



UNIVERSITAT
POLITÈCNICA
DE VALÈNCIA



Escuela Técnica Superior de Ingeniería del Diseño

TRABAJO DE FINAL DE MÁSTER

Bases de convergencia del CR3BP



AUTOR

Villalibre Vilariño, Daniel

davilvi@etsid.upv.es

TUTORES

Moll López, Santiago Emmanuel
Hoyas Calvo, Sergio
Moraño Fernández, José Antonio
Herrero Debón, Alicia
Vega Fleitas, Erica

sanmollp@mat.upv.es
serhocal@cmt.upv.es
jomofer@mat.upv.es
aherrero@mat.upv.es
ervefl@upv.es

DOCUMENTO: MEMORIA

UNIVERSITAT POLITÈCNICA DE VALÈNCIA
ESCUELA TÉCNICA SUPERIOR DE INGENIERÍA DEL DISEÑO

MÁSTER EN INGENIERÍA AERONÁUTICA
CURSO 2020 - 2021

Resumen

El problema circular restringido de los 3 cuerpos (CR3BP) es un problema muy estudiado dentro de la mecánica clásica. Sin embargo, se trata de un modelo matemático basado en ecuaciones diferenciales bajo ciertas hipótesis que permiten su simplificación, pero que hacen que su aplicación sea limitada. En este proyecto se analizará la forma de introducir ciertos factores adicionales en el modelo dinámico (fuerzas de radiación, achatamiento de los cuerpos primarios, presencia de satélites naturales) con el fin de aumentar la precisión del mismo. Además, se emplearán dos métodos numéricos (método de Newton-Raphson y método de Halley) para determinar la posición de los puntos de Lagrange y las bases de convergencia del sistema.

Abstract

The circular restricted 3-body problem (CR3BP) is a well-known problem in classical mechanics. However, it is a mathematical model based on differential equations under certain hypotheses that allow its simplification, but limiting its applications. This project will analyze how to introduce some additional factors into the dynamic model (such as radiation forces, flattening of the primary bodies and the presence of natural satellites) to increase its precision. In addition, two numerical methods (Newton-Raphson and Halley method) will be used to determine the position of the Lagrange points and the bases of convergence of the system.

Resum

El problema circular de 3 cossos restringits (CR3BP) és un problema ben conegut en la mecànica clàssica. No obstant això, és un model matemàtic basat en equacions diferencials sota certes hipòtesis que permeten la seua simplificació, però que, a la mateixa vegada, limita les seues aplicacions. Aquest projecte analitzarà com introduir alguns factors addicionals en el model dinàmic (com les forces de radiació, láplatament dels cossos primaris i la presència de satèl·lits naturals) per augmentar la precisió. A més, s'utilitzaran dos mètodes numèrics (mètode Newton-Raphson i el mètode de Halley) per determinar la posició dels punts de Lagrange i les bases de convergència de el sistema.

Índice general

1. Introducción y Objetivos	1
1.1. Introducción	1
1.2. Objetivos	2
2. Descripción del modelo dinámico	3
2.1. Formulación clásica del CR3BP	3
2.1.1. Deducción del modelo	4
2.2. Introducción de modificaciones del modelo	7
2.2.1. Fuerzas de radiación	8
2.2.2. Achatamiento de las masas primarias	9
2.2.3. Potencial no newtoniano - gravedad fuerte	10
2.2.4. Presencia de satélites naturales	11
2.3. Descripción del modelo dinámico completo	12
3. Bases de convergencia	15
3.1. Puntos de Lagrange	15
3.2. Bases de convergencia	17
3.3. Métodos matemáticos	17
3.3.1. Método de Newton-Raphson	17
3.3.2. Método de Halley	18
3.4. Algoritmo de búsqueda	19
4. Descripción y validación del código	21
4.1. Descripción del código	21
4.2. Validación	23
4.2.1. Validación del efecto de fuerzas de radiación y movimiento medio	23
4.2.2. Validación de efectos de achatamiento	26
4.2.3. Validación de efectos relativistas	29
4.2.4. Validación del efecto de satélites naturales	30
5. Ejemplo de aplicación	31
5.1. Problema Sol - Marte: formulación clásica	31
5.2. Efectos de triaxialidad	34
5.3. Fobos y Deimos	37
5.4. Efectos de radiación	40

5.5. Iteraciones	42
6. Trabajos futuros	45
7. Conclusiones	47
Bibliografía	48
Índice de figuras	52
Índice de tablas	55
Anexo: Código	57

Nomenclatura

m	Masa primaria
m_3	Masa infinitesimal
m_s	Masa de satélites naturales
n_D	Movimiento medio (sin correcciones)
n_D^*	Movimiento medio corregido
n	Movimiento medio adimensional
G	Constante de gravitación universal
R	Distancia entre cuerpos primarios
μ	Parámetro de masa adimensional
x	Coordenada adimensional (dirección radial)
y	Coordenada adimensional (dirección tangencial)
τ	Tiempo adimensional
Ω	Función potencial
Ω^*	Función potencial modificada
r	Distancia (adimensional)
q	Factor de radiación
σ	Parámetro de triaxialidad
f	Función de triaxialidad
ϵ	Parámetro de gravedad fuerte
a_s	Radio de la órbita de un satélite natural
n_{Ds}	Movimiento medio de un satélite
α	Masa de satélites naturales adimensional
L	Punto de Lagrange o de libración

Capítulo 1

Introducción y Objetivos

1.1. Introducción

El ser humano siempre ha mostrado interés por el espacio. Desde la antigüedad muchos pensadores intentaban dar respuesta a qué era y cómo funcionaba el universo. Un claro ejemplo es Platón, quien con su diálogo *Timeo* trataba de explicar, entre otras cosas, el origen del universo. La cosmología en ese momento trataba de explicar el funcionamiento del universo de forma más bien filosófica.

El cielo que se ve al anochecer ha cambiado muy poco desde la época de los antiguos griegos y romanos. La uniformidad del cielo nocturno llevó a las culturas antiguas a crear imágenes a partir de patrones de estrellas. Estas constelaciones han formado parte de todas las grandes civilizaciones. Se pueden encontrar registros de constelaciones en los escritos de los egipcios, japoneses, chinos, babilonios, incas, aztecas, tribus nativas americanas y, por supuesto, los antiguos griegos y romanos. Además de las estrellas, había otros cuerpos celestes que a menudo tenían significado, como los planetas, que parecían estrellas, pero cambiaban de posición en el fondo de estrellas, y que llevarían el nombre de los dioses. De hecho, hoy en día todavía se reconocen las constelaciones creadas por los antiguos griegos y romanos.

Sin embargo, pese a que a lo largo de la historia diferentes personajes se esforzaron por comprender los mecanismos del universo, no fue hasta el siglo XVII cuando se comenzó a desarrollar la metodología científica de la astronomía.

Debido al gran avance científico que se ha experimentado en las últimas décadas, los conocimientos sobre el universo y sus mecanismos se han expandido enormemente. Sin embargo, todavía queda mucho cosmos por descubrir y enigmas por resolver.

A mediados del siglo XX, el interés por comprender el espacio se transformó en interés por explorarlo. Entre los años 1955 y 1975 tuvo lugar lo que se conoce como la *carrera espacial*, en la que Estados Unidos y la Unión Soviética compitieron por la conquista del espacio.

Como consecuencia, comienzan a aparecer los primeros satélites artificiales. El 4 de octubre de 1957, la Unión Soviética hace historia al lanzar desde el cosmódromo de Baikonur, el Sputnik. Desde entonces y hasta la fecha actual, se han puesto en órbita miles de nuevos satélites.

No obstante, el número de estaciones espaciales es significativamente menor. La más conocida es la Estación Espacial Internacional, siendo la única estación habitada que continúa en órbita a día de hoy. En la ciencia ficción se pueden encontrar numerosos ejemplos de colonias humanas asentadas en estaciones espaciales o incluso en otros planetas. Pese a que esta ficción esté lejos de ocurrir, es evidente que cada vez se está más cerca de poder explorar el espacio *in-situ*.

En el diseño de misiones espaciales es de vital importancia determinar correctamente las órbitas de los vehículos implicados. Sin embargo, parece lógico pensar que una estación espacial, especialmente si se dedica a la investigación científica, debería ubicarse en algún punto que permaneciese relativamente estacionario respecto a los cuerpos celestes cercanos, con el fin de optimizar el combustible y los recursos empleados.

Desde el comienzo de la astronomía, se han propuesto diferentes modelos que, basados principalmente en las leyes de movimiento de Newton y la ley de gravitación universal, tratan de explicar la mecánica celeste. Dentro de estos modelos se encuentra el conocido como problema de los 3 cuerpos, un caso especial del problema de los n cuerpos. Se trata de uno de los problemas estrella de la mecánica clásica, siendo su particularización circular restringida una de las más estudiadas.

Analizando este problema se ha observado que existen una serie de puntos que cumplen la característica mencionada anteriormente: permanecen estacionarios respecto a las masas primarias. Estos puntos, conocidos como puntos de Lagrange, podrían ser potencialmente útiles para ubicar estaciones espaciales.

1.2. Objetivos

En este trabajo se realizará un análisis del problema de los 3 cuerpos con la intención de obtener los puntos de Lagrange de diferentes casos considerados. Por tanto, los objetivos del presente trabajo son los siguientes:

- Realizar un estudio exhaustivo de la mecánica detrás del problema de los 3 cuerpos.
- Mejorar el modelo dinámico introduciendo fenómenos físicos que el modelo clásico u original no contemplaba.
- Programar métodos numéricos que permitan ubicar los puntos de Lagrange de los sistemas estudiados.

Capítulo 2

Descripción del modelo dinámico

A lo largo de este capítulo se realizará un análisis detallado del modelo dinámico que define el problema. En primer lugar, se demostrarán las ecuaciones básicas del CR3BP para, posteriormente, detallar las modificaciones que se irán realizando con el fin de completar dicho modelo.

Tabla de contenidos

2.1. Formulación clásica del CR3BP	3
2.1.1. Deducción del modelo	4
2.2. Introducción de modificaciones del modelo	7
2.2.1. Fuerzas de radiación	8
2.2.2. Achatamiento de las masas primarias	9
2.2.3. Potencial no newtoniano - gravedad fuerte	10
2.2.4. Presencia de satélites naturales	11
2.3. Descripción del modelo dinámico completo	12

2.1. Formulación clásica del CR3BP

El problema circular restringido de los 3 cuerpos (CR3BP por sus siglas en inglés - *Circular Restricted 3 Body Problem*) es una de las variantes más estudiadas del problema de los 3 cuerpos. Esto se debe a que se trata de un caso particular en la que se incluyen una serie de hipótesis que permiten reducir de forma notable la complejidad del problema.

Como su nombre indica, el modelo dinámico asociado a este problema considera únicamente tres cuerpos. Por un lado, se encuentran los cuerpos primarios, cuyas masas vendrán dadas por m_1 y m_2 , respectivamente. Por el otro, el tercer cuerpo, conocido habitualmente como *masa infinitesimal*, dispondrá de una masa m_3 que será significativamente menor a la masa de los cuerpos primarios. Este hecho hace que sea válida la hipótesis de que su presencia no altere la dinámica de las masas

primarias (problema restringido).

Los cuerpos primarios orbitan circularmente (problema circular) alrededor del centro de masas del sistema que constituyen, sin tener en consideración la masa infinitesimal. Esta es la razón por la que tradicionalmente las ecuaciones del CR3BP se expresan en un sistema de coordenadas rotativo, cuyo origen se encuentra en el mencionado centro de masas, y cuya velocidad de rotación es igual al movimiento medio de las órbitas de las masas primarias, cuya expresión es:

$$n_D = \sqrt{\frac{G(m_1 + m_2)}{R^3}} \quad (2.1)$$

Finalmente, otra hipótesis que suele incluir gran parte de los autores que estudian este problema es que todos los cuerpos considerados orbitan sobre un mismo plano, de forma que se analizan movimientos bidimensionales, aunque realmente el modelo es extensible a 3 dimensiones. Para este trabajo, siguiendo la misma línea, se realizará el análisis dinámico sobre el plano Oxy .

Además de utilizar el sistema de referencia rotativo, las ecuaciones se suelen expresar en términos adimensionales. De acuerdo con esto, el sistema de unidades se define de tal forma que la constante de gravitación G , la distancia entre cuerpos primarios R y la suma de sus masas sean iguales a la unidad. También se suele emplear el parámetro de masa adimensional, cuya definición es $\mu = m_2/(m_1 + m_2)$.

La dinámica de la masa infinitesimal viene dada por las siguientes ecuaciones:

$$\ddot{x} - 2\dot{y} = \frac{\partial \Omega}{\partial x} \quad (2.2)$$

$$\ddot{y} + 2\dot{x} = \frac{\partial \Omega}{\partial y} \quad (2.3)$$

siendo Ω la función potencial, definida como

$$\Omega(x, y) = \frac{1}{2}(x^2 + y^2) + \frac{1 - \mu}{r_1} + \frac{\mu}{r_2} \quad (2.4)$$

2.1.1. Deducción del modelo

El modelo mostrado anteriormente se basa en la aplicación conjunta de las leyes de movimiento de Newton y la ley de gravitación universal. En un sistema de referencia fijo $O\xi\eta$, cuyo origen coincide con el origen del sistema de referencia del CR3BP original, las posiciones de los cuerpos primarios vendrán dadas por las siguientes expresiones:

$$\xi_1 = -A_1 \cos(n_D t) \quad \xi_2 = A_2 \cos(n_D t) \quad (2.5)$$

$$\eta_1 = -A_1 \sin(n_D t) \quad \eta_2 = A_2 \sin(n_D t) \quad (2.6)$$

siendo A_i la distancia entre la masa m_i y el origen del sistema de referencia.

Aplicando las ecuaciones de la mecánica clásica, el movimiento de la masa infinitesimal en este sistema de referencia se regirá por las ecuaciones

$$\frac{d^2\xi}{dt^2} = -G m_1 \frac{\xi - \xi_1}{d_1^3} - G m_2 \frac{\xi - \xi_2}{d_2^3} \quad (2.7)$$

$$\frac{d^2\eta}{dt^2} = -G m_1 \frac{\eta - \eta_1}{d_1^3} - G m_2 \frac{\eta - \eta_2}{d_2^3} \quad (2.8)$$

Considérese ahora otro sistema de referencia OXY , con mismo origen, pero rotativo, de forma que la velocidad de rotación es igual a n_D . El hecho de que ambos sistemas de referencia posean un origen común hace que sea posible relacionar las coordenadas (ξ, η) con (X, Y) por medio de las transformaciones:

$$\xi = X \cos(n_D t) - Y \sin(n_D t) \quad (2.9)$$

$$\eta = X \sin(n_D t) + Y \cos(n_D t) \quad (2.10)$$

Como se puede observar, la relación entre variables es lineal, por lo que admite la siguiente notación matricial:

$$\begin{Bmatrix} \xi \\ \eta \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(n_D t) & -\sin(n_D t) \\ \sin(n_D t) & \cos(n_D t) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} X \\ Y \end{Bmatrix} = \mathbf{R}(n_D t) \begin{Bmatrix} X \\ Y \end{Bmatrix} \quad (2.11)$$

La transformación inversa es inmediata, ya que simplemente consistiría en pre-multiplicar por la inversa de la matriz de rotación en ambos miembros. Realizando esta operación, se obtienen las posiciones de los cuerpos primarios en el sistema OXY .

$$X_1 = -A_1 \quad X_2 = A_2 \quad (2.12)$$

$$Y_1 = 0 \quad Y_2 = 0 \quad (2.13)$$

Sustituyendo las Ecuaciones 2.9 y 2.10 en el lado izquierdo de las Ecuaciones 2.7 y 2.8 y operando, se llega al siguiente resultado:

$$\frac{d^2}{dt^2} \begin{Bmatrix} \xi \\ \eta \end{Bmatrix} = \mathbf{R}(n_D t) \begin{Bmatrix} \frac{d^2 X}{dt^2} - 2n_D \frac{dY}{dt} - n_D^2 X \\ \frac{d^2 Y}{dt^2} + 2n_D \frac{dX}{dt} - n_D^2 Y \end{Bmatrix} \quad (2.14)$$

Por otra parte, realizando la misma sustitución en la parte derecha, es posible observar que:

$$\frac{1}{d_i} \begin{Bmatrix} \xi - \xi_i \\ \eta - \eta_i \end{Bmatrix} = \frac{1}{d_i} \mathbf{R}(n_D t) \begin{Bmatrix} X - X_i \\ Y - Y_i \end{Bmatrix} \quad (2.15)$$

donde d_i se calcula como $d_i = \sqrt{(X - X_i)^2 + (Y - Y_i)^2} = \sqrt{(\xi - \xi_i)^2 + (\eta - \eta_i)^2}$.

Por tanto, las Ecuaciones 2.7 y 2.8 se pueden reescribir como:

$$\mathbf{R}(n_D t) \begin{Bmatrix} \frac{d^2 X}{dt^2} - 2n_D \frac{dY}{dt} - n_D^2 X \\ \frac{d^2 Y}{dt^2} + 2n_D \frac{dX}{dt} - n_D^2 Y \end{Bmatrix} = -G \sum_{i=1}^2 \frac{m_i}{d_i^3} \mathbf{R}(n_D t) \begin{Bmatrix} X - X_i \\ Y - Y_i \end{Bmatrix} \quad (2.16)$$

De esta forma, las ecuaciones de movimiento de la partícula infinitesimal expresadas en el sistema de referencia rotativo son:

$$\frac{d^2 X}{dt^2} - 2n_D \frac{dY}{dt} - n_D^2 X = -Gm_1 \frac{X - X_1}{d_1^3} - Gm_2 \frac{X - X_2}{d_2^3} \quad (2.17)$$

$$\frac{d^2 Y}{dt^2} + 2n_D \frac{dX}{dt} - n_D^2 Y = -Gm_1 \frac{Y - Y_1}{d_1^3} - Gm_2 \frac{Y - Y_2}{d_2^3} \quad (2.18)$$

Finalmente, se puede definir la función potencial en este sistema de referencia como:

$$\hat{\Omega}(X, Y) = \frac{n_D^2}{2}(X^2 + Y^2) + G \frac{m_1}{d_1} + G \frac{m_2}{d_2} \quad (2.19)$$

Esta definición permitirá reescribir las Ecuaciones 2.17 y 2.18 como:

$$\frac{d^2 X}{dt^2} - 2n_D \frac{dY}{dt} = \frac{\partial \hat{\Omega}}{\partial X} \quad (2.20)$$

$$\frac{d^2 Y}{dt^2} + 2n_D \frac{dX}{dt} = \frac{\partial \hat{\Omega}}{\partial Y} \quad (2.21)$$

Como se puede observar, estas ecuaciones son muy similares a las ecuaciones originales desarrolladas del CR3BP (Ecuaciones 2.2 y 2.3). Sin embargo, siguen sin estar expresadas en su versión adimensional. Para ello, se tomará como longitud de referencia la distancia entre las dos primarias R , como masa de referencia la suma $m_1 + m_2$ y como unidad de tiempo la inversa del movimiento medio $t_0 = 1/\Omega$.

Las relaciones entre las variables dimensionales y adimensionales, teniendo en cuenta la afirmación anterior, serán:

$$x = X/R \quad Y = Y/R \quad r_i = d_i/R \quad (2.22)$$

$$\tau = t/t_0 = n_D t \quad (2.23)$$

Empleando estas nuevas variables, es posible definir una versión adimensional de la función potencial:

$$\hat{\Omega}(X, Y) = n_D^2 R^2 \left[\frac{1}{2}(x^2 + y^2) \right] + \frac{G(m_1 + m_2)}{R} \left[\frac{1 - \mu}{r_1} + \frac{\mu}{r_2} \right] \quad (2.24)$$

Teniendo en cuenta la definición de Ω , la función potencial se puede expresar de la siguiente forma:

$$\hat{\Omega}(X, Y) = n_D^2 R^2 \left[\frac{1}{2}(x^2 + y^2) + \frac{1 - \mu}{r_1} + \frac{\mu}{r_2} \right] = n_D^2 R^2 \Omega(x, y) \quad (2.25)$$

Por otra parte, al emplear las nuevas variables, las derivadas se realizarán con respecto de las variables adimensionales, de forma que aplicando la regla de la cadena se obtienen las nuevas condiciones de derivación:

$$\frac{d}{dX} = \frac{1}{R} \frac{d}{dx} \quad \frac{d}{dY} = \frac{1}{R} \frac{d}{dy} \quad (2.26)$$

$$\frac{d}{dt} = \frac{1}{n_D} \frac{d}{d\tau} \quad (2.27)$$

De esta forma, se llega a:

$$\frac{d^2\beta}{dt^2} = n_D^2 \frac{d^2\beta}{d\tau^2} = n_D^2 \ddot{\beta} \quad (2.28)$$

$$\frac{d\beta}{dt} = n_D \frac{d\beta}{d\tau} = n_D \dot{\beta} \quad (2.29)$$

Sustituyendo en las Ecuaciones 2.20 y 2.21 las expresiones 2.25 a 2.29 se llega a:

$$n_D^2 R(\ddot{x} - 2\dot{y}) = n_D^2 R \frac{\partial \Omega}{\partial x} \quad (2.30)$$

$$n_D^2 R(\ddot{y} + 2\dot{x}) = n_D^2 R \frac{\partial \Omega}{\partial y} \quad (2.31)$$

Simplificando las dos ecuaciones anteriores se llega a las ecuaciones del problema de partida:

$$\ddot{x} - 2\dot{y} = \frac{\partial \Omega}{\partial x} \quad (2.32)$$

$$\ddot{y} + 2\dot{x} = \frac{\partial \Omega}{\partial y} \quad (2.33)$$

Nota: al adimensionalizar las coordenadas, las posiciones de los cuerpos primarios pasan a ser:

$$x_1 = -\mu \quad x_2 = 1 - \mu \quad (2.34)$$

$$y_1 = 0 \quad y_2 = 0 \quad (2.35)$$

2.2. Introducción de modificaciones del modelo

Una vez desarrollado el modelo dinámico sobre el que se asienta el problema de los 3 cuerpos, es posible observar que no se han tenido en cuenta ciertos aspectos o fenómenos que pueden modificar la dinámica del sistema. A lo largo de las últimas décadas se han realizado revisiones del problema restringido de los 3 cuerpos en las que se han añadido ciertos términos que modifican el potencial efectivo. El objetivo de los desarrollos que se muestran a continuación es analizar cómo algunos de estos aspectos modifican las ecuaciones del sistema, dando lugar a modelos derivados más complejos, pero también más realistas.

Previamente a introducir las modificaciones que se tendrán en cuenta, cabe destacar una hipótesis que se ha asumido válida en este estudio. Dicha hipótesis consiste en considerar que estos nuevos efectos serán independientes entre sí, de forma que no interaccionen entre sí a la hora de modificar el potencial. No obstante, pueden aparecer en el problema de forma simultánea.

A continuación, se desarrollarán las mejoras del modelo de forma consecutiva, de forma que al final de esta sección se encuentren las ecuaciones del CR3BP modificado en su versión más compleja. El hecho de considerar que dichas modificaciones sean independientes dotará al modelo de cierta flexibilidad, ya que se podrán tener en cuenta (o no) los efectos expuestos introduciéndolos (o no) en las ecuaciones del sistema.

La forma de introducir estas correcciones será por medio de términos adicionales que rectificarán la función potencial. No obstante, parte de las correcciones del modelo, asociadas a aspectos geométricos y físicos de los cuerpos considerados, modifican también el movimiento medio de las órbitas consideradas. Es por esta razón que de aquí en adelante se emplearán un potencial modificado, Ω^* , y un movimiento medio corregido, n_D^* . Dado que las ecuaciones con las que se trabajarán se encuentran adimensionalizadas, empleando como referencia de tiempo la inversa del movimiento medio sin corregir, será de utilidad definir $n = n_D^*/n_D$ como el movimiento medio corregido adimensionalizado. De esta manera, el modelo dinámico se rectificará de acuerdo con las siguientes expresiones:

$$\ddot{x} - 2n\dot{y} = \frac{\partial \Omega^*}{\partial x} \quad (2.36)$$

$$\ddot{y} + 2n\dot{x} = \frac{\partial \Omega^*}{\partial y} \quad (2.37)$$

2.2.1. Fuerzas de radiación

Diversos autores han dedicado parte de su actividad investigadora a determinar el efecto de las fuerzas de radiación sobre la dinámica de los cuerpos celestes. Los primeros estudios realizados en este campo, y en concreto aplicados sobre el CR3BP, datan de la década de los 70, y dan lugar a lo que se conoce como el problema fotogravitacional restringido de los 3 cuerpos [1, 2].

En estos modelos se considera que una o ambas masas primarias actúan como fuente de radiación, además de generar el correspondiente potencial gravitatorio. La forma de introducir dicho fenómeno en el sistema dinámico es por medio de un factor de radiación q_i , en el que se establece un ratio entre los efectos gravitatorios F_{g_i} y los efectos de las fuerzas asociadas a la radiación F_{r_i} emitida por m_i :

$$q_i = 1 - \frac{F_{r_i}}{F_{g_i}} \quad (2.38)$$

El hecho de asumir que este factor de radiación permanece constante implica que no se considerarán las fluctuaciones de las fuerzas de presión asociadas a la radiación debidas a variaciones de la radiación emitida por el cuerpo primario emisor.

De acuerdo con Y. A. Chernikov [1], este factor de radiación se puede calcular de acuerdo con la siguiente expresión, dependiente del radio a , la densidad δ y el factor

de eficiencia de presión por radiación χ de la masa infinitesimal:

$$q = 1 - \frac{5.6 \cdot 10^{-5}}{a \cdot \delta} \cdot \chi \quad (2.39)$$

La función potencial modificada que tiene en cuenta estos efectos radiativos es análoga a la función potencial original, incluyendo el factor de radiación como término multiplicativo en los términos asociados a las masas primarias:

$$\Omega^*(x, y) = \frac{n^2}{2}(x^2 + y^2) + \frac{q_1(1 - \mu)}{r_1} + \frac{q_2\mu}{r_2} \quad (2.40)$$

Al considerar que la radiación emitida por los cuerpos primarios es isotrópica, la consideración de las fuerzas asociadas no implica un cambio en la definición del movimiento medio de las órbitas de los mismos, por lo que $n = 1$.

2.2.2. Achatamiento de las masas primarias

La teoría del CR3BP original se basa en establecer el potencial gravitatorio que ejercen dos masas primarias consideradas esféricas. Sin embargo, es sabido que no todos los cuerpos celestes presentan una forma esférica perfectamente simétrica, sino que presentan ciertos achatamientos.

Llegados a este punto, algunos autores han realizado estudios en los que proponen la manera de modificar el potencial efectivo de forma que tengan en cuenta estas geometrías. Para ello, el primer paso es definir los conocidos como parámetros de triaxialidad. Supóngase que cada una de las masas primarias presenta 3 semiejes, denotados por a , b y c , medidos sobre un triedro de ejes a derechas, tal y como se muestra en la Figura 2.1. Los parámetros de triaxialidad dependerán de las relaciones entre dichos semiejes.

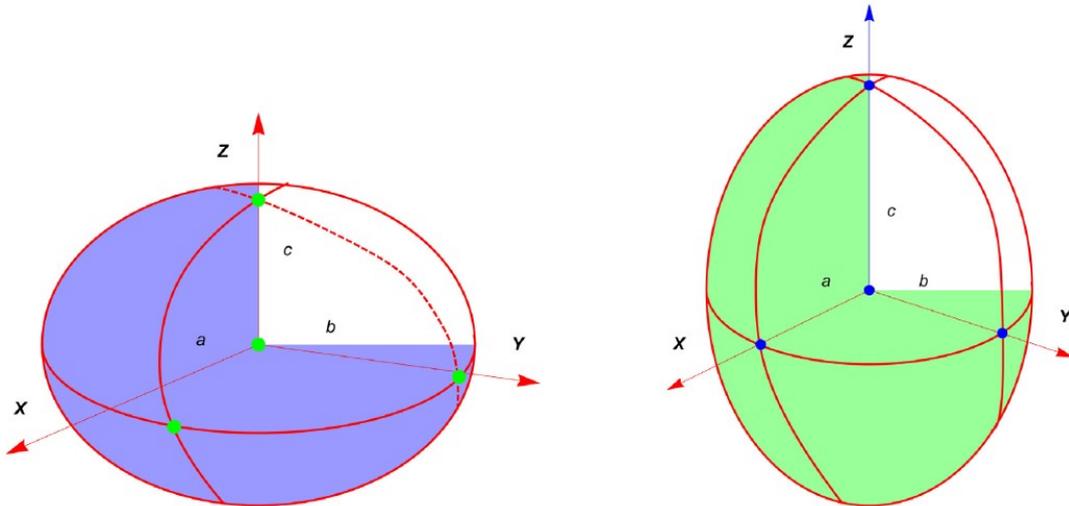


Figura 2.1: Configuración de cuerpos triaxiales sin simetría esférica [3]

De acuerdo con la Figura 2.1, en función de las relaciones entre semiejes se pueden distinguir varios tipos de cuerpos:

- Cuerpo con simetría esférica: $a = b = c$
- Cuerpo achatado: $a = b > c$
- Cuerpo oblongado: $a = b < c$

En caso de que los semiejes a y b sean iguales entre sí, los cuerpos reciben el nombre de esferoides.

Una vez establecidos los semiejes, es posible definir los parámetros de triaxialidad σ_{ij} de acuerdo con las expresiones siguientes:

$$\sigma_{1j} = \frac{a_j^2 - c_j^2}{5R^2} \quad \sigma_{2j} = \frac{b_j^2 - c_j^2}{5R^2} \quad (2.41)$$

Posteriormente, cada masa primaria j dispondrá de dos funciones de triaxialidad $f_{ij}, i = 1, 2$ dadas por:

$$f_{1j} = 2\sigma_{1j} - \sigma_{2j} \quad f_{2j} = \sigma_{2j} - \sigma_{1j} \quad (2.42)$$

Los términos de la función potencial asociados a cada una de las masas primarias irán modificados por unos términos en los que salen potencias mayores de la distancia en el denominador. La función potencial efectiva tendría el siguiente aspecto

$$\Omega^*(x, y) = \frac{n^2}{2}(x^2 + y^2) + \frac{1 - \mu}{r_1} \left(q_1 + \frac{f_{11}}{2r_1^2} + \frac{3y^2 f_{21}}{2r_1^4} \right) + \frac{\mu}{r_1} \left(q_2 + \frac{f_{12}}{2r_2^2} + \frac{3y^2 f_{22}}{2r_2^4} \right) \quad (2.43)$$

Por otra parte, el movimiento medio de los cuerpos primarios en este caso sí es función de los parámetros de triaxialidad, por lo que el movimiento medio adimensional corregido será:

$$n = \sqrt{1 + \frac{3}{2}(2\sigma_{11} - \sigma_{21}) + \frac{3}{2}(2\sigma_{12} - \sigma_{22})} \quad (2.44)$$

2.2.3. Potencial no newtoniano - gravedad fuerte

A comienzos del siglo XX, la publicación de la teoría de la relatividad de Albert Einstein hizo que se revisara el modelo newtoniano de la ley de la gravedad. Uno de los estudios que más contribuyeron en este campo tan concreto fue el realizado por Karl Schwarzschild. Este físico alemán logró encontrar una solución a las ecuaciones de Einstein que supuso una descripción relativista aproximada del campo gravitatorio, conocida comúnmente como métrica de Schwarzschild.

Esta compleja teoría introduce conceptos relativistas en el potencial gravitatorio efectivo. Todas las variantes del potencial efectivo de Schwarzschild introducen un término adicional de la forma $1/r^3$, que supone que el campo gravitatorio generado por una masa es más fuerte que el que predecía la teoría de la gravedad newtoniana. Siguiendo la línea del estudio publicado en 2020 por Euaggelos E. Zotos et al. [4], se introducirán estos términos en las ecuaciones de forma que permitan trabajar con una gravedad más fuerte que la newtoniana.

Para ello, se define el parámetro ϵ . Los valores de este parámetro se encontrarán contenidos en el intervalo $[0, 1]$. De esta forma, cuando $\epsilon = 0$, el potencial efectivo no incluirá términos relativistas (potencial newtoniano clásico), mientras que cuando $\epsilon > 0$, el término asociado a la gravedad fuerte irá adquiriendo mayor importancia.

La expresión del nuevo potencial efectivo, incluyendo este concepto, es la que se muestra a continuación:

$$\begin{aligned} \Omega^*(x, y) = \frac{n^2}{2}(x^2 + y^2) + \frac{1 - \mu}{r_1} \left(q_1 + \frac{f_{1_1}}{2r_1^2} + \frac{3y^2 f_{2_1}}{2r_1^4} \right) + \\ + \frac{\mu}{r_1} \left(q_2 + \frac{f_{1_2}}{2r_2^2} + \frac{3y^2 f_{2_2}}{2r_2^4} + \frac{\epsilon}{r_2^2} \right) \end{aligned} \quad (2.45)$$

Al igual que la geometría de los cuerpos primarios, la inclusión de términos relativistas no influye solamente en el potencial efectivo, sino que también modifica el valor del movimiento medio de los mismos. La corrección del movimiento medio a realizar sería la indicada en color rojo.

$$n = \sqrt{\left[1 + \frac{3}{2}(2\sigma_{1_1} - \sigma_{2_1}) + \frac{3}{2}(2\sigma_{1_2} - \sigma_{2_2}) \right] (1 + 3\epsilon)} \quad (2.46)$$

2.2.4. Presencia de satélites naturales

Para introducir satélites naturales en el CR3BP es necesario acudir a las ecuaciones originales de la mecánica clásica (Ecuaciones 2.7 y 2.8) y añadir los términos asociados a la presencia de los satélites.

Para no complicar en exceso el modelo, se asumirá que los satélites son cuerpos con simetría esférica perfecta, de forma que las correcciones por achatamiento no afectarán a estos términos. Además, tampoco se verán afectados por el resto de modificaciones, ya que no son fuente de radiación y su masa es significativamente menor a la masa de los cuerpos primarios.

Por otra parte, la dinámica de los satélites vendrá determinada por órbitas circulares alrededor de las masas primarias. Cada satélite $i = [1, n_s]$ dispondrá de una masa m_{s_i} y orbitará circularmente con un radio a_{s_i} alrededor de uno de los cuerpos primarios, con un movimiento medio $n_{D_{s_i}}$. Esto permitirá conocer la posición del

satélite en cada momento, ya que

$$\xi_i = \xi_j + a_{si} \cos(n_{Dsi} t) \quad x_i = x_j + \frac{a_{si}}{R} \cos((n_{Dsi} - n_D^*) t) \quad (2.47)$$

$$\eta_i = \eta_j + a_{si} \sin(n_{Dsi} t) \quad y_i = y_j + \frac{a_{si}}{R} \sin((n_{Dsi} - n_D^*) t) \quad (2.48)$$

Donde el subíndice j hace referencia a la masa primaria alrededor de la que orbita el satélite i . Para poder obtener las modificaciones que introducen en las ecuaciones, es necesario partir de las ecuaciones de la mecánica clásica, tal y como se avanzó anteriormente, y realizar el desarrollo matemático expuesto en la Subsección 2.1.1. Teniendo lo anterior en cuenta, el potencial efectivo quedaría de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} \Omega^*(x, y, \tau) = & \frac{n^2}{2}(x^2 + y^2) + \frac{1 - \mu}{r_1} \left(q_1 + \frac{f_{11}}{2r_1^2} + \frac{3y^2 f_{21}}{2r_1^4} \right) + \\ & + \frac{\mu}{r_1} \left(q_2 + \frac{f_{12}}{2r_2^2} + \frac{3y^2 f_{22}}{2r_2^4} + \frac{\epsilon}{r_2^2} \right) + \sum_{i=1}^{n_s} \frac{\alpha_i}{r_{si}} \end{aligned} \quad (2.49)$$

Un aspecto importante a tener en cuenta es que las posiciones de los satélites, a diferencia de las posiciones de las masas primarias, no son fijas en el sistema de referencia rotativo en el que están definidas las ecuaciones. Esto hace que la función potencial pase de depender únicamente de las coordenadas de la masa infinitesimal a depender también del tiempo.

Finalmente, por ser la masa de los satélites significativamente menor a la de los cuerpos primarios, se considerará que su presencia no afecta al movimiento medio de estos últimos, por lo que esta modificación no supone ningún término extra dentro de n .

2.3. Descripción del modelo dinámico completo

Para terminar con este capítulo, se realizará una síntesis del modelo dinámico obtenido. Una vez explicadas las distintas modificaciones introducidas es necesario recordar que la versatilidad del modelo es tal que se pueden incorporar (o no) dichas modificaciones en función de cómo se definan los parámetros que intervienen en las ecuaciones. Esto sería equivalente a considerar que el CR3BP original pasa a ser un caso particular del sistema obtenido.

Las ecuaciones que definen este nuevo modelo más completo son análogas a las ecuaciones de partida, teniendo en cuenta que en lugar del potencial “simple” se hará uso del potencial efectivo, y que el movimiento medio de los cuerpos primarios puede verse afectado por las modificaciones introducidas.

$$\ddot{x} - 2n\dot{y} = \frac{\partial \Omega^*}{\partial x}$$

$$\ddot{y} + 2n\dot{x} = \frac{\partial \Omega^*}{\partial y}$$

$$n = \sqrt{\left[1 + \frac{3}{2}(2\sigma_{1_1} - \sigma_{2_1}) + \frac{3}{2}(2\sigma_{1_2} - \sigma_{2_2})\right]} (1 + 3\epsilon)$$

$$\begin{aligned} \Omega^*(x, y, \tau) = & \frac{n^2}{2}(x^2 + y^2) + \frac{1 - \mu}{r_1} \left(q_1 + \frac{f_{1_1}}{2r_1^2} + \frac{3y^2 f_{2_1}}{2r_1^4} \right) + \\ & + \frac{\mu}{r_1} \left(q_2 + \frac{f_{1_2}}{2r_2^2} + \frac{3y^2 f_{2_2}}{2r_2^4} + \frac{\epsilon}{r_2^2} \right) + \sum_{i=1}^{n_s} \frac{\alpha_i}{r_{s_i}} \end{aligned} \quad (2.50)$$

Capítulo 3

Bases de convergencia

En este capítulo se describe lo que se conoce como puntos de Lagrange y se detallará la metodología de cálculo implementada para obtenerlos. Dentro de este último tema, se expondrán los dos métodos iterativos programados para su cálculo: el método de Newton-Raphson y el método de Halley.

Tabla de contenidos

3.1. Puntos de Lagrange	15
3.2. Bases de convergencia	17
3.3. Métodos matemáticos	17
3.3.1. Método de Newton-Raphson	17
3.3.2. Método de Halley	18
3.4. Algoritmo de búsqueda	19

3.1. Puntos de Lagrange

Tal y como se mostró en el Capítulo 2, el CR3BP se basa en definir una función potencial, cuyo valor depende de las coordenadas del campo en las que se calcule. Posteriormente, se ha demostrado que al considerar satélites naturales, se introduce una nueva dependencia con el tiempo, ya que la posición de estos no es fija respecto al sistema de referencia rotativo en el que se definen las ecuaciones.

Dada la definición del potencial efectivo, es posible encontrar puntos en los que dicha función presenta máximos y/o mínimos. Estos puntos se conocen como puntos de Lagrange o puntos de libración. La principal característica que presentan estos puntos es que determinan aquellos lugares del espacio donde una masa infinitesimal, afectada únicamente por el campo gravitatorio ejercido por las dos masas primarias, puede llegar a alcanzar una posición estacionaria respecto a estas últimas. Al introducir nuevos términos en el modelo dinámico, la definición de los puntos de Lagrange es análoga, pero considerando todos los fenómenos añadidos, además del campo gravitatorio.

La explicación de por qué en dichos puntos la posición de una tercera masa puede permanecer estacionaria se debe a que, en dicha posición, el campo gravitatorio ejercido por los cuerpos primarios se compensa con la aceleración centrífuga de la masa infinitesimal, de forma que las posiciones relativas de los 3 cuerpos se mantendrían estacionarias.

Tradicionalmente, existen un total de 5 puntos de libración. La nomenclatura de los mismos suele ser común para todos los casos de estudio. En la Figura 3.1 se muestra un esquema en el que se recogen los cinco puntos de Lagrange habituales. Como se puede observar, los puntos L_1 , L_2 y L_3 , conocidos como puntos colineales, se encuentran ubicados sobre el eje x ($y = 0$), es decir, sobre la recta que une las dos masas primarias. Por otro lado, los puntos L_4 y L_5 , conocidos como puntos triangulares, son puntos que se encuentran fuera del mencionado eje, por lo que su coordenada y será no nula.

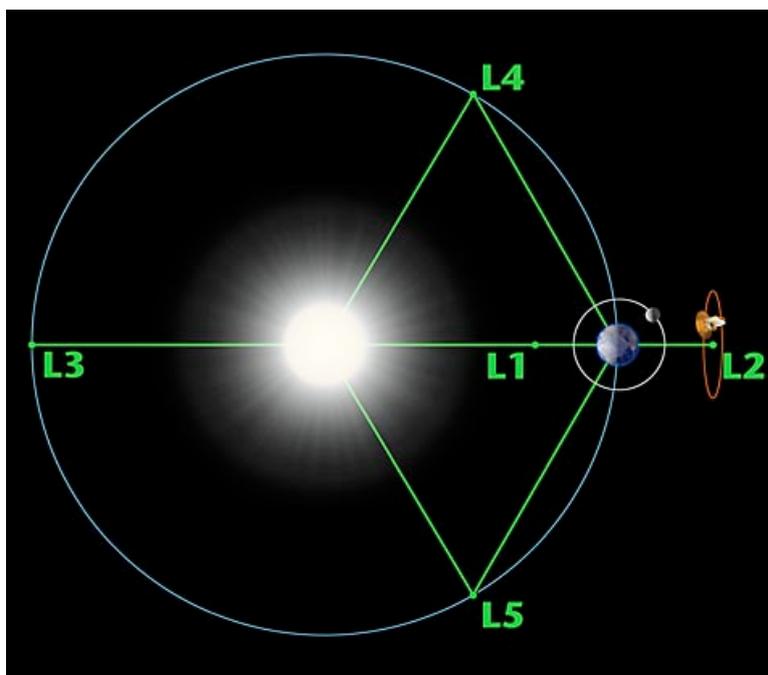


Figura 3.1: Esquema representativo de los puntos de Lagrange [5]

Al introducir ciertas modificaciones sobre el modelo, es posible que aparezcan más de 5 puntos de libración. Esto se debe a que existirán más puntos en los que la función potencial alcance un máximo o un mínimo. Existen ciertos artículos en los que los autores ponen de manifiesto cómo al modificar el modelo dinámico del CR3BP aparecen puntos de libración adicionales, como puede ser el caso del artículo publicado por Tareq Saeed y Euaggelos E. Zotos sobre el efecto del achatamiento de las masas primarias [3]. En este caso, la nomenclatura de los puntos de Lagrange puede ser diferente a la habitual.

3.2. Bases de convergencia

Una vez definidos los puntos de Lagrange, se procede a definir lo que se conocerá en este estudio como base de convergencia. Los puntos de libración actúan como atractores dentro del campo gravitatorio ejercido por las dos masas primarias (incluyendo las modificaciones que se estimen oportunas). Es por ello que una masa infinitesimal situada en (x_0, y_0) tenderá a acercarse, de forma natural, a alguno de los mencionados puntos.

Se entiende por base de convergencia la determinación de hacia qué punto de Lagrange evoluciona una masa infinitesimal dadas sus condiciones iniciales (x_0, y_0) , asumiendo que su velocidad inicial es nula ($\dot{x}_0 = \dot{y}_0 = 0$).

Teniendo en cuenta que la condición que se ha de dar para que un punto del espacio sea un punto de libración es que el potencial alcance un máximo o un mínimo, las ecuaciones que los definirán son las siguientes:

$$\Omega^*_x = 0 \quad (3.1)$$

$$\Omega^*_y = 0 \quad (3.2)$$

Para determinar las bases de convergencia, se tomará una determinada porción del plano, de forma que se realizará un mallado del mismo, de forma que se dividirá en $n_x \times n_y$ elementos, distribuidos de forma uniforme. El centroide de cada una de dichas celdas se considerará que representa la posición (x_0, y_0) . Para determinar hacia qué punto de libración tiende una masa infinitesimal sin velocidad ubicada en dicha posición, se emplearán métodos iterativos de resolución de ecuaciones, de forma que se resuelvan las Ecuaciones 3.1 y 3.2 tomando como solución inicial el centroide de cada celda.

3.3. Métodos matemáticos

La inmensa mayoría de los estudios consultados como bibliografía del presente trabajo estudian las bases de convergencia empleando el método de Newton-Raphson (NR) para la resolución de las ecuaciones. Sin embargo, al incrementar la complejidad del modelo, existen ciertos casos en los que el mencionado método no convergía hacia una solución concreta, no al menos con un nivel de precisión aceptable. Es por ello que en este trabajo se ha optado por incluir un segundo método iterativo, el método de Halley, para analizar aquellos casos en los que el método NR no alcanza una solución.

3.3.1. Método de Newton-Raphson

El método de Newton-Raphson es uno de los métodos más empleados para la obtención de los ceros de funciones reales. Su formulación inicial estaba pensada para funciones de una única variable. Sin embargo, en este caso, ha sido necesario

programar este método para la búsqueda de ceros multivariable.

Sea la función vectorial $\mathbf{F}(\mathbf{x}) = \{F_1(\mathbf{x}), \dots, F_n(\mathbf{x})\}^T$ la función de la que se desean obtener los ceros y el vector \mathbf{x} es un vector que contiene las variables del sistema. En este caso, $\mathbf{x} = \{x, y\}^T$ y la función $\mathbf{F}(\mathbf{x})$ sería $\mathbf{F}(\mathbf{x}) = \{\Omega^*_x, \Omega^*_y\}^T$.

El método NR se basa en emplear una aproximación lineal (de primer orden) de la función, de forma que:

$$\mathbf{F}(\mathbf{x}_{n+1}) = \mathbf{F}(\mathbf{x}_n) + \mathbf{F}'(\mathbf{x}_n)(\mathbf{x}_{n+1} - \mathbf{x}_n) \quad (3.3)$$

donde $\mathbf{F}'(\mathbf{x}_n)$ representa la matriz jacobiana de la función $\mathbf{F}(\mathbf{x})$ evaluada en el punto \mathbf{x}_n . Sabiendo que el valor buscado de la función es 0, la expresión pasaría a ser:

$$0 = \mathbf{F}(\mathbf{x}_n) + \mathbf{F}'(\mathbf{x}_n)(\mathbf{x}_{n+1} - \mathbf{x}_n) \quad (3.4)$$

Por tanto, despejando \mathbf{x}_{n+1} se obtiene una expresión que, de forma iterativa, permite encontrar aquellos puntos que hacen que la función se haga nula. En consecuencia, el algoritmo NR implementado tendría el siguiente aspecto:

$$\mathbf{x}_{n+1} = \mathbf{x}_n - (\mathbf{F}'(\mathbf{x}_n))^{-1}\mathbf{F}(\mathbf{x}_n) \quad (3.5)$$

Teniendo en cuenta la definición de la función $\mathbf{F}(\mathbf{x})$ empleada en este estudio, es posible llegar a que las expresiones que permiten calcular las coordenadas de los puntos de Lagrange serán las siguientes:

$$x_{n+1} = x_n + \frac{\Omega^*_x \Omega^*_{yy} - \Omega^*_y \Omega^*_{xy}}{\Omega^*_{yy} \Omega^*_{xx} - \Omega^*_{xy} \Omega^*_{yx}} \quad (3.6)$$

$$y_{n+1} = y_n - \frac{-\Omega^*_x \Omega^*_{yx} + \Omega^*_y \Omega^*_{xx}}{\Omega^*_{yy} \Omega^*_{xx} - \Omega^*_{xy} \Omega^*_{yx}} \quad (3.7)$$

3.3.2. Método de Halley

El método de Halley, a diferencia del método NR, constituye un método de orden superior. Este método posee una formulación notablemente más compleja que el primero. Se ha optado por emplear este método debido a la alta velocidad de convergencia que presenta, aunque se entrará más en detalle en el algoritmo de búsqueda de los puntos de Lagrange más adelante.

Este método se basa en realizar una especie de corrección sobre el método de NR, ya que parte de su formulación incluye la corrección de Newton. El algoritmo que define el método de Halley para buscar los ceros de la función es el que se muestra a continuación:

$$\mathbf{x}_{n+1} = \mathbf{x}_n + \frac{(\mathbf{a}_n)^2}{\mathbf{a}_n + \frac{1}{2}\mathbf{b}_n} \quad (3.8)$$

donde \mathbf{a}_n representa la corrección de Newton

$$\mathbf{a}_n = -(\mathbf{F}'(\mathbf{x}_n))^{-1}\mathbf{F}(\mathbf{x}_n) \quad (3.9)$$

y el término \mathbf{b}_n se calcula de acuerdo con la siguiente expresión:

$$\mathbf{b}_n = (\mathbf{F}'(\mathbf{x}_n))^{-1} \mathbf{F}''(\mathbf{x}_n) \mathbf{a}_n \mathbf{a}_n \quad (3.10)$$

En la Ecuación 3.10, $\mathbf{F}''(\mathbf{x}_n)$ representa la matriz hessiana de la función $\mathbf{F}(\mathbf{x})$ empleada como un operador bilineal que cumple la propiedad distributiva a la hora de realizar el producto multiplicando a los vectores \mathbf{a}_n .

En este caso las expresiones de las correcciones de este método desarrolladas en términos de derivadas de Ω^* son demasiado complejas, por lo que se omiten en este documento.

3.4. Algoritmo de búsqueda

Una vez establecidos los métodos iterativos que se emplearán en este estudio, se procede a detallar el procedimiento seguido para establecer las bases de convergencia del CR3BP. No obstante, es necesario realizar un breve inciso acerca de la precisión y la utilización de los métodos explicados.

El método NR, por ser un método de primer orden, dispone de un coste computacional sensiblemente menor al método de Halley, ya que este último es de orden superior. Sin embargo, conviene tener en cuenta que debido precisamente a este hecho, el método NR realiza los cálculos de forma muy rápida, pero menos precisa. El método de Halley, por otra parte, es muy preciso, siempre y cuando la solución inicial con la que comienza el método se encuentre próxima a la solución buscada. Teniendo esto en mente, ya se puede proceder a explicar la metodología de búsqueda de puntos de libración.

En primer lugar se discretiza un dominio rectangular, tal y como se indicó anteriormente. Tomando como puntos de inicio los centroides de cada una de las celdas, se comienza a aplicar el método NR. Se considerará que la solución ha convergido cuando entre una iteración y la siguiente del método hay una distancia inferior a un umbral de precisión. El método NR se aplica repetidamente hasta que todos los puntos hayan convergido. En caso de alcanzar un número preestablecido de iteraciones sin que todos los puntos hayan convergido a su solución, se pasará a emplear el método de Halley. De esta forma, se utiliza el método de primer orden para acercarse lo máximo posible a la solución, y una vez que dicho método ya no permite obtener la precisión suficiente o converge de forma mucho más lenta, se pasa a emplear el método de orden superior.

Una vez hayan convergido todos los puntos del dominio, se pasa a analizar las soluciones obtenidas. En este caso, es posible que las soluciones alcanzadas no sean exactamente iguales, ya que para obtenerlas se han utilizado métodos aproximados, pero sí se refieran a una misma solución real. Es por ello que se define un nuevo umbral, de forma que se considerará que dos soluciones son iguales si la distancia entre

ellas es inferior a dicho umbral. Una vez determinadas todas las posibles soluciones, se asigna a cada una de ellas el identificador correspondiente (L_i). De esta forma, se obtienen como resultado los puntos de Lagrange.

Posteriormente, se compara la solución alcanzada en cada celda con cada uno de los puntos de Lagrange, de forma que todas las celdas tendrán asignado el identificador con el punto de Lagrange al que convergen. Representando gráficamente estos identificadores, se obtendrán las bases de convergencia del sistema.

Capítulo 4

Descripción y validación del código

El principal objetivo perseguido en este Capítulo es verificar la validación de un código en *Matlab* que implementa tanto el modelo dinámico como los métodos numéricos expuestos en los capítulos anteriores. Así mismo, se incluye una breve descripción del código para facilitar la comprensión del mismo al usuario.

Tabla de contenidos

4.1. Descripción del código	21
4.2. Validación	23
4.2.1. Validación del efecto de fuerzas de radiación y movimiento medio	23
4.2.2. Validación de efectos de achatamiento	26
4.2.3. Validación de efectos relativistas	29
4.2.4. Validación del efecto de satélites naturales	30

4.1. Descripción del código

El programa diseñado consta de un fichero de configuración inicial, un fichero principal y varias funciones y ficheros técnicos.

En el fichero de configuración inicial *confLaunchBC.m*, el usuario podrá definir el dominio en el que se desean analizar las bases de convergencia, así como la resolución del mallado. La malla estará conformada por elementos cuadriláteros, cuyo tamaño dependerá de la resolución especificada por el usuario, así como del tamaño del dominio. La forma de establecerlo será definir la resolución del dominio en cada dirección. También se encuentran dentro de este fichero las definiciones de las tolerancias con las que se realizarán los cálculos, así como el número de iteraciones máximas del método NR y máximas totales del programa.

Por otra parte, se encuentra el fichero principal *librationPointsMainScript.m*. Este fichero, como su nombre indica, es el fichero principal de todo el programa. Una vez

el usuario haya definido todos los datos de la simulación, podrá lanzar este código, de forma que su ejecución resultará en la obtención de las bases de convergencia del caso estudiado. Esto implica que este programa es el encargado de realizar los cálculos y llamar a las funciones necesarias para resolver el problema. La secuencia de funcionamiento de este programa es esencialmente la descrita en la Sección 3.4.

Finalmente, en el siguiente listado se facilita una breve descripción acerca de los diferentes ficheros técnicos implementados:

- *dataGeneration.m*: generación de una clase de datos cuyos atributos son los datos de partida del problema (masas primarias, parámetros geométricos, parámetros de radiación...).
- *domainDiscretization.m*: genera la malla del dominio en la que se realizarán los cálculos.
- *potentialFunction.m*: genera la función potencial a partir de los datos obtenidos de *dataGeneration*. Además, calcula las derivadas de hasta tercer orden de dicha función potencial.
- *particularOmega.m*: particularización de la función potencial a un instante de tiempo determinado.
- *bcNRStep.m*: calcula un paso del método de Newton-Raphson.
- *bcHalleyStep.m*: calcula un paso del método de Halley.
- *lpEstimation.m*: estima la ubicación de los puntos de Lagrange del sistema (sin ordenarlos).
- *lpSort.m*: ordena los puntos de Lagrange de acuerdo a la nomenclatura establecida en la Sección 3.1.
- *lpAssignment.m*: asigna a cada elemento del dominio el valor del punto de Lagrange que actúa como sumidero en dicha posición del espacio.
- *bcPlotResults.m*: una vez obtenidos los resultados, esta función se encarga de realizar la representación gráfica de los mismos.

El programa añade una funcionalidad extra que consiste en almacenar las iteraciones realizadas hasta la convergencia en cada celda. Esto permitirá determinar en qué zonas la velocidad de convergencia es mayor.

Tras esta breve descripción del código del programa, cabe destacar que todo el código se encuentra comentado para facilitar su comprensión y el seguimiento de su funcionamiento. El código se puede encontrar en el anexo adjunto.

Por otro lado, también conviene resaltar el hecho de que para configurar los diferentes casos, el usuario únicamente deberá modificar los datos pertinentes acerca del dominio de cálculo o la caracterización de la física del problema en los ficheros *confLaunchBC.m* y *dataGeneration.m*.

4.2. Validación

En esta sección se realizará un análisis que permitirá validar el código implementado. Dicho análisis se basará en recrear algunos de los resultados recogidos en los informes empleados como bibliografía de este trabajo y verificar que el código funciona correctamente para los casos escogidos, llegando a los mismos resultados que los autores citados.

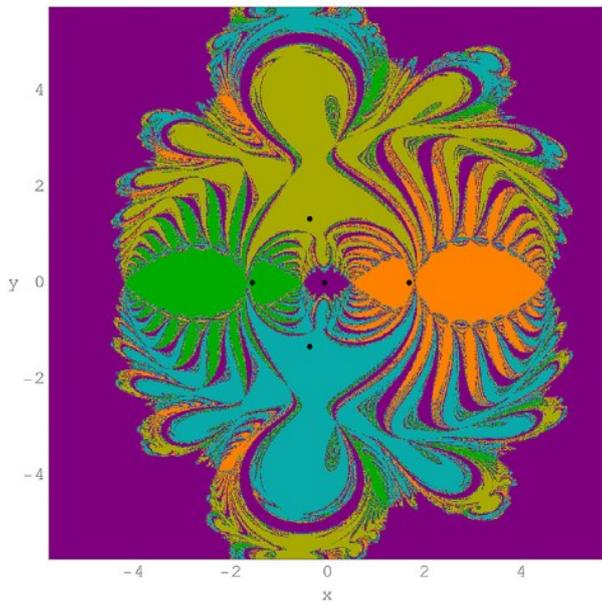
Dada la construcción “modular” del modelo dinámico, y asumiendo válida la hipótesis de independencia comentada en el Capítulo 2, el código ha sido programado de tal forma que se puedan considerar ciertas modificaciones o no a voluntad del usuario. Por tanto, para validar el código se emplearán casos en los que se consideren únicamente una modificación aislada. De esta manera se asumirá que si el código permite recrear los resultados de problemas más simples como casos particulares de un problema más complejo, el código funcionará correctamente para este último caso. Las validaciones se realizarán empleando mallas de una resolución de 500×500 . Se ha optado por emplear estas mallas debido a que la velocidad de los cálculos es considerablemente más baja que empleando mallas más grandes, sin perder por ello precisión en la solución.

4.2.1. Validación del efecto de fuerzas de radiación y movimiento medio

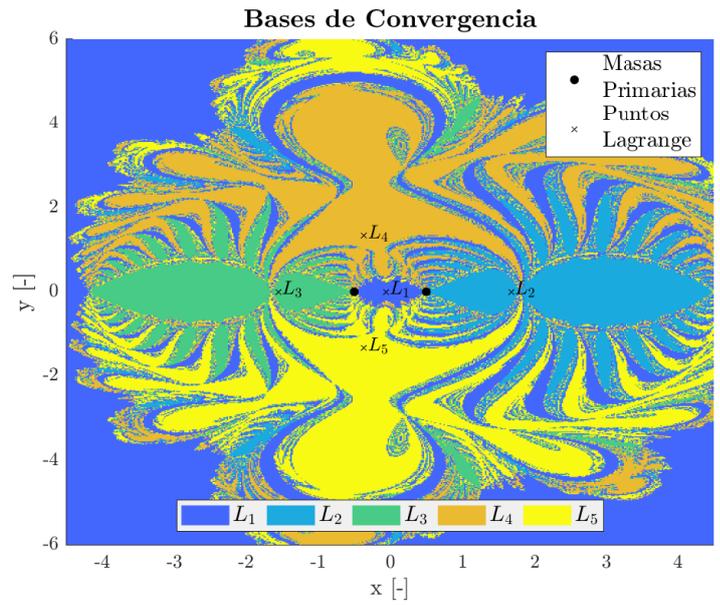
El artículo publicado por R. Aggarwal *et al.* [2] recoge los resultados obtenidos para casos en los que consideraban diferentes fuerzas de radiación y diferentes movimientos medios adimensionales. La leyenda de colores empleada por estos autores es la siguiente: L_1 = morado, L_2 = naranja, L_3 = verde, L_4 = verde oliva, L_5 = cian. La leyenda de colores de los resultados obtenidos en este estudio se muestran en las figuras.

De entre todos los casos que se analizan en el citado informe, se recrearán solamente algunos de ellos. En particular, en la Figura 4.1 se muestran los resultados obtenidos con $\mu = 0.5 [-]$, $q_1 = 0.15 [-]$, $q_2 = 0.25 [-]$ y $n_D^* = 0.25 [-]$. Por otro lado, en la Figura 4.2 se realiza una comparativa de un caso con los mismos parámetros de masa y radiación, cambiando el movimiento medio adimensionalizado a $n_D^* = 0.95 [-]$.

Por otra parte, en la Figura 4.3 se muestran los resultados sin considerar fuerzas de radiación, por lo que se cumple que los factores de radiación son iguales a la unidad ($q_1 = q_2 = 1 [-]$), pero imponiendo $\mu = 0.05 [-]$ y $n_D^* = 0.5 [-]$. A diferencia del caso anterior, y al no estar considerando más modificaciones, este caso sería equivalente a estudiar un CR3BP clásico en el que las masas orbitan más lentamente por cumplirse $n_D^* < 1$.

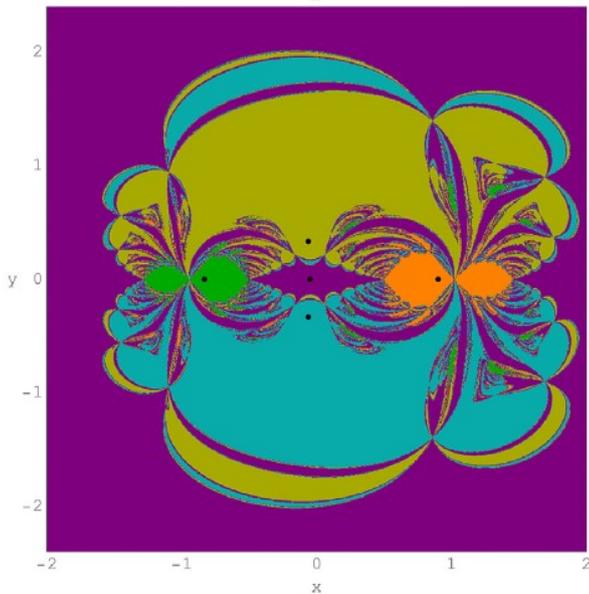


(a) Resultados bibliografía [2]

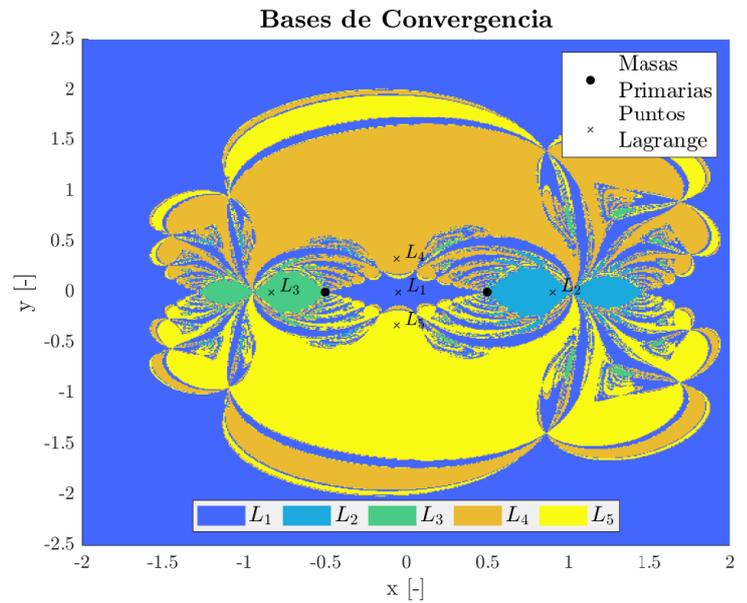


(b) Resultados obtenidos

Figura 4.1: Comparación bases de convergencia ($q_1 = 0.15 [-]$, $q_2 = 0.25 [-]$, $n = 0.25 [-]$)

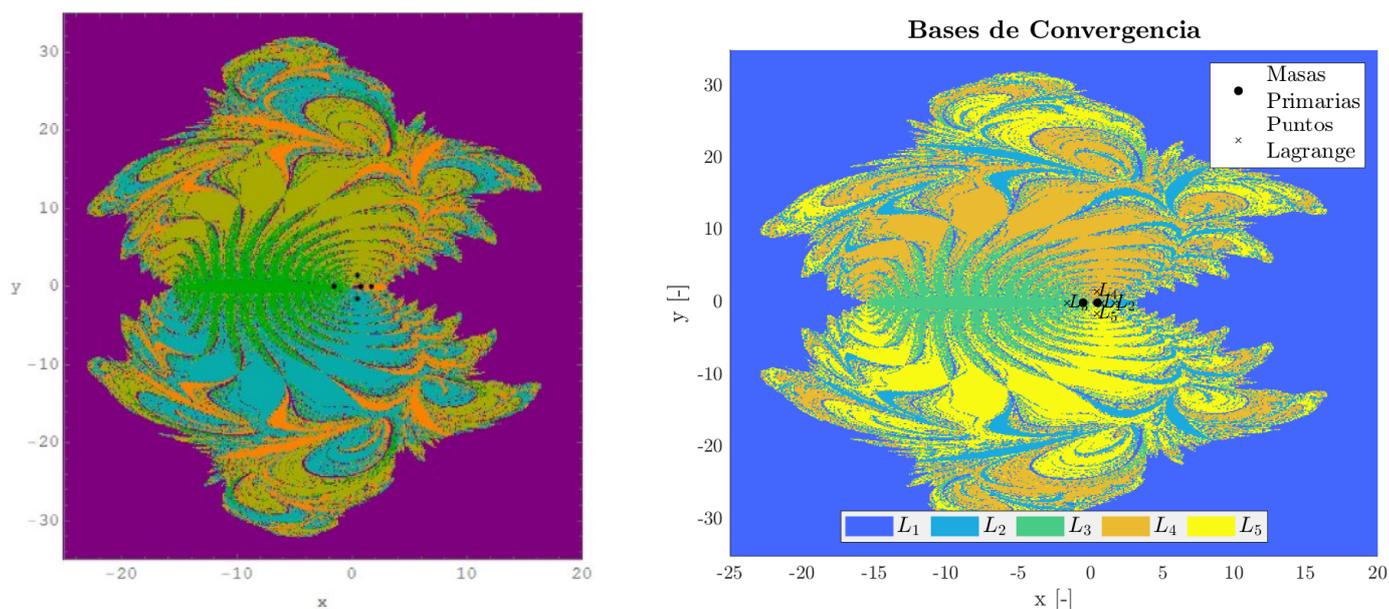


(a) Resultados bibliografía [2]



(b) Resultados obtenidos

Figura 4.2: Comparación bases de convergencia ($q_1 = 0.15 [-]$, $q_2 = 0.25 [-]$, $n = 0.95 [-]$)



(a) Resultados bibliografía [2]

(b) Resultados obtenidos

Figura 4.3: Comparación bases de convergencia ($q_1 = q_2 = 1 [-]$, $n = 0.5 [-]$)

Como se puede observar en las mencionadas figuras, los resultados obtenidos con el código implementado son los mismos que los que figuran en la bibliografía, de forma que se puede concluir que el código funciona correctamente en términos de reflejar los efectos de variaciones de movimiento medio y fuerzas de radiación.

En las Tablas 4.1, 4.2 y 4.3 se recogen las coordenadas de los puntos de Lagrange obtenidas en cada uno de los casos analizados. En este caso, estos resultados solamente se podrán validar visualmente empleando las Figuras 4.1a, 4.2a y 4.3a, respectivamente, dado que en el artículo consultado no figuran las coordenadas exactas de dichos puntos.

Punto de Libración	Coordenadas Obtenidas (x_L, y_L) [-]
L_1	(-0.06229089, 0)
L_2	(1.68242540, 0)
L_3	(-1.5540698, 0)
L_4	(-0.36364010, 1.33190385)
L_5	(-0.36364010, -1.33190385)

Tabla 4.1: Coordenadas de los puntos de libración ($q_1 = 0.15 [-]$, $q_2 = 0.25 [-]$, $n = 0.25 [-]$)

Punto de Libración	Coordenadas Obtenidas (x_L, y_L) [-]
L_1	(0.75280529, 0)
L_2	(1.67007870, 0)
L_3	(-1.60407046, 0)
L_4	(0.44999999, 1.50659952)
L_5	(0.44999999, -1.50659952)

Tabla 4.3: Coordenadas de los puntos de libración ($q_1 = q_2 = 1$ [-], $n = 0.5$ [-])

Punto de Libración	Coordenadas Obtenidas (x_L, y_L) [-]
L_1	(-0.04943902, 0)
L_2	(0.90150065, 0)
L_3	(-0.83200116, 0)
L_4	(-0.06132351, 0.33144656)
L_5	(-0.06132351, -0.33144656)

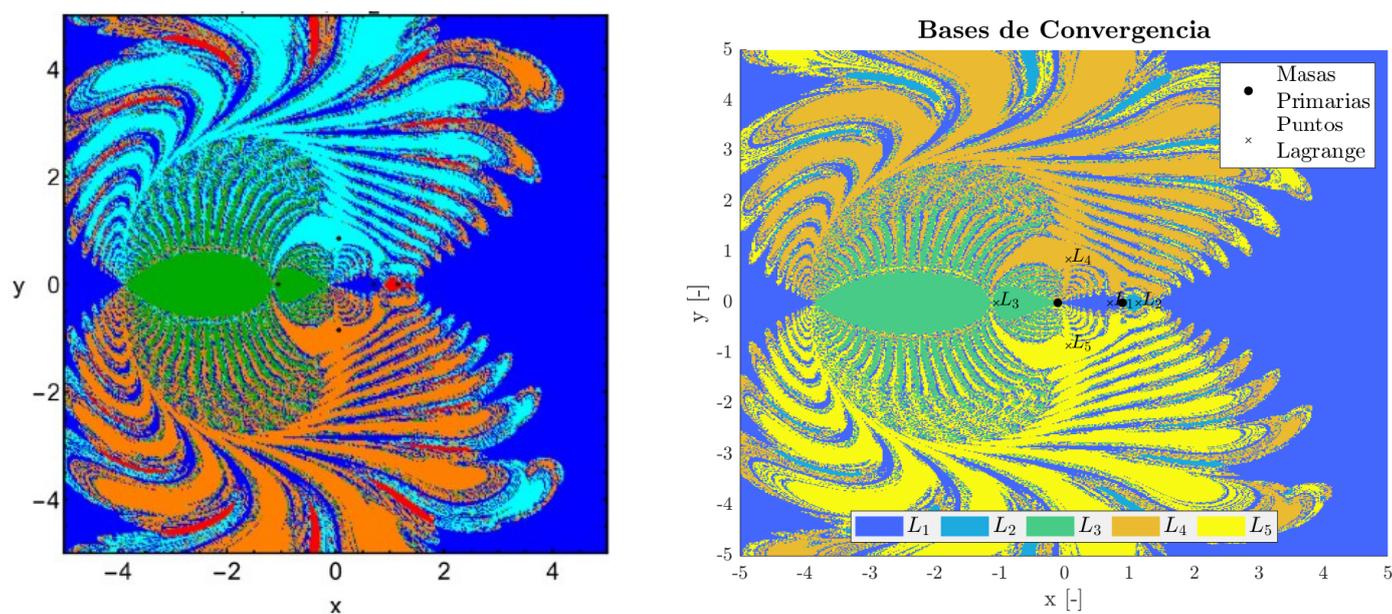
Tabla 4.2: Coordenadas de los puntos de libración ($q_1 = 0.15$ [-], $q_2 = 0.25$ [-], $n = 0.95$ [-])

4.2.2. Validación de efectos de achatamiento

El siguiente punto a validar consiste en la introducción de los efectos del achatamiento de las masas primarias en el modelo. Para ello, se realizará un proceso análogo al descrito en el apartado anterior, tratando de reproducir los resultados obtenidos por T. Saeed *et al.* [3]

En dicho estudio, estos autores proponían aplicar los efectos de triaxialidad solamente a la masa primaria m_1 , de forma que caracterizaban los diferentes casos a través del parámetro de masas y los parámetros de triaxialidad de dicho cuerpo, aplicando la corrección correspondiente al movimiento medio.

En la Figura 4.4 se puede observar la comparativa entre los resultados obtenidos en este estudio y los que figuran en el informe consultado. El código de colores de este último es el siguiente: L_1 = azul oscuro, L_2 = rojo, L_3 = verde, L_4 = azul claro, L_5 = naranja. Los resultados en este caso se corresponden con un parámetro de masas $\mu = 0.1$ [-], con unos parámetros de triaxialidad $\sigma_{1_1} = 0.7$ [-], $\sigma_{2_1} = 0.5$ [-], $\sigma_{1_2} = \sigma_{2_2} = 0$. Las coordenadas de los puntos de libración obtenidas en ambos casos se encuentran recogidas en la Tabla 4.4.



(a) Resultados bibliografía [3]

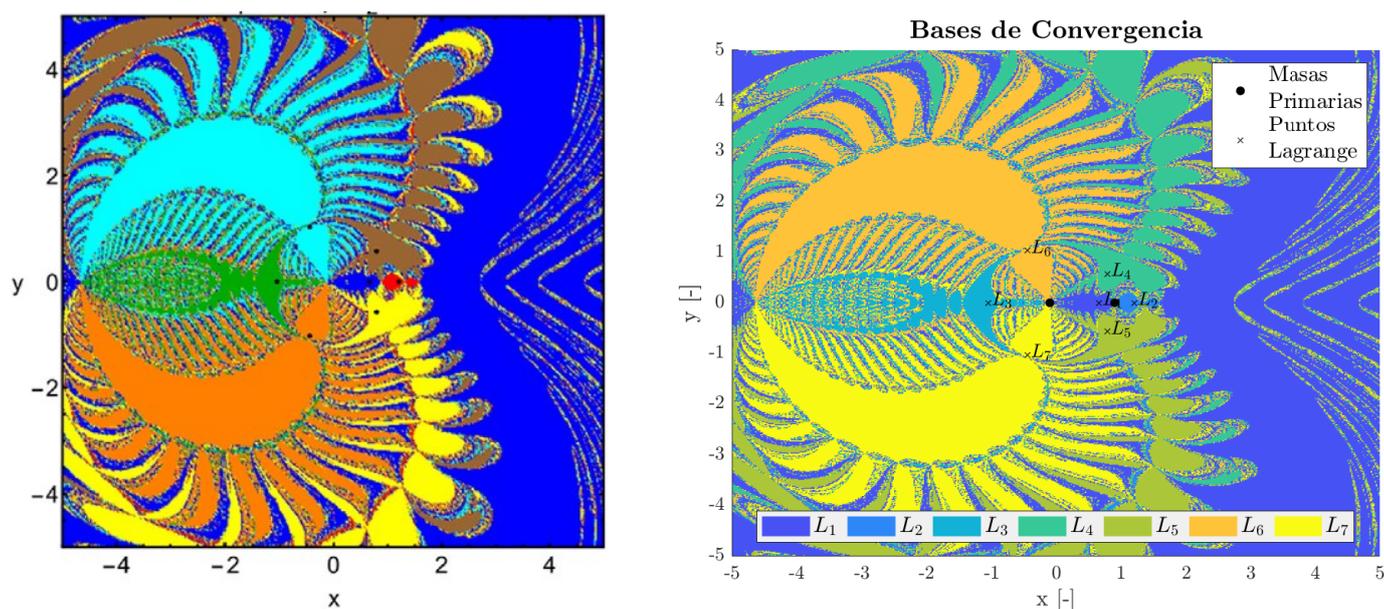
(b) Resultados obtenidos

Figura 4.4: Comparación bases de convergencia ($\sigma_{1_1} = 0.7 [-]$, $\sigma_{2_1} = 0.5 [-]$)

Punto de Libración	Coordenadas Bibliografía [3] $(x_0, y_0) [-]$	Coordenadas Obtenidas $(x_L, y_L) [-]$
L_1	(0.70490526, 0)	(0.70490520, 0)
L_2	(1.14837974, 0)	(1.14837969, 0)
L_3	(1.0544736, 0)	(-1.0544736, 0)
L_4	(0.06123129, 0.85300535)	(0.06123130, 0.85300535)
L_5	(0.06123129, 0.85300535)	(0.06123130, -0.85300535)

Tabla 4.4: Coordenadas de los puntos de libración ($\sigma_{1_1} = 0.7 [-]$, $\sigma_{2_1} = 0.5 [-]$)

En la Figura 4.5 se muestra la comparativa de resultados de un caso con 7 puntos de Lagrange. Este caso es análogo al caso anterior, invirtiendo los parámetros de triaxialidad. No obstante, la leyenda de colores empleada en el estudio original es ligeramente diferente a la del caso anterior debido a la numeración de los puntos de libración. En concreto, estos autores intercambian los puntos L_4 y L_5 con L_6 y L_7 . Con esto, la leyenda de colores aplicable a la Figura 4.5a, considerando la numeración aplicada en este estudio sería: L_1 = azul oscuro, L_2 = rojo, L_3 = verde, L_4 = marrón, L_5 = amarillo, L_6 = azul claro, L_7 = naranja. Las coordenadas de los puntos de Lagrange en este caso, haciendo que las nomenclaturas coincidan con la establecida en este estudio, son las que se muestran en la Tabla 4.4.



(a) Resultados bibliografía [3]

(b) Resultados obtenidos

Figura 4.5: Comparación bases de convergencia ($\sigma_{1_1} = 0.5 [-]$, $\sigma_{2_1} = 0.7 [-]$)

Punto de Libración	Coordenadas Bibliografía [3] $(x_0, y_0) [-]$	Coordenadas Obtenidas $(x_L, y_L) [-]$
L_1	(0.66297092, 0)	(0.66297092, 0)
L_2	(1.20457372, 0)	(1.20457368, 0)
L_3	(1.0496936, 0)	(-1.0496936, 0)
L_4	(0.79265246, 0.57347612)	(0.79265246, 0.57347612)
L_5	(0.79265246, 0.57347612)	(0.79265246, -0.57347612)
L_6	(0.4440806, 1.02755172)	(-0.4440806, 1.02755166)
L_7	(0.4440806, 1.02755172)	(-0.4440806, -1.02755166)

Tabla 4.5: Coordenadas de los puntos de libración ($\sigma_{1_1} = 0.5 [-]$, $\sigma_{2_1} = 0.7 [-]$)

Como se puede observar, tanto las bases de convergencia como las coordenadas de los puntos de Lagrange obtenidas en este estudio son muy similares a las mostradas en la bibliografía. Sin embargo, en las coordenadas de los puntos sí que se puede apreciar, en ambos casos, una ligera desviación. Esta pequeña discrepancia podría deberse a la precisión con la que se realizaron los cálculos e incluso la precisión de los softwares empleados para obtenerlos, ya que para obtener las Figuras 4.5a y 4.4a se emplearon algoritmos de alta precisión de *Fortran 77*, mientras que el software empleado en este trabajo ha sido *Matlab*.

No obstante, en vista de los resultados, se podría concluir que el código funciona de forma correcta con un nivel de precisión considerable.

4.2.3. Validación de efectos relativistas

Para la validación del funcionamiento del código en cuanto a los efectos relativistas, se ha optado por analizar dos casos, manteniendo todos los parámetros constantes, a excepción del parámetro de gravedad fuerte ϵ . Los resultados mostrados en las Figura 4.6 y Figura 4.7 se corresponden con un parámetro de masas $\mu = 0.5 [-]$ y un movimiento medio adimensionalizado unitario ($n_D^* = 1 [-]$). Al igual que en las secciones anteriores, los parámetros vinculados a otros efectos se han impuesto de forma que los términos asociados a los mismos no aparezcan en la función potencial. El parámetro de gravedad fuerte será 0 y 1 en cada caso, respectivamente. Al igual que ocurría con la validación de los efectos de radiación, en el artículo consultado no figuran las coordenadas de los puntos de Lagrange, por lo que los datos recogidos en las Tablas 4.6 y 4.7 únicamente se podrán comparar de forma visual con las Figuras 4.6a y 4.7a, respectivamente.

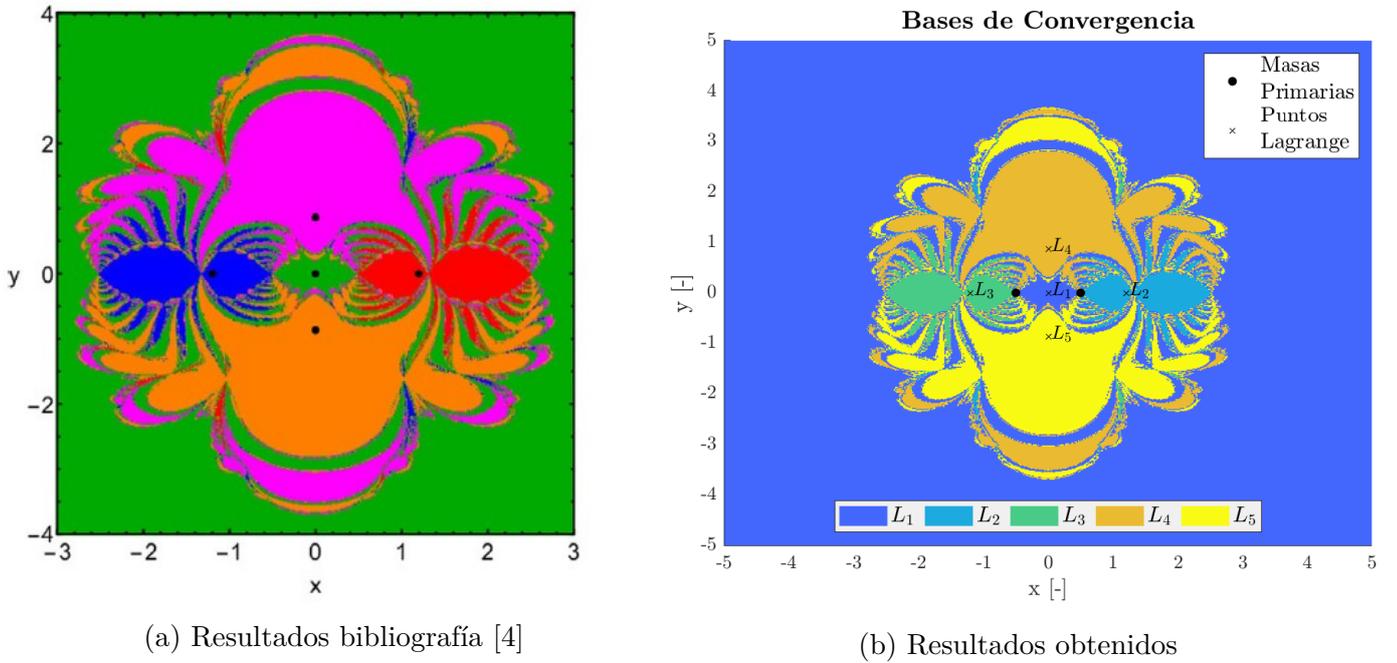
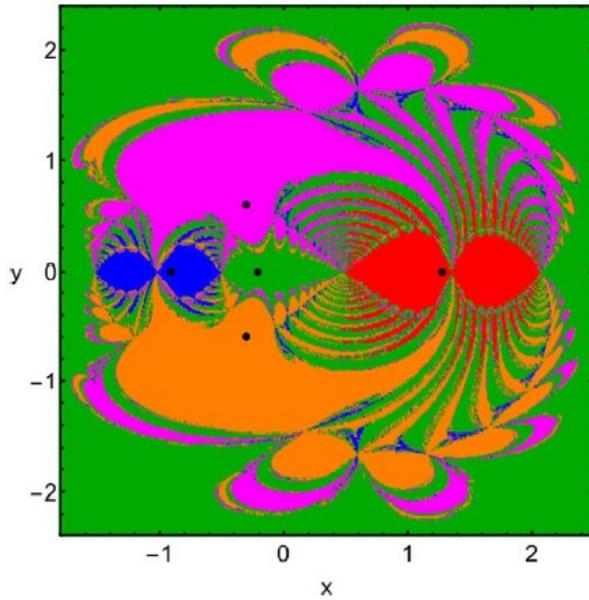


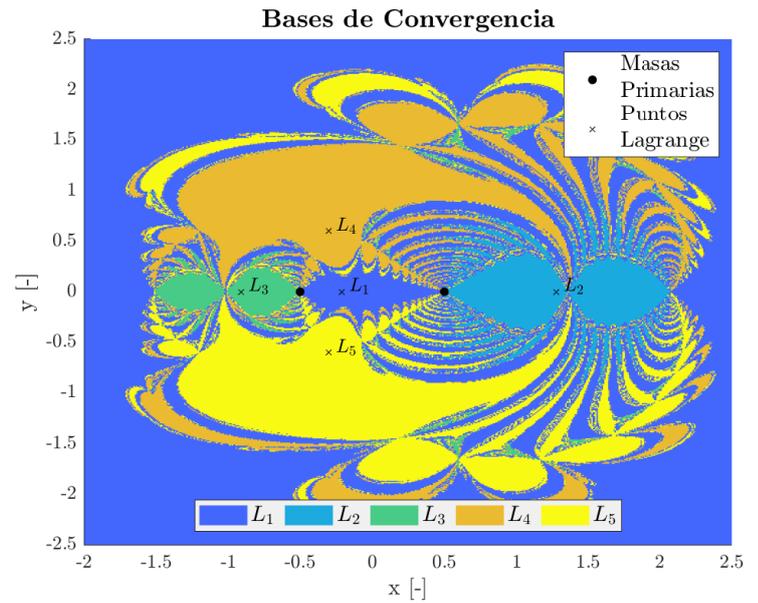
Figura 4.6: Comparación bases de convergencia ($\epsilon = 0 [-]$)

Punto de Libración	Coordenadas Obtenidas $(x_L, y_L) [-]$
L_1	(0, 0)
L_2	(1.19840614, 0)
L_3	(-1.19840614, 0)
L_4	(0, 0.86602540)
L_5	(0, -0.86602540)

Tabla 4.6: Coordenadas de los puntos de libración ($\epsilon = 0 [-]$)



(a) Resultados bibliografía [4]



(b) Resultados obtenidos

Figura 4.7: Comparación bases de convergencia ($\epsilon = 1 [-]$)

Punto de Libración	Coordenadas Obtenidas $(x_L, y_L) [-]$
L_1	(-0.21134724, 0)
L_2	(1.27677761, 0)
L_3	(-0.90827430, 0)
L_4	(-0.30157487, 0.59789441)
L_5	(-0.30157487, -0.59789441)

Tabla 4.7: Coordenadas de los puntos de libración ($\epsilon = 1 [-]$)

4.2.4. Validación del efecto de satélites naturales

El efecto de los satélites naturales sobre el CR3BP ha sido descrito brevemente en la Subsección 2.2.4. Las consideraciones a tener en cuenta descritas en dicho punto han sido tomadas del informe *Efecto de satélites naturales sobre el CR3BP* [6]. En dicho informe solamente se plantea el efecto de los satélites a nivel teórico, por lo que no existen datos con los que comparar que puedan validar los resultados obtenidos.

No obstante, cabe destacar que la formulación de este efecto se basa en la aplicación de las ecuaciones base del CR3BP, las leyes de movimiento de Newton y la ley de gravitación universal, por lo que se asumirá que el efecto asociado a la presencia de satélites naturales sobre la dinámica de la masa infinitesimal debe ser la planteada en el mencionado estudio.

Capítulo 5

Ejemplo de aplicación

En el presente capítulo se mostrará un ejemplo de aplicación del programa desarrollado. Dicho ejemplo consistirá en localizar los puntos de Lagrange del sistema Sol - Marte - satélite. Inicialmente, se considerarán las ecuaciones del CR3BP clásico, sin incluir ninguna modificación. Posteriormente, se añadirán los efectos de la triaxialidad de las masas primarias y la presencia de los satélites naturales de Marte, Fobos y Deimos.

Tabla de contenidos

5.1. Problema Sol - Marte: formulación clásica	31
5.2. Efectos de triaxialidad	34
5.3. Fobos y Deimos	37
5.4. Efectos de radiación	40
5.5. Iteraciones	42

5.1. Problema Sol - Marte: formulación clásica

El primer caso estudiado, tal y como se avanzaba en la introducción de este capítulo, consiste en emplear las ecuaciones del modelo base del CR3BP a un sistema que considera como masas primarias el Sol y Marte. De esta forma, trabajando sobre este modelo simplificado, se obtendrían los puntos de Lagrange del mencionado sistema atendiendo únicamente a las restricciones impuestas por el modelo de partida, es decir, con hipótesis simplificativas considerablemente restrictivas.

Los datos iniciales necesarios para plantear el CR3BP clásico del sistema Sol - Marte - masa infinitesimal son los que se recogen en la Tabla 5.1. La distancia considerada entre masas primarias es igual al semieje mayor de la órbita elíptica que describe Marte alrededor del Sol. No obstante, como ya se ha indicado anteriormente, se asumirá que dicha órbita es circular para satisfacer las hipótesis del problema.

Parámetro	Valor
Masa del Sol [kg]	$1.98850 \cdot 10^{30}$
Masa de Marte [kg]	$6.41710 \cdot 10^{23}$
Distancia Sol - Marte [km]	$2.27923 \cdot 10^8$

Tabla 5.1: Datos del problema Sol - Marte (formulación clásica CR3BP) [7, 8]

Teniendo en cuenta dichos datos, se puede estimar que el valor del parámetro de masas es $\mu = m_2/(m_1 + m_2) = 3.22710 \cdot 10^{-7}$ [-]. Las bases de convergencia del problema configurado con estos datos se muestran en las Figuras 5.1, 5.2 y 5.3.

La primera conclusión a la que se puede llegar a primera vista es que la región que abarcan las bases de convergencia es significativamente mayor al área que ocupaban en los casos de validación. Esto se debe fundamentalmente a que el parámetro adimensional de masas es mucho menor en esta particularización que en los casos empleados para la validación. Sin embargo, también se puede apreciar que los puntos de libración se encuentran en una región muy próxima a las masas primarias, a pesar de que las bases de convergencia se extiendan en un dominio de dimensiones elevadas.

Por otra parte, tanto en el ejemplo actual como en los anteriores, es posible observar que más allá de las regiones que se asemejan a fractales, todos los puntos del espacio confluyen hacia el punto L_1 , independientemente de las modificaciones introducidas en el modelo.

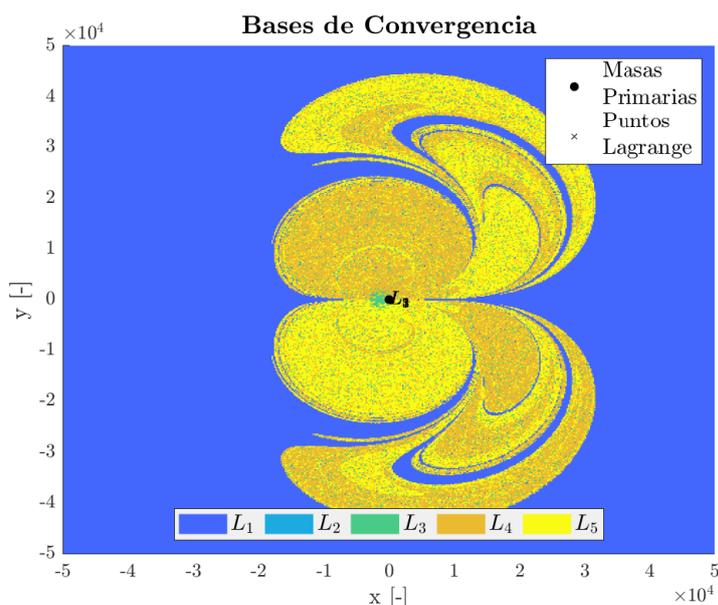


Figura 5.1: Bases de convergencia Sol - Marte (formulación clásica) [dominio amplio]

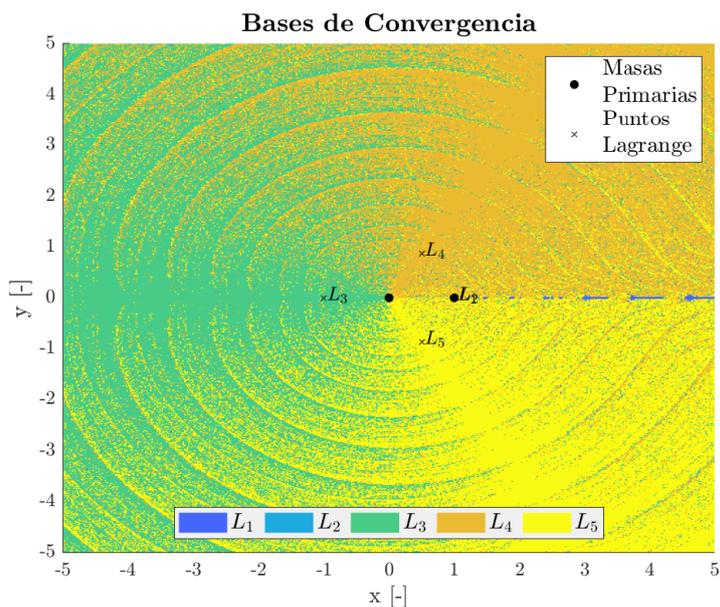


Figura 5.2: Bases de convergencia Sol - Marte (formulación clásica) [dominio reducido]

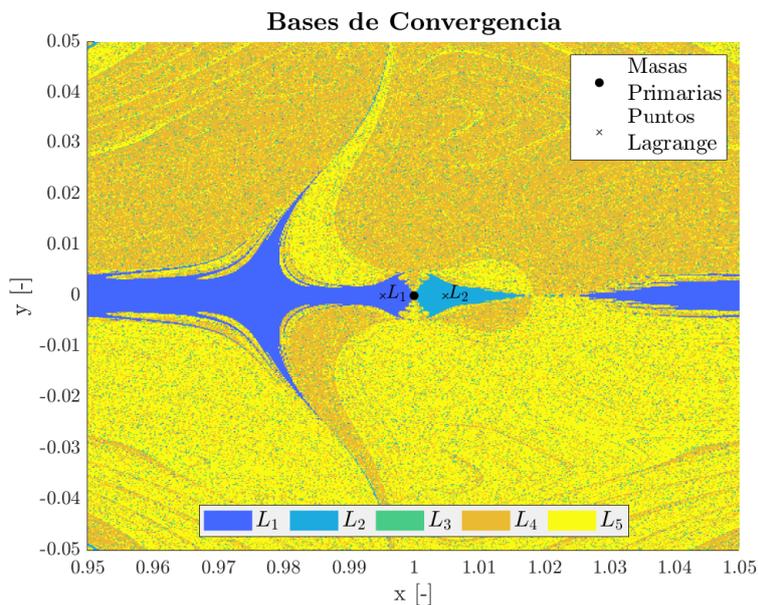


Figura 5.3: Bases de convergencia Sol - Marte (formulación clásica) [zoom Marte]

Finalmente, también cabe destacar, en comparación con otros de los resultados mostrados, la proximidad de los puntos de libración L_1 y L_2 a la masa primaria 2 (Marte). Nuevamente, esto se relaciona con el hecho de que el parámetro de masas es muy bajo. Sin ningún tipo de modificación, las bases de convergencia de un CR3BP con un parámetro de masas $\mu = 0.5 [-]$ son completamente simétricas, tal y como se muestra en la Figura 4.6. Conforme el parámetro de masas disminuye, los puntos

colineales L_1 y L_2 tienden a acercarse a la masa más pequeña (m_2), mientras que el punto L_3 se aleja de esta, ubicándose en valores más negativos del eje x .

Los puntos L_4 y L_5 , mientras no se consideren modificaciones del problema, se mantendrán en el punto medio entre las masas primarias, independientemente del valor del parámetro de masas.

Las coordenadas de los puntos de Lagrange estimadas en este caso son las que se recogen en la Tabla 5.2. Estos resultados permiten corroborar las conclusiones extraídas.

Punto de Libración	Coordenadas Obtenidas (x_L, y_L) [-]
L_1	(0.99525, 0)
L_2	(1.00476, 0)
L_3	(-1.00000, 0)
L_4	(0.50000, 0.86603)
L_5	(0.50000, -0.86603)

Tabla 5.2: Coordenadas de los puntos de libración Sol - Marte (formulación clásica)

5.2. Efectos de triaxialidad

A continuación, se introducirán los efectos de triaxialidad. Se asumirá que los semiejes ecuatoriales, los contenidos en el plano de estudio (direcciones x e y), son iguales, mientras que el semieje polar (dirección z) hará que las masas primarias no sean perfectamente esféricas.

Los datos han sido extraídos de las fichas de datos de la NASA [7,8]. En el caso de Marte, se dispone información acerca de los semiejes ecuatoriales y polar. Sin embargo, dicha información no está disponible para el Sol. Para estimar los semiejes de la estrella se han empleado el radio volumétrico medio y su elipticidad ($e = (a - c)/a$). Conociendo estos datos es posible obtener los semiejes ecuatoriales y el semieje polar del Sol. Dicha información se refleja en la Tabla 5.3

Parámetro	Sol [7]	Marte [8]
Elipticidad [-]	0.00005	0.00589
Radio volumétrico medio [km]	$6.95700 \cdot 10^5$	$3.38950 \cdot 10^3$
Semieje ecuatorial [km]	$6.95688 \cdot 10^5$	$3.39620 \cdot 10^3$
Semieje polar [km]	$6.95654 \cdot 10^5$	$3.37620 \cdot 10^3$

Tabla 5.3: Semiejes de las masas primarias

Empleando los datos anteriores se pueden calcular los parámetros de achatamiento que modificarán las ecuaciones de acuerdo con el modelo expuesto en la Subsección 2.2.2. A continuación, en las Figuras 5.4, 5.5 y 5.6 se muestran las bases de convergencia del problema Sol - Marte teniendo en cuenta el achatamiento de estos cuerpos.

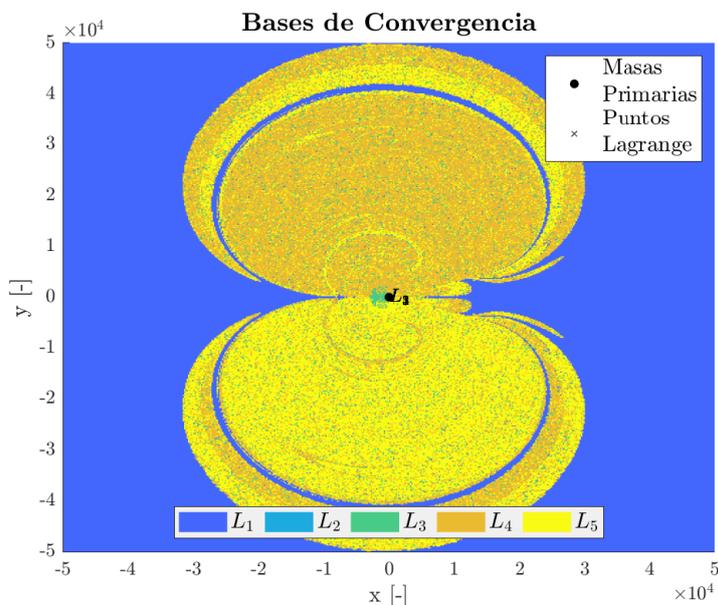


Figura 5.4: Bases de convergencia Sol - Marte (efectos triaxialidad) [dominio amplio]

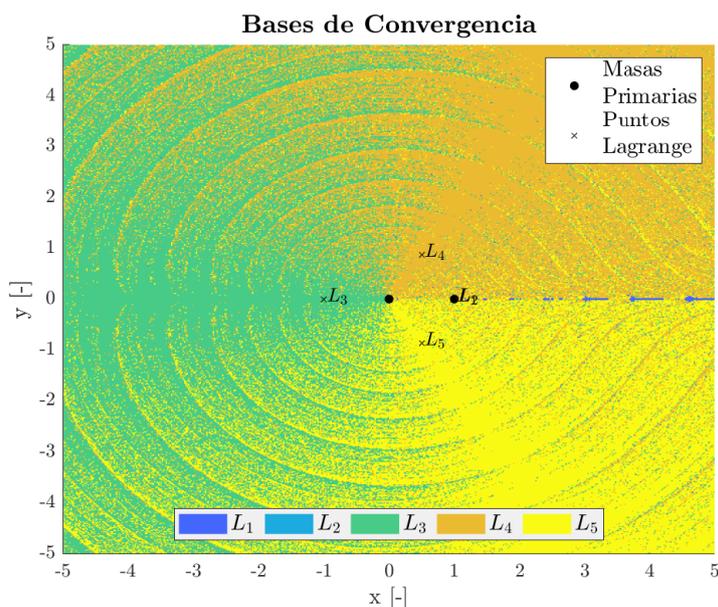


Figura 5.5: Bases de convergencia Sol - Marte (efectos triaxialidad) [dominio reducido]

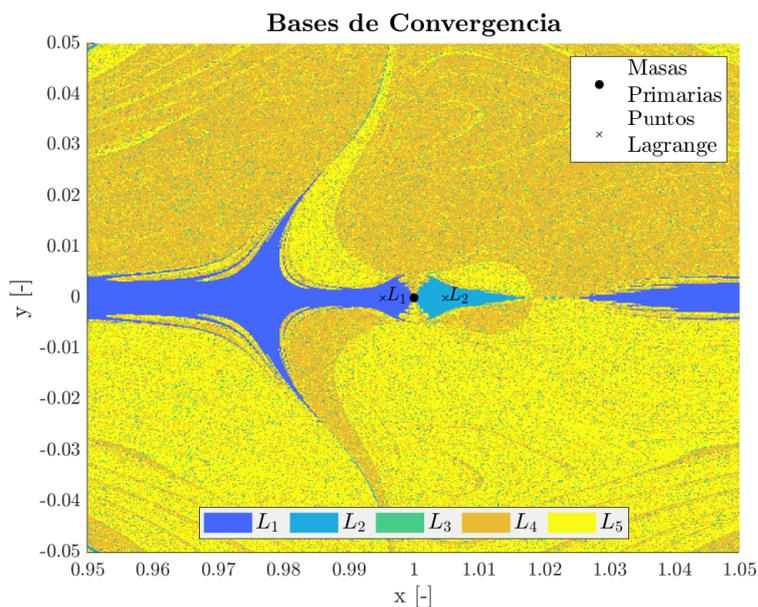


Figura 5.6: Bases de convergencia Sol - Marte (efectos triaxialidad) [zoom Marte]

Como se puede observar en las gráficas anteriores, la ubicación de los puntos de Lagrange no ha cambiado de forma apreciable. Tampoco lo han hecho las bases de convergencia en el entorno de Marte (Figuras 5.5 5.6). Sin embargo, las bases de convergencia en regiones más lejanas del planeta sí muestran un cambio de forma apreciable.

Por otro lado, en la Tabla 5.4 se muestran las coordenadas de los puntos de libración de este caso particular. Como se puede observar, los puntos de Lagrange no se han visto afectados por la inclusión de los efectos de achatamiento de las masas primarias.

Punto de Libración	Coordenadas Obtenidas (x_L, y_L) [-]
L_1	(0.99525, 0)
L_2	(1.00476, 0)
L_3	(-1.00000, 0)
L_4	(0.50000, 0.86603)
L_5	(0.50000, -0.86603)

Tabla 5.4: Coordenadas de los puntos de libración Sol - Marte (efectos de triaxialidad)

Dado que el Sol cuenta con una elipticidad muy baja, podría considerarse que es prácticamente esférico. Esto hace que los términos del potencial asociados al Sol

apenas cambien al introducir los efectos de triaxialidad.

Por otro lado, el achatamiento de Marte es sensiblemente mayor al de la estrella. Esto implica que las modificaciones de las ecuaciones de los términos correspondientes al planeta rojo sean más importantes que la de los términos solares.

La razón por la que los puntos de Lagrange se mantienen en las posiciones determinadas por la formulación clásica es que estos puntos se encuentran relativamente cerca de las masas primarias. En esta región, al ser la masa del Sol 7 órdenes de magnitud mayor que la masa de Marte, los términos del potencial asociados a la estrella tendrán más peso que los asociados al planeta en dicha región. Dado que los efectos de triaxialidad apenas modifican los términos solares, en las cercanías de las masas primarias la solución será muy similar a la formulación clásica. Sin embargo, si se analizan las soluciones en campo lejano, los efectos de achatamiento de Marte empiezan a hacerse más notables, siendo este el motivo por el que la forma de las bases de convergencia cambian en dicha región.

5.3. Fobos y Deimos

Como se indicaba en la introducción de este capítulo, se analizarán también las bases de convergencia considerando la presencia de Fobos y Deimos, los satélites naturales de Marte. Las órbitas de estos se asumirán circulares y se asumirán que son masas perfectamente esféricas. Los datos acerca de sus masas y sus órbitas se encuentran recogidos en la Tabla 5.5.

Parámetro	Fobos [9]	Deimos [10]
Masa [kg]	$1.06590 \cdot 10^{16}$	$1.47620 \cdot 10^{15}$
Semieje mayor de la órbita [km]	$9.37600 \cdot 10^3$	$2.34580 \cdot 10^4$
Período orbital [h]	7.65	30.00
Movimiento medio (aproximado) [1/s]	$3.63108 \cdot 10^{-5}$	$9.25925 \cdot 10^{-6}$

Tabla 5.5: Datos de los satélites de Marte: Fobos y Deimos

A partir de estos datos, se asumirá que las órbitas descritas por los satélites serán órbitas circulares cuyo radio es igual al semieje mayor y con un movimiento medio aproximado obtenido como la inversa del período orbital.

Pese a que el programa está preparado para calcular evoluciones temporales, en esta sección se analizarán únicamente ciertas posiciones de los satélites, con el objetivo de verificar si su presencia podría modificar la distribución de las bases de convergencia o los puntos de libración.

El primer caso analizado supondrá que ambos satélites se encuentran sobre el eje x , siendo ambos eclipsados por Marte o, lo que es lo mismo, $x_{si} > 1 - \mu$. En la Tabla 5.6 se muestran las posiciones de los puntos de Lagrange obtenidos en

estas condiciones. Comparando estas posiciones con las obtenidas en la Sección 5.1 y Sección 5.2 se puede observar que el efecto de los satélites de Marte sobre los puntos de Lagrange es despreciable, ya que la variación producida afectaría a partir del décimo decimal.

Punto de Libración	Coordenadas Obtenidas (x_L, y_L) [-]
L_1	(0.99525, 0)
L_2	(1.00476, 0)
L_3	(-1.00000, 0)
L_4	(0.50000, 0.86603)
L_5	(0.50000, -0.86603)

Tabla 5.6: Coordenadas de los puntos de libración Sol - Marte (efectos de triaxialidad + satélites)

Por otro lado, tal y como se puede apreciar en las Figuras 5.7, 5.8 y 5.9, las bases de convergencia no han sufrido modificaciones apreciables con respecto a las obtenidas en la Sección 5.2. En estas figuras se ha optado por no incluir la representación de los satélites debido a que se encuentran extremadamente cerca de Marte (m_2), por lo que su inclusión dificultaría la visualización de los resultados, incluso en dominios reducidos.

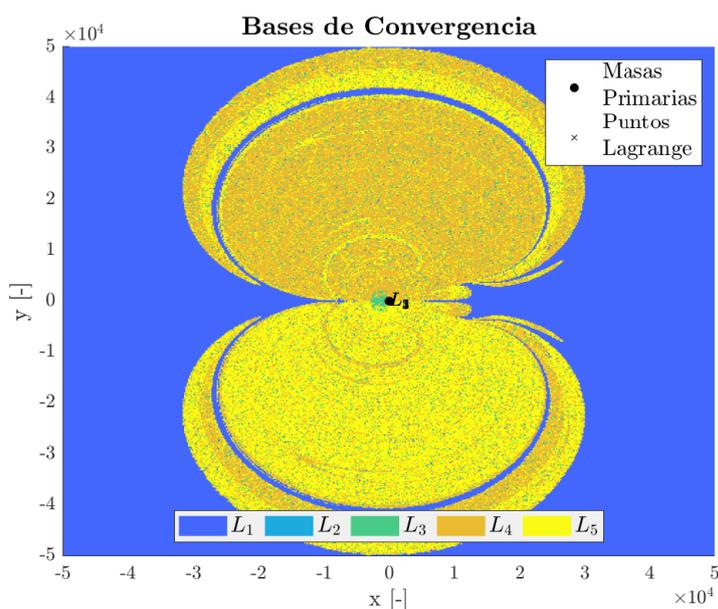


Figura 5.7: Bases de convergencia Sol - Marte (efectos de triaxialidad + satélites) [dominio amplio]

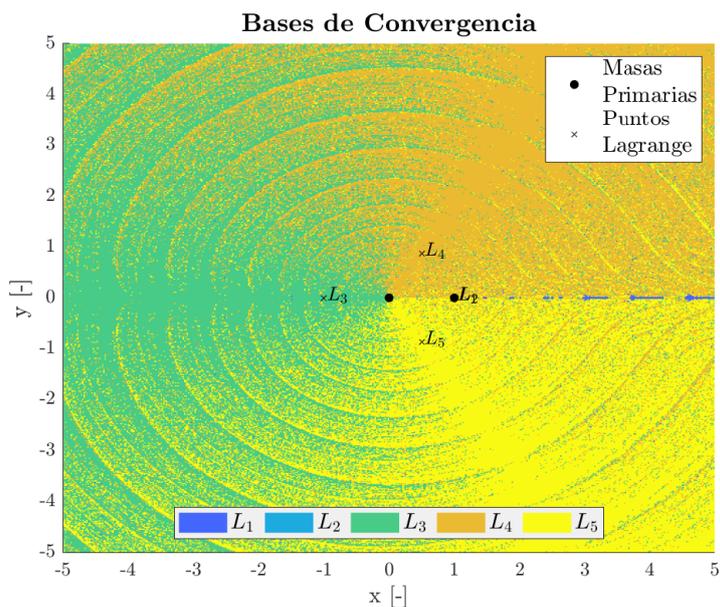


Figura 5.8: Bases de convergencia Sol - Marte (efectos de triaxialidad + satélites) [dominio reducido]

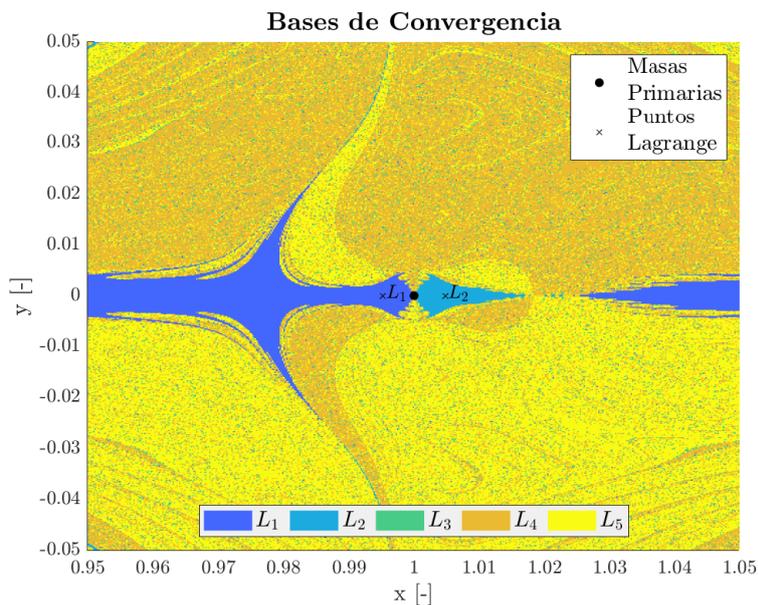


Figura 5.9: Bases de convergencia Sol - Marte (efectos de triaxialidad + satélites) [zoom Marte]

Seguidamente, se propone analizar lo que ocurriría en caso de que ambos satélites se encontrasen alineados en la dirección perpendicular al eje de abscisas. Esto supondría que los desfases de ambos satélites respecto al eje x serían de $\pm 90^\circ$. En este caso, Fobos se encontraría en la parte positiva del eje y (desfase de $+90^\circ$), mientras que Deimos se encontraría en la negativa (desfase de -90°). Los resultados obtenidos

en este supuesto son idénticos a los obtenidos en el caso de satélites alineados, por lo que no se mostrarán en más detalle.

La principal conclusión que se puede extraer de este estudio es que la presencia de los satélites no modifica ni la distribución de bases de convergencia ni la posición de los puntos de Lagrange. La razón se encuentra nuevamente en el ratio de masas: los términos del potencial asociados a los satélites son varios órdenes de magnitud inferiores a los asociados a Marte, cuyo peso en el potencial ya era significativamente menor que el del Sol. En caso de que la distribución de la masa total entre las masas primarias fuese más equitativa y los satélites algo mayores, estos últimos sí podrían modificar los resultados.

5.4. Efectos de radiación

A continuación se mostrarán los resultados obtenidos para una particularización en la que no se consideran los satélites, pero sí las fuerzas de presión asociadas a la radiación emitida por el Sol.

Como el factor de radiación depende no solamente del cuerpo emisor, sino que también depende de las características de la masa infinitesimal, se ha optado por emplear un valor arbitrario de factor de radiación $q_1 = 0.4[-]$. Naturalmente, el factor de radiación de Marte es nulo.

Los resultados mostrados en las Figuras 5.10, 5.11 y 5.12 evidencian que la radiación sí tiene un efecto importante sobre las bases de convergencia.

En primer lugar destaca el hecho de que en este caso particular no aparecen 5 puntos de Lagrange, sino que solamente aparecen 4, al no aparecer el punto que hasta ahora se había denominado L_2 . Es por ello que la numeración de los puntos en este caso difiere con la empleada hasta el momento.

Por otro lado, también llama la atención el mapa de bases de convergencia. La región que converge hacia el punto de Lagrange ubicado entre el Sol y Marte (L_1) gana peso con respecto al resto de puntos de libración, especialmente en el dominio más amplio. Una vez que se reduce el dominio sí se observan más zonas del espacio que convergen hacia otros puntos. Las regiones de convergencia hacia puntos triangulares siguen siendo simétricas respecto al eje de abscisas. Finalmente, también es conveniente destacar el hecho de que los puntos triangulares se han acercado más hacia el Sol, de forma que ya no están en el punto medio entre el Sol y Marte, y que los puntos colineales se localizan de forma prácticamente simétrica respecto al Sol.

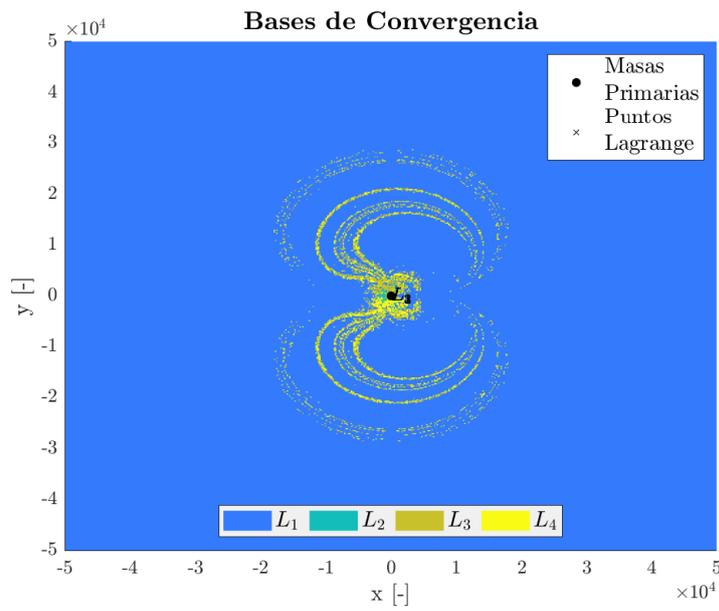


Figura 5.10: Bases de convergencia Sol - Marte (efectos de triaxialidad + radiación) [dominio amplio]

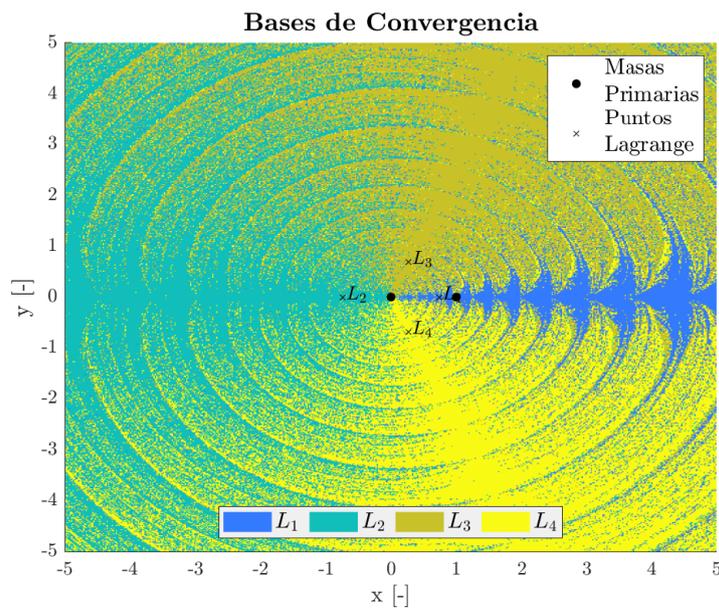


Figura 5.11: Bases de convergencia Sol - Marte (efectos de triaxialidad + radiación) [dominio reducido]

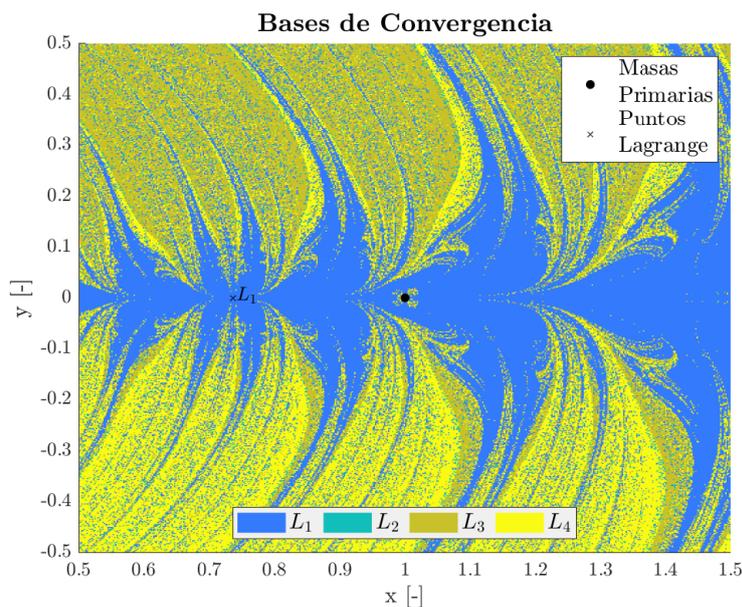


Figura 5.12: Bases de convergencia Sol - Marte (efectos de triaxialidad + radiación) [zoom Marte]

Las coordenadas de los puntos de Lagrange obtenidas en este caso son las recogidas en la Tabla 5.7.

Punto de Libración	Coordenadas Obtenidas $(x_L, y_L) [-]$
L_1	(0.73680, 0)
L_2	(-0.73681, 0)
L_3	(0.27144, 0.68498)
L_4	(0.27144, -0.68498)

Tabla 5.7: Coordenadas de los puntos de libración Sol - Marte (efectos de triaxialidad + radiación)

5.5. Iteraciones

Finalmente, se mostrará un ejemplo de los resultados extraídos del programa sobre las iteraciones que fueron necesarias hasta la convergencia. Concretamente, las siguientes figuras se corresponden con las iteraciones hasta la convergencia para el caso de consideración de efectos de achatamiento únicamente, sin tener en cuenta las fuerzas de radiación ni los satélites. Tras visualizar las iteraciones de todos los casos, las conclusiones son las mismas para todos ellos, por lo que solo se mostrarán las iteraciones del mencionado caso.

Las Figuras 5.13, 5.14 y 5.15 muestran que la velocidad de convergencia hacia los puntos colineales es mucho más rápida que para los puntos triangulares. De hecho, al haber situado el límite de iteraciones del método Newton-Raphson en 500, se puede apreciar que la inmensa mayoría de celdas que convergen hacia puntos triangulares han convergido en las primeras iteraciones en las que se emplea el método de Halley, mientras que las celdas que convergen hacia puntos colineales ya habrían convergido antes de llegar al umbral de Newton-Raphson, generalmente con un número de iteraciones relativamente bajo.

Como se mencionaba anteriormente, estas conclusiones son aplicables al resto de casos analizados. Las tendencias en cuanto a velocidad de convergencia observadas en todos los casos se corresponden con las ya comentadas.

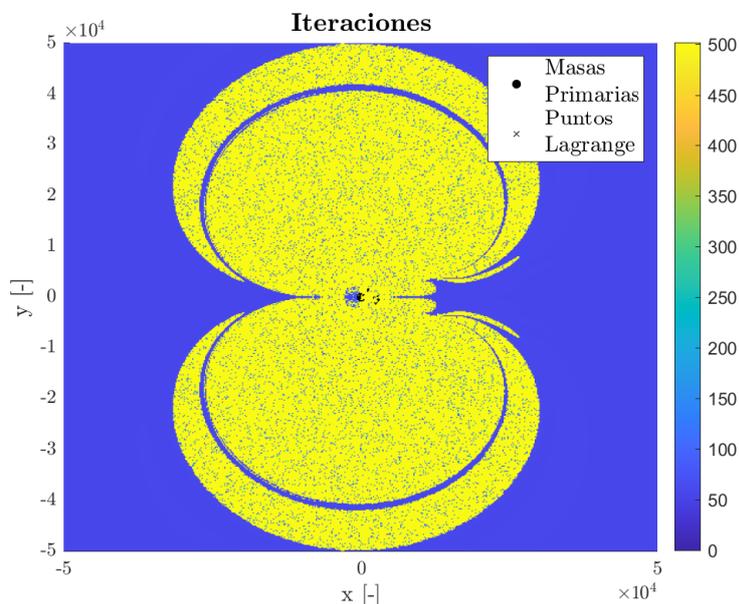


Figura 5.13: Iteraciones hasta convergencia (efectos de triaxialidad) [dominio amplio]

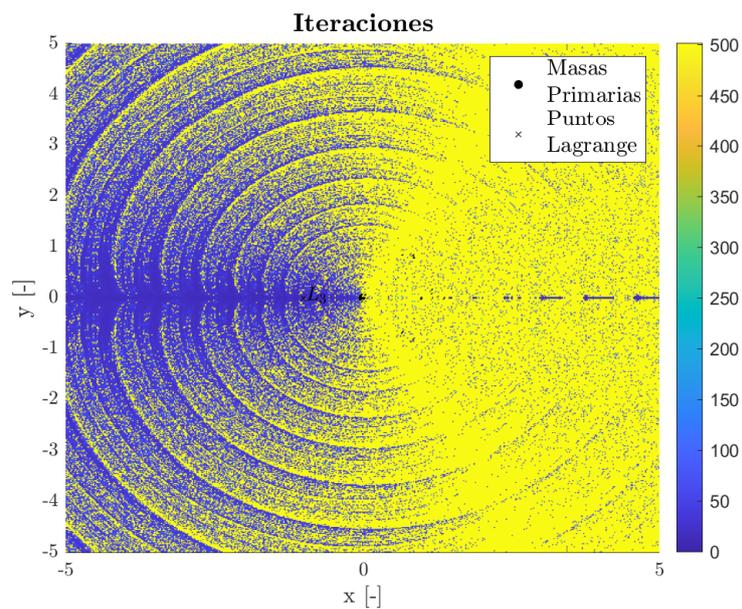


Figura 5.14: Iteraciones hasta convergencia (efectos de triaxialidad) [dominio reducido]

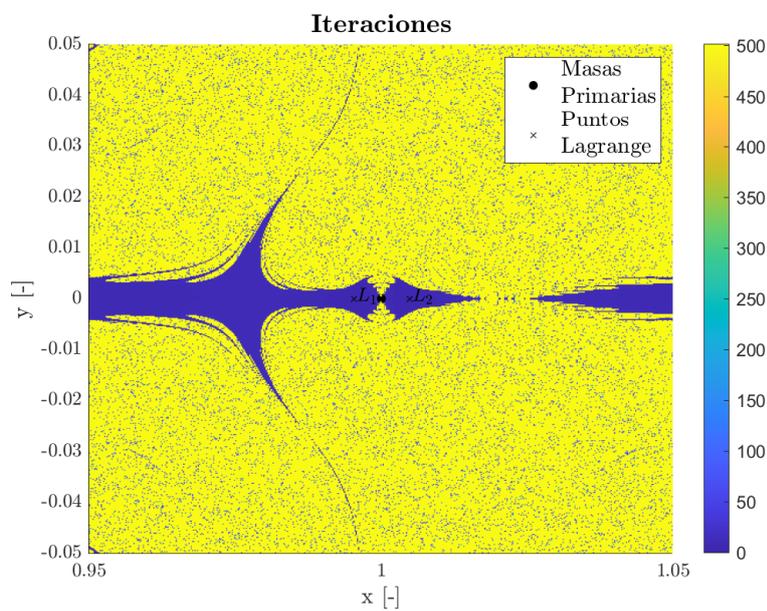


Figura 5.15: Iteraciones hasta convergencia (efectos de triaxialidad) [zoom Marte]

Capítulo 6

Trabajos futuros

A continuación, se listarán una serie de posibles trabajos futuros orientados a mejorar el programa desarrollado en este trabajo.

- En primer lugar, considerar órbitas elípticas en lugar de circulares. Esto dotará de una mayor precisión al modelo, ya que se ajustará más a la realidad. No obstante, esto supondría replantear el problema desde el comienzo, ya que los sistemas de referencia empleados podrían no ser útiles con esta nueva definición.
- Por otra parte, incluir otros efectos que no hayan sido considerados. Algunos ejemplos podrían ser la presencia de fuerzas viscosas para captar efectos atmosféricos en la cercanía de las masas primarias, campos magnéticos, etc.
- Otra posible mejora podría ser realizar una revisión de los modelos de la física relativista para adaptarlos al problema de los 3 cuerpos en lugar de introducir un término que los simule.
- De cara a mejorar la precisión al considerar la presencia de satélites, podrían incluirse en estos los efectos asociados a su forma (achatamiento), así como emplear sus órbitas reales.
- El problema también podría analizarse en 3 dimensiones, incluyendo la dirección z en el estudio. Esto permitiría considerar movimientos fuera del plano, tanto de la masa infinitesimal como de los propios satélites u otros cuerpos.
- En el aspecto de los métodos numéricos, se podrían analizar las velocidades de convergencia de los métodos y tratar de buscar métodos alternativos con el objetivo de optimizar los cálculos.
- Otro punto interesante sería analizar la estabilidad de los puntos de Lagrange. Esta mejora podría ser útil de cara a analizar la viabilidad de ubicar estaciones espaciales en los puntos de libración.
- Finalmente, una mejora orientada más hacia el usuario podría ser el desarrollo de una interfaz gráfica que permita configurar los casos y mostrar los resultados.

Capítulo 7

Conclusiones

Para finalizar con el presente trabajo, se expondrán las principales conclusiones extraídas a lo largo de la realización del mismo.

- El problema circular restringido de los 3 cuerpos o CR3BP es un modelo relativamente sencillo que permite analizar la dinámica de una masa infinitesimal bajo unas hipótesis muy restrictivas.
- En este estudio se ha demostrado la formulación clásica del CR3BP. Además, se han propuesto diferentes modificaciones que permiten aumentar la precisión del modelo, a costa de aumentar la complejidad del mismo.
- Se han programado dos métodos numéricos iterativos que permiten calcular las bases de convergencia del problema, así como los puntos de Lagrange, de una forma considerablemente versátil, ya que el usuario puede configurar el problema a su parecer: dominio analizado, precisión de los cálculos, cuerpos primarios considerados, etc.
- El modelo complejo construido en base a las modificaciones individuales propuestas por diferentes autores permite ser empleado de forma que se incluyan efectos o no a voluntad del usuario. Este hecho ha sido utilizado para validar el funcionamiento de dicho modelo al reproducir los resultados obtenidos por los mencionados autores.
- Finalmente, se han obtenido los puntos de Lagrange del sistema Sol - Marte en diferentes condiciones. Dadas las características del sistema, se ha demostrado que la formulación clásica permite obtener unas posiciones de los puntos de libración muy similar a las del modelo complejo. Sin embargo, esta afirmación deja de ser cierta si se consideran efectos de radiación, ya que alteran de forma notable los resultados.

Bibliografía

- [1] Yu. A. Chernikov. The photogravitational restricted three-body problem. *Soviet Astronomy*, 14:176, 1970.
- [2] Md Sanam Suraj, Rajiv Aggarwal, Amit Mittal, and Md Chand Asique. The perturbed restricted three-body problem with angular velocity: Analysis of basins of convergence linked to the libration points. *International Journal of Non-Linear Mechanics*, 123:103494, 2020.
- [3] Tareq Saeed and Euaggelos E. Zotos. On the equilibria of the restricted three-body problem with a triaxial rigid body - i. oblate primary. *Results in Physics*, 23:103990, 2021.
- [4] Euaggelos E. Zotos, Wei Chen, Elbaz I. Abouelmagd, and Huiting Han. Basins of convergence of equilibrium points in the restricted three-body problem with modified gravitational potential. *Chaos, Solitons & Fractals*, 134:109704, 2020.
- [5] NASA. WMAP Observatory: Lagrange Points, 2012. <https://cutt.ly/6QNs6fX>. Recuperado 06/06/2021.
- [6] Daniel Villalibre. Efecto de satélites naturales sobre el cr3bp. *Estancia de investigación en Departamento de Matemática Aplicada UPV*, Junio 2021.
- [7] Sun fact sheet, Febrero 2018. <https://cutt.ly/eWrGKKBK>. Recuperado 06/07/2021.
- [8] Mars fact sheet, Noviembre 2020. <https://cutt.ly/aWrG7u2>. Recuperado 06/07/2021.
- [9] Nola Taylor Redd. Phobos: Facts about the doomed martian moon, Diciembre 2017. <https://cutt.ly/VWrJwuI>. Recuperado 10/07/2021.
- [10] Nola Taylor Redd. Deimos: Facts about the smaller martian moon, Diciembre 2017. <https://cutt.ly/5WrHXds>. Recuperado 10/07/2021.
- [11] Annie Cuyt and Louis Rall. Computational implementation of the multivariate halley method for solving nonlinear systems of equations. *ACM Trans. Math. Softw.*, 11:20–36, 03 1985.
- [12] Amit Mittal, Md Sanam Suraj, and Rajiv Aggarwal. The analysis of periodic orbits generated by lagrangian solutions of the restricted three-body problem with non-spherical primaries. *New Astronomy*, 74:101287, 2020.

- [13] Pamela Woo and Arun K. Misra. Equilibrium points in the full three-body problem. *Acta Astronautica*, 99:158–165, 2014.
- [14] Shane Ross, Wang Koon, Martin Lo, and Jerrold Marsden. *Dynamical Systems, the Three-Body Problem, and Space Mission Design*. 04 2011.
- [15] Govind S Krishnaswami and Himalaya Senapati. An introduction to the classical three-body problem. *Resonance*, 24(1):87–114, January 2019.
- [16] Poonam Duggad, S. Dewangan, and A. Narayan. Effects of triaxiality of primaries on oblate infinitesimal in elliptical restricted three body problem. *New Astronomy*, 85:101538, 2021.
- [17] Francisco Salazar, Adham Alkhaja, Elena Fantino, and Elisa Maria Alessi. Science orbits in the saturnenceladus circular restricted three-body problem with oblate primaries. *Acta Astronautica*, 180:398–416, 2021.
- [18] Roberto Castelli. Regions of prevalence in the coupled restricted three-body problems approximation. *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, 17(2):804–816, 2012.
- [19] A.A. Alshaery and Elbaz I. Abouelmagd. Analysis of the spatial quantized three-body problem. *Results in Physics*, 17:103067, 2020.
- [20] Abdullah A. Ansari, Jagadish Singh, Ziyad Ali Alhussain, and Hafedh Belmabrouk. Effect of oblateness and viscous force in the robes circular restricted three-body problem. *New Astronomy*, 73:101280, 2019.
- [21] Md Sanam Suraj, Rajiv Aggarwal, Md Chand Asique, and Amit Mittal. On the modified circular restricted three-body problem with variable mass. *New Astronomy*, 84:101510, 2021.
- [22] Jagadish Singh and Aishetu Umar. On motion around the collinear libration points in the elliptic r3bp with a bigger triaxial primary. *New Astronomy*, 29:36–41, 2014.
- [23] Euaggelos E. Zotos, Elbaz I. Abouelmagd, and N. S. Abd El Motelp. Introducing a new version of the restricted three-body problem with a continuation fraction potential. *New Astronomy*, 81:101444, 2020.
- [24] SHI Shao-wu and MA Da-zhu. Research on the stability of the circular restricted three-body problem with radiation and oblateness. *Chinese Astronomy and Astrophysics*, 43(4):549–562, 2019.
- [25] Chang Liu and Lu Dong. Stabilization of lagrange points in circular restricted three-body problem: A port-hamiltonian approach. *Physics Letters A*, 383(16):1907–1914, 2019.
- [26] A. Chakraborty and A. Narayan. A new version of restricted four body problem. *New Astronomy*, 70:43–50, 2019.

- [27] Su-Shu Huang. Very Restricted Four-Body Problem. *The Astronomical Journal*, 65, 1960.
- [28] Ian Stewart. *Las matemáticas del cosmos*. Editorial Crítica, 2017.

Índice de figuras

2.1.	Configuración de cuerpos triaxiales sin simetría esférica [3]	9
3.1.	Esquema representativo de los puntos de Lagrange [5]	16
4.1.	Comparación bases de convergencia ($q_1 = 0.15 [-]$, $q_2 = 0.25 [-]$, $n = 0.25 [-]$)	24
4.2.	Comparación bases de convergencia ($q_1 = 0.15 [-]$, $q_2 = 0.25 [-]$, $n = 0.95 [-]$)	24
4.3.	Comparación bases de convergencia ($q_1 = q_2 = 1 [-]$, $n = 0.5 [-]$)	25
4.4.	Comparación bases de convergencia ($\sigma_{1_1} = 0.7 [-]$, $\sigma_{2_1} = 0.5 [-]$)	27
4.5.	Comparación bases de convergencia ($\sigma_{1_1} = 0.5 [-]$, $\sigma_{2_1} = 0.7 [-]$)	28
4.6.	Comparación bases de convergencia ($\epsilon = 0 [-]$)	29
4.7.	Comparación bases de convergencia ($\epsilon = 1 [-]$)	30
5.1.	Bases de convergencia Sol - Marte (formulación clásica) [dominio amplio]	32
5.2.	Bases de convergencia Sol - Marte (formulación clásica) [dominio reducido]	33
5.3.	Bases de convergencia Sol - Marte (formulación clásica) [zoom Marte]	33
5.4.	Bases de convergencia Sol - Marte (efectos triaxialidad) [dominio amplio]	35
5.5.	Bases de convergencia Sol - Marte (efectos triaxialidad) [dominio reducido]	35
5.6.	Bases de convergencia Sol - Marte (efectos triaxialidad) [zoom Marte]	36
5.7.	Bases de convergencia Sol - Marte (efectos de triaxialidad + satélites) [dominio amplio]	38
5.8.	Bases de convergencia Sol - Marte (efectos de triaxialidad + satélites) [dominio reducido]	39
5.9.	Bases de convergencia Sol - Marte (efectos de triaxialidad + satélites) [zoom Marte]	39
5.10.	Bases de convergencia Sol - Marte (efectos de triaxialidad + radiación) [dominio amplio]	41
5.11.	Bases de convergencia Sol - Marte (efectos de triaxialidad + radiación) [dominio reducido]	41
5.12.	Bases de convergencia Sol - Marte (efectos de triaxialidad + radiación) [zoom Marte]	42
5.13.	Iteraciones hasta convergencia (efectos de triaxialidad) [dominio amplio]	43

5.14. Iteraciones hasta convergencia (efectos de triaxialidad) [dominio reducido]	44
5.15. Iteraciones hasta convergencia (efectos de triaxialidad) [zoom Marte]	44

Índice de tablas

4.1. Coordenadas de los puntos de libración ($q_1 = 0.15 [-]$, $q_2 = 0.25 [-]$, $n = 0.25 [-]$)	25
4.3. Coordenadas de los puntos de libración ($q_1 = q_2 = 1 [-]$, $n = 0.5 [-]$)	26
4.2. Coordenadas de los puntos de libración ($q_1 = 0.15 [-]$, $q_2 = 0.25 [-]$, $n = 0.95 [-]$)	26
4.4. Coordenadas de los puntos de libración ($\sigma_{1_1} = 0.7 [-]$, $\sigma_{2_1} = 0.5 [-]$) .	27
4.5. Coordenadas de los puntos de libración ($\sigma_{1_1} = 0.5 [-]$, $\sigma_{2_1} = 0.7 [-]$) .	28
4.6. Coordenadas de los puntos de libración ($\epsilon = 0 [-]$)	29
4.7. Coordenadas de los puntos de libración ($\epsilon = 1 [-]$)	30
5.1. Datos del problema Sol - Marte (formulación clásica CR3BP) [7, 8] . .	32
5.2. Coordenadas de los puntos de libración Sol - Marte (formulación clásica	34
5.3. Semiejes de las masas primarias	34
5.4. Coordenadas de los puntos de libración Sol - Marte (efectos de triaxialidad)	36
5.5. Datos de los satélites de Marte: Fobos y Deimos	37
5.6. Coordenadas de los puntos de libración Sol - Marte (efectos de triaxialidad + satélites)	38
5.7. Coordenadas de los puntos de libración Sol - Marte (efectos de triaxialidad + radiación)	42

Anexo: Código

En este anexo se encuentra el código desarrollado a lo largo del proyecto. Los ficheros se dividirán en dos grupos. Por una parte, los ficheros principales incluirán el *main script*, programa maestro o fichero de ejecución, el fichero de configuración del dominio y del cálculo y el fichero de generación de datos. Por otra parte, los ficheros técnicos serán todas aquellas funciones a las que llamará el programa maestro para ir avanzando en su ejecución.

Ficheros principales

Main Script

```
1  %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
2  %
3  %   TRABAJO DE FIN DE MÁSTER
4  %
5  %   Daniel Villalibre Vilariño (daviivi@etsid.upv.es)
6  %   Curso 2020 - 2021
7  %
8  %-----
9  %
10 % Calcula los puntos de Lagrange (FICHERO PRINCIPAL)
11 %
12 %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
13
14
15 %%% Inicialización (configuración de rutas + generación de datos & dominio)
16 %=====
17 confLaunchBC;
18 fprintf('Configurando el caso...\n');
19 data = dataGeneration;
20
21 %%% Obtención de la función potencial
22 %=====
23 [Omega] = potentialFunction(data, satFlag);
24
25 %%% Definición de matrices auxiliares
26 %=====
27
28 % Definición del intervalo temporal
29 if timeFlag == 0
30     tauVec = 0;
31     satFlag = 1;
32 end
33
34 % Caracterización de la solución
35 finalStateX = cell(1,length(tauVec));
36 finalStateY = cell(1,length(tauVec));
37 convergence = cell(1,length(tauVec));
```

```

39 iterations = cell(1,length(tauVec));
41
42 fprintf('Comienzo del proceso iterativo:\n');
43
44 % Celda con la información de cada Omega
45 OmegaCell = cell(1,length(tauVec));
46
47 % Bucle NR
48 for ii = 1 : length(tauVec)
49     % Particularización de la función potencial al instante
50     OmegaTau = particularOmega(Omega,tauVec(ii));
51     OmegaTau.tau = tauVec(ii);
52     OmegaCell{ii} = OmegaTau;
53
54     % Matrices de comparación
55     distx = 0 * X;
56     disty = 0 * X;
57     dist = 0 * X;
58
59     % Caracterización de la solución
60     finalStateX{ii} = 0 * X;
61     finalStateY{ii} = 0 * X;
62     convergence{ii} = 0 * X;
63     iterations{ii} = 0 * X;
64     iter = 0;
65
66     % Iniciación del bucle
67     xn = X;
68     yn = Y;
69
70     fprintf('Instante tau = %g, %f/%f\n',tauVec(ii),ii,length(tauVec));
71     fprintf('Método Newton-Rhapson\n');
72     fprintf('-----\n');
73
74     while iter < iterNR
75
76         % Aplicación del método NR
77         [xn1,yn1] = bcNRStep(OmegaTau,xn,yn);
78
79         % Actualización del número de iteraciones
80         iter = iter + 1;
81         fprintf('Iteración %g, Convergidos %g de %g \n',iter,...
82             length(find(convergence{ii}==1)),totalPoints);
83
84         % Comprobación de condiciones de convergencia (distancia)
85         distx = xn1 - xn;
86         disty = yn1 - yn;
87         dist = sqrt(distx.^2 + disty.^2);
88
89         % Condición de convergencia
90         condConver = (dist < error) & (convergence{ii} == 0);
91
92         % Actualización de resultados
93         convergence{ii}(condConver) = 1;
94         iterations{ii}(condConver) = iter;
95         finalStateX{ii}(condConver) = xn1(condConver);
96         finalStateY{ii}(condConver) = yn1(condConver);
97
98         % Finalización del bucle
99         if all(convergence{ii}(:))
100             break
101         end
102
103         % Actualización de las variables
104         xn = xn1;
105         yn = yn1;
106     end

```

```

107
109
111 % Bucle Halley
112 if ~all(convergence{ii}(:))
113     fprintf('Método Halley\n')
114     fprintf('-----\n')
115     while iter < iterMax
116         % Aplicación del método de Halley
117         [xn1, yn1] = bcHalleyStep(OmegaTau, xn, yn);
118
119         % Actualización del número de iteraciones
120         iter = iter + 1;
121         fprintf('Iteración %g, Convergidos %g de %g \n', iter, ...
122             length(find(convergence{ii}==1)), totalPoints);
123
124         % Comprobación de condiciones de convergencia (distancia)
125         distx = xn1 - xn;
126         disty = yn1 - yn;
127         dist = sqrt(distx.^2 + disty.^2);
128
129         % Condición de convergencia
130         condConver = (dist < error) & (convergence{ii} == 0);
131
132         % Actualización de resultados
133         convergence{ii}(condConver) = 1;
134         iterations{ii}(condConver) = iter;
135         finalStateX{ii}(condConver) = xn1(condConver);
136         finalStateY{ii}(condConver) = yn1(condConver);
137
138         % Finalización del bucle
139         if all(convergence{ii}(:))
140             break
141         end
142
143         % Actualización de las variables
144         xn = xn1;
145         yn = yn1;
146     end
147 end
148
149 fprintf('Fin del proceso iterativo\n')
150
151
152 %% Puntos de Lagrange
153 %-----
154 % Estimación de puntos de Lagrange
155 finalPoints = cell(1, length(tauVec));
156 LPList = cell(1, length(tauVec));
157 for ii = 1 : length(tauVec)
158     [finalPoints{ii}, LPList{ii}] = lpEstimation(finalStateX{ii}, ...
159         finalStateY{ii}, convergence{ii}, error, errorTol);
160 end
161
162 % Ordenación de los puntos
163 libPoints = cell(1, length(tauVec));
164 for ii = 1 : length(tauVec)
165     [libPoints{ii}] = lpSort(LPList{ii}, error, errorLP);
166     libPoints{ii}.tau = tauVec(ii);
167 end
168
169 % Asignación de colores según el punto de terminación
170 bcMatrix = cell(1, length(tauVec));
171 for ii = 1 : length(tauVec)
172     [bcMatrix{ii}] = lpAssignment(finalPoints{ii}, libPoints{ii});
173 end
174
175

```



```

[X,Y,XNod,YNod] = domainDiscretization(xLim,yLim,xRes,yRes);
34
%% Errores
36 %=====
% Error para la estimación de convergencia NR
38 error = 1e-12;

% Error para la discriminación de puntos de Lagrange
40 errorLP = 1e-8;

% Error de tolerancia para los posibles puntos de Lagrange
42 errorTol = 1e-8;

%% Iteraciones máximas
46 %=====
iterMax = 1000; % Algoritmo completo
48 iterNR = 500; % Iteraciones máximas para emplear el método N-R

50 %% Flag para utilización de satélites
52 %=====
satFlag = 0;

54 %% Definición del tiempo de simulación
56 %=====
timeFlag = 0;
58 tauVec = [];

```

Código A.2: *confLaunchBC.m*

Generación de datos

```

1 classdef dataGeneration
2   %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
3   %
4   %   TRABAJO DE FIN DE MÁSTER
5   %
6   %   Daniel Villalibre Vilariño (davilvi@etsid.upv.es)
7   %   Curso 2020 – 2021
8   %
9   %-----
10  %
11  % Generación de datos
12  %
13  %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
14
15  properties (Constant = true)
16
17      % Masas de los cuerpos primarios
18      %=====
19      m1Dim = 1.98850e30; % Masa primaria 1 [kg]
20      m2Dim = 0.64171e24; % Masa primaria 2 [kg]
21      mTDim = dataGeneration.m1Dim + dataGeneration.m2Dim; % Masa total
22      % del sistema [kg]
23
24      % Parámetros de masas adimensionales
25      %=====
26      mu = dataGeneration.m2Dim / dataGeneration.mTDim; % Parámetro de masa
27      % adimensional [-]
28      m1 = 1 - dataGeneration.mu; % Masa primaria 1 adimensional [-]
29      m2 = dataGeneration.mu; % Masa primaria 2 adimensional [-]
30
31      % Distancia entre primarias
32      %=====
33      distPrim = 227.923e9; % Distancia [m]
34
35      % Parámetros geométricos

```

```

37 %-----
mR1 = 695700e3; % Radio medio primaria 1 [m]
39 ellip1 = 0.00005; % Elipticidad primaria 1 [-]
eR1 = nthroot(dataGeneration.mR1^3*(1-dataGeneration.ellip1),3);
41 % Radio ecuatorial primaria 1 [m] [2 semiejes coincidentes]
pR1 = (1-dataGeneration.ellip1) * dataGeneration.eR1;
43 % Radio polar del Sol [m]
45
mR2 = 3389.5e3; % Radio medio primaria 1 [m]
45 ellip2 = 0.00589; % Elipticidad primaria 2 [-]
eR2 = 3396.2e3; % Radio ecuatorial primaria 2 [m]
47 % [2 semiejes coincidentes]
pR2 = 3376.2e3; % Radio polar primaria 2 [m]
49
sigma11 = (dataGeneration.eR1^2 - dataGeneration.pR1^2) / ...
51 (5 * dataGeneration.distPrim^2); % Parámetro de achatamiento
% primaria 1 [-] [dirección x]
sigma21 = (dataGeneration.eR1^2 - dataGeneration.pR1^2) / ...
53 (5 * dataGeneration.distPrim^2); % Parámetro de achatamiento
55 % primaria 1 [-] [dirección y]
57
sigma12 = (dataGeneration.eR2^2 - dataGeneration.pR2^2) / ...
59 (5 * dataGeneration.distPrim^2); % Parámetro de achatamiento
% primaria 2 [-] [dirección x]
sigma22 = (dataGeneration.eR2^2 - dataGeneration.pR2^2) / ...
61 (5 * dataGeneration.distPrim^2); % Parámetro de achatamiento
63 % primaria 2 [-] [dirección y]
65
% Primer subíndice: función f, Segundo subíndice: primaria
f11 = 2*dataGeneration.sigma11 - dataGeneration.sigma21;
67 f21 = dataGeneration.sigma21 - dataGeneration.sigma11;
69
f12 = 2*dataGeneration.sigma12 - dataGeneration.sigma22;
f22 = dataGeneration.sigma22 - dataGeneration.sigma12;
71
% Constante de gravedad
%-----
73 G = 6.6740831e-11; % Constante de gravitación universal [m3/(kg*s2)]
75
% Parámetros de radiación
%-----
77 Fp1 = 0;
Fg1 = 1;
79 beta1 = dataGeneration.Fp1 / dataGeneration.Fg1;
81
Fp2 = 0;
Fg2 = 1;
83 beta2 = dataGeneration.Fp2 / dataGeneration.Fg2;
85
q1 = 1 - dataGeneration.beta1;
q2 = 1 - dataGeneration.beta2;
87
% Parámetro de modificación de potencial gravitatorio
%-----
89 epsilon = 0;
91
% Movimiento medio
%-----
93 nDim = sqrt(dataGeneration.G * dataGeneration.mTDim / ...
95 dataGeneration.distPrim^3); % Movimiento medio sin corregir [1/s]
corrTri = sqrt(1 + 3/2 * dataGeneration.f11 + ...
97 3/2 * dataGeneration.f12); % Corrección por triaxialidad
corrEps = sqrt(1 + 3 * dataGeneration.epsilon); % Corrección por
99 % efectos de relatividad
nCorr = dataGeneration.nDim * dataGeneration.corrTri * ...
101 dataGeneration.corrEps; % Movimiento medio corregido [1/s]
n = dataGeneration.nCorr / dataGeneration.nDim; % Adimensional [-]
103
% Satélites

```

```

105     %-----
106     mSat = [1.06590e16, 1.47620e15]; %Masa satelital [kg]
107     nSatDim = [3.63108e-5, 9.25925e-6]; %Movimiento medio satelital [1/s]
108     aSat = [9.376e6, 2.3458e7]; %Radio de la órbita del satélite [m]
109     cSat = [2; 2]; %Masa primaria - centro de órbita
110     phiSat = [pi/2, -pi/2]; %Desfase satelital respecto eje x [rad]
111
112     %Parámetros satelitales para la función potencial
113     alphaSat = dataGeneration.mSat / dataGeneration.mTDim;
114     nSat = dataGeneration.nSatDim / dataGeneration.nCorr;
115     arSat = dataGeneration.aSat / dataGeneration.distPrim;
116
117     end
118
119 end

```

Código A.3: *dataGeneration.m*

Ficheros técnicos

```

function [X,Y,XNod,YNod] = domainDiscretization(xLim,yLim,xRes,yRes)
2  %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
3  %
4  % TRABAJO DE FIN DE MÁSTER
5  %
6  % Daniel Villalibre Vilariño (daviivi@etsid.upv.es)
7  % Curso 2020 - 2021
8  %
9  %-----
10 %
11 % Discretización del dominio de cálculo
12 %
13 %-----
14 %
15 % Inputs:
16 %-----
17 % xLim: matriz con los límites del dominio (dirección x)
18 % yLim: matriz con los límites del dominio (dirección y)
19 % xRes: resolución en la dirección x
20 % yRes: resolución en la dirección y
21 %
22 % Outputs:
23 %-----
24 % X,Y: matrices de malla con los centroides de las celdas
25 % XNod,YNod: matrices de malla con los nodos límites de cada celda
26 %
27 %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
28 %%Cálculo del rango
29 %%-----
30 xRange = xLim(2) - xLim(1);
31 yRange = yLim(2) - yLim(1);
32
33 %% Estimación de los nodos en cada dirección
34 %%-----
35 xNod = xLim(1) : xRange / xRes : xLim(2);
36 yNod = yLim(1) : yRange / yRes : yLim(2);
37
38 %% Obtención de los centroides
39 %%-----
40 xCent = zeros(1, length(xNod) - 1);
41 yCent = zeros(1, length(yNod) - 1);
42
43 for ii = 1 : length(xCent)
44     xCent(ii) = (xNod(ii) + xNod(ii + 1)) / 2;
45 end

```

```

46 for jj = 1 : length(yCent)
48     yCent(jj) = (yNod(jj) + yNod(jj + 1)) / 2;
end
50
52 %% Generación de las matrices de malla
53 %%=====
54 [X,Y] = meshgrid(xCent,yCent);
55 [XNod, YNod] = meshgrid(xNod, yNod);
56
end

```

Código A.4: *domainDiscretization.m*

```

function [Omega] = potentialFunction(data, satFlag)
2  %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
3  %
4  % TRABAJO DE FIN DE MÁSTER
5  %
6  % Daniel Villalibre Vilarino (davilvi@etsid.upv.es)
7  % Curso 2020 - 2021
8  %
9  %=====
10 %
11 % Generación de la función potencial y sus derivadas
12 %
13 %=====
14 %
15 % Inputs:
16 %=====
17 % data: datos del problema (clase)
18 % satFlag: flag para inclusión de satélites
19 %
20 % Outputs:
21 %=====
22 % Omega: función potencial + derivadas + ec. Lagrange (estructura)
23 %
24 %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
25 %% Adquisición de datos
26 %%=====
27 mu = data.mu; % Parámetro de masas adimensional [-]
28 m1 = data.m1; % Masa primaria 1 adimensional [-]
29 m2 = data.m2; % Masa primaria 2 adimensional [-]
30
31 epsilon = data.epsilon; % Parámetro de modificación de la gravedad [-]
32
33 f11 = data.f11; % Función de triaxialidad 1 del cuerpo 1 [-]
34 f21 = data.f21; % Función de triaxialidad 2 del cuerpo 1 [-]
35 f12 = data.f12; % Función de triaxialidad 1 del cuerpo 2 [-]
36 f22 = data.f22; % Función de triaxialidad 2 del cuerpo 2 [-]
37
38 q1 = data.q1; % Factor de radiación del cuerpo 1 [-]
39 q2 = data.q2; % Factor de radiación del cuerpo 1 [-]
40
41 n = data.n; % Movimiento medio adimensional corregido [-]
42
43 %% Generación de la función potencial
44 %%=====
45 syms x y xDot yDot
46
47 % Posiciones de las masas primarias [-]
48 x1 = -mu;
49 x2 = 1 - mu;
50 y1 = 0;
51 y2 = 0;
52
53 % Distancias a las masas primarias [-]
54 r1 = sqrt((x - x1)^2 + (y - y1)^2);

```

```

56 r2 = sqrt((x - x2)^2 + (y - y2)^2);
57
58 % Componentes del potencial
59 % Sistema de referencia rotativo
60 omegal = n^2/2 * (x^2 + y^2);
61 % Masa primaria 1
62 omega2 = m1 / r1 * (q1 + f11/(2*r1^2) + (3*y^2*f21)/(2*r1^4));
63 % Masa primaria 2
64 omega3 = m2 / r2 * (q2 + f12/(2*r2^2) + (3*y^2*f22)/(2*r2^4) + epsilon/r2^2);
65 % Potencial asociado a satélites
66 omegaSat = 0;
67 syms tau
68 if (satFlag == 1)
69 % Adquisición de datos de los satélites
70 alphaSat = data.alphaSat; % Parámetro de masa [-]
71 cSat = data.cSat; % Centro de órbita [-]
72 nSat = data.nSat; % Movimiento medio adimensionalizado [-]
73 arSat = data.arSat; % Radio de órbita [-]
74 phiSat = data.phiSat; % Desfase [rad]
75
76 numSat = length(cSat); % Número de satélites
77
78 % Posición de los satélites [-]
79 xSat = sym('x',[1,numSat]);
80 ySat = sym('y',[1,numSat]);
81
82 for ii = 1 : numSat
83 if (cSat(ii) == 1)
84 xSat(ii) = x1 + arSat(ii) * ...
85 cos((nSat(ii) - n) * tau + phiSat(ii));
86 ySat(ii) = y1 + arSat(ii) * ...
87 sin((nSat(ii) - n) * tau + phiSat(ii));
88 elseif (cSat(ii) == 2)
89 xSat(ii) = x2 + arSat(ii) * ...
90 cos((nSat(ii) - n) * tau + phiSat(ii));
91 ySat(ii) = y2 + arSat(ii) * ...
92 sin((nSat(ii) - n) * tau + phiSat(ii));
93 end
94 end
95
96 % Distancia a los satélites [-]
97 rSat = sqrt((x - xSat).^2 + (y - ySat).^2);
98
99 % Función potencial
100 for ii = 1 : numSat
101 omegaSat = omegaSat + alphaSat(ii) / rSat(ii);
102 end
103 else
104 xSat = [];
105 ySat = [];
106 omegaSat = 0 * tau;
107 end
108
109 % Función simbólica
110 fOmega = omegal + omega2 + omega3 + omegaSat;
111
112 %% Derivadas de la función Lagrangiana
113 %=====
114 % Primeras derivadas
115 Omegax = diff(fOmega,x);
116 Omegay = diff(fOmega,y);
117
118 % Segundas derivadas
119 Omegaxx = diff(Omegax,x);
120 Omegayy = diff(Omegay,y);
121 Omegaxy = diff(Omegax,y);
122 Omegayx = diff(Omegay,x);
123
124 % Terceras derivadas (Halley)

```

```

124 Omegaxxx = diff(Omegaxx, x);
    Omegaxxy = diff(Omegaxx, y);
126 Omegaxyx = diff(Omegaxy, x);
    Omegaxy = diff(Omegaxy, y);
128
    Omegayxx = diff(Omegayx, x);
130 Omegayxy = diff(Omegayx, y);
    Omegayyx = diff(Omegayy, x);
132 Omegayyy = diff(Omegayy, y);

134 %% Definición de las ecuaciones Lagrangianas
136 %=====
    syms xDotDot yDotDot
138 eq1 = xDotDot - 2 * n * yDot - Omegax;
    eq2 = yDotDot + 2 * n * xDot - Omegay;
140

142 %% Corrección de Newton–Rhapson
144 %=====
    NRx = - (Omegax * Omegayy - Omegay * Omegaxy) / (Omegayy * Omegaxx - Omegaxy *
        Omegayx);
    NRy = - (-Omegax * Omegayx + Omegay * Omegaxx) / (Omegayy * Omegaxx - Omegaxy *
        Omegayx);
146
    cNRx = matlabFunction(NRx);
148 cNRy = matlabFunction(NRy);

150 %% Corrección de Halley
152 %=====
    ax = NRx;
154 ay = NRy;

156 bpx1 = ax * Omegaxxx + ay * Omegaxyx;
    bpx2 = ax * Omegaxxy + ay * Omegaxy;
158
    bpy1 = ax * Omegayxx + ay * Omegayyx;
160 bpy2 = ax * Omegayxy + ay * Omegayyy;

162 b1 = bpx1 + bpy1;
    b2 = bpx2 + bpy2;
164
    bx = (b1 * Omegayy - b2 * Omegaxy) / (Omegayy * Omegaxx - Omegaxy * Omegayx);
166 by = (-b1 * Omegayx + b2 * Omegaxx) / (Omegayy * Omegaxx - Omegaxy * Omegayx);

168 cHx = matlabFunction(ax^2 / (ax + 1/2 * bx));
    cHy = matlabFunction(ay^2 / (ay + 1/2 * by));
170

172 %% Almacenamiento en estructura
174 %=====
    Omega.fun = fOmega;
    Omega.x = Omegax;
176 Omega.y = Omegay;
    Omega.xx = Omegaxx;
178 Omega.yy = Omegayy;
    Omega.xy = Omegaxy;
180 Omega.yx = Omegayx;
    Omega.xxx = Omegaxxx;
182 Omega.xxy = Omegaxxy;
    Omega.xyx = Omegaxyx;
184 Omega.xyy = Omegaxy;
    Omega.yxx = Omegayxx;
186 Omega.yxy = Omegayxy;
    Omega.yyx = Omegayyx;
188 Omega.yyy = Omegayyy;
    Omega.eq1 = eq1;
190 Omega.eq2 = eq2;

```

```

192 Omega.cNRx = cNRx;
193 Omega.cNRy = cNRy;
194 Omega.cHx = cHx;
195 Omega.cHy = cHy;
196 Omega.xSat = xSat;
197 Omega.ySat = ySat;
198 end

```

Código A.5: *potentialFunction.m*

```

1 function [Omega] = particularOmega(Omega,satFlag,tauEval)
2 %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
3 %
4 % TRABAJO DE FIN DE MÁSTER
5 %
6 % Daniel Villalibre Vilariño (davidvi@etsid.upv.es)
7 % Curso 2020 - 2021
8 %
9 %-----
10 %
11 % Particularización de la función potencial a un instante de evaluación
12 %
13 %-----
14 %
15 % Inputs:
16 %=====
17 % Omega: estructura de función potencial
18 % satFlag: flag para inclusión de satélites
19 % tauEval: instante de evaluación de la función potencial
20 %
21 % Outputs:
22 %=====
23 % Omega: estructura de función potencial particularizada
24 %
25 %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
26 %
27 % Nota:
28 % La función potencial dependerá del tiempo únicamente en caso de que se
29 % considere la presencia de satélites. Es por ello que la particularización
30 % solamente será necesaria en dicho caso.
31 %
32 %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
33
34 if satFlag == 1
35     % Asignación de variable temporal simbólica
36     syms tau
37
38     % Sustitución de la variable temporal simbólica
39     Omega.fun = subs(Omega.fun ,tau,tauEval);
40     Omega.x = subs(Omega.x ,tau,tauEval);
41     Omega.y = subs(Omega.y ,tau,tauEval);
42     Omega.xx = subs(Omega.xx ,tau,tauEval);
43     Omega.yy = subs(Omega.yy ,tau,tauEval);
44     Omega.xy = subs(Omega.xy ,tau,tauEval);
45     Omega.yx = subs(Omega.yx ,tau,tauEval);
46     Omega.xxx = subs(Omega.xxx ,tau,tauEval);
47     Omega.xxy = subs(Omega.xxy ,tau,tauEval);
48     Omega.yyx = subs(Omega.yyx ,tau,tauEval);
49     Omega.xyy = subs(Omega.xyy ,tau,tauEval);
50     Omega.yxx = subs(Omega.yxx ,tau,tauEval);
51     Omega.yxy = subs(Omega.yxy ,tau,tauEval);
52     Omega.yyx = subs(Omega.yyx ,tau,tauEval);
53     Omega.yyy = subs(Omega.yyy ,tau,tauEval);
54     Omega.xDot = subs(Omega.xDot,tau,tauEval);
55     Omega.yDot = subs(Omega.yDot,tau,tauEval);
56     Omega.eq1 = subs(Omega.eq1 ,tau,tauEval);
57     Omega.eq2 = subs(Omega.eq2 ,tau,tauEval);
58     Omega.cNRx = @(x,y) Omega.cNRx(tauEval,x,y);

```

```

59   Omega.cNRy = @(x,y) Omega.cNRy(tauEval,x,y);
      Omega.cHx = @(x,y) Omega.cHx(tauEval,x,y);
61   Omega.cHy = @(x,y) Omega.cHy(tauEval,x,y);
      Omega.xSat = double(subs(Omega.xSat,tau,tauEval));
63   Omega.ySat = double(subs(Omega.ySat,tau,tauEval));
end

```

Código A.6: *particularOmega.m*

```

1  function [xn1,yn1] = bcNRStep(Omega,xn,yn)
   %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
3  %
   %   TRABAJO DE FIN DE MÁSTER
5  %
   %   Daniel Villalibre Vilariño (davidvi@etsid.upv.es)
7  %   Curso 2020 – 2021
   %
9  %-----
   %
11 % Aplicación del método de Newton–Raphson para obtención de BC
   %
13 %-----
   %
15 % Inputs:
   %=====
17 %   Omega: función potencial (estructura)
   %   xn: matriz con las coordenadas x en el paso n
19 %   yn: matriz con las coordenadas y en el paso n
   %
21 % Outputs:
   %=====
23 %   xn1: matriz con las coordenadas x en el paso n+1
   %   yn1: matriz con las coordenadas y en el paso n+1
25 %
   %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
27 cNRxn = Omega.cNRx(xn,yn);
29 cNRyn = Omega.cNRy(xn,yn);

31 xn1 = xn + cNRxn;
   yn1 = yn + cNRyn;
33 end

```

Código A.7: *bcNRStep.m*

```

1  function [xn1,yn1] = bcHalleyStep(Omega,xn,yn)
   %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
2  %
   %   TRABAJO DE FIN DE MÁSTER
4  %
   %   Daniel Villalibre Vilariño (davidvi@etsid.upv.es)
6  %   Curso 2020 – 2021
   %
8  %-----
   %
10 % Aplicación del método de Halley para obtención de BC
   %
12 %-----
   %
14 % Inputs:
   %=====
16 %   Omega: función potencial (estructura)
18 %   xn: matriz con las coordenadas x en el paso n
   %   yn: matriz con las coordenadas y en el paso n
20 %
22 % Outputs:
   %=====

```

```

24 % xn1: matriz con las coordenadas x en el paso n+1
24 % yn1: matriz con las coordenadas y en el paso n+1
24 %
26 %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
28
30 cHxn = Omega.cHx(xn,yn);
30 cHyn = Omega.cHy(xn,yn);
32
32 xn1 = xn + cHxn;
32 yn1 = yn + cHyn;
34 end

```

Código A.8: *bcHalleyStep.m*

```

function [finalPoints , LPList] = lpEstimation(finalStateX , finalStateY , ...
2 convergence , error , errorTol)
4 %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
4 %
4 % TRABAJO DE FIN DE MÁSTER
6 %
6 % Daniel Villalibre Vilariño (davidilvi@etsid.upv.es)
8 % Curso 2020 - 2021
8 %
10 %-----
10 %
12 % Discriminación de puntos de Lagrange
12 %
14 %-----
14 %
16 % Inputs:
16 %=====
18 % finalStateX: matriz con puntos finales de x
18 % finalStateY: matriz con puntos finales de y
20 % convergence: matriz de convergencia
20 % error: error del método NR
22 % errorTol: error de tolerancia para la consideración de LP
22 %
24 % Outputs:
24 %=====
26 % finalPoints: matriz con los puntos finales x+yi (ajustados a LP)
26 % LPList: puntos de Lagrange
28 %
28 %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
30 % Puntos de convergencia (plano complejo)
30 %=====
32 finalPoints = finalStateX + 1i * finalStateY;
34
34 % Posibles puntos de Lagrange
34 %=====
36 % Coordenadas convergidas
36 xCoord = uniquetol(finalStateX(convergence==1),errorTol);
38 yCoord = uniquetol(finalStateY(convergence==1),errorTol);
40
40 % Número de coordenadas diferentes
40 nxCoord = length(xCoord);
42 nyCoord = length(yCoord);
44
44 % Posibles puntos de Lagrange
44 npossibleLP = nxCoord * nyCoord;
46 possibleLP = zeros(npossibleLP,1);
48
48 for ii = 1 : nxCoord
48 for jj = 1 : nyCoord
50 possibleLP(nyCoord*(ii-1)+jj) = xCoord(ii) + 1i * yCoord(jj);
52 end
52 end
54
54 % Discriminación de puntos de Lagrange

```

```

56 %=====
56 % Matriz de distancias
distLP = 0 * finalPoints;
58
58 % Discriminación del punto de convergencia (asignación de LP)
60 for ii = 1 : npossibleLP
    distLP = abs(finalPoints - possibleLP(ii));
62     finalPoints(distLP < errorTol & convergence==1) = possibleLP(ii);
end
64
64 %% Lista de puntos de Lagrange
66 %=====
66 LPList = unique(finalPoints(convergence == 1));
68
end

```

Código A.9: *lpEstimation.m*

```

function [libPoints] = lpSort(LPList, error, errorLP)
2  %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
3  %
4  % TRABAJO DE FIN DE MÁSTER
5  %
6  % Daniel Villalibre Vilariño (davidilvi@etsid.upv.es)
7  % Curso 2020 - 2021
8  %
9  %=====
10 %
10 % Ordenación de los puntos de Lagrange
12 %
13 %=====
14 %
14 % Inputs:
16 %=====
16 % LPList: lista de puntos de Lagrange
18 % error: error de convergencia del método iterativo
19 % errorLP: error para la discriminación de LP
20 %
20 % Outputs:
22 %=====
22 % libPoints: puntos de Lagrange (estructura)
24 %
25 %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
26 %
26 %% Unificación de los LP
28 %=====
28 % Generación de la lista de LP (podría incluir valores repetidos)
30 repLP = real(LPList);
    impLP = imag(LPList);
32 [reVal,~, reIndC] = uniquetol(repLP, errorLP);
    [imVal,~, imIndC] = uniquetol(impLP, errorLP);
34 ind = [reIndC, imIndC];
    uniqueLPComb = unique(ind, 'rows');
36
36 % Lista de LP corregida (sin valores múltiples)
38 LPListCorr = reVal(uniqueLPComb(:,1)) + 1i * imVal(uniqueLPComb(:,2));
40
40 % Número de LP del problema
nLP = length(LPListCorr);
42 libPoints.ID = (1 : 1 : nLP)';
libPoints.Coord = zeros(nLP,1);
44
44 %% Clasificación de los puntos colineales
46 %=====
46 % Se encuentran en el eje real (y=0)
48 colinear = LPListCorr(abs(imag(LPListCorr)) < error);
colinear = sort(colinear, 'ComparisonMethod', 'real');
50 if length(colinear) == 3 % Caso general
    libPoints.Coord(3) = colinear(1);

```

```

52     libPoints.Coord(1) = colinear(2);
53     libPoints.Coord(2) = colinear(3);
54 elseif length(colinear) == 2 % Caso particular (Sol - Marte con radiación)
55     libPoints.Coord(2) = colinear(1);
56     libPoints.Coord(1) = colinear(2);
57 end
58
60 %% Clasificación de los puntos triangulares
61 %% =====
62 % Puntos restantes: y!=0
63 if nLP > length(colinear)
64     triangSup = length(colinear)+1 : 2 : nLP;
65     triangInf = length(colinear)+2 : 2 : nLP;
66
67     % Puntos triangulares superiores (y>0)
68     LPtriangSup = LPListCorr(imag(LPListCorr) > error);
69     LPtriangSup = sort(-1i*LPtriangSup, 'ComparisonMethod', 'real')/(-1i);
70     libPoints.Coord(triangSup) = LPtriangSup;
71
72     % Puntos triangulares inferiores (y<0)
73     LPtriangInf = LPListCorr(imag(LPListCorr) < -error);
74     LPtriangInf = sort(1i*LPtriangInf, 'ComparisonMethod', 'real')/(1i);
75     libPoints.Coord(triangInf) = LPtriangInf;
76 end
77
78 end

```

Código A.10: *lpSort.m*

```

function [bcMatrix] = lpAssignment(finalPoints, libPoints)
2  %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
3  %
4  % TRABAJO DE FIN DE MÁSTER
5  %
6  % Daniel Villalibre Vilariño (davidvi@etsid.upv.es)
7  % Curso 2020 - 2021
8  %
9  % _____
10 %
11 % Asignación de puntos de Lagrange - Bases de convergencia
12 %
13 % _____
14 %
15 % Inputs:
16 % =====
17 % finalPoints: puntos de terminación (matriz)
18 % libPoints: puntos de Lagrange (estructura)
19 %
20 % Outputs:
21 % =====
22 % bcMatrix: basins of convergence (matriz)
23 %
24 %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
25 %% Generación de la matriz de bases
26 %% =====
27 bcMatrix = 0 * real(finalPoints);
28 for ii = 1 : length(libPoints.ID)
29     bcMatrix(finalPoints == libPoints.Coord(ii)) = libPoints.ID(ii);
30 end
31
32 end

```

Código A.11: *lpAssignment.m*

```

1 function bcPlotResults(data, libPoints, XNod, YNod, results, colorMap, ...
2     name, colorbarFlag, satFlag, xSat, ySat, timeFlag, tauEval)

```

```

3  %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
4  %
5  %   TRABAJO DE FIN DE MÁSTER
6  %
7  %   Daniel Villalibre Vilariño (daviivi@etsid.upv.es)
8  %   Curso 2020 – 2021
9  %
10 %-----
11 %
12 % Representación de resultados de Basins of Convergence
13 %
14 %-----
15 %
16 % Inputs:
17 %=====
18 %   data: datos del caso (clase)
19 %   libPoints: puntos de Lagrange (estructura)
20 %   XNod: coordenadas x de los nodos de los elementos del dominio (matriz)
21 %   YNod: coordenadas y de los nodos de los elementos del dominio (matriz)
22 %   results: matriz de resultados a representar
23 %   colorMap: mapa de color (string)
24 %   name: título del gráfico (string)
25 %   colorbarFlag: flag de representación de colores discreta
26 %   satFlag: flag de representación de satélites
27 %   xSat, ySat: coordenadas de los satélites
28 %   timeFlag: flag de inclusión de tiempo
29 %   tauEval: instante de evaluación
30 %
31 %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
32 %% Caracterización de las masas primarias
33 %%=====
34 primx = [-data.mu, 1-data.mu];
35 primy = [0 0];
36 primz = [100 100];
37
38 %% Caracterización de los puntos de Lagrange
39 %%=====
40 LPx = real(libPoints.Coord)';
41 LPy = imag(libPoints.Coord)';
42 LPz = 100 * ones(1,length(LPx));
43
44 %% Caracterización de los satélites
45 %%=====
46 zSat = 100 * ones(1,length(xSat));
47
48 %% Acondicionamiento de los resultados
49 %%=====
50 resMatPlot = 0 * XNod;
51 resMatPlot(1:end-1, 1:end-1) = results;
52
53 %% Generación de la figura
54 %%=====
55 figure; hold on;
56 ax1 = gca;
57 set(ax1, 'FontSize', 12);
58 ax1.XLim = [min(XNod(:)) max(XNod(:))];
59 ax1.YLim = [min(YNod(:)) max(YNod(:))];
60
61 % Representación de las masas primarias (cuadrados)
62 mLabel = ['Masas' newline 'Primarias'];
63 mPlot = plot3(primx, primy, primz, 'o', 'MarkerEdgeColor', 'black', ...
64             'MarkerFaceColor', 'black', 'MarkerSize', 5, 'DisplayName', mLabel);
65 % Representación de los puntos de Lagrange (círculos)
66 lpLabel = ['Puntos' newline 'Lagrange'];
67 lpPlot = plot3(LPx, LPy, LPz, 'x', 'MarkerEdgeColor', 'black', ...
68             'MarkerFaceColor', 'black', 'MarkerSize', 5, 'DisplayName', lpLabel);
69 for ii = 1 : length(LPx)
70     LID = libPoints.ID(ii);
71     lpLabel = ['$L_' num2str(LID) '$'];

```

```

73     text(LPx(ii)+0.005,LPy(ii)+0.005,LPz(ii),lpLabel,'Color','k',...
        'Interpreter','latex','FontSize',12);
end
75 % Representación de los satélites (triángulos)
if satFlag == 1
77     satLabel = ['Sat\'' elites'];
    satPlot = plot3(xSat, ySat, zSat, '^','MarkerEdgeColor','black',...
79         'MarkerFaceColor','black','MarkerSize',5,'DisplayName',satLabel);
    for ii = 1 : length(xSat)
81         satID = ii;
            satIDLabel = ['$S_' num2str(satID) '$'];
83         text(xSat(ii)+0.05,ySat(ii)+0.05,zSat(ii),satIDLabel,'Color','k',...
            'Interpreter','latex','FontSize',12);
85     end
end
87
% Leyenda
89 if satFlag == 1
    legend([mPlot,lpPlot,satPlot],'Interpreter','latex','FontSize',14,...
91         'Location','northeast');
else
93     legend([mPlot,lpPlot],'Interpreter','latex','FontSize',14,...
        'Location','northeast');
95 end
97 % Representación de los resultados
map = surf(XNod,YNod,resMatPlot,'FaceColor','flat','EdgeColor','none');
99 map.Annotation.LegendInformation.IconDisplayStyle = 'off'; %Se omite la
    % leyenda
101
% Vista (planta)
103 view(2);
105 % Asignación del mapa de color
colormap(colorMap);
107
% Etiquetas de los ejes
109 xlabel('x [-]','FontSize',14,'Interpreter','latex');
ylabel('y [-]','FontSize',14,'Interpreter','latex');
111
% Título
113 if timeFlag == 1
    tauLine = ['$\tau = $' num2str(tauEval) '[-]'];
115     name = {name;
            tauLine};
117 end
    title(name,'FontSize',16,'Interpreter','latex');
119
% Ticks
121 set(gca,'TickLabelInterpreter','latex')
123
% Barra de color
if (colorbarFlag == 0)
125     colorbar;
end
127
%% Copia de ejes para identificación de LP
%=====
131 if (colorbarFlag == 1)
    ax2 = copyobj(ax1,gcf);
133     %Se limpian los ejes nuevos
    cla(ax2);
135     ax2.Color = 'none';
    ax2.Box = 'off';
137     ax2.XTick = [];
    ax2.YTick = [];
139     ax2.XLim = ax1.XLim;
    ax2.YLim = ax1.YLim;

```

```

141 ax2.XLabel.String = '';
142 ax2.YLabel.String = '';
143 ax2.Title.String = '';

145 %Se configura la nueva leyenda
legend(ax2, '-DynamicLegend', 'Location', 'south', ...
147       'Orientation', 'horizontal', 'Interpreter', 'latex', 'FontSize', 14)

149 %Se representan algunos de los puntos
for ii = 1 : length(libPoints.ID)
151     LID = libPoints.ID(ii);
152     indL = find(resMatPlot == LID);
153     x0LID = XNod(indL(1));
154     x1LID = XNod(indL(1)+1);
155     y0LID = YNod(indL(1));
156     y1LID = YNod(indL(1)+1);
157     legendLabel = ['$L_{', num2str(LID), '$'}'];
158     fill(ax2, [x0LID x0LID x1LID x1LID], [y0LID y1LID y1LID y0LID], ...
159           colorMap(ii+1,:), 'DisplayName', legendLabel, 'LineStyle', 'none');

161     end
end

163 %% Ajuste de posición (tamaño de imagen)
164 %% =====
165 set(gcf, 'Position', [361, 227.4, 697.5999999999999, 520])
166 hold off;

169 end

```

Código A.12: *bcPlotResults.m*