos de cuerpos en el Sistema Solar y efemérides muy precisas de muchos objetos y astros que se encuentran en él. Esto incluye: más

de 856000 asteroides, 3598 cometas, 209 satélites naturales, todos los planetas, el Sol, 163 naves espaciales y algunos puntos dinámicos y baricentros de sistemas [24].

El usuario puede también definir sus propios objetos e integrar su trayectoria instantáneamente o realizar una amplia búsqueda de parámetros clave. Se puede elegir entre cinco tipos de *output*: observables, elementos orbitales osculares, vectores estado en coordenadas cartesianas, aproximaciones a planetas y archivos en binario de trayectorias. Los cuatro primeros son tablas *ASCII* y se pueden visualizar directamente en pantalla o descargar, bien en extensiones *.html* o *.txt*.

Horizons advierte que para cuerpos en órbita *LEO* (el tipo de órbita que se estudiará en este trabajo), no es aconsejable obtener archivos que hayan sido integrados en un amplio rango de tiempo (más de una semana), puesto que en este tipo de órbitas se realizan correcciones frecuentemente para evitar que las perturbaciones producidas a baja altitud modifiquen demasiado la trayectoria del satélite. Es por ello por lo que, para mantener cierta precisión es preciso acortar el tiempo de integración.

El proceso de obtención de datos utilizado en este trabajo es el siguiente:

1. Se copia el conjunto *TLE* del satélite o cuerpo en cuestión de *Celestrak*.
2. Se abre la página *Horizons Web-interface*, donde aparecerán seis apartados a modificar.
3. Se selecciona el tipo de efemérides: *VECTORS*.
4. Se introduce el *TLE* previamente copiado en el apartado de selección del cuerpo en cuestión.
5. Se selecciona el sistema de referencia geocéntrico-ecuatorial: *Geocentric [500]*.
6. Se selecciona el rango de tiempo y el paso con los que se quiere realizar la integración.
7. Se selecciona el tipo de vector, las unidades con las que se trabajará, el plano de referencia y el formato de salida: Type 2 (coordenadas x, y, z, v_x, v_y, v_z); *km & km/s*; *ICRF/J200.0* y se marcan las casillas de *labels*, *CSV format* y *object page*, respectivamente.
8. Se selecciona cómo se quiere visualizar el archivo: *download/save*.

Siguiendo estos pasos se obtiene un archivo con extensión *.txt* organizado en columnas donde se tienen las componentes del vector posición y el vector velocidad en cada instante (depende del paso seleccionado) del satélite. Si se elimina el encabezado de la tabla y no se tienen en cuenta las columnas relacionadas con el tiempo (día, hora, minuto, segundo), un archivo cualquiera tendrá la forma que se muestra en la figura 4.5,

```

*****
X, Y, Z,
$$$$$
-1.635790604522455E+03, 1.364162015183808E+03, 6.333574016890625E+03,
-1.209086361427024E+03, 1.230842831823502E+03, 6.455021980012629E+03,
-7.765997470629834E+02, 1.091636956685519E+03, 6.545506528278952E+03,
-3.403992054215661E+02, 9.472101852034982E+02, 6.604593773093586E+03,
9.742913399966956E+01, 7.982531328229909E+02, 6.631999446841145E+03,
5.347912356298293E+02, 6.454779933127210E+02, 6.627590206084094E+03,
9.695949655662718E+02, 4.896152045919359E+02, 6.591384270051808E+03,
1.399759894211021E+03, 3.314100335671355E+02, 6.523551393306162E+03,
1.823227060352541E+03, 1.716190914725867E+02, 6.424412171403559E+03,
2.237968662853531E+03, 1.100679133812438E+01, 6.294436678345774E+03,
2.641997645061490E+03, -1.496582404102704E+02, 6.134242434787778E+03,
-1.635790604522455E+03, 1.364162015183808E+03, 6.333574016890625E+03,
-1.209086361427024E+03, 1.230842831823502E+03, 6.455021980012629E+03,
-7.765997470629834E+02, 1.091636956685519E+03, 6.545506528278952E+03,
-3.403992054215661E+02, 9.472101852034982E+02, 6.604593773093586E+03,
9.742913399966956E+01, 7.982531328229909E+02, 6.631999446841145E+03,
5.347912356298293E+02, 6.454779933127210E+02, 6.627590206084094E+03,
9.695949655662718E+02, 4.896152045919359E+02, 6.591384270051808E+03,
1.399759894211021E+03, 3.314100335671355E+02, 6.523551393306162E+03,
1.823227060352541E+03, 1.716190914725867E+02, 6.424412171403559E+03,
2.237968662853531E+03, 1.100679133812438E+01, 6.294436678345774E+03,
2.641997645061490E+03, -1.496582404102704E+02, 6.134242434787778E+03,
*****
VX, VY, VZ,
*****
7.052178137133924E+00, -2.169351522654057E+00, 2.279139450469926E+00,
7.165650050991222E+00, -2.272860244460836E+00, 1.767520910406018E+00,
7.244849273810760E+00, -2.365496752921623E+00, 1.247433795981802E+00,
7.289399782781344E+00, -2.446820908411568E+00, 7.213572799042601E-01,
7.299088133709741E+00, -2.516445766390245E+00, 1.917978079758459E-01,
7.273864219352610E+00, -2.574039217783287E+00, -3.387219745325940E-01,
7.213841465232071E+00, -2.619325435971671E+00, -8.676743163698987E-01,
7.119296467985357E+00, -2.652086132207474E+00, -1.392537473662705E+00,
6.990668072652182E+00, -2.672161618337936E+00, -1.910806843728563E+00,
6.828555876839702E+00, -2.679451672547666E+00, -2.420006118120362E+00,
6.633718142017136E+00, -2.673916200589631E+00, -2.917698449165699E+00,
7.052178137133924E+00, -2.169351522654057E+00, 2.279139450469926E+00,
7.165650050991222E+00, -2.272860244460836E+00, 1.767520910406018E+00,
7.244849273810760E+00, -2.365496752921623E+00, 1.247433795981802E+00,
7.289399782781344E+00, -2.446820908411568E+00, 7.213572799042601E-01,
7.299088133709741E+00, -2.516445766390245E+00, 1.917978079758459E-01,
7.273864219352610E+00, -2.574039217783287E+00, -3.387219745325940E-01,
7.213841465232071E+00, -2.619325435971671E+00, -8.676743163698987E-01,
7.119296467985357E+00, -2.652086132207474E+00, -1.392537473662705E+00,
6.990668072652182E+00, -2.672161618337936E+00, -1.910806843728563E+00,
6.828555876839702E+00, -2.679451672547666E+00, -2.420006118120362E+00,
6.633718142017136E+00, -2.673916200589631E+00, -2.917698449165699E+00,

```

Figura 4.5. Ejemplo de archivo con extensión *.txt* descargado de *Horizons* (solo las primeras filas).

donde se han colocado las tres últimas columnas debajo de las primeras para una mejor visualización. Estos archivos pueden ser mucho más extensos y sus datos se leerán mediante el software de programación elegido y se compararán con los resultados obtenidos en el propagador diseñado.

4.4. Selección del satélite

En cuanto a la selección del satélite, se busca uno cuya órbita alrededor de la Tierra esté clasificada como *LEO* y que, a poder ser, se encuentre a una altitud menor de 400 km. Con ello se asegurará que la perturbación producida por la resistencia aerodinámica de la atmósfera sea lo suficientemente notable y se pueda realizar un estudio de la misma. Por otro lado, los efectos gravitacionales debidos al achatamiento de los polos deberían seguir siendo notables incluso a mayor altitud, por lo que este no será un factor que influya en la búsqueda. Su intensidad también disminuye con la distancia, como es lógico, pero estos detalles se comentarán en un apartado propio en el siguiente capítulo.

Mediante un archivo con extensión *.xlsx* facilitado por *Union of Concerned Scientists* [25], se puede obtener información de más de 3000 satélites en activo. Este documento los ordena por filas, mostrando sus características principales (tipo de órbita, fabricante, país de origen, operador, propósito, masa, algunos elementos orbitales, etc.) en las sucesivas columnas. Aplicando un filtro al archivo se pueden descartar todos los satélites que no sean de tipo *LEO*. Entre los restantes, tras una ligera búsqueda acerca de sus especificaciones, se ha optado por el llamado *Aeolus*. Ciertamente, no es la única opción posible, pero además de cumplir con los requisitos propuestos; su propósito, procedencia y fácil obtención de datos lo convierten en la opción preferente.

4.4.1. Especificaciones del satélite *Aeolus*

Lanzado el 22 de agosto de 2018, *Aeolus* (el señor de los vientos en la mitología griega) es la primera misión de un satélite que adquiere datos del viento en la Tierra a escala global, permitiendo obtener observaciones casi en tiempo real que mejoran la precisión de las predicciones numéricas climatológicas e impulsando el conocimiento de la dinámica tropical y los procesos relacionados con la variabilidad del clima [1].

Se trata de un proyecto impulsado por la *Agencia Espacial Europea (ESA)*, y en concreto, el quinto en la familia de las misiones de exploración de la Tierra diseñadas por esta agencia espacial. El satélite lleva consigo un sensor *LIDAR* que utiliza el *efecto Doppler* para barrer 30 km de la atmósfera con objeto de medir las ráfagas de viento mencionadas. Su geometría se muestra en la figura 4.6.



Figura 4.6. Satélite *Aeolus* [1].

Su forma, simplificada es la de un prisma, un cilindro y seis paneles solares rectangulares (tres a cada lado). Las especificaciones relevantes para este trabajo se presentan en la tabla 4.4:

Especificación	Valor	Unidad
Masa (m)	1360	kg
Largo	4.6	m
Ancho	1.9	m
Profundidad	1.74	m
Ancho panel	1.12	m
Envergadura con paneles	13	m
Área frontal paneles	14.5	m ²

Tabla 4.4. Especificaciones relevantes de *Aeolus* para este trabajo [1].

Para finalizar el capítulo, se mostrará en la figura 4.7 una simulación de la órbita, obtenida en *CelesTrak*. En verde puede verse la trayectoria de *Aeolus* alrededor de la Tierra. Según esta fuente, el día 26 de junio de 2021 esta órbita tenía un radio del perigeo de 306 km y un radio del apogeo de 311.4 km, por lo que se ha vuelto a comprobar que se encuentra en una trayectoria tipo *LEO* por debajo de los 400 km de altitud.



Figura 4.7. Simulación de la órbita de *Aeolus* en *CeresTrak* [15].

Capítulo 5

Diseño y ejecución del propagador

En este capítulo se describirá el método de integración elegido para el propagador. Este método incluye un vector que contiene todas las perturbaciones consideradas relevantes en función de la altitud del satélite. Se desarrollarán sus respectivas expresiones con cierto detalle. Además, se explicará el procedimiento de implementación en código de manera descriptiva, de modo que el lector pueda reproducir el propagador si es necesario.

5.1. Integración por el método de Cowell

Las órbitas keplerianas son soluciones cerradas de la ecuación del movimiento relativo de dos cuerpos (2.20):

$$\ddot{\vec{r}} = -\mu \frac{\vec{r}}{r^3} \quad (5.1)$$

Esta ecuación está basada en la hipótesis de que solamente dos cuerpos se encuentran en el espacio y que sus campos gravitacionales esféricos son la única fuente de interacción entre ambos. Cualquier efecto que cause una desviación en el movimiento de la trayectoria kepleriana es conocido como perturbación. Las perturbaciones comunes en el movimiento de dos cuerpos incluyen a un cuerpo central no esférico, la resistencia al avance causada por la atmósfera, sistemas propulsivos, la radiación solar y las interacciones gravitacionales con cuerpos celestes como la Luna y el Sol [6]. Para tener en cuenta estas perturbaciones, se añadirá un término \vec{p} a la derecha de la expresión (5.1).

$$\ddot{\vec{r}} = -\mu \frac{\vec{r}}{r^3} + \vec{p} \quad (5.2)$$

Este vector \vec{p} es la aceleración neta de la perturbación producida por cualquiera de las fuentes perturbadoras mencionadas. Su magnitud es normalmente pequeña comparada con la aceleración principal de la gravedad (μ/r^2). La excepción es la resistencia aerodinámica, la cual a unos 100 km de altitud es lo suficientemente grande como para desorbitar un satélite. El efecto de este *drag* disminuye rápidamente con la altitud y se hace despreciable ($p_{\text{Drag}} < \frac{\mu}{r^2} \cdot 10^{-10}$) por encima de los 1000 km de altitud.

El resto de efectos dependen de la altitud en mayor o menor medida. A una altitud de 1000 km, sus influencias en orden decreciente son (Fortescue (2011), Montenbruck (2005)) [6]:

$$\begin{aligned} p_{\text{achatamiento terrestre}} &\approx \frac{\mu}{r^2} \cdot 10^{-2} \\ p_{\text{gravedad lunar}} \approx p_{\text{gravedad solar}} &\approx \frac{\mu}{r^2} \cdot 10^{-7} \\ p_{\text{radiación solar}} &\approx \frac{\mu}{r^2} \cdot 10^{-9} \end{aligned} \tag{5.3}$$

Philip H. Cowell (1870-1949) fue el astrónomo británico que le dio nombre al método que se utilizará para diseñar el propagador, el cual consiste en partir de unas condiciones iniciales (\vec{r}_0, \vec{v}_0) y de la expresión de la perturbación \vec{p} e integrar numéricamente la ecuación (5.2) para hallar la posición \vec{r} y la velocidad \vec{v} del satélite en cualquier instante posterior. Los elementos orbitales, entonces, podrán ser obtenidos aplicando el método directo explicado al inicio del capítulo anterior.

5.2. Las perturbaciones de la órbita

Como se puede ver en las expresiones (5.3), para una altitud de 1000 km, las perturbaciones producidas por las gravedades lunar y solar, así como el efecto de la radiación solar tienen un valor muy bajo en comparación con la producida por el achatamiento terrestre. Esto, unido al hecho de que el satélite objeto de estudio se encuentra cerca de los 300 km de altitud hace que se tome la decisión de no incorporarlos al integrador. Por tanto, los únicos efectos que se tendrán en cuenta en el vector perturbación serán aquellos producidos por el achatamiento de los polos del planeta y la resistencia aerodinámica producida por la atmósfera a bajas altitudes.

5.2.1. El efecto del achatamiento terrestre

A modo introductorio y sin entrar en excesivo detalle se recuerda la expresión de la energía potencial gravitatoria de un cuerpo atrapado en la gravedad terrestre:

$$V = -\frac{\mu}{r} \quad (5.4)$$

Las superficies equipotenciales son esferas concéntricas. La fuerza por unidad de masa localizada en \vec{r} es la aceleración de la gravedad, dada por el gradiente negativo de la energía potencial gravitatoria ($\vec{a} = -\nabla V$) [6]:

$$\vec{a} = \mu \left(\frac{\partial(1/r)}{\partial x} \hat{i} + \frac{\partial(1/r)}{\partial y} \hat{j} + \frac{\partial(1/r)}{\partial z} \hat{k} \right) = -\frac{\mu}{r^2} \left(\frac{\partial r}{\partial x} \hat{i} + \frac{\partial r}{\partial y} \hat{j} + \frac{\partial r}{\partial z} \hat{k} \right) \quad (5.5)$$

Y como $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$, se demuestra fácilmente que:

$$\frac{\partial r}{\partial x} = \frac{x}{r}; \quad \frac{\partial r}{\partial y} = \frac{y}{r}; \quad \frac{\partial r}{\partial z} = \frac{z}{r} \quad (5.6)$$

Obteniendo un resultado que ya es familiar:

$$\vec{a} = -\frac{\mu}{r^2} \left(\frac{x}{r} \hat{i} + \frac{y}{r} \hat{j} + \frac{z}{r} \hat{k} \right) = -\mu \frac{\vec{r}}{r^3} \quad (5.7)$$

Como seguramente el lector sabrá, la Tierra y otros cuerpos celestes giratorios en el espacio no son esferas perfectas. Muchos se parecen a esferoides achatados por los polos. Para el planeta, el eje de rotación es el eje de simetría rotacional de su campo gravitatorio. Debida a la protuberancia en el ecuador causada por los efectos centrífugos, el campo gravitatorio varía con la latitud y con el radio. Este potencial gravitacional más complejo es dominado por la contribución de masa puntual dada por la expresión (5.4) y complementado por la perturbación impuesta debida al achatamiento.

Es conveniente, entonces, utilizar un sistema de coordenadas esférico, como el de la figura 5.1. El origen se encuentra en el *c.d.m* del planeta y el eje Z en el eje de rotación del mismo. Desde el origen, ϕ es el ángulo polar medido desde el eje Z positivo hasta el radio vector \vec{r} . Se cumple entonces que:

$$\phi = 90^\circ - El = \arctan \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{z} \quad (5.8)$$

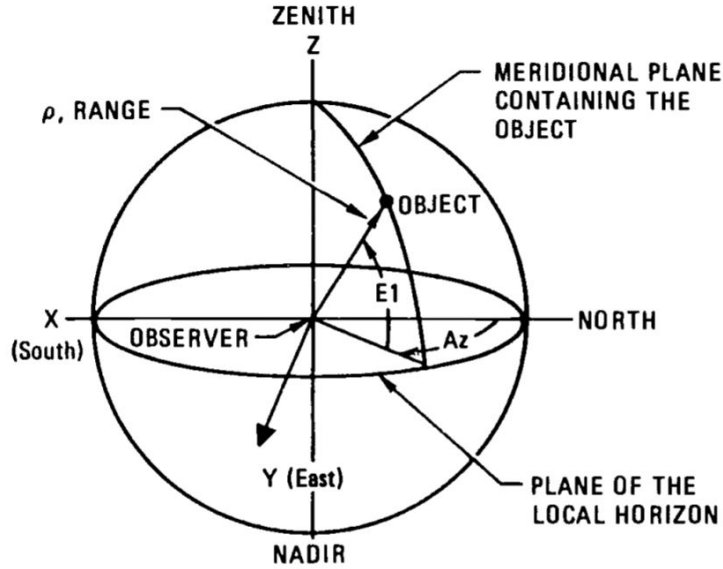


Figura 5.1. Sistema Topocéntrico-Horizontal [4].

Como el campo gravitacional es rotacionalmente simétrico, no depende del azimut, así que el potencial podrá ser escrito como [6]:

$$V(r, \phi) = -\frac{\mu}{r} + \Phi(r, \phi) \quad (5.9)$$

Aquí, Φ es la perturbación del potencial gravitacional debido al achatamiento de la Tierra. La perturbación rotacionalmente simétrica $\Phi(r, \phi)$ viene dada por la serie infinita (Battin, 1999) [6]:

$$\Phi(r, \phi) = \frac{\mu}{r} \sum_{\eta=2}^{\infty} J_{\eta} \left(\frac{R_E}{r} \right)^{\eta} P_{\eta}(\cos \phi) \quad (5.10)$$

Donde:

- J_{η} son los llamados *armónicos zonales* de la Tierra
- R_E es el radio ecuatorial del planeta
- P_{η} son los *polinomios de Legendre*

Los primeros cuatro (sin contar el primero) armónicos de la Tierra se muestran en la figura 5.2. Un armónico mayor representa el achatamiento del planeta con mayor precisión.

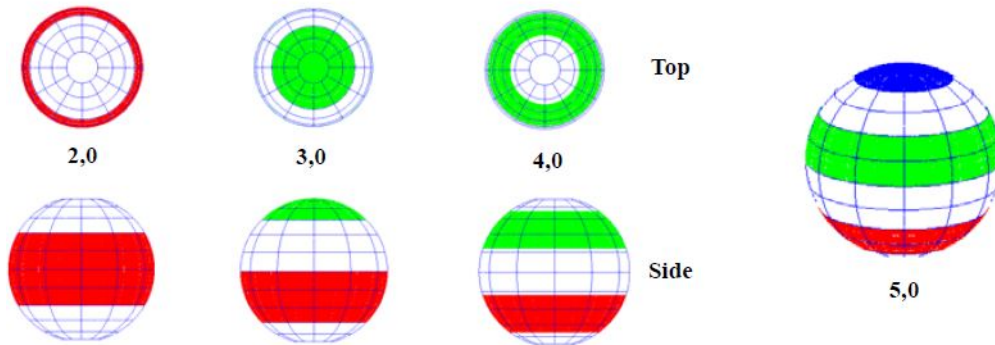


Figura 5.2. Distintos armónicos zonales de la Tierra [16].

Los *armónicos zonales* son números adimensionales que no son derivados de las matemáticas sino hallados mediante observaciones de satélites alrededor de un planeta. Son únicos para cada planeta. El sumatorio en la expresión (5.10) comienza en $\eta = 2$ porque para $\eta = 1$, el armónico $J_1 = 0$ por el hecho de que el origen de la coordenada esférica se encuentra en el *c.d.m* del planeta en cuestión. Para la Tierra, los armónicos zonales del tercero al sexto son [16]:

$$\begin{aligned}
 J_3 &= -2.33936 \cdot 10^{-3} \cdot J_2 \\
 J_4 &= -1.49601 \cdot 10^{-3} \cdot J_2 \\
 J_5 &= -0.20995 \cdot 10^{-3} \cdot J_2 \\
 J_6 &= 0.49941 \cdot 10^{-3} \cdot J_2
 \end{aligned}
 \tag{5.11}$$

Donde el segundo armónico (J_2) es el más importante, al ser tres órdenes de magnitud mayor que el siguiente armónico. Su valor es:

$$J_2 = 1.0826359 \cdot 10^{-3}
 \tag{5.12}$$

Por lo que los cinco armónicos zonales que se utilizarán en este trabajo quedan resumidos en la tabla 5.1.

Armónico zonal	Valor
J_2	$1.082634 \cdot 10^{-3}$
J_3	$-2.53267 \cdot 10^{-6}$
J_4	$-1.61963 \cdot 10^{-6}$
J_5	$-2.27290 \cdot 10^{-7}$
J_6	$5.40670 \cdot 10^{-7}$

Tabla 5.1. Valores del segundo al sexto armónico zonal de la Tierra

El vector perturbación

Los *polinomios de Legendre* son nombrados a partir del matemático francés Adrien Legendre (1752-1833). Cada polinomio $P_\eta(x)$ se obtiene de una fórmula derivada por otro matemático francés, Olinde Rodrigues (1795-1851):

$$P_\eta(x) = \frac{d}{2^\eta \cdot \eta! \cdot dx^\eta} (x^2 - 1)^\eta \quad (5.13)$$

Utilizando la *fórmula de Rodrigues*, se pueden calcular los primeros *polinomios de Legendre* que aparecen en la ecuación (5.10). No se entrará en más detalle acerca de cómo calcular estos polinomios y el vector perturbación puesto que se considera que sobrepasaría los límites de extensión idóneos para la comprensión mínima del concepto. Resumiendo, al obtener los polinomios y aplicando el gradiente negativo de la función Φ , se obtienen las expresiones del vector perturbación para cada armónico [16].

Para el segundo armónico:

$$\vec{p}_{J_2} = \begin{bmatrix} p_{J_{2x}} & p_{J_{2y}} & p_{J_{2z}} \end{bmatrix}^T = -\frac{3}{2} J_2 \left(\frac{\mu}{r^2} \right) \left(\frac{R_E}{r} \right)^2 \begin{bmatrix} \left(1 - 5 \left(\frac{z}{r} \right)^2 \right) \frac{x}{r} \\ \left(1 - 5 \left(\frac{z}{r} \right)^2 \right) \frac{y}{r} \\ \left(3 - 5 \left(\frac{z}{r} \right)^2 \right) \frac{z}{r} \end{bmatrix} \quad (5.14)$$

Para el tercero:

$$\begin{aligned}
 \vec{p}_{J_3} &= \begin{bmatrix} p_{J_{3x}} & p_{J_{3y}} & p_{J_{3z}} \end{bmatrix}^T = \\
 &= \frac{1}{2} J_3 \left(\frac{\mu}{r^2} \right) \left(\frac{R_E}{r} \right)^3 \begin{bmatrix} 5 \left(7 \left(\frac{z}{r} \right)^3 - 3 \left(\frac{z}{r} \right)^2 \right) \frac{x}{r} \\ 5 \left(7 \left(\frac{z}{r} \right)^3 - 3 \left(\frac{z}{r} \right)^2 \right) \frac{y}{r} \\ 3 \left(1 - 10 \left(\frac{z}{r} \right)^2 + \frac{35}{3} \left(\frac{z}{r} \right)^4 \right) \end{bmatrix} \quad (5.15)
 \end{aligned}$$

Para el cuarto:

$$\begin{aligned}
 \vec{p}_{J_4} &= \begin{bmatrix} p_{J_{4x}} & p_{J_{4y}} & p_{J_{4z}} \end{bmatrix}^T = \\
 &= \frac{5}{8} J_4 \left(\frac{\mu}{r^2} \right) \left(\frac{R_E}{r} \right)^4 \begin{bmatrix} \left(3 - 42 \left(\frac{z}{r} \right)^2 + 63 \left(\frac{z}{r} \right)^4 \right) \frac{x}{r} \\ \left(3 - 42 \left(\frac{z}{r} \right)^2 + 63 \left(\frac{z}{r} \right)^4 \right) \frac{y}{r} \\ \left(15 - 70 \left(\frac{z}{r} \right)^2 + 63 \left(\frac{z}{r} \right)^4 \right) \frac{z}{r} \end{bmatrix} \quad (5.16)
 \end{aligned}$$

Para el quinto:

$$\begin{aligned}
 \vec{p}_{J_5} &= \left[p_{J_{5x}} \quad p_{J_{5y}} \quad p_{J_{5z}} \right]^T = \\
 &= \frac{J_5}{8} \left(\frac{\mu}{r^2} \right) \left(\frac{R_E}{r} \right)^5 \begin{bmatrix} 3 \left(35 \left(\frac{z}{r} \right) - 210 \left(\frac{z}{r} \right)^3 + 231 \left(\frac{z}{r} \right)^5 \right) \frac{x}{r} \\ 3 \left(35 \left(\frac{z}{r} \right) - 210 \left(\frac{z}{r} \right)^3 + 231 \left(\frac{z}{r} \right)^5 \right) \frac{y}{r} \\ 693 \left(\frac{z}{r} \right)^6 - 945 \left(\frac{z}{r} \right)^4 + 315 \left(\frac{z}{r} \right)^2 - 15 \end{bmatrix} \quad (5.17)
 \end{aligned}$$

Y, por último, para el sexto:

$$\begin{aligned}
 \vec{p}_{J_6} &= \left[p_{J_{6x}} \quad p_{J_{6y}} \quad p_{J_{6z}} \right]^T = \\
 &= -\frac{J_6}{8} \left(\frac{\mu}{r^2} \right) \left(\frac{R_E}{r} \right)^6 \begin{bmatrix} \left(35 - 945 \left(\frac{z}{r} \right)^2 + 3465 \left(\frac{z}{r} \right)^4 - 3003 \left(\frac{z}{r} \right)^6 \right) \frac{x}{r} \\ \left(35 - 945 \left(\frac{z}{r} \right)^2 + 3465 \left(\frac{z}{r} \right)^4 - 3003 \left(\frac{z}{r} \right)^6 \right) \frac{y}{r} \\ \left(245 - 2205 \left(\frac{z}{r} \right)^2 + 4851 \left(\frac{z}{r} \right)^4 - 3003 \left(\frac{z}{r} \right)^6 \right) \frac{z}{r} \end{bmatrix} \quad (5.18)
 \end{aligned}$$

5.2.2. El efecto de la resistencia aerodinámica

Para la Tierra, la altitud comúnmente aceptada en la que "comienza" el espacio es 100 km. A pesar de que más del 99.9% de la atmósfera terrestre se encuentra por debajo de esta altitud, la densidad de la misma es suficiente para ejercer una resistencia y causar calentamiento aerodinámico en objetos moviéndose a velocidades orbitales. Se recuerda, a partir de la expresión (3.49), que la velocidad requerida para una órbita circular a 100 km de altitud ($r = 100 + R_E$) es de 7.8 km/s. El *drag*, por tanto, reducirá la velocidad del satélite haciendo que su órbita decaiga y el calentamiento aerodinámico podrá producir temperaturas de más de 2000 °C. Una

nave espacial es difícil que consiga soportar esas temperaturas a no ser que posea un escudo térmico.

Existe un gran número de modelos de atmósfera que describen la variación de las propiedades atmosféricas con la altitud. Los principales utilizados hoy en día son el modelo de *Atmósfera Estándar Internacional*, el *USSA76*, variaciones del *Jacchia-Roberts*, *J71*, *J77* y el *GRAM90* [16]. Se procederá con el *USSA76* o *Atmósfera Estándar Estadounidense* del año 1976. Esto permitirá conocer la densidad del aire a cada altitud y así poder computar la fuerza (y por tanto, la aceleración) de resistencia aerodinámica ejercida sobre el cuerpo.

El modelo atmosférico USSA76

La *Atmósfera Estándar Estadounidense* del año 1976 es una representación idealizada y estacionaria de la atmósfera terrestre desde su superficie hasta los 1000 km de altitud.

En el documento original escrito por la *NASA* y la *Fuerza Aérea de los E.E.U.U* [17], tras una extensa explicación del procedimiento de obtención de resultados, se presentan una serie de ocho tablas. La primera de estas tablas contiene datos de temperatura, presión y densidad para altitudes geopotenciales en unidades del sistema métrico (ver figura 5.3).

Table I
Geopotential Altitude, Metric Units

Altitude		Temperature			Pressure			Density	
H (m)	Z (m)	T (K)	t (°C)	T _M (K)	P (mb)	P (torr)	P/P ₀	ρ (kg/m ³)	ρ/ρ ₀
3000	3001	268.650	-4.500	268.650	7.0108 + 2	5.2585 + 2	6.9191 - 1	9.0912 - 1	7.4214 - 1
3050	3051	268.325	-4.825	268.325	6.9663	5.2252	6.8752	9.0445	7.3833
3100	3102	268.000	-5.150	268.000	6.9221	5.1920	6.8316	8.9980	7.3453
3150	3152	267.675	-5.475	267.675	6.8781	5.1590	6.7882	8.9516	7.3075
3200	3202	267.350	-5.800	267.350	6.8343	5.1262	6.7450	8.9055	7.2698
3250	3252	267.025	-6.125	267.025	6.7908	5.0935	6.7020	8.8595	7.2322
3300	3302	266.700	-6.450	266.700	6.7474	5.0610	6.6592	8.8137	7.1948
3350	3352	266.375	-6.775	266.375	6.7043	5.0287	6.6157	8.7681	7.1576
3400	3402	266.050	-7.100	266.050	6.6615	4.9965	6.5743	8.7226	7.1205
3450	3452	265.725	-7.425	265.725	6.6188	4.9645	6.5322	8.6774	7.0836
3500	3502	265.400	-7.750	265.400	6.5764 + 2	4.9327 + 2	6.4904 - 1	8.6323 - 1	7.0468 - 1
3550	3552	265.075	-8.075	265.075	6.5341	4.9010	6.4487	8.5874	7.0101
3600	3602	264.750	-8.400	264.750	6.4921	4.8695	6.4072	8.5427	6.9736
3650	3652	264.425	-8.725	264.425	6.4504	4.8382	6.3660	8.4981	6.9372
3700	3702	264.100	-9.050	264.100	6.4088	4.8070	6.3250	8.4538	6.9010
3750	3752	263.775	-9.375	263.775	6.3675	4.7760	6.2842	8.4096	6.8650
3800	3802	263.450	-9.700	263.450	6.3263	4.7451	6.2436	8.3656	6.8290
3850	3852	263.125	-10.025	263.125	6.2854	4.7144	6.2032	8.3217	6.7933
3900	3902	262.800	-10.350	262.800	6.2447	4.6839	6.1631	8.2781	6.7576
3950	3952	262.475	-10.675	262.475	6.2042	4.6536	6.1231	8.2346	6.7221
4000	4003	262.150	-11.000	262.150	6.1640 + 2	4.6233 + 2	6.0834 - 1	8.1913 - 1	6.6868 - 1
4050	4053	261.825	-11.325	261.825	6.1239	4.5933	6.0438	8.1482	6.6516
4100	4103	261.500	-11.650	261.500	6.0841	4.5634	6.0045	8.1052	6.6165
4150	4153	261.175	-11.975	261.175	6.0444	4.5337	5.9654	8.0624	6.5816
4200	4203	260.850	-12.300	260.850	6.0050	4.5041	5.9265	8.0198	6.5468
4250	4253	260.525	-12.625	260.525	5.9658	4.4747	5.8878	7.9774	6.5121
4300	4303	260.200	-12.950	260.200	5.9268	4.4454	5.8493	7.9351	6.4776
4350	4353	259.875	-13.275	259.875	5.8880	4.4163	5.8110	7.8930	6.4433
4400	4403	259.550	-13.600	259.550	5.8494	4.3874	5.7729	7.8511	6.4090
4450	4453	259.225	-13.925	259.225	5.8110	4.3586	5.7350	7.8093	6.3750

Figura 5.3. Fragmento de la Tabla I de la *USSA76* [17].

Conociendo ciertos valores de referencia de esta tabla, se puede realizar una interpolación mediante funciones exponenciales para obtener una función que devuelva el valor de la densidad a cierta altitud. Este procedimiento se detallará en el apartado de implementación en código.

El vector perturbación

Si la velocidad inercial de cuerpo es \vec{v} y la de la atmósfera en ese mismo lugar es \vec{v}_{atm} , entonces la velocidad relativa del cuerpo respecto a la de la atmósfera es [6]:

$$\vec{v}_{\text{rel}} = \vec{v} - \vec{v}_{\text{atm}} \quad (5.19)$$

Si la atmósfera rota con la Tierra, cuya velocidad angular es $\vec{\omega}_E$, la velocidad lineal de la atmósfera también puede expresarse como $\vec{v}_{\text{rel}} = \vec{\omega}_E \times \vec{r}$. Luego la velocidad relativa atmósfera-cuerpo queda como:

$$\vec{v}_{\text{rel}} = \vec{v} - \vec{v}_{\text{atm}} = \vec{v} - (\vec{\omega}_E \times \vec{r}) \quad (5.20)$$

Se sabe que la fuerza de resistencia aerodinámica sobre un cuerpo actúa en dirección opuesta al vector velocidad relativa (con $\hat{v}_{\text{rel}} = \frac{\vec{v}_{\text{rel}}}{v_{\text{rel}}}$). El vector resistencia al avance queda entonces definido como:

$$\vec{D} = -D\hat{v}_{\text{rel}} \quad (5.21)$$

Y su módulo se calcula mediante la conocida expresión

$$D = \frac{1}{2}\rho v_{\text{rel}}^2 C_D S \quad (5.22)$$

Donde ρ es la densidad atmosférica a cierta altitud, S es el área frontal del cuerpo (normal al vector velocidad relativa) y C_D es el coeficiente de resistencia aerodinámica. Si la masa del satélite es m , entonces la aceleración debida a la fuerza de resistencia es $\vec{p}_{\text{Drag}} = \vec{D}/m$; de modo que:

$$\boxed{\vec{p}_{\text{Drag}} = -\frac{1}{2}\rho v_{\text{rel}} \left(\frac{C_D \cdot S}{m} \right) \vec{v}_{\text{rel}}} \quad (5.23)$$

Véase que dentro del paréntesis de la expresión anterior se encuentra el ya definido coeficiente balístico del satélite (recordar igualdad (4.12)). Este coeficiente modificará la intensidad de la perturbación debida a la geometría y orientación del satélite.

Finalmente, incluyendo todas las expresiones del vector perturbación por el achatamiento halladas, se sumarán para obtener una forma final para el vector \vec{p} :

$$\boxed{\vec{p} = \vec{p}_{J_2} + \vec{p}_{J_3} + \vec{p}_{J_4} + \vec{p}_{J_5} + \vec{p}_{J_6} + \vec{p}_{\text{Drag}}}$$
 (5.24)

Por lo que la aceleración total del satélite, según la ecuación (5.2) queda como

$$\vec{a} = \begin{bmatrix} a_x & a_y & a_z \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} -\mu \frac{x}{r^3} + p_{J_{2x}} + p_{J_{3x}} + p_{J_{4x}} + p_{J_{5x}} + p_{J_{6x}} + p_{\text{Drag}_x} \\ -\mu \frac{y}{r^3} + p_{J_{2y}} + p_{J_{3y}} + p_{J_{4y}} + p_{J_{5y}} + p_{J_{6y}} + p_{\text{Drag}_y} \\ -\mu \frac{z}{r^3} + p_{J_{2z}} + p_{J_{3z}} + p_{J_{4z}} + p_{J_{5z}} + p_{J_{6z}} + p_{\text{Drag}_z} \end{bmatrix}$$
 (5.25)

5.3. Implementación del código

Una vez se conocen todas las expresiones necesarias para diseñar el propagador, se procede a su ejecución en el código. Se hará uso del software de programación *MATLAB* ®R2020a. En primer lugar, se tratará de validar la precisión del código implementado mediante una comparación con los ficheros obtenidos en *Horizons*. Una vez se considere que el propagador es lo suficientemente preciso, se procederá a simular para un determinado intervalo de tiempo, la evolución de los elementos orbitales considerando distintos coeficientes C_D . La función principal se usará tanto para validar la precisión del propagador como para realizar el análisis del efecto del *drag* en los elementos orbitales. Dentro de la función principal se hallará la función de integración correspondiente y , a su vez, la función de integración ejecutará una última función que devolverá los valores de densidad atmosférica según el modelo *USSA76* para cualquier altitud.

Se muestra en la tabla 5.2 el valor de todas las constantes utilizadas en el trabajo [26]:

Constante	Valor	Unidad
Para la Tierra		
G	$6.6742 \cdot 10^{-20}$	$\text{km}^3/(\text{s}^2 \cdot \text{kg})$
μ	398596.5724	km^3/s^2
J_2	$1.082634 \cdot 10^{-3}$	[-]
J_3	$-2.53267 \cdot 10^{-6}$	[-]
J_4	$-1.61963 \cdot 10^{-6}$	[-]
J_5	$-2.27290 \cdot 10^{-7}$	[-]
J_6	$5.40670 \cdot 10^{-7}$	[-]
M	$5.9722 \cdot 10^{24}$	kg
R_E	6378.1	km
$\vec{\omega}_E$	$7.292274 \cdot 10^{-5} \cdot \hat{k}$	rad/s
Para el satélite		
m	1360	kg
ρ_0	0.15696	$\text{kg}/(\text{m}^2 \cdot E_{\text{Radio}})$
B^*	Depende de la simulación	$1/E_{\text{Radio}}$
B	Depende de la simulación	km^2/kg

Tabla 5.2. Las constantes necesarias para ejecutar el código

5.3.1. Función principal

La función principal sigue la siguiente estructura:

- Se nombran todas las constantes de la tabla 5.2.
- Se nombran dos únicas entradas: el directorio del archivo descargado de *Horizons* y el tiempo deseado entre pasos. Este tiempo deber coincidir con el seleccionado en *Horizons* si se quiere realizar una comparativa entre propagadores.
- Se lee el archivo completo de *Horizons*.
- Se nombran las componentes de los vectores en el instante inicial (\vec{r}_0 y \vec{v}_0) según el archivo leído.
- Se introduce el tiempo final de simulación y el paso deseados.
- Se nombran las opciones del integrador utilizado y se inicializa el vector Ψ_0 conteniendo las componentes iniciales de posición y velocidad:

$$\Psi_0 = \begin{bmatrix} \vec{r}_0 & \vec{v}_0 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} x_0 & y_0 & z_0 & v_{x0} & v_{y0} & v_{z0} \end{bmatrix}^T \quad (5.26)$$

- Se introduce el integrador seleccionado: tanto *ode45* como *ode113* funcionan correctamente. Estos integradores solicitan una *función de integración* interna.
- Se introduce la *función de representación y guardado de variables* que será actualizada constantemente hasta que finalice la integración.
- Se añade la *función de integración*.

Es aconsejable mostrar en pantalla al final de la simulación el paso seleccionado y el tiempo transcurrido desde el inicio hasta el final de la misma para comprobar que haya concordancia con los archivos descargados de *Horizons*.

5.3.2. Función de integración

Para poder ejecutar *ode45* u *ode113* se necesita una función a integrar. Esta ha sido programada siguiendo la estructura a continuación:

- Se nombra cada componente del vector Ψ :

$$\begin{aligned}\Psi(1) &= x & \Psi(2) &= y & \Psi(3) &= z \\ \Psi(4) &= v_x & \Psi(5) &= v_y & \Psi(6) &= v_z\end{aligned}\tag{5.27}$$

- Se escriben los vectores \vec{r}, \vec{v} y sus módulos a partir de (5.27).
- Se escribe el vector velocidad relativa y su módulo con (5.20).
- Se nombra la densidad ρ mediante la *función de densidad atmosférica*.
- Se determina qué armónicos zonales se quiere incluir multiplicando por la unidad o por cero a cada uno de ellos. Lo mismo aplica para el coeficiente balístico.
- Se escriben las expresiones de las componentes de la aceleración según (5.25).
- Se define la derivada con respecto al tiempo del vector Ψ :

$$\frac{d\Psi}{dt} = \begin{bmatrix} \vec{v} & \vec{a} \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} v_x & v_y & v_z & a_x & a_y & a_z \end{bmatrix}^T\tag{5.28}$$

Este bucle se actualiza con cada paso temporal hasta que la integración finalice.

5.3.3. Función de densidad atmosférica

Como se ha explicado anteriormente, se hace uso del modelo *USSA76*. Esta función calcula la densidad para altitudes desde el nivel del mar hasta los 1000 km mediante una interpolación exponencial con la forma [6]:

$$\rho(z) = \rho_i \cdot e^{-(z-z_i)/H_i} \quad (5.29)$$

- Se seleccionan en un vector 28 altitudes (z_i) distintas en kilómetros. De 0 a 1000 km con un paso de 10 km.
- Se escriben las correspondientes densidades a cada una de esas altitudes (ρ_i) según la Tabla I del documento oficial *USSA76* [17].
- Se escriben las 28 correspondientes H_i mediante la expresión:

$$H_i = \frac{-(z_{i+1} - z_i)}{\ln(\rho_{i+1}/\rho_i)} \quad (5.30)$$

- Se determina el intervalo de interpolación mediante un bucle *for*, de 1 a 27.

Los datos de la función principal en el caso del propagador ya verificado se guardarán y se insertarán automáticamente en un hoja de cálculo para facilitar su distribución y su representación gráfica.

Capítulo 6

Análisis de resultados

En este capítulo se validará la eficacia del propagador diseñado comparando los resultados con el propagador de *Horizons*, con la finalidad de poder realizar un estudio lo más fiable posible de la evolución de los elementos orbitales al variar el coeficiente de *drag* del satélite. Se realizarán representaciones con la ayuda del software *STK*, que permiten una mejor visualización de los resultados obtenidos.

6.1. Validación del propagador

En primer lugar se tratará de verificar la precisión del propagador, comparando varios archivos descargados de *Horizons* para el satélite *Aeolus*. Como se explicó en el apartado correspondiente, primero es necesario obtener el conjunto *TLE* del mismo para un determinado día. Introduciendo el nombre del satélite en *CelesTrak* se consigue el TLE de la figura 6.1.

```
1 43600U 18066A 21178.07605081 .00035697 00000-0 14045-3 0 9997
2 43600 96.7144 184.7676 0003320 347.1123 13.0065 15.86814571164770
```

Figura 6.1. Conjunto *TLE* para *Aeolus*

Al introducir este TLE en *Horizons*, se descargó un archivo conteniendo el vector estado del satélite para un rango de días desde el 15 de junio a las 00:00 h hasta el 22 de junio a las 00:00 h de 2021. Con un paso de 1 minuto entre filas. Este archivo, entonces, contiene nada menos que 10081 filas de datos que tendrán que ser comparados con el propagador diseñado.

Es importante remarcar que se ha escogido un rango temporal de una semana puesto que para este tipo de satélites tan bajos, las correcciones en la trayectoria son muy frecuentes. Sería una mala idea simular un propagador de una órbita *LEO*

durante más de una o dos semanas puesto que el error cometido aumentaría en decenas o incluso centenas de kilómetros. Especialmente si estas maniobras no se consideran en la predicción [24].

Para poder comparar la simulación con el archivo descargado, es fundamental cerciorarse de que tanto el tiempo de integración como el paso de 1 minuto seleccionado coincidan tanto en el código como en el archivo de *Horizons*. Otro aspecto importante a modificar será el coeficiente B^* del satélite, el cual se podrá obtener fácilmente a partir del *TLE* de la figura 6.1. Para el día en el que se obtuvo este conjunto, el satélite *Aeolus* tenía un coeficiente balístico estrella de $0.14045 \cdot 10^{-3} 1/E_{Radio}$. Una vez introducidos los datos de entrada, se comienza con la validación.

Propagador sin perturbaciones

Como primer intento, se simulará el código sin el vector perturbación. Es decir, se comprobará cuán precisa es la ecuación del movimiento relativo de dos cuerpos con respecto al propagador de *Horizons*. El vector aceleración del satélite sería:

$$\vec{a} = \begin{bmatrix} a_x & a_y & a_z \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} -\mu \frac{x}{r^3} \\ -\mu \frac{y}{r^3} \\ -\mu \frac{z}{r^3} \end{bmatrix} \quad (6.1)$$

El error para cada una de las coordenadas del vector posición y su módulo se muestra en la figura 6.2. Se puede ver cómo el propagador diseñado no se acerca a la evolución de las coordenadas del vector posición de *Horizons*. La ecuación del movimiento relativo de dos cuerpos no representa lo suficiente la realidad, y error máximo del vector posición alcanzado a los 10081 minutos se encuentra entorno a los 9 km, con error absoluto de las componentes x e y superior a los 2000 km.

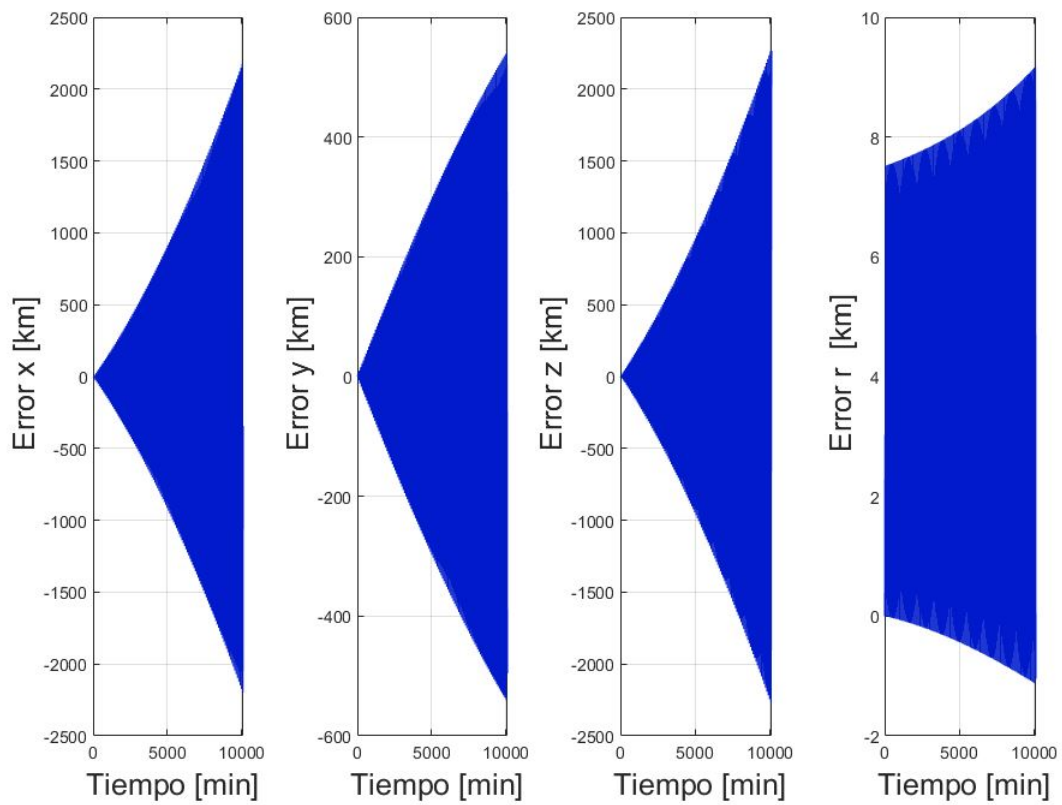


Figura 6.2. Error entre el vector posición obtenido con el integrador sin perturbaciones y el vector posición proporcionado por *Horizons*.

Por otro lado, en la figura 6.3 se representa el vector velocidad obtenido con el integrador diseñado libre de perturbaciones y el error que se comete al compararlo con el generado por *Horizons* en cada una de sus componentes y en su módulo. Se puede observar que el error máximo total cometido es de unos $8 \cdot 10^{-3}$ km/s.

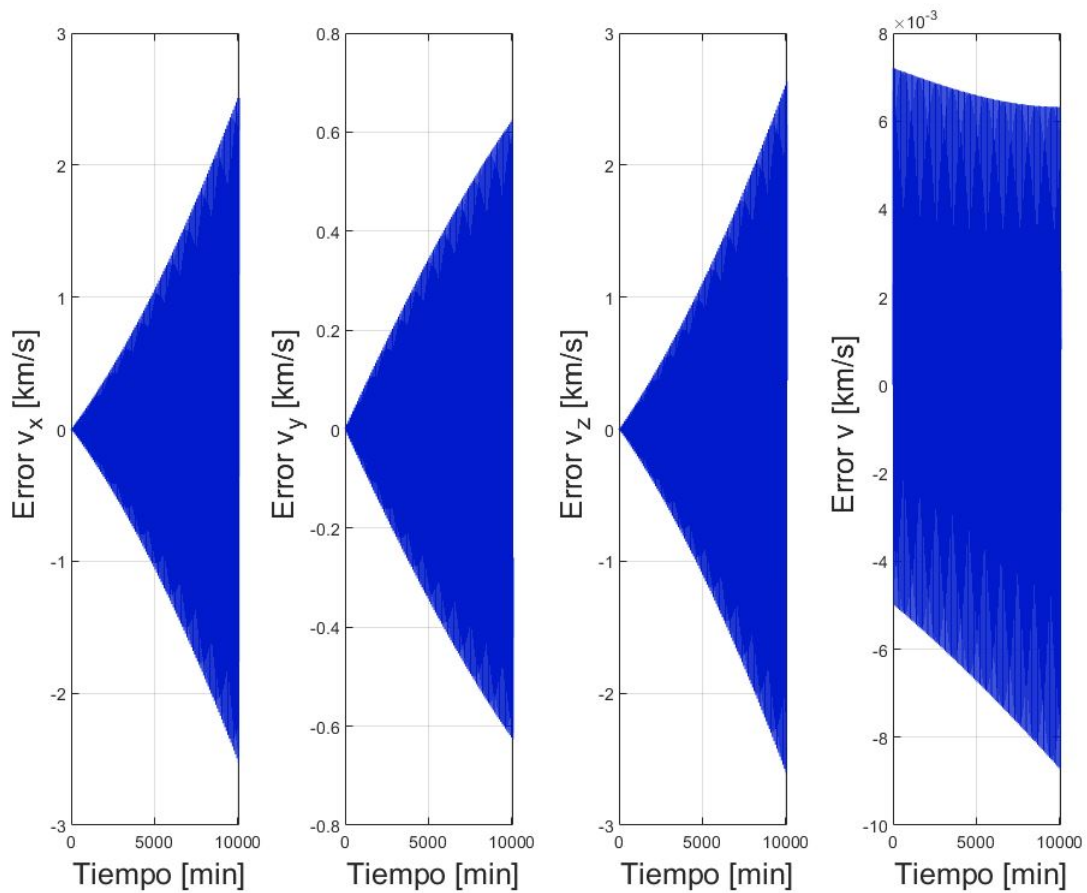


Figura 6.3. Error entre el vector velocidad obtenido con el integrador sin perturbaciones y el vector velocidad proporcionado por *Horizons*.

Propagador con efecto J_2

Ahora se añadirá el efecto del segundo armónico zonal de la Tierra. Por lo que el vector aceleración del satélite quedaría como:

$$\vec{a} = \begin{bmatrix} a_x & a_y & a_z \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} -\mu \frac{x}{r^3} + p_{J_{2x}} \\ -\mu \frac{y}{r^3} + p_{J_{2y}} \\ -\mu \frac{z}{r^3} + p_{J_{2z}} \end{bmatrix} \quad (6.2)$$

El error del vector posición se puede ver en la figura 6.4.

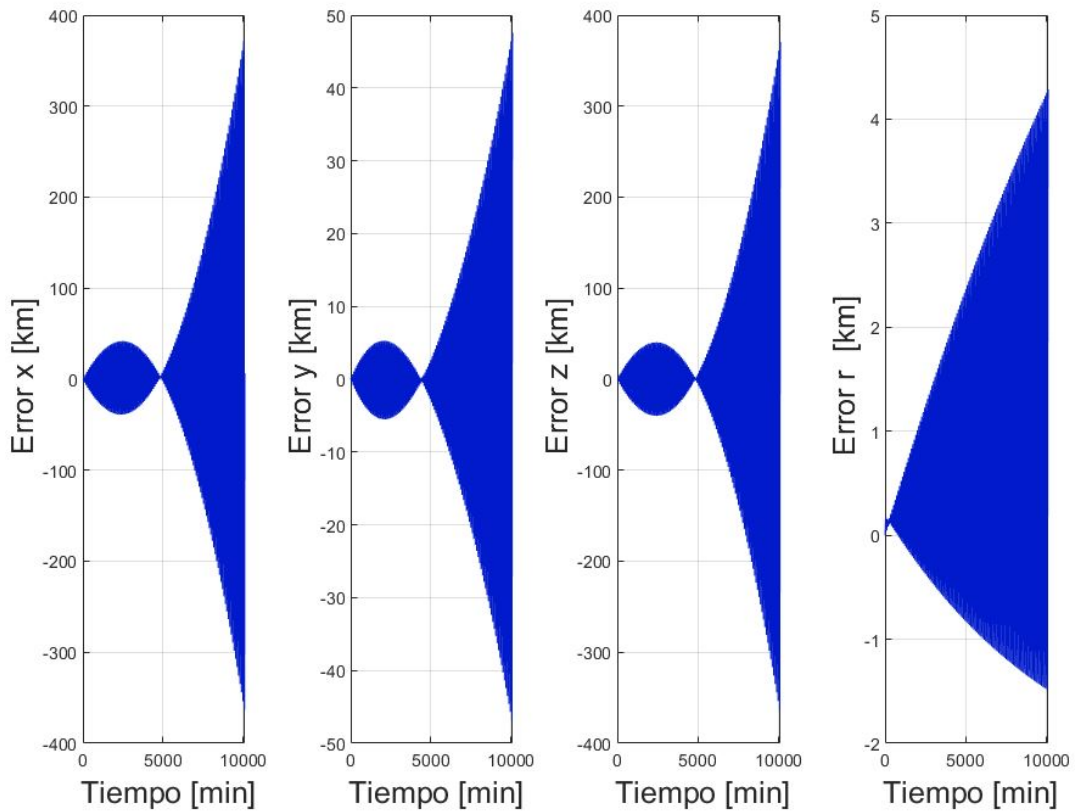


Figura 6.4. Error entre el vector posición obtenido mediante el integrador con J_2 y el vector posición proporcionado por *Horizons*.

En este caso, la evolución de las coordenadas del vector posición es mucho más próxima a las generadas por *Horizons*. Esto es debido a que el efecto del achatamiento terrestre, en concreto del armónico J_2 , es uno de los predominantes para los satélites *LEO* y su incorporación reduce el error máximo hasta 4 km. Aunque todas las coordenadas han reducido su error absoluto, todavía se puede mejorar el integrador con la incorporación de un mayor número de armónicos correspondientes al efecto del achatamiento terrestre.

Por su parte, el error del vector velocidad se puede ver en la figura 6.5, donde el error total de su módulo desciende a $3 \cdot 10^{-3}$ km/s.

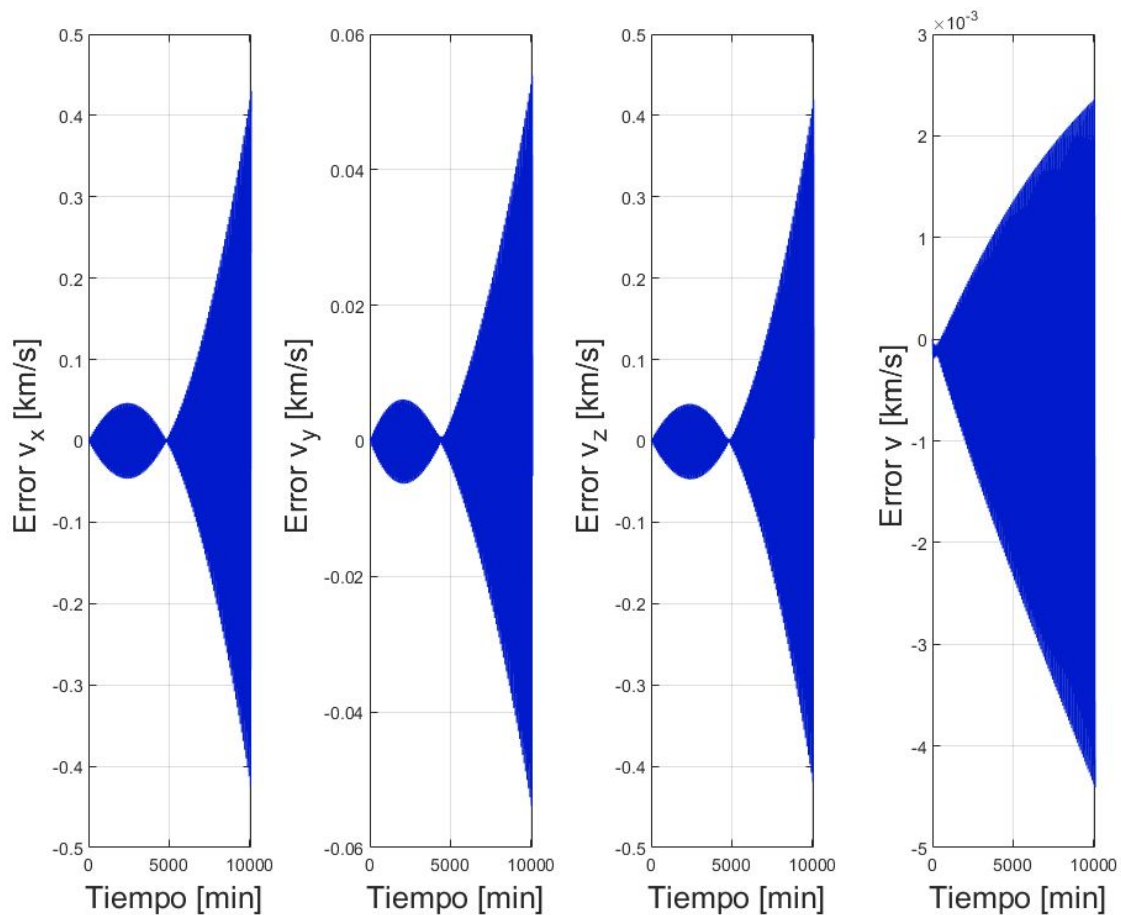


Figura 6.5. Error entre el vector velocidad obtenido mediante el integrador con J_2 y el vector velocidad proporcionado por *Horizons*.

Propagador con los efectos J_2 , J_3 , J_4 , J_5 , J_6 y *drag*

Como la adición del efecto J_2 es la más notable de todos los armónicos, se mostrará directamente el resultado final, incluyendo los armónicos zonales del segundo al sexto y también el efecto del *drag*. Este último efecto reducirá todavía más el error para las condiciones de atmósfera dadas, y es fundamental para este trabajo. La expresión de la aceleración del satélite quedaría, entonces, como se ha mostrado en la expresión (5.25).

El error del vector posición se puede ver en la figura 6.6.

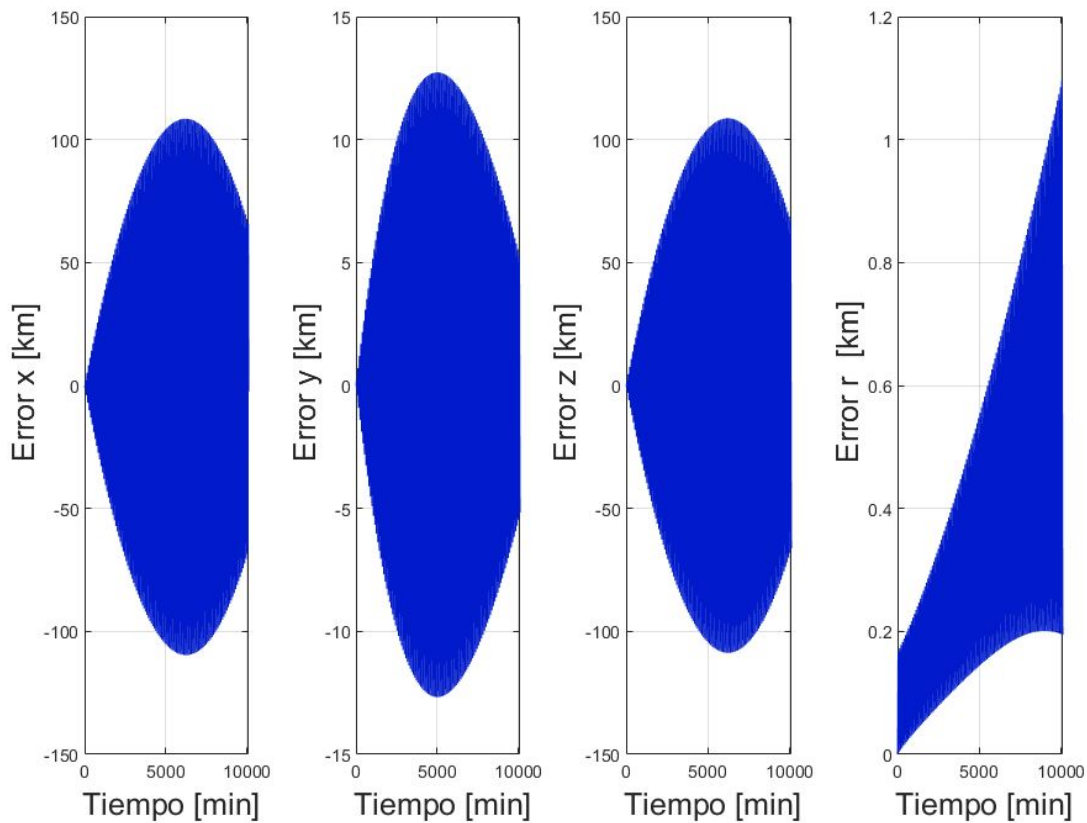


Figura 6.6. Error entre el vector posición obtenido mediante el integrador con J_2 , J_3 , J_4 , J_5 , J_6 y $drag$, y el vector posición proporcionado por *Horizons*.

Con todas las perturbaciones añadidas, la evolución del vector posición es prácticamente idéntica a la de *Horizons*. El error total desciende al kilómetro, lo que significa que para el minuto 10081, el error relativo es máximo con un valor del 0.0029%.

Los errores relativos en las tres coordenadas del vector pueden deberse a varios factores:

- La falta del resto de perturbaciones como las atracciones gravitatorias de la Luna y el Sol y el efecto de la radiación solar.
- El modelo de atmósfera utilizado.
- La precisión de la función integradora.

Por último, el error cometido en el vector velocidad se muestra en la figura 6.7.

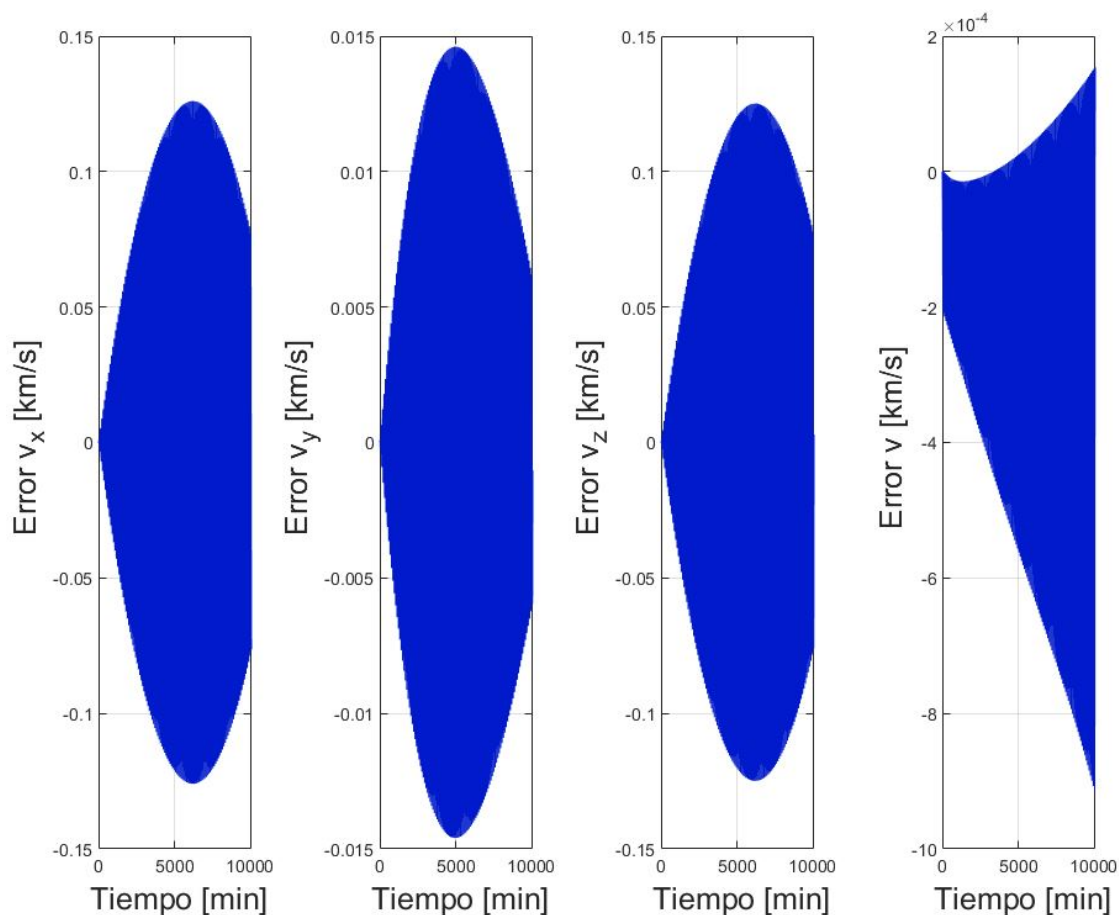


Figura 6.7. Error entre el vector velocidad obtenido mediante el integrador con J_2 , J_3 , J_4 , J_5 , J_6 y $drag$, y el vector velocidad proporcionado por *Horizons*.

Atendiendo a la figura anterior, el error del módulo del vector velocidad ha disminuido un orden de magnitud, con un error relativo máximo del 0.0012%. Estos resultados pueden volver a obtenerse durante días distintos para un rango de una semana y se ha comprobado la consistencia de los resultados.

Se puede decir que el propagador es lo suficientemente preciso para poder continuar con el estudio de la evolución de la órbita al variar el coeficiente de $drag$.

6.2. Estudio del efecto de las variaciones del C_D

Para realizar el estudio, se obtendrá un rango de coeficientes de *drag* que representen, de manera aproximada, la variación de este coeficiente debida a la orientación del satélite con respecto al vector velocidad relativa (\hat{v}_{rel}). Como puede verse en la figura 4.6, *Aeolus* presenta unos paneles solares con cierta envergadura. En función de su orientación, sufrirá una mayor o menor resistencia al avance. Se supondrá que el mínimo C_D del satélite ocurre cuando, con los paneles desplegados, el satélite se encuentra rotado 90° con respecto a la posición frontal. En ese caso, la sección frontal que ve el aire es mínima. Por el contrario, cuando el satélite se encuentra orientado de manera completamente frontal al vector velocidad relativa, el C_D es máximo. Dicho esto, y haciendo uso de los datos de la tabla 4.4, se calcularán los coeficientes máximo y mínimo.

- Sección mínima

$$S = \text{longitud} \times \text{ancho} = 4.6 \times 1.9 = 8.74 \quad \text{m}^2 \quad (6.3)$$

- Sección máxima

$$S = \text{longitud} \times \text{ancho} + \text{Área frontal paneles} = 4.6 \times 1.9 + 14.5 = 23.24 \quad \text{m}^2 \quad (6.4)$$

Entonces, para un rango de coeficiente balístico estrella comprendido entre $0.12 \cdot 10^{-3}$ y $0.19 \cdot 10^{-3}$ (son valores comunes para este satélite en *Horizons*), se obtienen unos valores mínimo y máximo para el C_D de 0.09 y 0.37. Sin embargo, una vez verificado el orden de magnitud del coeficiente, se ampliará el rango del mismo para poder realizar el estudio de los elementos de manera más general. Aunque probablemente el satélite nunca alcance valores de C_D tan altos, se podrá visualizar el cambio de la órbita de manera más acentuada. El rango elegido se muestra en la tabla 6.1.

Número	C_D	Número	C_D
1	0.14	6	0.69
2	0.25	7	0.80
3	0.36	8	0.91
4	0.47	9	1.02
5	0.58	10	1.18

Tabla 6.1. Rango de coeficientes de *drag* a utilizar

6.2.1. Efecto en una órbita *LEO* baja

Una vez se tiene un propagador con cierta precisión, se ejecuta el código para un rango de 10000 minutos (una semana aproximadamente) con un vector estado inicial. Se ha escogido, por ejemplo, el vector estado descargado de *Horizons* para el día 3 de junio de 2021 a las 00:00 h.

$$\begin{aligned}\vec{r}_0 &= \begin{bmatrix} -1635.790605 & 1364.162015 & 6333.574017 \end{bmatrix}^T \text{ km} \\ \vec{v}_0 &= \begin{bmatrix} 7.052178137 & -2.169351523 & 2.27913945 \end{bmatrix}^T \text{ km/s}\end{aligned}\tag{6.5}$$

Esto significa que *Aeolus* se encuentra a 304 km de altitud en el instante inicial, por lo que el efecto de las perturbaciones planteadas en el trabajo ha de ser notable. Una vez finaliza la simulación, se envían automáticamente los resultados a una hoja de cálculo para poder realizar las representaciones gráficas de manera sencilla.

Evolución del semieje mayor

El primer elemento orbital a representar será el semieje mayor. En la figura 6.8, se ve claramente una evolución oscilatoria en el tiempo, algo que en un principio parece poco intuitivo. El efecto de las variaciones del coeficiente *drag* modifican constantemente la geometría de la órbita elíptica siguiendo un patrón. Estas oscilaciones tienen una amplitud del orden de 15 km aproximadamente en un periodo de 500 minutos. Se ha representado para tres coeficientes de *drag* distintos y la amplitud máxima de la oscilación comienza a decrecer considerablemente a los pocos días del inicio de la simulación. Este efecto es más notable cuanto mayor es el C_D .

Uniando los valores máximos de las oscilaciones se obtienen las curvas para todos

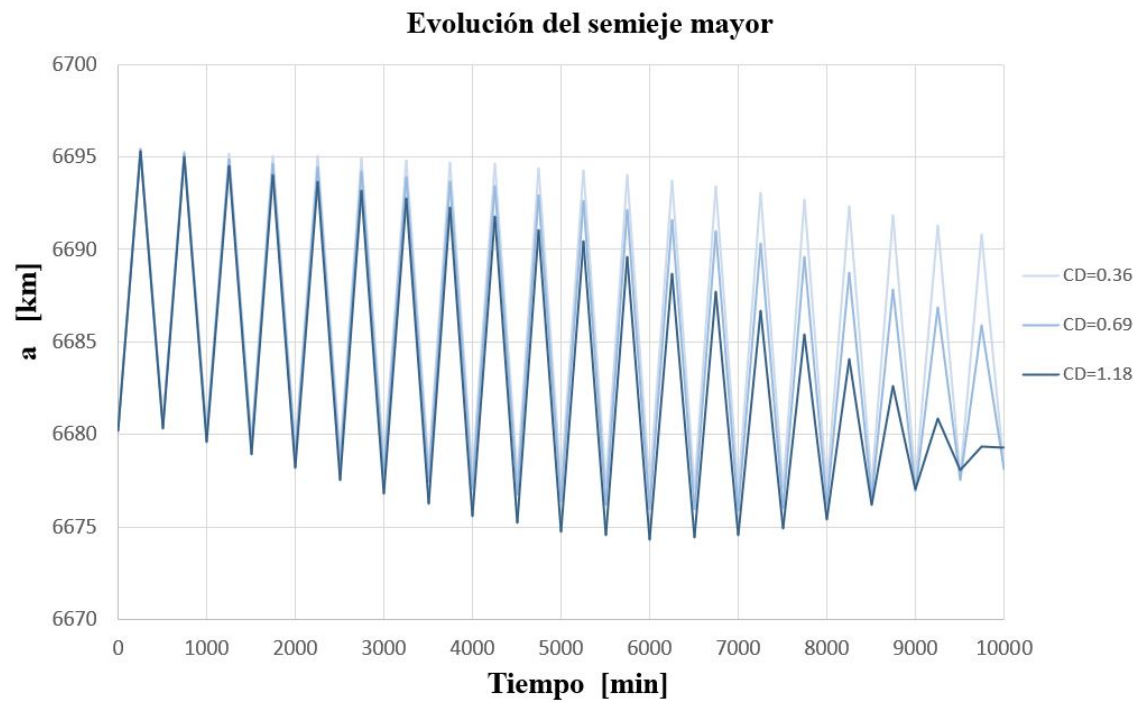


Figura 6.8. Oscilación del semieje mayor para órbita *LEO* baja

los C_D elegidos (figura 6.9) con un valor del semieje mayor concreto para cada instante de tiempo.

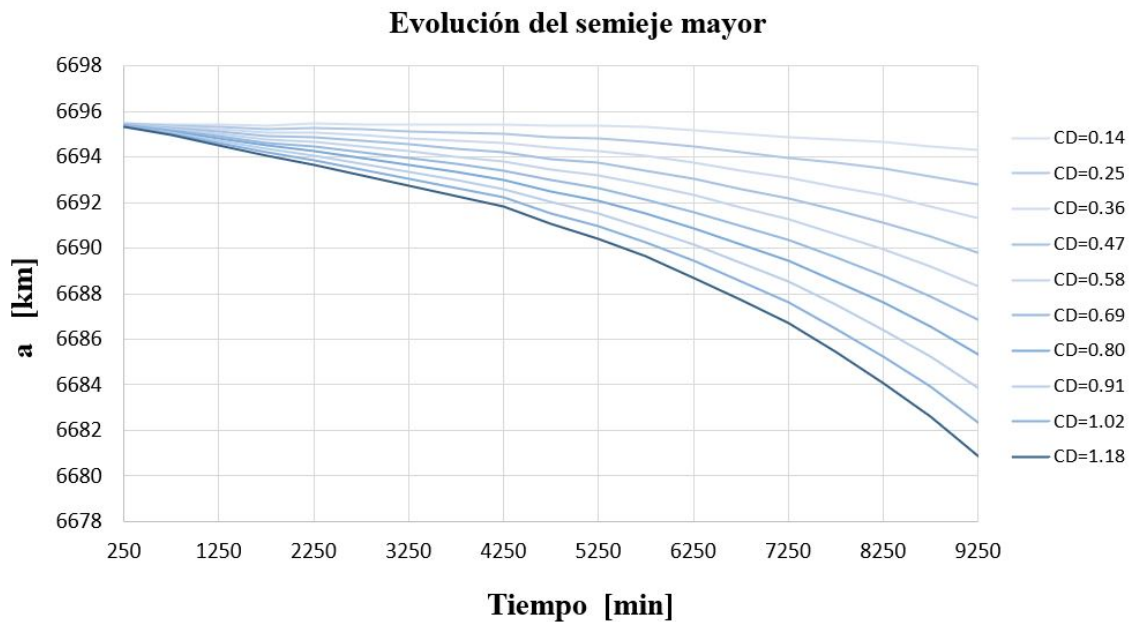


Figura 6.9. Evolución del semieje mayor en función del C_D para órbita *LEO* baja

La tendencia decreciente es clara, pero es cierto que a menor C_D más se retrasa el decremento del semieje mayor, de manera que la órbita permanece más estable.

Evolución de la excentricidad

Como la excentricidad y el semieje mayor están estrechamente relacionados (ver expresiones (3.2), (3.36)), la excentricidad presentará una tendencia similar a la anterior, también oscilatoria en el tiempo. En la figura 6.10, se muestra lo mencionado, donde el decremento de este elemento orbital se acentúa con mayor C_D . Se debe tener en cuenta que esta órbita es elíptica y tiene una excentricidad muy baja, por lo que las oscilaciones que presenta (entorno a 0.003 unidades) no serán apreciables en el software *STK*.

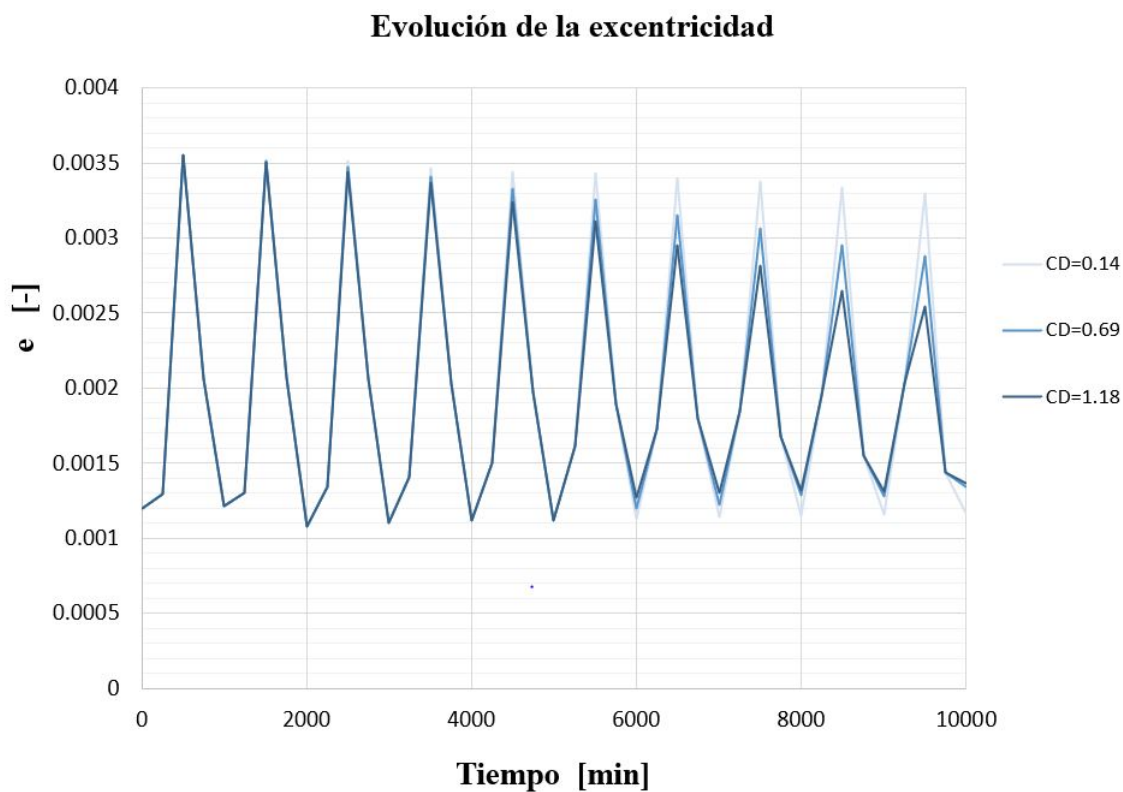


Figura 6.10. Oscilación de la excentricidad para órbita *LEO* baja

De manera análoga al semieje mayor, se representa en la figura 6.11 la evolución suavizada de los máximos alcanzados para la excentricidad. De nuevo, aparece una tendencia decreciente con el tiempo que se acentúa a mayor influencia de la resistencia aerodinámica.

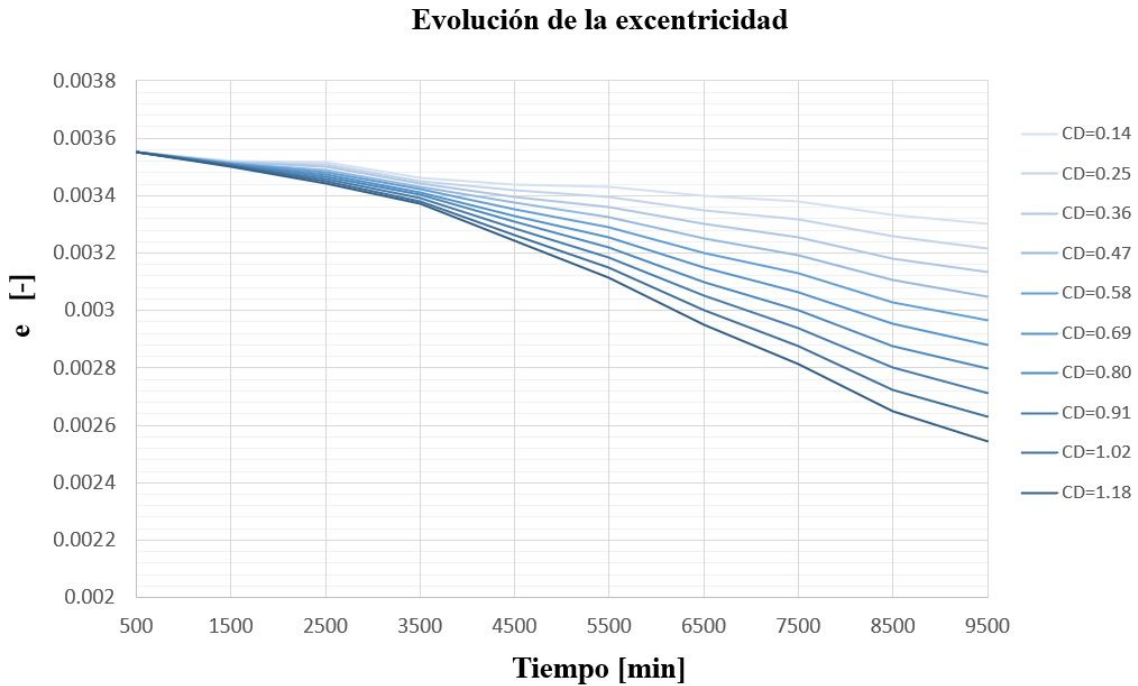


Figura 6.11. Evolución de la excentricidad en función del C_D para órbita *LEO* baja

Según las figuras anteriores, tanto la excentricidad como el semieje mayor tardan entre dos y cuatro días en decrecer considerablemente para los distintos valores de C_D , siendo perturbadas en todo momento por los armónicos zonales de la Tierra, lo cual se ajusta a la tendencia real.

Evolución de la inclinación

La inclinación, según la figura 6.12 muestra una evolución oscilatoria muy sutil, con amplitudes del orden de 5 milésimas de grado. Sin embargo, presenta una disminución análoga a los casos anteriores. El *drag* afecta la órbita disminuyendo la inclinación (ligeramente) con el tiempo.

Uniando los puntos máximos se puede ver en la figura 6.13 la evolución suave de este elemento para todos los valores de C_D propuestos.

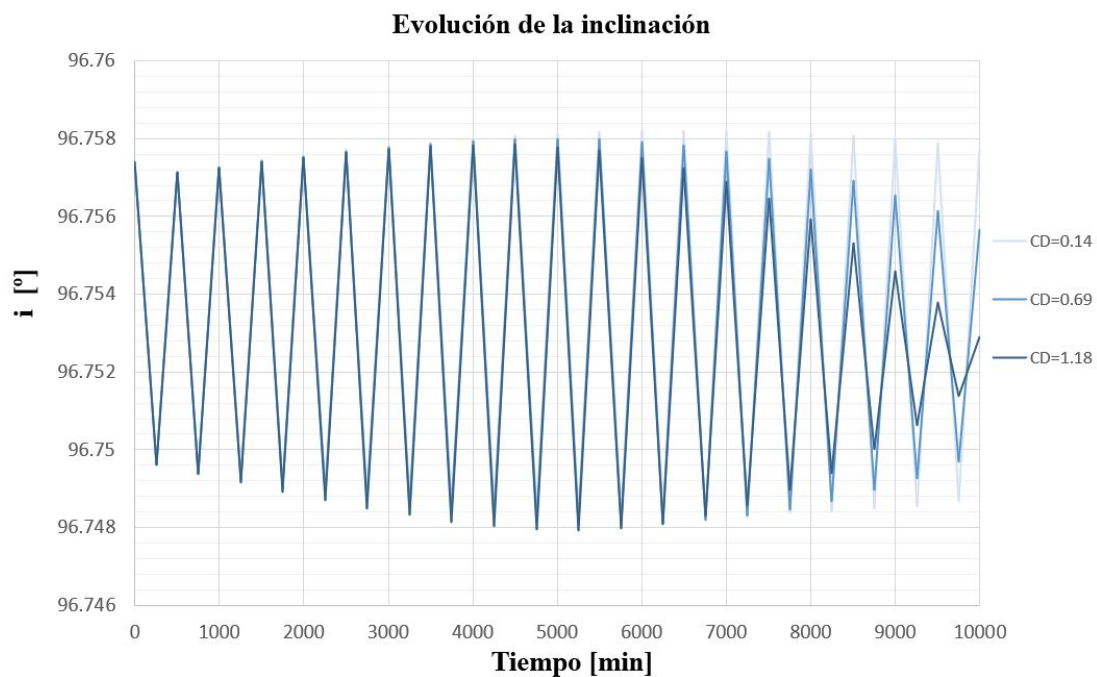


Figura 6.12. Oscilación de la inclinación para órbita *LEO* baja

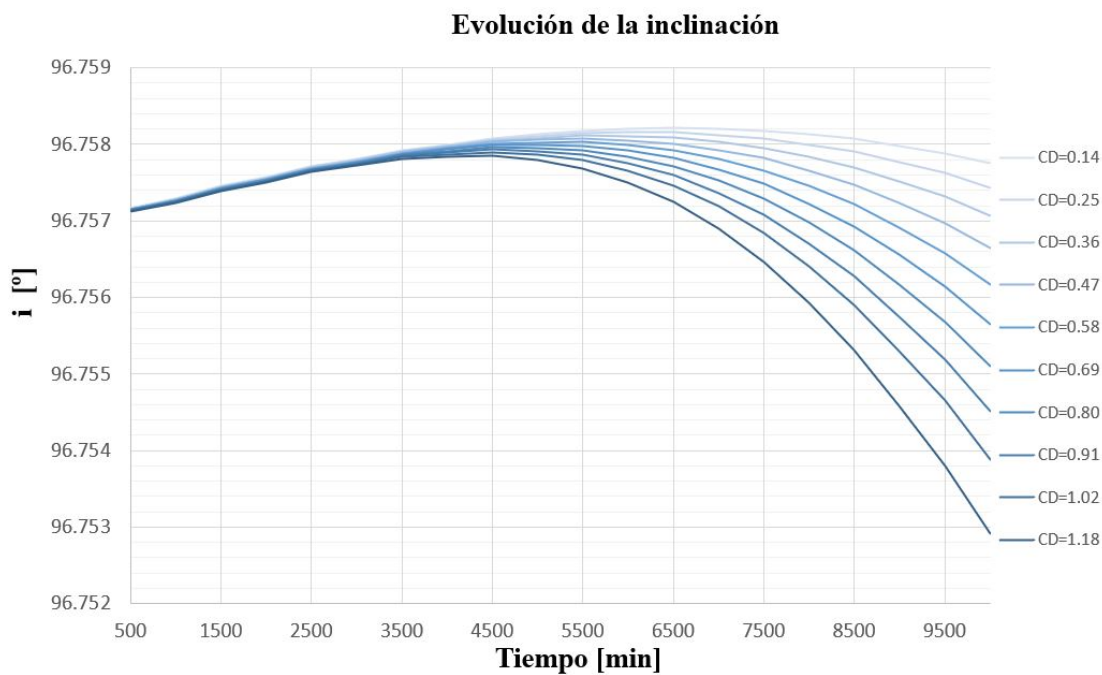


Figura 6.13. Evolución de la inclinación en función del C_D para órbita *LEO* baja

Evolución del argumento del perigeo

Lo que ocurre con el argumento del perigeo es algo peculiar. Debido a las perturbaciones añadidas y la forma elíptica de la órbita, esta sufre un cambio de perigeo que se repite en cada periodo. Se comprobará posteriormente que el periodo es de aproximadamente unos 90 minutos. El argumento del perigeo (vector en blanco en la figura 6.14) oscila dos veces con prácticamente la misma amplitud y justo después completa una vuelta entera a la Tierra, regresando al punto de inicio. En la misma figura, el software *STK* simula las perturbaciones de la órbita según el modelo *SGP4*.

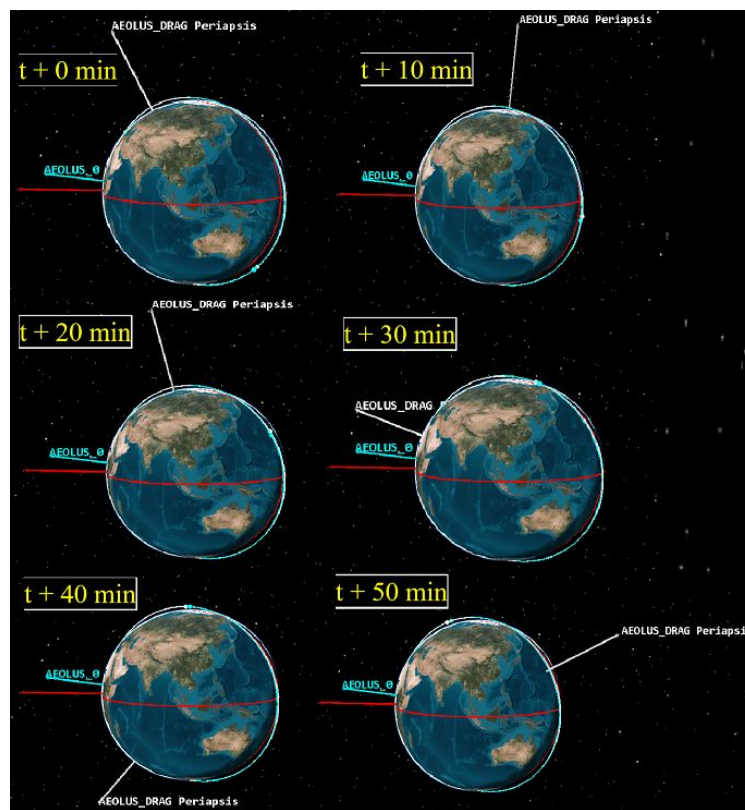


Figura 6.14. Visualización de la oscilación que sufre el argumento del perigeo cada periodo en *STK*

La figura anterior no muestra el periodo completo del satélite, pero se puede apreciar la velocidad con la que varía este elemento orbital con respecto a los anteriores. En la figura 6.15, el propagador diseñado muestra la misma tendencia para el comienzo de la simulación. El argumento del perigeo oscila con una amplitud baja dos veces antes de dar una vuelta entera (cae de los 350° a unos 20°) en un periodo de unos 90 minutos.

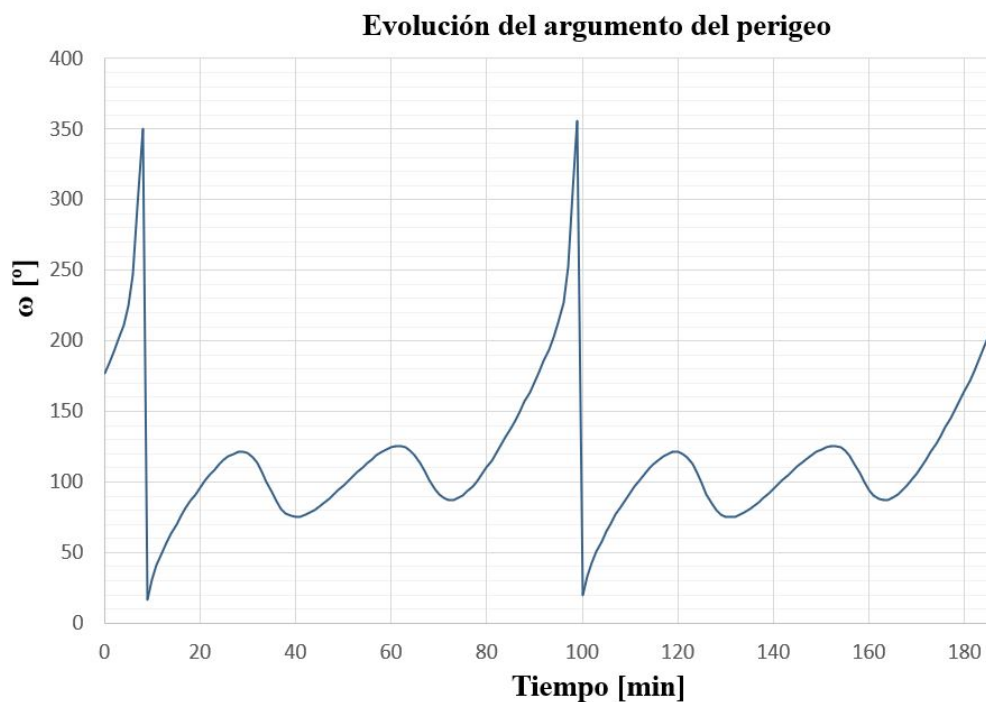


Figura 6.15. Oscilación que sufre el argumento del perigeo cada periodo para órbita *LEO* baja

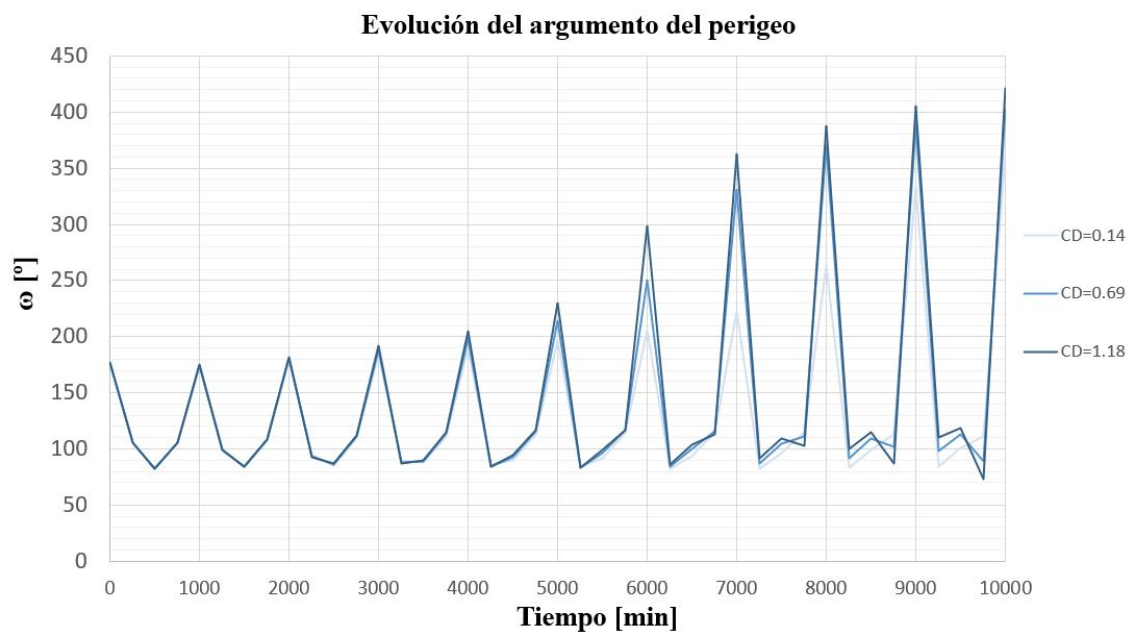


Figura 6.16. Oscilación del argumento del perigeo para órbita *LEO* baja

Sucede que a medida que avanzan los días, este elemento alcanza ángulos mayores. Además, a mayor C_D , más se acentúa esta tendencia. En la figura 6.16 se aprecia la

evolución oscilatoria con los días para tres coeficientes de drag distintos. El pico máximo alcanzado supera los 360° y vuelve de nuevo a contar desde los 0° , aunque en este mismo gráfico se ha representado $40^\circ = 400^\circ$ para que se aprecie un aumento de del argumento del perigeo al completar una vuelta entera.

En la figura 6.17, se muestra la evolución del mismo elemento para los valores máximos alcanzados, de modo que se suavicen las curvas para todos los coeficientes C_D .

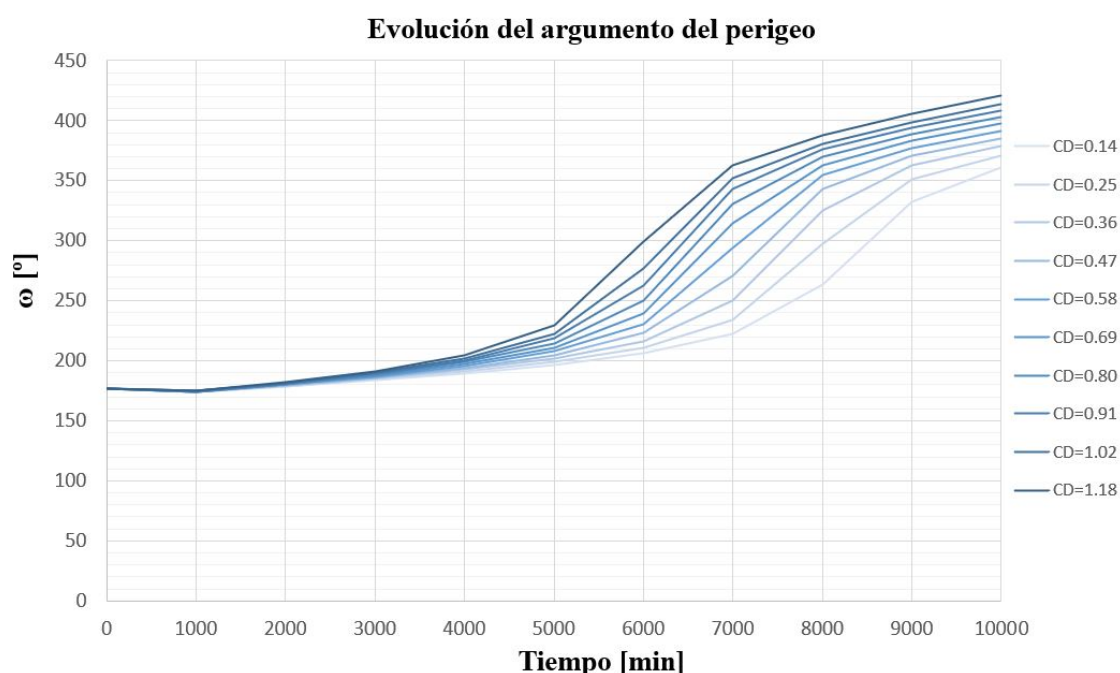


Figura 6.17. Evolución del argumento del perigeo en función del C_D para órbita *LEO* baja

Evolución de la anomalía verdadera

Lo que ocurre con la anomalía verdadera está estrechamente relacionado con la evolución del argumento del perigeo. Como ω oscila entre ciertos valores que se repiten cada periodo orbital, la anomalía verdadera (que se mide desde el perigeo), está acotada en cierto rango durante toda la simulación (ver figura 6.18).

En la figura 6.19, se aprecia cómo el *drag* afecta únicamente al tiempo que tarda el satélite en situarse en un determinado ángulo θ ; es decir, cuanto mayor C_D posea, más adelantado se encontrará el satélite con respecto a los de menor C_D por el hecho de recorrer una órbita ligeramente menor.

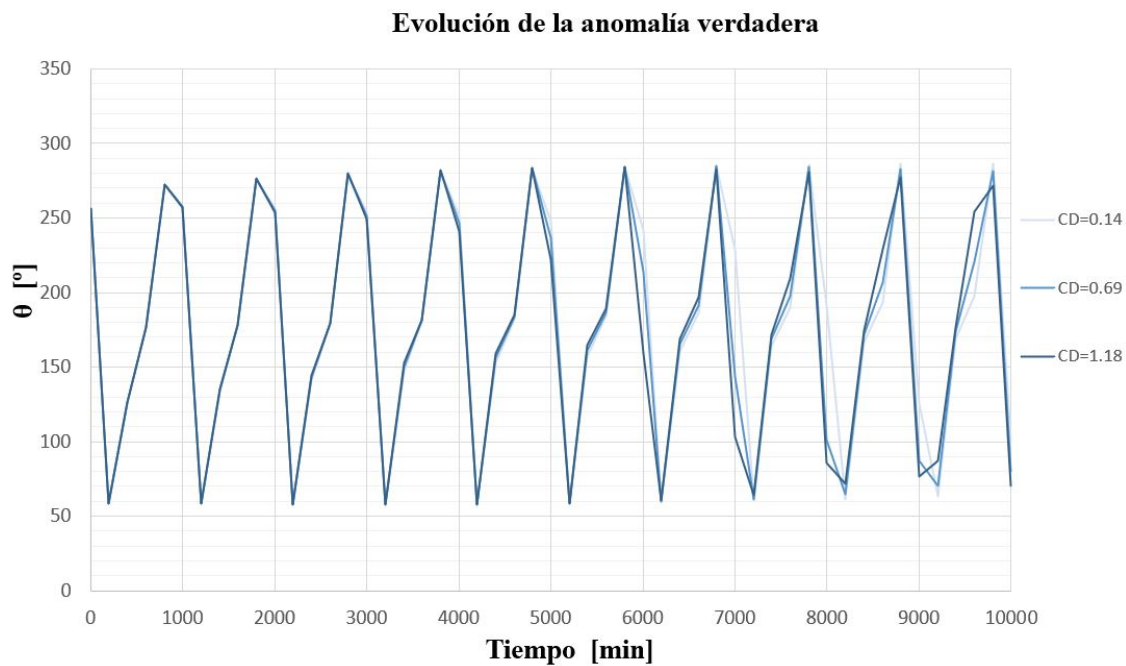


Figura 6.18. Evolución de la anomalía verdadera en función del C_D para órbita *LEO* baja

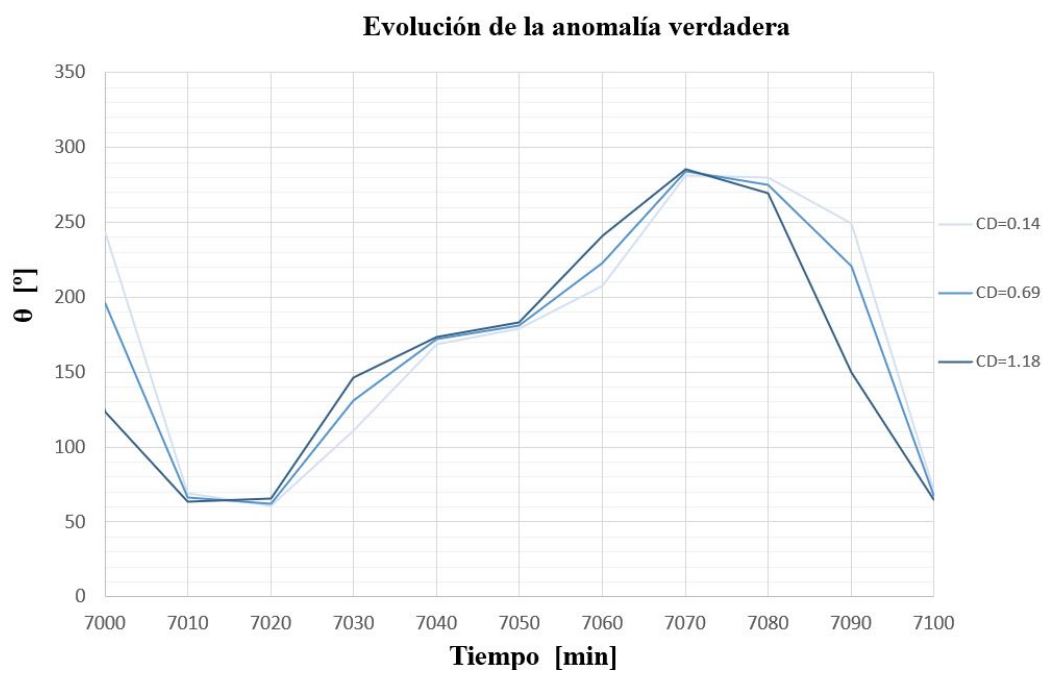


Figura 6.19. Evolución más detallada de la anomalía verdadera

Evolución de la RAAN

Según la figura 6.20, la ascensión recta del nodo ascendente sigue una tendencia creciente y lineal. Se ha representado para distintos valores de coeficiente de *drag* y no se aprecia ninguna diferencia a simple vista. Lo que ocurre es que el *drag* modifica la órbita progresivamente aumentando su RAAN de manera muy sutil, como ocurría con la inclinación. Para el valor final de la simulación, los valores para distintos C_D coinciden hasta la milésima de grado. Sin embargo, esta pequeña diferencia se traduce en varios kilómetros de separación, lo cual se puede visualizar mejor en *STK*.

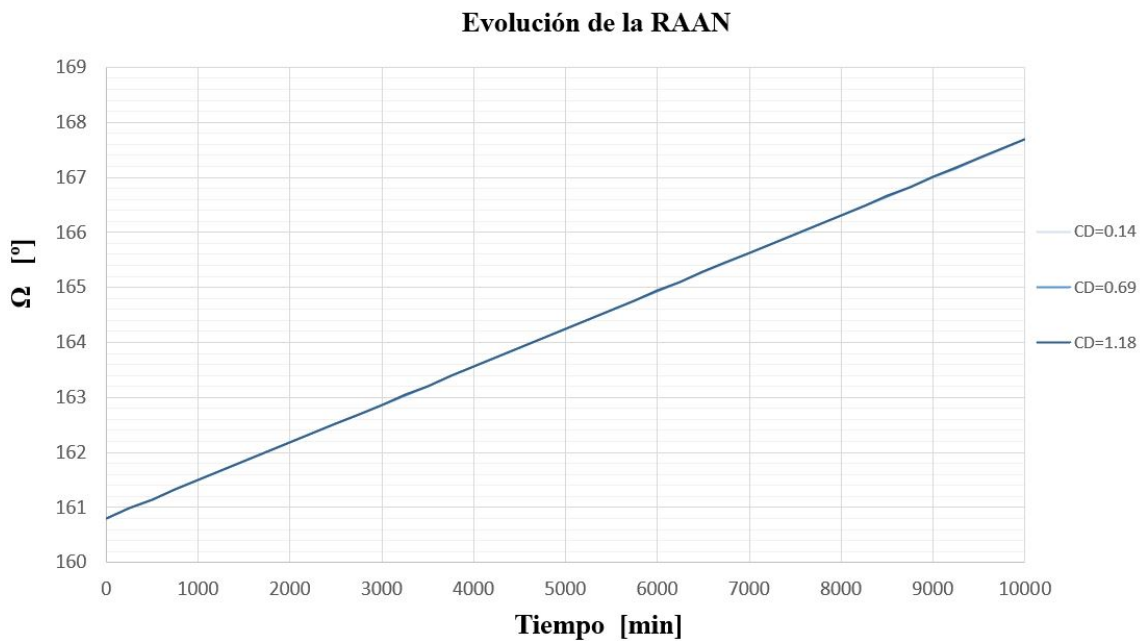


Figura 6.20. Evolución de la RAAN en función del C_D para órbita *LEO* baja

Evolución del radio del perigeo

Para poder apreciar cuánto decae la órbita con el tiempo, una de las formas es comparar la altitud mínima que alcanza el satélite en cada instante. La evolución del radio del perigeo deberá ser análoga a las evoluciones del semieje mayor y la excentricidad. En la figura 6.21 se puede ver cómo este elemento oscila de manera similar al semieje mayor. La amplitud de esta comienza a disminuir con mayor influencia de la resistencia aerodinámica a partir tras varios días de simulación.

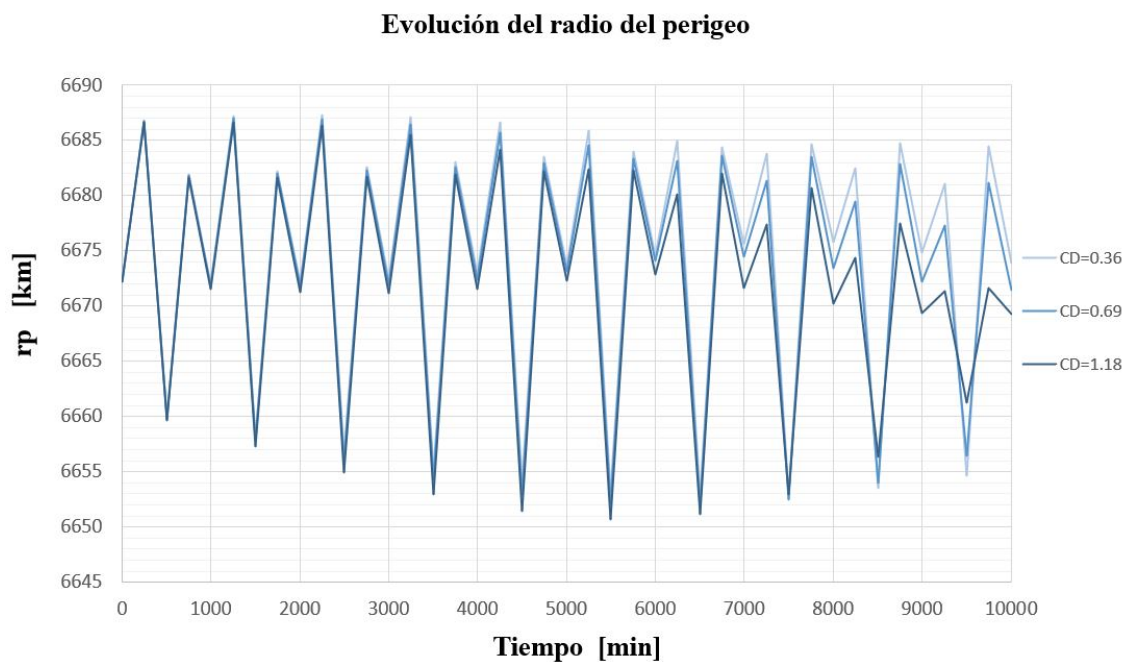


Figura 6.21. Oscilación del radio del perigeo para órbita *LEO* baja

De manera suavizada, en la figura 6.22, se aprecia cómo la órbita decae con el tiempo. En una semana, el perigeo de la órbita del satélite con mayor C_D habrá descendido unos 15 km, mientras que el de menor C_D habrá descendido unos 6 km.

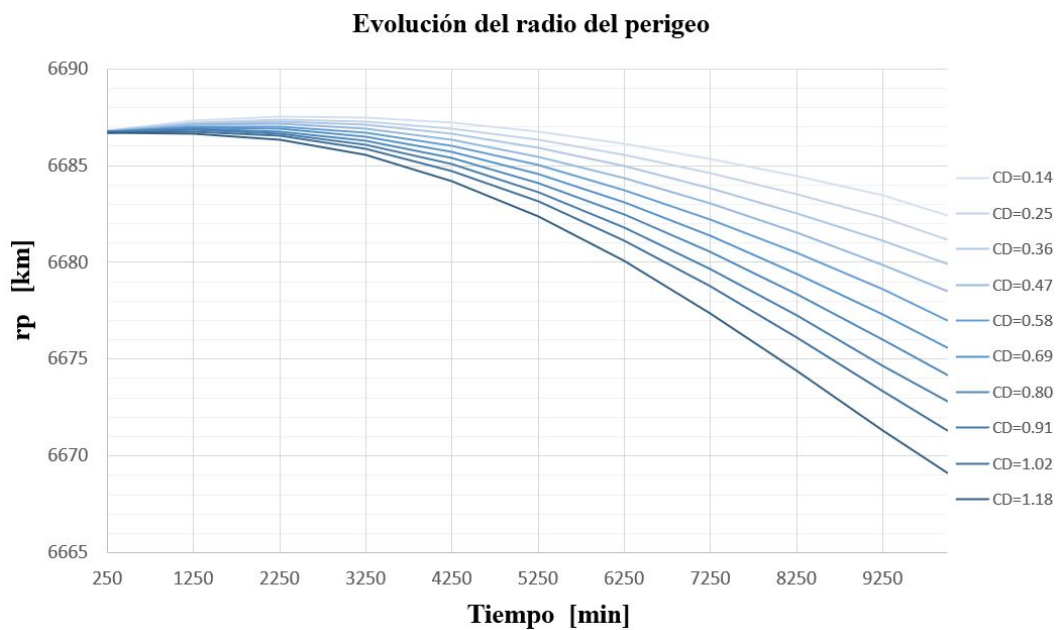


Figura 6.22. Evolución del radio del perigeo en función del C_D para órbita *LEO* baja

Evolución del periodo orbital

Por último, se analizará cuánto tiempo tarda el satélite en completar una órbita para distintos coeficientes de *drag*. Como es lógico, el periodo se reducirá si la órbita se hace más pequeña. Al disminuir el semieje mayor, la excentricidad y los radios del perigeo y apogeo, la tendencia será clara. En la figura 6.23, se puede ver cómo el periodo del satélite se acorta inmediatamente cuando el efecto de la resistencia comienza a ser notable. El satélite con menor C_D mantendrá un periodo más estable ya que su decaimiento se percibirá en días posteriores.

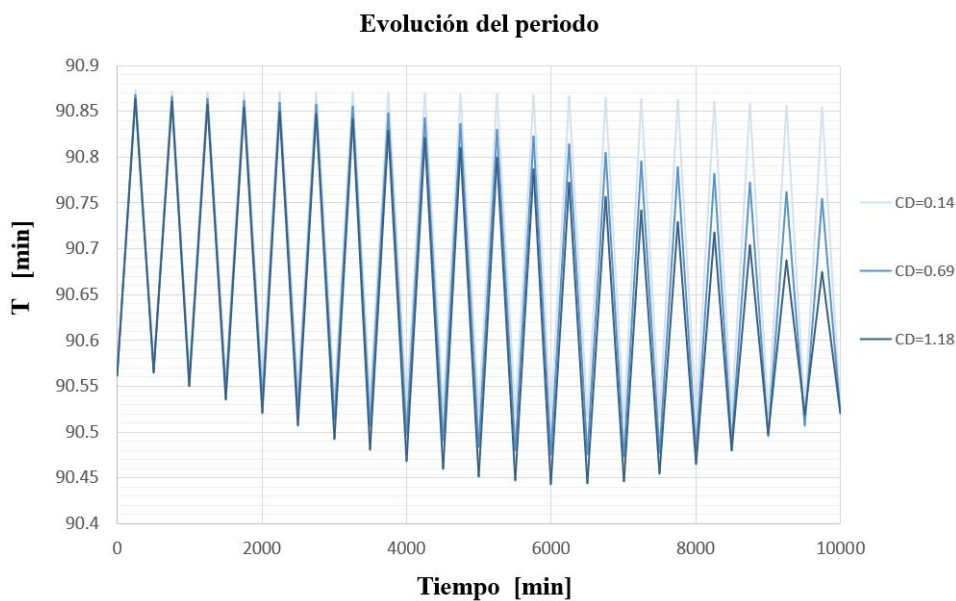


Figura 6.23. Oscilación del periodo para órbita *LEO* baja

Suavizando las curvas con valores concretos en cada instante, según la figura 6.24, se deduce que realmente el periodo varía relativamente poco. En una semana, el satélite con mayor C_D completará una órbita unos 11 segundos antes que el de menor C_D , por lo que todos ellos realizarán una vuelta completa a la Tierra en aproximadamente una hora y media.

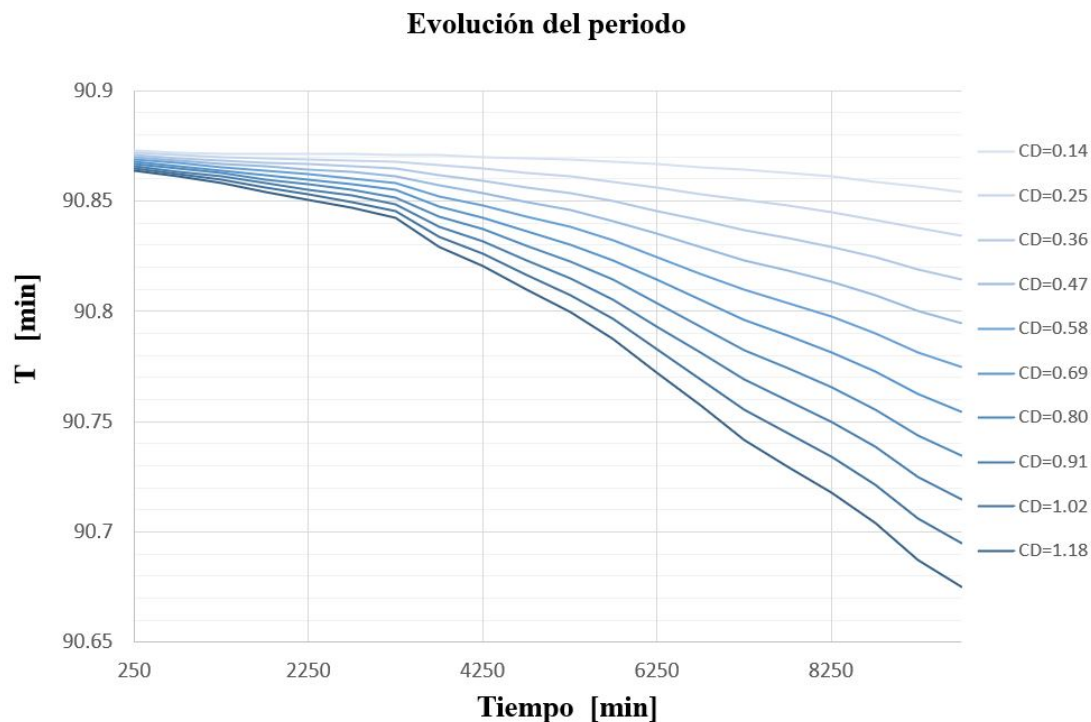


Figura 6.24. Evolución del periodo en función del C_D para órbita *LEO* baja

Representación en *STK*

Con todas las evoluciones representadas, se hará uso del software *STK* para poder visualizar mejor los resultados obtenidos en una simulación a tiempo real. Se representará la órbita en el instante inicial de un color y otras tres órbitas perturbadas con distinto C_D en el instante final (10000 minutos) con otros colores distintos.

En la tabla 6.2, se muestra la leyenda utilizada:

Elemento	Color
Vector Punto Aries	Rojo
Ecuador	Rojo
Primer meridiano	Rojo
Órbita inicial	Cian
Órbita final con $C_D = 0.14$	Amarillo
Órbita final con $C_D = 0.69$	Violeta
Órbita final con $C_D = 1.18$	Verde
Órbita final modelo SGP4	Blanco

Tabla 6.2. Leyenda para las representaciones en *STK*

En la figura 6.25 se representa la órbita inicial para *Aeolus*, en el día 3 de junio de 2021 a las 00:00 h. La dirección del punto vernal (en rojo), quedará siempre fija. En ese instante, la órbita tiene un argumento del perigeo cercano a los 180° , ya que el punto en el que su órbita intersecta el ecuador desde esta perspectiva es el nodo descendente. El nodo ascendente para *Aeolus* se encuentra en la cara opuesta del planeta.

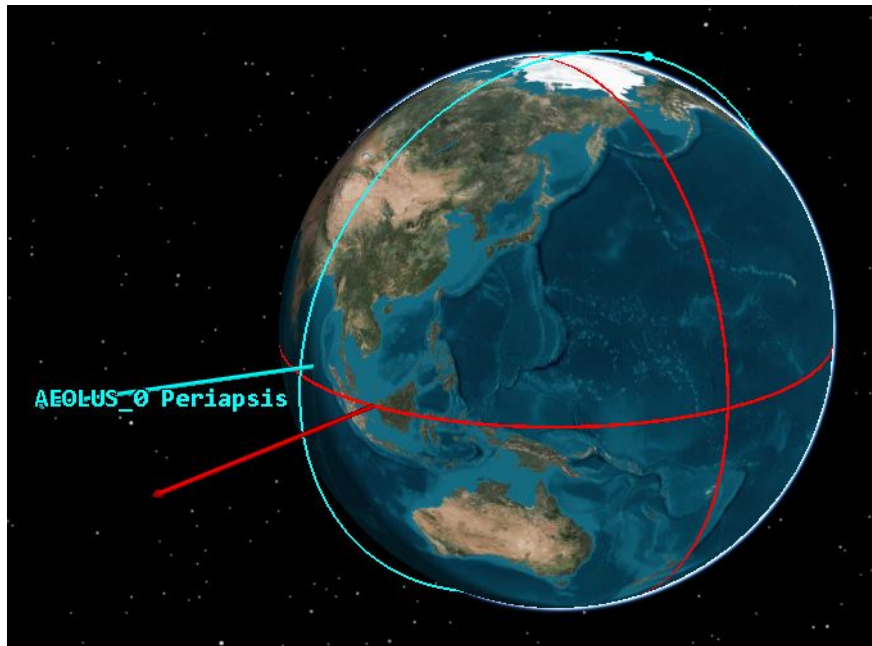


Figura 6.25. Visualización de la órbita inicial en *STK*

La gran diferencia aparece cuando se añaden los tres casos de órbita perturbada. A los 10000 minutos, las órbitas con influencia de *drag* se sitúan con una RAAN muy distinta a la órbita inicial. En la figura 6.26, no se aprecia a simple vista la diferencia de ascensión recta del nodo ascendente para los casos perturbados, pero al ampliar la imagen se puede comprobar que realmente existe separación entre ellos. Por otro lado, el argumento del perigeo (medido desde el nodo ascendente) se encuentra adelantado para los casos con mayor C_D . Como se anticipaba, las variaciones de los elementos a y e , al contrario que para Ω y ω , no se pueden comparar a simple vista puesto que el satélite tiene una excentricidad muy baja y el efecto de las perturbaciones, aunque es relevante, no se percibe a gran escala.

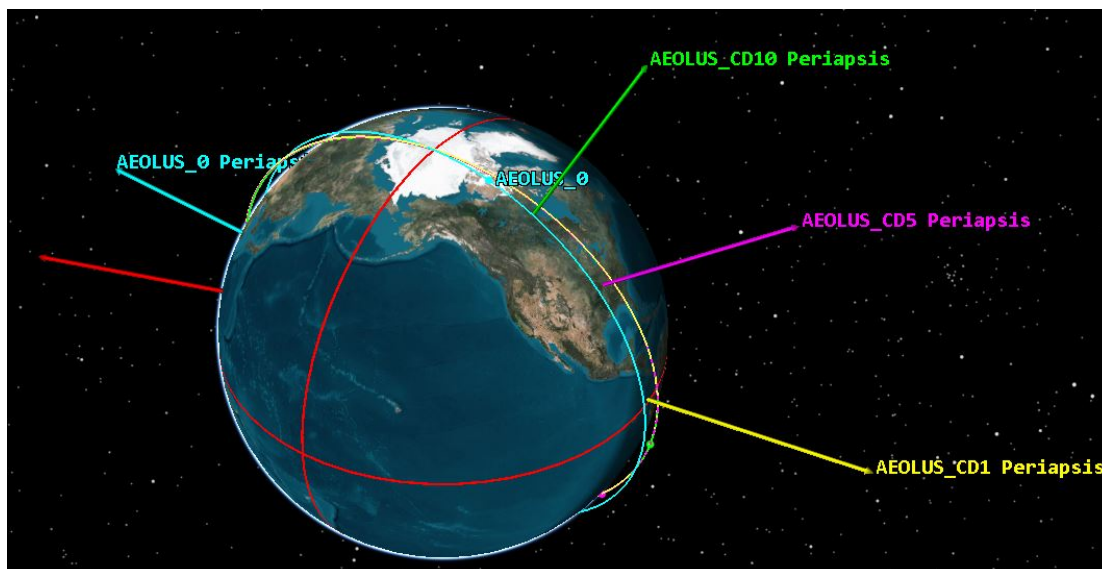


Figura 6.26. Visualización de las órbitas perturbadas en *STK*

A modo de validación, se ha utilizado el propagador propio del software *STK*. Este hace uso de los *TLE* actualizados para los distintos satélites de su catálogo. Se ha utilizado el modelo *SGP4*, el cual tiene en cuenta las perturbaciones relevantes para órbitas bajas, incluidos los efectos gravitatorios del Sol y la Luna. Es por ello por lo que la simulación del propagador de *STK* será ligeramente más precisa que el diseñado en este trabajo, aunque su tendencia será muy similar.

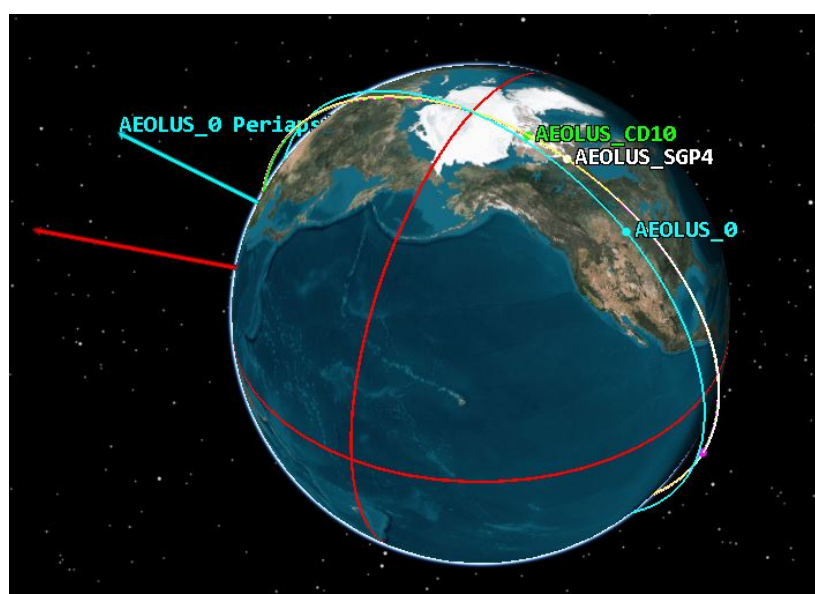


Figura 6.27. Visualización de las órbitas de ambos propagadores en *STK*

En la figura 6.27, se aprecia cómo la órbita en blanco simulada por *STK* durante 10000 minutos queda prácticamente superpuesta a las tres realizadas por el propagador diseñado. Además, en la figura 6.28, se consigue ver mucho mejor la inclinación de todas las órbitas. Como se ha demostrado, su variación es muy sutil, por lo que parece que tanto la órbita inicial como las perturbadas mantienen la misma inclinación con respecto al ecuador.

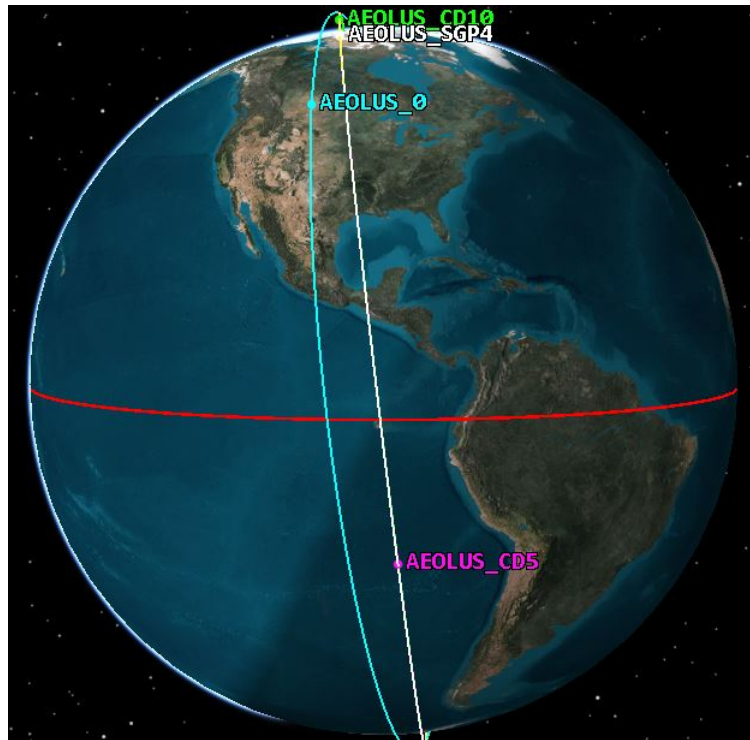


Figura 6.28. Visualización de la inclinación y la RAAN para todas las órbitas presentadas, en *STK*

La mayor diferencia visual es el cambio de ascensión recta del nodo ascendente. Una variación de 7° en una semana equivale a una distancia cercana a los 950 km, según la figura 6.29.

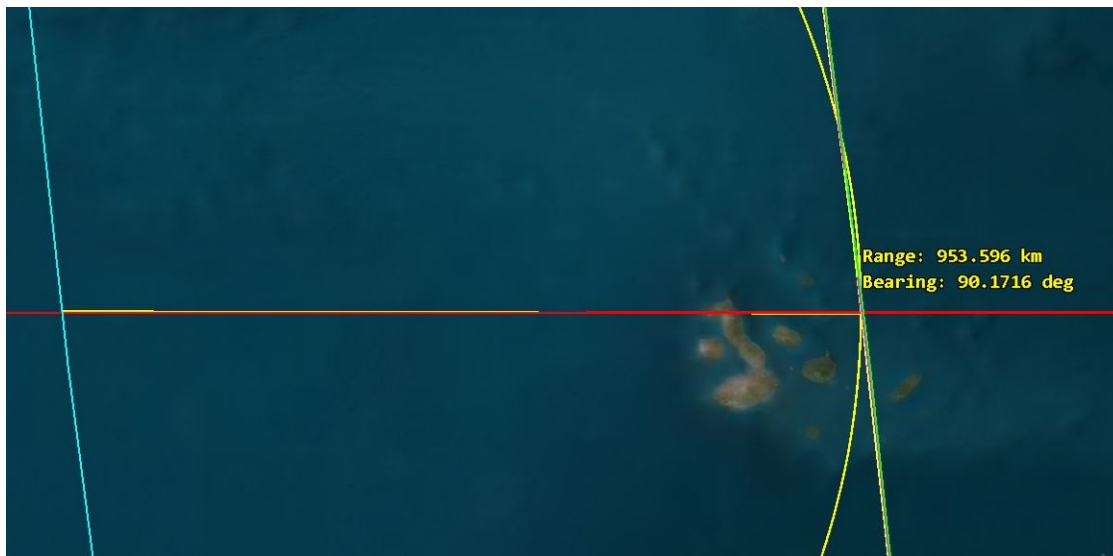


Figura 6.29. Visualización en *STK* de la variación de RAAN en km con respecto al instante inicial

Ampliando la imagen, se aprecia la diferencia (antes indistinguible) de la ascensión recta del nodo ascendente para las tres órbitas del propagador diseñado con distinto C_D . Como se había demostrado, la RAAN se adelanta para el satélite con mayor influencia de la resistencia aerodinámica. En el instante final, los satélites con menor y mayor *drag* tienen unos 19 km de separación.

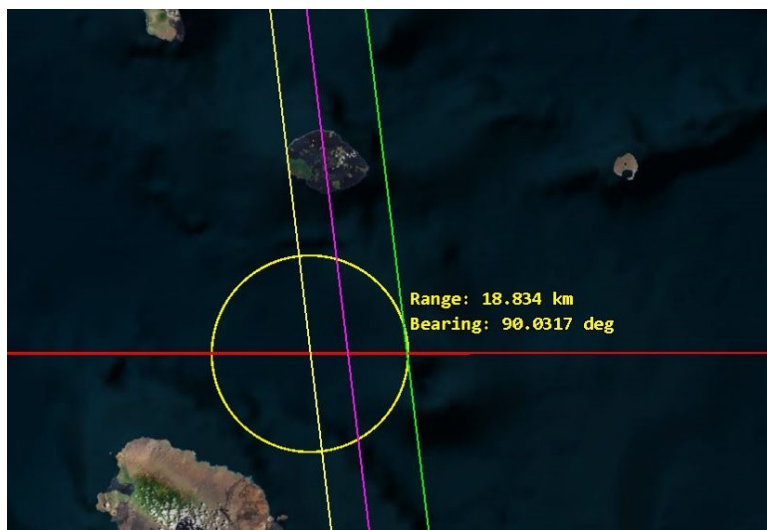


Figura 6.30. Visualización en *STK* de la variación de RAAN en km en el instante final

6.2.2. Efecto en una órbita *LEO* alta

Como se mencionaba en la sección de órbitas circulares, las órbitas pueden considerarse *LEO* hasta aproximadamente 2000 km de altitud. Para verificar el hecho de que la influencia de la atmósfera terrestre es bastante menor por encima de los 1000 km, se volverá a simular el propagador para el mismo satélite y los mismos coeficientes C_D , pero a una altitud mayor.

El vector estado inicial para este satélite en órbita *LEO* alta es:

$$\begin{aligned}\vec{r}_0 &= \begin{bmatrix} -1952.64 & 1620.55 & 7504.82 \end{bmatrix}^T \text{ km} \\ \vec{v}_0 &= \begin{bmatrix} 6.47583 & -1.99348 & 2.08761 \end{bmatrix}^T \text{ km/s}\end{aligned}\tag{6.6}$$

Lo que lo sitúa a una altitud de 1544 km. Cerca del límite para una órbita baja y por encima del límite en el que la influencia de la atmósfera comienza a decaer.

Evolución del semieje mayor

Para esta órbita *LEO* alta se omitirán las evoluciones oscilatorias de los elementos, por lo que solamente se representarán las curvas suavizadas con valores concretos para cada instante. En la figura 6.31 se puede ver la evolución a esperar, donde el semieje mayor permanece prácticamente constante durante los 10000 minutos. Es cerca del instante final cuando comienza a descender ligeramente (unos 2 km). Lo más relevante es que se puede apreciar la menor influencia de la resistencia aerodinámica ya que para todos los coeficientes de *drag* elegidos la evolución es la misma. Aún así, el satélite decae igualmente debido a las perturbación del achatamiento terrestre.

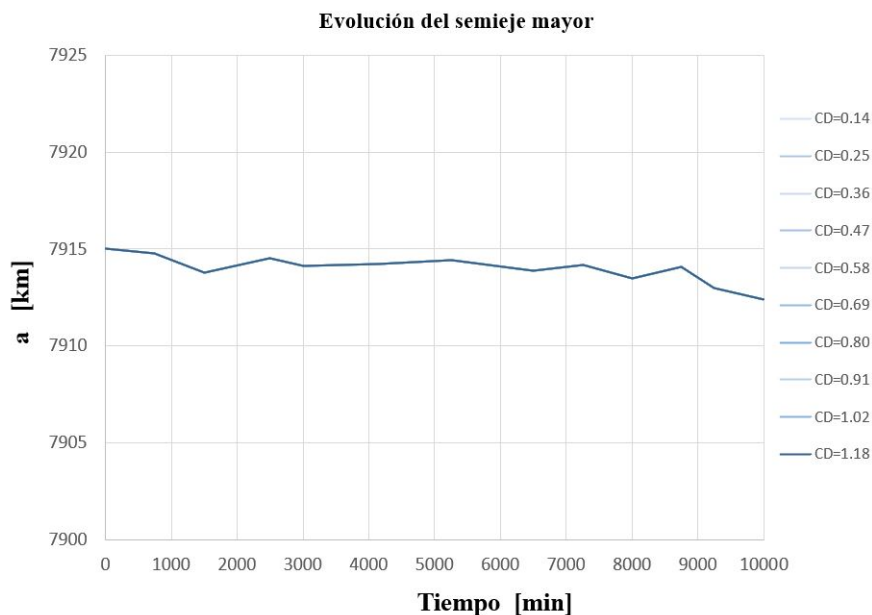


Figura 6.31. Evolución del semieje mayor en función del C_D para órbita *LEO* alta

Evolución de la excentricidad

Según la figura 6.32, el efecto del *drag* sigue siendo imperceptible. Como era de esperar, la excentricidad sigue una evolución equivalente al semieje mayor. Disminuye ligeramente en los días finales de la simulación debido a las perturbaciones de los armónicos zonales del planeta.

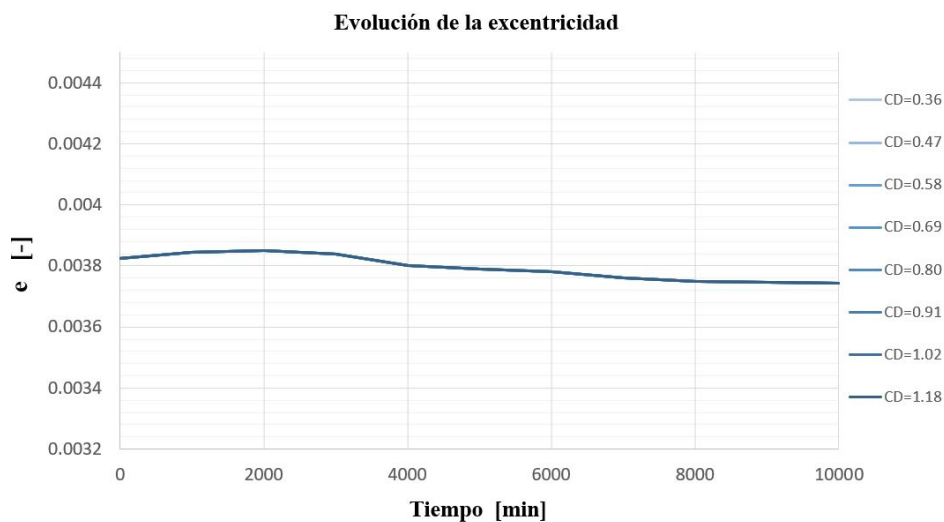


Figura 6.32. Evolución de la excentricidad en función del C_D para órbita *LEO* alta

Evolución de la inclinación

Si el efecto de las perturbaciones en la inclinación para una órbita *LEO* baja ya era muy sutil, a una altitud en la que el efecto del *drag* es nulo se percibirá menos, si cabe. En la figura 6.33, la inclinación se mantiene prácticamente constante para toda la simulación.

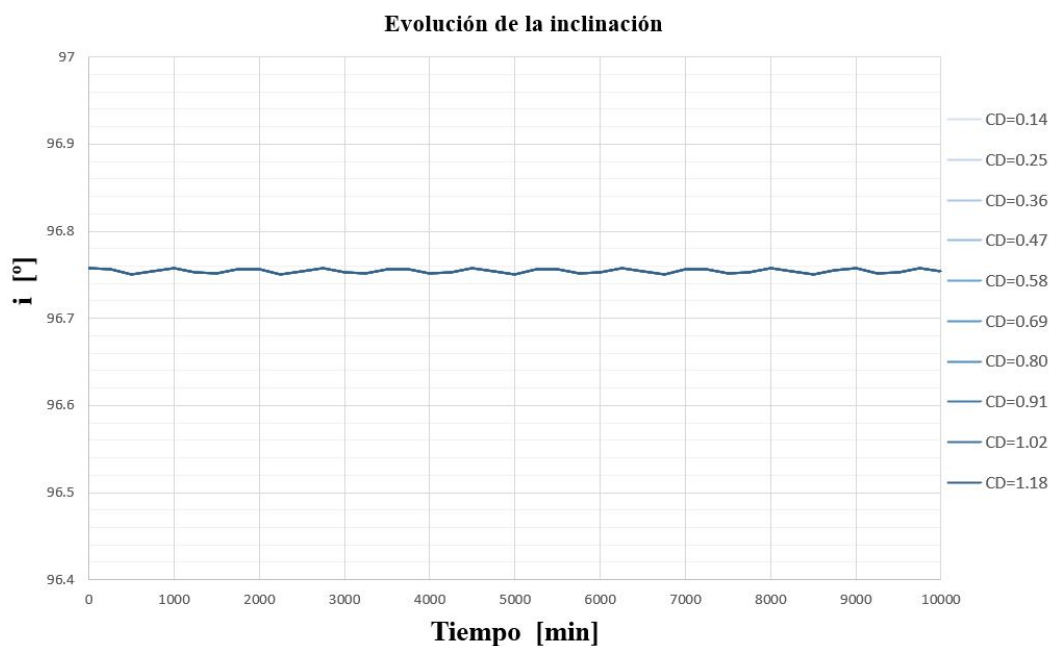


Figura 6.33. Evolución de la inclinación en función del C_D para órbita *LEO* alta

Evolución del argumento del perigeo

La evolución del argumento del perigeo probablemente es la menos intuitiva de todas. Bajo el efecto de las perturbaciones, su evolución es compleja, aunque al igual que en el caso de la órbita *LEO* baja, se repite en cada periodo. Se ha vuelto a representar la evolución de este elemento para una órbita *LEO* alta en la figura 6.34.

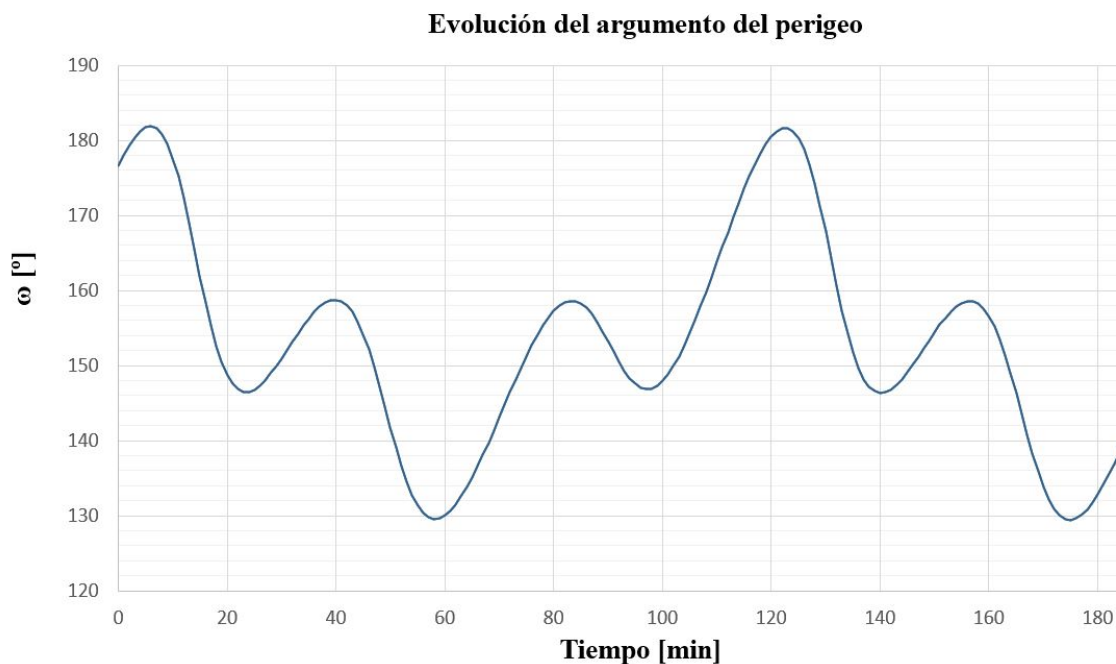


Figura 6.34. Oscilación que sufre el argumento del perigeo cada periodo para órbita *LEO* alta

Como puede verse, para la órbita de mayor altitud, este elemento oscila de manera diferente al caso anterior. Se producen varias oscilaciones en ambos sentidos con distintas amplitudes. Este patrón se repite constantemente para todo el periodo, el cual será mayor de 90 minutos al ser una órbita con mayor tamaño. En este caso no se produce la caída de la figura 6.15, en la que este elemento daba una vuelta completa a la Tierra hasta situarse de nuevo en la posición inicial.

Además, al contrario que en la órbita *LEO* baja, el argumento del perigeo sigue una evolución descendente con el tiempo (ver figura 6.35), lo cual significa que en cada periodo, las oscilaciones de la figura 6.34 evolucionarán hacia nodo ascendente. Lo más relevante es que el efecto de la resistencia aerodinámica parece modificar el patrón de la oscilación del argumento del perigeo en cada periodo, y también el sentido de su evolución con respecto al caso en el que el efecto del *drag* es muy bajo.

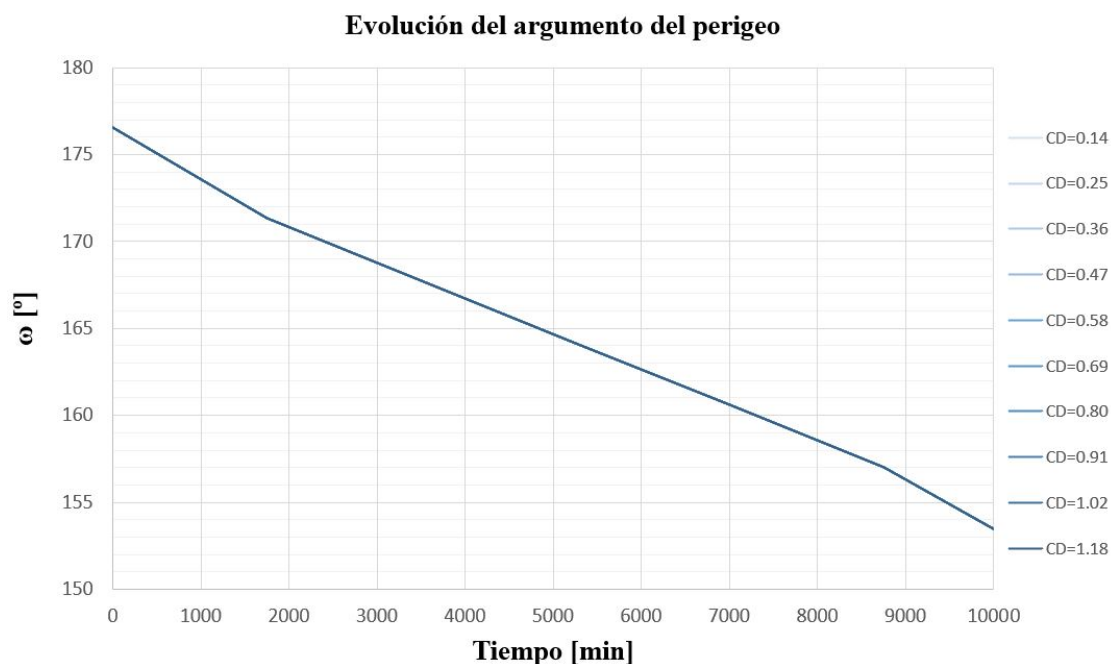


Figura 6.35. Evolución del argumento del perigeo en función del C_D para órbita *LEO* alta

Evolución de la RAAN

La evolución de la ascensión recta del nodo ascendente para este caso se muestra en la figura 6.36. A primera vista puede parecer muy parecida a la figura 6.20, sin embargo, en este caso el efecto del *drag* es imperceptible. La RAAN ya no varía en ningún decimal por lo que no habrá diferencia (por pequeña que sea) para ningún C_D . Lo curioso es que la evolución sigue siendo lineal, algo que también ocurría para el caso de la órbita *LEO* baja. Esto quiere decir que el mayor efecto producido en la RAAN es debido al achatamiento terrestre. El *drag*, como se puede ver en la figura 6.30, solamente provoca una diferencia de pocos kilómetros.

No obstante, este elemento alcanza un valor en el instante final varios grados por debajo del caso a menor altitud, y es que al alejarse de la Tierra, el efecto del achatamiento terrestre disminuye.

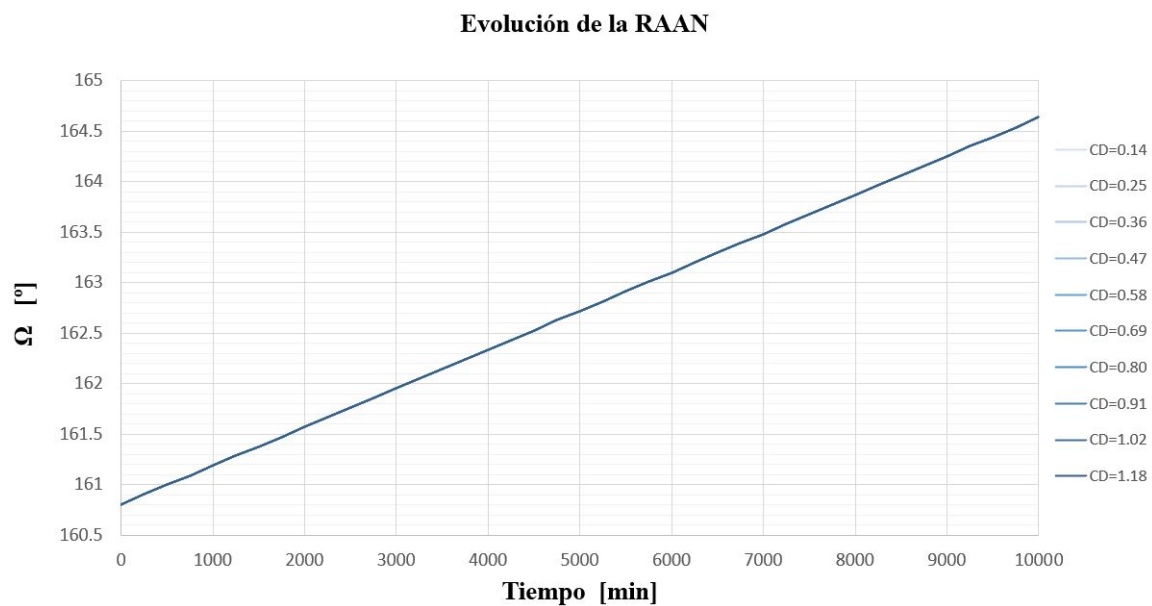


Figura 6.36. Evolución de la RAAN en función del C_D para órbita *LEO* alta

Evolución del radio del perigeo

Por último, se muestra en la figura 6.37 lo que le ocurre a la altitud mínima del satélite cuando el efecto del *drag* casi imperceptible.

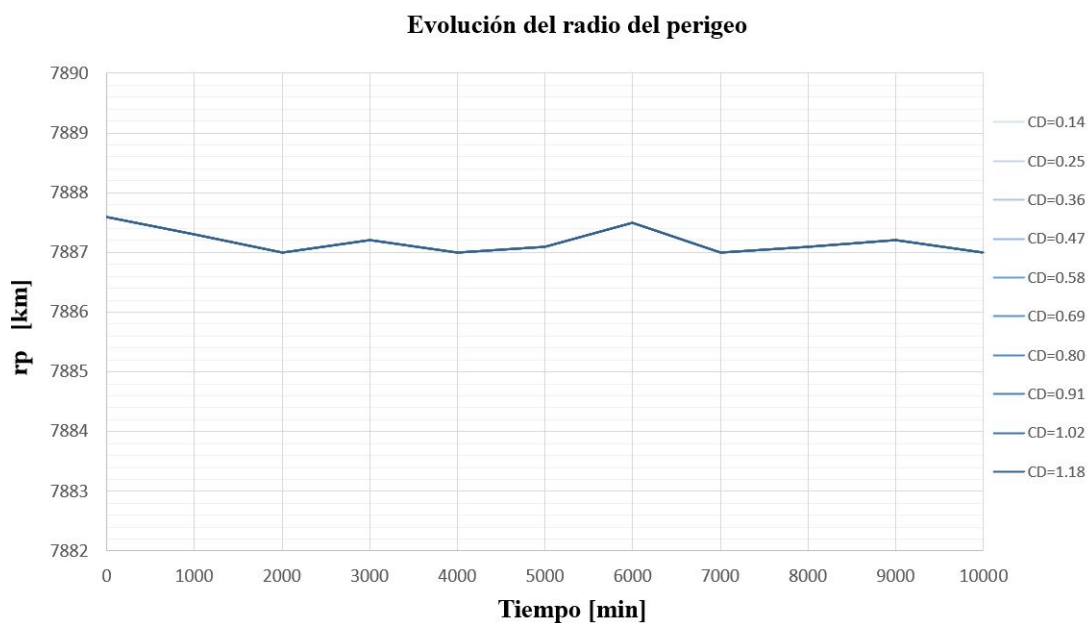


Figura 6.37. Evolución del radio del perigeo en función del C_D para órbita *LEO* alta

Siguiendo la misma tendencia que los elementos a y e , el radio del perigeo disminuye ligeramente al final de la simulación. El efecto de las variaciones del C_D es nulo y la órbita decae menos de 1 km debido únicamente al efecto de los armónicos zonales de la Tierra.

Representación en *STK*

Mediante el software *STK*, se mostrará en la figura 6.38 la evolución de la órbita *LEO* alta con respecto a la baja. La órbita de color cian en este caso será la órbita alta en el instante inicial, la de color amarillo será la órbita alta en el instante final y la verde seguirá siendo la órbita baja para el C_D máximo en el instante final.

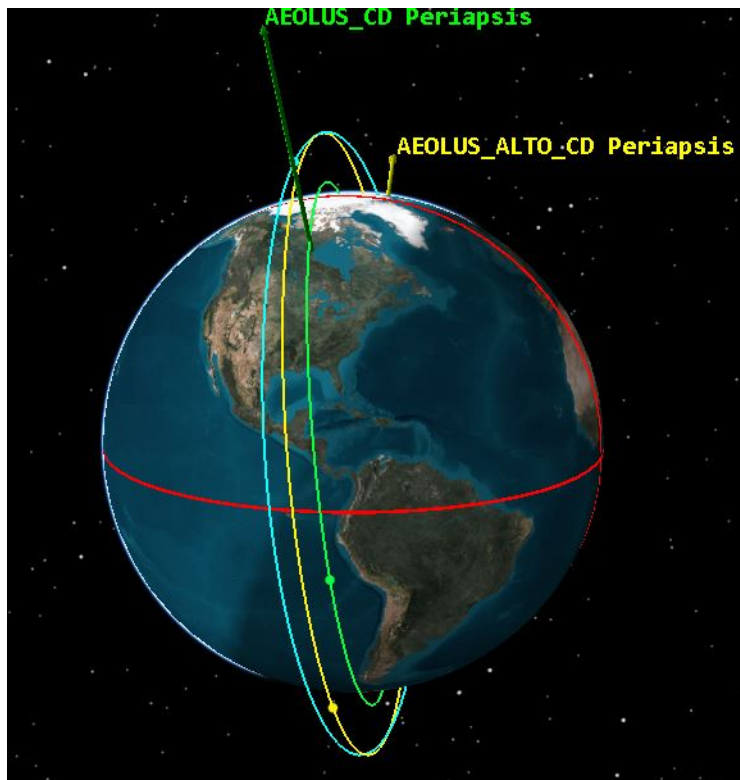


Figura 6.38. Visualización de las órbitas *LEO* alta y baja en *STK*

Se consigue apreciar la evolución de la RAAN con respecto al caso de la órbita baja. La órbita en amarillo se mantiene más cercana a la inicial. Los efectos del semieje mayor y la excentricidad siguen siendo imperceptibles a simple vista. La inclinación permanece constante. Como las variaciones del coeficiente de *drag* no afectan a la órbita alta, el argumento del perigeo no se puede comparar con otra órbita.

Capítulo 7

Conclusiones

En este proyecto se ha utilizado la teoría fundamental de la mecánica orbital con el fin de desarrollar un propagador capaz de simular la evolución de una órbita. Para ello, a la ecuación del movimiento de dos cuerpos, se le ha incorporado las perturbaciones debidas al achatamiento terrestre y la resistencia aerodinámica. Esta última perturbación es más notable cuanto más baja sea la altitud a la que orbita el satélite.

7.1. Conclusiones

Las conclusiones obtenidas tras el análisis de los resultados mediante el propagador diseñado son las siguientes:

- En el estudio de una órbita, se debe prestar especial atención a las potenciales perturbaciones existentes en función de la altitud a la que se encuentre el satélite. Una correcta estimación del orden de magnitud de estas perturbaciones permitirán decidir cuáles se pueden considerar despreciables manteniendo un error suficientemente bajo con respecto al caso real.
- Con los efectos del achatamiento terrestre y el *drag*, el propagador diseñado es capaz de mantener un error relativo para la posición del satélite inferior al 0.0029 % durante una semana, con respecto al propagador de *Horizons*. Para la velocidad, el error relativo es incluso menor.
- El coeficiente de *drag* de un satélite puede cambiar a lo largo de la órbita al modificar su geometría (abrir o cerrar sus paneles solares, por ejemplo) o su orientación con respecto al vector unitario de la velocidad relativa entre el propio satélite y la atmósfera.

- Los elementos orbitales, así como el periodo de la órbita y el radio del perigeo presentan una oscilación con amplitud variable en el tiempo debida a las perturbaciones mencionadas. A excepción de la ascensión recta del nodo ascendente, la cual evoluciona linealmente.
- El efecto de la resistencia aerodinámica se hace notable entre los 2 y los 4 días del comienzo de la simulación, dependiendo del C_D utilizado. Esto se ajusta a la advertencia que hace *Horizons*, en la cual se aconseja reducir el tiempo de integración a unos pocos días para minimizar el error en los casos de órbita baja.
- El semieje mayor, la excentricidad y el radio del perigeo decrecen en el tiempo, y cuanto mayor sea el C_D que tenga el satélite, antes aparece esta tendencia. La órbita con mayor resistencia decae unos 15 km en una semana, mientras que la órbita con menor C_D decae 6 km en el mismo tiempo. Esto influye directamente modificando el periodo de la órbita, reduciéndolo con el tiempo.
- La inclinación es el elemento orbital que menos se ve afectado por los cambios en el C_D , con una variación máxima de 5 milésimas de grado en una semana. Por el contrario, la RAAN presenta el cambio más notable de todos los elementos, variando más 900 km en una semana debido en mayor medida al achatamiento de la Tierra. El efecto del *drag* en este elemento orbital amplía esta tendencia con un orden de magnitud inferior.
- El efecto del *drag* en el argumento del perigeo es muy poco intuitivo y parece modificar el patrón de la oscilación seguida en cada periodo y el sentido en el que aumenta la amplitud de la misma con respecto al caso en el que la resistencia aerodinámica es imperceptible.
- La anomalía verdadera presenta un desfase en función de la resistencia aerodinámica ejercida sobre el satélite. Al reducirse el tamaño de la órbita por el *drag*, un satélite alcanzará el mismo ángulo θ en menor tiempo que aquellos con menor C_D .
- El efecto de la resistencia al avance es imperceptible en una órbita situada a 1500 km de altitud, por lo que el decaimiento de un satélite a esa altitud será más lento.

7.2. Trabajos futuros

El estudio realizado en este proyecto, aunque ha abarcado una parte considerable del trabajo que lleva diseñar un propagador preciso, se presta a nuevas ampliaciones de contenido y estudios más detallados que permitan generalizar los resultados obtenidos a una amplia variedad de casos.

En primer lugar, y a pesar de que la elección de las perturbaciones para la órbita baja estudiada en este trabajo parecen ser suficientes, lo óptimo sería añadir todas las perturbaciones existentes en una órbita terrestre (gravedad lunar y solar, radiación solar, etc.) sin importar la altitud a la que se encuentre. Estas, por poca influencia que puedan tener, harían que la precisión del propagador se acercase todavía más a la de *Horizons*.

La inclusión de nuevos modelos atmosféricos permitiría comparar el límite del efecto del *drag* en órbitas bajas para distintos casos, de modo que se consiga establecer un rango máximo de altitudes para cada modelo donde esta perturbación desaparece.

Un estudio más amplio de las órbitas de satélites reales podría verificar las tendencias de los elementos orbitales analizadas en este trabajo, donde se compararían órbitas *LEO* más excéntricas para satélites prógrados y retrógrados. Este nuevo estudio contribuiría a la generalización de las evoluciones de los elementos orbitales en función de la geometría de la órbita.

Además, este último estudio multipropósito podría confirmar las peculiaridades de la evolución del argumento del perigeo, en las que el *drag* parece jugar un papel muy importante.

Finalmente, se propone realizar un estudio que explique la naturaleza de las oscilaciones en los elementos orbitales para las órbitas elípticas y circulares, de tal forma que se contraste el hecho de que estas oscilaciones están relacionadas con la excentricidad.

Parte II

Presupuesto

Capítulo 1

Presupuesto

En este capítulo se presentarán los costes asociados a la realización de este proyecto, incluyendo el tiempo de uso de material informático, software utilizado y horas dedicadas a la consulta de profesores.

1.1. Desglose de costes unitarios

Debido a la depreciación que sufren los activos físicos con el paso del tiempo, se calcula el coste de amortización como:

$$a = \frac{V_C - V_R}{n_a} \quad (1.1)$$

$$t_h = \frac{a}{h} \quad (1.2)$$

Donde:

- a es la amortización en €/año
- V_C es el valor de compra en €
- V_R es el valor residual al cabo del periodo de amortización en €
- n_a es el periodo de amortización en años
- t_h es la tasa horaria en €/h
- h es el tiempo de trabajo al año en h

Para calcular la tasa horaria, se han considerado 35 h de trabajo semanales durante las semanas no festivas de cada año. Se consideran 46 semanas no festivas, que hacen un total de:

$$t = 46 \times 35 = 1610 \text{ h/año} \quad (1.3)$$

Equipo informático

▪ Ordenador personal

EL ordenador personal utilizado en la realización de este trabajo tiene las siguientes características:

- Modelo: PC Asus ® X550VX
- Procesador: Intel ® Core ™ i5-6300HQ con 4 núcleos a 2.3 GHz
- Sistema operativo: Microsoft ® Windows 10
- Arquitectura: 64 bits
- RAM: 8 GB
- HDD: 1 TB
- Tarjeta gráfica: NVIDIA GeForce GTX 950M

El precio de compra V_C se sitúa en 750€, a un periodo de amortización de 5 años y un valor residual V_R del 20%.

$$a = \frac{V_C - V_R}{n_a} = \frac{750 - 120}{5} = 126 \text{ €/año} \quad (1.4)$$

$$t_h = \frac{a}{h} = \frac{126}{1610} = 0.0783 \text{ €/h} \quad (1.5)$$

Sotware

- MATLAB ® R2020a

La licencia de MATLAB (paquete básico) para instituciones universitarias se tasa en 500 €. Cada *toolbox* tiene un cose variable (200 – 500 €) y se ha contabilizado la *symbolic toolbox*.

$$t_h = \frac{700}{1610} = 0.43 \text{ €/h} \quad (1.6)$$

- AGI ® Systems Tool Kit (STK) 12

La licencia de STK para estudiante universitario es gratuita.

- Paquete Microsoft ® Office 2016

La licencia del paquete de Office cuesta 69 €/año.

$$t_h = \frac{69}{1610} = 0.04 \text{ €/h} \quad (1.7)$$

- TexLive 3.1415926

Las distribuciones de paquetes de L^AT_EX son todas gratuitas

- TexMaker 4.1

Se trata de software de licencia gratuita

Lugar de trabajo

Se contempla el coste de alquiler de un piso compartido en Valencia, precio que ronda los 900€ mensuales. Como el piso es compartido con otras 2 personas, mensualmente resultará en unos 300€. La duración del proyecto se ha estimado en aproximadamente 6 meses de duración; por lo que el coste total será de 1800€.

Material de oficina

En cuanto al material de oficina usado, se ha comprado un paquete de 500 folios cuyo valor se estima por 3€, junto con tres bolígrafos de 1.3€.

Coste de personal

- Estudiante universitario. El alumno que ha realizado este proyecto le ha dedicado 6 meses, con un total de 360 horas contabilizadas. Su tasa horaria es de:

$$t_h = 13.00 \text{ €/h} \quad (1.8)$$

- Titular de universidad. Los profesores, por su parte, han concedido horas de tutoría una vez por semana; durante 24 semanas. Con una media de 0.75 h por tutoría. Además, han dedicado varias horas a la corrección del trabajo y a la búsqueda de cierta información. La tasa horaria para cada profesor es de:

$$t_h = 45.00 \text{ €/h} \quad (1.9)$$

1.2. Presupuesto total

Concepto	Periodo (h)	Tasa horaria (€/h)	Importe bruto (€)	IVA (21 %)	Importe (€)
EQUIPOS Y SOFTWARE					
Ordenador	360	0.07	25.20	5.29	30.49
MATLAB	360	0.43	154.80	32.50	187.30
Office	360	0.04	14.40	3.02	17.42
Subtotales			194.40	40.81	235.21
PERSONAL					
Estudiante	360	13.00	4680.00	982.00	5662.80
Profesores	35	45.00	1575.00	330.75	1905.75
Subtotales			6255.00	1312.75	7568.55
OFICINA					
Material			6.9	1.45	8.35
Alquiler			1800	378	2178
Subtotales			1806.90	379.45	2186.35

TOTAL BRUTO	8256.30 €
IVA (21 %)	1733.01 €
TOTAL	9990.11 €

El presupuesto total del proyecto asciende a:

NUEVE MIL NOVECIENTOS NOVENTA EUROS CON ONCE CÉNTIMOS.

Parte III

Pliego de Condiciones

Capítulo 1

Condiciones generales

En la elaboración de cualquier proyecto en el que sea necesario el uso de pantallas de visualización de datos (PVD) existen, al igual que en cualquier otro proyecto, riesgos que puedan afectar a la salud tanto mental como física del proyectista. En el caso concreto de este tipo de proyectos, la salud ocular, lesiones en articulaciones, jaquecas y el estrés son los más comunes. Para poder minimizar estos riesgos, es necesario regular las condiciones de trabajo bajo las que se realice. En el Real Decreto 488/1997 del 14 de Abril [27] sobre disposiciones mínimas de seguridad y salud relativas al trabajo con equipos que incluyen pantallas de visualización de datos, donde se aplican las disposiciones de Ley 31/1995, de 8 de noviembre de Prevención de Riesgos Laborales, se reúne toda la normativa relacionada con este tipo de actividad.

De entre las variables que pueden afectar al usuario, se destacan:

- El esfuerzo físico necesario, debido a posiciones inestables, y en general riesgos dorsolumbares.
- Las características del medio de trabajo, incluyendo el espacio de trabajo, condiciones del suelo, puntos de apoyo inestables.
- Exigencias de la actividad, debidas a un ritmo impuesto por un proceso que el trabajador no pueda modular.
- Factores individuales de riesgo, siendo principalmente inadecuación de las ropas, o insuficiencia de los conocimientos o de la formación.

Se pueden clasificar los posibles riesgos a los que se somete el trabajador de este tipo de proyectos en:

- **Seguridad:** debido a contactos eléctricos, caídas o golpes en el puesto de trabajo.

- **Higiene industrial:** comprende las condiciones de trabajo ruidosas, termohigrométricas como temperatura, humedad así como la presencia de bacterias nocivas y/o transmisión de virus.
- **Ergonomía:** daños ocasionados por la fatiga física y/o mental como picores, percepción borrosa, ansiedad, irritabilidad o insomnio.

1.1. Real Decreto 488/1997 del 14 de abril

Artículo 1. Objeto.

1. El presente Real Decreto establece las disposiciones mínimas de seguridad y de salud para la utilización por los trabajadores de equipos que incluyan pantallas de visualización.
2. Las disposiciones de la Ley 31/1995. de 8 de noviembre, de Prevención de Riesgos Laborales, se aplicarán plenamente al conjunto del ámbito contemplado en el apartado anterior.
3. Quedan excluidos del ámbito de aplicación de este Real Decreto:
 - a) Los puestos de conducción de vehículos o máquinas.
 - b) Los sistemas informáticos embarcados en un medio de transporte.
 - c) Los sistemas informáticos destinados prioritariamente a ser utilizados por el público.
 - d) Los sistemas llamados portátiles, siempre y cuando no se utilicen de modo continuado en un puesto de trabajo.
 - e) Las calculadoras, cajas registradoras y todos aquellos equipos que tengan un pequeño dispositivo de visualización de datos o medidas necesario para la utilización directa de dichos equipos.
 - f) Las máquinas de escribir de diseño clásico, conocidas como máquinas de ventanilla.

Artículo 2. Definiciones.

A efectos de este Real Decreto se entenderá por:

1. Pantalla de visualización: una pantalla alfanumérica o gráfica, independientemente del método de representación visual utilizado.
2. Puesto de trabajo: el constituido por un equipo con pantalla de visualización provisto, en su caso, de un teclado o dispositivo de adquisición de datos, de un programa para la interconexión persona/máquina, de accesorios ofimáticos y de un asiento y mesa o superficie de trabajo, así como el entorno laboral inmediato.
3. Trabajador: cualquier trabajador que habitualmente y durante una parte relevante de su trabajo normal utilice un equipo con pantalla de visualización.

Artículo 3. Obligaciones generales del empresario.

1. El empresario adoptará las medidas necesarias para que la utilización por los trabajadores de equipos con pantallas de visualización no suponga riesgos para su seguridad o salud o, si ello no fuera posible, para que tales riesgos se reduzcan al mínimo.

En cualquier caso, los puestos de trabajo a que se refiere el presente Real Decreto deberán cumplir las disposiciones mínimas establecidas en el anexo del mismo.

2. A efectos de lo dispuesto en el primer párrafo del apartado anterior, el empresario deberá evaluar los riesgos para la seguridad y salud de los trabajadores, teniendo en cuenta en particular los posibles riesgos para la vista y los problemas físicos y de carga mental, así como el posible efecto añadido o combinado de los mismos.

La evaluación se realizará tomando en consideración las características propias del puesto de trabajo y las exigencias de la tarea y entre estas, especialmente, las siguientes:

- a) El tiempo promedio de utilización diaria del equipo.
 - b) El tiempo máximo de atención continua a la pantalla requerido por la tarea habitual.
 - c) El grado de atención que exija dicha tarea.
3. Si la evaluación pone de manifiesto que la utilización por los trabajadores de equipos con pantallas de visualización supone o puede suponer un riesgo para

su seguridad o salud, el empresario adoptará las medidas técnicas u organizativas necesarias para eliminar o reducir el riesgo al mínimo posible. En particular, deberá reducir la duración máxima del trabajo continuado en pantalla, organizando la actividad diaria de forma que esta tarea se alterne con otras o estableciendo las pausas necesarias cuando la alternancia de tareas no sea posible o no baste para disminuir el riesgo suficientemente.

4. En los convenios colectivos podrá acordarse la periodicidad, duración y condiciones de organización de los cambios de actividad y pausas a que se refiere el apartado anterior.

Artículo 4. Vigilancia de la salud.

1. El empresario garantizará el derecho de los trabajadores a una vigilancia adecuada de su salud, teniendo en cuenta en particular los riesgos para la vista y los problemas físicos y de carga mental, el posible efecto añadido o combinado de los mismos, y la eventual patología acompañante. Tal vigilancia será realizada por personal sanitario competente y según determinen las autoridades sanitarias en las pautas y protocolos que se elaboren, de conformidad con lo dispuesto en el apartado 3 del artículo 37 del Real Decreto 39/1997, de 17 de enero, por el que se aprueba el Reglamento de los servicios de prevención. Dicha vigilancia deberá ofrecerse a los trabajadores en las siguientes ocasiones:
 - a) Antes de comenzar a trabajar con una pantalla de visualización.
 - b) Posteriormente, con una periodicidad ajustada al nivel de riesgo a juicio del médico responsable.
 - c) Cuando aparezcan trastornos que pudieran deberse a este tipo de trabajo.
2. Cuando los resultados de la vigilancia de la salud a que se refiere el apartado 1 lo hiciese necesario, los trabajadores tendrán derecho a un reconocimiento oftalmológico.
3. El empresario proporcionará gratuitamente a los trabajadores dispositivos correctores especiales para la protección de la vista adecuados al trabajo con el equipo de que se trate, si los resultados de la vigilancia de la salud a que se refieren los apartados anteriores demuestran su necesidad y no pueden utilizarse dispositivos correctores normales.

Artículo 5. Obligaciones en materia de información y formación.

1. El empresario proporcionará gratuitamente a los trabajadores dispositivos correctores especiales para la protección de la vista adecuados al trabajo con el equipo de que se trate, si los resultados de la vigilancia de la salud a que se refieren los apartados anteriores demuestran su necesidad y no pueden utilizarse dispositivos correctores normales.
2. El empresario deberá informar a los trabajadores sobre todos los aspectos relacionados con la seguridad y la salud en su puesto de trabajo y sobre las medidas llevadas a cabo de conformidad con lo dispuesto en los artículos 3 y 4 de este Real Decreto.
3. El empresario deberá garantizar que cada trabajador reciba una formación adecuada sobre las modalidades de uso de los equipos con pantallas de visualización, antes de comenzar este tipo de trabajo y cada vez que la organización del puesto de trabajo se modifique de manera apreciable.

Artículo 6. Consulta y participación de los trabajadores.

La consulta y participación de los trabajadores o sus representantes sobre las cuestiones a que se refiere este Real Decreto se realizarán de conformidad con lo dispuesto en el apartado 2 del artículo 18 de la Ley de Prevención de Riesgos Laborales.

Disposición transitoria única. *Plazo de adaptación de los equipos que incluyan pantallas de visualización.*

Los equipos que incluyan pantallas de visualización puestos a disposición de los trabajadores en la empresa o centro de trabajo con anterioridad a la fecha de entrada en vigor del presente Real Decreto deberán ajustarse a los requisitos establecidos en el anexo en un plazo de doce meses desde la citada entrada en vigor.

Disposición final primera. *Elaboración de la Guía Técnica para la evaluación y prevención de riesgos.*

El Instituto Nacional de Seguridad e Higiene en el Trabajo, de acuerdo con lo dispuesto en el apartado 3 del artículo 5 del Real Decreto 39/1997, de 17 de enero,

por el que se aprueba el Reglamento de los Servicios de Prevención, elaborará y mantendrá actualizada una Guía Técnica para la evaluación y prevención de los riesgos relativos a la utilización de equipos que incluyan pantallas de visualización.

Disposición final segunda. *Habilitación normativa.*

Se autoriza al Ministro de Trabajo y Asuntos Sociales para dictar, previo informe de la Comisión Nacional de Seguridad y Salud en el Trabajo, las disposiciones necesarias en desarrollo de este Real Decreto y, específicamente, para proceder a la modificación del anexo del mismo para aquellas adaptaciones de carácter estrictamente técnico en función del progreso técnico, de la evolución de las normativas o especificaciones internacionales o de los conocimientos en el área de los equipos que incluyan pantallas de visualización.

Dado en Madrid a 14 de abril de 1997.

JUAN CARLOS R.

El Ministro de Trabajo y Asuntos Sociales.

JAVIER ARENAS BOCANEGRA

ANEXO. Disposiciones mínimas.

Observación preliminar: las obligaciones que se establecen en el presente anexo se aplicarán para alcanzar los objetivos del presente Real Decreto en la medida en que, por una parte, los elementos considerados existan en el puesto de trabajo y, por otra, las exigencias o características intrínsecas de la tarea no se opongan a ello.

En la aplicación de lo dispuesto en el presente anexo se tendrán en cuenta, en su caso, los métodos o criterios a que se refiere el apartado 3 del artículo 5 del Real Decreto de los Servicios de Prevención.

1. Equipo:

a) Observación general.

La utilización en sí misma del equipo no debe ser una fuente de riesgo para los trabajadores.

b) Pantalla.

Los caracteres de la pantalla deberán estar bien definidos y configurados de forma clara, y tener una dimensión suficiente, disponiendo de un espacio adecuado entre los caracteres y los renglones.

La imagen de la pantalla deberá ser estable, sin fenómenos de destellos, centelleos u otras formas de inestabilidad.

El usuario de terminales con pantalla deberá poder ajustar fácilmente la luminosidad y el contraste entre los caracteres y el fondo de la pantalla, y adaptarlos fácilmente a las condiciones del entorno.

La pantalla deberá ser orientable e inclinable a voluntad, con facilidad para adaptarse a las necesidades del usuario.

Podrá utilizarse un pedestal independiente o una mesa regulable para la pantalla. La pantalla no deberán tener reflejos ni reverberaciones que puedan molestar al usuario.

c) Teclado.

El teclado deberá ser inclinable e independiente de la pantalla para permitir que el trabajador adopte una postura cómoda que no provoque cansancio en los brazos o las manos.

Tendrá que haber espacio suficiente delante del teclado para que el usuario pueda apoyar los brazos y las manos.

La superficie del teclado deberá ser mate para evitar los reflejos. La disposición del teclado y las características de las teclas deberán tender a facilitar su utilización.

e Los símbolos de las teclas deberán resaltar suficientemente y ser legibles desde la posición normal de trabajo.

d) Mesa o superficie de trabajo.

La mesa o superficie de trabajo deberán ser poco reflectantes, tener dimensiones suficientes y permitir una colocación flexible de la pantalla, del teclado, de los documentos y del material accesorio.

El soporte de los documentos deberá ser estable y regulable y estará colocado de tal modo que se reduzcan al mínimo los movimientos incómodos de la cabeza y los ojos.

El espacio deberá ser suficiente para permitir a los trabajadores una posición cómoda.

e) Asiento de trabajo

El asiento de trabajo deberá ser estable, proporcionando al usuario libertad de movimiento y procurándole una postura confortable.

La altura del mismo deberá ser regulable. El respaldo deberá ser reclinable y su altura ajustable.

Se pondrá un reposapiés a disposición de quienes lo deseen.

2. Entorno

a) Espacio.

El puesto de trabajo deberá tener una dimensión suficiente y estar acondicionado de tal manera que haya espacio suficiente para permitir los cambios de postura y movimientos de trabajo.

b) Iluminación.

La iluminación general y la iluminación especial (lámparas de trabajo), cuando sea necesaria, deberán garantizar unos niveles adecuados de iluminación y unas relaciones adecuadas de luminancias entre la pantalla y su entorno, habida cuenta del carácter del trabajo, de las necesidades visuales del usuario y del tipo de pantalla utilizado.

El acondicionamiento del lugar de trabajo y del puesto de trabajo, así como la situación y las características técnicas de las fuentes de luz artificial, deberán coordinarse de tal manera que se eviten los deslumbramientos y los reflejos molestos en la pantalla u otras partes del equipo.

c) Reflejos y deslumbramientos.

Los puestos de trabajo deberán instalarse de tal forma que las fuentes de luz, tales como ventanas y otras aberturas, los tabiques transparentes o translúcidos y los equipos o tabiques de color claro no provoquen deslumbramiento directo ni produzcan reflejos molestos en la pantalla.

Las ventanas deberán ir equipadas con un dispositivo de cobertura adecuado y regulable para atenuar la luz del día que ilumine el puesto de trabajo.

d) Ruido. El ruido producido por los equipos instalados en el puesto de trabajo deberá tenerse en cuenta al diseñar el mismo, en especial para que no se perturbe la atención ni la palabra.

e) Calor.

Los equipos instalados en el puesto de trabajo no deberán producir un calor adicional que pueda ocasionar molestias a los trabajadores.

f) Emisiones.

Toda radiación, excepción hecha de la parte visible del espectro electromagnético, deberá reducirse a niveles insignificantes desde el punto de vista de la protección de la seguridad y de la salud de los trabajadores.

g) Humedad.

Deberá crearse y mantener una humedad aceptable.

3. Interconexión ordenador/persona Para la elaboración, la elección, la compra y la modificación de programas, así como para la definición de las tareas que requieran pantallas de visualización, el empresario tendrá en cuenta los siguientes factores:

- a)* El programa habrá de estar adaptado a la tarea que deba realizarse.
- b)* El programa habrá de ser fácil de utilizar y deberá, en su caso, poder adaptarse al nivel de conocimientos y de experiencia del usuario; no deberá utilizarse ningún dispositivo cuantitativo o cualitativo de control sin que los trabajadores hayan sido informados y previa consulta con sus representantes.
- c)* Los sistemas deberán proporcionar a los trabajadores indicaciones sobre su desarrollo.
- d)* Los sistemas deberán mostrar la información en un formato y a un ritmo adaptados a los operadores.
- e)* Los principios de ergonomía deberán aplicarse en particular al tratamiento de la información por parte de la persona.

Capítulo 2

Especificaciones técnicas

Puesto que este trabajo está basado en simulaciones con programas software y la parte experimental es nula, no son necesarios equipos demasiado complejos, materiales, ropa de protección o espacios de trabajo amplios. Únicamente se necesita hardware informático, software, conexión de red, conocimientos ingenieriles relacionados con la astrodinámica y programación, experiencia con equipos informáticos, bibliografía relacionada y personal cualificado para la supervisión del proyecto. A continuación se expondrán los requisitos establecidos.

2.1. Especificaciones de materiales y equipos

Estas especificaciones se dividirán en siete subapartados:

2.1.1. Hardware

Para la realización de las distintas simulaciones del propagador y poder extraer los datos necesarios para este estudio, se ha utilizado una única estación de cálculo. Tanto para los cálculos y simulaciones como para la redacción de la memoria se hizo uso del ordenador personal PC Asus ®X550VX.

2.1.2. Software

Además del hardware, se ha utilizado diversos programas:

- MATLAB ®R2020a
- AGI ®Systems Tool Kit (STK) 12

- Paquete Microsoft ® Office 2016
- Distribución L^AT_EX: TexLive
- Editor de L^AT_EX: TexMaker
- Sistema operativo Microsoft ® Windows 10

2.1.3. Conexión a internet

Para la elaboración del proyecto ha sido necesaria una conexión de red inalámbrica instalada en la vivienda.

2.1.4. Conocimientos previos

Se recomienda una base de conocimientos sobre la mecánica orbital, mecánica clásica del sólido rígido y programación en cualquier lenguaje.

La combinación de estos conocimientos permite la ejecución y análisis de un propagador programado haciendo uso de las ecuaciones del marco teórico.

2.1.5. Conocimientos informáticos

La principal dificultad en cuanto a la programación se refiere radica en tener una habilidad previa para, mediante un código principal, poder leer, modificar y guardar distintos tipos de datos en otros programas de manera automática. Para ello, es preciso conocer de manera detallada el lenguaje de programación propio de MATLAB ® y los comandos rápidos del paquete Office.

Además es de gran ayuda tener una familiarización previa con los sitios web de búsqueda de datos *CelesTrak* y *Horizons*. Sus interfaces son intuitivas, pero la correcta modificación con agilidad de los datos de búsqueda requiere una inversión de tiempo previa.

2.1.6. Material adicional

El uso de L^AT_EX y su manipulación también requiere cierto tiempo de aprendizaje. Para poder utilizar muchas de sus funciones se suele recurrir a los manuales de ayuda

y artículos educativos disponibles en internet.

2.1.7. Supervisión

Los supervisores encargados de la dirección del proyecto deberán tener una experiencia demostrada y contrastada en la ejecución de proyectos relacionados con la mecánica orbital. Además, un porcentaje importante, al menos de un 90 % de dichos proyectos deberán haber sido llevados a cabo de forma satisfactoria tanto en lo que a plazos, presupuesto, cumplimiento de especificaciones y aceptación por parte del cliente se refiere.

2.2. Condiciones de calidad

La empresa encargada de la realización del proyecto ha de poder garantizar la calidad del producto final. Por este motivo se tendrá en cuenta la calidad de los proyectos realizados por dicha empresa en ocasiones anteriores. En particular, se valorará que la empresa disponga del certificado de calidad ISO-9001. La empresa deberá realizar pruebas intermedias a lo largo del proceso de desarrollo del proyecto. Durante la programación se probarán cada una de las funciones o rutinas para detectar errores de codificación. Después se realizarán pruebas para comprobar que cumplen las funciones previstas. Finalmente, se realizarán las pruebas de aceptación con el sistema completamente integrado. Tanto el sistema de calidad de la empresa como el proceso de pruebas y sus resultados deberán estar debidamente documentados. Particularmente, se deberá presentar un registro impreso en el que se recojan las pruebas llevadas a cabo, indicando título de la prueba, descripción, entorno y fecha de realización, resultados y valoraciones o comentarios.

2.3. Condiciones de garantía y mantenimiento

La empresa contratada para la realización del proyecto garantiza durante el periodo de dos años el producto final, de tal forma que se compromete a solventar cualquier problema surgido en el uso cotidiano de éste, así como ofrecer un servicio de ayuda sobre el manejo del mismo. El plazo de garantía comenzará a ser efectivo desde el momento de la recepción provisional del sistema. La garantía quedará invalidada en

el caso que no se haya seguido las pautas de uso que se indica en las instrucciones del mismo, así también como las condiciones que se deben cumplir para que la garantía sea válida. En el caso del presente producto no hará falta un mantenimiento específico para su uso. Sólo un uso adecuado, evitando los riesgos explicados en el tutorial de la garantía, solventa con mayoría el buen funcionamiento del mismo.

2.4. Reclamaciones

Solo se atenderán las reclamaciones formuladas por escrito en un plazo de quince días hábiles a partir del momento de la entrega de la herramienta al contratista. El plazo anteriormente citado se prolongarán por espacio de un mes en el caso de que la entrega se realice fuera de España. En el caso de que alguna de las mercancías entregadas resulte defectuosa el vendedor únicamente se compromete a la sustitución de las mismas declinando así cualquier otra responsabilidad. Ante envíos equivocados o la ausencia de los mismos, el vendedor igualmente únicamente se compromete al suministro de la mercancía estipulada en las condiciones establecidas por el cliente, siendo ajeno a cualquier otra responsabilidad.

2.5. Condiciones legales y contractuales

En el hipotético caso de que durante la ejecución del proyecto, el comprador quisiera extender el contrato a otros suministros, estos serían objeto de nuevo presupuesto. En el caso de modificaciones, variaciones u otras causas que impliquen la suspensión temporal del suministro o retraso en el periodo de entrega, se podrá solicitar una prórroga equivalente del término del ejecutivo contractual, a condición de que adelante tan solicitud antes de que el término haya caducado. Los aumentos o disminuciones que en el suministro tuvieran que verificarse serán valorados sobre la base de los precios vigentes.

2.6. Revisión de los precios

Los precios que se muestran en el presupuesto son flujos e invariables, cualesquiera que sean las variaciones del coste de los materiales o mano de obra.

2.7. Fianza

El contratista se compromete a obtener aval bancario a favor del comprador, en concepto de fianza por el 10 % del valor total del contrato, para responder del cumplimiento de todas y cada una de las obligaciones previstas en el mismo. Dicho aval deberá mantenerse desde el inicio del trabajo hasta el término del periodo de garantía. La fianza será devuelta al contratista una vez firmada la recepción definitiva de la aplicación.

2.8. Aceptación

La aceptación, referida a los puntos objeto de la presente compraventa, será cumplida mediante el uso de procedimientos de prueba, o programas establecidos por el vendedor. Cuando la obligación de instalación corresponda al vendedor, como es el caso, por estar incluido este servicio en el precio de los productos, la aceptación se producirá en el lugar de la instalación al demostrar el vendedor que, tanto los procedimientos de diagnóstico como los de prueba funcionan correctamente o que, resulta probado que el producto se encuentra en condiciones normales de funcionamiento. Si la instalación fuese programada o demorada por el comprador más de treinta días con posterioridad a la fecha de entrega, entonces el vendedor considerará que los productos han sido aceptados con efectividad del trigésimo primer día, contado a partir de la fecha de entrega.

Bibliografía

- [1] ESA, “Introducing aeolus,” https://www.esa.int/Applications/Observing_the_Earth/Aeolus/Introducing_Aeolus, 2018.
- [2] J. S. Avís, “Proyecto básico de satélite de observación de la tierra con fines de ordenación y planificación urbana,” Universidad de Sevilla, Tech. Rep., 2015.
- [3] MorganStanley, “Space: Investing in the Final Frontier,” *Morgan Stanley*, Julio 2021. [Online]. Available: <https://www.morganstanley.com/ideas/investing-in-space>
- [4] V. A. Chobotov, *Orbital Mechanics*, 3rd ed. Virginia: American Institute of Aeronautics and Astronautics, Inc., 1993.
- [5] J. A. Morano, “Ecuaciones del movimiento en un marco inercial y en uno relativo,” *Universitat Politècnica de València*, 2019.
- [6] H. D. Curtis, *Orbital Mechanics for Engineering Students*, 3rd ed. Florida: Elsevier, 2014.
- [7] J. A. M. Morano, “Análisis y ejemplos de órbitas elípticas,” *Universitat Politècnica de València*, 2019.
- [8] J. A. Morano, “La ecuación orbital y valores comunes de órbitas keplerianas,” *Universitat Politècnica de València*, 2019.
- [9] R. R. Bate, D. D. Mueller, and J. E. White, *Fundamentals of Astrodynamics*, 1st ed. Nueva York: Dover Publications, Inc., 1971.
- [10] CNES, *Spacecraft Techniques and Technology*, 4th ed. Francia: Cépaduès Editions, 2005.
- [11] R. N. M Olmo, “Secciones cónicas,” *Hyperphysics*. [Online]. Available: <http://hyperphysics.phy-astr.gsu.edu/hbasees/Math/consec.html>
- [12] J. A. Morano, “El tiempo de vuelo en las órbitas keplerianas,” *Universitat Politècnica de València*, 2019.

-
- [13] B. A. C. John E. Prussing, *Orbital Mechanics*, 1st ed. Nueva York: Oxford University Press, 1993.
- [14] T. Kelso, “Frequently Asked Questions: Two-Line Element Set Format,” *CelesTrak*, Diciembre 2019. [Online]. Available: <https://celestrak.com/columns/v04n03/>
- [15] T. K. Celso, “Celestrak,” <https://celestrak.com/>, 2021.
- [16] D. A. Vallado, *Fundamentals of Astrodynamics and Applications*, 4th ed. Hawthorne, CA: Microcosm Press, 2013.
- [17] U. NASA, *U.S. Standard Atmosphere, 1976*, 1st ed. Washington D.C: U.S Government Printing Office, 1976.
- [18] C. Duarte, “¿Cuál es el futuro del sector espacial?” *A21mx*, Mayo 2021. [Online]. Available: <https://a21.com.mx/aeroespacial/2019/11/22/cual-es-el-futuro-del-sector-espacial>
- [19] J. A. Moraño, “Órbitas en tres dimensiones: Sistemas de Coordenadas,” *Universitat Politècnica de València*, 2019.
- [20] C. D. Brown, *Spacecraft Mission Design*, 2nd ed. Virginia: American Institute of Aeronautics and Astronautics, 1998.
- [21] F. R. Hoots and R. L. Roehrich, “Models for Propagation of NORAD Elements Sets,” *Spacetrack Report*, Diciembre 1980. [Online]. Available: <https://celestrak.com/NORAD/documentation/spacetrk.pdf>
- [22] IAU, “Resolution 3 on recommended nominal conversion constants for selected solar and planetary properties,” Tech. Rep., 2015.
- [23] D. J. Gondelach, R. Armellin, and A. A. Lidtke, “Ballistic Coefficient Estimation for Reentry Prediction of Rocket Bodies in Eccentric Orbits Based on TLE Data,” *Hindawi*, Diciembre 2017. [Online]. Available: <https://www.hindawi.com/journals/mpe/2017/7309637/>
- [24] NASA, “Horizons web-interface,” <https://ssd.jpl.nasa.gov/horizons.cgi>, 2021.
- [25] U. of Concerned Scientists, “UCS Satellite Database,” *UCS*, Enero 2021. [Online]. Available: <https://www.ucsusa.org/resources/satellite-database>
-

- [26] B. Luzum, N. Capitaine, and A. Fienga, “The iau 2009 system of astronomical constants: the report of the iau working group on numerical standards for fundamental astronomy,” Tech. Rep., 2011.
- [27] BOE, Ed., *Real Decreto 488/1997 de 14 de abril sobre disposiciones mínimas de seguridad y salud para la utilización por los trabajadores de equipos que incluyan pantallas de visualización.*, 1997.