

**Superfícies reglades.
Revisió de models i noves
propostes matemàtiques.**

Escola Tècnica Superior d'Arquitectura
Departament de Matemàtica Aplicada
Grau en Fonaments de l'Arquitectura
Treball de Fi de Grau
Curs 2020-2021

Autora: Caravaca Martínez, Silvana
Tutor: Peris Manguillot, Alfred

València, Juliol 2021



UNIVERSITAT
POLITÈCNICA
DE VALÈNCIA



ESCOLA TÈCNICA
SUPERIOR
D'ARQUITECTURA

Aquesta pàgina roman intencionadament en blanc

**Superfícies reglades.
Revisió de models i noves
propostes matemàtiques.**

Escola Tècnica Superior d'Arquitectura
Departament de Matemàtica Aplicada
Grau en Fonaments de l'Arquitectura
Treball de Fi de Grau
Curs 2020-2021

Alumna: Caravaca Martínez, Silvana
Tutor: Peris Manguillot, Alfred

València, Juliol 2021



UNIVERSITAT
POLITÈCNICA
DE VALÈNCIA



ESCOLA TÈCNICA
SUPERIOR
D'ARQUITECTURA



Fitxers de les modelitzacions disponibles als servidors de Google Drive.
<https://drive.google.com/drive/folders/1iYOeAnn-hNM0oqRfVfyoVAbP9MeTALEM>

Resum valencià

La Matemàtica i l'Arquitectura és un binomi inseparable des del principi de l'Arquitectura. La geometria com a vessant de la Matemàtica és el que dona vida a l'Arquitectura, com es mostra al llarg del treball. Des de l'inici de la Grècia Clàssica fins a l'actualitat, la geometria ha sigut el suport d'inspiració dels projectes arquitectònics.

És òbvia la repercussió internacional de les superfícies reglades en l'Arquitectura, i les aportacions avantatjoses que resulten de les seues aplicacions. Aquest treball se centra en la repercussió local, a través de l'anàlisi de tres casos d'estudi ubicats a la Comunitat Valenciana. Des d'un grup residencial fins a la coberta d'una parròquia o una gasolinera, es busca la viabilitat d'aplicació directa de la Matemàtica en el procés de disseny per a facilitar l'execució, estalviar temps i pressupostos.

L'ús de bàsiques equacions matemàtiques, i la possible compatibilitat entre elles, fan possible una varietat extensa de superfícies laminars aptes per a executar-les constructivament.

Paraules clau: Superfícies reglades, quàdriques, geometria, *Mathematica 12.1.*, *AutoCAD 2019.*

Resumen castellà

La Matemàtica y la Arquitectura es un binomio inseparable desde el principio de la Arquitectura. La geometría como vertiente de la Matemática es la que da vida a la Arquitectura, como se muestra a lo largo del trabajo. Desde el inicio de la Grecia Clásica hasta la actualidad, la geometría ha sido el soporte de inspiración de los proyectos arquitectónicos.

Es obvia la repercusión internacional de las superficies regladas en la Arquitectura, y las aportaciones ventajosas que resultan de sus aplicaciones. Este trabajo se centra en la repercusión local, a través del análisis de tres casos de estudio ubicados en la Comunidad Valenciana. Desde un grupo residencial hasta la cubierta de una parroquia o una gasolinera, se busca la viabilidad de aplicación directa de las matemáticas en el proceso de diseño para facilitar la ejecución, ahorrar tiempo y presupuestos.

El uso de básicas ecuaciones matemáticas, y la posible compatibilidad entre ellas, hacen posible una variedad extensa de superficies laminares aptas para ejecutarlas constructivamente.

Parabros clave: Superficies regladas, superficies cuádricas, geometría, *Mathematica12.1.*, *AutoCAD 2019*.

Abstract anglés

Mathematics and Architecture is an inseparable binomial from the beginning of Architecture. Geometry as an part of Mathematics is the one that brings architecture to life, as shown throughout this academic work. From the beginning of Classical Greece to nowadays, geometry has been the inspirational basis of architectural projects.

The international repercussions of ruled surfaces in Architecture are obvious, just as the advantageous contributions that result from their applications. This work focuses on the local repercussion, throughout the analysis of three case studies located in the Valencian Community. From a residential group to the roof of a parish or gas station, it seeks the feasibility of direct application of mathematics in the design process to ease execution, save time and budget.

The use of basic mathematical equations, and the possible compatibility between them, make possible a wide variety of minimum surface area suitable for constructive execution.

Keywords: Ruled surfaces, quadric surfaces, geometry, *Mathematica 12.1.*, *AutoCAD 2019.*

'A l'enfrontar-se a un problema s'ha d'ignorar tot el que es considere irrellevant, abstraient l'essencial. Quan es descobreix l'essencial, tot es torna senzill.'
ORTEGA Y GASSET, J.

AGRAÏMENTS

A la meua mare, en especial a ella.

A Marina i Ricardo, pel suport continu.

A Alfred, per fer possible aquest treball.

A Salud i Ximo, per ensenyar-me molt més que Matemàtiques.

ÍNDEX

0. Objectius	12
0. Mètode de treball	13
1. Introducció. Geometria des de la Grècia Antiga	14
2. Recerca de la superfície laminar	17
2.1. Superfície mínima: concepte i característiques	17
2.2. Aplicacions en l'Arquitectura. Escala urbana.	19
3. Base matemàtica de les superfícies	22
3.1. Lloc geomètric	22
3.2. Generació de superfícies	22
3.2.1. Superfícies de revolució	23
3.2.2. Superfícies translacionals	24
3.3. Superfícies quàdriques	25
3.3.1. Teorema d'Egregium de Gauss	29
3.4. Superfícies reglades	29
3.4.1. Pla tangent a una quàdrica	31
4. Aplicacions directes de conceptes matemàtics	32
4.1. Les aportacions de Fèlix Candela. Les closques de formigó	33
4.2. Tres casos d'estudi	40
4.2.1. La catenària	40
Grup Residencial <i>Marqués de Valterra</i>	43
Descripció geomètrica amb <i>AutoCAD 2019</i>	49
Parametrització amb <i>Mathematica 12.1.</i>	58
4.2.2. El paraboloides hiperbòlic	59
Estació de servei <i>El Rebollet</i>	61
Descripció geomètrica amb <i>AutoCAD 2019</i>	65
Parametrització amb <i>Mathematica 12.1.</i>	68
4.2.3. La intersecció de plans	70
Església <i>Santa Maria del Mar</i>	73
Descripció geomètrica amb <i>AutoCAD 2019</i>	77

5. Una mirada al futur	80
5.1. L'actualitat de les superfícies reglades	80
5.2. Noves propostes matemàtiques	81
6. Conclusions	84
6.1. Reflexions de l'anàlisi	84
6.2. Possibles complementacions del treball	84
7. Bibliografia citada i de consulta	86
8. Drets i autoria d'imatges	88
Annex. Maquetes dels casos d'estudi	97

0. OBJECTIUS

L'objectiu principal del present Treball de Fi de Grau consisteix a evidenciar l'estreta relació de l'Arquitectura i la Matemàtica, a través de diversos casos d'estudi on s'analitza l'aplicació de les superfícies reglades.

Per una banda, hi ha un desig necessari de plasmar la importància que té la base matemàtica en el procés de disseny i execució d'edificis, fins a aconseguir l'optimització de la geometria, la tècnica constructiva i el sistema estructural. Així també, recórrer la trajectòria en el temps fins a arribar a la possibilitat d'execució de superfícies laminars.

Per altra banda, es posa de manifest els avantatges de l'aplicació de superfícies reglades en construcció. Llavors, després del procés d'aprenentatge que porta aquesta recerca i anàlisi, es proposen altres dissenys de superfícies reglades. Es té present la viabilitat d'execució de les propostes i la possibilitat d'estendre la seua aplicació en diferents escales urbanes. L'exploració de l'aplicació d'aquest tipus de superfícies no ha acabat amb les varietats tipològiques de F. Candela, sinó que té un llarg camí per recórrer.

0. METODOLOGIA

El procediment que s'ha seguit per a la realització del treball ha sigut:

- Recerca i recopilació de bibliografia i material de suport per a l'elaboració del treball.
- Recerca d'autors i casos d'estudi locals per a completar l'anàlisi.
- Anàlisi de la base matemàtica per a l'aplicació de les superfícies reglades en els projectes.
- Visita i anàlisi *in situ* dels casos d'estudi, prendre notes i fotografies.
- Anàlisis de les aplicacions en els casos d'estudi elegits.
- Ús de programes: *AutoCAD 2019* i *Wolfram Mathematica 12.1*. per a modelitzar elements a analitzar; *3ds Max 2017* per a renderitzar.
- Realització de maquetes per a completar l'anàlisi.
- Proposar altres alternatives matemàtiques.
- Extracció de conclusions i reflexions amb vista al futur.

1. Introducció. Geometria des de la Grècia Antiga

No es pot parlar de superfícies reglades sense fer referència als estudiosos de la geometria en l'Edat Antiga. Des d'Egipte i Mesopotàmia, entre altres, els estudis més rellevants de la geometria, que coneixem en l'actualitat, surten a l'Antiga Grècia.

Apol·loni de Perga (262 aC), conegut com el *Gran Geòmetra*, va estudiar i escriure sobre les còniques en el seu tractat que passaria a la història. Dels problemes d'Apol·loni es van desenvolupar generalitzacions per a altres superfícies diferents del pla, com la superfície de l'esfera i les superfícies quàdriques. L'àlgebra ha permès el desenvolupament dels estudis anteriors, i es va completar gràcies a la teoria dels determinants i de les matrius, el que ara és estudiat a les escoles.

'[...]En la geometria grega les equacions venen determinades per les corbes, però no que les corbes venen determinades per les equacions. [...] Per garantir que un lloc geomètric era realment una corba, els antics grecs consideraren necessari, produir-la d'una manera estereomètrica com una secció d'un sòlid, o bé, descriure la seua construcció d'una manera cinemàtica.'

Boyer, C.: Historia de la Matemática, (pàg. 205) Disponible a: http://www.centroedumatematica.com/aruz/libros/Historia%20y%20Filosofia/Parte1/Cap04/Parte05_04.htm Última visita: 23-02-21

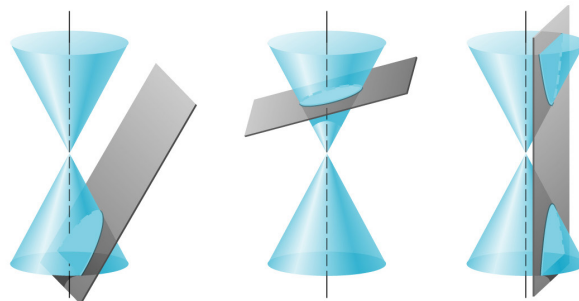


Fig. 1. Corbes còniques a partir de talls a un o dos cons.

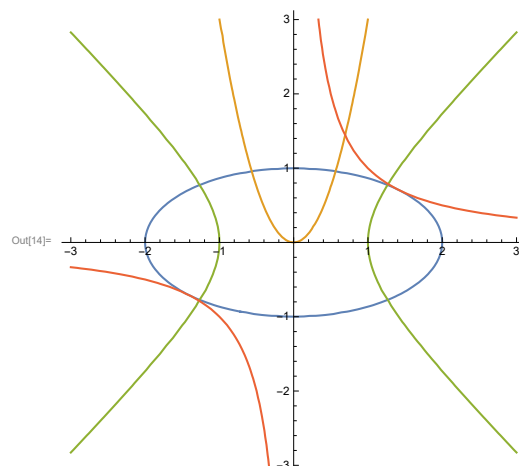


Fig. 2. Corbes còniques representades en Mathematica 12.1.

Del text citat anteriorment es dedueix que, per als grecs '*primer va ser la corba*', després es va parametritzar la seua equació. Aquest fet és degut a l'experimentació reiterada de la pràctica amb sòlids i talls per plans, que després es va consolidar en equacions. A través d'aquest procés d'aprenentatge, es va establir, de certa forma: la metodologia, les característiques i la naturalesa de la Matemàtica.



Fig. 3. 'L'Escola d'Atenes' per Rafael Sanzio' (1512). Representa l'ensenyança simultània de diferents disciplines relacionades amb la ciència a l'Antiga Grècia.

Junt amb Apol·loni, altres intel·lectuals de l'època es destaquen per les seues investigacions sobre la geometria. Les obres d'aquests estudiosos són els causants de l'Edat d'Or² de la Matemàtica compresa entre 300 i 200 aC.

Euclides (300 aC), matemàtic grec; el seu tractat *Elements de la geometria*, primera obra matemàtica grega que ha plegat en l'actualitat, inclou aspectes com: geometria plana i geometria en l'espai tridimensional. Arquimedes (287 aC) matemàtic grec, va demostrar formes de mesurar les superfícies i volums de sòlids limitats per superfícies corbes.

Pitàgores, filòsof grec, conegut pel *Teorema de la Hipotenusa*. S'inclou en l'escola on va tindre lloc el traçat de poliedres regulars. Tales (600 aC), també filòsof grec, a qui no es coneix escrits però, se li atribueix les inicials investigacions de la geometria. Aquest conjunt d'estudis han fet possible l'evolució de la geometria fins a crear la possibilitat que es poguera aplicar a diferents disciplines, com l'Arquitectura, amb l'objectiu de millorar la pràctica.

¹ Rafael Sanzio (1483-1520) va ser un pintor italià del Renaixement. Conegut per les seues aportacions com a conservacions d'antiguitats i vestigis grecoromans.

² Pel 300 aC va sorgir a l'Antiga Grècia un conjunt de pensadors que van canviar la ciència per a sempre, conegut com l'Edat d'Or de la Matemàtica. Aquest terme referència, en general, un període de temps en què es va viure una utopia.

Un dels primers estudiosos que va escriure sobre la relació directa de la Matemàtica i l'Arquitectura, va ser M. Vitruvi (Roma, segle I a.C.). Amb els deu llibres de l'*Arquitectura*, s'assenten les bases de la disciplina d'Arquitectura, i naix la relació de: *firmitas + utilitas + venustas* (sòlid, útil, bell); eren les tres característiques que tota construcció havia de contemplar. La Matemàtica té lloc, principalment, en el concepte de *firmitas* i *utilitas*. Al primer se li atribueix l'equilibri i la rigidesa de la construcció, on la base matemàtica és fonamental. El segon concepte ha de veure amb la geometria, la configuració de l'edifici vinculada a formes conegudes ajuden a entendre l'obra i apreciar-la.

L'arquitectura està lligada a l'escala de l'ésser humà, per tant, la relació anterior també vincula a les persones amb la geometria. El concepte de *bellesa humana* incorpora implícitament relacions geomètriques que el cervell percep com a perfecció. *L'home de Vitruvi* (i també la dona), és una representació del cànon de bellesa de les proporcions humanes segons Leonardo da Vinci (1452-1519, Florència). (fig. 4)

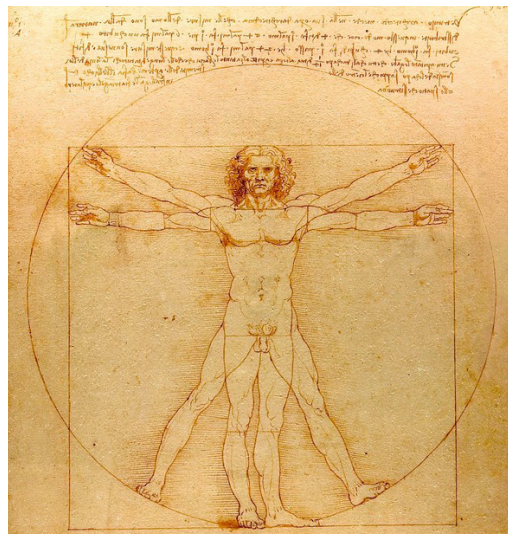


Fig. 4. 'L'home de Vitruvi' per Leonardo da Vinci. (1490) Representa el cànon de les proporcions humanes. La relació entre l'ésser humà i la geometria.

No s'ha d'oblidar que la nova tecnologia ha permès el desenvolupament, i la complementació en alguns casos, de les teories sortides en l'antiguitat. L'aplicació de la Matemàtica a l'Arquitectura és un fet directe, a través de la geometria, i això mateix és el que s'analitza i es destaca en els capítols posteriors.

2. La recerca de la superfície laminar en les obres arquitectòniques

Tota obra arquitectònica està delimitada per superfícies, generalment, reglades. El tema d'aquest treball radica en aquesta tipologia de superfícies, i els seus avantatges en construcció i en estructura, relacionada amb la petita grossària que es pot atribuir.

2. 1. Superfície mínima: concepte i propietats

El concepte de *superfície* és molt recurrent en la disciplina d'Arquitectura, és utilitzada entre altres coses, per a: pressupostar materials, litres de pintura per a revestir paraments, calcular volums de formigó, limitar àrees urbanístiques o cadastrals, etc. Les superfícies poden ser limitades o il·limitades, la disciplina d'Arquitectura treballa sobre elements finits, per tant, limitades. Si és limitada, vol dir que tanca un volum finit i configura un cos, en aquest cas, el cos és qualsevol construcció.

'Una superfície pot ser considerada com la pel·lícula infinitament estreta que recobre un cos qualsevol o que separa dues regions de l'espai.' (TAIBO FERNÁNDEZ, Ángel, 1983. *Geometría descriptiva y sus aplicaciones. Tomo II, Curvas y superficies.* (pág.22) Madrid: Tébar Flores. ISBN 8473600428.)



Fig. 5. Christo e Jeanne-Claude. Valley Curtain. Tela suspesa per diversos punts a la depressió d'una muntanya.

El concepte de superfície mínima en Matemàtica és el mateix que el definit anteriorment, i que en l'Arquitectura. En el camp de la construcció, és contínua la recerca d'aquesta tipologia de superfície, que busca l'àrea mínima entre els límits. Aquest concepte se'l relaciona també amb la petita grossària de la làmina. Una altra definició de superfície mínima, en l'àmbit arquitectònic, és:

'Aquelles estructures que, complint en totes les seues necessitats presenten diversos problemes constructius d'una obra real, necessiten la mínima quantitat d'energia de construcció per a la seua realització.' (ROLAND, C., 1973. *Frei Otto : Estructuras*. (pàg. 3)|Barcelona]: Gustavo Gili. ISBN:842520772X)

Aquesta recerca per la superfície laminar ja va ser experimentada pel físic belga *J.A.F. Plateau* (1801-1883). Aquest estudiós va dur a cap gran quantitat d'experiments amb bombolles de sabó, i els resultats van quedar gravats en el llibre *Problemes de Plateau*. La conclusió dels estudis és que: per a cada corba tancada de l'espai real tridimensional existeix una superfície d'àrea mínima, contorn de la qual, és una corba. Temps després, Frei Otto continua a experimentar amb bombolles de sabó per a idealitzar i dissenyar les seues estructures tensades. (*fig. 6*)

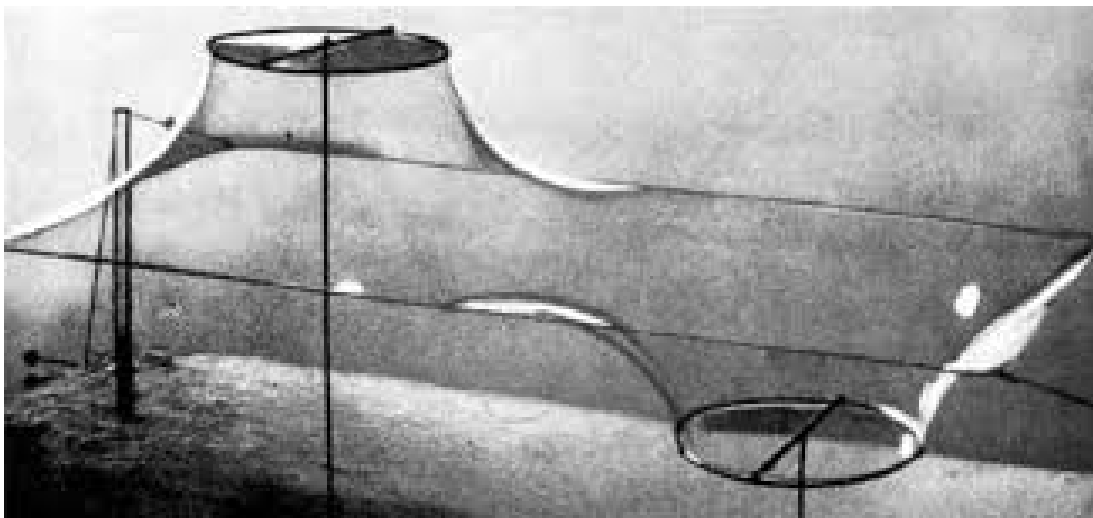


Fig. 6. Esbós d'experiment amb bombolles de sabó i filferros. F. Otto.

Aquest tipus de superfície, amb tensions i materials adequats, permeten grans llums¹, l'absència d'elements intermedis i estalviar material a causa de ser l'àrea mínima entre els extrems, per aquesta raó és tan recercada per les/pels arquitectes. El repte apareix quan se suma la recerca de l'espessor mínim amb materials que tenen un pes propi considerable, com és el cas del formigó.

¹ 'Llum' en Arquitectura és la distància diàfana entre dos elements estructurals, per exemple, entre dos pilars consecutius.

2. 2. Escala urbana de les aplicacions

Les aplicacions de les superfícies laminars han estat vinculades, entre altres aspectes, a obres on es buscava la màxima distància entre elements constructius per a cobrir espais diàfans. Per tant, l'estructura d'un edifici amb grans llums no és igual que un edifici residencial on la llum entre pòrtics és 5 o 6 m. Per aquesta raó, les superfícies que configuren un palau de congressos, per exemple, tindran una geometria diferent d'un bloc d'habitatges.

Són molts els/les arquitectes que han experimentat el disseny constructiu de superfícies que permeten grans llums, i la forma de dur-les a l'espai físic i que puguen ser viables. Perquè la construcció d'un edifici siga viable, influeix el tema econòmic i constructiu, a part de les normes urbanístiques que siguen vigents en la ubicació de l'obra. (fig. 7)

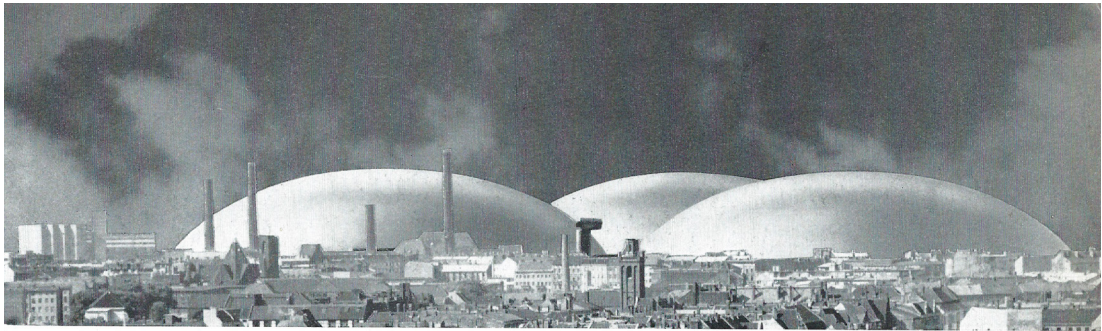


Fig. 7. Idea de macro coberta de Frei Otto.

Fèlix Candela és un dels arquitectes més coneguts per la seua varietat tipològica de closques de formigó, les quals salven grans llums, que després es veuran amb més profunditat. Frei Otto, també conegut internacionalment, dissenya grans superfícies amb teles tensades. Aquests dos autors diferents utilitzen materials diferents en la posta en obra, però busquen el mateix resultat, reduir al màxim possible els elements constructius verticals en l'espai a cobrir.

Frei Otto (1925 – 2015), va ser un arquitecte alemany guanyador del premi Pritzker en 2015, conegut per les seues estructures de teles traccionades, les quals li van donar fama. Amb teles suportades per tensors metàl·lics ancorats a terra en punts estratègics (fig. 8) per mitjà de barres d'acer dimensionades i barres biarticulades sotmeses a compressió pura, s'aconsegueix absorbir tots els esforços de tracció. Aquest sistema rep el nom d'*arquitectura tensional* o *tèxtil*. (fig. 9)

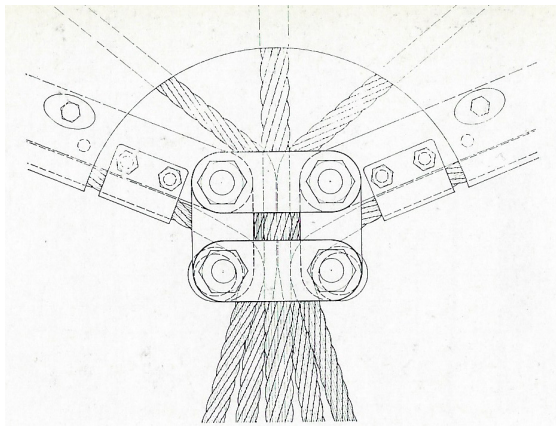


Fig. 8. Detall del mecanisme presentat.

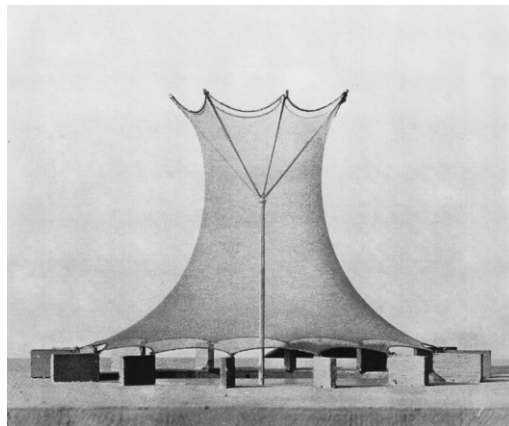


Fig. 9. Esbós d'estructura presentada de F.Otto.

La majoria de les seues obres amb teles presentades són efímeres, no es dissenyen per a durar un període de temps llarg. La seua materialitat també justifica aquest curt temps, ja que la majoria de les estructures tenien la funció de coberta, sense ser compatible moltes vegades en tancaments perimetrals. Generalment, els espais a cobrir eren exposicions, concerts, teatres, etc. El material tèxtil, en general, no proporciona les condicions atmosfèriques que deuen tindre els espais interiors. El tancament ha de poder aïllar l'espai que delimita enfront de les inclemències meteorològiques. (fig. 10)

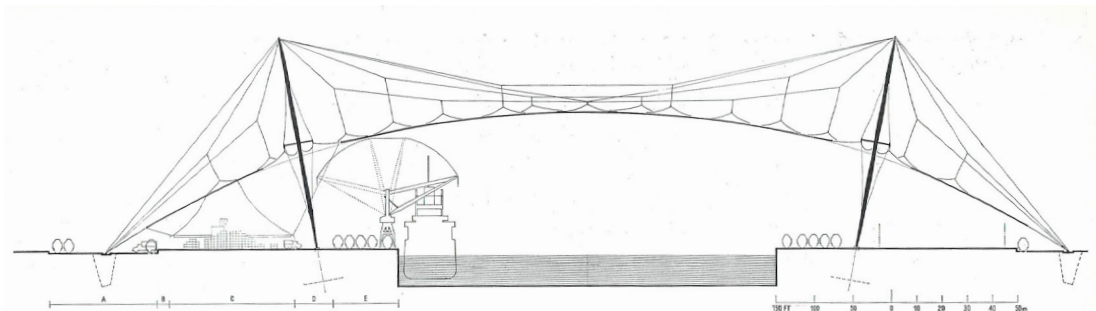


Fig. 10. Secció 2D d'estructura pretensada de F. Otto.

Una altra figura destacada en l'aplicació d'aquestes superfícies és l'arquitecte *Le Corbusier* (1887-1965), de naixement suís però amb nacionalitat francesa, conegut com el pare de l'Arquitectura Moderna i dels cinc punts que la caracteritza. Al llarg de la seua trajectòria també va aplicar el concepte de superfície reglada en les seues obres.

El Pavelló Philips (fig.11), de l'Exposició d'Alemanya del 1958, està format per superfícies quàdriques com és el con i les formes hiperbòliques. Amb la mateixa superfície contínua, s'aconsegueix resoldre el tancament i coberta, és una manera de traure la màxima rendibilitat a la materialitat. El dinamisme de la circulació interior també és causada per aquestes formes aplicades i procedents d'equacions matemàtiques, que resulta interessant des del punt de vista lluny de la direcció recta convencional. (fig.12)

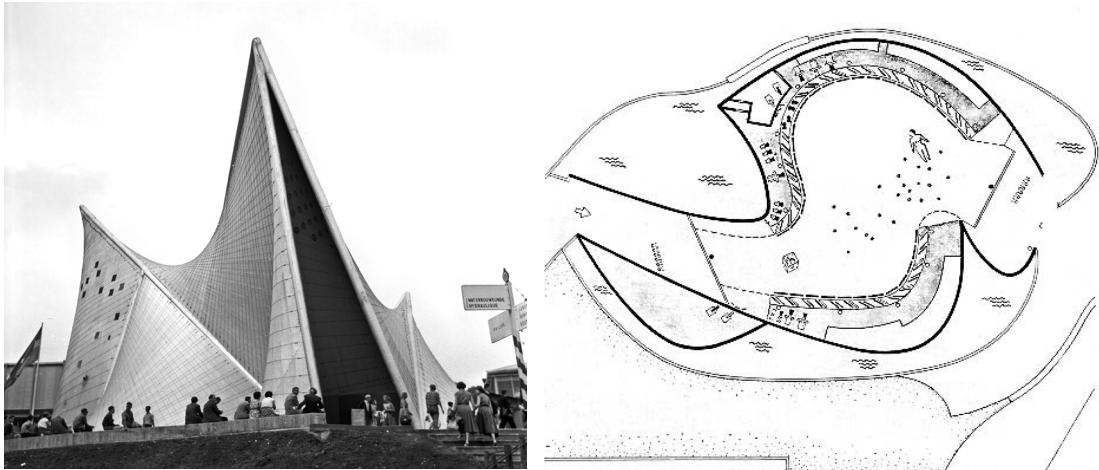


Fig. 11. Pavelló Philips de Le Corbusier en l'exposició de 98 en Alemanya. Fig. 12. Planta del Pavelló Philips.

La Sagrada Família (1882 - actualment, Barcelona) de A. Gaudí¹ és un exemple de l'ús de la catenària, entre altres equipaments a la mateixa ciutat. Tota església, o edifici de culte, es caracteritza per ser: un espai de grans dimensions on penetra llum natural moderadament, un espai central sense elements entremig i una altura considerablement alta per a semblar-se al cel.

A. Gaudí aconsegueix grans altures amb estalvi de material gràcies a l'aplicació d'aquesta corba. Aquestes característiques són vàlides també per al disseny de: pavellons esportius, òperes, santuaris, restaurants grans. Més avant parlarem de la catenària amb més profunditat. Visualment, no és comú veure edificis amb curvatures. La senzillesa de construcció dels edificis rectangulars en tres dimensions ha fet que tots els paisatges urbans que estan en les ments dels espectadors siguin configurats per plans rectes. Per aquesta raó, les aplicacions de les superfícies corbes, reglades en aquest cas, tenen un impacte visual urbà que aconsegueix que l'obra no passe desapercibuda. Per tant, aquesta singularitat no és pròpia d'habitatges, sinó d'equipaments dotacionals i d'oci.

¹ Antonio Gaudí (1852-1926) va ser un arquitecte de Barcelona que va treballar molt amb la materialitat de les seues obres. Conegut com el pare del Modernisme Català.

3. Base matemàtica de les superfícies

La Matemàtica té relació directa amb l'Arquitectura. Aquesta relació radica en simplificar la geometria de l'obra en elements coneguts per trobar solucions exactes i viables per a portar a cap el projecte. L'estructura i la transmissió d'esforços a través d'ella, l'estabilitat, entre altres fenòmens, tenen una base matemàtica que permet efectuar anàlisis exactes del conjunt. Llavors, aquesta complementació de les dues disciplines permet construir edificis amb condicions òptimes.

Però no sols pel que fa a la tècnica, les formes pures i les superfícies bàsiques conegudes, aplicades a la construcció, permeten connectar amb l'espectador. L'enteniment de la geometria permet que l'usuari reconega la configuració de l'espai, i com a conseqüència, dona lloc a l'apreciació de l'obra des d'un punt de vista estètic.

3. 1. Lloc geomètric

Per a entendre els elements a l'espai de tres dimensions és imprescindible conèixer el concepte de lloc geomètric, i així definir la forma geomètrica de les superfícies a analitzar. La comprensió de la geometria facilita la translació de les representacions en 2D a la construcció.

'Un conjunt de punts de l'espai es diu que constitueix un lloc geomètric respecte a una certa propietat P, quan tots els punts del conjunt posseeix aquesta propietat i, recíprocament, tot punt de l'espai del pla compleix la propietat P pertany al conjunt.' (MONTESDEOCA DELGADO, A. y CANARIAS. CONSEJERÍA DE EDUCACIÓN, CULTURA Y DEPORTES, 2001. Geometría proyectiva cónicas y cuádricas.(pág. 119) Santa Cruz de Tenerife]: Consejería de Educación, Cultura y Deportes. ISBN 8469940856)

3. 2. Generació de superfícies

En aquesta altura del discurs, ja es té més o menys idea del que és una superfície. Des del punt de vista matemàtic, i en el context que ens ocupa, per superfície s'entén:

'Un objecte, o subconjunt bidimensional, que viu immers dins d'un espai ambient de major dimensió i que s'anomena espai euclidià.'

L'espai euclidià és on vivim, de naturalesa tridimensional, i on es distingeixen tres dimensions: alt, ample i fons. Es diu que una superfície és de naturalesa bidimensional perquè al llarg d'ella sols pot desplaçar-se en dues dimensions. Cal destacar que no s'ha de confondre superfície bidimensional en el volum tridimensional, el qual engloba.

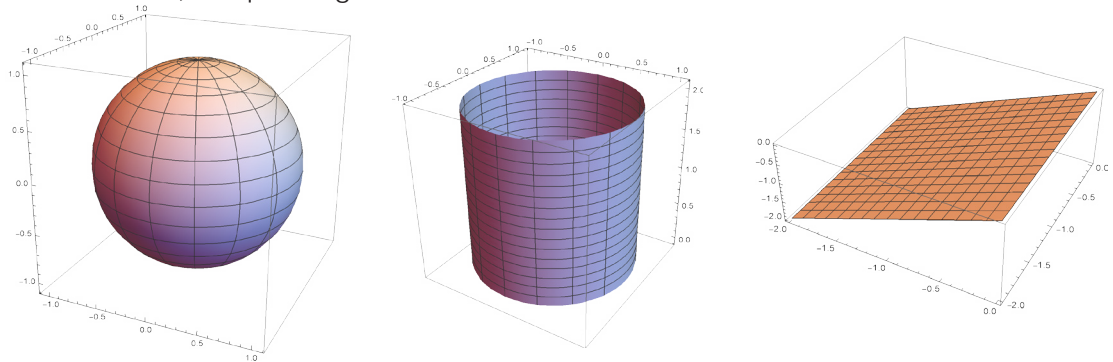


Fig. 13. Superfícies bàsiques. Esfera, cilindre i pla.

3. 2. 1. Superfícies de revolució

'La superfície engendrada per circumferències 'y' (generatrius) els centres de les quals estan en una recta fixa 'e' (eix de revolució) que és perpendicular als plànols que les contenen i de radiis variables de tal manera que cadascuna d'elles interseca a una corba fixa 'o' (directriu) es denomina superfície de revolució.' (MONTESDEOCA DELGADO, A. y CANARIAS. CONSEJERÍA DE EDUCACIÓN, CULTURA Y DEPORTES, 2001. Geometría proyectiva cónicas y cuádricas. (pp. 120-121) Santa Cruz de Tenerife]: Consejería de Educación, Cultura y Deportes. ISBN 8469940856)

Les superfícies poden ser configurades a través del fenomen de *revolució*. És a dir, aquestes superfícies es generen fent rotar una corba plana al voltant d'un eix contingut en el mateix pla. Un cas seria, si la corba està continguda en XZ , $c1(u)=(f(u), 0, g(u))$, una parametrització de la superfície obtinguda al girar al voltant de Z és:

$$C(u, v) = (f(u) \cos v, f(u) \sin v, g(u)), \quad v = [0, 2\pi]$$

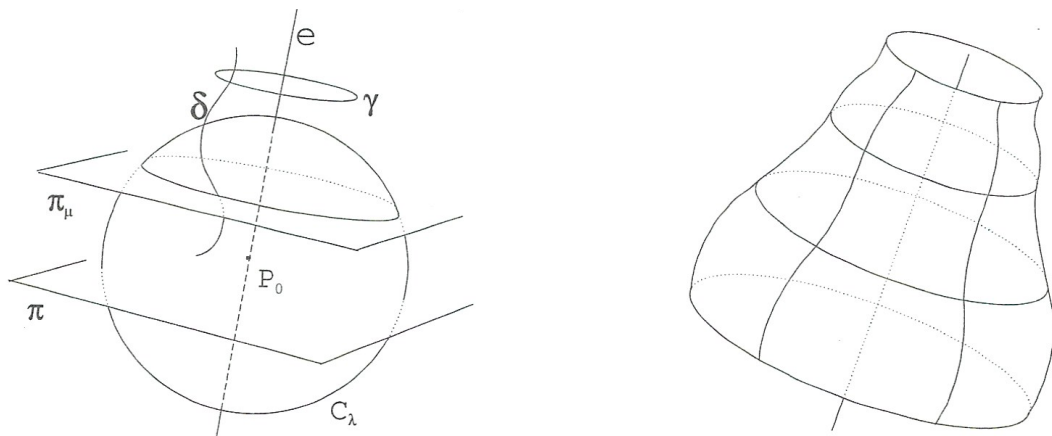


Fig. 14. Superfícies de revolució.

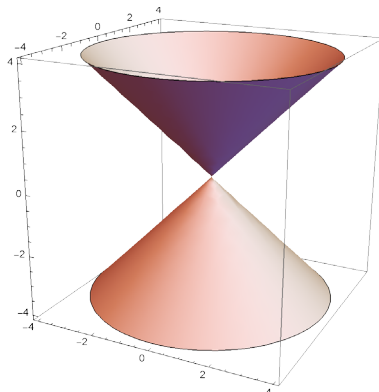


Fig. 15. Con de revolució.
Wolfram Mathematica 12.1.

3. 2. 2. Superfícies translacionals

El fenomen de translació és una manera de generar superfícies. Si tenim una corba $c1(u)$ i altra $d1(v)$, es desplaça una corba respecte de l'altra i així es configura una superfície translacional. (fig. 16)

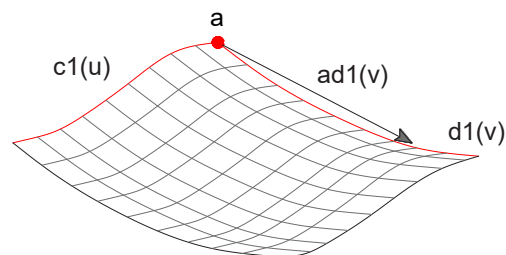


Fig. 16. Esquema de generació de superfície per translació.

Matemàticament, se sumen les parametrizacions de les dues corbes i es resta el punt d'intersecció. Es correspon al fet que la segona derivada respecte u i v de la parametrizació de la superfície siga nul·la. Ocorre el mateix amb la translació d'una corba respecte a una recta, i viceversa.

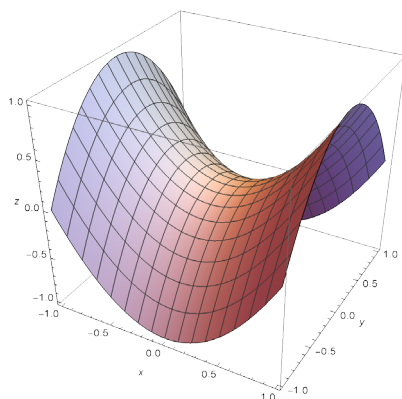


Fig. 17. Generació de superfície per translació.
Paraboloide hiperbòlic.

'S'anomena superfície de translació de directriu C i generatriu C' , al lloc geomètric dels punts de les corbes que s'obtenen al traslladar la generatriu C' paral·lelament a si mateixa, de tal forma que en un punt M fixe d'ella recórrega la directriu.'

(MONTESDEOCA DELGADO, A. y CANARIAS. CONSEJERÍA DE EDUCACIÓN, CULTURA Y DEPORTES, 2001. *Geometría proyectiva cónicas y cuádricas*. (pàg. 122) Santa Cruz de Tenerife]: Consejería de Educación, Cultura y Deportes. ISBN 8469940856)

Si la propietat P d'un punt $P(x, y, z)$ es tradueix per una condició simple, el lloc dels punts que posseeixen aquesta propietat vindrà determinada per una sola equació entre les coordenades x, y, z ; resulta, en general, una superfície. Si P s'expressa per dues condicions simples, el lloc ve determinat per dues equacions, i serà, en general, una corba.

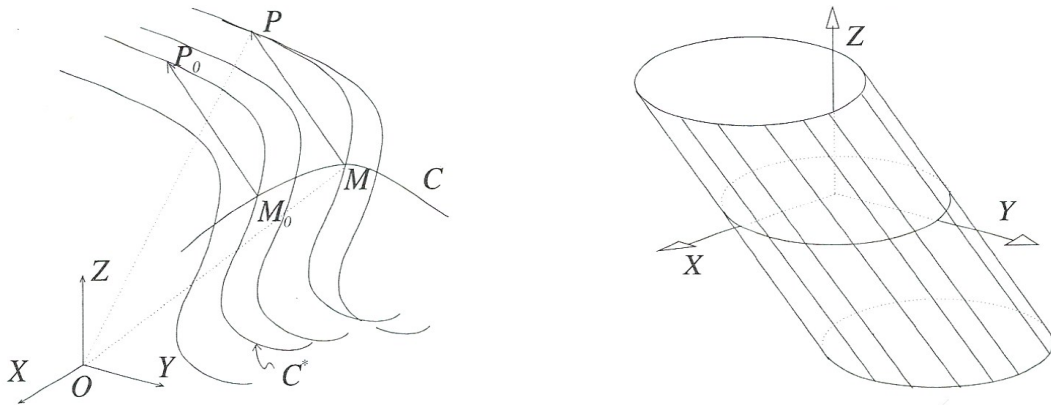


Fig. 18. Generació de superfície per translació.

3. 3. Superfícies quàdriques

Les superfícies quàdriques són un cas particular de superfícies. La clau d'aquesta família de superfícies és que la secció de les mateixes per determinats plànols genera corbes còniques. Aquestes corbes generades presenten propietats conegudes com: curvatures, trajectòries i pendents; això simplifica l'anàlisi de les superfícies. També es caracteritzen per la seua regularitat, és a dir, forma fàcil de traduir en el procés constructiu. Aquesta família de superfícies és àmpliament utilitzada en el disseny d'edificis i productes, i està present en elements de la natura.

'S'anomena quàdrica al lloc geomètric en $P^3 (R)$ dels punts reals o imaginaris, coordenades homogènies de les quals, respecte a un determinat sistema de referència, satisfan a una equació de segon grau de la forma:

$$a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{12}xy + 2a_{13}xz + 2a_{23}yz + 2a_{14}x + 2a_{24}y + 2a_{34}z + a_{44} = 0$$

amb $(a_{11}, a_{22}, a_{33}, a_{12}, a_{13}, a_{23})$ no igual a $(0, 0, 0, 0, 0, 0)$, per a garantir que l'equació és de segon grau.¹ Una altra expressió equivalent de l'equació d'una quàdrica és:

2. En funció de la matriu T de termes quadràtics:

$$(x \ y \ z) T \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + 2(a_{14} \ a_{24} \ a_{34}) \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + a_{44} = 0$$

$$T = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix} \neq 0$$

L'interès del punt 2 radica en què la matriu T és simètrica real. Aquesta característica és fonamental, ja que tota matriu simètrica real és diagonalitzable, és a dir, amb un canvi de sistema de referència es pot reduir la superfície quàdrica.

No totes les superfícies quàdriques són reglades, per tant, no totes es poden reproduir a la construcció amb la mateixa senzillesa. Les curvatures, en l'àmbit de la construcció, són molt més complexes d'executar que les rectes. Totes les ferramentes bàsiques de la construcció són rectes, per aquesta raó quan es vol executar a l'obra una corba, resulta més senzill amb l'aplicació de les superfícies reglades.

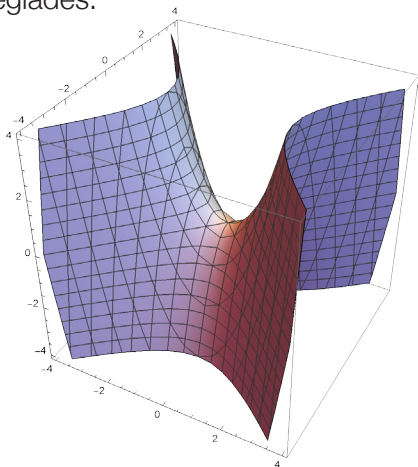


Fig. 19. Exemples de quàdrica.
Paraboloide hiperbòlic.

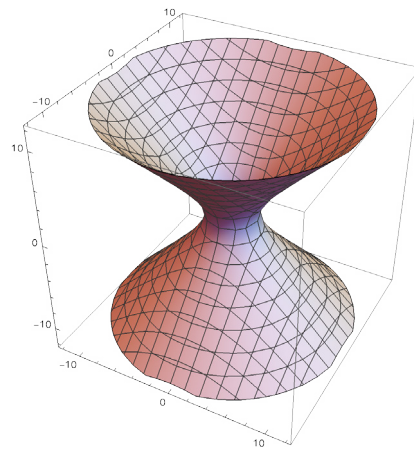
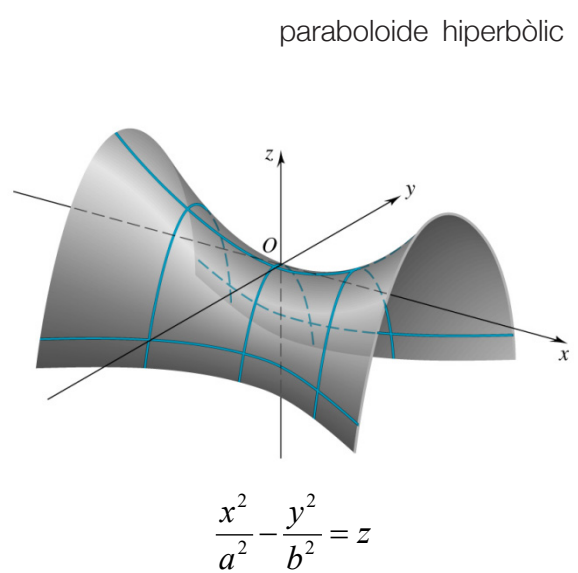
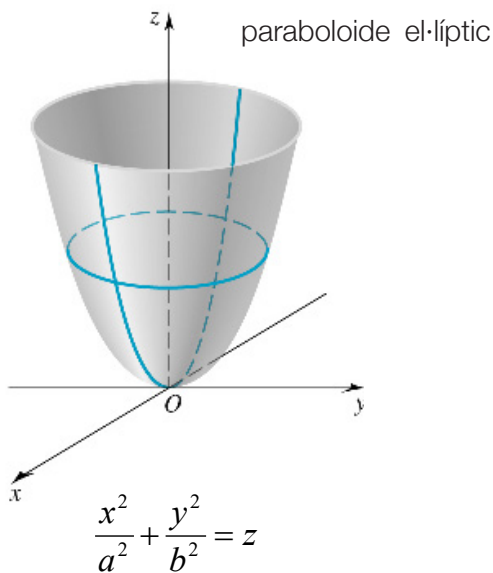
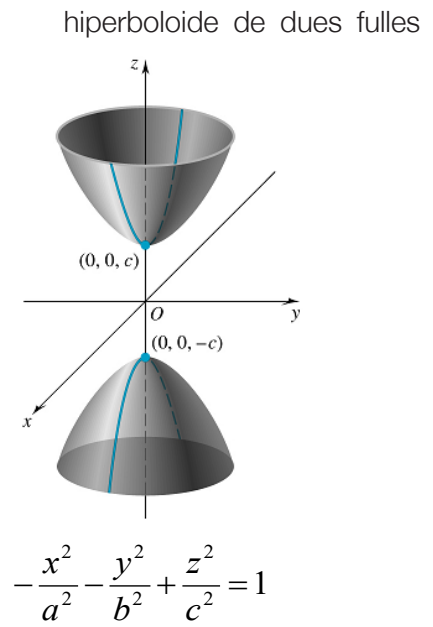
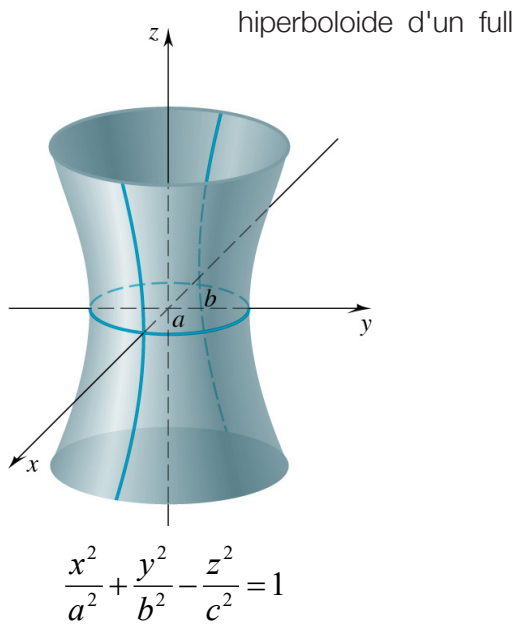
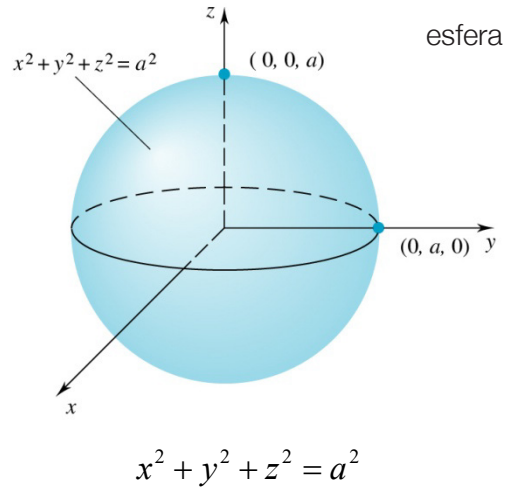
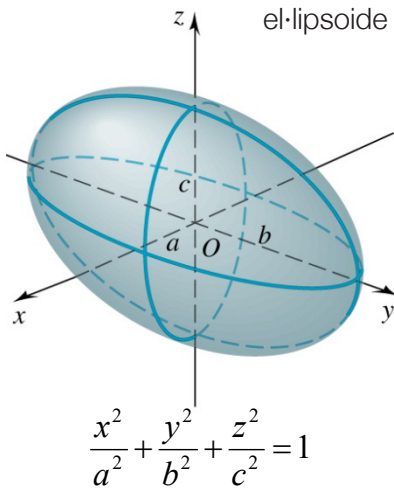


Fig. 20. Hiperboloide d'una fulla.
Wolfram Mathematica 12.1.

¹ MONTESDEOCA DELGADO, A. y CANARIAS. CONSEJERÍA DE EDUCACIÓN, CULTURA Y DEPORTES, 2001. *Geometría proyectiva cónicas y cuádras*. (pàg. 127) Santa Cruz de Tenerife]: Consejería de Educación, Cultura y Deportes. ISBN 8469940856

Classificació de quàdriques :



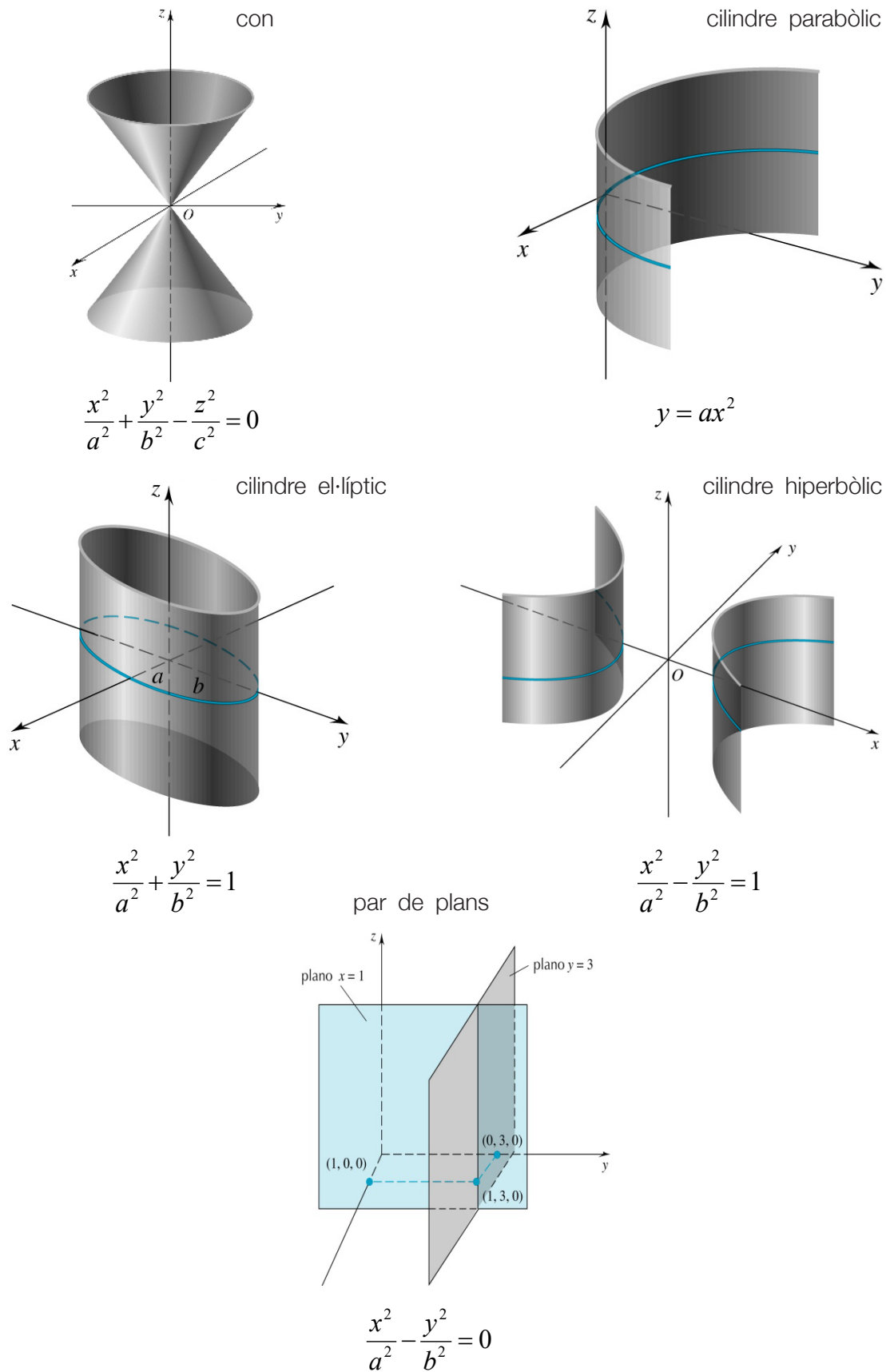


Fig. 21. Classificació de quàriques.¹

¹ SALAS, S.L., HILLE, E. y ETGEN, G.J., 2002. *Calculus, una y varias variables*. 4a ed. Barcelona. Ed.: Reverté. ISBN 8429151575

3. 3. 1. Teorema d'Egregium de Gauss

El Teorema d'Egregium va ser demostrat per C. F. Gauss¹, i és el resultat de la geometria diferencial que es refereix a la curvatura de superfícies. El teorema afirma que la curvatura gaussiana d'una superfície diferenciable pot ser determinada amb exactitud mitjançant angles i distàncies sobre la superfície pròpia, sense fer referència a la forma particular en què es troba dins de l'espai euclidià tridimensional.² (fig. 22)

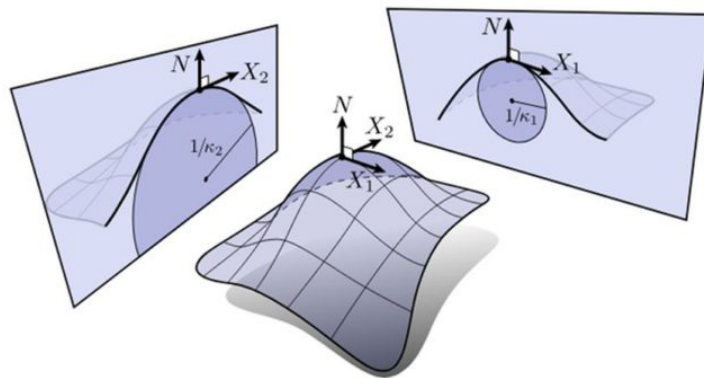


Fig. 22. Exemple d'aplicació del Teorema d'Egregium.

Explicat d'altra manera, aquest teorema permet conèixer les característiques de la curvatura sense necessitat d'eixir del món bidimensional. Aquest fet és un avantatge per a l'àmbit arquitectònic, ja que, generalment, totes les representacions prèvies a l'execució del projecte són bidimensionals. A més, aquest fenomen té un interès particular en les superfícies amb curvatura donat que facilita l'execució de l'obra gràcies al coneixement previ que es té de la superfície.

3. 4. Superfícies reglades

Per poder parlar amb exactitud de les superfícies reglades, és clau conèixer la seua base teòrica matemàtica. Inicialment, sols pel nom que reben aquestes superfícies es pot imaginar que estan configurades per rectes. Llavors, ja sabem com són traslladades a l'espai físic, els elements rectilinis són el més comú i bàsic en les construccions. Quan s'introdueixen corbes és quan apareix la dificultat de compatibilitzar els elements auxiliars de construcció, que són tots rectes, amb les curvatures de la superfície.

¹ Johann Carl Friedrich Gauss (1777-1855) va ser conegut per les seues aportacions a la geometria diferencial, estadística i geodèsia, entre altres camps.

² LÓPEZ CAMINO, R. (2015, Granada). *Algunas notas y observaciones sobre el tema 5. Asignatura: Curvas y Superfícies. Grado en Matemáticas*. [PDF]. Disponible a: <http://www.ugr.es/~rcamino/docencia/curvasysuperficies14-15/notastema5.pdf>

'Una superfície reglada és la superfície generada per una recta de direcció variable $w(u)$ que es mou sobre una corba $c(u)$, $u \in I \subseteq \mathbb{R}$, anomenada corba base o *directriu*.' (MONTESDEOCA DELGADO, A. y CANARIAS. CONSEJERÍA DE EDUCACIÓN, CULTURA Y DEPORTES, 2001. *Geometría descriptiva y sus aplicaciones. Tomo II. Curvas y superficies.*(pág. 34) Santa Cruz de Tenerife]: Consejería de Educación, Cultura y Deportes. ISBN 8469940856)

Una superfície reglada té una parametrització en forma reglada¹:

$$r(u, v) = c(u) + vw(u)$$

Per cada $u_0 \in I$ es té una recta $r(u_0, v) = c(u_0) + vw(u_0)$ anomenada *generatriu*.

També es considera una parametrització tenint en compte els segments que uneixen els punts de dues corbes parametritzades $c_1(u)$ y $c_2(u)$:

$$\begin{aligned} r(u, v) &= (1 - v)c_1(u) + vc_2(u) \\ &= c_1(u) + v(c_2(u) - c_1(u)), \quad 0 \leq v \leq 1 \end{aligned}$$

En aquest cas, els vectors directors de les generatrius són: $w(u) = c_2(u) - c_1(u)$

Aquestes superfícies han de complir una sèrie de requisits perquè siguin viables en els projectes arquitectònics. Des del punt de vista constructiu, han de portar-se a cap d'una manera senzilla perquè el cost del projecte no siga elevat. Com més mà d'obra especialitzada es requereix a la construcció, més s'eleva el pressupost, i també ferramentes per a l'execució. Per aquesta raó, ve la recerca de l'aplicació de superfícies reglades a l'Arquitectura.

Les superfícies bàsiques són les més comunes en construcció: el cilindre, el con i totes aquelles superfícies de curvatura simple, de les quals coneguem la parametrització matemàtica.

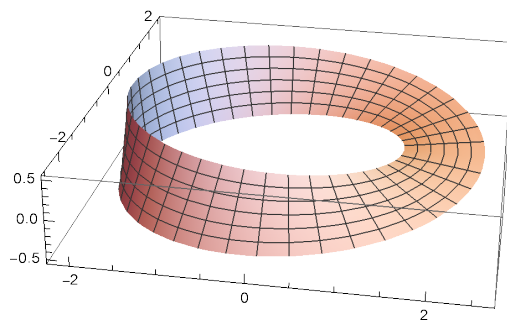


Fig. 23. Banda de Möbius.
Exemple particular de superfície reglada.

¹ ROSADO, E. *Curvas y Superficies.I*. Escuela Técnica Superior de Arquitectura de Madrid. Disponible on-line en: http://dma.aq.upm.es/profesor/rosado_e/home.html. Data última visita: 09-05-2021

3. 4. 1. Pla tangent a una quàdrica

En tot procés constructiu amb formigó té presència l'encofrat per a contindre aquest material i que s'endurisca amb la forma buscada. Quan hi ha corbes, aquest encofrat és més complex d'elaborar, ja que és comú trobar-se'l és de directriu recta.

Quan s'executen superfícies quàdriques, se suposen reglades, es necessita trobar la tangent en cada zona de la superfície per a dividir l'encofrat en parts rectes que configuren curvatures. Per aquesta raó, el pla tangent a la quàdrica resol la compatibilitat de les curvatures de les superfícies amb els elements rectes, com són els encofrats.

'Es considera la quàdrica C d'equació $[\hat{x}]^t M [\hat{x}] = 0$, i amb ella, un punt P (p1, p2, p3). El pla tangent a aquesta quàdrica en P, és el pla d'equació:' (BURGOS ROMÁN, J. de, 2012. Cónicas y cuádricas. (pàg. 43) Madrid: García-Maroto Editores. ISBN 9788415214939)

$$[1 \ p_1 \ p_2 \ p_3] \begin{bmatrix} c & b_1 & b_2 & b_3 \\ b_1 & a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = 0 \quad \left(\begin{array}{l} \text{Plano tangente a la cuádrlica} \\ [\hat{x}]^t M [\hat{x}] = 0 \text{ en } P(p_i) \\ \text{(punto de ella)} \end{array} \right)$$

(abreviadamente $[\hat{p}]^t M [\hat{x}] = 0$)

Fig. 24. Pla tangent a una superfície quàdrica.

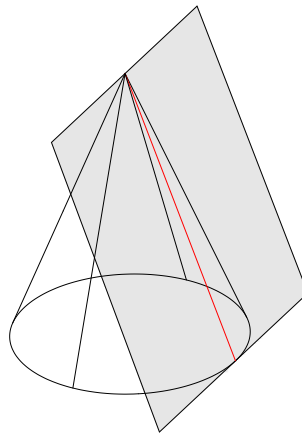


Fig. 25. Pla tangent a un con.
La intersecció de la superfície quàdrica i el pla és la línia roja.

Les diverses superfícies quàdriques presenten, a simple vista, una forma geomètrica diferent entre elles. Algunes d'elles són comunes en l'àmbit de l'Arquitectura, com és el cas del *cilindre el·líptic* o el *paraboloide hiperbòlic*. Aquest últim cas, amb una geometria un més complexa respecte al con, és aplicat a la majoria de les obres de Fèlix Candela i en alguns equipaments dotacionals del nostre entorn.

4. Aplicacions directes de conceptes matemàtics

La relació estreta de les dues disciplines dona lloc a la seua interacció per a complementar-se. L'arquitectura no es pot concebre en la seua totalitat sense l'existència de la base matemàtica. Es pot dir que l'Arquitectura 'depén' de la Matemàtica, és a dir, és influenciada per aquesta, i pel contrari, la segona disciplina és independent de la primera.

L'exemple més clar de relació directa són les formes pures en construcció: l'esfera, el cub, el prisma, el cilindre, etc; geometries fàcils de reconèixer i classificar a simple vista. D'aquestes formes se sap com traure el valor de totes les seues propietats: volum, superfície, perímetre en el cas de representació en planta, etc. Senzill fins aquí, la complexitat apareix amb les corbes. Per a facilitar la seua execució al medi físic, les superfícies corbes han de simplificar-se a tipologies de superfícies conegudes, per a ser més exactes a la pràctica.

Les superfícies reglades són les més comunes en edificació, a causa la possibilitat d'utilitzar directrius rectes per a formar superfícies corbes.

4. 1. Les aportacions de Fèlix Candela. Les cloques de formigó.

Fèlix Candela (27 de gener de 1910, Madrid). En la mateixa ciutat va créixer i es va formar acadèmicament. Més avant, va entrar en l'Escola Superior d'Arquitectura de Madrid, on va desenvolupar una gran afició per la geometria descriptiva.



Fig. 26.

Al llarg de la seua etapa acadèmica, es va interessar per les estructures laminars. En 1935, any en què es va graduar, va començar a calcular estructures de formigó i metàl·liques. Després de passar per l'Acadèmia de Belles Arts de San Fernando i d'haver-se exiliat al Mèxic, F. Candela es destaca per les seues aportacions a la disciplina.

Les estructures que li han donat fama a Fèlix Candela no les va inventar ell, no va ser el primer a dissenyar i construir una closca de formigó. No obstant això, va ser el primer que va construir més varietat tipològica de closques (*fig. 27*), també denominades superfícies laminars. Aquestes superfícies es caracteritzen per tindre l'espessor molt petita respecte a les altres dues dimensions.

La ubicació del seu ofici va ser clau per a desenvolupar les seues obres, al Mèxic les restriccions i normes de construcció són mínimes, provocant més llibertat a l'hora de construir i amb resultats no sempre comuns (*fig. 28*). L'arquitecte argentí Luciano Kruk, en el 8é Congrés Internacional d'Arquitectura Blanca a la UPV (CIAB, 2018), va verificar l'absència de restriccions en l'execució d'obres, no sols en Buenos Aires, on té l'estudi, sinó a gran part de Sud-Amèrica.

Les estructures de F. Candela, en general, eren configurades amb les mateixes capes de materials: pasta de formigó amb una malla reticulars d'armadures embeguda al llarg de tota la seua superfície. Els encofrats i cimbre eren de fusta, amb una determinada configuració i grossària, aquest material és capaç de suportar el pes propi del formigó.

Abans de començar l'execució de l'estructura espacial, es deu saber exactament com va serà la superfície corba. Quina altura alcança, les curvatures que té, com disposar els elements d'encofrats, entre altres coses, són els coneixements que s'han de tindre abans de construir. El *Teorema d'Egregium* (pàgina 29), abans vist, és una ferramenta per a determinar les propietats de la superfície en 3D que són necessàries saber per a executar-les amb exactitud i deixant poc lloc a l'error.

Les estructures de Candela es basen en coneixements pràctics d'esforços, que simplificats són fàcils d'entendre. En l'anàlisi de les tensions d'un element de formigó quan és sotmés a flexió apareixen esforços a compressió en una part de l'element, i de tracció a l'altra. Ambdues parts estan dividides per l'eix neutre de la secció de l'element, en aquest lloc la tensió és nul·la.



Fig. 27. Cimbreres de fusta suportant superfície de formigó en gran altura al Mèxic.



Fig. 28. Tècniques de construcció permeses al Mèxic dels anys 80.

El formigó treballa molt bé a compressió, però la seua resistència a tracció no supera, aproximadament, el 10% de resistència a compressió. Per aquesta raó s'introdueix barres corrugades d'acer dins de la pasta de formigó, per a treballar juntament i donar-li més resistència enfront d'esforços de tracció. La combinació dels dos materials permet que l'element suporti tensions dels dos tipus. Aquesta combinació és possible gràcies a l'adherència entre el formigó i l'acer, que ve donada per les corrugues de les barres d'acer.

Fèlix Candela entenia les estructures a través de la seua geometria, i l'experiència pràctica va ser clau en l'enteniment de la distribució de forces entre les membranes (fig. 29). Conèixer el comportament de les superfícies laminars d'una o doble curvatura enfront d'esforços externs, és clau per a localitzar la part de l'element on abans serà fissurada i la deformació que patirà.

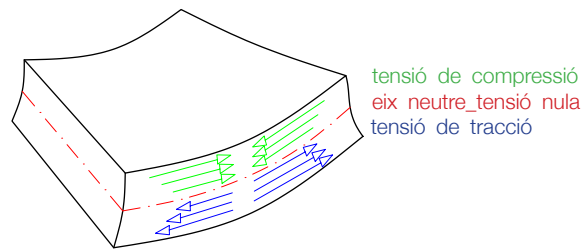


Fig. 29. Esquema multicolor de tensions compressió - tracció i eix neutre d'un element de formigó que s'ha aplicat una força que causa deformació.

La geometria de la construcció ha de ser immutable perquè no es produïska flexió, i s'aconsegueix amb l'aplicació de superfícies de doble curvatura. En la pràctica és inevitable que l'element a construir de formigó no presente canvis de volum, ja que aquest material s'endureix amb el temps i perd aigua, el que fa minorar el seu volum. Aquest fenomen s'anomena retracció, però no és perceptible a l'ull humà i els càlculs deuen tindre-ho en compte.

Per a dotar d'immunitat a una superfície que salva una determinada llum enfront de càrregues externes moderades i del seu propi pes, es necessita una geometria que genere tensió a la mateixa estructura perquè no es deforme. Aquestes tensions que fan possible l'equilibri de l'estructura enfront de la deformació es basa en la doble curvatura de la superfície. Més avant s'entrarà més profund en el tema.

La presència de barres corrugades d'acer, dins de la massa de formigó, que es poden corroir provoca que l'element haja de tindre un recobriment de formigó mínim que condiciona l'espessor de la superfície. En Espanya, el valor de recobriment nominal de les armadures principals està regulat per un mínim que depèn de la intensitat de control d'execució que tinga l'obra. Les superfícies laminars han de ser capaces de treballar en condicions normals de càrrega, sempre que les càrregues puguen ser repartides uniformement per l'espessor de l'element i s'apliquen paral·leles al pla tangent a la superfície de la mateixa en cada punt.

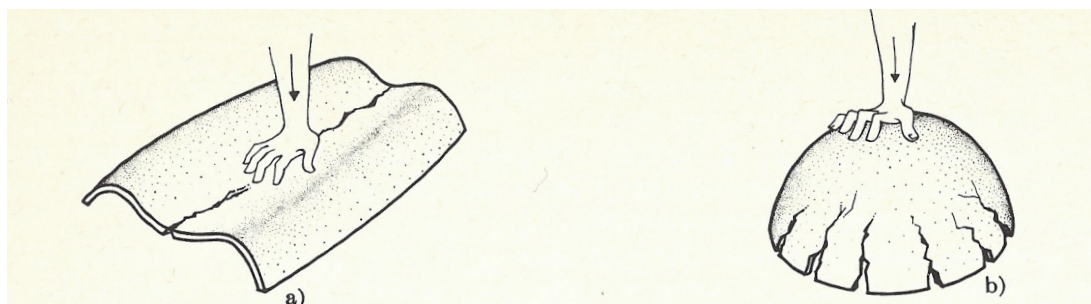


Fig. 30. Esquemes de resposta d'elements de formigó enfront de càrregues verticals.

La resistència al trencament del material i el seu propi pes són les característiques clau per a ajustar les grans llums a la geometria de l'edifici és imprescindible conèixer les limitacions dels materials (fig. 31). En els casos d'estudi que es veuran més avant, els dos materials a tindre en compte són el formigó i l'acer en barra.

Material	σ [kg/mm ²]	γ [g/cm ³]	R [km]	max l
Plomo	1,7	11,4	0,15	0,2
Alambre de aluminio	17	2,7	6,5	8,6
Acero estructural (A 52)	52	7,8	6,7	8,9
Duraluminio	50	2,8	18	24
Madera de pino	10	0,5	20	26,5
Cable de acero	220	7,8	28	37
Seda	—	—	45	—
Algodón	—	—	26-40	—
Cable de perlón	57	1,14	50	66
Hormigón (compresión)	6,0	2,2	2,7	3,6

Fig. 31. Taula de propietats dels materials.¹

Fèlix Candela va fer servir per al fàcil de les membranes equacions en coordenades cartesianes que segueixen el *Teorema de Pucher* (1937). Aquest teorema defineix la funció de les forces d'una membrana a través d'una sola equació diferencial considerant un tensor oblic de forces elàstiques. (fig. 32)

'El càlcul consisteix en la determinació dels esforços de membrana, on sols intervé la *Llei de l'Estàtica*², sense tindre en compte les propietats elàstiques dels materials. En aquest procés s'estableix les condicions d'equilibri segons tres eixos a l'espai, d'un element diferencial de superfície en el qual actuen forces externes i internes aplicades a les cares de l'element. Així s'obtenen tres equacions diferencials en derivades parcials.' (FABER, C., 1981. *Las estructuras de Candela*. (pàg. 25) [4a. impr.]. México: Compañía Editorial Continental.)

¹ ROLAND, C., 1973. *Frei Otto : Estructuras*. (pàg. 47) Barcelona: Gustavo Gili. ISBN 842520772X

² Perquè hi haja equilibri estàtic de forces sobre un cos rígid, la resultant i el moment de totes les forces han de ser nuls respecte a qualsevol punt del pla.

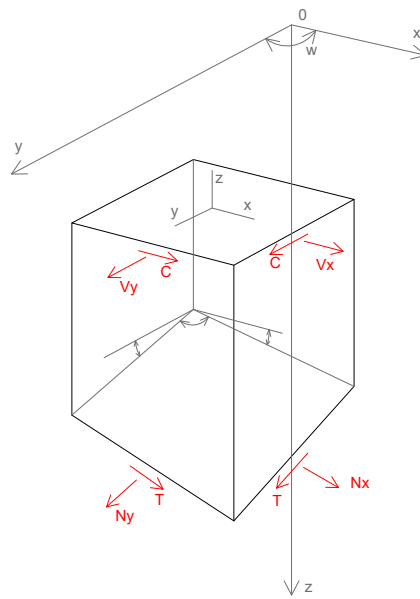


Fig. 32. Esquema de tensions del Teorema de Pucher.

'Més enllà de les equacions diferencials d'equilibri, Candela va posar èmfasis en la importància de les condicions de contorn per a la seua integració. S'estudia els casos bàsics fonamentals, especialment el pes propi de diferents orientacions. Destaca que per a fer possible el funcionament òptim de la superfície, és clau la col·locació d'elements que en els extrems lliures siguin capaços d'imposar tensions tangencials i normals, per a evitar la introducció de flexions locals no desitjades. En el cas dels paraboloides de doble curvatura, per contra, amb determinats talls de plans, és possible mantindre el funcionament de la superfície sense necessitat de suports. El primer cas d'estudi és un clar exemple d'estructura que no necessita suports externs, i per tant, és autoportant.'¹

La majoria de les obres de F. Candela es troben al Mèxic, on va tindre lloc tota la seua vida professional a causa de l'exili. Cap al final de la seua trajectòria va dissenyar obres també a Espanya, el seu país natal. Un exemple local són dos edificis de l'**Oceanogràfic de València**, el restaurant submarí i l'edifici d'accés (fig. 33-39). En aquests dos edificis es resumeix tot l'analitzat anteriorment: la necessitat de suports complementaris, la petita grossària comparada amb l'escala del conjunt, el repartiment d'esforços de la membrana a través de la doble curvatura de la làmina, la petjada de l'encofrat rectilini, etc.

¹ FABER, C., 1981. *Las estructuras de Candela*. [4a. impr.]. México: Compañía Editorial Continental.



Fig. 33. Vista del conjunt del Restaurant Submarí de l'Oceanogràfic.



Fig. 34. Configuració del suport.



Fig. 35. Detall de la marca de l'encofrat a la superfície.



Fig. 36. Relació suport-superfície i detall en zoom.



Fig. 37. Vista del conjunt de l'edifici d'accés de l'Oceanogràfic.



Fig. 38. Detalls de l'articulació que relaciona superfície i suport. Escala de l'espessor de la superfície.



Fig. 39. Detalls del procés de construcció. Encofrat de fusta i cimbres metàl·liques. Projecció de formigó a la superfície.

4. 2. Casos d'estudi

A través de tres obres ubicades a la Comunitat Valenciana, i atenent a les propietats abans analitzades, es completa l'anàlisi de les superfícies reglades i les seues característiques en l'àmbit de l'Arquitectura.

4. 2. 1. LA CATENÀRIA

En la recerca per les grans altures i càrregues xicotetes en estructures perquè els elements constructius puguen suportar-les, té lloc l'aplicació de la catenària. Passant pels desapareguts *Hangars d'Orly* (França) construïts per *E. Freyssinet*¹, fins a *La Pedrera* d'Antoni Gaudí a Barcelona, es pot observar la funcionalitat de cobrir grans llums i sistema bàsic de transmissió d'esforços fins al sòl. (*fig. 40*)



Fig. 40. Passadís del bloc La Pedrera a Barcelona. Catenàries invertides construïdes amb rajoles massisses.

'Corba formada per una cadena, corda o cosa semblant suspesa entre dos punts no situats a la mateixa vertical' Definició de catenària, Real Academia Española (RAE).

Disponible a: <https://dle.rae.es/catenaria>

Antoni Gaudí va portar aquesta recerca a la pràctica amb diverses obres a Barcelona. Amb l'aplicació d'aquesta corba, va dissenyar sistemes estructurals d'edificis. Va ser un dels pioners en incorporar el concepte de catenària en la construcció.

La representació d'aquesta corba s'assembla a la paràbola, fins i tot, Galileu Galilei va afirmar que eren el mateix. Després, els matemàtics *Johann Bernoulli*, *Christiaan Huygens* i *Gottfried Leibniz*², van ser qui van negar tal exactitud. En les següents figures es mostra la diferència:

¹ Eugène Freyssinet, enginyer francès, pioner de les estructures pretensades de formigó i qui les va aproximar cap a la industrialització massiva.

² Fundació *Descubre*. JUNTA DE ANDALUCÍA. (Andalucía, 2021). 'Un paseo y curvas catenarias' Disponible a: <https://paseosmatematicos.fundaciondescubre.es/blog/un-paseo-y-curvas-catenarias/>. Data visita web: 25-04-21

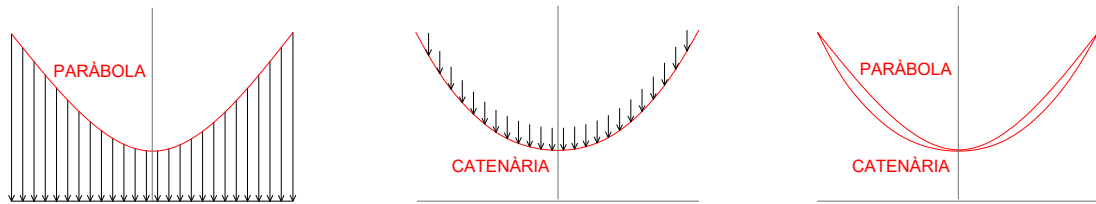


Fig. 41. Superposició gràfica de la catenària i la paràbola.¹

El concepte matemàtic de la catenària ve definit per la funció del cosinus hiperbòlic que s'afegeix a l'equació de la paràbola. Per altra banda, la paràbola ve determinada per la distribució uniforme i horitzontal d'una càrrega determinada al llarg del cable. (fig. 41)

Així és que la forma que defineix l'arc de la catenària depèn de la relació entre l'altura i la distància entre suports. Com més gran siga l'altura més menuda és la càrrega horitzontal, amb la distància constant entre suports. Si l'altura és més petita, la càrrega horitzontal serà major. Aquesta és la raó per la qual és tan útil l'aplicació d'aquesta corba quan es vol aconseguir grans altures i que les càrregues siguin moderades.

El *Sistema Ctesiphonte* va sorgir a l'actual Irak, basat en la catenària invertida, va ser la solució que es va trobar per a reconstruir tot el destruït durant la guerra, d'una manera ràpida i econòmica. Quan es parla d'arc de la catenària, es fa referència a la invertida d'aquesta corba. Aquesta simetria horitzontal en la seua aplicació, justifica que l'arc pot suportar el seu propi pes. En aquest sistema es resol l'estructura i els tancaments, dels paraments i coberta.

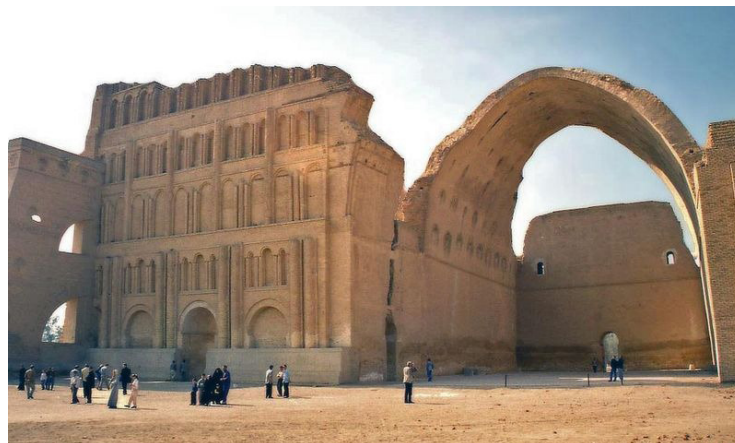


Fig. 42. Arc de Ctesiphonte en Bagdad, Irak.

El nom del sistema ve de l'arc que va sobreviure al *Palau de Ctesiphonte*, al Bagdad, Irak. Es considera que la seua construcció va ser, aproximadament, a 120 anys aC. (fig. 42)

¹ Imatge reproduïda de VV.AA. 2019. LAMINOFLEXIA. LÀMINES DE FORMIGÓ ARMAT DE LA COMUNITAT VALENCIANA. PDF. pág.103. ISBN: 9788494916892.

'L'especial sistema de construcció requereix un mínim d'hores de treball, que és la base del xicotet cost que té, i així mateix, la intervenció d'un únic ofici –l'obrer- per a la construcció total de l'estructura.' (Moreno Barberà, F., 1951)

A través de l'estudi de la natura, assumint que no són corbes idèntiques, la catenària es tradueix a la construcció a través del paraboloides hiperbòlic (fig. 43), que és una quàdriga reglada, l'equació de la qual és:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = z$$

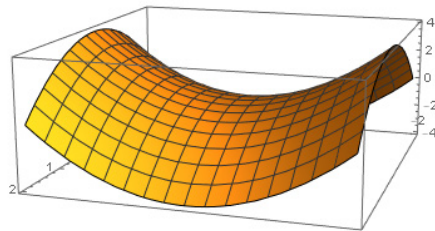


Fig. 43. Representació aproximada d'una catenària a través d'un paraboloides hiperbòlic. Wolfram Mathematica 12.1.

'En els anys 50, quan apretava l'escassejament d'habitatges a Espanya, es va aplicar aquest model per a resoldre la demanda. El primer model que es va construir en aquest territori va ser per l'any 1941, i es formava per una llum lliure de 6 metres i una grossària total de làmina de 3 cm, sense reforços. El mètode de construcció es basa en cintres tubulars situades a 90 centímetres de distància i recolzades sobre sabates. Sobre aquest sistema de cintres s'ancora una tela xarpellera sobre la qual s'aplica una capa de morter de ciment. A causa del pes propi del morter la tela flecta i genera les ondulacions característiques del model.'¹

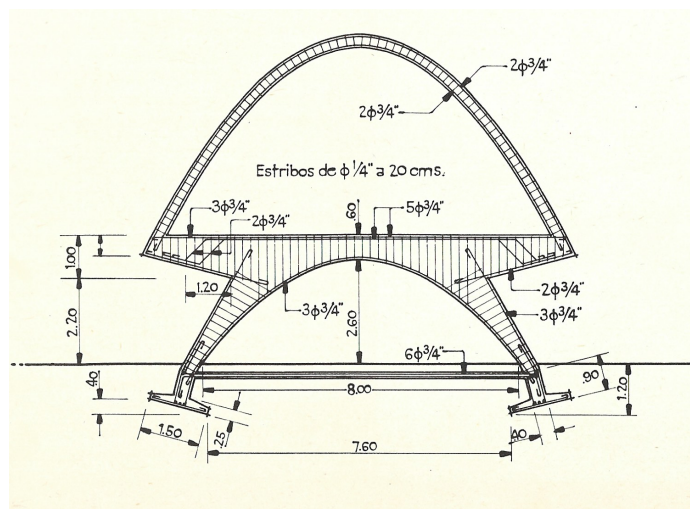


Fig. 44. Secció acotada del Pavelló de Raig Còsmics. Corba superior després repetida a Espanya a l'àmbit dels habitatges.

¹Text extret de V.V.AA. 2019. LAMINOFLEXIA. LÀMINES DE FORMIGÓ ARMAT DE LA COMUNITAT VALENCIANA. PDF. pág.107. ISBN: 9788494916892

En 1951, F. Candela utilitza aquesta tècnica constructiva en el Pavelló de Raigs Còsmics al Mèxic (fig. 45-46). En aquest cas la superfície no tocava el sòl, sinó que feia servir una subestructura de formigó per a elevar la superfície de coberta i amb ella, l'espai interior. Aquest és un cas d'aplicació del *Sistema de Ctesiphonte*, tancat als extrems per dues làmines ondulades.

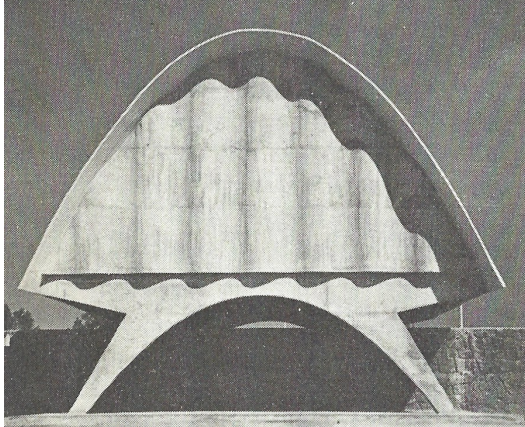


Fig. 45. Fotografia de l'alçat real de l'edifici.



Fig. 46. Pavelló dels Raigs Còsmics a la ciutat de Mèxic.

GRUP RESIDENCIAL MARQUÉS DE VALTERRA

El Perellonet, València (1952-1953)

Carlos de Miguel (1904-1986) arquitecte



Fig. 47.

'A l'inici dels anys cinquanta a Espanya, represa la modernitat i superat el llarg catàleg de pobles tradicionalistes, es va començar a contemplar des de Madrid la possibilitat de desenvolupar models alternatius amb els quals afrontar la producció massiva d'habitatges. Els arquitectes relacionats amb aquest moviment van ser Alejandro de la Sota, José L. Picardo, Fernando Moreno Barberá o Rafael de La-Hoz, Carlos de Miguel, autor del cas d'estudi, entre altres.¹

L'aplicació del *Sistema Ctesiphonte* a Espanya es va veure més influenciat a la zona sud. Un dels primers casos va ser el grup residencial en Palma del Río, Còrdova, per l'arquitecte Rafael de la Hoz². (fig.48) La distribució en planta (fig.49), és caracteritzada per espais mínims i l'entrada de llum als habitatges és escassa.



Fig. 48. Grup residencial amb el Sistema Ctesiphonte, en Palma del Río, Còrdova.

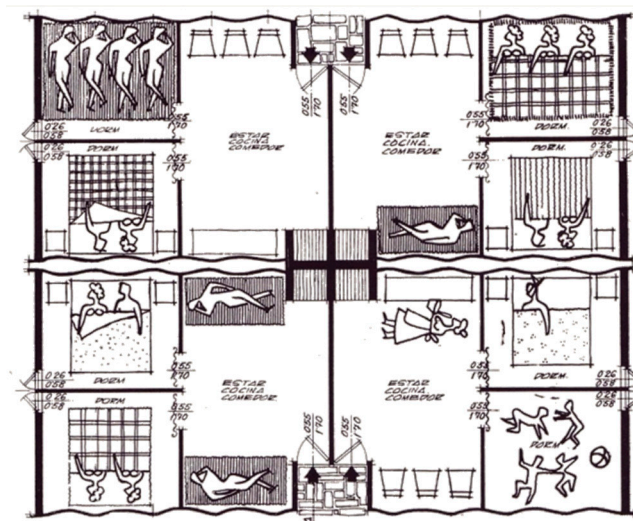


Fig. 49. Planta del grup residencial de Palma del Río.

¹ Col·legi Territorial d'Arquitectes de València (CTAV). Disponible a: <http://www.arquitectosdevalencia.es/arquitectura-de-valencia/1936-1974/grupo-residencial-marques-de-valterra>. (Data visita: 18-03-21)

² Arquitecte egressat de l'ETSAM (1924-2000), impulsor de l'Arquitectura Moderna Espanyola durant a segona meitat del segle XX.

Després, en la mateixa província, en Villaviciosa de Còrdova, i seguint les mateixes línies de referència; es construeix un grup residencial temporal amb el mateix patró com a base, per als treballadors de la Confederació Hidrogràfica del Guadalquivir. (fig. 50)



Fig. 50. Grup residencial de caràcter temporal, en Villaviciosa de Còrdova.

Simultàniament, a l'altra part del món, en el mateix període cronològic, en 1949, Fèlix Candela va construir el que seria la primera closca de formigó (fig. 51). Aquesta làmina sols està sotmesa a esforços de compressió, amb grossària constant. La geometria és la mateixa que el grup residencial Marqués de Valterra, un tros de paraboloid hiperbòlic tallat per dos plans verticals i un horitzontal, que atorga caràcter autoportant a la superfície.

La tipologia d'aquesta estructura i l'economia estan relacionades pel que fa a la voluntat de construir de pressa i estalviar material. Igual que passa amb el disseny d'evolvent per a una escola (fig. 52), s'anomena *econòmica* per l'aplicació directa d'aquesta superfície.

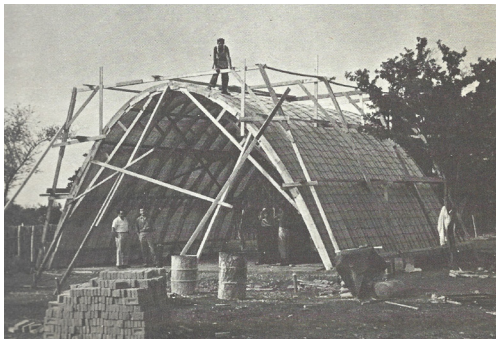


Fig. 51. Procés de construcció de la primera closca de formigó de Fèlix Candela.

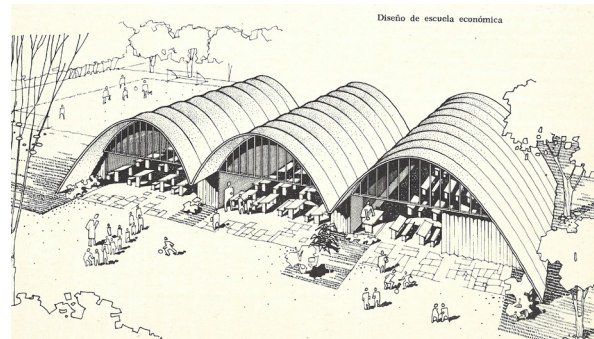


Fig. 52. Disseny d'una escola anomenada 'econòmica' per estar configurada amb parts de paraboloides hiperbòlics.

Entre tots els avantatges que mostra aquesta estructura, cal destacar: la grossària mínim necessari per a complir les condicions d'estabilitat i resistència, la possibilitat d'una àmplia entrada de llum en els extrems i la simplificació de l'evacuació d'aigües pluvials; gràcies a la curvatura de la superfície, es divideix el caudal d'aigua en múltiples àmbits, passant per tot el tancament fins al sòl.

El Grup Residencial Marqués de Valterra, orientat a pescadors en el Perellonet, es troba a l'avinguda de les Gaviotes, núm. 23-29, en el Perellonet (*fig. 53*), i va ser impulsat per a servir al sector més pobre de la població. Amb l'aplicació del *Sistema Ctesiphonte*, s'aconsegueix crear el tancament perimetral i la coberta amb la mateixa superfície contínua i autoportant. Aquesta continuïtat aconsegueix optimitzar el material necessari, la mà d'obra i temps de construcció.



Fig. 53. Fotografia aèria del Grup Residencial Marqués de Valterra. El Perellonet. En roig el cas d'estudi. Google Earth. 39°18'29.3"N 0°17'51.3"W (orientada al Nord)

El conjunt d'habitatges està format per unes 5 unitats de conjunt repartides en la zona, prop entre si. Actualment, alguns mòduls es troben adossats a altres edificacions. Això ha fet que es degrade la seua qualitat paisatgística i arquitectònica. El color blanc de les edificacions és típic a la costa Mediterrània, funcionant com una protecció enfront de la calor, ja que el color blanc reflecteix la majoria dels raigs solars.

Els elements que connecten amb l'exterior, com les portes principals i les finestres, són configurades pel buit de prismes rectangulars, i quadrats, en la superfície. Es pot observar dues tipologies d'habitatges, una amb tres habitacions i l'altra amb dues. Aquests espais són mínims, característics dels habitatges que volen reduir en costos i fer més unitats per metre quadrat (*fig. 54*). Cada habitatge tindrà una superfície de, aproximadament, 42 i 54 m².

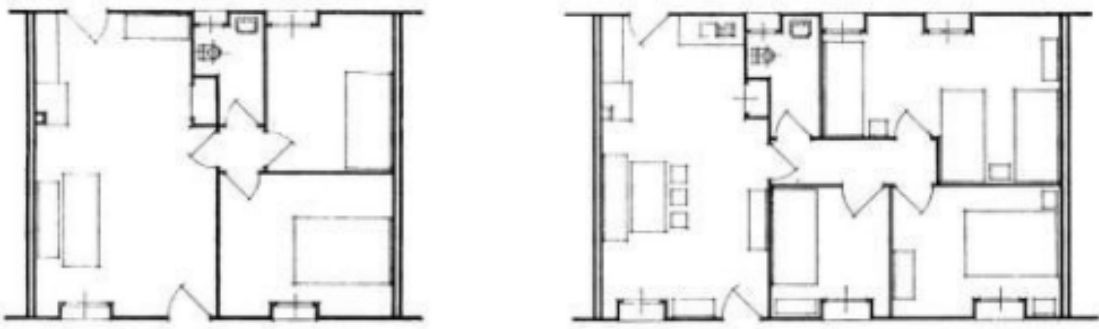


Fig. 54. Planta dels habitatges unifamiliars del Grup Marqués de Valterra. Dues tipologies.

Aquest cas d'estudi està clarament influenciat pels primers casos d'aplicació d'aquest sistema a Espanya, com s'ha vist en el cas de localitats a Còrdova. La distribució en planta és molt semblant, i també les característiques dels espais.



Fig. 55. Primeres fotos de l'estat original de les residències.



Fig. 56. Vista d'un volum residencial.



Fig. 57. Vista d'alçat del cas d'estudi.

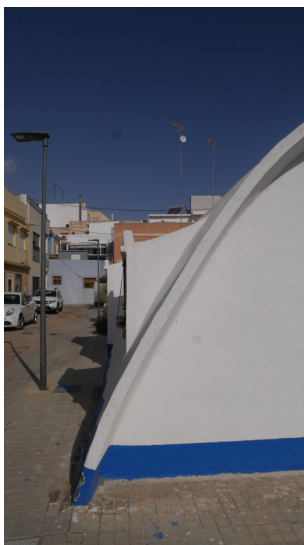


Fig. 58. Perfil de l'edifici.



Fig. 59. Escala real de la grossària de la làmina.

DESCRIPCIÓ GEOMÈTRICA AMB *AutoCAD 2019*

Pel que fa a la tipologia de superfície que configura el tancament i coberta, s'ha de destacar la intersecció de la quàdrica, com és el paraboloid hiperbòlic, i un pla vertical. Aquesta intersecció origina una cònica ordinària, per tant, el pla es considera secant a la quàdrica. (fig. 60)

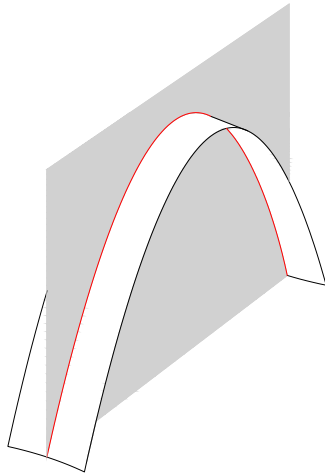


Fig. 60.
Pla vertical secant interseca amb el tros que queda de quàdrica. La traça roja és la cònica ordinària que es genera per la intersecció dels dos elements. El tros del pla que queda sota de la cònica és el tancament en els extrems del conjunt.

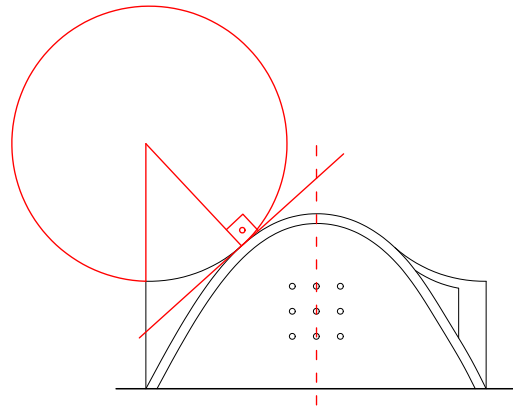


Fig. 61.
Descripció del volum de la porta i finestres. La corba de coberta d'aquests elements és una part de circumferència. El volum principal té un eix simètric, que simplifica la transmissió de càrregues fins a terra.

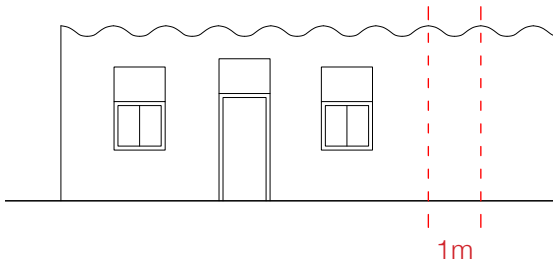


Fig. 62.
Alçat de l'edifici. Unitat de paraboloid hiperbòlic, copiat successivament.

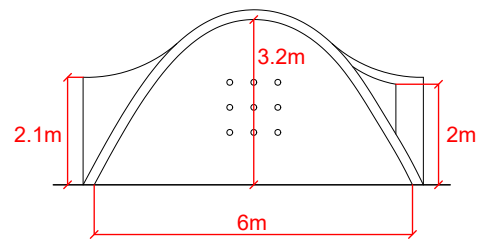


Fig. 63.
Mesures de la paràbola menor que configura el volum. La paràbola major (màxima) mesura 3,38 m en vertical i 6,2 m en horitzontal.

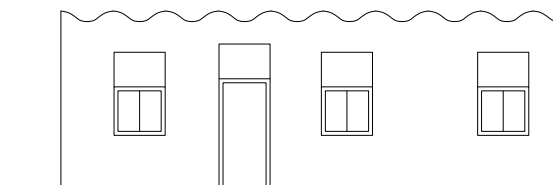


Fig. 64.
Alçat de l'edifici.¹

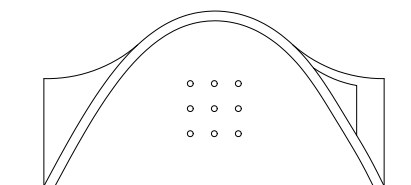


Fig. 65.
Perfil de l'edifici.¹

¹ Imatges reproduïdes de VV.AA. 2019. LAMINOFLEXIA. LÀMINES DE FORMIGÓ ARMAT DE LA COMUNITAT VALENCIANA. PDF. pág.224. ISBN: 9788494916892

Per a obtenir el mòdul del conjunt a estudiar s'ha de seguir els següents passos:

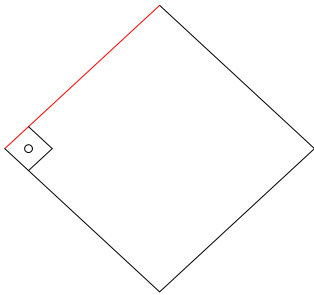


Fig. 66.
 Crear un rombe, en aquest cas un quadrat, de costats iguals. Les dimensions són arbitràries, ja que després el següent s'escala a mida.

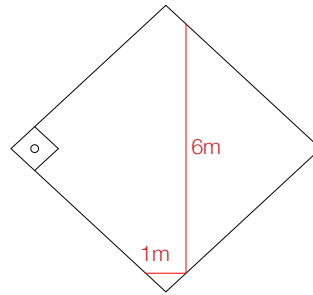


Fig. 67.
 Traçar una recta d'1 m a 45° respecte d'un costat. En la intersecció amb un extrem de l'1 m i el quadrat, traçar perpendicular al metro una recta de 6 m que ha de coincidir amb altra recta del quadrat.

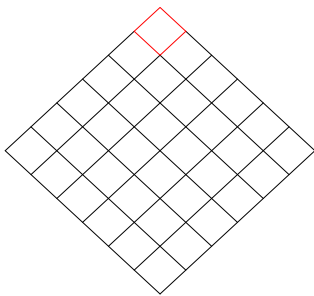


Fig. 68.
 Reticular el rombe en subquadres.

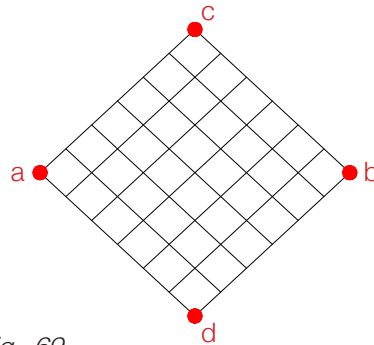


Fig. 69.
 En els quatre vèrtexs (a, b, c, d) es tracen línies rectes perpendiculars al pla del rombe.

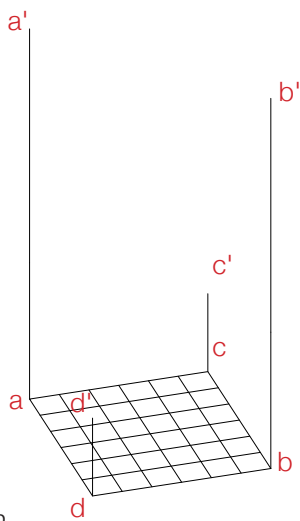


Fig. 70.
 Les rectes a-a' i b-b', que són oposades respecte del rombe, tenen la mateixa mesura. Com també les rectes c-c' i d-d'. Els extrems superiors de les rectes són unides per línies rectes.

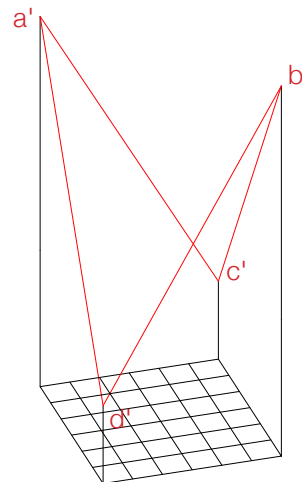


Fig. 71.
 Els extrems superiors de les quatre rectes que queden són unides per línies rectes.

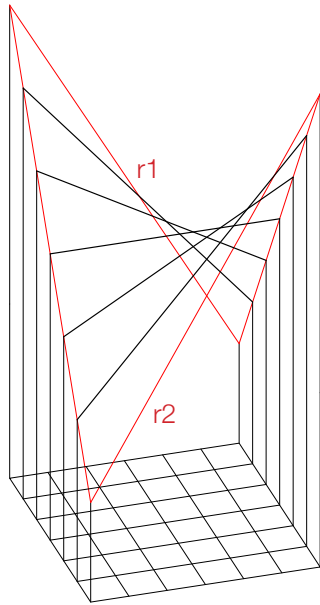


Fig. 72.
 Traçar rectes perpendiculars al pla del rombe en els extrems de les rectes que configuren la retícula que es troba dins del polígon, fins a la perimetral aèria que s'ha traçat abans. Així, es crea una aproximació del que serà la superfície final.

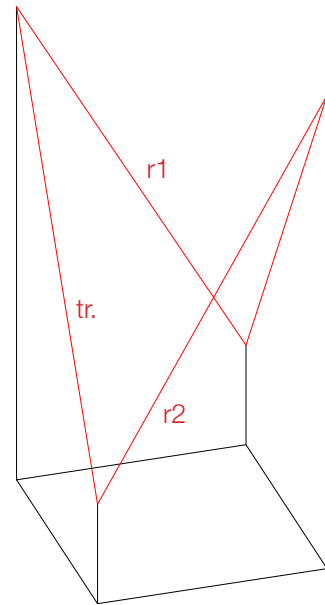


Fig. 73.
 S'identifica dues rectes oposades ($r1$ i $r2$) respecte del rombe i una recta diferent que fa el paper de trajectòria ($tr.$). El comandament SOLEVACIÓ, amb aquestes tres rectes referència crea una superfície.

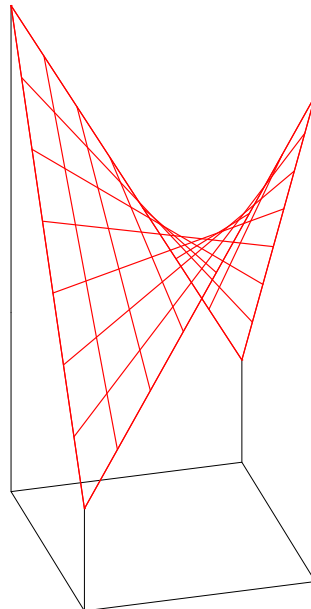


Fig. 74.
 Amb la 'solvació' es crea la superfície de paraboloides hiperbòlic a partir d'un rombe base arbitrari.

Una vegada s'ha generat la superfície a manipular, es copia successivament, s'escala per ajustar-la amb les mesures reals. A partir de la paràbola genèrica, i incloent les distàncies reals, es pot controlar les mesures de la superfície abans creada:

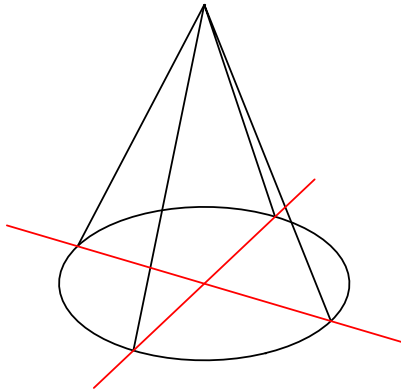


Fig. 75.
Amb el comandament CON, es crea un con, d'altura i diàmetre de base arbitraris.

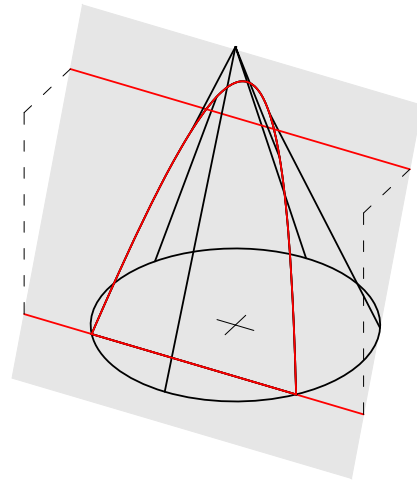


Fig. 76.
El con és tallat per un pla, també aleatori. El pla passa per les dues línies vermelles, i origina una cònica.

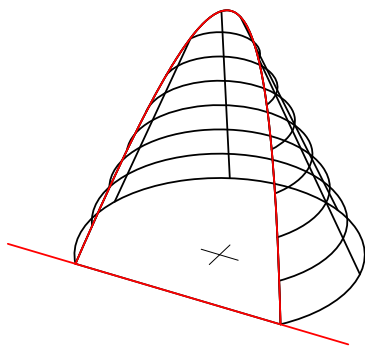


Fig. 77.
S'elimina una part del con. Amb el comandament DESCOMPON, s'obté la superfície que queda per davall de la paràbola. Es torna a utilitzar el comandament anterior per a descompondre l'element i quedar-se sols amb la corba cònica.

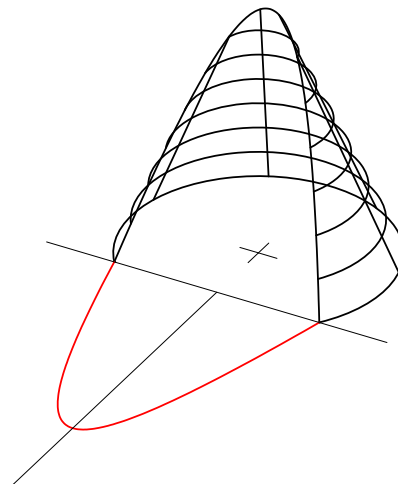


Fig. 78.
Amb el comandament GIRA3D, la paràbola es gira fins al pla horitzontal.

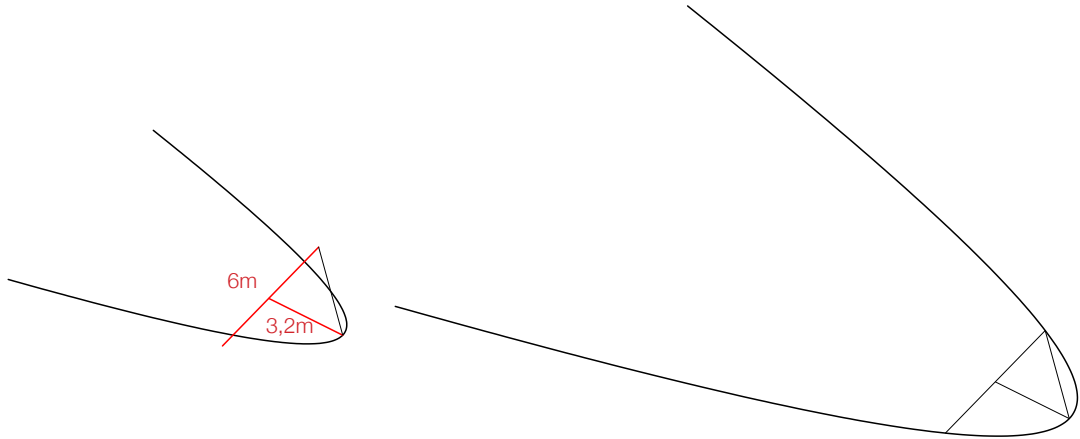


Fig. 79.
 En el punt superior de la paràbola es traça una recta de 3,2 m i a un extrem, una recta de 6 m. Aquestes mesures corresponen a les reals del cas d'estudi.

Fig. 80.
 Amb el comandament ESCALA, s'escala la paràbola. Es fa coincidir la intersecció de paràbola i diagonal de la figura anterior amb l'extrem de la recta de 6 m.

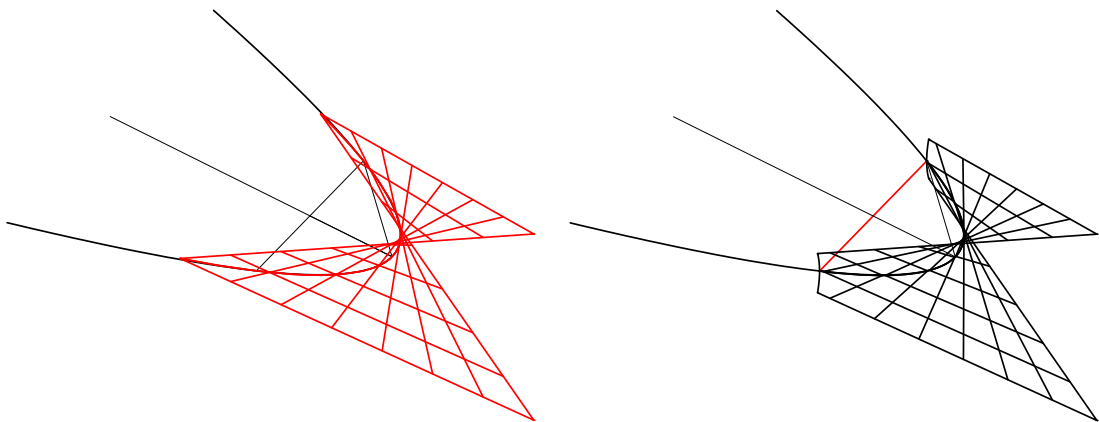


Fig. 81.
 Amb el comandament ALINEAR, es fa coincidir el punt mitjà de la superfície que s'ha creat abans (fig.74), amb el punt superior de la paràbola.

Fig. 82.
 Igual que en la figura 81, s'escala la superfície importada per a fer coincidir les traces d'ambdues corbes. A seguir, es talla per la recta de 6 m.

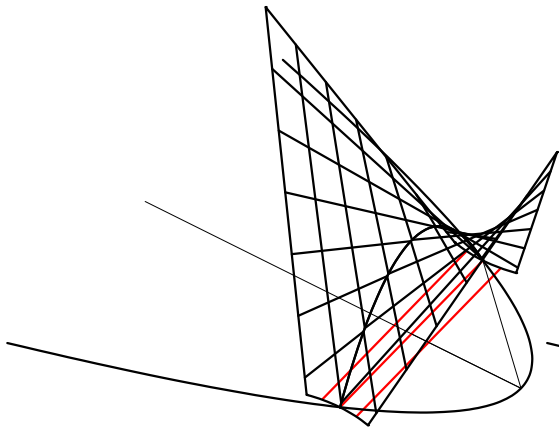


Fig. 83.
Amb el comandament GIRA3D es gira la superfície, l'eix de rotació de tal gir és la línia inferior de 6 m. Aquesta mateixa línia es desfasa 50 cm a cada costat. Donat que la unitat que forma l'element a modelar és d'1 m d'amplària.

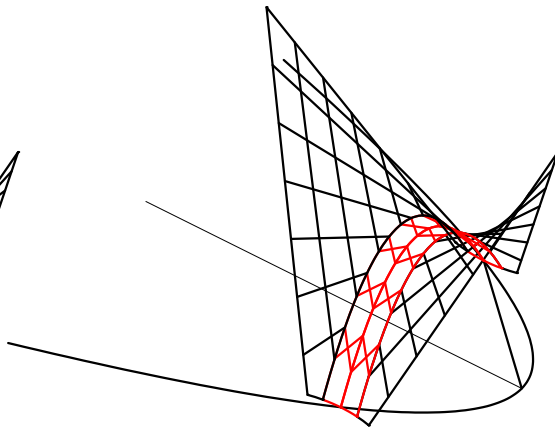


Fig. 84.
Es talla la superfície verticalment per les dues línies desfasades.

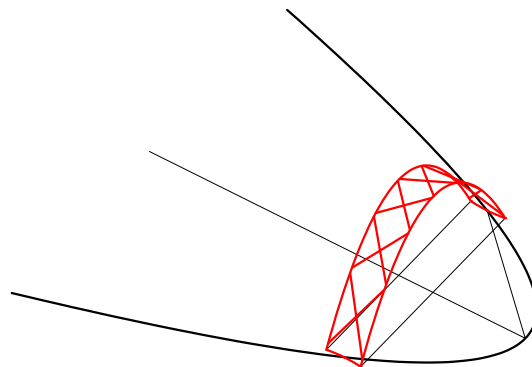


Fig. 85.
Les dues parts que queden s'uneixen amb el comandament UNIÓ. Es queda una part del paraboloid hiperbòlic, que copiat successivament, origina el conjunt que s'està analitzant.

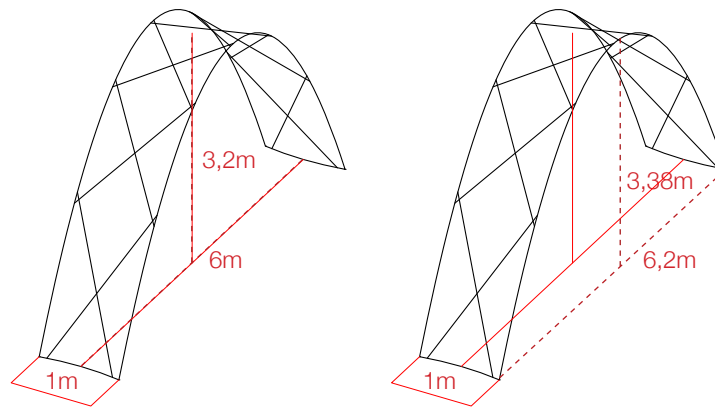


Fig. 86. Mòdul generador. Mesures mínimes i màximes.

Amb el mòdul generador del conjunt, es copia successivament fins a 6 vegades per a obtenir una superfície representativa del conjunt residencial a analitzar:

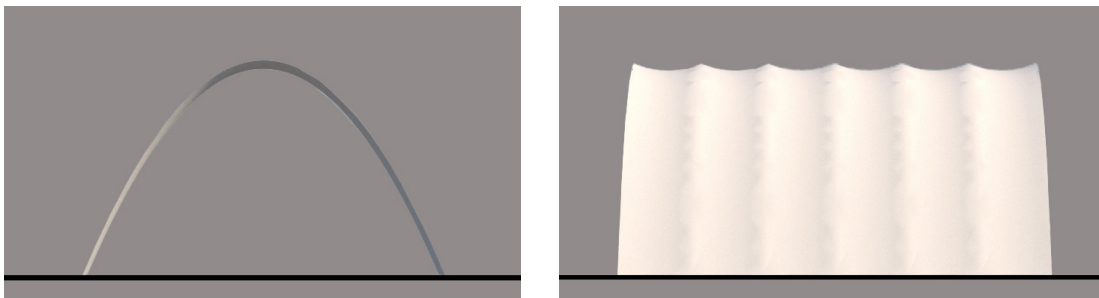


Fig. 87. Alçat i perfil de l'element. Modelatge 3D.

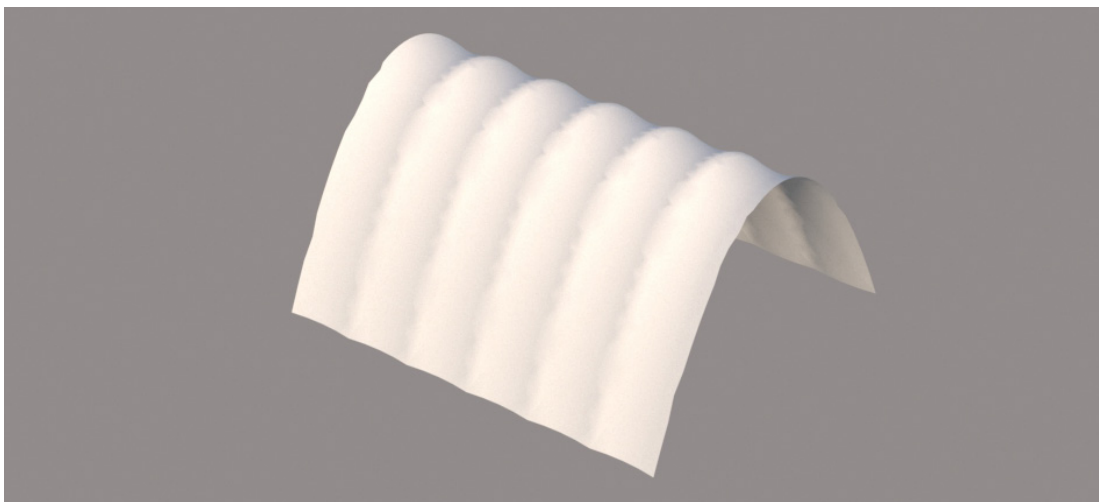


Fig. 88. Axonometria de sis unitats successives. Trama estructural 2D.

Es procedeix a efectuar, geomètricament, els buits de les portes i les finestres de tal superfície. Al conjunt ja s'ha sumat els dos plans verticals dels extrems per tancar l'espai que cobreix.

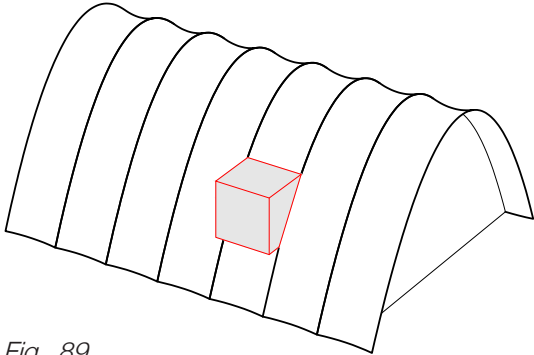


Fig. 89.
Prismes de base quadrada d'1 m de costat es col·loquen a l'altura de les finestres.

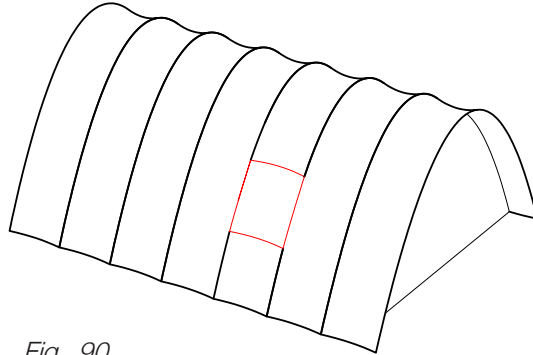


Fig. 90.
Amb el comandament DIFERENCIA, se selecciona primer la superfície i després el volum. Es crea un buit a la superfície on abans estava el prisma.

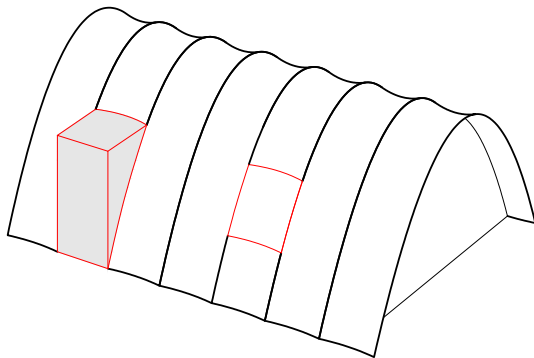


Fig. 91.
El mateix es fa amb prismes de base rectangular, de dimensions de les portes. Prismes rectangulars d'1 m per 2,1 m d'altura.

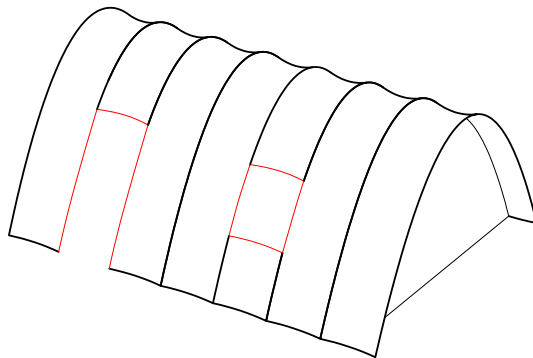


Fig. 92.
Es procedeix igual que en la figura 86.

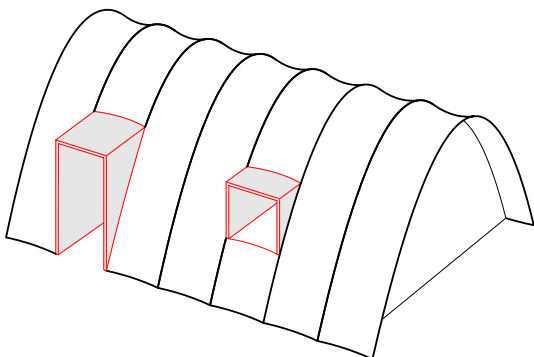


Fig. 93.
Els volums abans utilitzats es queden sols en una grossària perimetral de 5 cm i intersequen amb la superfície. Es forma un volum conjunt estanc a l'aigua, que deixa pas a la llum natural.

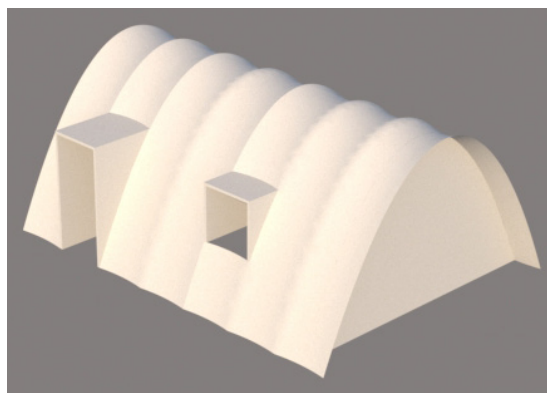


Fig. 94.
Modelatge 3D conceptual del conjunt de volums bàsics que formen els habitatges.

La curvatura d'aquesta superfície es modifica amb els valors dels angles que configuren el rombe base. Si el rombe passa de ser un quadrat a tindre dos angles del polígon diferents dels altres dos, la superfície canvia de geometria i adopta, més o menys curvatura accentuada en el mòdul que queda. Com es pot verificar a continuació:

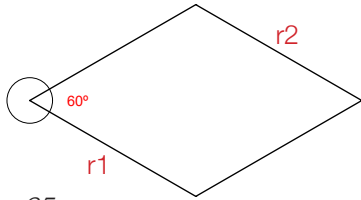


Fig. 95.
 Crear un rombe, d'angles interiors de 60° i 120° .

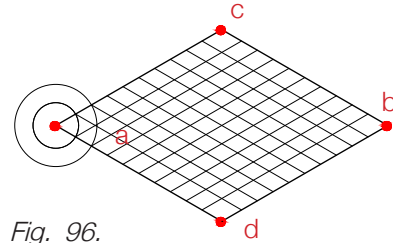


Fig. 96.
 En els quatre vèrtexs (a, b, c, d) es tracen línies rectes perpendiculars al pla del rombe.

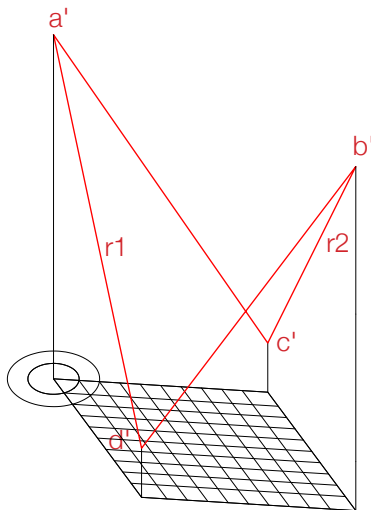


Fig. 97.
 Les rectes a-a' i b-b', que són oposades respecte del rombe, tenen la mateixa mesura. Igual que les rectes c-c' i d-d'. Els extrems superiors de les rectes són unides per línies rectes.

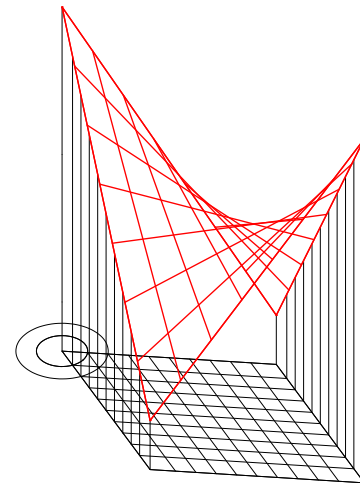


Fig. 98.
 S'identifica dues rectes oposades respecte del rombe i una recta diferent que fa el paper de trajectòria. El comandament SOLEVACIÓ, amb aquestes tres recta referència crea una superfície.

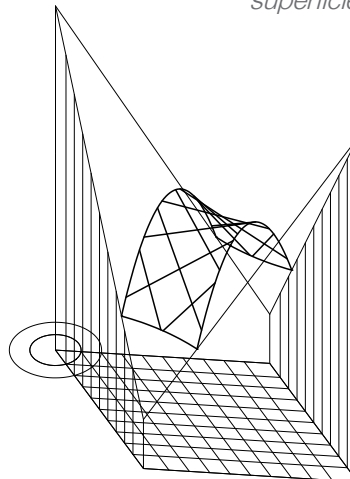


Fig. 99.
 Amb l'eliminació de les parts tallades es queda una part d'un paraboloid hiperbòlic amb curvatura més suau.

PARAMETRITZACIÓ AMB *MATHEMATICA 12.1*.

Es procedeix a analitzar la coberta a través de la parametrització matemàtica amb ajuda del programa *Wolfram Mathematica 12.1*.

Amb la funció $f1[x_, y_] := 0.72 * x^2 - 3.2 * y^2 / 9 + 3.2$ que es tracta de la parametrització del paraboloides hiperbòlic, i el comandament *ParametricPlot3D* es genera el mòdul que forma les vivendes del Marqués de Valterra. Amb el comandament *Show* es mostra la modelització. Aquesta funció és limitada a l'amplària d'1 metre, com és en la realitat, igual que les mesures d'alçària (3,2 m) i de llum (6 m).

Per a aproximar-se el màxim possible al volum real, es copia el mòdul successivament 6 vegades, igual que en la maqueta (es pot apreciar a l'annex que conté aquest document).

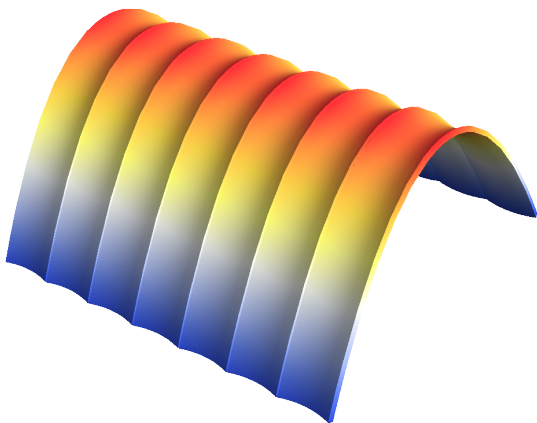


Fig. 100. Perspectiva del volum generat pel Mathematica 12.1.

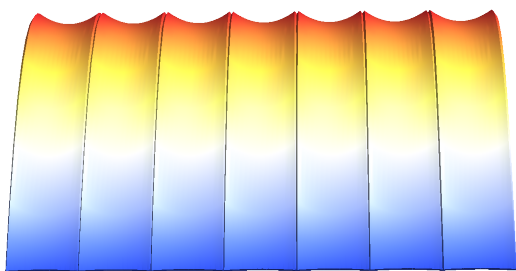


Fig. 101. Perfil dels 7 mòduls generats.

El fitxer complet del *Mathematica 12.1*. es pot veure a través del codi QR de la pàgina 4 d'aquest document.

4. 2. 2. EL PARABOLOIDE HIPERBÒLIC

Com ja s'ha comentat anteriorment, el paraboloid hiperbòlic, també anomenat *cadira de muntar* (fig. 102) és molt comú en les obres de F. Candela, entre altres arquitectes, que se'ls relaciona per la voluntat d'aconseguir grans llums amb superfícies de poca grossària. Es té com a base la mateixa tipologia de superfície es pot obtenir geometries finals diferents que es poden aplicar a la construcció en funció dels talls amb plans que es fan a l'element.

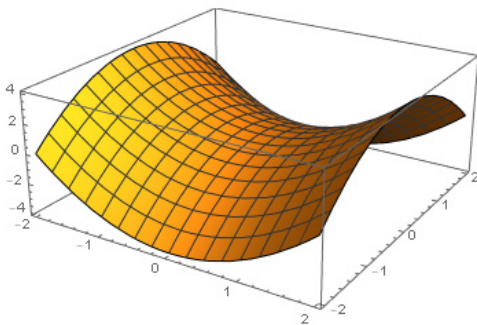


Fig. 102. Exemple de quàdrica.
Wolfram Mathematica.

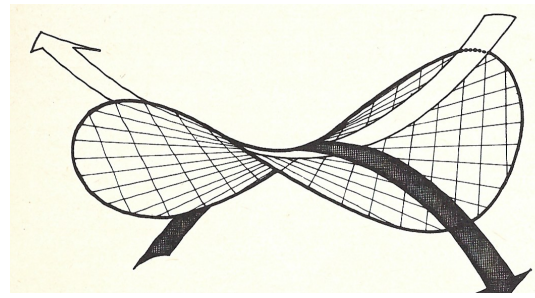


Fig. 103. Paraboloid hiperbòlic. Les dues direccions principals de la superfície quant a repartiment de forces.

El que cal destacar d'aquesta tipologia d'estructura, generalment, no són els esforços en la làmina, sinó les forces que aquesta transmet als suports. (fig. 101) Per a dimensionar tals suports, o almenys veure si són necessaris, cal conèixer l'ordre de les magnituds i la direcció de les forces que actuen sobre ells. El comportament del conjunt estructural i els esforços que actuen en la superfície depenen de factors com: la disposició de les armadures, la grandària i les deformacions dels suports.

El càlcul d'aquesta tipologia d'estructura consisteix en la determinació dels esforços de membrana, on sols intervé les lleis de l'Estàtica. No es tenen en compte les propietats elàstiques dels materials, ja que sempre tenen un caràcter hipotètic i, per tant, incert. Per tant, com menys incerteses es tinga respecte al càlcul de les estructures, millor.¹

Perquè una superfície funcione com a closca enfront de càrregues externes actuant sobre ella, necessita formes corbes, cosa que dificulta el seu disseny, tant en l'àmbit gràfic com constructiu. La forma que té el paraboloid hiperbòlic presenta les millors característiques com membrana a escala estructural.

¹CANDELA, F. y FABER, C., 1981. *Las estructuras de Candela*. (pàg.45) [4a. imp.]. Mexico: Compañía Editorial Continental.

a) La doble curvatura atorga la qualitat d'estructura tensada pel que cada línia de càrrega funciona a compressió, quan té concavitat a l'interior; i a tracció quan hi ha la convexitat cap a l'interior (*fig. 104*). És a dir, té simultàniament la funció d'arc i cable. Per altra banda, dota de suficient rigidesa a la superfície, i no necessita estructures secundàries, és a dir, és autoportant.

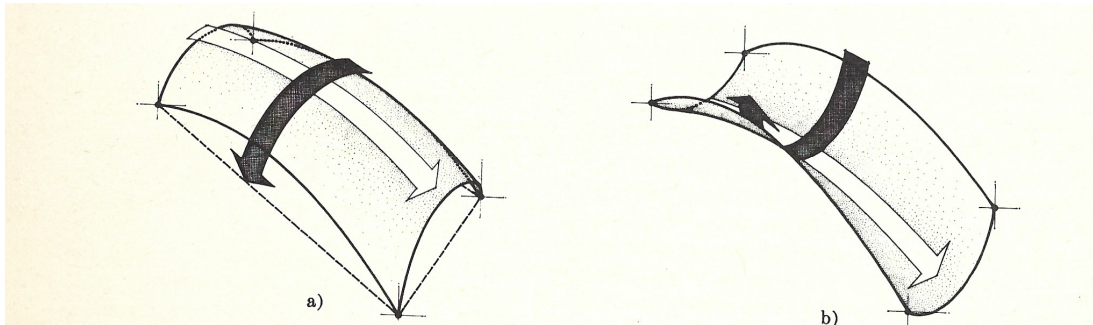


Fig. 104. Direccions principals d'esforços a suportar. a) Superfície el·líptica. b) Superfície hiperbòlica. Aquestes dues curvatures doten a la superfície de resistència enfront de deformacions.

b) La manera de generar-se a partir de dues famílies de rectes permeten poder definir-la a partir de coordenades cartesianes, per mitjà de senzilles equacions de primer grau, el que facilita la distribució de les armadures necessàries, i creen nervis sobre les rectes generatrius.

c) Els extrems generats per les seccions de plans rectes permeten obtenir rectes, paràboles o hipèrboles, que fan a la superfície apta per a enllaçar extrems rectes amb formes corbes o viceversa. Amb això, a partir del tros de *hyper* (paraboloide hiperbòlic) es poden generar infinites formes. A més, si els extrems s'allunyen de la direcció d'una de les directrius, es reparteixen millor els esforços i s'aconsegueix alliberar l'extrem, donant aspecte de lleugeresa a l'estructura.

Aquest últim punt, el *c*, és el que fa possible que l'Estació de Servei *El Rebollet* siga configurada per sis superfícies unitàries que a l'unir-se formen una total unitat i no es diferencia part. Al ser els extrems rectes, s'acoblen entre si i creen continuïtat en tota la superfície de la coberta.

La principal diferència entre les superfícies de curvatura simple i doble, està en el fet que les primeres són figures desenvolupables, amb curvatura de Gauss nul·la, i es poden realitzar a partir de figures planes, el que facilita una primera aproximació al disseny i posterior construcció.

ESTACIÓ DE SERVICI EL REBOLLET

Oliva, València (1960-1962)

Juan de Haro Piñar (1924-2003)



Fig. 105.

El cas d'anàlisi anterior també es tracta del paraboloides hiperbòlic, però en aquest cas és manipulat de manera diferent. La geometria buscada no requereix cap tall, sols és completada per suports de formigó en els dos extrems inferiors que uneixen la superfície a terra. L'Estació de Servei *El Rebollet* està situada en la carretera N-322 a l'altura d'Oliva, València. (fig. 106)

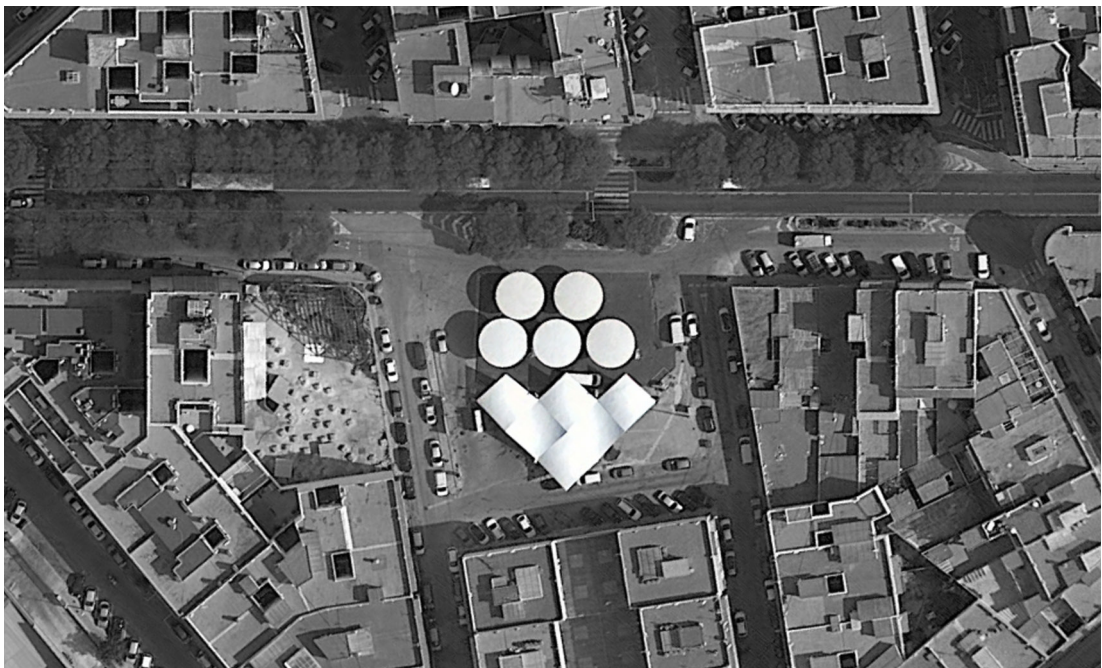


Fig. 106. Foto aèria de l'Estació de servei El Rebollet. Oliva. Google Earth. $38^{\circ}55'22.2''N$ $0^{\circ}07'28.2''W$

L'inici de construcció va tindre lloc en l'any 1960 i es va inaugurar el 1962. Rep aquest nom perquè antigament es trobava al costat la cafeteria *El Rebollet* (fig.107-108), amb una estructura metàl·lica no usual per a l'any i el lloc on se situava. Els dos edificis eren, i encara són, un exemple excel·lent de l'arquitectura de carretera, importada dels Estats Units, amb caràcter futurista i de culte al vehicle i el progrés. Aquesta estació de servei, és clarament influenciada per les estructures de Fèlix Candela i Eduardo Torroja, en les quals la recerca de l'eficiència estructural a través de la forma acaba configurant la imatge arquitectònica.



Fig. 107. Vista del conjunt complet. Estació de servei, gasolinera i cafeteria. No existent.



Fig. 108. Edifici Ariston. Arquitecte Marcel Beuer. Cafeteria El Rebollet.

Aquesta estació de servei es configura també per un conjunt d'elements amb forma de *paraigües de formigó* (fig. 109-110), forma de la qual, Fèlix Candela havia experimentat ja al Mèxic, i que és una de les primeres obres que va fer. L'estructura de la part de l'aparcament dels vehicles que paren a repostar gasolina, està clarament inspirada amb els paraigües de F. Candela, a pesar de no tindre la mateixa geometria. Cal destacar, que la marca de gasolineres *Repsol* va expandir aquesta tipologia constructiva en moltes de les seues estacions de servei. El que va acabar sent una imatge característica de la marca de la gasolinera.

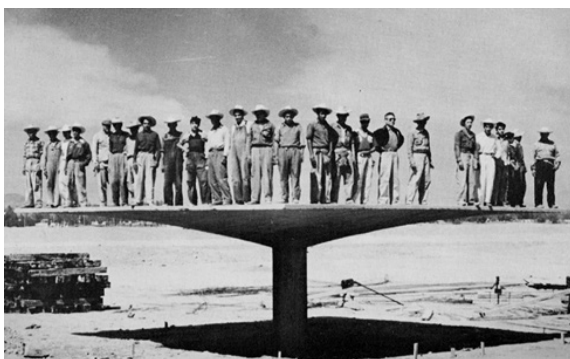


Fig. 109. Paraigües de hypars experimental (1953). Fèlix Candela al Mèxic.



Fig. 110. Indústria tèxtil High Life (1955), en Coyoacán. Combina de forma senzilla els paraigües de hypars amb l'entrada de llum natural. Fèlix Candela.

L'estructura de formigó que configura la coberta és formada per paraboloides hiperbòlics. Aquesta superfície és doblement reglada, és a dir, és configurada a partir de línies rectes. Aquesta tipologia es caracteritza també per ser de curvatura anticlàstica doble¹, el que justifica que els centres de curvatura estan situats en costats oposats de la superfície. L'estabilitat d'aquesta estructura és donada per l'oposició de dues curvatures que permeten tensar la superfície sense perdre la forma. Al tensar la superfície es redueix la seua elasticitat, i per tant, la seua tendència a deformar-se baix càrrega pròpia i externa.



Fig. 111. Fotografia de l'estat original de la façana de darrere.



Fig. 112. Fotografia estat original. Entrada principal.



Fig. 113. Fotografia estat original del conjunt de l'estació de servici.

¹Dos centres de curvatura als dos costats de la membrana. Desenvolupen sempre una doble acció d'arc i cable, a més de l'acció de tallant resultat de la curvatura. Disponible a: <https://www.arkiplus.com/estructuras-anticlasticas/>
Última visita a la web: 11-05-21



Fig. 114. Unió de dues unitats de paraboloides hiperbòlics.



Fig. 115. Espessor constant de la superfície.



Fig. 116. Petjada de l'encofrat.



Fig. 117. Unió de dos paraboloides hiperbòlics a través d'una recta, i el suport.



Fig. 118. Vista de l'encontre entre la superfície i el suport.

DESCRIPCIÓ GEOMÈTRICA AMB *AutoCAD 2019*

Es parteix d'una base quadrada per a configurar un paraboloid hiperbòlic de planta també quadrada.

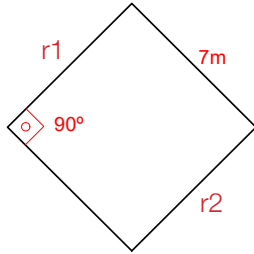


Fig. 119. Amb el comandament POLILÍNIA, dibuixar un quadrat de 7 m de costat.

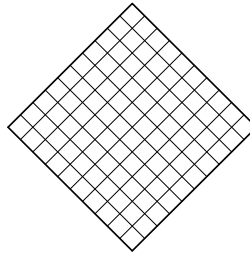


Fig. 120. Traçar una retícula dins del quadrat de 0,07 m cada subquadrat. La dimensió dels quadrats que queden en la retícula és arbitrari.

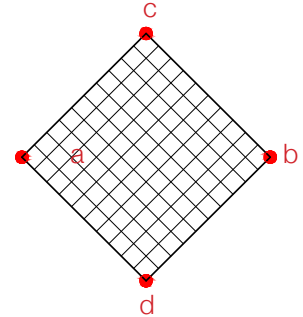


Fig. 121. En els quatre vèrtexs del quadrat alçar perpendicularment al plànol del quadrat quatre rectes. Les rectes oposades seran de la mateixa mesura.

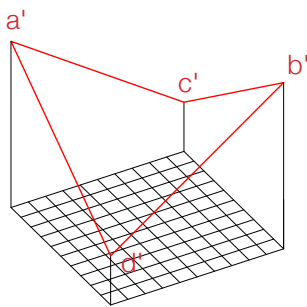


Fig. 122. La recta a-a' mesura el mateix que b-b', 8 m. Passarà el mateix amb c-c' i d-d', igual a 3 m. La diferència de dimensió és 5 m, l'altura màxima de la superfície. Per tant, les rectes que uneixen els punts a'-b'-c'-d' mesuren 8,6 m en vertadera magnitud.

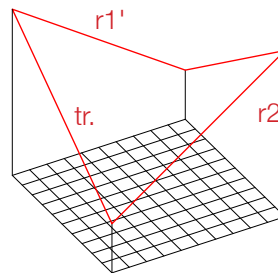


Fig. 123. Es defineix la recta que uneix els punts a'-c' com r1' i la que uneix b'-d' com r2'. A seguir, es defineix una recta diferent de les nomenades abans, com la trajectòria a seguir després.

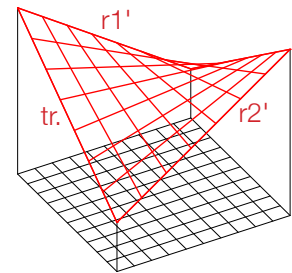


Fig. 124. El comandament SOLEVACIÓ, s'utilitza per a crear una superfície a través de dues rectes (r1' i r2') i una trajectòria definida (tr.).

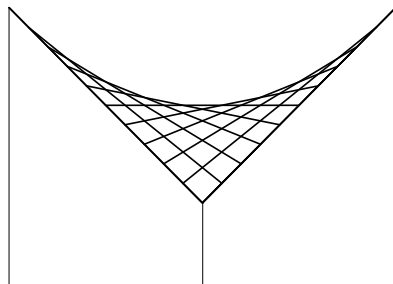


Fig. 125. Perfil de la superfície. Del punt més alt de la superfície al més baix mesura 5 m. Trama Estructura alàmbrica 2D.

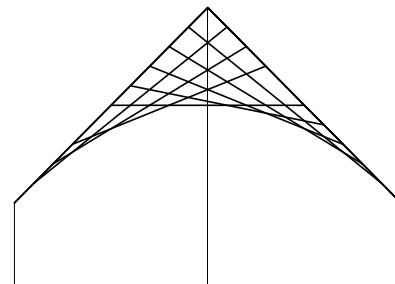


Fig. 126. Perfil de la superfície. Llum de quasi 10 m. Entre extrems inferiors de la superfície.

Representacions en dues dimensions del mòdul generador i del conjunt:

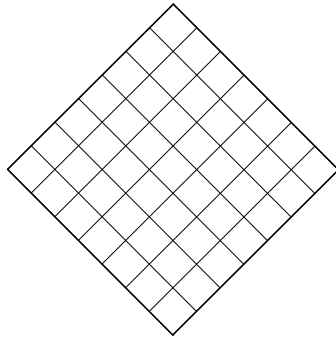


Fig. 127. Vista en planta d'una unitat de paraboloides hiperbòlics. Costat de 7 m en horitzontal. Trama Estructura alàmbrica 2D.

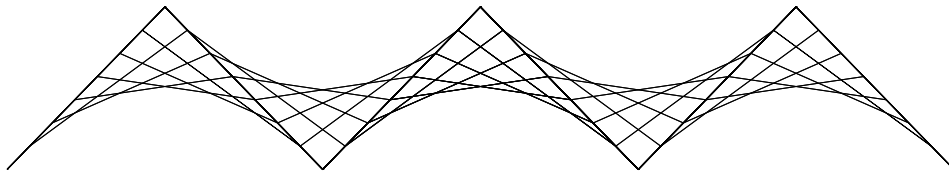


Fig. 128. Alçat principal en 2D del conjunt que formen els sis paraboloides hiperbòlics sense els elements de suport addicionats per a comunicar el conjunt d'elements a terra. Alçat 1,5 m de la línia de terra.

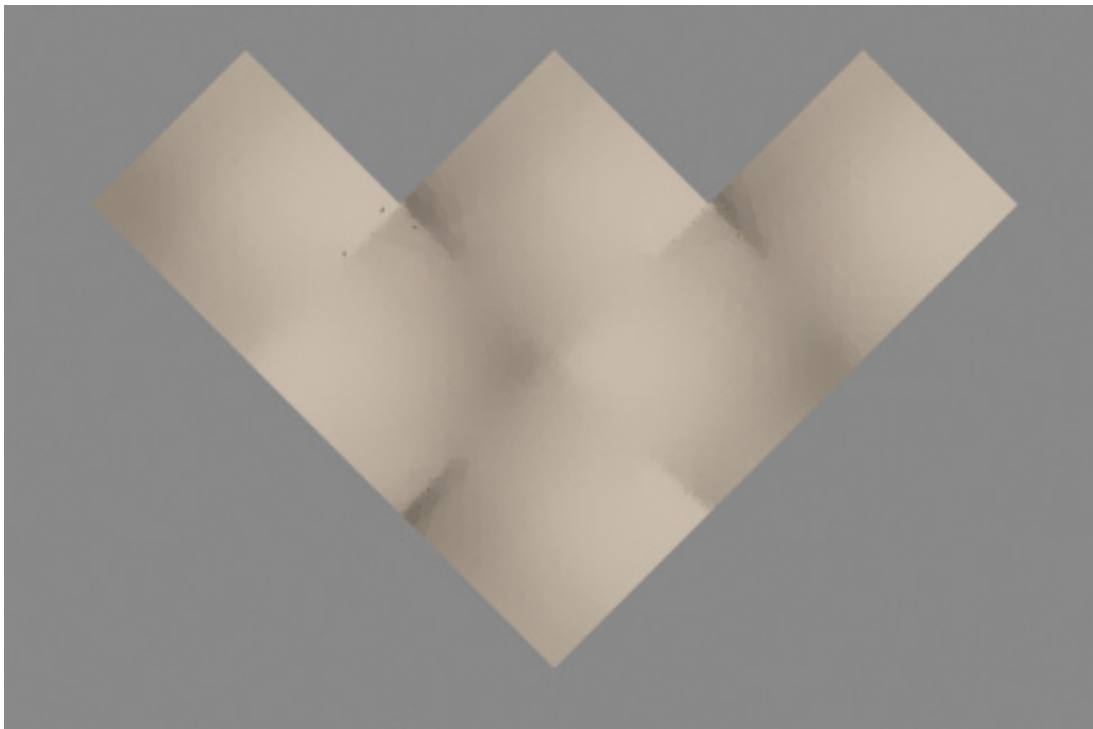


Fig. 129. Vista de planta del conjunt de l'estació format per sis paraboloides hiperbòlics. 3ds Max 2017.

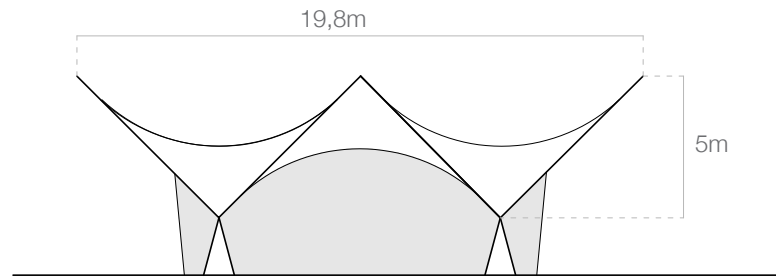


Fig. 130. Alçat acotat del perfil menor de l'estació de servici.

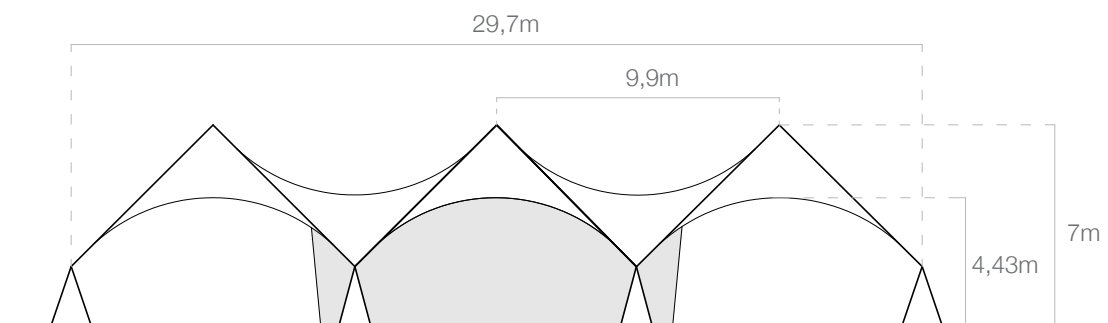


Fig. 131. Alçat principal del conjunt amb els suports simplificats de formigó. Trama Estructura conceptual 2D. AutoCAD 2019.

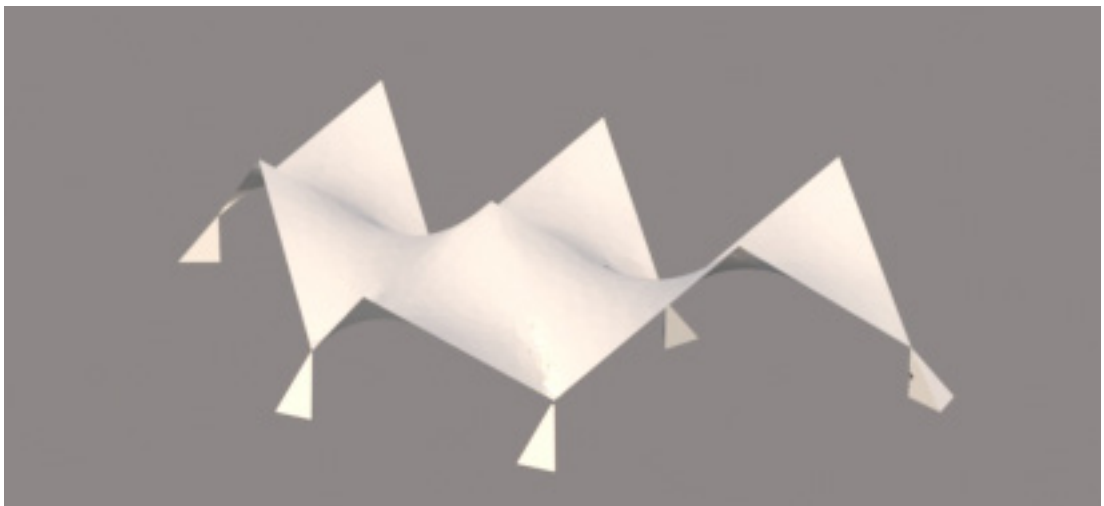


Fig. 132. Perspectiva aèria del conjunt dels paraboloides hiperbòlics de l'Estació de servici El Rebollet amb suports simplificats de formigó que connecten amb el sòl. 3ds Max 2017.

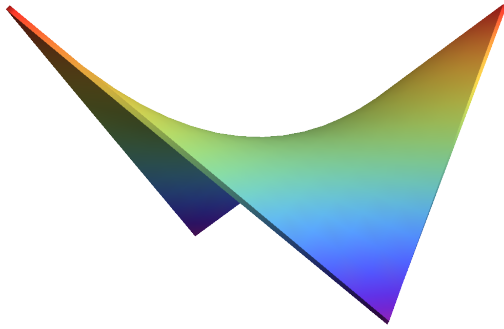


Fig. 134. Mòdul que configura el conjunt de l'estació.
Colour -> Rainbow.

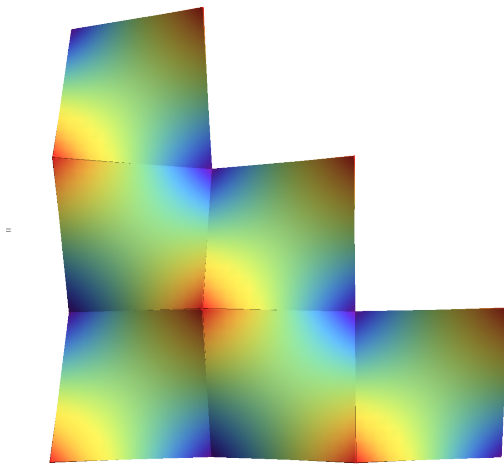


Fig. 135. Planta superior del conjunt de la coberta.

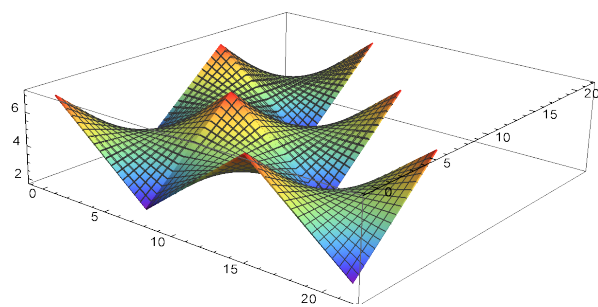


Fig. 136. Perspectives.

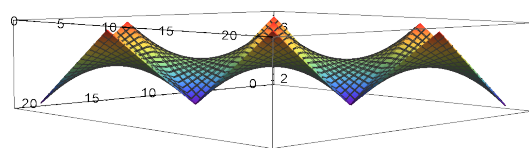


Fig. 137. Alçat principal amb perspectiva.

4. 2. 3. LA INTERSECCIÓ DE PLANS

Quan es parla de superfícies reglades, tot entés de l'Arquitectura li vindria al cap Fèlix Candela i les seues closques de formigó. Moltes obres conegudes passarien pel cap formant un catàleg de successives superfícies reglades, com algunes que s'han vist anteriorment.

Per contra, a Espanya, Eduardo Torroja¹ és un referent de l'aplicació de les superfícies reglades a la construcció. La tipologia que experimenta aquest arquitecte és la làmina plegada, que és la que millor representa el fet de ser reglada, ja que no es pot veure cap curvatura en l'element. Superfícies generades per rectes formen plans interaccionats entre si que disposats d'una certa forma poden alcançar una llum lliure de grans dimensions.

La coberta de l'entrada del Col·legi Jesús Maria (1963-1969) (*fig. 138*) en Alacant, de l'arquitecte José Ramón Azpiazu Ordoñez², és una aplicació plans triangulars que s'intersequen i suportats per pilars quadrats de xicoteta dimensió, en comparació a la distància dels pòrtics, als extrems la superfície permet crear vans lliures considerables. En cada pla triangular, dues arestes són acoblades a altres arestes de plans similars i una aresta queda lliure a cara vista a l'extrem del passadís que cobreix la superfície conjunta.



Fig. 138. Coberta d'entrada del col·legi Jesús Maria a Alacant.

¹ Enginyer de camins conegut per les seues aportacions innovadores en el camp de la construcció en formigó. (1899-1961)

² Arquitecte càntabres egressat de l'ETSAM, va treballar sobre l'obra escultòrica en el disseny urbà. (1927-2009)

La mateixa geometria es pot construir amb menys arestes. Amb l'aplicació dels *hypars*, Fèlix Candela dissenya cúpules rectangulars amb el paraboloid hiperbòlic (fig. 139). D'aquesta manera, entre quatre pilars formant un quadrat ja no es distingiria huit plans triangulars, sinó sols quatre superfícies acoblades per les arestes i formant un únic element.

L'avantatge d'aquesta geometria, a part de l'àmbit estructural, és que recollida d'aigües pluvials que es fa en els suports. Així el flux d'aigua pluvial està controlat, i en el cas dels suports ser de major dimensió, dins dels elements podria tindre lloc la canonada d'evacuació de l'aigua.

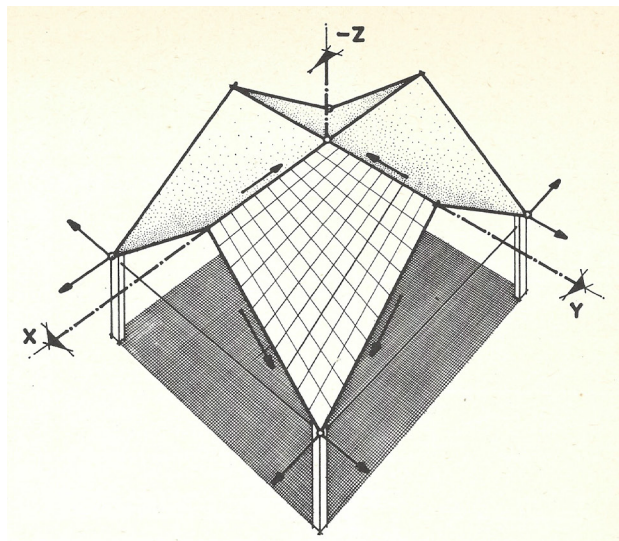


Fig. 139. Disseny de la coberta de la Fàbrica de Sedes Parisines, Xichimanca, Edo. de Mèxic, 1953. Per José Gorbea.

L'església de Sant Nicolau en la Platja de Gandia, de l'arquitecte Eduardo Torroja Miret, és altra aplicació de més altura i llum. La seua estructura és un poc més complexa d'entendre que l'anterior. La coberta està formada per dues làmines plegades independents en forma de Z que recolzen sobre els murs perimetrals que tanquen un volum únic que alberga la nau central de l'església.

La separació d'aquestes dues làmines permet l'entrada de llum natural dins l'església de forma zenital, pròpia dels edificis de culte. El disseny de nervis transversals de formigó armat completa l'estructura, que van fins a la part interior de la làmina per a connectar amb el mur i amb la cimentació.



Fig. 140. Església de Sant Nicolau. Platja de Gandia, València. Enginyer: Eduardo Torroja.

Fèlix Candela també va dissenyar estructures amb làmines plegades (fig.141), no tot anaven a ser corbes. En el disseny d'una coberta prismàtica es pot observar semblances a l'estructura de l'església anterior vista. Làmines en forma de Z independents entre si i deixant el pas de llum natural entre elles, suportades per dos pòrtics transversals.

Les làmines funcionen estructuralment com bigues sostingudes pels dos pòrtics transversals. El cant de les bigues no és el típic element massís de formigó armat de grossària considerable, sinó la mateixa geometria de Z.

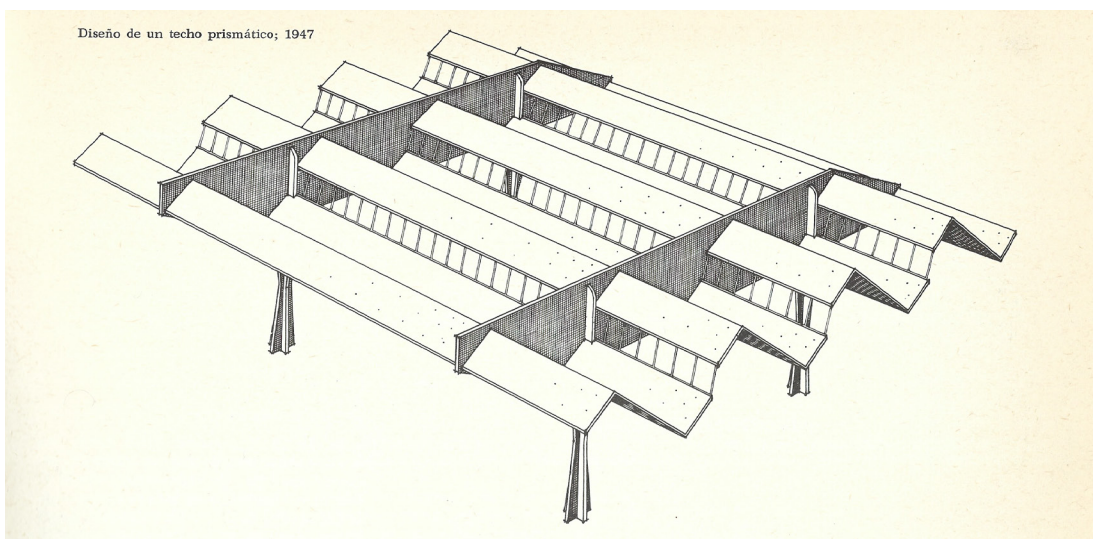


Fig. 141. Dibuix de Fèlix Candela per al disseny d'una coberta prismàtica, en 1947.

4. 2. 2. ESGLÉSIA SANTA MARIA DEL MAR

Aquesta església va ser dissenyada per l'arquitecte Agustín Gabriel López en 1987-1991 a la Platja de Gandia, València. La Platja de Gandia té dues esglésies en total per a servir a tots els turistes religiosos en temps de vacances i per a la seua població local.

L'edifici està format per pòrtics de formigó armat, amb pilars de secció variable, disposats radialment partint del presbiteri. El mur perimetral del tancament no arriba a tocar la coberta, entremig es troben unes vidrieres multicolors amb imatges religioses. La separació entre elements opacs, com són el mur de tancament i la coberta, atorga un aspecte de lleugeresa a la coberta. Amb aquesta estratègia adoptada a l'estructura i la fina capa de formigó armat de tan sols 10 cm, la coberta pareix que està flotant sobre els fidels de l'església.

La coberta de l'Església de Santa Maria es basa en una làmina de formigó de 10 cm de grossària plegada a dues aigües entre pòrtic i pòrtic, amb una llum màxima entre pilars de 8,5 m. En planta, la coberta té forma de *ventall* o *clòtxina* asimètrica, el punt central el forma una creu vertical que destaca sobre l'horitzontalitat de l'església. Més que *closca de formigó*, el que sembla en planta és una *clòtxina de formigó*.



Fig. 142. Església Santa Maria del Mar, Platja de Gandia, València. (orientada al Nord)
39°00'15.7"N 0°09'52.9"W

En el plànol de la planta estructural de coberta es pot observar l'existència de nervis de formigó als extrems inferiors de les làmines plegades. Els nervis funcionen com bigues recolzades i suport de la superfície plegada de la coberta. El mur de l'entrada, i les dues bandes de pilars disposades de manera radial, són els punts on es recolzen les bigues, i al mateix temps les làmines plegades.

Per l'exterior, no es diferencia la làmina plegada de la biga, la capa de revestiment atenua aquesta diferència. L'aspecte final aeri exterior sembla una làmina plegada contínua al llarg de tota la coberta (*fig. 144*), i vist des de baix s'entén el sistema estructural.

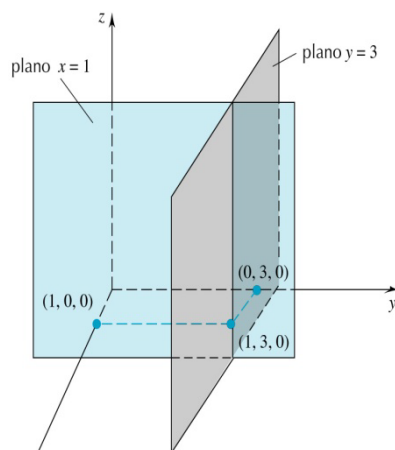


Fig. 143. Concepte d'intersecció de plans.



Fig. 144. Coberta de l'església. Foto de LAMINOFLEXIA.



Fig. 145. Vista de l'extrem exterior de la coberta.



Fig. 146. Vista interior de l'església.



Fig. 147. Detall de la coberta i la continuació de les bigues.

Els plànols originals mostren l'alçat i la planta del conjunt, s'observa que a l'alçat el més interessant, respecte a l'àmbit arquitectònic, és la coberta. A les plantes s'observa les dues capes d'estructures: els pilars ubicats en forma radial i les bigues longitudinals.



Fig. 148. Alçat original del projecte.

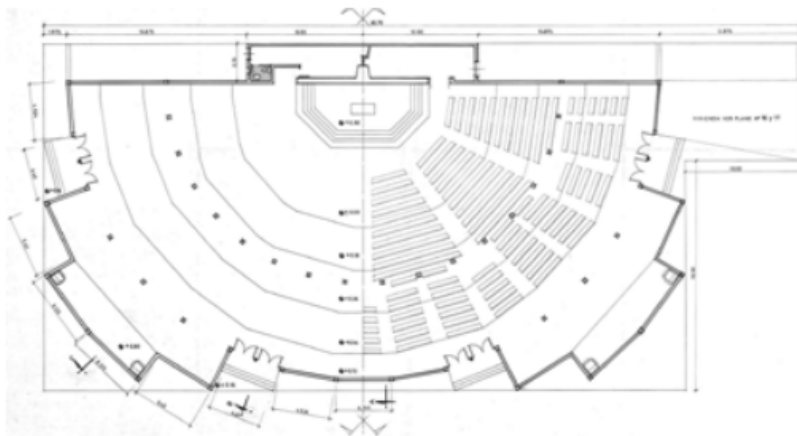


Fig. 149. Planta original acotada del projecte. Marcació de l'estructura.

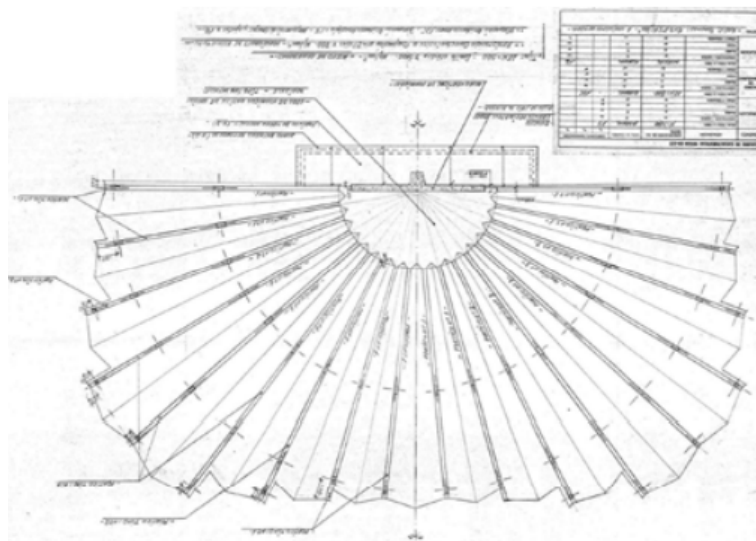


Fig. 150. Unitat de làmina plegada amb nervis a cada costat. Formigó armat cara vista.

DESCRIPCIÓ GEOMÈTRICA AMB *AutoCAD 2019*

Es procedeix a analitzar la coberta de l'edifici a través dels seus elements i la intersecció entre ells. L'element de formigó armat és configurat per una unitat que es repeteix radialment. Aquesta unitat la forma dos plans rectes de 10 cm d'espessor que intersequen amb un cert angle que configura les representacions següents:

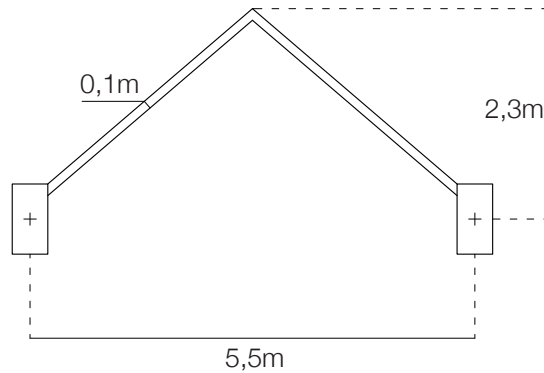


Fig. 151. Alçat acotat a l'extrem exterior de la coberta.

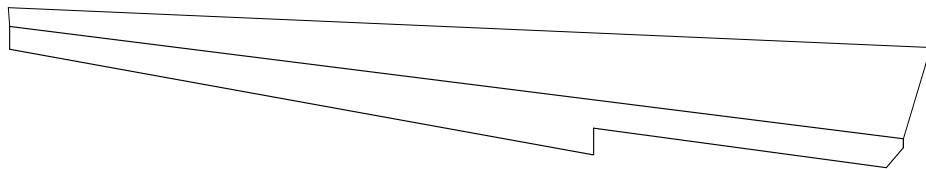


Fig. 152. Perfil d'unitat autoportant. Làmina de 10 cm + bigues als dos extrems. Amb pendent descendent cap a l'exterior.

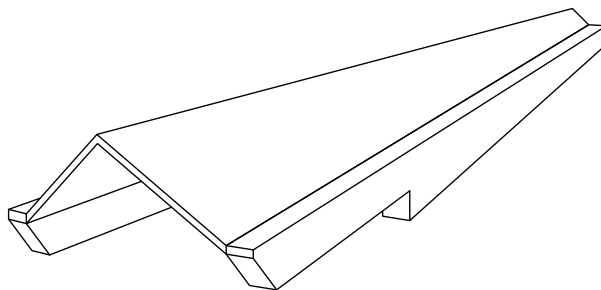


Fig. 153. Perspectiva d'una unitat que forma la coberta. Làmina plegada de 10 cm de grossària més dues bigues de 20x40 aprox.; amb inclinació descendent per a evacuar aigües pluvials.

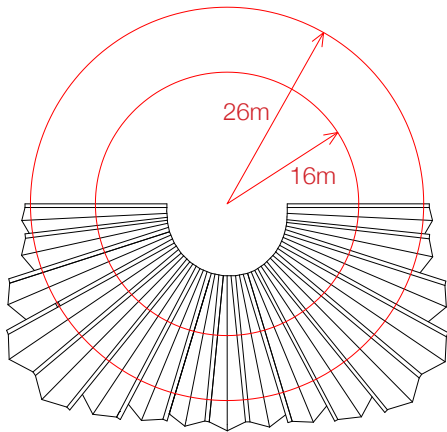


Fig. 154.
 En l'eix de simetria de la coberta es traça el centre de dues circumferències de radi 16 i 26 m. Els eixos dels pilars de formigó estan situats en aquestes dues corbes. Per tant, hi ha la mateixa distància entre pilars consecutius de totes les bigues.

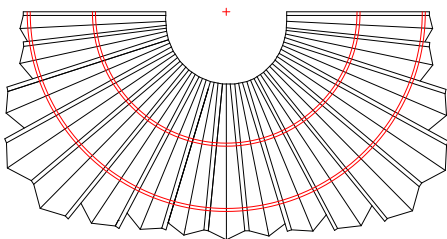


Fig. 155.
 Les dues circumferències es desfasen la meitat de la dimensió del pilar en secció a cada costat, deixant entre elles la distància igual al costat del suport. Entre aquestes dues corbes té lloc els pilars.

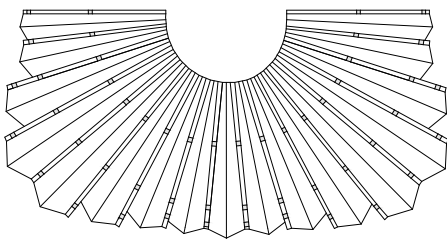


Fig. 156.
 Existeixen també pilars fora d'aquestes dues franges radials ja dibuixades. S'addicionen suports verticals en els extrems de les làmines més llargues. Aquestes làmines estan recolzades en quatre punts en tota la seua longitud.

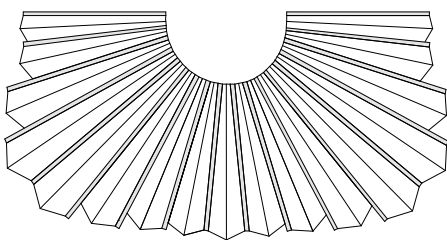


Fig. 157.
 La part que més esforços ha de suportar en la coberta són les bigues. Les làmines plegades es recolzen sobre les bigues i els transmeten les càrregues externes.

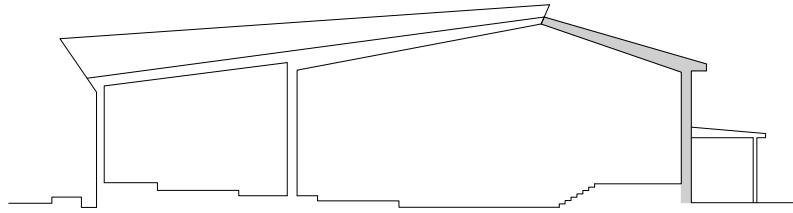


Fig. 158. Secció transversal de l'estructura en mènsula de formigó armat que suporta l'extrem de la làmina plegada.

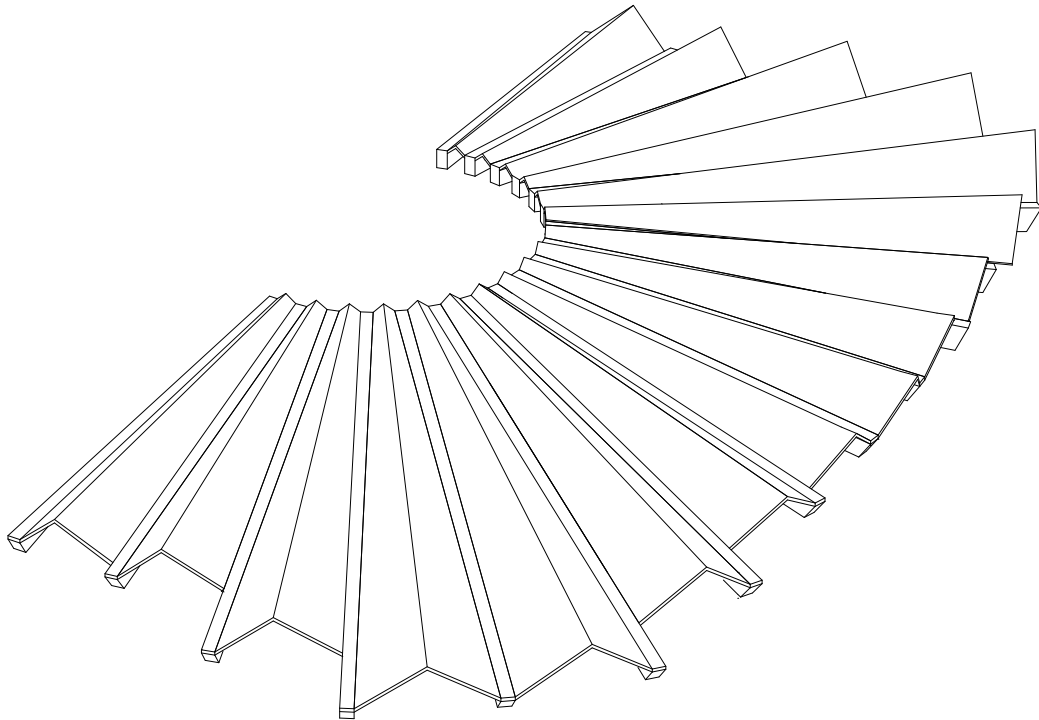


Fig. 159. Perspectiva aèria de la coberta sense suports verticals.

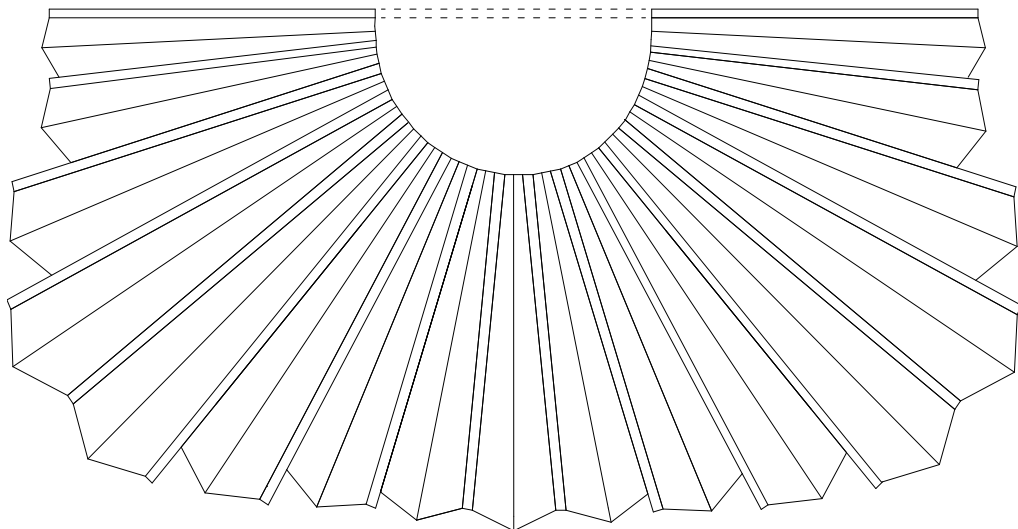


Fig. 160. Planta de coberta marcant els elements estructurals.

5. Una mirada al futur

En els casos d'estudi anteriors s'ha comentat i analitzat les superfícies més comunes en aplicació en construcció. La intenció d'aquest capítol és plantejar altres propostes matemàtiques, tenint present la viabilitat de la seua aplicació. No es pretén inventar res, sinó, tirar la primera pedra del que pot ser l'inici d'un altre treball d'investigació. Es parteix de la base de què existeix una certa carència de models construïts a partir de superfícies reglades, més enllà dels comentats en aquest treball. Arribats a aquest punt, es deu preguntar:

Quin és el futur de les superfícies reglades?

La seua evolució va acabar on ho va deixar Fèlix Candela?

5. 1. L'actualitat de les superfícies reglades

Actualment, és contínua la recerca per aquesta tipologia de superfícies a la recerca de grans llums amb simplicitat estructural. Un dels projectes més recents que incorpora aquesta idea en el disseny és *La Muntanya Solar* de Nuru Karim¹, a causa de l'esdeveniment del Burning Man² en Nevada, EE.UU. Aquest projecte (encara no construït) s'ha pensat per a ser efímer, ja que l'esdeveniment sols té una duració d'una setmana. Pel que fa a l'evolvent, està configurada per plaques solars esteses per tota la superfície, i suportades per una estructura metàl·lica interior en gelosia.

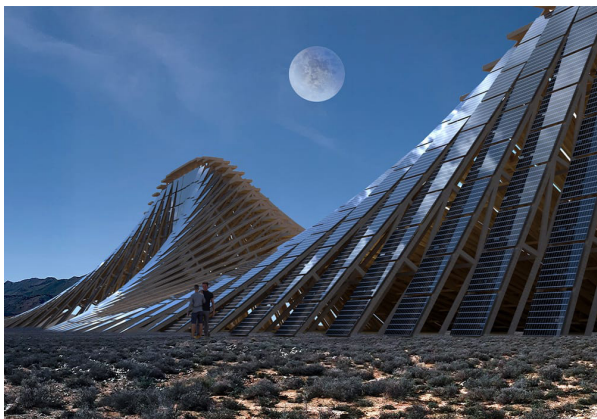


Fig. 161. Render de la superfície amb plaques solars.

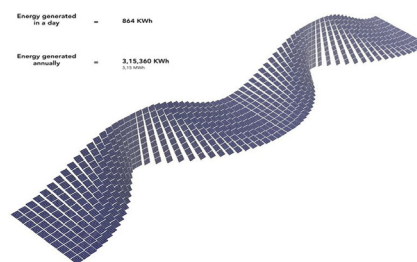


Fig. 162. Axonometria dels mòduls de plaques solars formant una superfície reglada.

¹ Cofundador de NUDES architecture. Conegut pels seus premis internacionals com World Architecture Community Award. Pàgina web de l'estudi: <http://www.nudeoffices.com/about>

² Esdeveniment anual amb duració d'una setmana on es resideix amb un règim de comunitat comunista, influenciada per l'esperit hippie i la contracultura de 1960.

5. 2. Noves propostes matemàtiques

Com a fil conductor de la mirada al futur de les superfícies reglades, es tira la primera pedra a la recerca de possibles alternatives a les ja conegudes. El procés que s'ha seguit per a l'elaboració d'aquestes propostes és:

Primer s'imagina un model inicial que és manipulat i experimentat a través del dibuix a mà alçada, i simultàniament, se li atribueix una funció determinada (per a aproximar-se a la realitat). Després, es procedeix a parametritzar-lo amb el Mathematica.

S'han elegit dues propostes:

1. Un *hypar* i dues parts de con.
2. Quatre parts de paraboloides hiperbòlics disposats radialment amb un con al mig.

1. Església. La suma dels dos trossos de con en extrems oposats atorga a l'estructura la capacitat de ser autoportant, per tant, no es necessita suports addicionals.

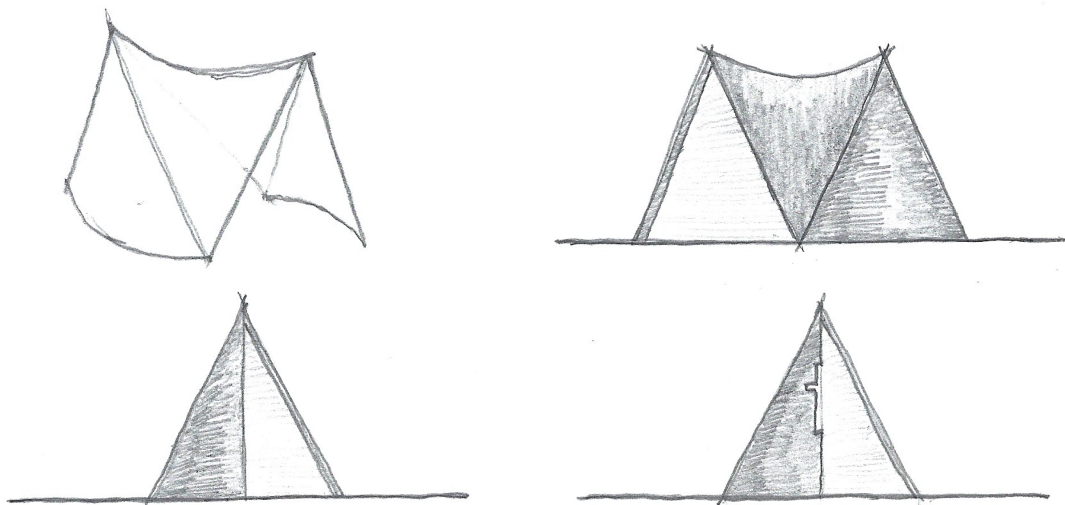


Fig. 163. Perspectiva i alçats a mà alçada del conjunt de la proposta. No estan a escala.

Aquest edifici es configura a partir d'un mòdul de *hypar* de base quadrada (podria ser no quadrada) i amb els vèrtexs oposats a la mateixa altura. L'altra part del conjunt la formen dues 3/8 parts de con, que tenen com a radi el valor en projecció vertical (no en valor absolut) del costat del *hypar*.

Les dues parts de con funcionen com a suport de la superfície del mig, les quals no arriben a tancar del tot l'espai, però li ofereix més intimitat; a més de controlar la llum natural incident, gràcies a la seua geometria.

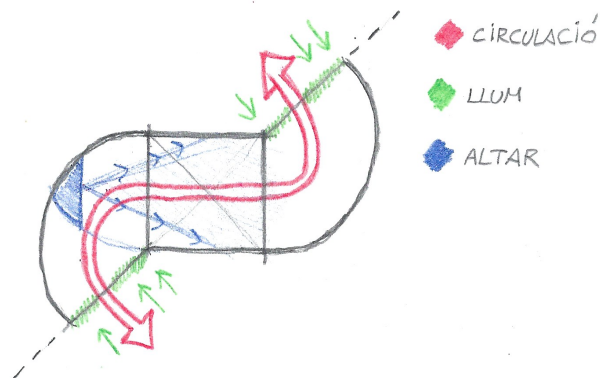


Fig. 164. Esquema en planta de la funcionalitat de la proposta dibuixada.

Es procedeix a parametritzar tal estructura, es representa els tres elements en el sistema de coordenades cartesianes (x, y, z) . Primer de tot, es defineix els punts dels vèrtexs del paraboloides hiperbòlic:

$$\begin{aligned} \mathbf{v1} &= \{-c, -c, h\}; \\ \mathbf{p1} &= \{-c, c, 0\}; \\ \mathbf{v2} &= \{c, c, h\}; \\ \mathbf{p2} &= \{c, -c, 0\}; \end{aligned}$$

A c li és donada un valor de 12 m, que fa referència a la mesura horitzontal de cada un dels costats del paraboloides hiperbòlic, com és de base quadrada, tots els costats tenen el mateix valor. L'altura màxima del conjunt és expressada per la lletra h , que és 24 m, el doble que el costat en base, per això que en alçat el conjunt està delimitat per quadrats imaginaris.

$$\begin{aligned} \mathbf{alpha1}[t_] &:= \mathbf{p1} + t * (\mathbf{v1} - \mathbf{p1}); \\ \mathbf{beta1}[t_] &:= \mathbf{v2} + t * (\mathbf{p2} - \mathbf{v2}); \end{aligned}$$

Es defineixen dues rectes oposades respecte al quadrat de base, que seran dues de les quatre línies que delimiten la superfície del centre. Amb aquestes dues parametritzacions es configura el *hypar* del mig del conjunt, al qual són acoblades les dues parts de con. [Es poden veure els fitxers del modelatge complet a través del codi QR de la pàgina 4]

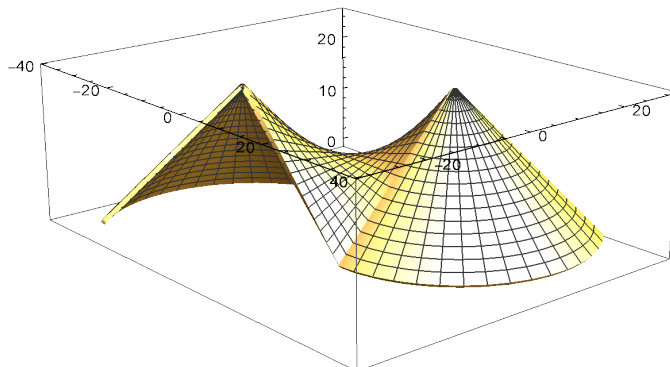


Fig. 165. Modelatge en Mathematica 12.1.

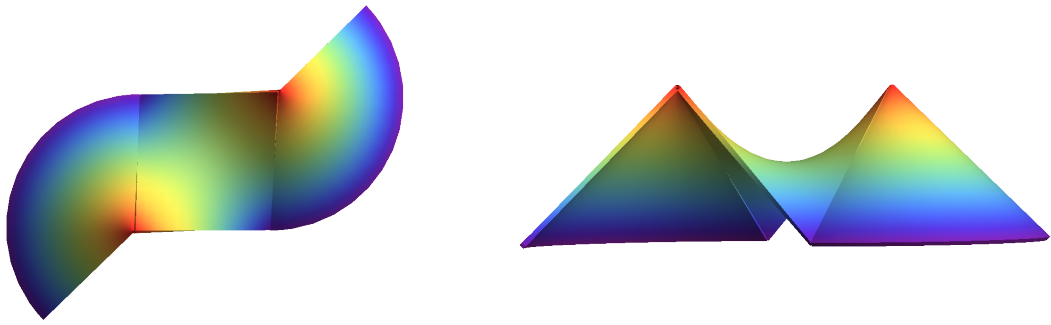


Fig. 166. Planta i perspectiva del conjunt.

2. Museu. Es tracta d'una estructura autoportant amb un hiperboloide d'un full suportat per quatre paraboloides hiperbòlics.

La disposició de l'hiperboloide fa referència al *Musée du Louvre* de París, en aquest cas parisenc és una piràmide, i no un hiperboloide. Les obertures a l'exterior del conjunt afavoreixen l'entrada de llum a l'espai interior. A més, l'espai central circular és diàfan amb entrada de llum zenital, semblant al Panteó de Roma.

Es procedeix a parametritzar tal estructura, es defineix les funcions dels quatre paraboloides hiperbòlics, i amb el comandament *ParametricPlot3D* es representa el conjunt:

```
f1[x_, y_] := a * (x - x0)^2 - b * y^2 + c;
f2[x_, y_] := a * (x + x0)^2 - b * y^2 + c;
f3[x_, y_] := -a * x^2 + b * (y - y0)^2 + c;
f4[x_, y_] := -a * x^2 + b * (y + y0)^2 + c;
```

[Es poden veure els fitxers del modelatge complet a través del codi QR de la pàgina 4]

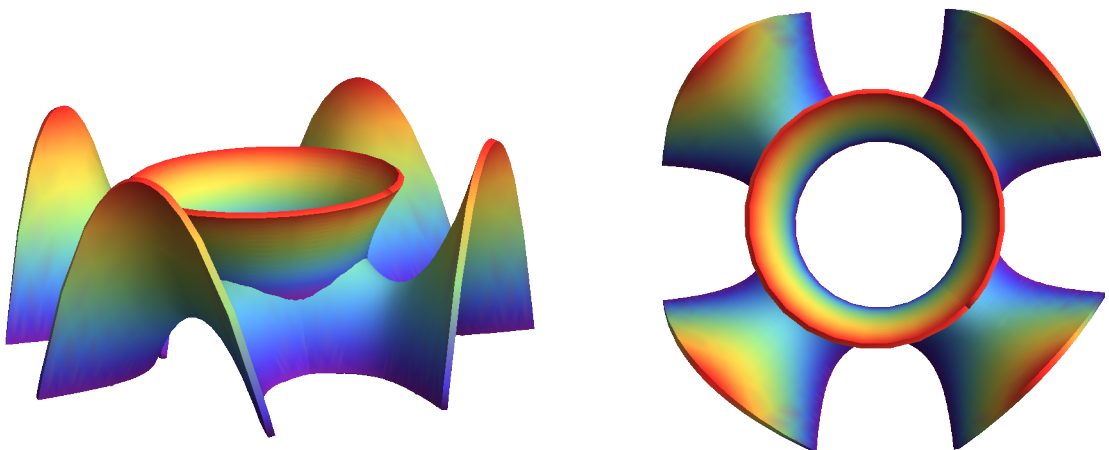


Fig. 167. Planta i perspectiva de la proposta.

6. Conclusions

*“Aquells que s’enamoren només de la pràctica,
sense cuidar de l’exactitud o de la ciència,
són com el navegant que s’embarca sense timó
ni brúixola, i mai sap on pot arribar a parar.”*

DA VINCI, Leonardo

6. 1. Reflexions de l'anàlisi

Darrere de cada projecte arquitectònic hi ha diverses aportacions de diferents disciplines que ajuden a concebre l'obra en la seua totalitat. Amb la simplificació final de la geometria s'arriba a l'inici, és a dir, la idea del projecte està implícita en les parametritzacions matemàtiques del modelatge 3D; i tot el restant és complementari a la seua essència.

La contemplació passiva de les obres arquitectòniques no permet apreciar l'essència més pura de l'element, la qual es troba en la parametrització matemàtica. A través de l'enteniment de la configuració de l'obra i la seua construcció matemàtica, la puresa de l'edifici surt a l'espectador. Per aquesta raó, les anàlisis paramètriques i de geometria efectuades en els casos d'estudi del treball, són suficients i necessaris per a descriure amb exactitud un projecte.

6. 2. Possibles complementacions del treball

En el present treball es presenta una seqüència desenvolupada pel que respecta a la base de coneixements de superfícies reglades, disseny geomètric i parametrització matemàtica dels casos d'estudi, en l'àmbit de Treball de Fi de Grau. La formació de l'arquitecte és multidisciplinària, el que permet relacionar diverses disciplines entre si, com són l'Arquitectura i la Matemàtica, i en aquesta relació és on radica aquest treball. Aquesta interdisciplinarietat es troba inclosa en les tres principals branques de coneixement que s'imparteixen a la nostra escola (construcció, estructures i projectes) per dur a terme un bon disseny integral.

Una possible continuació a aquest primer tir de pedra pot ser abordada per diferents punts de vista, com són:

- L'estructura: analitzar amb més intensitat el comportament estructural d'aquesta tipologia de superfícies.

- Construcció: investigar l'adaptabilitat dels materials i detalls constructius per a fer possible un acabament òptim de l'evolvent.

Aquestes dues disciplines citades són les més comunes a relacionar-se amb les superfícies reglades, però no són les úniques:

- Urbanisme: observar l'impacte urbà de les superfícies amb curvatura
- Projectes: profunditzar amb l'interés espacial que aporta aquestes superfícies

El que és clar és que, per a entendre aquesta tipologia de superfície en la seua totalitat, s'ha de recórrer diverses disciplines simultàniament per a completar els coneixements que es necessiten per a portar a cap l'execució d'aquest element.

7. Bibliografía

Citada i de consulta

BURGOS ROMÁN, J. de, 2012. *Cónicas y cuádricas*. Madrid: García-Maroto Editores. ISBN 9788415214939

CALVO ROSELLÓ, V., PERIS MANGUILLOT, A. y RÓDENAS ESCRIBÁ, F., 2015. *Diagonalización y cálculo multivariable con Mathematica*. 2ª ed. Murcia: Electolibris. ISBN 9788494306068

FABER, C., 1981. *Las estructuras de Candela*. [4a. impr.]. México: Compañía Editorial Continental

GONZÁLEZ, P. M., 2019. *La Matemática en el arte. Geometría, armonía y proporción en el taller del artista*. Barcelona. Ed.: Bonallettera Alcompas, S. L. ISBN: 9788417506896

MONTESDEOCA DELGADO, A. y CANARIAS CONSEJERÍA DE EDUCACIÓN, CULTURA Y DEPORTES, 2001. *Geometría proyectiva cónicas y cuádricas*. Santa Cruz de Tenerife: Consejería de Educación, Cultura y Deportes. ISBN 8469940856

PÉREZ SAEZ, J., 1968. *Geometría descriptiva y sus aplicaciones*. Madrid: Litoprin

RABASCO, P, 2011. *El sistema Ctesiphonte. Evolución de la estructura catenaria*. Informes de la construcción, vol. 63, no. 522, pp. 43-52. ISSN 0020-0883. DOI 10.3989/ic.10.009

ROA, J., GALÁN, C., RIVERA, C., 2019. *A Ferrocement Patent for Emergency Housing: The Technological Hut*. pp. 1-15. DOI 10.3390/buildings9120242. Disponible a: www.mdpi.com/journal/buildings

ROLAND, C., 1973. *Frei Otto : Estructuras*. Barcelona: Gustavo Gili. ISBN 842520772X

ROSADO, E. *Curvas y Superficies I*. Departamento Matemática Aplicada. Escuela Técnica Superior de Arquitectura de Madrid. Disponible on-line en: http://dma.aq.upm.es/profesor/rosado_e/home.html. Data última visita: 09-05-2021

RUIZ ZÚÑIGA, A. *Las Matemáticas de nuestro tiempo*. Data visita: 12-04-21. Disponible a: http://www.centroedumatematica.com/aruiz/libros/Historia%20y%20Filosofia/Parte1/Cap04/Parte01_04.htm#p1_4_1

SALAS, S.L., HILLE, E. y ETGEN, G.J., 2002. *Calculus, una y varias variables*. 4a ed. Barcelona. Ed.: Reverté. ISBN: 8429151575

UNIVERSITAT DE BARCELONA. SERVEI DE LLENGUA CATALANA, 2000. *Vocabulari de matemàtiques : català, castellà, anglès*. 2^a ed. rev. y amp. Barcelona: Universitat de Barcelona. ISBN 8493100129

W.AA. 2019. *LAMINOFLEXIA. Làmines de formigó armat en la Comunitat Valenciana*. València: Institut Valencià de l'Edificació. ISBN: 978-84-949168-9-2

8. Drets i autoria d'imatges

- Figura 1** SALAS, S.L., HILLE, E. y ETGEN, G.J., 2002. *Calculus, una y varias variables*. 4a ed. Barcelona. Ed.: Reverté. ISBN 8429151575
- Figura 2** PRÒPIA. *Mathematica 12.1*.
- Figura 3** Rafael Sanzio: *La Escuela de Atenas*. 1510-1511. Fresc. 500 cm × 770 cm. Museus del Vaticano. <https://www.culturagenial.com/es/la-escuela-de-atenas-de-rafael-sanzio/>
- Figura 4** Autor/a desconegut/da. *L'home de Vitruvi*. Disponible a: <https://www.culturagenial.com/es/hombre-de-vitruvio-leonardo-da-vinci/>
- Figura 5** CHRISTO & JEANNE-CLAUDE. *Valley Curtain*. <https://elimpactoambiental.wordpress.com/2012/12/13/iaoi-iii5-christo-y-jeanne-claude-o-sobre-las-alternativas-como-optimizador-de-los-proyectos/>
- Figura 6** (autor/a desconegut/da) Disponible a: <https://www.archdaily.com/tag/frei-otto>
- Figura 7** ROLAND, C., 1973. *Frei Otto : Estructuras*. (pàg. 149) Barcelona]: Gustavo Gili. ISBN 842520772X
- Figura 8** ROLAND, C., 1973. *Frei Otto : Estructuras*. (pàg. xx) Barcelona]: Gustavo Gili. ISBN 842520772X
- Figura 9** ROLAND, C., 1973. *Frei Otto : Estructuras*. (pàg. 82) Barcelona]: Gustavo Gili. ISBN 842520772X
- Figura 10** ROLAND, C., 1973. *Frei Otto : Estructuras*. (pàg. 145) Barcelona]: Gustavo Gili. ISBN 842520772X

- Figura 11-12** (autor/a desconegut/da, 1958) Disponible a: <https://www.plataformaarquitectura.cl/cl/02-285062/clasicos-de-arquitectura-pabellon-philips-expo-58-le-corbusier-and-iannis-xenakis/517d38e4b3fc4b834200000d-clasicos-de-arquitectura-pabellon-philips-expo-58-le-corbusier-and-iannis-xenakis-planta-baja>
- Figura 13** PRÒPIA. *Mathematica 12.1*.
- Figura 14** MONTESDEOCA DELGADO, A. y CANARIA. CONSEJERÍA DE EDUCACIÓN, CULTURA Y DEPORTES, 2001. *Geometría proyectiva cónicas y cuádricas*. (pàg. 121) Santa Cruz de Tenerife]: Consejería de Educación, Cultura y Deportes. ISBN 8469940856
- Figura 15** PRÒPIA. *Mathematica 12.1*.
- Figura 16** PRÒPIA. *AutoCAD 2019*.
- Figura 17** PRÒPIA. *Mathematica 12.1*.
- Figura 18** MONTESDEOCA DELGADO, A. y CANARIA. CONSEJERÍA DE EDUCACIÓN, CULTURA Y DEPORTES, 2001. *Geometría proyectiva cónicas y cuádricas*. (pàg. 122) Santa Cruz de Tenerife]: Consejería de Educación, Cultura y Deportes. ISBN 8469940856
- Figura 19** PRÒPIA. *Mathematica 12.1*.
- Figura 20** PRÒPIA. *Mathematica 12.1*.
- Figura 21** SALAS, S.L., HILLE, E. y ETGEN, G.J., 2002. *Calculus, una y varias variables*. 4a ed. Barcelona. Ed.: Reverté. ISBN 8429151575
- Figura 22** (autor/a desconegut/a) Disponible en: <https://naukas.com/2019/03/19/pizzas-y-terraplanistas/>
Data visita: 17-05-21
- Figura 23** PRÒPIA. *Mathematica 12.1*.

- Figura 24** MONTESDEOCA DELGADO, A. y CANARIA. CONSEJERÍA DE EDUCACIÓN, CULTURA Y DEPORTES, 2001. *Geometría proyectiva cónicas y cuádricas*. (pàg. 22) Santa Cruz de Tenerife]: Consejería de Educación, Cultura y Deportes. ISBN 8469940856
- Figura 25** PRÒPIA. *AutoCAD 2019*.
- Figura 26** (autor/a desconegut/da) Disponible a: GETTY IMAGES <https://www.admagazine.com/arquitectura/maestros-ad-adentrate-en-la-geometria-pura-de-felix-candela-20200922-7468-articulos.html>
- Figura 27-28** (autor/a desconegut/da) Disponible a: <https://nexttoparchitects.org/post/136604925461/nextarch-by-abitaremagazine>
- Figura 29** PRÒPIA. *AutoCAD 2019*.
- Figura 30** FABER, C., 1981. *Las estructuras de Candela* (pàg. 22). [4a. impr.]. Mexico: Compañía Editorial Continental.
- Figura 31** ROLAND, C., 1973. *Frei Otto : Estructuras* (pàg. 4) Barcelona]: Gustavo Gili. ISBN 842520772X.
- Figura 32** PRÒPIA. *AutoCAD 2019*.
- Figura 33-36** PRÒPIA. Restaurant Submarí de l'Oceanogràfic de València. Arquitecte: Fèlix Candela. Data fotografia: 27-03-21.
- Figura 37-39** PRÒPIA. Edifici d'accès de l'Oceanogràfic de València. Arquitecte: Fèlix Candela. Data fotografia: 27-03-21.
- Figura 40** (autor/a desconegut/da): <http://www.portalgaudi.cat/es/los-edificios/la-pedrera/>
- Figura 41** PRÒPIA. *AutoCAD 2019*. Imatge reproduïda de VV.AA. 2019. *LAMINOFLÈXIA. LÀMINES DE FORMIGÓ ARMAT DE LA COMUNITAT VALENCIANA*. PDF. (pàg.103). ISBN: 9788494916892

- Figura 42** (autor/a desconegut/da, 1864) Disponible a: <https://destinoinfinito.com/taq-kasra-arco-ctesifonte/>
- Figura 43** PRÒPIA. *Mathematica 12.1*.
- Figura 44** FABER, C., 1981. *Las estructuras de Candela*. (pàg. 53) [4a. impr.]. Mexico: Compañía Editorial Continental.
- Figura 45** FABER, C., 1981. *Las estructuras de Candela*. (pàg. 54) [4a. impr.]. Mexico: Compañía Editorial Continental.
- Figura 46** (autor/a desconegut/da) Disponible a: <https://www.plataformaarquitectura.cl/cl/02-110674/clasicos-de-arquitectura-pabellon-de-rayos-cosmicos-felix-candela> Data visita: 08-04-21.
- Figura 47** (autor/a desconegut/da) Disponible a: http://biblioteca.aq.upm.es/biblioteca_digital/3revistas.html Data visita: 08-04-21.
- Figura 48-50** ROA, J., GALÁN, C., RIVERA, C., 2019. *A Ferrocement Patent for Emergency Housing: The Technological Hut*. pp. 1-15. DOI 10.3390/buildings9120242. Disponible a: www.mdpi.com/journal/buildings Data de visita: 11-03-21
- Figura 51-52** FABER, C., 1981. *Las estructuras de Candela*. (pàg. 54) [4a. impr.]. Mexico: Compañía Editorial Continental.
- Figura 53** PRÒPIA. Google Maps.
- Figura 54-55** Col·legi d'Arquitectes de València. Disponible a: <http://www.arquitectosdevalencia.es/arquitectura-de-valencia/1936-1974/grupo-residencial-marques-de-valterra>. Data visita: 27-02-21
- Figura 56-59** PRÒPIA. Data: 02-04-2021

Figura 60-86 PRÒPIA. *AutoCad 2019*.
imatge reproduïda de V.V.AA. 2019. *LAMINOFLEXIA. Làmines de formigó armat de la Comunitat Valenciana*. PDF. (pàg. 222) ISBN: 9788494916892

Figura 87-88 PRÒPIA. *3ds Max 2017*.

Figura 89-93 PRÒPIA. *AutoCAD 2019*.

Figura 94 PRÒPIA. *3ds Max 2017*.

Figura 95-99 PRÒPIA. *AutoCAD 2019*.

Figura 100 PRÒPIA. *Mathematica 12.1*.

Figura 101 PRÒPIA. *Mathematica 12.1*.

Figura 102 PRÒPIA. *Mathematica 12.1*.

Figura 103 FABER, C., 1981. *Las estructuras de Candela*. (pàg. 22) [4a. impr.]. Mexico: Compañía Editorial Continental.

Figura 104 FABER, C., 1981. *Las estructuras de Candela*. (pàg. 22) [4a. impr.]. Mexico: Compañía Editorial Continental.

Figura 105 ARCHIVO ORIGINAL: *Servicio Histórico Fundación COAM*. Disponible a: <https://archivosarquitectos.com/arquitectos/haro-pinar-juan-de/>
Data visita: 08-02-21

Figura 106 PRÒPIA. Google Maps.

Figura 107-8 (autor/a desconegut/da) Disponible a:
<https://huellasdearquitectura.wordpress.com/2017/07/17/1962-%C2%B7-la-estacion-de-servicio-el-rebollet/>. Data visita: 20-01-21

- Figura 109** FABER, C., 1981. *Las estructuras de Candela*. (pàg. 85) [4a. impr.]. Mexico: Compañía Editorial Continental.
- Figura 110** FABER, C., 1981. *Las estructuras de Candela*. (pàg. 135) [4a. impr.]. Mexico: Compañía Editorial Continental.
- Figura 111-18** PRÒPIA. Data: 02-04-2021
- Figura 119-28** PRÒPIA. *AutoCAD 2019*.
- Figura 129** PRÒPIA. *3ds Max 2017*.
- Figura 130-31** PRÒPIA. *AutoCAD 2019*.
- Figura 132** PRÒPIA. *3ds Max 2017*.
- Figura 133** PRÒPIA.
- Figura 134-7** PRÒPIA. Mathematica 12.1. [Es poden veure els fitxers del modelatge a través del codi QR de la pàgina 4]
- Figura 138** VV.AA. 2019. *LAMINOFLEXIA. LÀMINES DE FORMIGÓ ARMAT DE LA COMUNITAT VALENCIANA*. PDF. (pàg. 268). ISBN: 9788494916892
- Figura 139** FABER, C., 1981. *Las estructuras de Candela*. (pàg. 117) [4a. impr.]. Mexico: Compañía Editorial Continental
- Figura 140** PRÒPIA.
- Figura 141** FABER, C., 1981. *Las estructuras de Candela*. (pàg. 72) [4a. impr.]. Mexico: Compañía Editorial Continental
- Figura 142** PRÒPIA. Google Maps.

Figura 143 SALAS, S.L., HILLE, E. y ETGEN, G.J., 2002. *Calculus, una y varias variables*. 4a ed. Barcelona. Ed.: Reverté. ISBN 8429151575

Figura 144 VV.AA. 2019. *LAMINOFLEXIA. LÀMINES DE FORMIGÓ ARMAT DE LA COMUNITAT VALENCIANA*. PDF. (pàg. 226). ISBN: 9788494916892

Figura 145-47 PRÒPIA. Data: 02-04-2021

Figura 148-50 Plànols originals. Font: Gabriel López, 1987. Documents agafats de: VV.AA. 2019. *LAMINOFLEXIA. LÀMINES DE FORMIGÓ ARMAT DE LA COMUNITAT VALENCIANA*. PDF. (pàg. 228). ISBN: 9788494916892

Figura 151-60 PRÒPIA. *AutoCAD 2019*.

Figura 161-62 La Muntanya Solar de Nuru Karim. Disponible a: <https://ecoinventos.com/solar-mountain/> Data visita: 26-04-21

Figura 163-64 PRÒPIA.

Figura 165-66 PRÒPIA. *Mathematica 12.1*.

Figura 167 PRÒPIA. *Mathematica 12.1*.

Aquesta pàgina roman intencionadament en blanc

